

可贖回債券之再投資風險估計

Estimation of Reinvestment Risk in Callable Bonds

杜昌燁*, 張士傑

國立政治大學風險管理與保險學系

摘要

本研究將可贖回零息債券所有贖回情境下的最大預期損失與其再投資風險做連結，以歷史資料校正建立基於指數 Lévy 過程的國際板債券隱含年利率隨機模型，利用 Fang and Oosterlee (2008, 2009) 提出的 COS 法計算不同起始隱含年利率值下國際板債券於屆滿評估期限時的再投資風險與可贖回時點臨界利率。實證計算結果顯示，國際板債券之十年期再投資風險落在 113 至 189 基點間。

關鍵字：可贖回債券，再投資風險，最佳停止問題，指數 Lévy 過程

Keywords: callable bond, reinvestment risk, optimal stopping problem, exponential Lévy process

1. 研究動機與緒論

為尋求較高獲利並兼顧資產穩定性，台灣保險業在 2014 — 2018 年間將近五分之一的資產投注於財團法人中華民國櫃檯買賣中心交易之美金計價長年期可贖回債券；此類債券統稱為國際板債券。台灣金融監督管理委員會進一步限制債券發行人的信用評等等級與最短可贖回期限，以求降低整體金融市場風險。自 2020 年二月起美聯儲一連串降息舉措使聯邦資金利率 (federal funds rate) 趨近於零，市場利率水準大幅降低促使國際板債券被大量贖回。據統計 2020 年一至九月總贖回金額高達 433.86 億美金，是 2019 年同期的 8.5 倍，給台灣保險業帶來現金流調度與再投資安排上的難題，同時影響獲利；國際板債券的再投資風險估計是值得特別關注的問題。

然而探討債券再投資風險的學術文獻並不多見。理論性文章如 Sommer (1997); Dahl (2007, 2009); Stefanovits and Wüthrich (2014) 等等的主旨在建立能揭示再投資風險現象的不同經濟市場模型，考慮的市場組成元素均為發行期限殊異的零息債券，模型的自恰性由零息債券形成的各種遠期利率與收益曲線組合皆需滿足的無套利條件限制式提供。在這些理論模型下，再投資風險的主要來源是以短發行期限之零息債券組合來複製 / 取代長發行期限零息債券現金流所導致的誤差，部份風險來自於主觀加諸收益曲線的隨機變數機制，而討論重點落在如此形成之不完備市場下的利率相關選擇權的評價與避險。

少數實證性文章之一的 Teplova and Rodina (2021) 探討支付票息債券的再投資風險溢價現象，首先論述再投資風險溢價與支付票息政府公債的市場價格與複製現金流的差值 d 的密切關係，

*通訊作者。

電子郵件信箱: changye.tu@gmail.com (杜昌燁), bchang@nccu.edu.tw (張士傑)

緊接著假設 d 與數種風險因子如利率變動、通膨變異數、財政赤字數與票息間形成迴歸模型，藉由研究英國與俄羅斯政府公債與實際市場數據以推定這些風險因子的趨勢。另一實證性文章 Tewari, Byrd, and Ramanlal (2015) 針對 1980 — 2012 年間近四千五百筆附票息可贖回公司債發行與理論價格差，探討其與包含再投資風險溢價等因子的影響關係，並得出市場利率水平較高時，公司債發行價格中隱含再投資風險溢價較高的結論。

本文採取與前述學術文獻不同的研究途徑，藉由直接計算所有贖回情境下的最大預期損失來數量化估計可贖回零息債券的再投資風險。不同的金融商品有不同的再投資風險來源，而商品特性直接影響改變估計方式 — 這正是關於債券再投資風險之學術文獻數目不多的主要因素 — 我們所討論的可贖回零息債券的規格比照典型國際板債券：發行期限三十年、五年最短可贖回期限、最短可贖回期限後每年可贖回、贖回時發行方全數贖回並支付隱含年利率（implied rate of return, IRR）複利金額，並全數反映至再投資風險估計的過程中。由於可贖回債券再投資風險損失發生在贖回時市場利率水準低於發行時，估計過程可只針對低利率情形。因為存在最短可贖回期限的法令規定，在一定觀察期限內的可贖回事件數有上限 — 這些都有助於簡化估計過程的複雜度。

本文其餘內容安排如下。在提出與所有贖回情境下最大預期損失相連結的再投資風險表示式 (1)、(3)、引進基於指數 Lévy 過程的國際板債券隱含年利率隨機模型並配合歷史資料選取及校正後，我們討論再投資風險表示式的計算方式與數值結果，最終為結論與展望。

2. 可贖回債券之再投資風險

令期初時點 $\tau_0 = 0$ 價值為 1 的可贖回零息債券之發行期限為 T ，宣告隱含年利率為 r_{τ_0} 。若此債券於發行期限內未被贖回，則此債券至期滿時可得到 $(1 + r_{\tau_0})^T$ 。若此債券於時點 $\tau_1 < \tau_2 = T$ 時被贖回，按約定贖回金額為 $(1 + r_{\tau_0})^{\tau_1 - \tau_0}$ 。假設此贖回金額在時點 τ_1 全數用於再投資隱含年利率 r_{τ_1} ，發行期限為 T 的債券且在 $[\tau_1, T]$ 內不再贖回 — 亦即在發行期限 T 內贖回 1 次，贖回金額全數購買該贖回時點宣告隱含年利率之 T 年期債券 — 則期末時點 T 時的收益差為

$$(1 + r_{\tau_0})^T - (1 + r_{\tau_0})^{\tau_1 - \tau_0} (1 + r_{\tau_1})^{T - \tau_1}$$

將此收益差除以 $(1 + r_{\tau_0})^T$ 可得比值

$$\frac{(1 + r_{\tau_0})^T - (1 + r_{\tau_0})^{\tau_1 - \tau_0} (1 + r_{\tau_1})^{T - \tau_1}}{(1 + r_{\tau_0})^T} = 1 - \left(\frac{1 + r_{\tau_1}}{1 + r_{\tau_0}} \right)^{T - \tau_1}$$

我們定義此債券在時點 t 、隱含年利率 $r_t = r$ 下的再投資風險 $\psi_1(r, t)$ 為

$$\psi_1(r, t) = \sup_{\{\tau_1\} \subseteq \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left\{ \left(1 - \left(\frac{1 + r_{\tau_1}}{1 + r_{\tau_0}} \right)^{T - \tau_1} \right)^+ \middle| r_t = r \right\} \quad (1)$$

其中 $(\cdot)^+$ 為 $\max(\cdot, 0)$ 的簡記、 \mathcal{T}_t 代表在時點 t 所有可贖回時點組合的集合；再投資風險即為所有可贖回時點組合下的最大損失期望值。 $\psi_1(r, t)$ 明顯滿足邊界條件

$$\psi_1(r, T) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

推廣以上過程至發行期限 T 內贖回 $n > 1$ 次之一般情形：若此債券於 n 時點 $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \tau_{n+1} = T$ 時分別被贖回，且在時點 τ_k 之贖回金額全數用於再投資隱含年利率 r_{τ_k} ，發行

