机　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 8-1: 联合机率分布
- 8-2: 边际机率分布
- 8-3: 双变量期望值

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

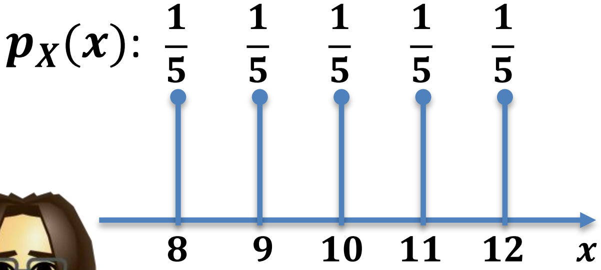
8-1: 联合机率分布
(JOINT PROBABILITY DISTRIBUTION)

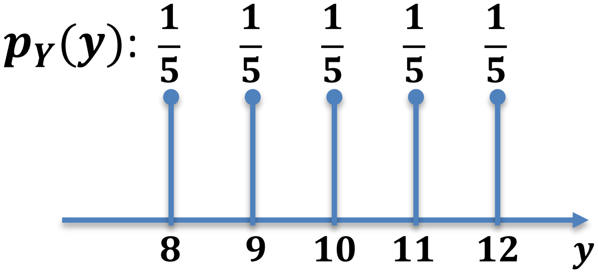
第八周

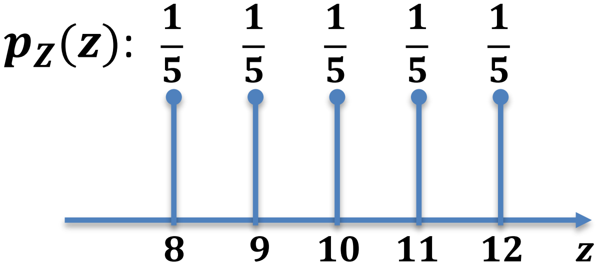
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

当小明出国去交换时

- $\boldsymbol{X}$: 小美脸书/QQ 脱机时间，$\boldsymbol{X \sim UNIF(8,12)}$
- $\boldsymbol{Y}$: 小华脸书/QQ 脱机时间，$\boldsymbol{Y \sim UNIF(8,12)}$
- $\boldsymbol{Z}$: 小园脸书/QQ 脱机时间，$\boldsymbol{Z \sim UNIF(8,12)}$
- 假设 $\boldsymbol{X, Y, Z}$ 都是离散随机变数



