机　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh
部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 7-1: 期望值 II
- 7-2: 随机变量之函数
- 7-3: 条件机率分布与失忆性

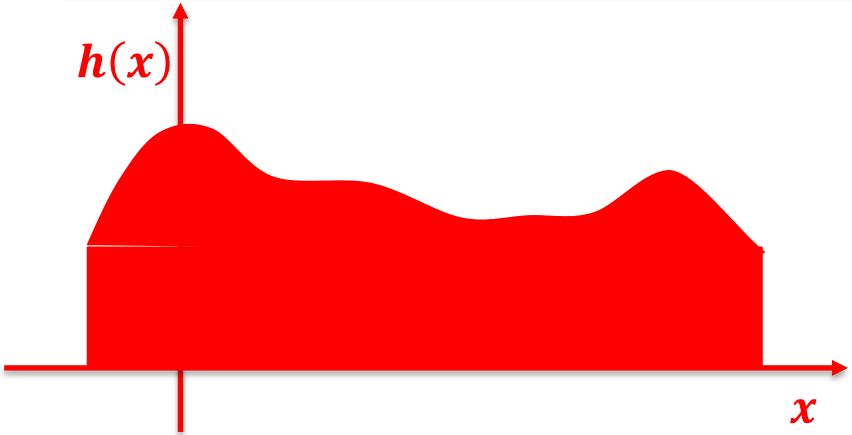
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-1: 期望值 II (EXPECTATION)

第七周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

积分的近似概念



面积$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$

面积 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$

$\Rightarrow$ 面积 $= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$

期望值 (Expectation)

- 对连续的随机变数 X 而言，想求期望值，我们用类似离散随机变量的方式出发
- 将 X 的值以 Δ 为单位无条件舍去来近似
  结果：离散随机变数 Y （当$\Delta\rightarrow 0$ 时，$X \approx Y$)
- 根据第五周：
  - $p_Y(n\Delta) = P(n\Delta \le X < n\Delta + \Delta) \approx f_X(n\Delta)\cdot\Delta$

$$X \in [0, \Delta) \rightarrow Y = 0\Delta$$
$$X \in [1\Delta, 2\Delta) \rightarrow Y = 1\Delta$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\boxed{X \in [n\Delta, (n+1)\Delta)} \rightarrow Y = n\Delta$$

- $E[X] = \lim_{\Delta\rightarrow 0} E[Y] = \lim_{\Delta\rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Delta \cdot P_Y(n\Delta)$

$$= \lim_{\Delta\rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Delta \cdot f_X(n\Delta)\cdot\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

随机变量的函数之期望值

- 对于任一连续随机变数 $\boldsymbol{X}$ 而言，其任意函数 $\boldsymbol{g(X)}$ 亦是一随机变量，亦有期望值
- $\boldsymbol{g(X)}$ 期望值定义为

$$E[g(X)] =$$

※ 离散随机变数：$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值运算的性质

- $\boldsymbol{E[\alpha\, g(X) + \beta\, h(X)]}$

  $=$

- Ex: $\boldsymbol{E\left[6\, X + 8\, X^2\right]} =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值运算的性质

- $\boldsymbol{E}[\alpha]$

  $=$

- Ex: $\boldsymbol{E}[6] = \boldsymbol{6}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见的随机变量函数期望值

- X的 n^{th} moment：

$$E[X^n] =$$

  - Ex: $E[X^2]$ 是 X 的 2^{nd} $moment$
  - Ex: $E[X^5]$ 是 X 的 $5^{th}moment$

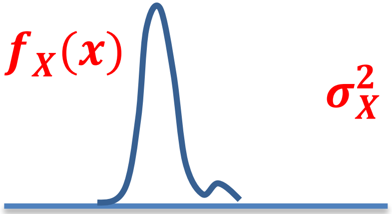
- X的变异数 (variance)：

$$E[(X-\mu_X)^2] =$$

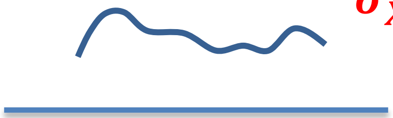
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

