



机率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo 脸书: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 4-1: 随机变数
- 4-2: 累积分布函数 CDF
- 4-3: 机率质量函数 PMF
- 4-4: 离散机率分布 I
- 4-5: 离散机率分布 II





4-1: 随机变数 (RANDOM VARIABLE)

第四周



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

考虑费雯兄的例子：



- 「继前述费雯兄好发废文之例。若根据统计，费雯兄一楼推文不同形态之出现机率为：
 - $P(\text{「你妈知道你在发废文吗」}) = 0.4$
 - $P(\text{「见此唉滴必噓」}) = 0.2$
 - $P(\text{「在五楼...」}) = 0.1$
 - $P(\text{「妈！我在这！」}) = 0.3$
- $P(\text{「妈！我在这！」}) = 1 - P(\text{「你妈知道你在发废文吗」}) - P(\text{「见此唉滴必噓」}) - P(\text{「在五楼...」}) = 0.3$
- 你，觉得有什么问题呢？

光写字就累翻了！哥用的可是繁体啊!!!



考虑费雯兄的例子：



- 若改为：「继前述费雯兄好发废文之例。根据费雯兄一楼推文，我们会定义 X 为不同值：
 - 「你妈知道你在发废文吗」： $X = 0$
 - 「见此唉滴必噓」： $X = 1$
 - 「在五楼...」： $X = 2$
 - 「妈！我在这！」： $X = 3$
- 根据统计：
 - $P(X = 0) = 0.4$; $P(X = 1) = 0.2$; $P(X = 2) = 0.1$; $P(X = 3) = 0.3$
- $P(X = 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$
- 跟前面比起来，你觉得如何呢？

这...这...真是太清爽、太给力了啊!!!



随机变数

(Random Variable, R.V.)



- 这是一个用来把实验结果 (outcome) 数字化的表示方式
- 目的是可以让机率的推导更数学、更简明
- 前面例子中的 X 就是所谓的随机变数
- 随机变数通常都是用大写的英文字母表示！



探究它的本质！

• 随机变量的本质是什么？是~~变数~~吗？ **函数**

– 「你妈知道你在发废文吗」： $X = 0$

⇒ $X(\text{「你妈知道你在发废文吗」}) = 0$

– 「见此唉滴必噓」： $X = 1$

⇒ $X(\text{「见此唉滴必噓」}) = 1$

– 「在五楼…」： $X = 2$

⇒ $X(\text{「在五楼...」}) = 2$

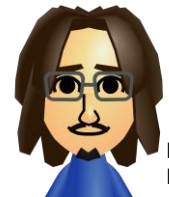
– 「妈！我在这！」： $X = 3$

⇒ $X(\text{「妈！我在这！」}) = 3$

随机变数 X 其实是一种函数，喂 X 吃一个 outcome，就吐出一个对应的数字。
数学上的表示法：

$$X: S \rightarrow \mathcal{R}$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

神马叫可数？神马叫不可数？



- 可数的：一个集合如果是「可数的」
这代表它包含的东西是可以一个个被数的。不管用什么方法数它里面的东西，它里面的任何一样东西，总是会被数到的！

例：正偶数集合 $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ 是可数的
随意取一个数字 892830701237409711237922
身为有恒心跟课的 MOOC 小子，总有一天会数到它的!!



神马叫可数？神马叫不可数？

- 不可数的：一个集合若是「不可数的」，这代表它包含的东西是无法可以一个个被数的。不管用什么方法数它里面的东西，它里面一定有一样东西是你没数到的！



神马叫可数？神马叫不可数？

重要性质：0 到 1 之间的所有数字的集合是不可数的！

小子：你这废大叔，我超有恒心，绝对可以把这些数字一个个全部数出来。

丙绅：不可能的。假设你真有办法数这集合中所有的数字。你就按照数的顺序，把数字一个个写下来！

小子：写就写！你这废大叔！

0. 2 5281 ...

0.3 8 290 ...

0.12 3 75 ...