期限 T 的債券且在 $[\tau_k, \tau_{k+1})$ 內不再贖回，則期末時點 T 時的收益差為

$$(1 + r_{\tau_0})^T - (1 + r_{\tau_0})^{\tau_1 - \tau_0} (1 + r_{\tau_1})^{\tau_2 - \tau_1} \dots (1 + r_{\tau_n})^{\tau_{n+1} - \tau_n} \\ = (1 + r_{\tau_0})^T - \prod_{k=0}^n (1 + r_{\tau_k})^{\tau_{k+1} - \tau_k}$$

將此收益差除以 $(1 + r_{\tau_0})^T$ ，仿照 $n = 1$ 情形，定義再投資風險 $\psi_n(r, t)$ 為

$$\psi_n(r, t) = \sup_{\{(\tau_1, \dots, \tau_n)\} \subseteq \mathcal{T}_t} \mathbb{E} \left\{ \left(1 - \frac{\prod_{k=0}^n (1 + r_{\tau_k})^{\tau_{k+1} - \tau_k}}{(1 + r_{\tau_0})^T} \right)^+ \middle| r_t = r \right\} \quad (3)$$

$\psi_n(r, t)$ 明顯滿足邊界條件

$$\psi_n(r, T) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^+ \quad (4)$$

以上的討論建立在假設

1. 市場隨時發行新 T 年期可贖回零息債券；
2. 舊債券被贖回時，投資者馬上購買該時點發行的新 T 年期可贖回零息債券，無時間差。

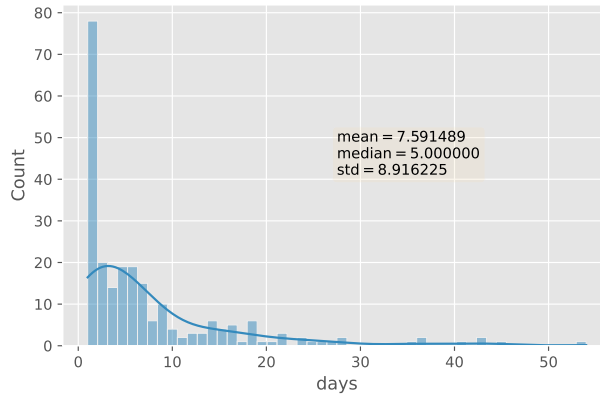


圖 1: 國際板債券發行日期間隔分佈圖。

我們從櫃買中心網頁選取發行期限大於或等於 30 年、不可贖回期限等於 5 年且其後每年可贖回，截至 2021-02-05 依發行日排序的國際板債券發行資料；若當日有數筆債券發行，隱含年利率則取平均值，經此處理後歷史資料總數從 301 變為 236。圖 1 顯示國際板債券發行日期間隔分佈，超過 90% 發行時間間隔在 20 天以下，80% 發行時間間隔在 10 天以下，而中位數為 5 天。考量實務上被贖回後（大額）資金自發行方轉回所需作業時間，假設 1 在國際板債券市場下成立。

給定適當隱含年利率隨機模型之下，再投資風險 (1), (3) 的計算是最佳停止問題 (optimal stopping problem, c.f. Chow, Robbins, and Siegmund (1971); Shiryaev (1978); Peskir and Shiryaev (2006)) 的理論應用；本文旨在計算 $n = 1$ 的再投資風險 ψ_1 。

3. 隱含年利率隨機模型。指數 Lévy 過程

我們選擇建立國際板債券隱含年利率 r_t 的連續時間隨機模型。由於 r_t 恆為正值，我們研究可為正負值的對數過程 $l_t \equiv \log \frac{r_t}{r_0}$, $r_t = r_0 e^{l_t}$ 。觀察 r_t 歷史資料及其對數一階差分 $z_t \equiv l_t - l_{t-1}$ 圖 2, z_t 值以 0 為中心震盪，因此我們使用擴張 Dickey-Fuller (augmented Dickey-Fuller, ADF) 檢定 z_t 的穩態性 (stationarity, Beran (2017, 2.1)), 結果如表 1: 序列 z_t 的 ADF 檢定結果 p-value 幾乎為 0, 意味著 z_t 具有一定程度的穩態性。我們另外使用 Rémillard (2011, 2012) 所提出的無母數穩態檢定, 結果如表 2: 幾乎為 1 的 p-value 意味著 z_t 的強穩態性。

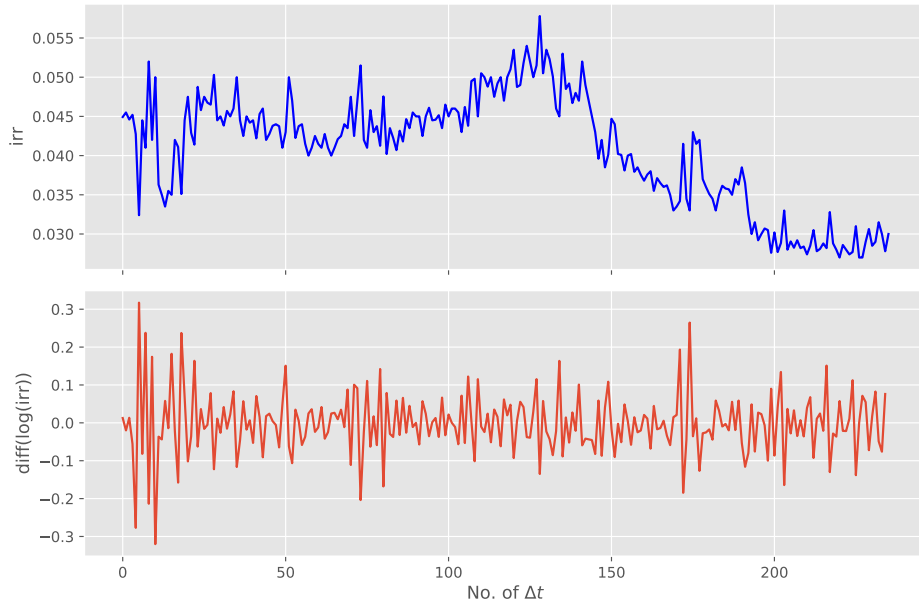


圖 2: 國際板債券隱含年利率 (上) 與其對數一階差分 (下) 圖。

表 1: 國際板債券隱含年利率 (original) 與其對數一階差分 (diff-log) ADF 檢定結果。

name	ADF stat	p-value	1%	5%	10%
original	-1.18759	0.67891	-3.45885	-2.87408	-2.57345
diff-log	-13.38046	0.00000			

表 2: 國際板債券隱含年利率 (original) 與其對數一階差分 (diff-log) 無母數穩態檢定結果。

name	KS stat	p-value
original	3.19018	0.0000
diff-log	0.42138	0.9660

具備獨立與等長時距強穩態性增量的連續時間隨機過程稱為 Lévy 過程。若隨機過程 \mathcal{S}_t 滿足

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_0 e^{\mathcal{L}_t} \quad (5)$$

