Grundfragen der Informatik, KV

Mengenlehre und Prädikatenlogik

Überblick

Mengen

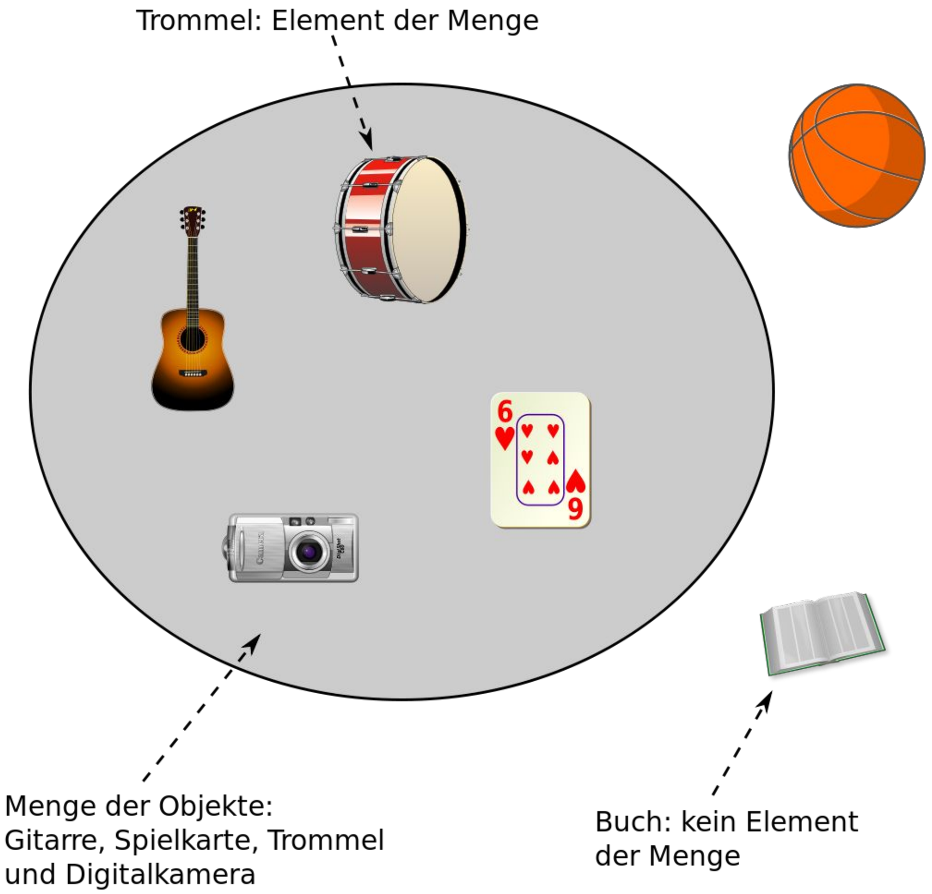
Mengenoperationen

Venn-Diagramm

Prädikatenlogik

Mengen

- A = {
  Spielkarten, Trommel,
  Gitarre, Kamera
  }
- T(12)={3, 4, 12, 6, 2, 1}
- |A| = 4 (Kardinalität)
- Mengen sind distinkt
- $\varnothing = \{\}$; $|\varnothing| = 0$



https://de.wikipedia.org/wiki/Menge_(Mathematik)

Mengen Notation = “set-builder”

Die Mengennotation erlaubt es Kriterien festzumachen, die definieren, ob ein Element einer Menge zugehörig ist. So können auch unendliche Mengen definiert werden:

