

Mémo DNB

Première partie : calcul, fonctions

CALCUL SUR LES FRACTIONS

Fractions égales

On obtient une fraction égale en multipliant (ou en divisant) numérateur et dénominateur par un même nombre non nul : pour tous nombres a, b, k (avec b et k non nuls)

$$\bullet \frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

$$\bullet \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple : simplification de fractions

$$\bullet \frac{25}{75} = \frac{25 \div 25}{75 \div 25} = \frac{1}{3} \quad \bullet \frac{35}{42} = \frac{35 \div 7}{42 \div 7} = \frac{5}{6}$$

Position du signe "-"

Pour tous nombres entiers a et b (avec $b \neq 0$) on a $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Addition, soustraction

Pour tous nombres entiers a, b, c ($c \neq 0$), on a : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemples : les deux fractions ont le même dénominateur

$$\bullet \frac{5}{7} + \frac{8}{7} = \frac{5+8}{7} = \frac{13}{7} \quad \bullet \frac{15}{11} - \frac{8}{11} = \frac{15-8}{11} = \frac{7}{11}$$

Exemples : les deux fractions n'ont pas le même dénominateur

On commence alors par réduire les deux fractions au même dénominateur :

$$\bullet \frac{5}{6} + \frac{7}{3} = \frac{5}{6} + \frac{14}{6} = \frac{19}{6} \quad \bullet \frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$$

Multiplication

Pour tous nombres entiers a, b, c et d (avec $b, d \neq 0$), on a : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Exemples :

$$\bullet 5 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{1 \times 3} = \frac{10}{3} \quad \bullet \frac{5}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 7}{4 \times 3} = \frac{35}{12}$$

$$\bullet \text{Simplifiez avant d'effectuer les produits : } \frac{15}{11} \times \frac{33}{25} = \frac{15 \times 33}{11 \times 25} = \frac{5 \times 3 \times 11 \times 3}{11 \times 5 \times 5} = \frac{9}{5}$$

Inverse, division

Soient a, b, c et d quatre nombres entiers (avec $b, c, d \neq 0$) :

• L'**inverse** de la fraction $\frac{c}{d}$ est $\frac{d}{c}$

• Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse de cette fraction : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemples :

$$\bullet 5 \div \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \quad \bullet \frac{5}{4} \div 3 = \frac{5}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$\bullet \frac{4}{15} \div \frac{12}{35} = \frac{4}{15} \times \frac{35}{12} = \frac{4 \times 35}{15 \times 12} = \frac{4 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 3 \times 4} = \frac{7}{3 \times 3} = \frac{7}{9}$$

CALCUL SUR LES PUISSANCES

Définitions

Soit n un entier naturel, soit a un nombre non nul quelconque : alors on définit

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}} \quad (\text{On pose } a^0 = 1)$$

Exemples : • $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ • $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ • $2^{10} = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{10 \text{ facteurs}} = 1\,024$

Cas particulier : les puissances de 10

Si n est un nombre entier positif, $10^n = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_{n \text{ zéros}}$

Exemples : • $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$ • $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$

Opérations sur les puissances

Si a est un nombre non nul quelconque, n et p deux nombres entiers (positifs ou négatifs) :

Multiplication : $a^n \times a^p = a^{n+p}$ **Inverse :** $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Division : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ **Exponentiation :** $(a^n)^p = a^{n \times p}$

Exemple : $\frac{(7^4)^2 \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^{4 \times 2} \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^8 \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^{8-2}}{7^4} = \frac{7^6}{7^4} = 7^{6-4} = 7^2 = 49$

Propriétés

Si a et b sont des nombres non nul quelconque, n un nombre entier (positif ou négatif) : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemples : • $20^4 = (2 \times 10)^4 = 2^4 \times 10^4 = 16 \times 1\,000 = 16\,000$ • $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-27}{8}$

Ecriture scientifique

Tout nombre décimal peut s'écrire de manière unique sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclus), et où n est un nombre entier relatif.

Exemples : • $752\,000 = 7,52 \times 10^5$ • $0,0051 = 5,1 \times 10^{-3}$ • $21 \times 10^3 = 2,1 \times 10^4$

Un exercice-type :

Donner l'écriture décimale et scientifique du nombre $A = \frac{70 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-5}}{2,8 \times 10^{-4}}$

$$A = \frac{70 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-5}}{2,8 \times 10^{-4}} = \frac{70 \times 2}{2,8} \times \frac{10^3 \times 10^{-5}}{10^{-4}} = \frac{140}{2,8} \times \frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 50 \times 10^2 = 5\,000 = 5 \times 10^3$$

RACINES CARRÉES

Définition

Soit a un nombre **positif**; il existe un unique nombre **positif** dont le carré est égal à a . Ce nombre est appelé **racine carrée de a** , et se note \sqrt{a} .

Exemples : • $\sqrt{9} = 3$ • $\sqrt{25} = 5$ • $\sqrt{100} = 10$

Les nombres dont la racine carrée est un nombre entier sont appelés **carrés parfaits**; en voici la liste des quinze premiers :

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
\sqrt{a}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Propriétés

- Pour tout nombre a positif, $(\sqrt{a})^2 = a$
- Pour tout nombre a , $\sqrt{a^2} = a$ si a est positif, $\sqrt{a^2} = -a$ si a est négatif
- Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Pour tous nombres a et b positifs ($b \neq 0$), $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples :

- $\sqrt{7^2} = 7$ • $\sqrt{4^2} = 4$ • $\sqrt{(-5)^2} = 5$ • $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$ • $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 3 \times 10 = 30$ • $\sqrt{0,16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = 0,4$
- $5\sqrt{3^2} = 5 \times 3 = 15$ • $(2\sqrt{6})^2 = 2^2 \times (\sqrt{6})^2 = 4 \times 6 = 24$
- $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ • $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$

⚠ Attention! En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, comme le montre l'exemple suivant :
 $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ mais $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Utiliser les identités remarquables :

$$(3 + 2\sqrt{5})^2 = (3)^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 = 9 + 12\sqrt{5} + 20 = 29 + 12\sqrt{5}$$

Éliminer le radical du dénominateur d'une écriture fractionnaire :

$$\bullet \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \quad \bullet \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$$

Simplifier une expression contenant des radicaux :

Ecrire sous la forme $a\sqrt{3}$ l'expression $\sqrt{75} - 6\sqrt{27} + 7\sqrt{300}$

$$\begin{aligned} \sqrt{75} - 6\sqrt{27} + 7\sqrt{300} &= \sqrt{25 \times 3} - 6\sqrt{9 \times 3} + 7\sqrt{100 \times 3} \\ &= 5\sqrt{3} - 6 \times 3\sqrt{3} + 7 \times 10\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 70\sqrt{3} \\ &= (5 - 18 + 70)\sqrt{3} \\ &= 57\sqrt{3} \end{aligned}$$

