机　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh
部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 2-1: 机率公理性质
- 2-2: 条件机率

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

2-1: 机率公理性质

第二周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理 (Axioms)

- 近代数学常以数条公理作为整套理论的基石
  - Ex: 线性代数 **8 公理，公理一：$a+b=b+a$ …**
- 这样的好处是？ **头过身就过啊！(容头过身 –后汉书西羌传)**
- 公理可否被证明？ **公理常是不能被证明的基本性质**
- 公理为何常被当废话？ **公理常是非常基本的性质**
- 什么样的数学最厉害？ **公理越少条、公理越基本，越厉害！**

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

机率三公理 (Axioms of Probability)

- 公理 1:

  $\boxed{\text{对任何事件 } A \text{ 而言}, P(A) \geq 0.}$

- 公理 2:

  $\boxed{P(S) = 1}$

神圣三公理

- 公理 3:

  事件 $A_1, A_2, \ldots$ 互斥 $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots)$
  $= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理 3 搭起了集合运算与机率运算的桥梁！

公理衍生之机率性质

Ex: 从一副 52 张扑克牌抽中一张，结果为 Ace 之机率为何？

证明：

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之机率性质

- 若 $E=\{o_1,o_2,\ldots,o_n\}$
  则 $P(E)=P(\{o_1\})+P(\{o_2\})+\cdots+P(\{o_n\})$

证明： $E=\{o_1\}\cup\{o_2\}\cup\cdots\cup\{o_n\}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之机率性质

- $P(\phi) = 0$

证明：

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之机率性质

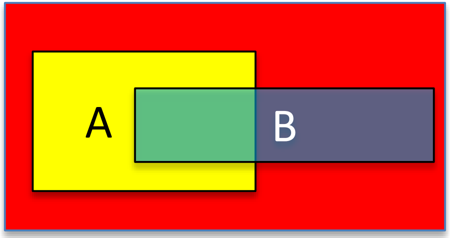
- $P(A) = 1 - P(A^c)$

证明：

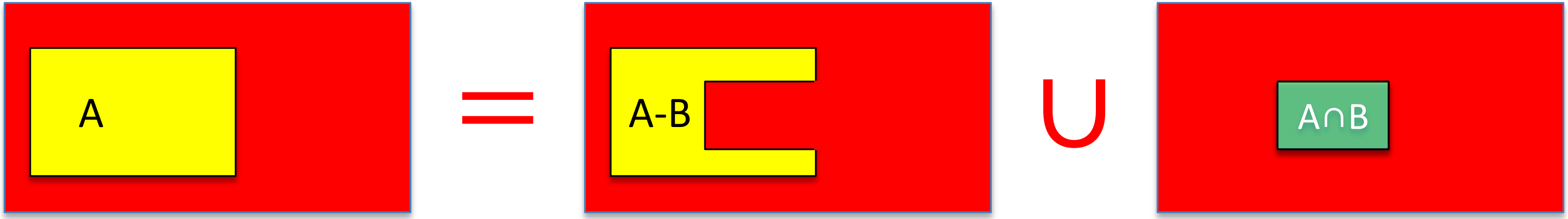
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之机率性质