其中指數部份 \mathcal{L}_t 為另一 Lévy 過程，則 \mathcal{S}_t 稱為指數 Lévy 過程 (exponential Lévy process)。由定義，其對數一階差分子過程同樣具備獨立與等長時距強穩態性，因此指數 Lévy 過程可作為實際隱含年利率連續時間隨機模型的近似。Lévy 過程理論詳見 Bertoin (1996); Sato (1999); Applebaum (2009); Protter (2005); Jacod and Shiryaev (2003)，財務應用可參照 Prause (1999); Riable (2000); Schoutens (2003); Cont and Tankov (2004); Oosterlee and Grzelak (2019); McNeil et al. (2005) 等等。以下我們列出本文使用的三種指數 Lévy 過程與其指數部份之機率密度函數 p 及特徵函數 φ 表示式。首先定義第二類修正 Bessel 函數 K_η 為

$$K_\eta(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)} v^{\eta-1} dv \quad (6)$$

Black-Scholes (BS) 模型 (Black and Scholes (1973))

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}\right\} \quad (7)$$

$$\varphi(u) = \exp\left\{\left(iu\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)\Delta t\right\} \quad (8)$$

指數 Normal Inverse Gaussian (eNIG) 模型 (Barndorff-Nielsen (1998))

$$p(x) = \frac{\alpha \delta e^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)}}{\pi\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}} K_1(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \exp\left\{\left(iu\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}+\delta(\sqrt{\alpha^2-(\beta+1)^2}-\sqrt{\alpha^2-\beta^2})\right)\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{\sigma^2 u^2}{2}+\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+iu)^2})\right)\Delta t\right\} \end{aligned} \quad (10)$$

指數 Variance Gamma (eVG) 模型 (Madan and Seneta (1990); Madan et al. (1998); Seneta (2004))

$$p(x) = \frac{2e^{\frac{\theta(x-c)}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\nu^{\frac{1}{\nu}}\Gamma(\frac{1}{\nu})}\left(\frac{|x-c|}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\nu}+\theta^2}}\right)^{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}}\left(\frac{|x-c|\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\nu}+\theta^2}}{\sigma^2}\right) \quad (11)$$

$$\varphi(u) = \exp\left\{\left(iu\left(r-q+\frac{1}{\nu}\log\left(1-\theta\nu-\frac{\sigma^2\nu}{2}\right)\right)-\frac{1}{\nu}\log\left(1-i\theta\nu u+\frac{\sigma^2 u^2\nu}{2}\right)\right)\Delta t\right\} \quad (12)$$

4. 隱含年利率隨機模型選取與參數估計

圖 3 顯示 2006-01-02 至 2021-02-05 間共 2,850 筆 FRED 30 年期公債固定期限利率 (DGS30) 與國際板債券隱含年利率對應五個交易日前 DGS30 的變動 — 反映發行方參考 DGS30 資料與決定最後宣告隱含年利率的時間差 — 國際板債券隱含年利率與 FRED 30 年期公債固定期限利率漲跌趨勢大致符合，利率差異在於發行機構不同時點的信用評等、財務需求等等個別因素。

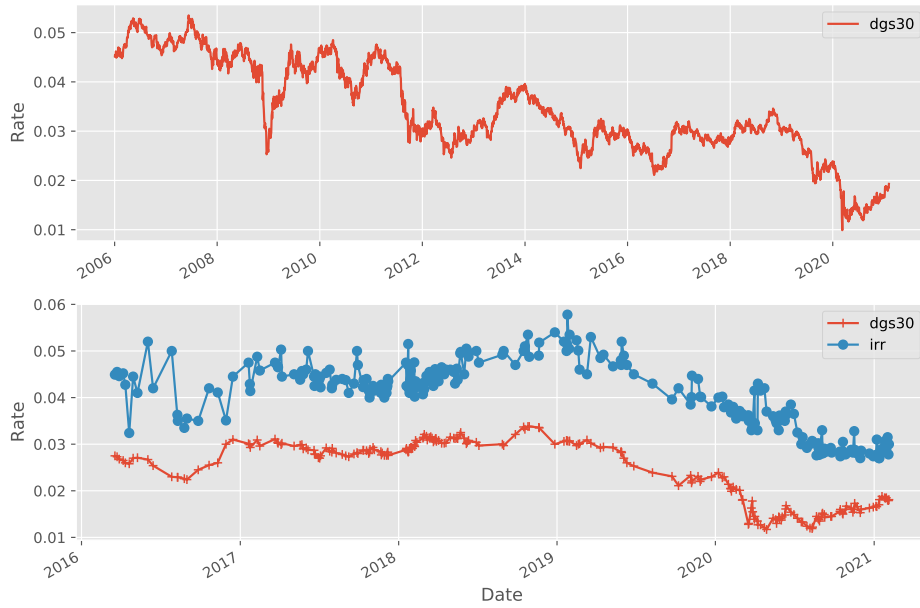


圖 3: 2006-01-02 至 2021-02-05 間 DGS30 變動圖 (上) 及國際板債券隱含年利率 (IRR) 對應 DGS30 變動圖 (下)。

從 BS、eNIG、eVG 三種模型的機率密度函數 (7)、(9)、(11) 表示式出發，我們使用最大概似估計 (maximum likelihood estimation, MLE) 法推估最能配適國際板債券隱含年利率歷史資料的三種模型參數與相應赤池訊息量準則 (Akaike information criterion, AIC) 值，並與 R 函數庫 `ghyp` (Weibel et al. (2020)) 的最大期望 (expectation-maximization, EM) 算法 (McNeil et al. (2005, 3.2.4 節)) 所得相比對，結果如表 3、4、5。AIC 是一種結合訊息熵 (information entropy) 與複雜度概念評估統計模型配適度的標準，定義為

$$AIC = 2k - 2\log \hat{L} \quad (13)$$

其中 k 為統計模型參數數量， $\log \hat{L}$ 為 MLE 方法中所得到的概似函數最大值；越小的 AIC 值代表越佳的配適度。圖 4、5 分別展示在國際板債券隱含年利率歷史資料下 BS 與 eNIG 模型、BS 與 eVG 模型配適形成的直方圖、對數密度圖與 Q-Q 圖。直方圖顯示 BS 模型的峰度甚小於歷史資料，而 Q-Q 圖顯示 BS 模型與歷史資料的分位數偏差較大。圖 6 展示國際板債券隱含年利率歷史資料核密度估計 (kernel density estimation, KDE) 與此三組最適模型參數形成之機率密度函數比較；核密度函數 \tilde{p}_h 定義為 (Silverman (1986))

$$\tilde{p}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{l=1}^n \Phi\left(\frac{x_l - x}{h}\right) \quad (14)$$

6

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 為歷史資料點、 Φ 為給定的核函數、 $h > 0$ 為帶寬 (bandwidth)：在此我們使用核函數為標準常態分佈機率密度函數。比較表 3、4、5 的 AIC 值與各機率密度函數圖示，eNIG 模型最能反映國際板債券隱含年利率歷史資料的統計性質。