⋮

丙绅抚须笑说：无知小子，你失算啦！有一个数字是你绝对没数到的！

小子：我不信！

丙绅：小子，猖狂！我包你没数到 0.716 ... (第 N 位数字定为 “9 – 第 N 个被数数字的第 N 位数字”)

小子虎躯一震！这才惊见自身之狂妄无知，才知眼前大叔威能。小子随即跪下恳求丙绅收其为徒，泣言日后必当用心向学。丙绅抚须沉吟...你去 Coursera 注册吧（后话不表）



在无穷多的世界很有趣啊！



- 「正整数的集合」跟「正偶整数」的集合相比，哪个集合里面东西比较多？
- 「长度为一的线段上的点」跟「边长为一的正方形上的点」，这两个集合，哪一个点的数量比较多？

都一样多！因为都可以找到一一对应的方法。
要好好记住！这是跟正妹开启聊天话题的一等素材啊！
是谁说学数学没用的？



随机变量的函数？



- 阿宅若看到店员微笑，就会点 \$200 的套餐。如果店员不笑，他就买 \$15 的饮料。
请问阿宅的消费金额 W 是随机变数吗？

店员表情可以由随机变量 X 代表： $X(\text{微笑}) = 0, X(\text{不笑}) = 1$

W 是 X 的函数： $W(X(\text{微笑})) = 200, W(X(\text{不笑})) = 15$

所以 W 也是喂 outcome 吐数字！因此 W 也是一个随机变数！

记住：随机变量的函数，也是一个随机变量喔！



本节回顾

- 随机变数的目的？
- 随机变数的本质？
- 随机变量的类型？
- 可数 vs. 不可数？





4-2: 累积分布函数 CDF (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION)

第四周



啥是累积分布函数 CDF?

- 对任一个随机变数 X ，我们定义其 CDF 为函数：

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \leq x)$$

随机变数



Ex: 幸运之轮

$$F_X(0.5) =$$



CDF 有什么用？

- 最有用的用途：

计算 X 落在某范围内的机率

$$P(\text{---} \xrightarrow{\text{red bar from 3 to 5}} \text{---}) = P(3 < X \leq 5)$$

The diagram shows a horizontal number line with points $-\infty$, 3, 5, and ∞ . A red bar is drawn between 3 and 5, with arrows at both ends pointing towards the bar. A green double vertical line is positioned below the number 3.

$$P(\text{---} \xrightarrow{\text{red bar from } -\infty \text{ to } 5} \text{---})$$

The diagram shows a horizontal number line with points $-\infty$, 5, and ∞ . A red bar is drawn from $-\infty$ to 5, with an arrow at the left end pointing left and an arrow at the right end pointing right. A green single vertical line is positioned below the number 5.

$$P(\text{---} \xrightarrow{\text{red bar from } -\infty \text{ to } 3} \text{---})$$

The diagram shows a horizontal number line with points $-\infty$, 3, and ∞ . A red bar is drawn from $-\infty$ to 3, with an arrow at the left end pointing left and an arrow at the right end pointing right.



- ## 计算 X 落在某范围内的机率

$P(X \leq b)$

$P(a \leq X \leq b)$

$$P\left(\left[-\infty, a \right] \right) =$$



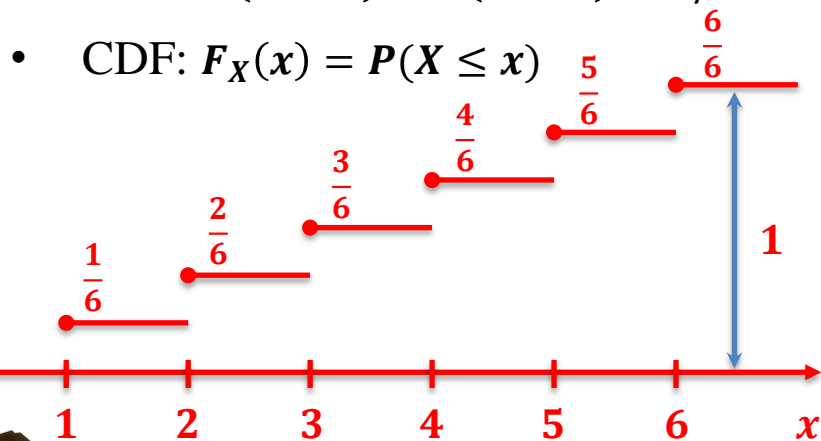
离散随机变数的 CDF 长怎样？



- Ex: X 为骰子的点数，故 $P(X = 1)$
 $= P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4)$
 $= P(X = 5) = P(X = 6) = 1/6$