ARITHMÉTIQUE

Diviseur, multiple

Soient a et b deux nombres entiers positifs non nuls. On dira que a est un **diviseur** de b , ou que b est **divisible** par a , ou encore que b est un **multiple** de a s'il existe un nombre entier k tel que $b = k \times a$

Exemples : • 15 est un multiple de 3 (car $15 = 5 \times 3$) • 42 est divisible par 7

Critères de divisibilité

- Un nombre est **divisible par 2** s'il se termine par 2, 4, 6, 8 ou 0.
- Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre est **divisible par 4** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
- Un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples : • 180 est divisible par 2, 3, 4, 5 et 9 • 105 est divisible par 3 et 5

Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

Si a et b sont deux nombres entiers positifs, on note $\text{PGCD}(a;b)$ le **plus grand diviseur qui soit commun à a et à b** .

Déterminer le PGCD de deux nombres en écrivant la liste de leurs diviseurs :

On cherche $\text{PGCD}(72;40)$. On écrit la liste complète des diviseurs de ces deux nombres :
Les diviseurs de 40 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40. Ceux de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72. On en déduit que $\text{PGCD}(72;40)=8$

Déterminer le PGCD de deux nombres par soustractions successives :

On cherche $\text{PGCD}(72;40)$.

$$72 - 40 = 32 \quad 40 - 32 = 8 \quad 32 - 8 = 24 \quad 24 - 8 = 16 \quad 16 - 8 = 8 \quad 8 - 8 = 0$$

On a donc $\text{PGCD}(72;40)=8$

Déterminer le PGCD par l'algorithme d'Euclide

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
72	40	1	32
40	32	1	8
32	8	4	0

On cherche $\text{PGCD}(72;40)$.

Le PGCD est le dernier reste non nul, c'est-à-dire $\text{PGCD}(72;40)=8$.

Nombres premiers entre eux et fractions irréductibles

Deux nombres a et b sont dits **premiers entre eux** si $\text{PGCD}(a;b)=1$.

Si a et b sont premiers entre eux, alors la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible**.

Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

Si on simplifie une fraction $\frac{a}{b}$ par le PGCD de a et de b , alors on obtient une fraction irréductible.

Par exemple : $\text{PGCD}(72;40)=8$ nous permet de rendre irréductible $\frac{40}{72} = \frac{40 \div 8}{72 \div 8} = \frac{5}{9}$

Calcul littéral

1. Réduire une expression littérale :

Exemples :

- $2x + 5x = (2 + 5)x = 7x$
- $x + 6x = 1x + 6x = 7x$
- $2x \times 5x = 10x^2$
- $2x - 5x = (2 - 5)x = -3x$
- $x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{3}x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$
- $(3x)^2 = 9x^2$

2. Enlever des parenthèses précédées d'un signe + ou - :

Règle d'omission des parenthèses

Si une parenthèse est précédée d'un signe **+**, alors on peut supprimer ces parenthèses en **conservant les signes** intérieurs à cette parenthèse.

Si une parenthèse est précédée d'un signe **-**, alors on peut supprimer ces parenthèses en **changeant les signes** intérieurs à cette parenthèse.

Exemples :

- $2 + (x + 5) = 2 + x + 5$
- $2 - (x + 5) = 2 - x - 5$
- $2 + (x - 5) = 2 + x - 5$
- $2 - (x - 5) = 2 - x + 5$

3. Développer une expression littérale :

Développer un produit signifie le transformer en somme algébrique.

Règles de développement

Distributivité simple :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$k(a - b) = ka - kb$$

Distributivité double :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemples :

- $2(x + 5) = 2 \times x + 2 \times 5 = 2x + 10$
- $(x + 2)(2x - 5) = x \times 2x - x \times 5 + 2 \times 2x - 2 \times 5 = 2x^2 - 5x + 4x - 10 = 2x^2 - x - 10$
- $(1 + 5x)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 5x + (5x)^2 = 1 + 10x + 25x^2$

4. Factoriser une expression littérale :

Factoriser une somme algébrique signifie la transformer en produit.

Règles de factorisation

Facteur commun :

$$ka + kb = k(a + b)$$

$$ka - kb = k(a - b)$$

Identités remarquables :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemples :

- $3x + 3y = 3(x + y)$
- $4a^2 - 3a = 4a \times a - 3a = a(4a - 3)$
- $(2x + 1)(x - 3) - (6x - 5)(2x + 1) = (2x + 1)[(x - 3) - (6x - 5)] = (2x + 1)(-5x + 2)$
- $4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2(2x)(5) + (5)^2 = (2x - 5)^2$
- $(x + 2)^2 - 81 = (x + 2)^2 - 9^2 = (x + 2 - 9)(x + 2 + 9) = (x - 7)(x + 11)$

EQUATIONS & INÉQUATIONS

Définitions

Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre, appelée **inconnue** de l'équation.

Une **solution** de cette équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie. **Résoudre** une équation, c'est en trouver **toutes** les solutions.

Exemple : • -4 est une solution de l'équation $-3x - 5 = 7$ car, lorsque je remplace l'inconnue x par -4 dans l'équation, l'égalité est vérifiée : $(-3)(-4) - 5 = 12 - 5 = 7$
• mais 2 n'est pas une solution de l'équation $-3x - 5 = 7$ car, lorsque je remplace x par 2 , l'égalité n'est pas vérifiée : $(-3) \times 2 - 5 = -6 - 5 = -11 \neq 7$

Règles de calcul sur les égalités

Règle n°1 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en **ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres** de l'équation.

Règle n°2 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en **multipliant (ou divisant) les deux membres de l'équation par un même nombre non nul**.

Exemple : Résolvons l'équation $-3x - 5 = 7$:

- On utilise d'abord la **règle 1**, en ajoutant 5 aux deux membres de l'équation :
 $-3x - 5 + 5 = 7 + 5$, c'est-à-dire $-3x = 12$.
- On utilise ensuite la **règle 2**, en divisant par -3 chaque membre de l'équation :
 $\frac{-3x}{-3} = \frac{12}{-3}$, c'est à dire $x = -4$.
- On conclut : l'équation $-3x - 5 = 7$ admet pour unique solution le nombre -4 .

Définition

Une **équation-produit** est une équation qui s'écrit sous la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ (il peut y avoir plus de deux facteurs)

Règle du produit nul

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul. Autrement dit, dire que " $AB = 0$ " équivaut à dire que " $A = 0$ ou $B = 0$ ".