$$C = \{x^2 \mid x \in N\}$$

$$D = \{x \mid x^2 \text{ mod } p=0,\ x \in N\}$$

$$E = \{x \in N \mid x^2 \text{ mod } p=0\}$$

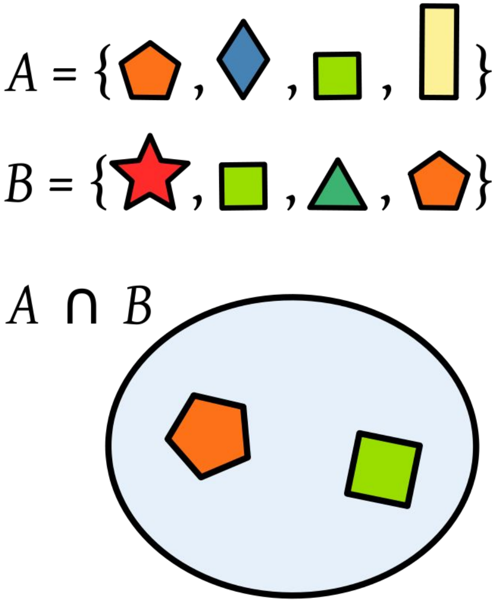
http://gdi.ist.tugraz.at/skriptum.pdf

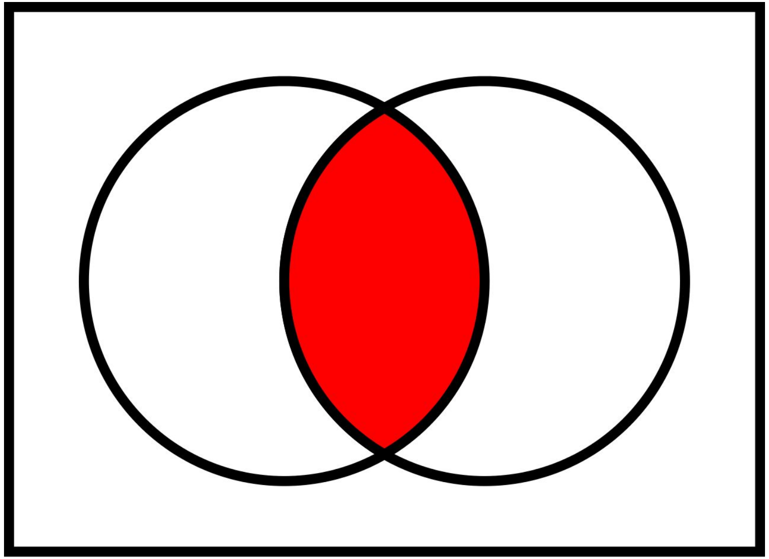
Abgrenzung von Begriffen

Liste	…	eine Liste ist eine geordnete Sammlung von beliebig vielen Elementen.
Sequenz	…	eine Sequenz ist eine geordnete Sammlung von beliebig vielen Elementen, die meistens auf eine endliche Größe beschränkt sind.
Tupel	…	eine geordnete Sammlung von homogenen Elementen endlicher Anzahl.
Menge	…	ungeordnete Sammlung von unterschiedlichen Objekten