表 3: BS 模型參數及 AIC 值。

μ	σ	AIC
-0.0017182944	0.0817165566	-506.2132252818

表 4: eNIG 模型參數及 AIC 值。

α	β	δ	μ	AIC
10.9847433906	1.1796534040	0.0728927612	-0.0095917782	-531.6119556180

表 5: eVG 模型參數及 AIC 值。

c	σ	θ	ν	AIC
-0.0170081531	0.0798883948	0.0152898594	0.7268056153	-529.7424053179

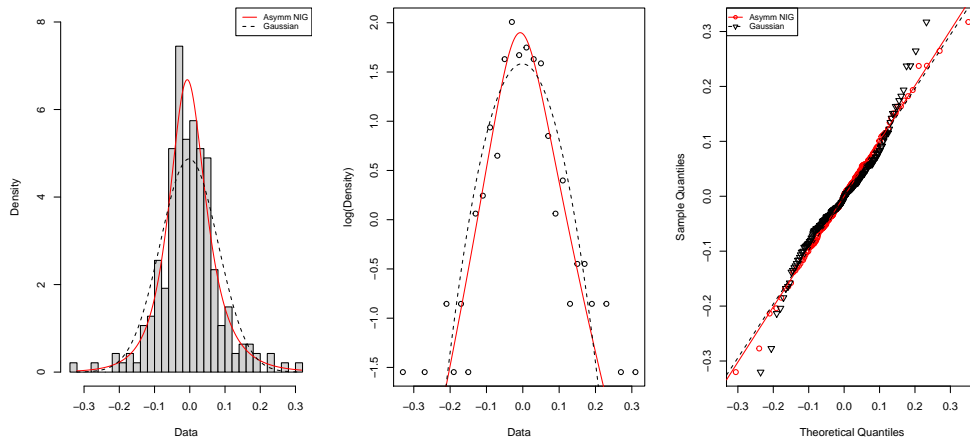


圖 4: 國際板債券隱含年利率歷史資料之 BS 與 eNIG 模型配適比較：直方圖（左）、對數密度圖（中）、Q-Q 圖（右）。

5. 再投資風險計算：COS 法

再投資風險 $\psi_1(1)$ 的計算等同於一個（非標準給付函數的）Bermudan 選擇權評價。令 Bermudan 選擇權起始時間為 $t_0 = 0$ ，到期日為 T ， $t_1, t_2, \dots, t_M = T$ 為一系列可執行選擇

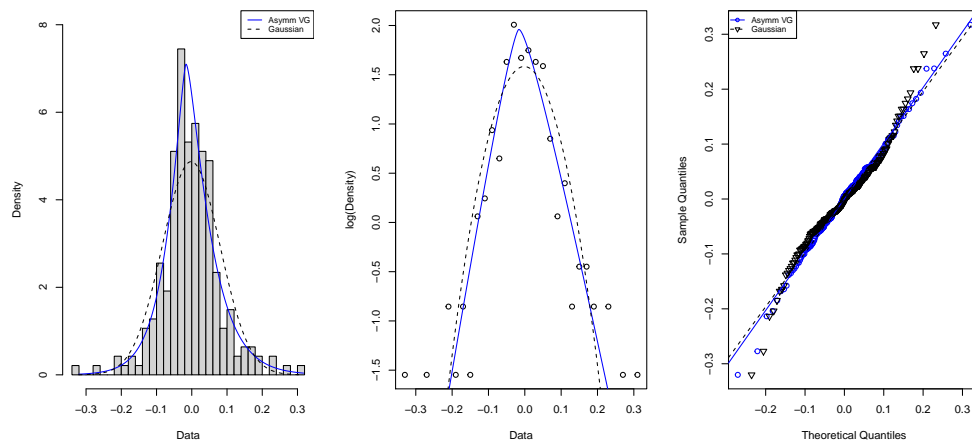


圖 5: 國際板債券隱含年利率歷史資料之 BS 與 eVG 模型配適比較: 直方圖 (左)、對數密度圖 (中)、Q-Q 圖 (右)。

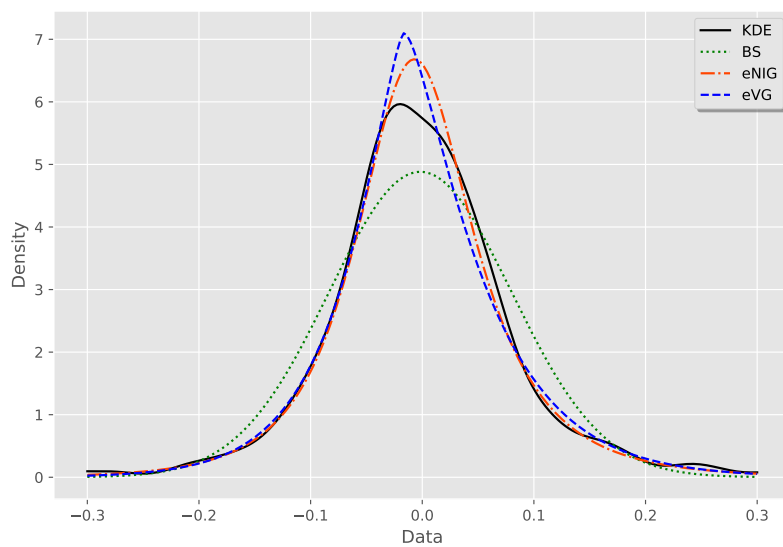


圖 6: 國際板債券隱含年利率歷史資料核密度估計 (KDE) 與 BS、eNIG、eVG 三種指數 Lévy 模型配適圖。

權的時間且 $t_0 < t_1 < \cdots < t_M$ ，則選擇權價值函數 $v(x, t_0)$ 可由以下方程組反向遞迴求得 (Kohler (2010))：

$$\begin{cases} c(x, t_{m-1}) = \int_{\mathbb{R}} v(y, t_m) p(y|x) dy \\ v(x, t_{m-1}) = \max \{g(x, t_{m-1}), c(x, t_{m-1})\} \end{cases} \quad m = M, M-1, \dots, 1. \quad (15)$$

其中 $p(y|x)$ 為從狀態 y 變動到狀態 x 的機率函數、 $g(x, t)$ 為執行選擇權時的給付函數，且 x, y 與 r 有以下的函數變換關係：

$$x = \ln \frac{r_{t_{m-1}}}{r_{t_0}}, \quad y = \ln \frac{r_{t_m}}{r_{t_0}} \quad (16)$$

亦即所有討論針對隱含年利率對數進行。因起始時點 t_0 不執行選擇權，

$$v(x, t_0) = c(x, t_0) \quad (17)$$

在再投資風險計算中，給付函數為

$$g(x, t) = \left(1 - \left(\frac{1+x}{1+r_{t_0}}\right)^{T-t}\right)^+ \quad (18)$$

此給付函數與時間相關。在隱含年利率對數隨機模型可寫出特徵函數 (characteristic function, 定義如 (29) 式) — 例如隱含年利率隨機模型為指數 Lévy 過程 — 的情形下，最有效的計算方式之一為 Fang and Oosterlee (2008, 2009) 的 COS 法，此法充分利用 Fourier-cosine 展開原理。對定義域為 $[0, \pi]$ 的 (適當) 函數 f ，其 Fourier-cosine 展開式為