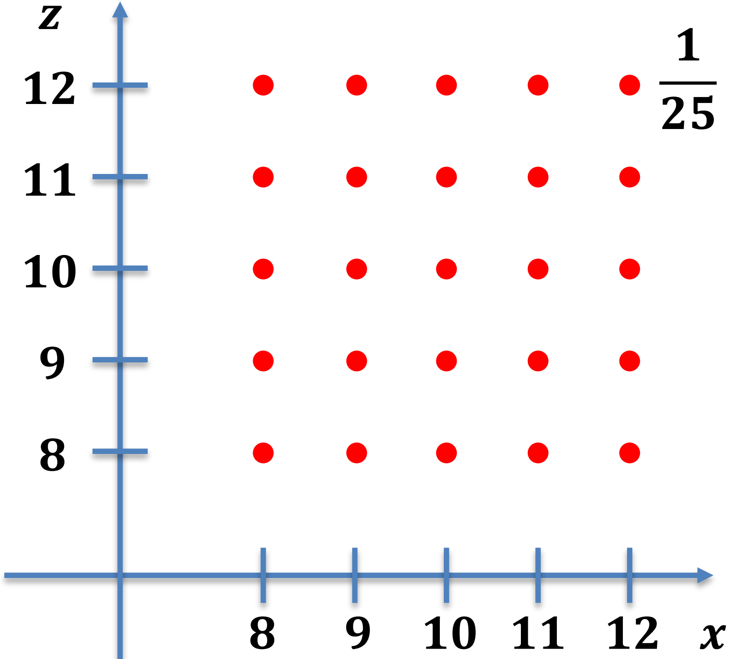




Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

当小明出国去交换时

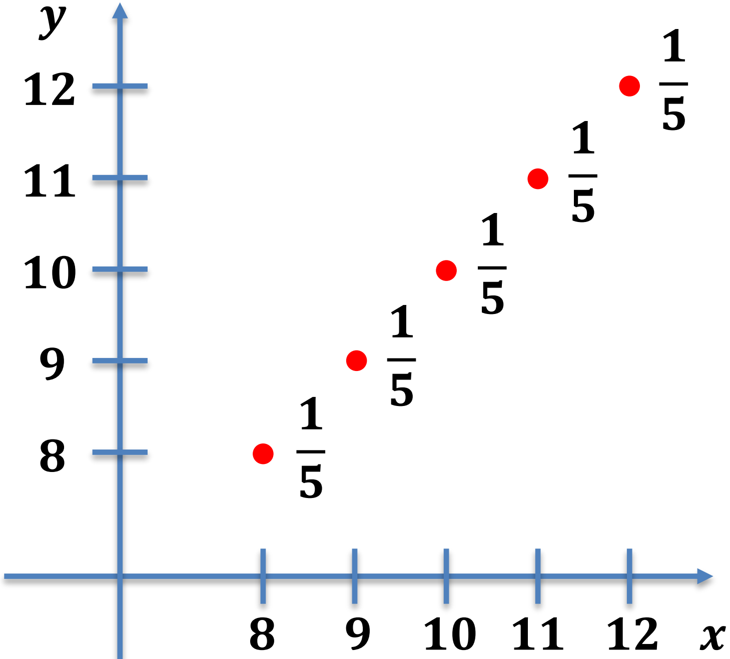
- 若将小美脱机时间 $\boldsymbol{X}$ 与小园脱机时间 $\boldsymbol{Z}$ 一起看呢？
- 画出 $\boldsymbol{P(X=x, Z=z)}$：



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

满山尽是君雅照！

- 若将小美脱机时间 X 与小园脱机时间 Y 一起看呢？
- 画出 $P(X = x, Y = y)$，赫然发现！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合机率分布

- 同时将多个随机变量的行为一起拿来看，我们可以看出更多以往看不到的信息！
- 同时考虑多个随机变量的机率分布称之为联合机率分布 (joint probability distribution)
- 联合机率分布亦有离散与连续的分别

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF (Joint PMF)

- 若 X, Y 皆为离散随机变量，我们可以定义他们的联合PMF

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x \text{ 且 } Y = y)$$

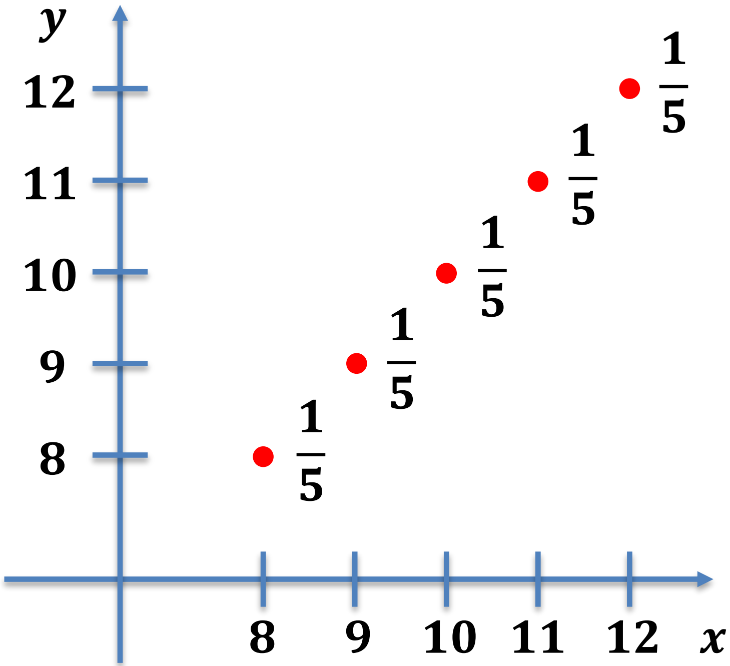
- 联合PMF 决定了X, Y 的联合机率分布

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF (Joint PMF)