变异数 (Variance)

- Variance 通常符号表示为 $\boldsymbol{\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]}$
- 变异数隐含关于随机变数 $\boldsymbol{X}$ 多「乱」的信息



σ_X^2 小 ($\because x \approx \mu_X$)



σ_X^2 大 ($\because X$ 不见得接近 μ_X)

- 变异数的开根号便是标准差 (standard deviation)： $\boldsymbol{\sigma_X}$

$$\boldsymbol{\sigma_X} = \sqrt{\boldsymbol{Variance}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 便利算法

- $\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$

$$= E\left[X^2 - 2\mu_X \cdot X + \mu_X^2\right]$$

$$= E\left[X^2\right] + E[-2\mu_X X] + E[\mu_X^2]$$

$$= E\left[X^2\right] - \underbrace{2\mu_X \cdot E[X] + \mu_X^2}_{-2\mu_X^2+\mu_X^2} = \boxed{E\left[X^2\right] - \mu_X^2}$$

$$\Rightarrow E\left[X^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见连续分布之期望值/变异数

- $X \sim Exponential(\lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{1}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \sim Erlang\ (n, \lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{n}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{n}{\lambda^2}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见连续分布之期望值/变异数

- $X \sim Gaussian\ (\mu, \sigma)$：
  - $\mu_X = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \sigma^2$
- $X \sim UNIF\ (a, b)$：
  - $\mu_X = \frac{a+b}{2}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值推导范例

分部积分：

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

- $X \sim Exponential(\lambda)$： $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 连续随机变数的期望值定义？
- 连续随机变量的函数的期望值？
- 「凑」字诀！
- 常见连续机率分布之期望值、变异数？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-2: 随机变量之函数

第七周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

随机变数的函数

- 随机变数 $\boldsymbol{X}$ 的任意函数 $\boldsymbol{g(X)}$ 也是一个随机变数
- 通常被称为 Derived Random Variable

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

如何求 $g(X)$ 机率分布？

- 若 X 为离散：
  - 直接推 $g(X)$ 的PMF
- 若 X 为连续：
  - 先推 $g(X)$ 的 CDF，再微分得到PDF

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

离散 X 之函数

- Ex：某宅宅超爱战LOL。每次一战就连续战 X 场不可收拾，已知 $X \sim GEO(0.2)$。某宅宅内心仍有一点清明，其良心亦会因战过度而内疚，依战的次数多寡，内疚程度 Y 分别为 $1, 2, 3$ 不同等级:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \le X \le 3; \\ 2, & if\ 4 \le X \le 6; \\ 3, & if\ X \ge 7. \end{cases}$$

问 $Y = g(X)$ 的机率分布？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

离散 X 之函数

- $$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \le X \le 3; \\ 2, & if\ 4 \le X \le 6; \\ 3, & if\ X \ge 7. \end{cases}$$
- $X \sim GEO(0.2) \Rightarrow p_X(x) = (1-0.2)^{x-1} \cdot 0.2$
- $p_Y(1) =$
- $p_Y(2) =$
- $p_Y(3) = P(Y=3) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

离散 X 之函数

- 当 X 为离散随机变数时，
  $Y = g(X)$ 亦为离散随机变数
- $Y = g(X)$ 之 PMF 为

$$p_{g(X)}(y) = \sum_{\substack{\text{会让} \\ g(x)=y \\ \text{的所有 } x}} p_X(x)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数

- $Y = g(X)$ 且 X 为连续随机变数时先算 $g(X)$ 的CDF：

$$F_{g(X)}(y) = P[g(X) \le y]$$

- 若 $g(X)$ 可微分，再对 y 微分得到PDF：

$$f_{g(X)}(y) = \frac{d}{dy} F_{g(X)}(y)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 $(g(X) = aX + b)$

- Ex：若 $Y = 3X + 2$ ，请问 Y 的 PDF 跟 $f_X(x)$ 之关系为何？

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$=$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$
$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 $(g(X) = aX + b)$