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' A_k \cos k\theta \quad (19)$$

其中 Fourier 係數 A_k 為

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta \quad \forall k \geq 1; \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta. \quad (20)$$

求和符號右上側的 $'$ 代表 $k=0$ 的 Fourier 係數為原先的 $\frac{1}{2}$ 。若函數 f 定義域為 $[a, b]$ ，變數變換

$$\theta = \pi \frac{x-a}{b-a} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{b-a}{\pi} \theta + a \quad (21)$$

之下的 Fourier-cosine 展開式變為

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' A_k \cos \frac{k\pi(x-a)}{b-a} \quad (22)$$

而 Fourier 係數 A_k 變為

$$A_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{k\pi(x-a)}{b-a} dx \quad \forall k \geq 1; \quad A_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (23)$$

COS 法首先將 (15) 中的無窮 (全實數軸) 積分以有限積分上下界 a, b 逼近:

$$c(x, t_{m-1}) = \int_{\mathbb{R}} v(y, t_m) p(y|x) dy \approx \int_a^b v(y, t_m) p(y|x) dy \quad (24)$$

再對機率函數 $p(y|x)$ 做 Fourier-cosine 展開:

$$p(y|x) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' A_k(x) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} \quad (25)$$

其中

$$A_k(x) = \frac{2}{b-a} \int_a^b p(y|x) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \quad \forall k \geq 1; \quad A_0(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(y|x) dy. \quad (26)$$

由 (24), (25),

$$\begin{aligned} c(x, t_{m-1}) &= \int_a^b v(y, t_m) p(y|x) dy \\ &= \int_a^b v(y, t_m) \sum_{k=0}^{\infty}{}' A_k(x) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}{}' A_k(x) \int_a^b v(y, t_m) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \\ &= \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^{\infty}{}' A_k(x) V_k(t_m) \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$V_k(t_m) = \frac{2}{b-a} \int_a^b v(y, t_m) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \quad (28)$$

定義特徵函數

$$\varphi(\omega, x) = \int_{\mathbb{R}} p(y|x) \exp(i\omega y) dy \approx \int_a^b p(y|x) \exp(i\omega y) dy, \quad i = \sqrt{-1} \quad (29)$$

由 (26),

$$\begin{aligned} A_k(x) &= \frac{2}{b-a} \int_a^b p(y|x) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \\ &= \frac{2}{b-a} \Re \left\{ \int_a^b p(y|x) \exp \frac{ik\pi(y-a)}{b-a} dy \right\} \\ &= \frac{2}{b-a} \Re \left\{ \exp \frac{-ia k\pi}{b-a} \int_a^b p(y|x) \exp \left(i \frac{k\pi}{b-a} y \right) dy \right\} \\ &= \frac{2}{b-a} \Re \left\{ \exp \frac{-ia k\pi}{b-a} \varphi \left(\frac{k\pi}{b-a}, x \right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\Re\{\cdot\}$ 為取實數部；(27) 可寫作

$$c(x, t_{m-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} \Re \left\{ \exp \frac{-i a k \pi}{b-a} \varphi \left(\frac{k \pi}{b-a}, x \right) \right\} V_k(t_m) \quad (31)$$

如以上遞迴求解以及 (17)，可得選擇權價值函數 $v(x, t_0)$ 公式為

$$v(x, t_0) = c(x, t_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \Re \left\{ \exp \frac{-i a k \pi}{b-a} \varphi \left(\frac{k \pi}{b-a}, x \right) \right\} V_k(t_1) \quad (32)$$

顯然 COS 法的重點在於計算由 (28) 式定義的 $V_k(t_m)$ ；由 (15)，(28) 可寫作

$$\begin{aligned} V_k(t_m) &= \frac{2}{b-a} \int_a^b v(y, t_m) \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy \\ &= \frac{2}{b-a} \int_a^b \max \{g(y, t_m), c(y, t_m)\} \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy \end{aligned}$$

對每個 t_m ，如果我們可以找到 x_m^* 使得

$$\begin{aligned} g(y, t_m) &\geq c(y, t_m), \quad a \leq y \leq x_m^* \\ g(y, t_m) &\leq c(y, t_m), \quad x_m^* \leq y \leq b \end{aligned} \quad (33)$$

則

$$\begin{aligned} V_k(t_m) &= \frac{2}{b-a} \int_a^b \max \{g(y, t_m), c(y, t_m)\} \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy \\ &= \frac{2}{b-a} \int_a^{x_m^*} g(y, t_m) \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy + \frac{2}{b-a} \int_{x_m^*}^b c(y, t_m) \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy \\ &\equiv G_k(a, x_m^*, t_m) + C_k(x_m^*, b, t_m) \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} G_k(x_1, x_2, t_m) &= \frac{2}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} g(y, t_m) \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy \\ C_k(x_1, x_2, t_m) &= \frac{2}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} c(y, t_m) \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy \end{aligned}$$

由積分公式

$$\int e^{ly} \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy = \frac{e^{ly} (b-a)^2 \left(\frac{k \pi}{b-a} \sin \frac{k \pi (y-a)}{b-a} + l \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} \right)}{k^2 \pi^2 + l^2 (b-a)^2} \quad (35)$$

對正整數 n ，且 $x \leq 0$ ，配合二項式展開，我們可得以下定積分

$$\begin{aligned} &\int_a^x \left\{ 1 - \left(\frac{1+z e^y}{1+z} \right)^n \right\} \cos \frac{k \pi (y-a)}{b-a} dy \\ &= \frac{(b-a)^2}{(1+z)^n} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} z^l \left\{ \frac{l e^{la} - e^{lx} \left(\frac{k \pi}{b-a} \sin \frac{k \pi (x-a)}{b-a} + l \cos \frac{k \pi (x-a)}{b-a} \right)}{k^2 \pi^2 + l^2 (b-a)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{(b-a) \sin \frac{k \pi (x-a)}{b-a}}{k \pi} \end{aligned} \quad (36)$$

上式當 $k = 0$ 時

$$\int_a^x \left\{ 1 - \left(\frac{1+z e^y}{1+z} \right)^n \right\} dy = \frac{1}{(1+z)^n} \left\{ a - x + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} z^l \frac{e^{la} - e^{lx}}{l} \right\} + x - a \quad (37)$$

由給付函數 (18) 與定積分公式 (36)、(37), (34) 中 $G_k(a, x_m^*, t_m)$ 可寫作

$$\begin{aligned} G_k(a, x_m^*, t_m) &= \frac{2(b-a)}{(1+r_{t_0})^n} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} r_{t_0}^l \left\{ \frac{l e^{la} - e^{l x_m^*} \left(\frac{k\pi}{b-a} \sin \frac{k\pi(x_m^*-a)}{b-a} + l \cos \frac{k\pi(x_m^*-a)}{b-a} \right)}{k^2 \pi^2 + l^2 (b-a)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{2 \sin \frac{k\pi(x_m^*-a)}{b-a}}{k \pi}, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (38)$$

$$G_0(a, x_m^*, t_m) = \frac{2}{(b-a)(1+r_{t_0})^n} \left\{ a - x_m^* + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} r_{t_0}^l \frac{e^{la} - e^{l x_m^*}}{l} \right\} + \frac{2(x_m^* - a)}{b-a} \quad (39)$$

