BZOJ NOI2016模拟赛Solution

C_SUNSHINE

1 奥义商店

染色的情况较为复杂，不妨先处理$t = 1$的情况，可以发现就是对所有 $\bmod d$下与k同余的下标求和。我们可以对$d <= S$和$d > S$分开考虑，对于每个$0 < j < i \le S$，维护$sum_{i,j}$表示下标 $\bmod i = j$的所有元素的和，那么每次修改只要枚举所有i就能更新了，时空复杂度都是$O(S)$的，而对于$d > S$的情况，暴力求和的复杂度是$O(\frac{n}{S})$的，容易发现$S = \sqrt{n}$时，时空复杂度都为$O(n^{1.5})$。

接着考虑$t > 1$的情况，显然若$c_1 < c_2$则选择颜色1的期望一定不超过颜色2的期望，于是我们选择个数最少的颜色，设其有c个。

考虑计算每个元素的贡献，显然除了v_k本身外只有下标为$k \pm xd(x > 0)$的元素才会有贡献，并且产生贡献为$v_{k+xd} * p(x)$，其中$p(x)$是$n - 1$中指定的k个都是那一种颜色的概率。

显然$p(x) = \frac{\binom{n-1-x}{c-x}}{\binom{n-1}{c}}$，而$p(x) = p(x-1) * \frac{c-x+1}{n-x}$。那么我们只要$O(n)$求出每个元素的贡献即可，但是这样是$O(n^2)$的。

观察题目求精确到4位小数，精度D不超过10^{13}，而当$t > 1$时，$c \le \frac{n-1}{2}$，则$p(x)$随x指数级衰减。于是只用枚举$x \le L = O(\log D)$即可，L取100即可通过全部测试点。

时间复杂度$O\left(n + m\left(\sqrt{n} + L\right)\right)$。

2 访问计划

乘坐跳蚤巴士可以当成在图中新加了一些被恰好走一次的边。

直接解决这题有些困难，我们首先分析一些性质：

1.每条树边只会被走1或2次：考虑建一张新图，u, v之间边的数目是(u, v)这条边被走过的次数，由于访问计划在新图上是一个欧拉回路，于是每个点的度数都是偶数，那么删除(u, v)之间的两条边（即行走次数减少两次），新图中依然存在一个欧拉回路，而在原图中对应一个更优的访问计划。

2.每条边(fa_x,x)走过的奇偶性，与x子树内新加边边的顶点数目奇偶性相同：首先去掉两个顶点都在x子树内的新加边，由于要回到出发点，x子树这个连通快与其他部分之间的往返次数必然是偶数，于是(fa_x,x)这条边的走过次数和x子树内顶点数奇偶。

结合上面两个结论，可以得出(fa_x,x)这条边走的次数$=1+[x$子树内的新加边顶点数为偶数$]$。

那么我们不用记录具体新加入哪些边，而只用记录顶点个数即可，令$f_{x,p}$表示x子树中有p个顶点时x子树内所有边的最小总代价，转移使用树上背包即可。

最后枚举新加边数i，用$f_{0,2i}+iC$更新答案即可。

时间复杂度$O(N^2)$。

3 模范学长

似乎我是打算用这题防AK的……

对于次数不大的一元多项式，可以使用拉格朗日插值得到最后答案。

显然行列式的结果是一个多项式，于是本题就是要判断在系数模2意义下$|A|$是否为零多项式。

Schwartz–Zippel定理说明了定义在有限域F上的d次非零多元多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，随机选取x_i的值，多项式值为0的概率是$\frac{d}{|F|}$。于是对于判定一个多项式是否是零多项式就可以随机给x_i赋值并计算多项式的值，若不为0则一定不是零多项式。重复判定C次，则判定正确率为$1-\left(\frac{d}{|F|}\right)^C$。

要使用这个定理进行判断，我们需要构造一个有限域F使得$|F|$足够大，且F中$x+x=0$。

首先想到的就是模素数剩余系，但是素数只有取2时才能满足第二个条件，而这时$|F|=2$是不能使用的。

考虑使用多项式环作为有限域，构造系数模2意义下的t次不可约多项式$P(x)$，则$(\bmod\ 2,P(x))$剩余系下的所有多项式构成一个多项式环，环的大小为2^t。

由于$|A|$的次数不超过10000，取$t=30$就能保证很高的正确率了。

计算行列式时，由于只要判定是否为0，可以将一行乘上一个非0元素，这就避免了除法$(A_{j,k}\leftarrow A_{j,k}A_{i,i}-A_{i,k}A_{j,i})$。

模2意义下多项式可以使用位运算简化计算，重复判定$C=20$次就能几乎保证正确性了（错误率不足10^{-100}）。

时间复杂度$O\left(Ctn^3\right)$。