- $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$



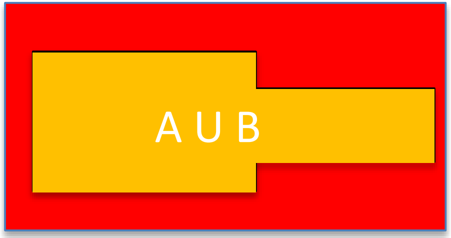
证明：



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

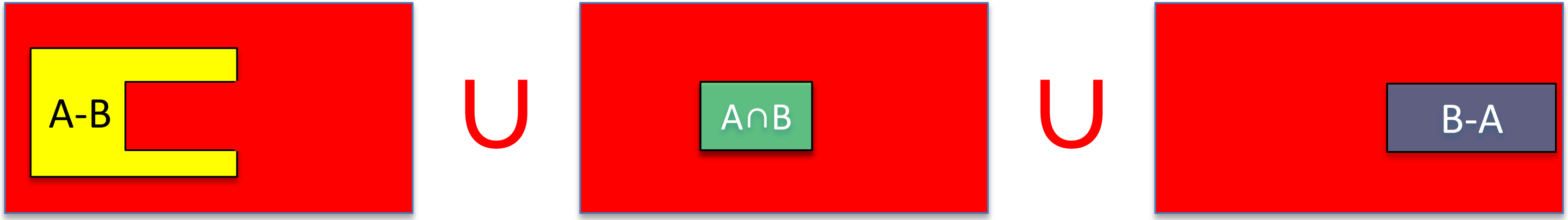
公理衍生之机率性质

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



证明：

=



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之机率性质

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - Ex: 在大陆随便碰上一个人，此人爱甜豆花或爱咸豆花机率为何？

$$\boxed{P(\text{爱甜} \cup \text{爱咸}) = P(\text{爱甜}) + P(\text{爱咸}) - P(\text{爱甜} \cap \text{爱咸}) = \cdots}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

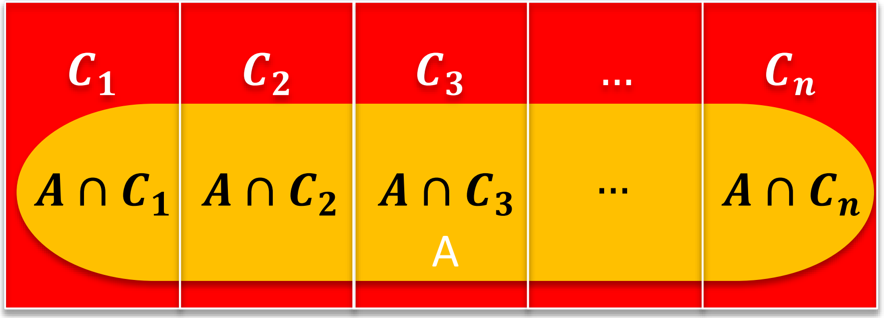
公理衍生之机率性质

- 切面包定理：

  若 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 互斥且 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n = S$

  则对任何事件 A：$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \cdots + P(A \cap C_n)$

  ↑ 公理 3



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之机率性质

– Ex: 阿宅心仪某可爱女店员。她的笑容打开了他封闭的心。阿宅注意到她笑容会受生意的影响，于是每天忠实记录该店生意与她有无对他笑。店生意有满、普、惨三态，而她有笑、怒二态。根据记录：

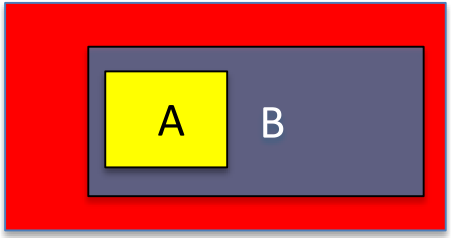
$$S=\left\{\begin{array}{l}(\text{满}\cap\text{笑})\rightarrow\frac{1}{20},(\text{满}\cap\text{怒})\rightarrow\frac{2}{20}\\(\text{普}\cap\text{笑})\rightarrow\frac{5}{20},(\text{普}\cap\text{怒})\rightarrow\frac{4}{20}\\(\text{惨}\cap\text{笑})\rightarrow\frac{5}{20},(\text{惨}\cap\text{怒})\rightarrow\frac{3}{20}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow P(\text{笑})=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之机率性质

- 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \le P(B)$.



证明：*BJ4*，同学自己试试看

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Boole’s 不等式

- 对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 而言，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证明：*BJ4*，高手自己试试看

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Bonferroni's 不等式

- 对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 而言，

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

证明：*BJ4*，高手自己试试看

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 公理的意义是什么？
- 为何机率三公理很神圣？
- 机率公理如何衍生各样的性质？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

2-2: 条件机率

第二周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

概述与范例

- 机率常反映我们对某些事情的了解程度
  - Ex: 没念书的混哥，对其而言，考试选择题正解为 A 或 B 或 C 或 D 的机率皆为 1/4
  - Ex: 有念书的卷哥，对其而言，考试选择题正解为 A 之机率非 1 即 0