將 $c(x, t_m)$ 表示式 (31) 代入 (34), $C_k(x_m^*, b, t_m)$ 可寫作

$$\begin{aligned} C_k(x_m^*, b, t_m) &= \frac{2}{b-a} \int_{x_m^*}^b c(y, t_m) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \\ &= \frac{2}{b-a} \int_{x_m^*}^b \sum_{l=0}^{N-1} \Re \left\{ \exp \frac{-i a l \pi}{b-a} \varphi \left(\frac{l\pi}{b-a}, y \right) \right\} V_l(t_{m+1}) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \\ &= \frac{2}{b-a} \sum_{l=0}^{N-1} \Re \left\{ \exp \frac{-i a l \pi}{b-a} \int_{x_m^*}^b \varphi \left(\frac{l\pi}{b-a}, y \right) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \right\} V_l(t_{m+1}) \end{aligned}$$

若隱含年利率隨機模型為指數 Lévy 過程, 且其指數部份過程之特徵函數 φ 滿足

$$\varphi(\omega, x) = \varphi(\omega, 0) e^{i\omega x} \quad (40)$$

上式可化簡為

$$\begin{aligned} C_k(x_m^*, b, t_m) &= \frac{2}{b-a} \sum_{l=0}^{N-1} \Re \left\{ \exp \frac{-i a l \pi}{b-a} \int_{x_m^*}^b \varphi \left(\frac{l\pi}{b-a}, y \right) \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \right\} V_l(t_{m+1}) \\ &= \frac{2}{b-a} \sum_{l=0}^{N-1} \Re \left\{ \varphi \left(\frac{l\pi}{b-a}, 0 \right) V_l(t_{m+1}) \int_{x_m^*}^b \exp \frac{i l \pi (y-a)}{b-a} \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy \right\} \\ &= \frac{2}{b-a} \sum_{l=0}^{N-1} \Re \left\{ \varphi \left(\frac{l\pi}{b-a}, 0 \right) V_l(t_{m+1}) M_{k,l}(x_m^*, b) \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

其中

$$M_{k,l}(x_m^*, b) = \int_{x_m^*}^b \exp \frac{il\pi(y-a)}{b-a} \cos \frac{k\pi(y-a)}{b-a} dy$$

Fang and Oosterlee (2009) 提供了運用 FFT (Fast Fourier Transform) 加速計算 $M_{k,l}(x_m^*, b)$ 的演算法，附錄 A 程式中函式 $C(x, ti, v)$ 為其實作。

6. 數值計算結果

本文計算使用的參數如表 6 所示。因應多數國際板債券規格為發行期限 30 年、不可贖回期限 5 年、其後每年可贖回的情形，我們將再投資風險評估期限 T' 設定為 10 年，亦即計算國際板債券購買後 10 年的再投資風險 ψ_1 （此 10 年內最多一次贖回）。

表 6: 本文計算使用參數。

參數	數值	說明
T	30	債券發行期限
T'	10	再投資風險評估期限
t_1	5	不可贖回期限
r, q	0, 0	折現率、配息率
L	10	積分邊界
N	2^{12}	Fourier-cosine 展開項數

表 7、8、9 分別列出在 BS、eNIG、eVG 三種模型下使用附錄 A 程式計算給定不同起始隱含年利率 r_0 時再投資風險 ψ_1 與可贖回時點臨界利率 r_5^* 、 r_6^* 、 r_7^* 、 r_8^* 、 r_9^* 的數值結果：在可贖回時點，隱含年利率低於臨界利率則應執行贖回。可贖回時點臨界利率由 (33) 決定。由給付函數 (18) 及邊界條件 (2)，在評估期限 T' 時點再投資風險為 0，因此在 T' 之前一個可贖回時點的臨界利率（在此為 r_9^* ）即為起始隱含年利率 r_0 。依照目前實際市場情況，再投資風險 ψ_1 大致在 113 — 189 bps 間。

7. 結論與展望

本研究將可贖回零息債券所有贖回情境下的最大預期損失與其再投資風險做連結，以歷史資料校正建立基於指數 Lévy 過程的國際板債券隱含年利率隨機模型，利用 Fang and Oosterlee (2008, 2009) 提出的 COS 法計算不同起始隱含年利率值下國際板債券於屆滿評估期限時的再投資風險與可贖回時點臨界利率。

在此我們只考慮再投資風險評估期限中最多贖回一次的情境 — 亦即 ψ_1 的計算 — 同時因應國際板債券發行規格特性，限縮評估期限 T' 長度為 10 年。若要完整評估 30 年期國際板債券存續期間的再投資風險，高階項 ψ_n ， $n > 1$ 的計算勢難避免：這屬於最佳多重停止問題 (optimal multiple stopping problem) 理論研究的範疇，而此理論最典型的應用範例之一為能源市場中常見的 swing 選擇權 (e.g. Carmona and Touzi (2008); Zhang and Oosterlee (2013))。再者，本文發展的隱含年利率隨機模型只限制在單變數指數 Lévy 過程，也不考慮包括發行機構信評等級與違約可能性；以上種種將留待後續研究。