Exemple : résolvons l'équation $(3x - 7)(2x + 5) = 0$;

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul.

$$3x - 7 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 5 = 0$$

$$3x = 7 \quad \text{ou} \quad 2x = -5$$

$$x = \frac{7}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{2}$$

Ainsi, l'équation $(3x - 7)(2x + 5) = 0$ admet deux solutions, qui sont $\frac{7}{3}$ et $-\frac{5}{2}$

Définitions

Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre, appelée **inconnue** de l'inéquation.

Une **solution** de cette inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie. **Résoudre** une inéquation, c'est en trouver **toutes** les solutions.

Exemples : $-3x - 5 > 7$ est une inéquation, dont le **premier membre** est $-3x - 5$, et dont le **second membre** est 7.

- -6 est une solution de l'inéquation $-3x - 5 > 7$ car, lorsque je remplace l'inconnue x par -6 dans l'inéquation, l'inégalité est vérifiée : $(-3)(-6) - 5 = 18 - 5 = 13 > 7$
- -10 est une autre solution de cette inéquation car, lorsque je remplace l'inconnue x par -10 dans l'inéquation, l'inégalité est vérifiée : $(-3)(-10) - 5 = 30 - 5 = 25 > 7$
- 2 n'est pas une solution de l'inéquation $-3x - 5 > 7$ car, lorsque je remplace x par 2 , l'inégalité n'est pas vérifiée : $(-3) \times 2 - 5 = -6 - 5 = -11 \not> 7$!!

Règles de calcul sur les inégalités

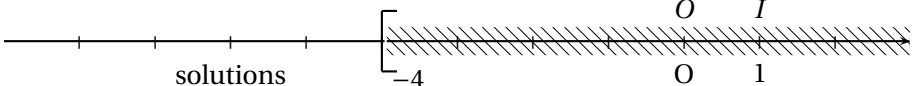
Règle n°1 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres** de l'inéquation.

Règle n°2 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **multipliant (ou divisant) les deux membres** de l'inéquation **par un même nombre strictement positif**.

Règle n°3 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **multipliant (ou divisant) les deux membres** de l'inéquation **par un même nombre strictement négatif**, à condition de **changer le sens de l'inégalité**.

Exemple : Résolvons l'inéquation $-3x - 5 > 7$

1. On utilise d'abord la **règle 1**, en ajoutant 5 aux deux membres de l'inéquation : $-3x - 5 + 5 > 7 + 5$, qui donne $-3x > 12$.
2. On utilise ensuite la **règle 3**, en divisant par -3 chaque membre de l'inéquation, **sans oublier de changer le sens de l'inégalité** (car -3 est négatif) : $\frac{-3x}{-3} < \frac{12}{-3}$ qui donne $x < -4$.
3. On conclut par une phrase : l'inéquation $-3x - 7 > 5$ admet pour solutions les nombres strictement inférieurs à -4 .
4. On peut représenter l'ensemble des solutions sur un axe, en **hachurant la partie de la droite graduée constituée des nombres qui ne sont pas solutions** :



⚠ Attention au sens du crochet ! Le crochet n'est pas tourné vers les solutions, car -4 n'est pas solution de l'inéquation $-3x - 7 > 5$.

FONCTIONS LINÉAIRES

Définition : fonction linéaire

Soit a un nombre quelconque « fixe ».

Si, à chaque nombre x , on peut associer son produit par a (c'est à dire $y = a \times x$), alors on définit **la fonction linéaire** de **coefficient** a , que l'on notera $f : x \mapsto ax$

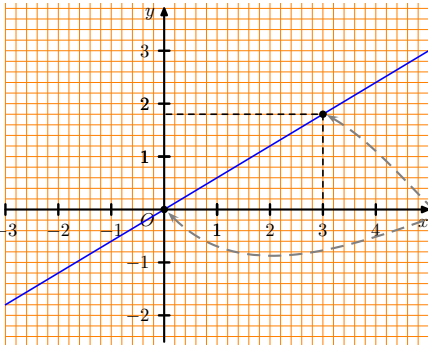
Une fonction linéaire de coefficient a représente une situation de **proportionnalité** (dans laquelle le coefficient de proportionnalité est égal à a).

Pour calculer l'image d'un nombre, on le multiplie par a .

Représentation graphique

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une **droite passant par l'origine du repère**.

► Représenter graphiquement une fonction linéaire

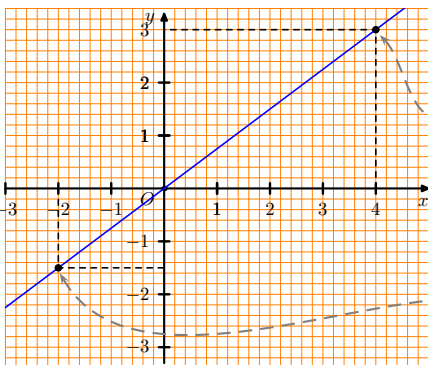


Ci-contre est représentée graphiquement la fonction linéaire f de coefficient $0,6$, que l'on peut noter $f : x \mapsto 0,6x$. Comme f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite qui passe par **l'origine du repère**.

De plus, pour trouver un second point de cette droite, on peut calculer l'image de 3 : $f(3) = 0,6 \times 3 = 1,8$.

Je place **le point de coordonnées (3; 1,8)** et je trace la droite.

► Exploiter la représentation graphique d'une fonction linéaire



Ci-contre est représentée graphiquement une fonction linéaire. Pour lire graphiquement l'image du nombre 4 , on repère **le point de la droite dont l'abscisse est 4** , puis on lit **l'ordonnée** de ce point. Ici, on peut lire que **l'image de 4 est 3**

Pour lire graphiquement le nombre dont l'image est $-1,5$, on repère **le point de la droite dont l'ordonnée est $-1,5$** , puis on lit **l'abscisse** de ce point. Ici, on voit que **le nombre dont l'image est $-1,5$ est -2** .

► Déterminer le coefficient d'une fonction linéaire, lorsqu'on connaît un nombre et son image

Dans l'exemple précédent, on considère une fonction linéaire de coefficient a inconnu, que l'on note $f: x \mapsto ax$.

Or nous avons vu que l'image de 4 par cette fonction est égale à 3; cela signifie que $3 = a \times 4$, ce qui nous permet de déterminer le coefficient de la fonction : $a = \frac{3}{4} = 0,75$.

Equation de droite, coefficient directeur

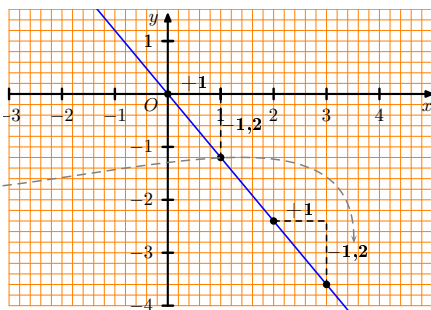
Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient a .