$$- P(3 < X \leq 5)$$

=



$$- P(3 < X < 5)$$

=

$$- P(3 \leq X < 5) = ?$$

=

$$- P(3 \leq X \leq 5) = ?$$

=

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

连续随机变数的 CDF 长怎样？



- Ex: X 为幸运之轮所停下的数字， $X \in [0, 1)$
 - CDF: $F_X(x) = P(X \leq x)$

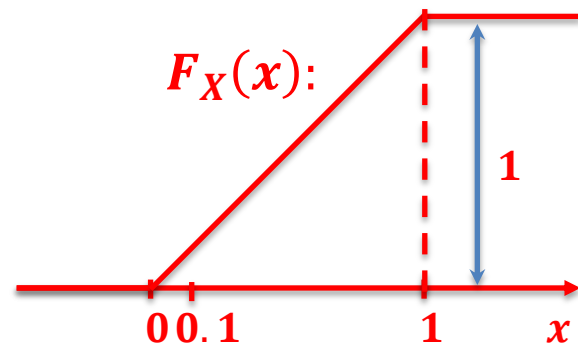
$$F_X(-0.1) = P(X \leq -0.1) = 0$$

$$F_X(0.1) = P(0 \leq X \leq 0.1) = 0.1$$

$$F_X(0.5) = P(0 \leq X \leq 0.5) = 0.5$$

$$F_X(1) = P(0 \leq X \leq 1) = 1$$

$$F_X(1.7) = P(0 \leq X \leq 1.7) = 1$$



$$- P(0.3 < X \leq 0.5)$$

=

$$- P(0.3 < X < 0.5)$$

=



CDF 的性质



- 离散随机变数之 CDF :

$$F_X(x^+) = F_X(x)$$

$$F_X(x^-) = F_X(x) - P(X = x)$$

- 连续随机变数之 CDF :

$$F_X(x^-) = F_X(x) = F_X(x^+)$$

- 共同性质

$$- F_X(-\infty) =$$

$$- F_X(\infty) =$$

$$- 0 \leq F_X(x) \leq 1$$



本节回顾

- CDF 的定义?
 - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- CDF 的用途?
 - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- CDF 的性质?





4-3: 机率质量函数 PMF (PROBABILITY MASS FUNCTION)

第四周



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

啥是机率质量函数 PMF ?

- 对任一个整数值 **离散随机变数** X ，我们定义其 PMF 为函数：

$$p_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X = x)$$

Ex: X 为公平骰子之点数
 $p_X(3) =$



PMF 跟 CDF 的关系？

$$F_X(2.5) = P(X \leq 2.5)$$

$$= P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) + P(X = -1) + \dots$$

最接近 2.5 且不大于 2.5 的整数

$$= \sum_{n=-\infty}^{2=\lfloor 2.5 \rfloor} P(X = n)$$

对任何 x :