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

概述与范例

- 在得知其他某些事情发生后，我们对事情的了解可能会有所改变
  - Ex: 混哥坐卷哥隔壁，见到

  - 在此事发生后，对混哥而言B、D为正解机率为？（此即为「条件机率」）

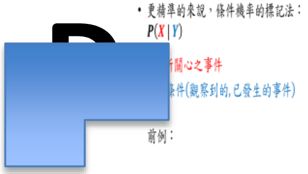
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率 (Conditional Probability)

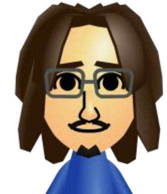
- 更精准的来说，条件机率的表示法：
  $P(X \mid Y)$

  X：所关心之事件

  Y ：条件(观察到的, 已发生的事件)

前例： P(B 为正解 | 

)



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率怎么算？

- P(**B 为正解** | 卷矫漏曲) = ?
  - 未偷看时，正确答案未知。样本空间为：
  - 卷矫漏曲后，新的样本空间变为：

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率怎么算？

- 卷矫漏之条件发生后，这世界变了，有了新的天地。不符合卷矫漏条件的 outcome 都不可能发生了。

$$\boxed{P(\text{A 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = P(C\text{ 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = 0}$$

  - 延伸：若某实验结果 o_i 与某条件 Y 不相交，则

$$\boxed{P(o_i \mid Y) =}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率怎么算？

- 至于卷矫漏曲之条件事件发生后，符合卷矫漏条件事件的实验结果的机率呢？
  - 不管卷矫漏发生否，「B为正解」与「D为正解」的机率比例应该一样，故：

$$P(\text{B 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) : P(D\text{ 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = P(\text{B 为正解}) : P(D\text{ 为正解})$$

  - 卷矫漏后只有可能出现「B 为正解」或「D 为正解」，故：

$$S' = \{B, D\},\ P(\text{B 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) + P(D\text{ 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = 1$$

  - 根据上述二式我们得到

$$P(\text{B 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) =$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率怎么算？

- 延伸：若某条件事件 Y 包含数个实验结果：

$$Y = \{o_1, o_2, \ldots o_n\}$$

$$P(o_i|Y) = \frac{P(o_i)}{P(o_1) + P(o_2) + \cdots + P(o_n)} = \boxed{\frac{P(o_i)}{P(Y)}}$$

考虑某事件 $X = \{o_1, o_2, q_1, q_2\}$，已知条件事件$Y = \{o_1, o_2, o_3\}$发生了，则

$$\boxed{P(X|Y) = P(o_1|Y) + P(o_2|Y) = \frac{P(o_1)}{P(Y)} + \frac{P(o_2)}{P(Y)} = \frac{P(\{o_1, o_2\})}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率怎么算？

- 终极延伸：若已知某条件事件 Y 发生了，

  则对于任何事件 X ，我们可计算其条件机率如下：

$$P(X \mid Y) =$$

※ *"condition on," "Suppose," "if," "Assuming," "given that"*

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

概述与范例

- Ex: 小美同时与小明、小华、小园暗通款曲。
  - Q: 小华赢得小美芳心机率为？
  - Q: 美生日，华夜携礼至美宅。美不在，华遂于门外候之。子时忽闻美、明于里外争吵，遂匿而窥之。未料，突见美巴明，甩门。明，泣不成声，而华窃喜。

    请问在美巴明发生后小华赢得小美芳心机率为？

$P($华赢美心 | 美巴明$) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率之性质

- 对任何事件 X 及任何条件事件 Y ，我们有：
  - 性质 1：$P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)\geq 0}{P(Y)\geq 0} \geq 0$
  - 性质 2 ：$P(Y|Y) =$
  - 性质 3 ：A, B 互斥 $\Rightarrow$ $P(A\cup B\,|Y) =$