On dit alors que a est le **coefficient directeur** de la droite (d) et que $y = ax$ est une **équation de la droite** (d) .

► Interprétation graphique du coefficient directeur :

Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient $-1,2$; le **coefficient directeur** de la droite (d) est donc $-1,2$, et son équation est $y = -1,2x$.

Graphiquement, voici comment lire le coefficient directeur :



Fonctions linéaires et pourcentages

- Prendre $t\%$ d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{t}{100}$, c'est-à-dire lui appliquer la fonction linéaire $x \mapsto \frac{t}{100}x$.
- Augmenter un nombre de $t\%$, c'est multiplier ce nombre par $(1 + \frac{t}{100})$, c'est-à-dire lui appliquer la fonction linéaire $x \mapsto (1 + \frac{t}{100})x$.
- Diminuer un nombre de $t\%$, c'est multiplier ce nombre par $(1 - \frac{t}{100})$, c'est-à-dire lui appliquer la fonction linéaire $x \mapsto (1 - \frac{t}{100})x$.

Exemples :

- Diminuer un nombre x de 12% c'est effectuer $x \times (1 - \frac{12}{100}) = x \times 0,88$. A cette action, on associe la fonction linéaire $x \mapsto 0,88x$.
- Augmenter un nombre x de 3% c'est effectuer $x \times (1 + \frac{3}{100}) = x \times 1,03$. A cette action, on associe la fonction linéaire $x \mapsto 1,03x$.

FONCTIONS AFFINES

Définition : fonction affine

Soient a et b deux nombres quelconques « fixes ».

Si, à chaque nombre x , on peut associer le nombre $ax + b$, alors on définit **une fonction affine**, que l'on notera $f : x \mapsto ax + b$.

On dit que $x \mapsto ax$ est la **fonction linéaire associée** à la fonction affine $x \mapsto ax + b$.

Pour calculer l'image d'un nombre, on le multiplie par a , puis on ajoute b .

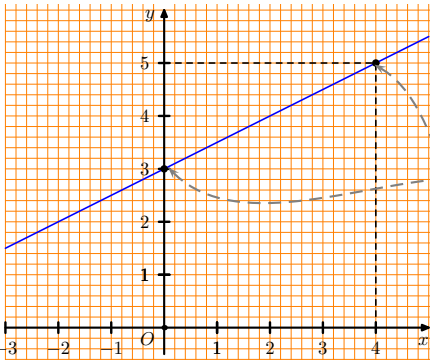
Remarque : Lorsque $b = 0$ On obtient $f : x \mapsto ax$, c'est à dire une fonction **linéaire**.

Représentation graphique

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une **droite** :

- passant par le point de coordonnées $(0; b)$
- qui est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire associée

► Représenter graphiquement une fonction affine



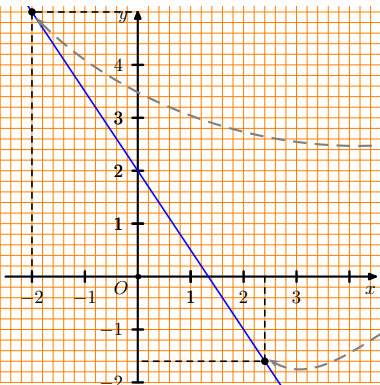
Ci-contre est représentée graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto 0,5x + 3$

Comme f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite qui passe par le point de coordonnées $(0; 3)$.

De plus, pour trouver un second point de cette droite, on calcule - par exemple - l'image de 4 : $f(4) = 0,5 \times 4 + 3 = 5$.

Je place le point de coordonnées $(4; 5)$ et je trace la droite.

► Exploiter la représentation graphique d'une fonction affine



Ci-contre est représentée graphiquement une fonction affine. Pour lire l'image du nombre -2 , on repère le point de la droite dont l'**abscisse** est -2 , puis on lit l'**ordonnée** de ce point.

Ici, on peut lire que **l'image de -2 est 5**.

Pour trouver le nombre dont l'image est $-1,6$, on repère le point de la droite dont l'**ordonnée** est $-1,6$, puis on lit l'**abscisse** de ce point. Ici, on peut lire que **le nombre dont l'image est $-1,6$ est $2,4$** .

Equation de droite, coefficient directeur, ordonnée à l'origine

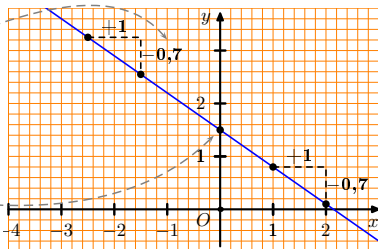
Soit (d) la droite qui représente la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

On dit alors que a est le **coefficient directeur** de la droite (d) , que b est l'**ordonnée à l'origine**, et que $y = ax + b$ est une **équation de la droite** (d) .

► Interprétation graphique du coefficient directeur :

Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction affine $x \mapsto -0,7x + 1,5$; le **coefficient directeur** de la droite (d) est donc $-0,7$, son **ordonnée à l'origine** est $1,5$ et son **équation** est $y = -0,7x + 1,5$.

Graphiquement, voici comment lire le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :



Proportionnalité des accroissements

Soit f une fonction affine $x \mapsto ax + b$. Les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x , et le coefficient de proportionnalité est a .

(+6)		
x	-1	5
$f(x)$	5	2
(-3)		

Exemple : Lorsque la variable x augmente de 6 unités (+6), $f(x)$ diminue de 3 unités (-3). Comme les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x , et le coefficient de proportionnalité est a , on peut en déduire que $a = \frac{-3}{6} = -0,5$.

► Déterminer l'expression d'une fonction affine, lorsqu'on connaît deux nombres et leurs images

On veut déterminer la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ vérifiant $f(-1) = 5$ et $f(5) = 2$

Méthode n°1 :

De $f(-1) = 5$ on tire l'égalité $-a + b = 5$
et de $f(5) = 2$ on tire $5a + b = 2$

On soustrait membre à membre les deux égalités : $(-a + b) - (5a + b) = 5 - 2$,

ce qui donne $-6a = 3$,

qui donne $a = \frac{3}{-6} = -0,5$.

On reprend l'égalité $-a + b = 5$ pour trouver la valeur de b , en remplaçant a par $-0,5$:

cela donne $-(-0,5) + b = 5$,

c'est-à-dire $0,5 + b = 5$

qui nous donne $b = 5 - 0,5 = 4,5$

En conclusion, la fonction affine recherchée est $f : x \mapsto -0,5x + 4,5$.