http://gdi.ist.tugraz.at/skriptum.pdf

Schnittmenge - INTERSECTION - Konjunktion

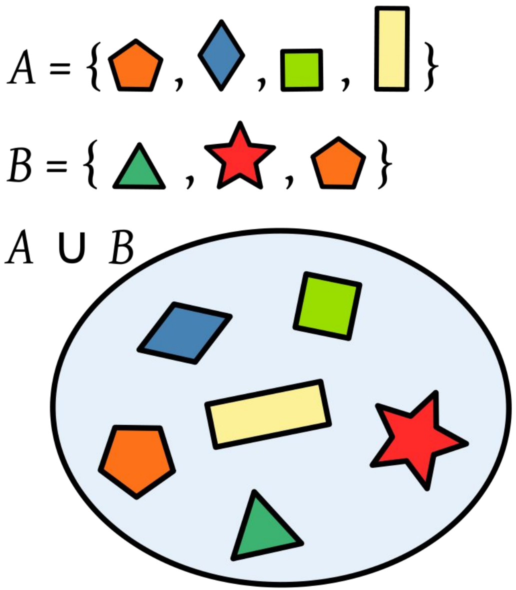


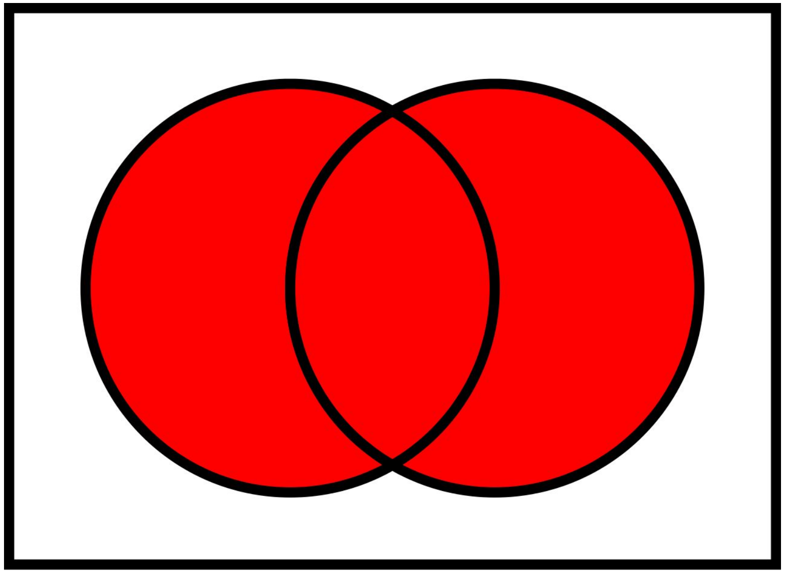


VENN-Diagramm

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

Vereinigung - UNION - Disjunktion

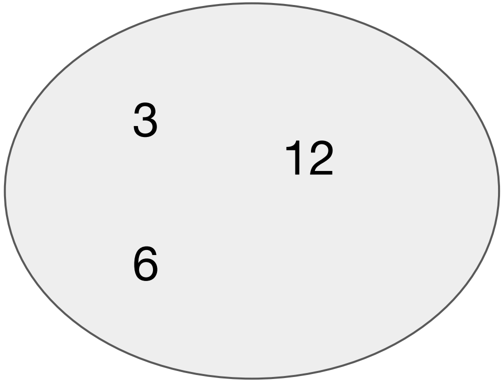


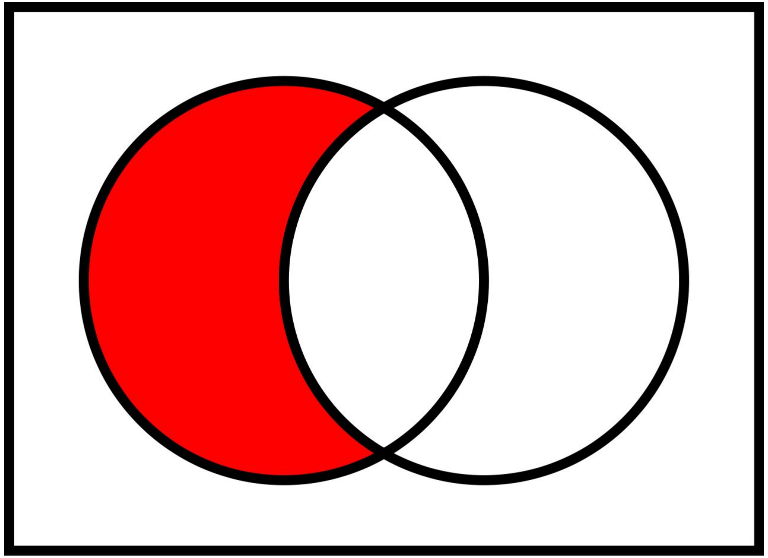


$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

Komplement und Differenz

- T(12)={3, 4, 12, 6, 2, 1}
- T(4)={4, 1, 2}





T(12)\T(4)

$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \land (x \notin B)\}$

Venn Diagram

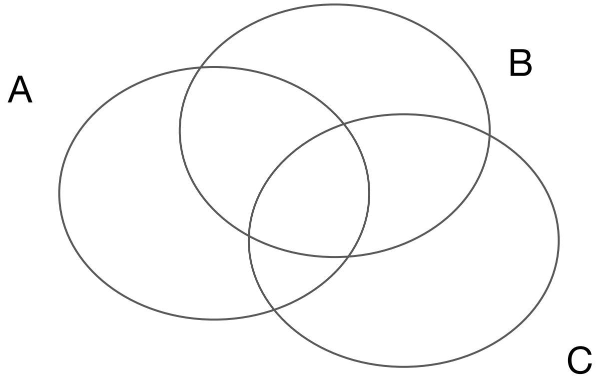
Zeichne:

- $S \cap (A \cup B)$ https://www.wolframalpha.com/input/?i=S+intersect+%28A+union+B%29
- $S' \cap (A \cup B)$ https://www.wolframalpha.com/input/?i=%28complement+S%29+intersect+%28A+union+B%29&lk=3

Übung

Beweise mittels VENN-Diagramm, ob die folgenden zwei Terme, in denen Mengenoperationen auf 3 Mengen (A,B,C) angewandt werden, gleich sind. Zeichne dazu die VENN-Diagramme (Kreise die sich schneiden) auf und schraffiere/färbe die Mengen, die durch die Operatoren definiert werden ein.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Lösung:

https://www.wolframalpha.com/input/?i=A%E2%88%AA%28B%E2%8B%82C%29+%3D+%28A%E2%88%AAB%29%E2%8B%82%28A%E2%88%AAC%29
±