$$F_X(x) =$$

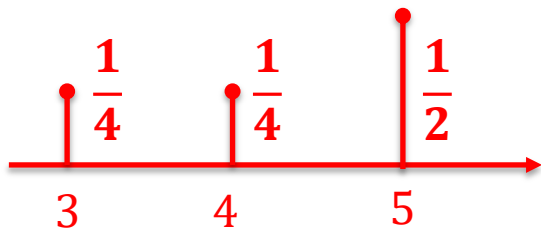


PMF 跟 CDF 的关系？

- Ex: PMF \rightarrow CDF



$P_X(x) :$

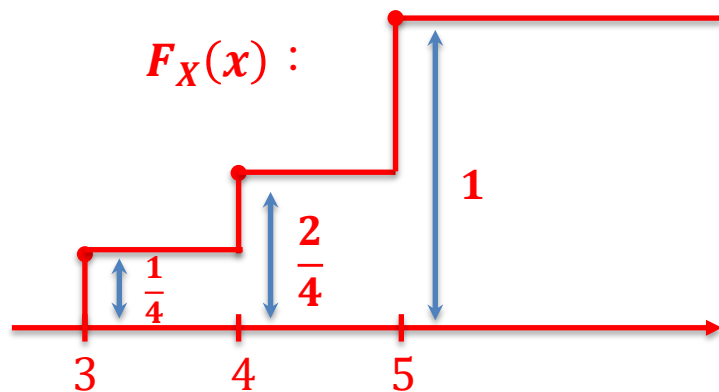


$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n) :$$



PMF 跟 CDF 的关系？

- Ex: CDF \rightarrow PMF

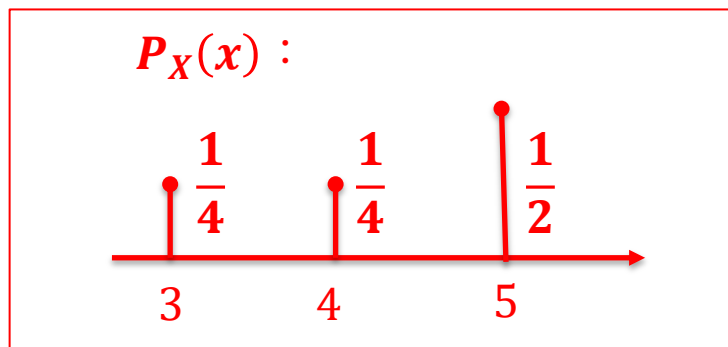


$$P_X(x) = F_X(x^+) - F_X(x^-) :$$



机率分布 (Probability Distribution)

- 任何一个 PMF (或是之后介绍的 PDF) 都称作是一种 **机率分布** (将总和为 1 的机率分布在点上之故)



本节回顾

- PMF的定义？
- PMF 跟 CDF 的关系？





4-4: 离散机率分布 I (DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

第四周



观察一下...

- 丢掷铜板：非正面，即反面，正面机率为 0.5
- 阿宅告白：非成功，即失败，成功机率为 0.7
- 出门天气：非晴天，即雨天，晴天机率为 0.6



1 次实验，2 种结果。

在意某结果发生否 → Bernoulli 机率分布



Bernoulli 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 **0.6**
作 **1** 次实验， **X** 表成功次数

$P_X(x)$:

$X \sim \text{Bernoulli}(\quad)$

$$p_X(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \end{array} \right.$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$F_X(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \end{array} \right.$$



Bernoulli 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 p
作 **1** 次实验， X 表成功次数

$P_X(x)$:

$X \sim \text{Bernoulli}(\quad)$

$$p_X(x) = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$F_X(x) = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$



观察一下...

- 阿宅鼓起勇气搭讪 10 人，若每次搭讪成功机率为 0.6，10 次成功 8 次的机率为？
- 一周 5 天午餐在晓福买魔石汉堡，若每次制作超时机率为 0.9，5 天中有 3 天制作超时的机率为？
- 一周有 3 系夜，在活大乱停车 3 次，若每次遭阿伯拖之机率为 0.8，那这 3 次被拖 2 次之机率为？



作 n 次实验，1 个机率，在意 n 次实验出现某结果 k 次之机率 \rightarrow Binomial 机率分布



Binomial 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 **0.6**
作 **10** 次实验， **X** 表成功次数

$$X \sim \text{BIN}(\quad , \quad)$$

$$p_X(8)$$

=

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(m)$$

=



Binomial 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 p
作 n 次实验, X 表成功次数

$$X \sim \text{BIN}(n, p)$$

$$p_X(x)$$

=

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(m)$$

=



观察一下...

