



机率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo 脸书: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 3-1: 机率的独立性
- 3-2: 图解繁复机率
- 3-3: 数数算机率





3-1: 机率的独立性

第三周



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

机率的独立性 (Independence)

- 常见定义：若两事件 A 、 B 之机率满足

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

则 A 、 B 两事件称为机率上的独立事件。



Mmm...到底什么叫独立呢？

- 天冷、老妈、穿衣服...超中二！



另一个更好的定义

- 常见定义：若两事件 A 、 B 之机率满足

$$P(A | B) = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

则 A 、 B 两事件称为机率上的独立事件。



范例

- 已知某生秦始皇作业表现与机率
作业表现相互独立。若秦始皇作业未作机率为 0.2，机率作业未作机率为 0.3。
问两科作业同时未作之机率为？



范例：水源阿伯的逆袭！！



台大学生最敬畏的水源阿伯们

范例：水源阿伯的逆袭！！



- 已知某校生爱乱停车。水源阿伯拖车时常有车主赶回求情。出现愤宅求情之机率为0.3。一般而言被人求情阿伯会放行的机率为0.2。水源阿伯，大公无私，天下皆知。问某日阿伯拖某车时出现愤宅求情且车未放行的机率？



范例：古锥姊 vs. 水源阿伯



- 某古锥姊有时会在活大停车不当。被拖时若及时赶回求情，古锥姊常一手搵嘴，一手指着车曰：「啊，那是我的车！」巧笑倩兮。
- 若以 A 代表古锥姊实时赶回求情之事件， B 代表阿辈放回古锥姊车的事件。根据某愤宅多日观察古锥姊行为：

$$P(\text{古锥姊未能求情 且 车未放行}) = 0.85$$

$$P(\text{古锥姊未能求情 且 车放行}) = 0.05$$

$$P(\text{古锥姊及时求情 且 车未放行}) = 0.01$$

$$P(\text{古锥姊及时求情 且 车放行}) = 0.09$$

愤宅泪眼悲愤控诉阿伯：「你不公平!!!」。

问：水源阿伯清誉，岂容愤宅任意污蔑！愤宅悲愤有理否？吾人该否为其一掬同情之泪？



多事件之独立



- 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 满足下列条件，则称此 n 事件独立 ($n > 2$)：

从中任选 m 事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ 均满足

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}), \quad m = 2, 3, \dots, n.$$

Ex: $n = 5, A_1, A_2, \dots, A_5$

$m = 2: P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)? \quad P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)? \dots$

$m = 3: P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)? \dots$

$m = 4: P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)? \dots$

$m = 5: P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)?$

全都相等 \Rightarrow 此五事件独立

有任一不相等 \Rightarrow 此五事件不独立



本节回顾

- 3-1: 机率的独立性

- 哪两种定义？

- 如何判断事件之间是否机率上相互独立？





3-2: 图解繁复机率

第三周



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

当碰到很复杂的机率问题时...

- 先观察这个问题的实验结构
- 这实验是否能分解成数个子实验？
- 若可以，则可以利用图解法！



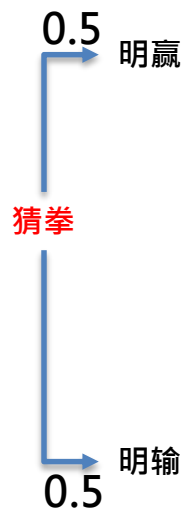
范例：兄弟情



- 明、华兄弟情笃。故决定一人放弃追求小美以免伤情谊。于罐中放入两白球、一黑球。游戏规则如下：
「猜拳决定谁先，之后轮流罐中取球；每次可取一至二球，直至有人抽中黑球为止。抽中黑者退出追求。」
- 已知猜拳输赢机率为 **0.5**，每次明取球取一颗之机率为 **0.4**，取两颗机率为 **0.6**。每次华取球取一颗之机率为 **0.7**，取两颗机率为 **0.3**。
- 问最后小明退出追求之机率为？



范例：兄弟情



本节回顾

- 3-2: 图解繁复机率
— 适用哪类问题？





3-3: 数数计算机率

第三周



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

身为一个热爱机率的青年，喜欢数数也是非常合理的！



- 古典机率常假设每个实验结果 (outcome) 发生机率相同
 - Ex: 包子摊肉包、菜包、豆沙包产量相同，外表一致。



- 故计算某事件机率之问题，等同于计算此事件包含多少实验结果 (outcome)。故计算器率等价于数数问题！



数数基本原则

(Fundamental Principle of Counting)

- 若某种实验有 n 种不同结果，而另一种实验有 m 种不同结果。若操作此两实验将有 nm 种不同结果。
 - Ex: 下午茶有 5 种甜点的选择，10 种饮料的选择。
共有多少种下午茶组合？



数数前的重要判断

- 所有的对象是否可区分？
(Distinguishable?)
- 实验中抽选的对象是否放回供下次抽选？
(With/Without Replacement?)
- 实验中被抽选的东西，抽选顺序是否有差异？
(Order matters or not?)