Prädikatenlogik

- Die Prädikatenlogik erweitert die Aussagenlogik um **Quantoren** und **Prädikate**

- “*x is president of the USA*” → `P(x)`
  x ist eine Variable
  “*is president of the USA*” *das Prädikat*

- Für unterschiedliche Werte für x kann P(x) *true* oder *false* sein
  `P(“Donald Trump”) =` *`true`*
  `P(“Max Müller”) =` *`false`*

- Kann beliebig viele Variablen enthalten → `P(x,y)`
  `A(x1, x2)` entspricht `x1 + x2 = 10` ist `true` wenn `x1 = 2` und `x2 = 8`

Quantoren

- $\forall$ … *universal quantifier* $\forall x$ "für jedes x"
- $\exists$ … *existential quantifier* $\exists x$ "es existiert mindestens ein x"

- Quantoren dürfen nie alleine stehen

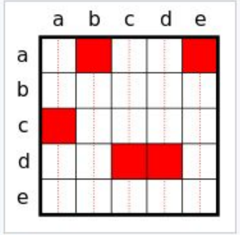
$P(x)$ … "x liebt jemanden"

$\forall x P(x)$ … für alle x gilt, dass sie jemanden lieben
→ Sepp liebt niemanden → P("Sepp) = false
Dann ist auch $\forall x P(x)$ = false

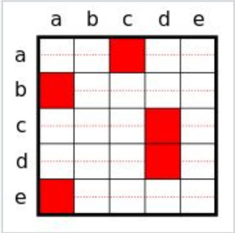
$\exists x P(x)$ … "es existiert ein x, das jemanden liebt

https://sites.math.washington.edu/~aloveles/Math300Winter2011/m300Quantifiers.pdf https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik

Keine Spalte/Zeile ist leer:



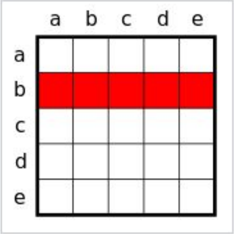
1. $\forall x \exists y Lyx$:
Jeder wird von jemandem geliebt.



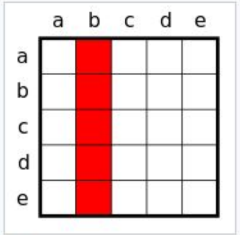
2. $\forall x \exists y Lxy$:
Jeder liebt jemanden.

“Die Richtung getauscht”

Eine Zeile/Spalte ist voll:

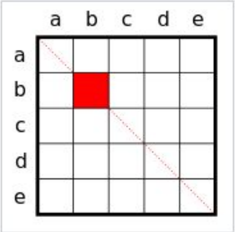


3. $\exists x \forall y Lxy$:
Jemand liebt alle.

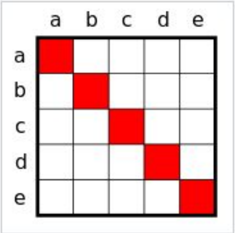


4. $\exists x \forall y Lyx$:
Jemand wird von allen geliebt.

Die Diagonale ist nichtleer/voll:

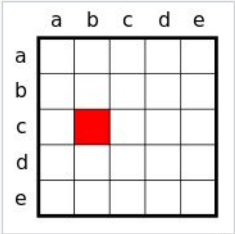


5. $\exists x Lxx$:
Jemand liebt sich selbst.



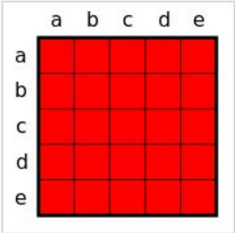
6. $\forall x Lxx$:
Alle lieben sich selbst.

Die Matrix ist nichtleer/voll:



7. $\exists x \exists y Lxy$:
Einer liebt einen.

8. $\exists x \exists y Lyx$:
Einer wird von einem geliebt.



9. $\forall x \forall y Lxy$:
Jeder liebt jeden.

10. $\forall x \forall y Lyx$:
Jeder wird von jedem geliebt.