- 丢公平骰：1 到 6 各点数出现机会均等
- 混哥考试：作答 A, B, C, D 机会均等
- 狡兔三窟：出现在窟 1、窟 2、窟 3 机会均等



**1 次实验， n 种结果，各结果机率均等。
在意某结果发生否 \rightarrow Uniform 机率分布**



Uniform 机率分布

- PMF: 如果 X 等于 $3, 4, \dots, 7$ 的机率均等
- CDF:



$$P_X(x) : \quad X \sim \text{UNIF}(\quad , \quad)$$



$$p_X(x) = \left\{ \right.$$

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$= \left\{ \right.$$



Uniform 机率分布

- PMF: 如果 X 等于 $a, a + 1 \dots, b$ 的机率均等
- CDF:



$$P_X(x) : \quad X \sim \text{UNIF}(\quad , \quad)$$



$$p_X(x) = \left\{ \right.$$

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$= \left\{ \right.$$



学机率分布有何用？

- 很多事物背后机率模型是未知的
- 对事物的运作方式、本质清楚后，若跟某机率分布的本质相同或是接近，我们便可采用该机率分布来近似、模拟该事物的运作
- 在这近似、仿真的机率模型上，便可以开始估算各式各样事件的机率



本节回顾

- 机率分布？
- Bernoulli 机率分布？
- Binomial 机率分布？
- Uniform 机率分布？





4-5: 离散机率分布 II

(DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

第四周



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

观察一下...



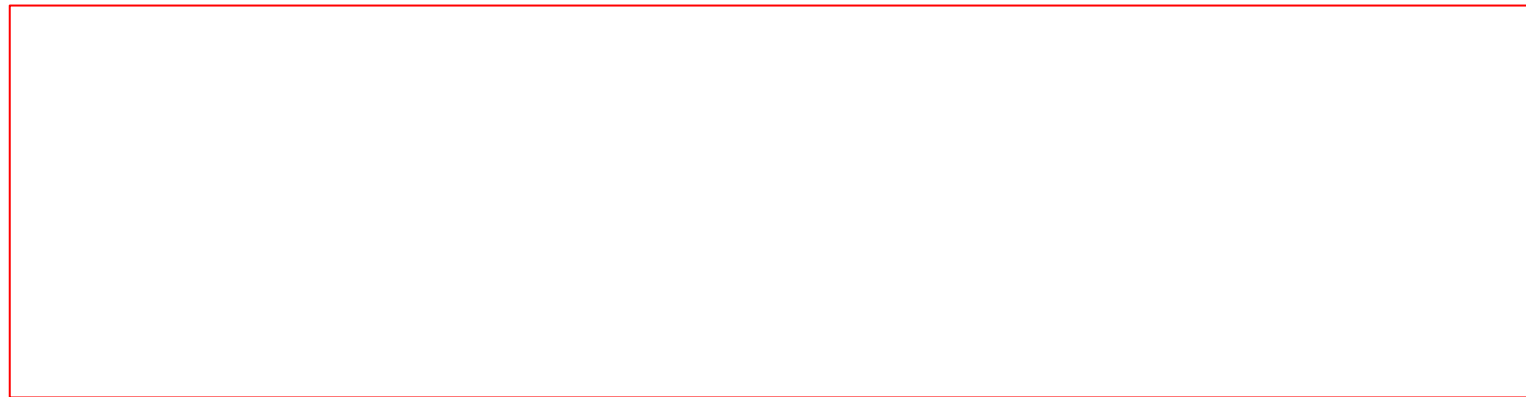
- 阿宅告白：成功机率为 0.3，不成功誓不休。问到第 5 次才告白成功之机率？
- 孙文革命：成功机率为 0.1，不成功誓不休。问到第 11 次才成功之机率？
- 六脉神剑：那纠缠狂妈宝废物段誉每次要打出六脉神剑，打的出来的机率为 0.1。他在 10 次才打出六脉神剑的机率？