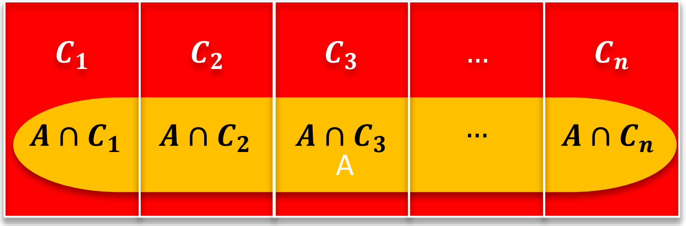
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Total Probability 定理

- 若 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 互斥且 $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = S$

  则对任意事件 A ，我们有：

  $$P(A) = P(A \mid C_1)\, P(C_1) + P(A \mid C_2)\, P(C_2) + \cdots + P(A \mid C_n)\, P(C_n)$$



证明：

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Total Probability 定理

- Ex: 阿宅 vs. 可爱店员：店员对阿宅笑否，
  受店的生意影响很大。

  已知 $P(满)=\frac{1}{4}, P(普)=\frac{1}{4}, P(惨)=\frac{1}{2}$

  $P(笑 \mid 满)=\frac{1}{6}, P(笑 \mid 普)=\frac{2}{6}, P(笑 \mid 惨)=\frac{3}{6}$

  问 $P(笑)=?$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

贝氏定理 (Bayes’ Rule)

- 若 $C_1, C_2, \ldots, C_n$互斥且 $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = S$
  则对任意事件 A ，我们有：

$$P(C_j \mid A) = \frac{P(A \mid C_j)\, P(C_j)}{P(A \mid C_1)\, P(C_1) + P(A \mid C_2)\, P(C_2) + \cdots + P(A \mid C_n)\, P(C_n)}$$

$$\|$$

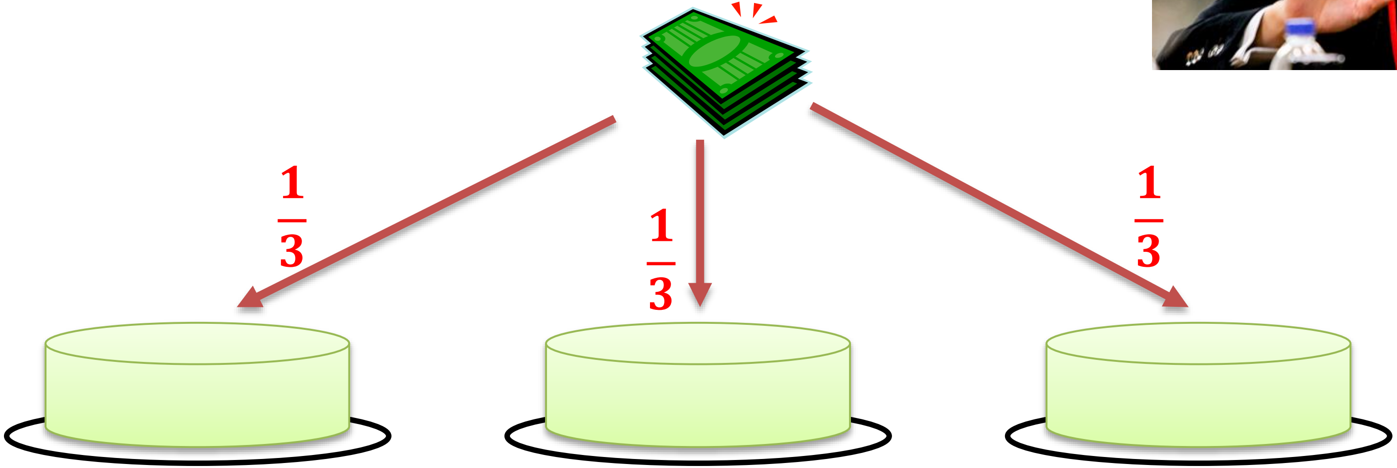
$$\frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid C_j) \cdot P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i) \cdot P(C_i)}$$

贝氏定理 (Bayes' Rule)