排列 (Permutation)



- Ex: 小美周末两日惯购物。小美常自明华园三兄弟找人接送。若两日司机不可重复，问有多少种结果？

- 可区分兮？
- 有放回兮？
- 顺序差异兮？

六 日



排列 (Permutation)

- 若有 n 异物，从中依序取出 k 物共有多少种结果？

$$\begin{array}{ccccccc} \text{第几次取物} : & \#1 & \#2 & \#3 & \dots & \#k \\ & n \times & n-1 \times & n-2 \times & \dots \times & n-(k-1) = \end{array}$$



重复选取 (Choose with Replacements)



- Ex: 小美周末两日惯购物。小美常自明华园三兄弟找人接送。无耻小美竟敢不排除连续凹人两天，问有多少种结果？

– 可区分兮？

– 有放回兮？

– 顺序差异兮？

六 日



重复选取 (Choose with Replacements)



- 若有 n 异物，从中选取一物，每次取完放回。依序选取 k 次，共有多少种结果？

$$\begin{array}{ccccccc} \text{第几次取物} : & \#1 & & \#2 & & \#3 & & \dots & & \#k \\ & n & \times & n & \times & n & \times \dots \times & n & = \end{array}$$



组合 (Combination)

- Ex: 小美爱玩跳棋。小美常自明华园三兄弟找两人下棋。问有多少种对战组合？

– 可区分兮？

– 有放回兮？

– 顺序差异兮？



组合 (Combination)

- 若有 n 异物，从中取出 k 物
共有多少种结果？



$$\begin{array}{ccccccc} \text{第几次取物} : & \#1 & \#2 & \#3 & \dots & \#k & \\ & n & \times (n-1) & \times (n-2) & \times \dots & \times (n-(k-1)) & \boxed{/k!} \\ & & & & & & \\ & & & & & & = \end{array}$$

※ $\binom{n}{k}$: 二项式系数 (*binomial coefficients*)

来自二项式定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$



组合 (Combination)

- Ex: 某系队共有**12**个篮球队员。
问有多少种先发组合？



多项组合 (Multinomial)



- Ex: 费雯兄惯于网络八卦版上发废文。第一楼推文常有四类
 - 你妈知道你在发废文吗
 - 见此唉滴必噓
 - 在五楼...
 - 妈！我在这！
- 问：费雯兄发文 **10** 次，一楼推文共有多少种组合？

- 问：有多少组合会看到 **4** 次「你...」，**3** 次「见...」，**2** 次「在五楼...」，**1** 次「妈...」？



多项组合 (Multinomial)



- 若有 m 种异物，每次选物从中选一后放回，依序选 n 次。如此共有 m^n 种实验结果。其中在这 m^n 种实验结果中，第 1 种异物出现 n_1 次且第 2 种异物出现 n_2 次且... 且第 m 种异物出现 n_m 次，这样的实验结果共有多少种？

$$\# \text{组合} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n_m}{n_m}$$

$$= \frac{n!}{n_1! (n-n_1)!} \frac{n-n_1!}{n_2! (n-n_1-n_2)!} \frac{n-n_1-n_2!}{n_3! (n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \frac{n_m!}{n_m!}$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \leftarrow \text{multinomial coefficient}$$

$$\begin{aligned} & \times (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n \\ &= \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^n \cdots \sum_{n_m=0}^n \left[\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \right] x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} \end{aligned}$$



数数如何应用在计算机率上呢？



- 若一事件包含数个实验结果 (outcome)，且每个实验结果发生的机率都一样
 - 先计算任一个实验结果的机率
 - 再计算该事件共包含多少个实验结果
 - 两者相乘便得到该事件的机率！



范例：费雯兄



- 继前述费雯兄好发废文之例。若根据统计，费雯兄一楼推文不同形态之出现机率为：
 - $P(\text{「你妈知道你在发废文吗」}) = 0.4$
 - $P(\text{「见此唉滴必噓」}) = 0.2$
 - $P(\text{「在五楼...」}) = 0.1$
 - $P(\text{「妈！我在这！」}) = 0.3$
- 问：若费雯兄发文 **6** 次，会在一楼推文看到 **2** 次「你...」，**2** 次「见...」，**1** 次「在五楼...」，**1** 次「妈...」。这样的机率为？

$$P(\underline{\text{你}} \quad \underline{\text{你}} \quad \underline{\text{见}} \quad \underline{\text{见}} \quad \underline{\text{五}} \quad \underline{\text{妈}}) =$$

$$P(2\text{你}, 2\text{见}, 1\text{五}, 1\text{妈}) =$$



本节回顾

- 3-3: 数数计算机率
 - 古典机率的概念？
 - 为何数数可以计算机率？
 - 如何区分不同形态的数数？