实验中出现某结果机率已知，重复操作实验至该结果出现为止。
在意某结果是在第几次实验才首次出现 → Geometric 机率分布



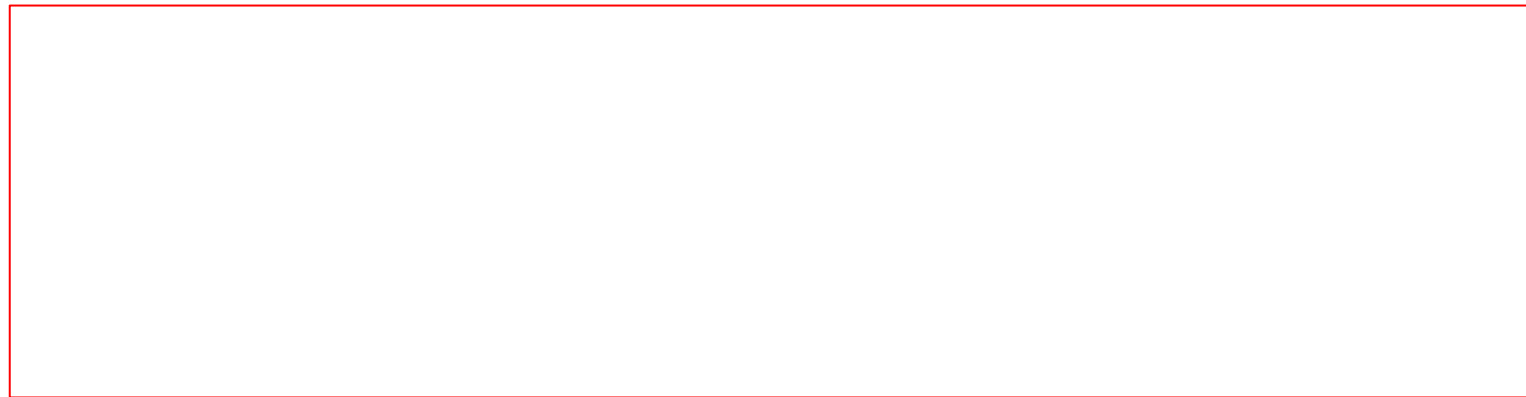
Geometric 机率分布

- 六脉神剑：那妈宝废物段誉每次要打六脉神剑，打的出来的机率为 0.1。他在第 10 次才打出六脉神剑的机率？



Geometric 机率分布

- 六脉神剑：那妈宝废物段誉每次要打六脉神剑，打的出来的机率为 p 。他在第 X 次尝试才成功打出六脉神剑。 $X = x$ 的机率？



Geometric 机率分布

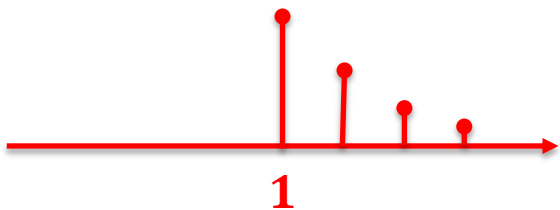
有失忆性！

- PMF: 若实验成功机率为 p ，尝试到成功为止，作了 X 次尝试
- CDF:



$P_X(x)$:

$X \sim \text{Geometric}(p)$



$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

=



观察一下...



- 自尊阿宅：阿宅邀约店员失败机率为 0.9，若邀约失败达 4 次，阿宅便会自尊有损而放弃追求。问在阿宅第 7 次邀约时决定放弃追求之机率？
- 六脉神剑：妈宝废物段誉每次打成功 5 次六脉神剑便功力耗尽。若每次打的出来的机率为 0.1。请问他在第 9 次时刚好功力耗尽的机率？

实验中出现某结果机率已知，重复操作实验至该结果出现第 k 次为止。在意到底在第几次实验才结束 → Pascal 机率分布



Pascal 机率分布

- 六脉神剑：那妈宝废物段誉每次要打六脉神剑，打的出来的机率为 0.1。成功 5 次便功力耗尽。请问他在第 9 次时刚好功力耗尽的机率？



Pascal 机率分布

- 六脉神剑：那妈宝废物段誉每次要打六脉神剑，打的出来的机率为 p 。成功 k 次便功力耗尽。他在第 X 次尝试才成功打出 k 次六脉神剑。 $X = x$ 的机率？



Pascal 机率分布

- PMF: 若实验成功机率为 p ，试到第 k 次成功为止共作了 X 次
- CDF:



$$X \sim \text{Pascal}(k, p)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$= P(\text{第 } k \text{ 次成功在第 } x \text{ 次以前发生})$$

$$= P(\text{在 } x \text{ 次实验中 } \geq k \text{ 次成功})$$

$$= P(Y \geq k), Y \sim \text{BIN}(x, p)$$

※故 *Pascal* 又称作 *Negative Binomial*



观察一下...