Méthode n°2 :

On utilise la propriété de proportionnalité des accroissements :

(+6)		
x	-1	5
$f(x)$	5	2
(-3)		

Lorsque x augmente de 6, son image diminue de 3; on

doit donc avoir $a = \frac{\text{Variations de } f(x)}{\text{Variations de } x} = \frac{-3}{6} = -0,5$.

De plus, de $f(-1) = 5$ on tire l'égalité $-a + b = 5$,

ce qui nous donne, en remplaçant a par sa valeur, $-(-0,5) + b = 5$, c'est-à-dire $0,5 + b = 5$

d'où l'on tire $b = 5 - 0,5 = 4,5$

En conclusion, la fonction affine recherchée est

$f : x \mapsto -0,5x + 4,5$.

SYSTÈMES

Définition

► Une **équation linéaire à deux inconnues** x et y est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ux + vy = w$, où u , v et w sont trois nombres réels.

Un couple $(x_0; y_0)$ de nombres réels sera un **couple solution** de cette équation si, lorsque l'on remplace x par x_0 et y par y_0 , l'égalité est vérifiée.

► Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme
$$\begin{cases} ux + vy = w \\ u'x + v'y = w' \end{cases} \quad \text{où } u, v, w, u', v' \text{ et } w' \text{ sont des nombres réels.}$$

Résoudre un tel système consiste à déterminer, s'il y en a, **tous** les couples qui sont solutions des deux équations **à la fois**.

Exemples :

- le couple $(4; 1)$ est un couple solution de l'équation $2x - 4y = 4$, car $2 \times 4 - 4 \times 1 = 4$
- le couple $(5; 2)$ n'est pas un couple solution de l'équation $2x - 4y = 4$, car $2 \times 5 - 4 \times 2 = 2 \neq 4$
- le couple $(4; 1)$ n'est pas un couple solution du système
$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}, \text{ car } \begin{cases} 24 - 41 = 4 \\ 4 - 31 = 1 \neq 6 \end{cases}$$

Résolvons par le calcul le système
$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$
 de **deux manières** différentes :

Première méthode : substitution

• **Etape 1 :** On exprime, grâce à l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre. Ici il est facile d'exprimer x en fonction de y grâce à la seconde équation :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$$

• **Etape 2 :** On substitue x par $3y + 6$ dans la première équation :

$$\begin{cases} 2(3y + 6) - 4y = 4 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$$

• **Etape 3 :** On développe, on réduit et on résout l'équation d'inconnue y ainsi obtenue :

$$\begin{cases} 6y + 12 - 4y = 4 \\ x = 3y + 6 \\ y = -4 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$$

• **Etape 4 :** On remplace y par sa valeur dans la seconde équation pour trouver x

$$\begin{cases} y = -4 \\ x = 3(-4) + 6 \\ y = -4 \\ x = -6 \end{cases}$$

• **Etape 5 :** On vérifie que les valeurs trouvées pour x et y conviennent :

$$\begin{cases} 2(-6) - 4(-4) = 4 \\ (-6) - 3(-4) = 6 \end{cases}$$

• **Etape 6 :** On conclut : le système admet un unique couple solution, qui est $(-6; -4)$.

Deuxième méthode : élimination par combinaison

• **Etape 1 :** On multiplie une des équations (ou les deux) par un (des) nombre(s) bien choisi(s), de façon que les coefficients d'une même inconnue soient opposés. Ici on multiplie la seconde équation par -2 :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ -2x + 6y = -12 \end{cases}$$

• **Etape 2 :** On additionne les deux équations membre à membre **pour éliminer l'une des inconnues**, et on remplace l'une des équations (par exemple, ici, la seconde) par l'équation ainsi obtenue :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ (2x - 4y) + (-2x + 6y) = 4 + (-12) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ 2y = -8 \end{cases}$$

• **Etape 3 :** On résout l'équation d'inconnue y ainsi obtenue :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

• **Etape 4 :** On remplace y par sa valeur dans la première équation pour trouver x

$$\begin{cases} 2x - 4(-4) = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

• **Etape 5 :** On résout l'équation d'inconnue x ainsi obtenue :

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$$

• **Etape 6 :** On vérifie que les valeurs trouvées pour x et y conviennent :

$$\begin{cases} 2(-6) - 4(-4) = 4 \\ (-6) - 3(-4) = 6 \end{cases}$$

• **Etape 7 :** On conclut : le système admet un unique couple solution, qui est $(-6; -4)$.

Interprétation graphique

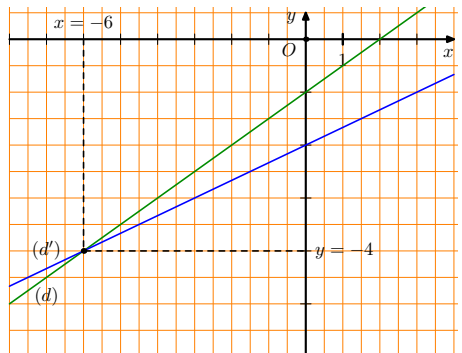
► On commence par transformer les deux équations du système, de façon à les mettre sous la forme d'une équation de droite du type ($y = ax + b$).

$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -4y = -2x + 4 \\ -3y = -x + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0,5x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$$

► Dans un repère, on trace les deux droites correspondant à ces deux équations.

Soit (d) la droite d'équation $y = 0,5x - 1$, tracée en bleu sur le graphique

et (d') la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x - 2$, tracée en vert sur le graphique.



les couples solutions de ce système sont les coordonnées des points communs aux deux droites, s'il y en a.

STATISTIQUES

Calculs de moyennes

► Si la série est donnée sous la forme d'une liste

Voici les notes obtenues à un contrôle par les 21 élèves d'une classe :

8 3 14 17 5 12 11 9 10 15 8 19 4 11 6 9 9 10 10 9 14

Pour calculer la moyenne de cette série de notes, on additionne toutes les notes, et on divise par le nombre total de notes :

$$m = \frac{8 + 3 + 14 + 17 + 5 + \dots + 9 + 10 + 10 + 9 + 14}{21} = \frac{213}{21} \approx 10,14$$

► Si les valeurs de la série sont regroupées dans un tableau avec effectifs

Voici les notes obtenues à un autre contrôle par les 25 élèves d'une autre classe :

Notes	2	4	6	7	8	9	10	11	12	14	17
Effectif	1	2	1	2	2	3	4	6	2	1	1

La moyenne est alors dite **pondérée par les effectifs**.