- Ex: 一日，老板见可爱店员笑，请问在此情况下，当日生意满座之机率为何？

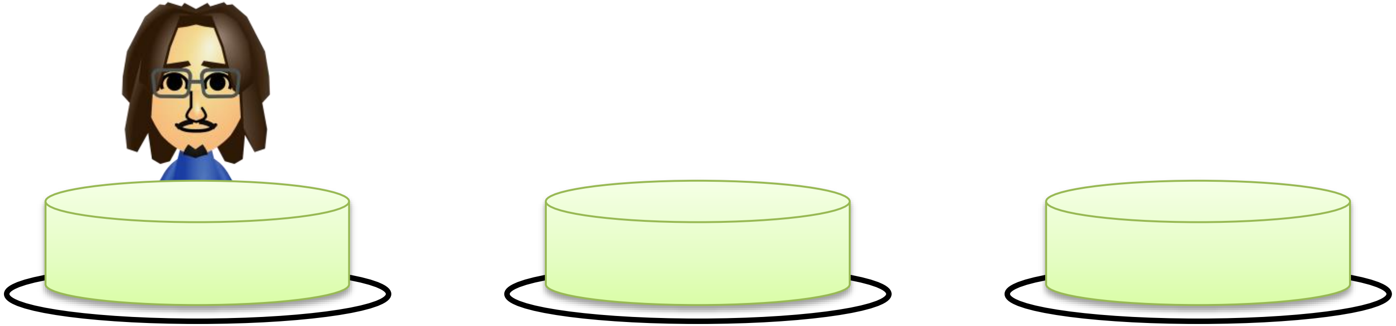
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

进击的钞票



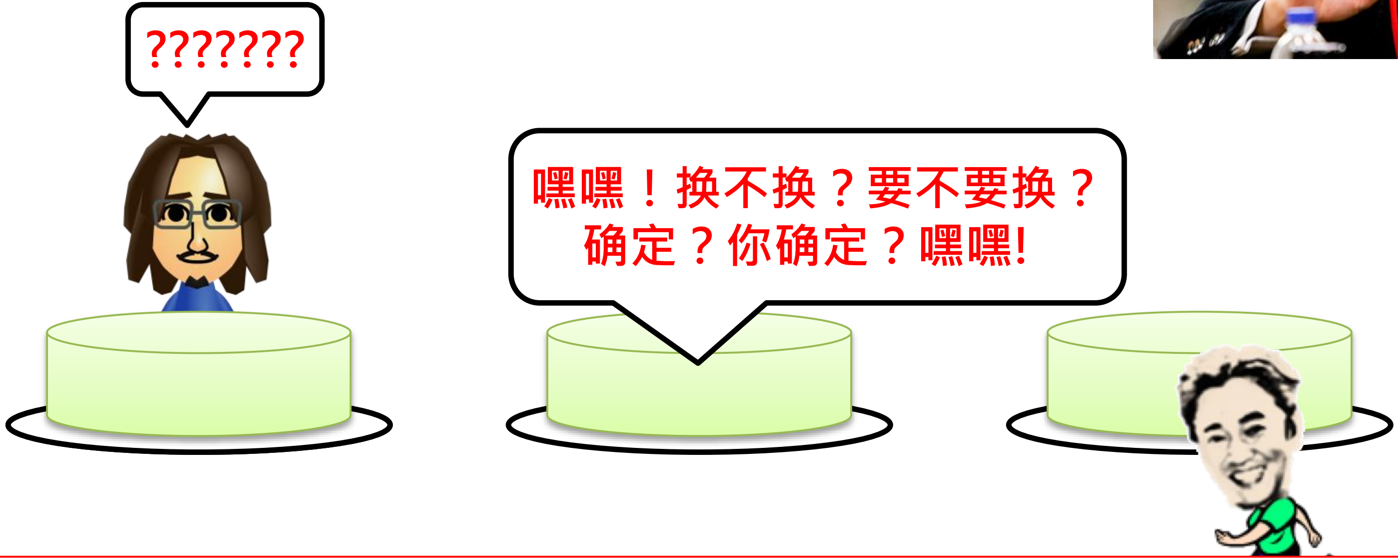
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

进击的钞票



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

宪哥的逆袭！



丙绅和他的小伙伴们，究竟该换呢？还是不该换呢？还是没差呢？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 条件机率的意义？
- $P(X \mid Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$
- 贝氏定理

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University