- 转角夜宵：在晚上 平均每小时会有 10 人 来跟转角哥买夜宵。 问摆摊 5 小时 有 60 人光顾之机率？
- 费雯被嘘：费雯兄 po 文后， 平均每分钟会有 5 人嘘之。 问发文后 二十分钟 变成 XX (100 嘘) 之机率？

某结果出现之平均速率 (rate: 次数/时间) 已知。问持续观察某时间长度后，看到该结果出现 k 次之机率？ \rightarrow Poisson 机率分布



Poisson 机率分布



- PMF: 已知某事发生速率为每单位时间 λ 次，观察时间为 T 时间单位。 X 为该观察时间内发生该事的总次数。则：

$$X \sim \text{POI}(\lambda T)$$

$$p_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda T} \cdot \frac{(\lambda T)^x}{x!}$$

$$\text{※ } \boxed{\mu = \lambda T}, X \sim \text{POI}(\mu) \Rightarrow P_X(x) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^x}{x!}$$



Poisson 机率分布

- CDF:

$$X \sim POI(\lambda T)$$

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(x) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^n}{n!}, & x = 0, 1, 2 \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

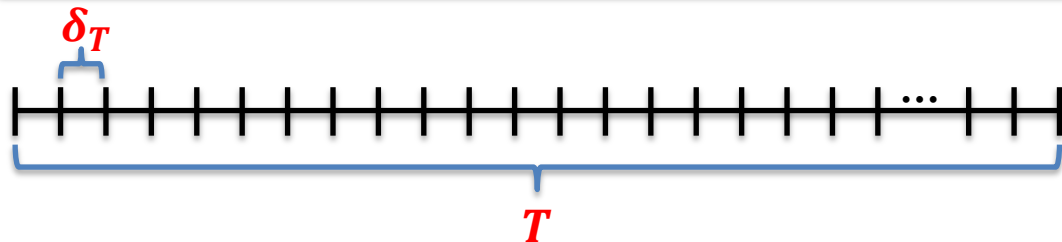


Poisson 机率分布

- 费雯被嘘：费雯兄 po 文后，平均每分钟会有 5 人嘘之。问发文后 20 分钟 变成 XX (100 嘘) 之机率？



Poisson 是怎么来的？



将 T 切成长度为 δT 的极小段

$\delta T \rightarrow 0 \Rightarrow$ 共有 $n = \frac{T}{\delta T} \rightarrow \infty$ 个小段。若发生速率为 λ 次/分，每个小段会发生的机率 $p = \lambda \delta T = \frac{\lambda T}{n}$ 。

故 T 时间内发生的次数 $X \sim \text{BIN}(n, p) = \text{BIN}\left(n, \frac{\lambda T}{n}\right)$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{\delta T \rightarrow 0} p_X(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)! x!} \left(\frac{\lambda T}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda T}{n}\right)^{n-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-x+1)}{x!} \frac{(\lambda T)^x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda T}{n}\right)^{n-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-x+1}{n} (\lambda T)^x \left(1 - \frac{\lambda T}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda T}{n}\right)^{-x} = \frac{(\lambda T)^x}{x!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda T}{n}\right)^n = \frac{(\lambda T)^x}{x!} e^{-\lambda T} \\ &\Rightarrow X \sim \text{POI}(\lambda T) \end{aligned}$$



你也懂 Poisson ? 略懂、略懂

- 草船借箭：曹军落箭平均密度为每尺见方三矢。诸葛孔明于船上置放草人六百。各草人正面面积为六尺见方。周瑜问诸葛孔明可借得万箭机率为何？



本节回顾

- Geometric 机率分布？
- Pascal 机率分布？
- Poisson 机率分布？
 - 跟 Binomial 的关系？