Pour calculer cette moyenne, on commence par effectuer les produits des notes par les effectifs associés, puis on additionne tous ces produits, et on divise la somme obtenue par le nombre total de notes :

$$m = \frac{2 + 4 \times 2 + 6 + 7 \times 2 + 8 \times 2 + 9 \times 3 + 10 \times 4 + 11 \times 6 + 12 \times 2 + 14 + 17}{25} = \frac{234}{25} = 9,36$$

► Si les valeurs de la série sont regroupées par classes

Par exemple, voici la répartition des salaires de 200 salariés d'une entreprise :

Salaires	$1000 \leq S < 1200$	$1200 \leq S < 1400$	$1400 \leq S < 1600$	$1600 \leq S < 1800$	$1800 \leq S < 2000$
Centre	1100	1300	1500	1700	1900
Effectif	36	44	64	40	16

On considère alors qu'une classe donnée sera représentée, dans le calcul, par son centre, et on utilise le centre de la classe pour calculer la moyenne pondérée par les effectifs ; on obtient une valeur approchée du salaire moyen réel.

$$m = \frac{1100 \times 36 + 1300 \times 44 + 1500 \times 64 + 1700 \times 40 + 1900 \times 16}{200} = \frac{291200}{200} = 1456$$

Médiane d'une série statistique

La **médiane** \mathcal{M} d'une série statistique est la valeur qui partage la population étudiée en deux sous-groupes de même effectif, chacun tels que :

- tous les éléments du 1^{er} groupe ont des valeurs inférieures ou égales à \mathcal{M} ;
- tous les éléments du 2^{ème} groupe ont des valeurs supérieures ou égales à \mathcal{M} .

La médiane et la moyenne sont (en général) **différentes**.

Détermination de la médiane d'une série statistique

► A partir d'un tableau d'effectifs cumulés ou de fréquences cumulées

Voici la série des notes obtenues à un contrôle par les 25 élèves d'une classe :

Notes	2	4	6	7	8	9	10	11	12	14	17
Effectif	1	2	1	2	2	3	4	6	2	1	1
Eff. cum. croissants	1	3	4	6	8	11	15	21	23	24	25

Les notes étant rangées dans l'ordre croissant, la case rouge indique que, de la 12^{ème} à la 15^{ème}, les notes sont égales à 10.

Or $25 = 12 + 1 + 12$ donc la médiane est la 13^{ème} note c'est-à-dire 10.

Rang :	1 ^{ère}	2 ^{ème}	...	11 ^{ème}	12 ^{ème}	13 ^{ème}	14 ^{ème}	...	25 ^{ème}
Notes :	2	4	...	9	10	10	10	...	17
	⏟ 12 élèves						⏟ 12 élèves		

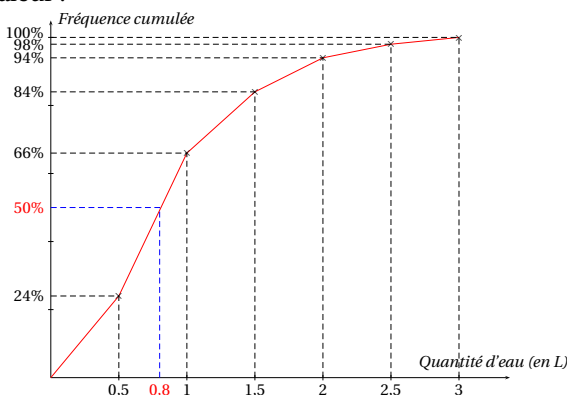
► À partir d'une représentation graphique

Une valeur approchée de la médiane peut être obtenue à l'aide de la courbe polygonale des effectifs cumulés croissants (ECC) ou des fréquences cumulées croissantes (FCC) en lisant la valeur correspondant à la moitié de l'effectif total (ou à une fréquence cumulée égale à 50%) :

À la question "Quelle quantité d'eau buvez-vous par jour ?", les cinquante personnes interrogées ont donné des réponses qui ont permis de compléter le tableau suivant :

Quantité d'eau (en L)	[0; 0,5[[0,5; 1[[1; 1,5[[1,5; 2[[2; 2,5[[2,5; 3]
Fréquences %	24	42	18	10	4	2
Fréq cumulées croissantes %	24	66	84	94	98	100

La courbe polygonale des effectifs (ou fréquences) cumulés est obtenue en joignant par des segments les points dont l'abscisse est une valeur de la série (ou l'extrémité d'une classe) et dont l'ordonnée est l'effectif (ou la fréquence) cumulé correspondant à cette valeur :



La médiane \mathcal{M} est environ égale à 0,8 L ; en effet, la moitié des personnes interrogées consomme moins de 0,8 L par jour (ou, ce qui revient au même, la moitié des personnes interrogées consomme plus de 0,8 L par jour).

Étendue d'une série statistique

On appelle **étendue** d'une série statistique la différence entre la plus grande valeur de la série et la plus petite. L'étendue est une mesure de **dispersion** des valeurs : plus l'étendue est grande, plus les valeurs sont dispersées.

Mémo DNB

Deuxième partie : géométrie

CONFIGURATION DE PYTHAGORE

1. Pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle :

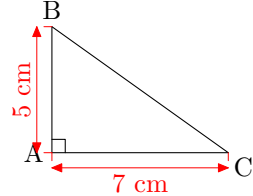
Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Ex 1 Calculer la longueur de l'hypoténuse :

ABC est un triangle rectangle en A , $AB = 5$ et $AC = 7$

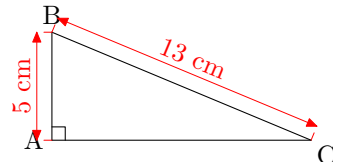
D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$ et donc $BC = \sqrt{74} \approx 8,6$.



Ex 2 Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit :

ABC est un triangle rectangle en A , $BC = 13$ et $AB = 5$

d'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ et donc $AC = \sqrt{144} = 12$.



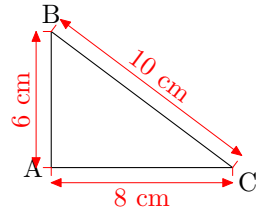
2. Pour démontrer qu'un triangle est rectangle :

Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au plus grand côté

Ex : Dans un triangle ABC , on a $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$.

Le plus long côté est $[BC]$. On calcule : $BC^2 = 10^2 = 100$ d'une part, et $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ d'autre part. On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce triangle est rectangle en A .



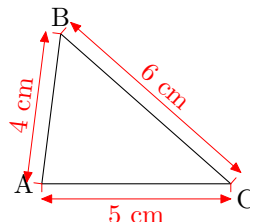
3. Pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle :

Contraposée du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Ex : Soit un triangle ABC tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$.