Ex: 小美脱机时间 $\boldsymbol{X}$ 与小华脱机时间 $\boldsymbol{Y}$ 的联合 PMF：

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y):$$



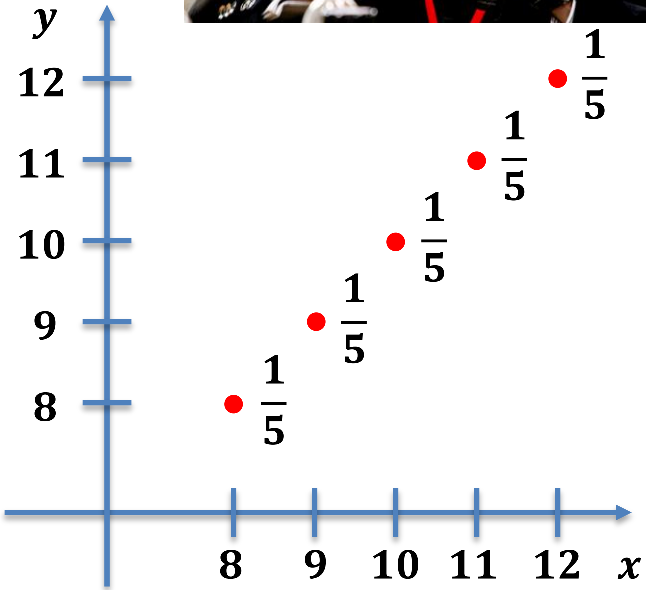
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF 的性质

- $0 \leq p_{X,Y}(x,y) \leq 1$
- $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) = 1$
- X, Y 独立

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$
$$= P(X = x) \cdot P(Y = y)$$
$$= P_X(x) P_Y(y)$$

- 对任何事件 B： $P(B) = \sum_{(x,y) \in B} P_{X,Y}(x,y)$



Ex: B：美、华下线时间不晚于十点

$P(B) =$)

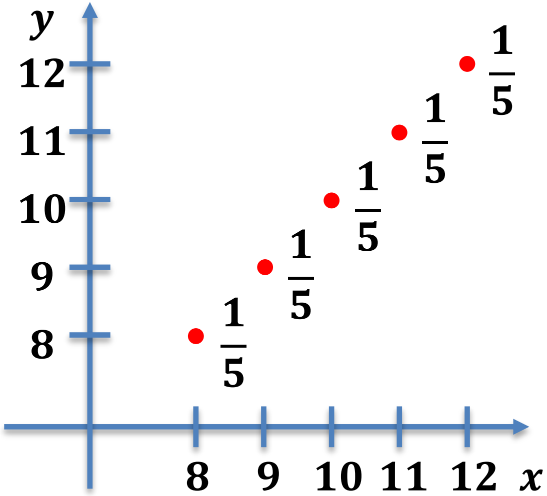
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 CDF (Joint CDF)

- 若考虑两个随机变数 X, Y 的联合机率分布，我们也可定义出所谓的联合 CDF：

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$F_{X,Y}(10, 10) =$



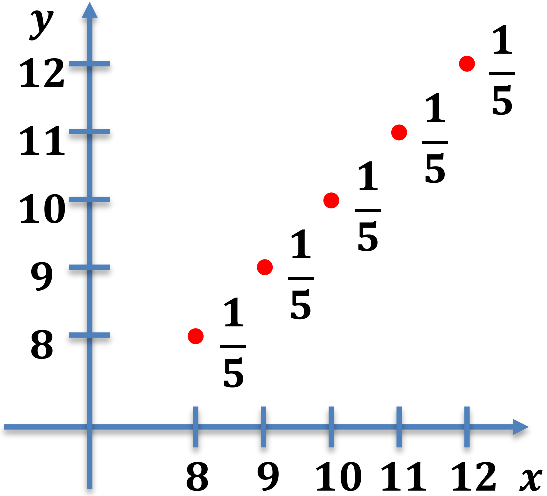
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 CDF (Joint CDF)