<table>
<tr><th>Prädikatenlogik – Deutsch</th><th>Erklärung</th></tr>
<tr><td>$\forall x(\mathrm{Katze}(x) \Rightarrow \mathrm{Säugetier}(x))$
„Alle Katzen sind Säugetiere“
(Es kann auch Säugetiere geben, die keine Katzen sind, aber keine Katzen, die keine Säugetiere sind)</td><td><table><tr><td>$\forall x$</td><td>$\mathrm{Katze}(x)$</td><td>$\Rightarrow$</td><td>$\mathrm{Säugetier}(x)$</td></tr><tr><td>Für alle x:</td><td>(Gilt) x sei eine Katze</td><td>dann</td><td>sei x ein Säugetier</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\forall x(\mathrm{Katze}(x) \wedge \mathrm{Säugetier}(x))$
„Alles ist eine Katze und ein Säugetier“</td><td><table><tr><td>$\forall x$</td><td>$\mathrm{Katze}(x)$</td><td>$\wedge$</td><td>$\mathrm{Säugetier}(x)$</td></tr><tr><td>Für alle x gilt:</td><td>x sei eine Katze</td><td>und</td><td>x sei ein Säugetier</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\exists x(\mathrm{Stadt}(x) \wedge \mathrm{nördlich}(x, \mathrm{München}))$ [4]
„Es gibt mindestens eine Stadt nördlich von München“</td><td><table><tr><td>$\exists x$</td><td>$(\mathrm{Stadt}(x)$</td><td>$\wedge$</td><td>$\mathrm{nördlich}(x, \mathrm{München}))$</td></tr><tr><td>Es gibt mindestens ein x</td><td>das ist eine Stadt</td><td>und</td><td>nördlich von München liegt</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\neg\exists x(\mathrm{Stadt}(x) \wedge \mathrm{nördlich}(x, x))$ [5]
„Keine Stadt liegt nördlich ihrer selbst“</td><td><table><tr><td>$\neg\exists x$</td><td>$(\mathrm{Stadt}(x)$</td><td>$\wedge$</td><td>$\mathrm{nördlich}(x, x))$</td></tr><tr><td>Es gibt kein x</td><td>das eine Stadt ist</td><td>und</td><td>nördlich von x liegt</td></tr></table></td></tr>
</table>

https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dikatenlogik

Übung

Im folgenden seien die Quantoren $\forall x$ und $\exists x$ immer auf Menschen beschränkt.

- $\forall x$ bedeutet im folgenden immer "*Für alle Menschen x gilt...*"
- $\exists x$ bedeutet "*Für einige Menschen x gilt...*" oder "*Es gibt mindestens einen Menschen x, für den gilt...*"

Weiters sind folgende Individuenkonstanten, Prädikate und Relationen gegeben :

- `Joshua` ... `j`
- `Dave` ... `d`
- `Nick` ... `n`
- `Troy` ... `t`
- `x ist ein/e Musiker/in` ... `Mx`
- `x ist Musik-Kritiker/in` ... `Kx`
- `x mag y` ... `Rxy`

1. Joshua und Nick mögen sich nicht.
2. Joshua mag Dave und der mag Nick.
3. Jede Musikerin mag Joshua.
4. Keine Kritikerin, die Joshua mag, mag Nick nicht.
5. Jede Kritikerin, die auch Musikerin ist, mag Dave.
6. Einige Kritikerinnen mögen überhaupt niemanden

Lösung

1. Joshua und Nick mögen sich nicht.

   $\neg Rjn \land \neg Rnj$ (→ die beiden mögen sich nicht gegenseitig)

   $\neg Rjj \land \neg Rnn$ (→ keiner der beiden sich selbst mag)

2. Joshua mag Dave und der mag Nick.

   $Rjd \land Rdn$

3. Jede Musikerin mag Joshua.

   $\forall x(Mx \rightarrow Rxj)$

4. Keine Kritikerin, die Joshua mag, mag Nick nicht.

   $\neg \exists x(Kx \land Rxj \land \neg Rxn)$

5. Jede Kritikerin, der auch Musikerin ist, mag Dave.

   $\forall x((Kx \land Mx) \rightarrow Rxd))$

6. Einige Kritikerinnen mögen überhaupt niemanden

   $\exists x(Kx \land \forall y \neg Rxy)$

Allgemein kann man bei $\exists$ eine Konjunktion verwenden und bei $\forall$ eine Implikation. https://math.stackexchange.com/questions/906843/deciding-between-implication-and-conjunction