Le plus long côté est $[BC]$. On calcule : $BC^2 = 6^2 = 36$ d'une part, et $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ d'autre part. On constate que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$. Or, si le triangle était rectangle, le théorème de Pythagore nous dirait que cette égalité est vraie. Comme ce n'est pas le cas, on peut en conclure que le triangle n'est pas rectangle.



CONFIGURATION DE THALÈS

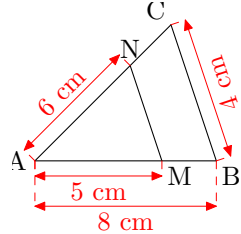
1. Pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle :

Théorème de Thalès

Soient deux droites (MB) et (NC) sécantes en un point A , telles que les droites (MN) et (BC) soient parallèles. Alors les rapports suivants sont égaux : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (autrement dit, les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles).

Ex : ABC est un triangle, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $AM = 5$, $AN = 6$, $AB = 8$, $BC = 4$; de plus, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
et donc $MN = \frac{AM}{AB} \times BC = \frac{5}{8} \times 4 = 2,5$
et $AC = \frac{AN}{AB} \times AM = \frac{6}{8} \times 5 = 3,75$.



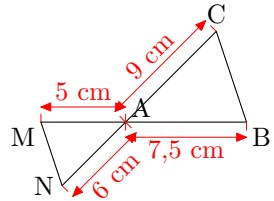
2. Pour démontrer que deux droites sont parallèles :

Réciproque du théorème de Thalès

Si les points M , A et B d'une part, et les points N , A et C d'autre part, sont alignés dans le même ordre, et si les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Ex : Les points M , A et B d'une part, et les points N , A et C d'autre part, sont alignés dans le même ordre. De plus, $AM = 5$, $AN = 6$, $AB = 7,5$ et $AC = 9$.

On calcule : $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$ d'une part, et $\frac{AN}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ d'autre part. On constate que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



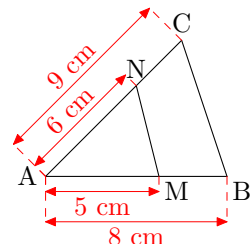
3. Pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles :

Contraposée du théorème de Thalès

Soient deux droites (MB) et (NC) sécantes en un point A . Si les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ ne sont pas égaux, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Ex : ABC est un triangle, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $AM = 5$, $AN = 6$, $AB = 8$, $AC = 9$.

On calcule : $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{8}$ d'une part, et $\frac{AN}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ d'autre part. On constate que $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$; Or, si les droites (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès nous dirait que cette égalité est vraie. Comme ce n'est pas le cas, on peut en conclure que les droites ne sont pas parallèles.



TRIGONOMÉTRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

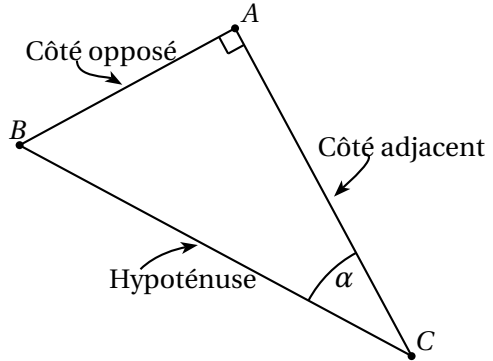
Définition

Soit ABC un triangle rectangle en A ; on notera α la mesure l'angle aigu \widehat{ACB} . Alors les rapports de longueurs $\frac{AC}{BC}$, $\frac{AB}{BC}$ et $\frac{AB}{AC}$ ne dépendent **que** de l'angle α , et on a :

$$\cos \alpha = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{AB}{AC}$$



Pour calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle :

Par exemple, supposons que dans le triangle ABC rectangle en A , on ait $AB = 12$ cm et $AC = 16$ cm. Alors on peut calculer la mesure de l'angle \widehat{ACB} en utilisant la formule de la **tangente** : $\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{16} = 0,75$ d'où (*calculatrice*) $\widehat{ACB} \approx 36,9^\circ$.

Pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle :

Par exemple, supposons que dans le triangle ABC rectangle en A , on ait $AB = 12$ cm et $\alpha = \widehat{ACB} = 30^\circ$. Alors on peut calculer la longueur du côté $[AC]$ en utilisant la formule de la **tangente** : $\tan \alpha = \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$ d'où $AC = \frac{AB}{\tan \alpha} = \frac{12}{\tan 30^\circ} \approx 20,8$ cm

Propriétés

Si α est la mesure (en degrés) d'un angle aigu :

- $0 < \cos \alpha < 1$ et $0 < \sin \alpha < 1$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$

Valeurs exactes des cosinus, sinus et tangentes d'angles remarquables :

Mesure de l'angle (en degrés)	30°	45°	60°
Sinus de l'angle	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosinus de l'angle	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente de l'angle	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

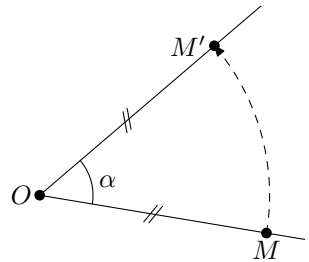
ROTATION - POLYGONES RÉGULIERS

Définition



O désigne un point du plan, M un point différent de O et α la mesure d'un angle en degrés.

L'image M' du point M par la rotation de centre O et d'angle α (dans un sens précisé) est tel que :

- $OM' = OM$;
- $\widehat{MOM'} = \alpha$ en tenant compte du sens de la rotation ;



Remarque : Il existe **deux** sens de rotation :

- le **sens inverse des aiguilles d'une montre**, encore appelé sens **direct** ou **positif** :  ;
- le **sens des aiguilles d'une montre**, encore appelé sens **indirect** ou **néga-tif** :  ;

Propriétés de conservation

Une rotation conserve :

- les distances,
- les aires,
- les angles,
- l'alignement,
- et les milieux ;

Une rotation transforme :

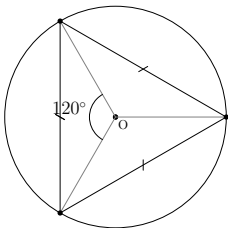
- un segment en un segment,
- une droite en une droite,
- une demi-droite en une demi-droite,
- un cercle en un cercle de même rayon.

Définition

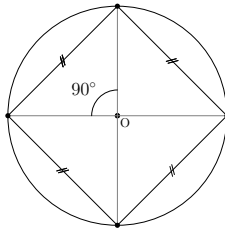
Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les sommets sont sur un même cercle et dont tous les côtés ont la même longueur.