表 7: 再投資風險與可贖回時點臨界利率計算: BS 模型。

r_0	r_5^*	r_6^*	r_7^*	r_8^*	r_9^*	ψ_1 (bps)
3.00	2.807550	2.842668	2.883431	2.933076	3.00	116.329572
3.05	2.854353	2.890051	2.931489	2.981960	3.05	118.190168
3.10	2.901158	2.937435	2.979548	3.030845	3.10	120.048302
3.15	2.947962	2.984818	3.027607	3.079729	3.15	121.903978
3.20	2.994767	3.032202	3.075665	3.128613	3.20	123.757201
3.25	3.041573	3.079586	3.123724	3.177497	3.25	125.607976
3.30	3.088378	3.126970	3.171783	3.226381	3.30	127.456307
3.35	3.135184	3.174354	3.219842	3.275265	3.35	129.302199
3.40	3.181991	3.221739	3.267901	3.324149	3.40	131.145657
3.45	3.228797	3.269123	3.315959	3.373033	3.45	132.986686
3.50	3.275605	3.316508	3.364018	3.421917	3.50	134.825290
3.55	3.322412	3.363893	3.412077	3.470801	3.55	136.661474
3.60	3.369220	3.411278	3.460136	3.519684	3.60	138.495242
3.65	3.416028	3.458663	3.508196	3.568568	3.65	140.326599
3.70	3.462837	3.506049	3.556255	3.617452	3.70	142.155550
3.75	3.509645	3.553434	3.604314	3.666336	3.75	143.982100
3.80	3.556455	3.600820	3.652373	3.715220	3.80	145.806252
3.85	3.603264	3.648206	3.700432	3.764104	3.85	147.628013
3.90	3.650074	3.695592	3.748492	3.812988	3.90	149.447385
3.95	3.696885	3.742978	3.796551	3.861871	3.95	151.264374
4.00	3.743695	3.790365	3.844610	3.910755	4.00	153.078984
4.05	3.790506	3.837751	3.892670	3.959639	4.05	154.891221
4.10	3.837318	3.885138	3.940729	4.008523	4.10	156.701087
4.15	3.884129	3.932525	3.988789	4.057407	4.15	158.508589
4.20	3.930941	3.979912	4.036848	4.106290	4.20	160.313730
4.25	3.977754	4.027300	4.084908	4.155174	4.25	162.116515
4.30	4.024567	4.074687	4.132968	4.204058	4.30	163.916948
4.35	4.071380	4.122075	4.181027	4.252941	4.35	165.715035
4.40	4.118193	4.169463	4.229087	4.301825	4.40	167.510778
4.45	4.165007	4.216850	4.277147	4.350709	4.45	169.304184
4.50	4.211821	4.264239	4.325207	4.399592	4.50	171.095255
4.55	4.258636	4.311627	4.373267	4.448476	4.55	172.883998
4.60	4.305451	4.359015	4.421327	4.497360	4.60	174.670416
4.65	4.352266	4.406404	4.469387	4.546243	4.65	176.454513
4.70	4.399081	4.453793	4.517447	4.595127	4.70	178.236294
4.75	4.445897	4.501182	4.565507	4.644010	4.75	180.015763
4.80	4.492713	4.548571	4.613567	4.692894	4.80	181.792926
4.85	4.539530	4.595960	4.661627	4.741777	4.85	183.567785
4.90	4.586347	4.643349	4.709687	4.790661	4.90	185.340346
4.95	4.633164	4.690739	4.757747	4.839544	4.95	187.110612
5.00	4.679982	4.738129	4.805807	4.888428	5.00	188.878589

表 8: 再投資風險與可贖回時點臨界利率計算: eNIG 模型。

r_0	r_5^*	r_6^*	r_7^*	r_8^*	r_9^*	ψ_1 (bps)
3.00	2.816151	2.850503	2.890025	2.937509	3.00	114.344281
3.05	2.863098	2.898016	2.938194	2.986467	3.05	116.173366
3.10	2.910045	2.945530	2.986362	3.035425	3.10	118.000038
3.15	2.956993	2.993044	3.034531	3.084383	3.15	119.824302
3.20	3.003940	3.040558	3.082699	3.133341	3.20	121.646162
3.25	3.050889	3.088072	3.130868	3.182299	3.25	123.465623
3.30	3.097837	3.135586	3.179037	3.231257	3.30	125.282689
3.35	3.144786	3.183101	3.227205	3.280215	3.35	127.097366
3.40	3.191735	3.230616	3.275374	3.329173	3.40	128.909657
3.45	3.238685	3.278130	3.323543	3.378130	3.45	130.719567
3.50	3.285634	3.325645	3.371712	3.427088	3.50	132.527101
3.55	3.332585	3.373161	3.419881	3.476046	3.55	134.332264
3.60	3.379535	3.420676	3.468049	3.525004	3.60	136.135060
3.65	3.426486	3.468192	3.516218	3.573962	3.65	137.935493
3.70	3.473437	3.515707	3.564387	3.622920	3.70	139.733568
3.75	3.520389	3.563223	3.612556	3.671878	3.75	141.529290
3.80	3.567341	3.610739	3.660725	3.720835	3.80	143.322662
3.85	3.614293	3.658255	3.708895	3.769793	3.85	145.113691
3.90	3.661246	3.705772	3.757064	3.818751	3.90	146.902379
3.95	3.708199	3.753288	3.805233	3.867709	3.95	148.688732
4.00	3.755152	3.800805	3.853402	3.916666	4.00	150.472753
4.05	3.802105	3.848322	3.901571	3.965624	4.05	152.254449
4.10	3.849059	3.895839	3.949741	4.014582	4.10	154.033822
4.15	3.896014	3.943356	3.997910	4.063540	4.15	155.810877
4.20	3.942968	3.990873	4.046080	4.112497	4.20	157.585619
4.25	3.989923	4.038390	4.094249	4.161455	4.25	159.358052
4.30	4.036878	4.085908	4.142419	4.210413	4.30	161.128180
4.35	4.083834	4.133426	4.190588	4.259370	4.35	162.896008
4.40	4.130790	4.180944	4.238758	4.308328	4.40	164.661541
4.45	4.177746	4.228462	4.286927	4.357285	4.45	166.424782
4.50	4.224703	4.275980	4.335097	4.406243	4.50	168.185736
4.55	4.271660	4.323499	4.383267	4.455201	4.55	169.944407
4.60	4.318617	4.371017	4.431436	4.504158	4.60	171.700800
4.65	4.365575	4.418536	4.479606	4.553116	4.65	173.454919
4.70	4.412533	4.466055	4.527776	4.602073	4.70	175.206768
4.75	4.459491	4.513574	4.575946	4.651031	4.75	176.956351
4.80	4.506450	4.561093	4.624116	4.699988	4.80	178.703674
4.85	4.553409	4.608612	4.672286	4.748946	4.85	180.448739
4.90	4.600368	4.656132	4.720456	4.797903	4.90	182.191552
4.95	4.647327	4.703652	4.768626	4.846861	4.95	183.932116
5.00	4.694287	4.751171	4.816796	4.895818	5.00	185.670437