- 若 $Y = aX + b$ 且 $a > 0$，则

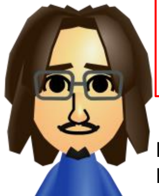
$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$what\ if\ a < 0?$

$F_Y(y) = P(aX + b \le y) =$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) =$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 ($g(X) = aX + b$)

- Ex：若 $X \sim Exponential(\lambda)$，且 $Y = 2X$，
  请问 Y 之机率分布为何？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 $(g(X) = aX^2 + b)$

- Ex：若 $Y = 2X^2 + 1$ ，且已知 $X \sim UNIF(\text{-}1, 7)$。请问 Y 的 PDF 为何？

$$F_Y(y) = P(Y = 2X^2 + 1 \leq y)$$

$$=$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 $(g(X) = aX^2 + b)$

$y \le 3: F_Y(y) =$

$y > 3: F_Y(y) =$

$\Rightarrow y \le 3: f_Y(y) =$

$y > 3: f_Y(y) =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 随机变量的函数又称？
- 若随机变数为离散，可直接推 $g(X)$ 之 PMF
- 若随机变数为连续，先推 $g(X)$ 之 CDF 再微分得到 PDF 比较好算

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-3: 条件机率分布与失忆性

第七周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

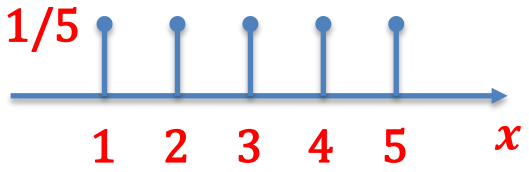
把条件机率用在机率分布上

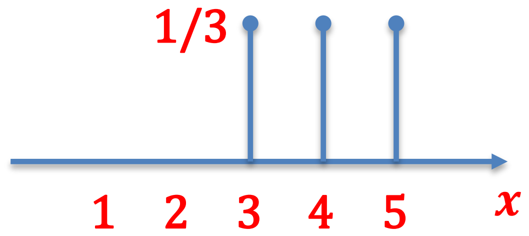
- Ex：为了更了解宅宅的心，店员妹亦开始战 LOL。已知店员妹战LOL场数 $X\sim UNIF\ (1,5)$。若已知店员妹战了两场仍战意甚浓、继续战。请问在此情况下，店员妹今日战LOL场数 X 之机率分布为何？

B：已战两场仍想战

$$p_{X|B}(x)=P(X=x|B)=\frac{P(X=x,B)}{P(B)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{P(X=x)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{3}, & x\in B: x=3,4,5\\ 0, & x\notin B, x=otherwise\end{cases}$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率分布 (Conditional Distribution)

- 若 $\boldsymbol{X}$ 是一离散随机变数，其 PMF 为 $\boldsymbol{p_X(x)}$。若已知某事件 $\boldsymbol{B}$ 已发生，则在此情况下之条件机率分布为：
  - PMF: $\boldsymbol{p_{X|B}(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x \in B}: & \dfrac{\boldsymbol{p_X(x)}}{\boldsymbol{P(B)}}, \\ \boldsymbol{x \notin B}: & \boldsymbol{0}. \end{cases}$
  - CDF: $\boldsymbol{F_{X|B}(x)} = \boxed{\sum_{u \le x} \boldsymbol{p_{X|B}(u)}} = \sum_{u \le x, u \in B} \dfrac{\boldsymbol{p_X(u)}}{\boldsymbol{P(B)}}$

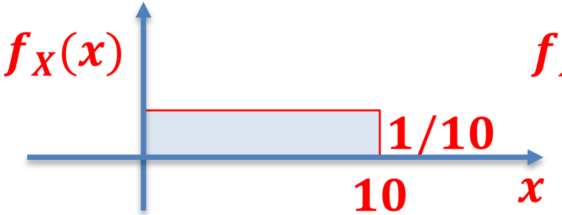
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