- 若考虑两个随机变数 X,Y 的联合机率分布，我们也可定义出所谓的联合 CDF：

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$F_{X,Y}(9,11) =$

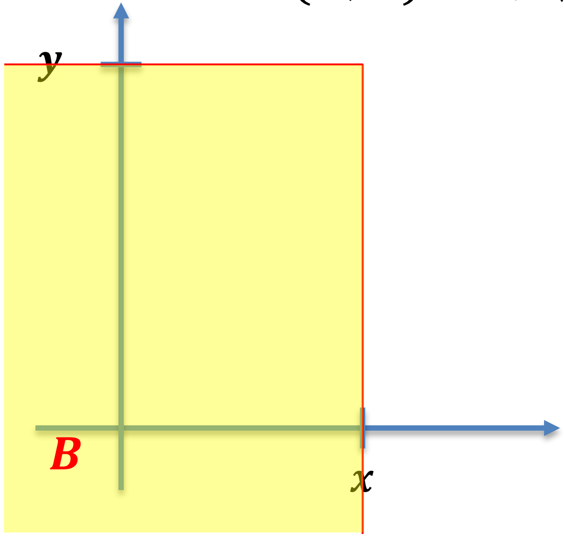


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 CDF (Joint CDF)

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \text{ 且 } Y \le y) = P(X \le x, Y \le y)$

  $= (X,Y)$ 会落在黄色区域的机率



$1D$: $F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \le x)$

$= (X,Y)$ 会落在黄色区域的机率

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 CDF 的性质

- $0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$
- 若 $x_1 \le x_2$ 且 $y_1 \le y_2$, 则$F_{X,Y}(x_1,y_1) \le F_{X,Y}(x_2,y_2)$
- $F_{X,Y}(x,\infty) = P(X \le x, Y \le \infty) = P(X \le x) = F_X(x)$
- $F_{X,Y}(\infty,y) = P(X \le \infty, Y \le y) = P(Y \le y) = F_Y(y)$
- $F_{X,Y}(\infty,\infty) = P(X \le \infty, Y \le \infty) = 1$
- $F_{X,Y}(x,-\infty) = P(X \le x, Y \le -\infty) \le P(Y \le -\infty) = 0$
- $F_{X,Y}(-\infty,y) = P(X \le -\infty, Y \le y) \le P(X \le -\infty) = 0$

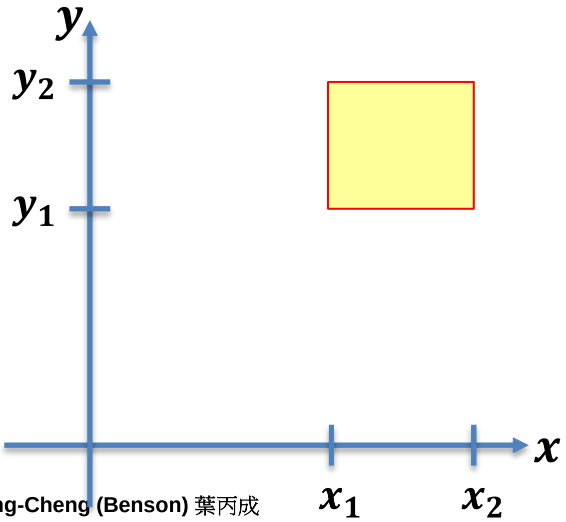
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

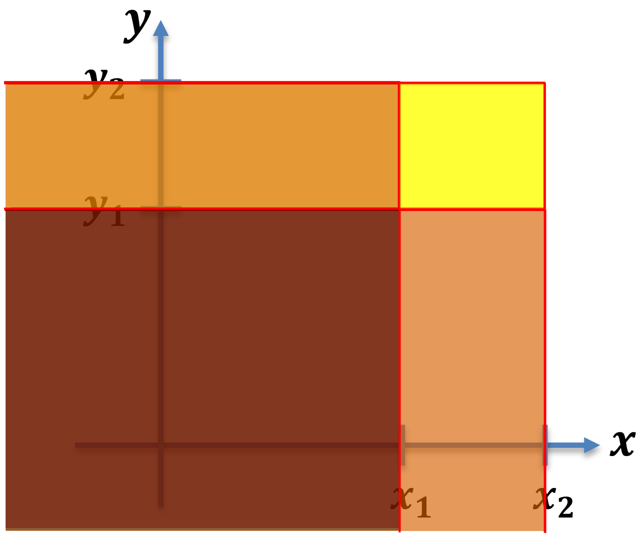
联合 CDF 的性质

- 四方格性质：

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$

$$= F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1)$$



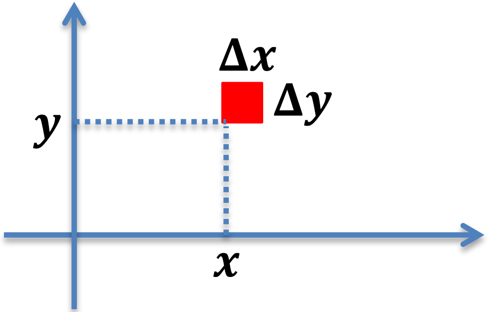


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若X,Y 皆为连续随机变量怎办？

- 回想之前一个变量时PDF怎么定义？
- $f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \in [x, x+\Delta x])}{\Delta x}$