表 9: 再投資風險與可贖回時點臨界利率計算: eVG 模型。

r_0	r_5^*	r_6^*	r_7^*	r_8^*	r_9^*	ψ_1 (bps)
3.00	2.814421	2.848767	2.888404	2.936271	3.00	113.666540
3.05	2.861338	2.896251	2.936545	2.985209	3.05	115.485200
3.10	2.908256	2.943735	2.984687	3.034146	3.10	117.301475
3.15	2.955174	2.991220	3.032828	3.083084	3.15	119.115368
3.20	3.002093	3.038705	3.080969	3.132021	3.20	120.926883
3.25	3.049012	3.086190	3.129111	3.180958	3.25	122.736027
3.30	3.095931	3.133675	3.177252	3.229895	3.30	124.542802
3.35	3.142850	3.181160	3.225394	3.278833	3.35	126.347214
3.40	3.189770	3.228646	3.273535	3.327770	3.40	128.149267
3.45	3.236690	3.276132	3.321677	3.376707	3.45	129.948966
3.50	3.283611	3.323617	3.369819	3.425645	3.50	131.746315
3.55	3.330532	3.371103	3.417960	3.474582	3.55	133.541318
3.60	3.377453	3.418589	3.466102	3.523519	3.60	135.333981
3.65	3.424374	3.466076	3.514244	3.572456	3.65	137.124307
3.70	3.471296	3.513562	3.562386	3.621393	3.70	138.912301
3.75	3.518218	3.561049	3.610527	3.670330	3.75	140.697968
3.80	3.565141	3.608535	3.658669	3.719268	3.80	142.481312
3.85	3.612063	3.656022	3.706811	3.768205	3.85	144.262337
3.90	3.658986	3.703509	3.754953	3.817142	3.90	146.041047
3.95	3.705910	3.750996	3.803095	3.866079	3.95	147.817448
4.00	3.752834	3.798484	3.851237	3.915016	4.00	149.591543
4.05	3.799758	3.845971	3.899379	3.963953	4.05	151.363337
4.10	3.846682	3.893459	3.947522	4.012890	4.10	153.132835
4.15	3.893607	3.940947	3.995664	4.061827	4.15	154.900040
4.20	3.940532	3.988435	4.043806	4.110764	4.20	156.664957
4.25	3.987457	4.035923	4.091948	4.159701	4.25	158.427590
4.30	4.034383	4.083411	4.140090	4.208638	4.30	160.187944
4.35	4.081309	4.130899	4.188233	4.257575	4.35	161.946022
4.40	4.128235	4.178388	4.236375	4.306512	4.40	163.701830
4.45	4.175162	4.225877	4.284517	4.355449	4.45	165.455372
4.50	4.222089	4.273365	4.332660	4.404386	4.50	167.206651
4.55	4.269016	4.320854	4.380802	4.453323	4.55	168.955672
4.60	4.315944	4.368344	4.428945	4.502260	4.60	170.702440
4.65	4.362872	4.415833	4.477087	4.551197	4.65	172.446958
4.70	4.409800	4.463322	4.525230	4.600134	4.70	174.189231
4.75	4.456728	4.510812	4.573373	4.649071	4.75	175.929263
4.80	4.503657	4.558302	4.621515	4.698008	4.80	177.667059
4.85	4.550586	4.605792	4.669658	4.746944	4.85	179.402621
4.90	4.597516	4.653282	4.717801	4.795881	4.90	181.135956
4.95	4.644446	4.700772	4.765943	4.844818	4.95	182.867066
5.00	4.691376	4.748262	4.814086	4.893755	5.00	184.595956

參考文獻

- Applebaum, D. (2009). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, Cambridge, Second edition.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). “Processes of Normal Inverse Gaussian Type.” *Finance and Stochastics*, Vol. 2, 41–68.
- Beran, J. (2017). *Mathematical Foundations of Time Series Analysis: A Concise Introduction*. Springer International, Cham.
- Bertoin, L. (1996). *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Black, F. and M. S. Scholes (1973). “The Pricing of Options and Corporate Liabilities.” *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 637–654.
- Carmona, R. and N. Touzi (2008). “Optimal Multiple Stopping and Valuation of Swing Options.” *Mathematical Finance*, Vol. 18, No. 2, 239–268.
- Chow, Y.-S., H. Robbins, and D. Siegmund (1971). *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*. Houghton Mifflin Company, Boston.
- Cont, R. and P. Tankov (2004). *Financial Modeling with Jump Processes*. CRC/Taylor & Francis, London.
- Dahl, M. (2007). “A Discrete-Time Model for Reinvestment Risk in Bond Markets.” *ASTIN Bulletin*, Vol. 37, No. 2, 235–264.
- Dahl, M. (2009). “A Continuous-Time Model for Reinvestment Risk in Bond Markets.” *Quantitative Finance*, Vol. 9, No. 4, 451–464.
- Fang, F. and C. W. Oosterlee (2008). “A Novel Pricing Method for European Options Based on Fourier-Cosine Series Expansions.” *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 31, No. 2, 826–848.
- Fang, F. and C. W. Oosterlee (2009). “Pricing Early-Exercise Options and Discrete Barrier Options by Fourier-Cosine Series Expansions.” *Numer. Math.*, Vol. 114, 27–62.
- Jacod, J. and A. N. Shiryaev (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Berlin, Second edition.
- Kohler, M. (2010). “A Review on Regression-based Monte Carlo Methods for Pricing American Options.” In Devroye, L., B. Karasözen, M. Kohler, and R. Korn, editors, “Recent Developments in Applied Probability and Statistics,” pages 37–58. Physica-Verlag HD.
- Madan, D. B., P. P. Carr, and E.-C. Chang (1998). “The Variance Gamma Process and Option Pricing.” *European Finance Review*, Vol. 2, 79–105.
- Madan, D. B. and E. Seneta (1990). “The Variance-Gamma (V. G.) for Share Market Returns.” *Journal of Business*, Vol. 63, 511–524.
- McNeil, A., R. Frey, and P. Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management Concepts: Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton, N. J.
- Oosterlee, C. W. and L. A. Grzelak (2019). *A Mathematical Modeling and Computation in Finance with Exercises and Python and MATLAB Computer Codes*. World Scientific, London.
- Peskir, G. and A. N. Shiryaev (2006). *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Birkhäuser, Basel.
- Prause, K. (1999). “The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures.” Ph.D. thesis, University of Freiburg.
- Protter, P. (2005). *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, Second edition.
- Rémillard, B. (2011). “Validity of the Parametric Bootstrap for Goodness-of-Fit Testing in Dynamic Models.” Social Science Research Network (SSRN) Working Paper Series. URL https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1966476.
- Rémillard, B. (2012). “Non-parametric Change Point Problems Using Multipliers.” Social Science Research Network (SSRN) Working Paper Series. URL https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2043632.
- Riabile, S. (2000). “Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts.” Ph.D. thesis, University of Freiburg.
- Sato, K.-I. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Seneta, E. (2004). “Fitting the Variance-Gamma Model to Financial Data.” *Journal of Applied Probability*, Vol. 41, 177–187.
- Shiryaev, A. N. (1978). *Optimal Stopping Rules*. Springer-Verlag, Berlin.

- Silverman, B. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman & Hall, London.
- Sommer, D. (1997). “Pricing and Hedging of Contingent Claims in Term Structure Models with Exogenous Issuing of New Bonds.” *European Financial Management*, Vol. 3, No. 3, 269–292.
- Stefanovits, D. and M. V. Wüthrich (2014). “Hedging of Long Term Zero-Coupon Bonds in a Market Model with Reinvestment Risk.” *European Actuarial Journal*, Vol. 4, No. 1, 49–75.
- Teplova, T. V. and V. A. Rodina (2021). “The Reinvestment Risk Premium in the Valuation of British and Russian Government Bonds.” *Research in International Business and Finance*, Vol. 55. Article 101319.
- Tewari, M., A. Byrd, and P. Ramanlal (2015). “Callable Bonds, Reinvestment Risk, and Credit Rating Improvements: Role of the Call Premium.” *Journal of Financial Economics*, Vol. 115, 349–360.
- Weibel, M., D. Luethi, and W. Breymann (2020). *ghyp: Generalized Hyperbolic Distribution and Its Special Cases*. URL <https://CRAN.R-project.org/package=ghyp>, r package version 1.6.1.
- Zhang, B. and C. W. Oosterlee (2013). “An Efficient Pricing Algorithm for Swing Options Based on Fourier Cosine Expansions.” *Journal of Computational Finance*, Vol. 16, No. 4, 1–32.

附錄 A. COS 法 Python 程式碼