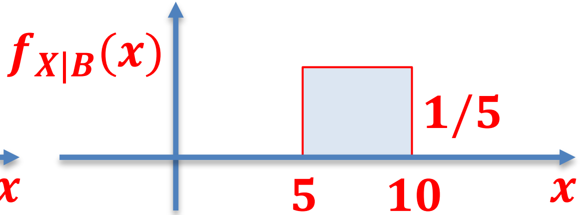
把条件机率用在机率分布上

- Ex：店员妹等公交车上班。通常等公交车的时间 X，从零到十分钟间可能性均等。若店员妹已等了五分钟车还没来。请问在此情况下，等车时间 X 之机率分布为何？

$X \sim UNIF(0,10)$

$\boxed{B: X > 5} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$





$$f_{X|B}(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{P(X \in [x, x+\Delta] | B)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(X \in [x, x+\Delta], X \in B)}{P(X \in B)}$$

$$= \begin{cases} x \in B: \lim_{\Delta\to 0} \dfrac{P(X \in [x, x+\Delta])}{\Delta \cdot P(B)} = \boxed{\dfrac{f_X(x)}{P(B)}}, \\ x \notin B: \qquad 0. \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率分布 (Conditional Distribution)

- 若 $\boldsymbol{X}$ 是一连续随机变量，其 PDF 为 $\boldsymbol{f_X(x)}$。若已知某事件 $\boldsymbol{B}$ 已发生，则在此情况下之条件机率分布为：
  - PDF: $\boldsymbol{f_{X|B}(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x \in B}: \\ \boldsymbol{x \notin B}: \end{cases}$
  - CDF: $\boldsymbol{F_{X|B}(x)} =$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知 $\boldsymbol{B}$ 已发生，则此情况下条件期望值为：

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}\,|\boldsymbol{B}] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p_{X|B}(x) & (\text{离散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)dx & (\text{连续}) \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知$\boldsymbol{B}$已发生，则此情况下条件期望值为：

$$E[g(X)\,|B] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\cdot p_{X|B}(x) & \text{(离散)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_{X|B}(x)dx & \text{(连续)} \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知B已发生，则此情况下条件期望值为：

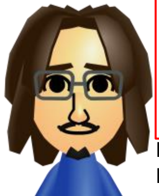
$$Var(X\,|B) = E\left[\left(X_{|B} - \mu_{X|B}\right)^2\right] = E\left[\left(X - \mu_{X|B}\right)^2 \middle| B\right]$$

$$= E\left[X^2 \middle| B\right] - \left(\mu_{X|B}\right)^2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失忆性 (Memoryless)

- 宅宅与店员妹相约出门。宅宅出门前在战LOL，场数 $X \sim GEO\ (0.2)$ 。店员妹等了两场后，宅宅还在玩。店员妹甚怒，怒催宅宅。宅宅曰「快好了、快好了」。问宅宅剩余场数 X' 之机率分布为何？ $B: X > 2, X' = X_{|B} - 2$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失忆性 (Memoryless)

- 店员妹与宅宅相约出门。店员妹出门前化妆时间为 X（小时），$X \sim Exponential(1)$。经过一小时后，仍未完成。宅宅甚怒，怒催店员妹。店员妹曰「快好了、快好了」。问店员妹剩余化妆时间 X' 机率分布为何？ $B: X > 1, X' = X_{|B} - 1$

$$F_{X'}(x) = P(X' \le x) = P\left(X_{|B} - 1 \le x\right) = P(X_{|B} \le x + 1)$$

$$F_{X|B}(x+1) = \int_{-\infty}^{x+1} f_{X|B}(u)du = ? \quad F_{X'}(x) = ? \quad f_{X'}(x) = ?$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失忆性 (Memoryless)

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失忆性 (Memoryless)

- Geometric 跟 Exponential 机率分布皆有失忆性的性质
- 不管事情已经进行多久，对于事情之后的进行一点影响都没有！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 某个事件发生后，随机变量的行为
跟其机率分布也会改变：条件机率分布
- 条件随机变量也是一个健全、可爱的随机变数！
- 身为一个健全、可爱的随机变数，人家一般随机变数该有的条件随机变数也应该都有！PMF (PDF)、CDF、期望值、Mean、Variance 等
- 随机变数中会失忆的是？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University