- 如何延伸到两个变量的情况？
- $f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((X,Y) \in \blacksquare)}{\Delta x \Delta y}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF (Joint PDF)

- 若 X, Y 皆为连续随机变量，我们可以定义联合 PDF：

$$f_{X,Y}(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\big((X,Y)\in \blacksquare\big)}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<X\le x+\Delta x \text{ 且 } y<Y\le y+\Delta y)}{\Delta x\Delta y}$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

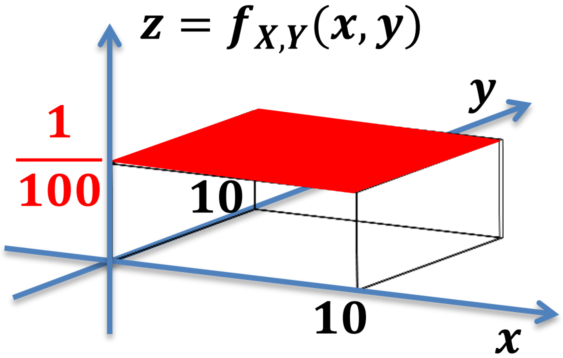
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF

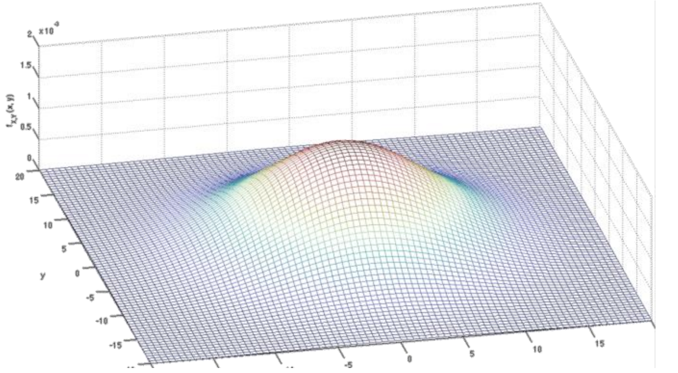
Ex：小美等公交车时间为 $\boldsymbol{X}$, 小园等公交车时间为

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 两者独立且皆为连续之机率分布 $\boldsymbol{UNIF}(0, 10)$。则

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$之联合 PDF 为



其他联合 PDF 的例子：
Bivariate Gaussian



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF (Joint PDF)

- 联合 PDF 亦决定了 X, Y 的联合机率分布
- 联合 PDF 跟联合 CDF 之间的关系：

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$$

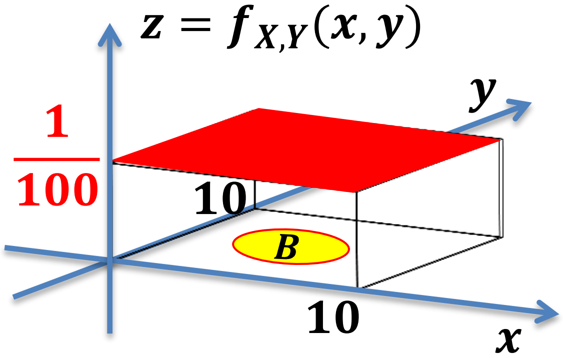
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF 的性质

- $f_{x,y}(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = 1$
- 若 X, Y 独立 $\Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
- 对任何事件 B,

$$P(B) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x, y) dxdy$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 何谓联合机率分布？
- 为何要看联合机率分布？
- 联合 PMF 的定义？
- 联合 CDF 的定义？
- 联合 PDF 的定义？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-2: 边际机率分布

(MARGINAL PROBABILITY DISTRIBUTION)

第八周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

已知联合 PMF，欲得个别 PMF

- Ex：$\boldsymbol{X, Y}$ 分别为小美、小丽脸书/QQ 脱机时间。联合 PMF 如下：

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $\boldsymbol{p_X(x) = ?\ p_Y(y) = ?}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

边际 PMF (Marginal PMF)

- 已知联合 PMF $p_{X,Y}(x,y)$，则可求得 $p_X(x)$、$p_Y(y)$，称之为边际 PMF
- 边际 PMF 算法：
  - $p_X(x) =$
  - $p_Y(y) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

边际 PDF (Marginal PDF)

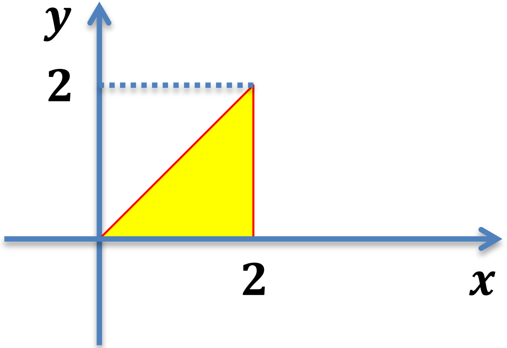
- 已知联合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$，则可求得 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，称之为边际 PDF
- 边际 PDF 算法：
  - $f_X(x) =$
  - $f_Y(y) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

边际 PDF (Marginal PDF)

- Ex：已知

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.5, & \text{if } 0\le y\le x\le 2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$



- $f_X(x)=$

- $f_Y(y)=$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 边际 PMF 的定义？怎么算？
- 边际 PDF 的定义？怎么算？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-3: 双变量期望值

第八周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF 下的期望值

- 回想只考虑一个离散随机变数 $\boldsymbol{X}$ 时其任意函数 $\boldsymbol{g(X)}$ 的期望值是：
  $\boldsymbol{E[g(X)]} =$
- 若同时考虑两个离散随机变量 $\boldsymbol{X, Y}$ 时，他们的任意函数 $\boldsymbol{h(X,Y)}$ 的期望值是
  $\boldsymbol{E[h(X,Y)]} =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF 下的期望值

- Ex：$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 分别为小美、小丽脸书/QQ 脱机时间。联合 PMF 如下

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $\boldsymbol{E}[|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|] =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF 下的期望值

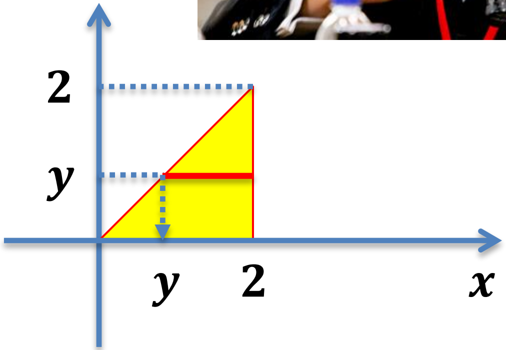
- 回想只考虑一个连续随机变量 $\boldsymbol{X}$ 时其任意函数 $\boldsymbol{g(X)}$ 的期望值是：
  $\boldsymbol{E[g(X)]} =$
- 若同时考虑两个连续随机变数 $\boldsymbol{X, Y}$ 时，他们的任意函数 $\boldsymbol{h(X,Y)}$ 的期望值是
  $\boldsymbol{E[h(X,Y)]} =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF 下的期望值

- Ex：已知 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.5, & if\ 0\le y\le x\le 2,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$

$E[X+Y]=$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性质

- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

证明 (离散)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)]\, p_{X,Y}(x,y)$$

$=$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性质

- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

证明 (连续)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)] \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$=$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性质

- 若X,Y独立，则

$$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]\cdot E[h(Y)]$$

证明(离散)：

$$E[g(X)h(Y)]=\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty}g(x)\cdot h(y)\cdot p_{X,Y}(x,y)$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性质

- 若X, Y独立，则

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

证明(连续)：

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 相关的性质

- $Var(X+Y) = E[(X+Y-\underbrace{E[X+Y]}_{\mu_X+\mu_Y})^2]$

$=$

※ X,Y独立 $\Rightarrow 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$
$= 2E[(X-\mu_X)]E[(Y-\mu_Y)] = 0$
$\Rightarrow Cov(X,Y)=0$
$\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 期望值的定义？
- 期望值的性质？
- 两随机变量独立的话，期望值的计算？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University