Quelques polygones réguliers à connaître :

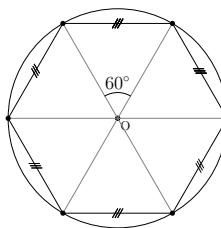
Le triangle équilatéral



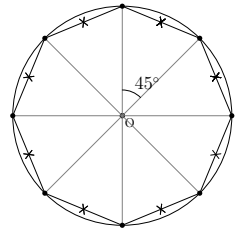
Le carré



L'hexagone régulier



L'octogone régulier



Propriété

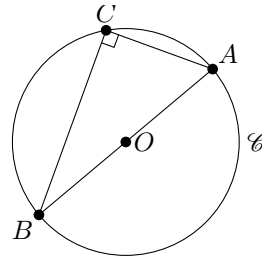
Tous les angles au centre d'un polygone régulier sont égaux. Si n est le nombre de côtés de ce polygone, alors l'angle au centre est égal à $\frac{360}{n}$

ANGLES INSCRITS

Propriété : triangle inscrit dans un demi-cercle

Soit \mathcal{C} un cercle.

Si un triangle a pour sommets deux extrémités du cercle \mathcal{C} , et si son troisième sommet est sur le cercle \mathcal{C} , alors le triangle est rectangle en ce troisième sommet.

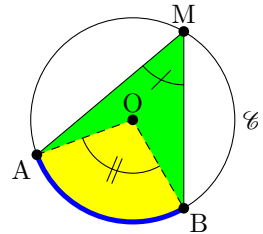


Remarque : cette propriété est un cas particulier du théorème de l'angle inscrit, énoncé plus bas.

Vocabulaire

Soit \mathcal{C} un cercle de centre O .

- On dit qu'un angle \widehat{AMB} est **inscrit** dans le cercle \mathcal{C} lorsque son sommet M appartient au cercle \mathcal{C} et lorsque $[MA]$ et $[MB]$ sont des cordes du cercle \mathcal{C} .
- On dit que l'angle \widehat{AMB} **intercepte** l'arc \widehat{AB} .
- L'angle \widehat{AOB} est l'**angle au centre** associé à l'angle inscrit \widehat{AMB} : ces deux angles interceptent le même arc \widehat{AB} .

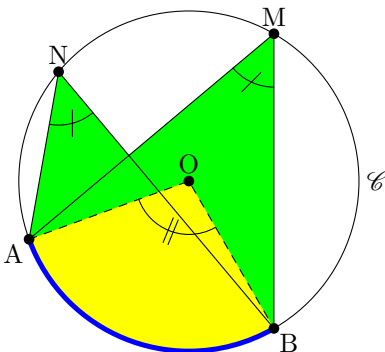


Théorème de l'angle inscrit

Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$.

En conséquence, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ces deux angles sont égaux : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

Illustration :



Les angles \widehat{AMB} et \widehat{ANB} sont inscrits dans le cercle \mathcal{C} , et interceptent le même arc \widehat{AB} . Ces deux angles sont donc de même mesure.

TRANSLATIONS & VECTEURS

Définition

Si, par une translation donnée, les points A, B, C ont pour images respectives les points A', B' et C' , alors on dit que les couples de points (A, A') , (B, B') , (C, C') définissent un **vecteur**. Si on note \vec{u} ce vecteur, alors on peut écrire $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, et on dit que $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont des **représentants** du vecteur \vec{u} .

Caractéristiques d'un vecteur

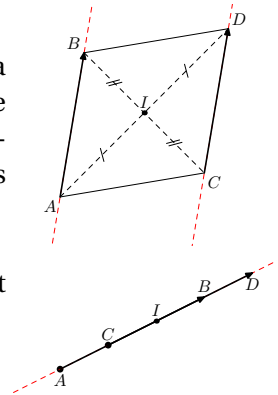
Si A et B sont deux points distincts, alors on peut entièrement déterminer le vecteur \overrightarrow{AB} par :

- sa **direction** (celle de la droite (AB)),
- son **sens** (de A vers B)
- et sa **longueur**, ou **norme** (celle du segment $[AB]$).

Vecteurs égaux

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **égaux** s'ils ont la **même direction**, le **même sens** et la **même longueur**. De plus, si A, B, C et D sont quatre points du plan, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux si et seulement si l'une de ces affirmations est vraie :

- D est l'image de C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
- $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.



Vecteurs opposés

Si A et B sont deux points distincts du plan, alors le vecteur \overrightarrow{BA} a la même direction et la même longueur que le vecteur \overrightarrow{AB} , mais il n'a pas le même sens. On dit que \overrightarrow{BA} est le vecteur **opposé** au vecteur \overrightarrow{AB} , et on note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Milieu d'un segment

Soient A, I et B trois points distincts du plan. Dire que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ revient à dire que I est le milieu de $[AB]$

Démontrer avec des vecteurs

- qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme : il faut démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- qu'un point I est le milieu d'un segment $[AB]$: il faut démontrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Somme de deux vecteurs

La composée de deux translations de vecteurs \vec{u} et \vec{v} est elle-même une translation, dont le vecteur est appelé **somme des vecteurs \vec{u} et \vec{v}** , et est noté $\vec{u} + \vec{v}$. Si, avec les notations précédentes, \overrightarrow{AB} est un représentant de \vec{u} , et \overrightarrow{BC} est un représentant de \vec{v} , alors on peut écrire la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, connue sous le nom de **relation de Chasles**.

Utiliser la relation de Chasles :

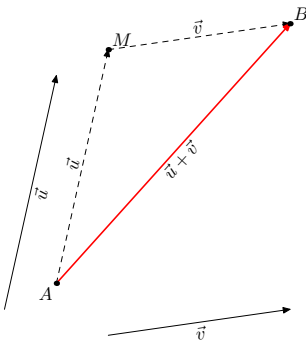
$$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GT} = \overrightarrow{ET} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{FA} \quad \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AC}$$

Comment construire la somme de deux vecteurs :

A est un point du plan, \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs. On veut placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$.

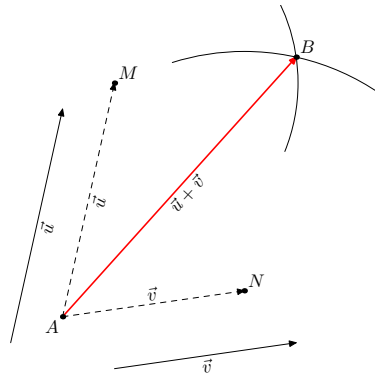
En mettant les vecteurs "bout à bout" :

On construit le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$, puis on construit le représentant du vecteur \vec{v} ayant ce point M pour origine ; un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur \overrightarrow{AB} .



En prenant des représentants de même origine :

On utilise la **règle du parallélogramme** : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$ si et seulement si $AMBN$ est un parallélogramme.



Vecteur nul

Si A et B sont deux points distincts, on a, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, qui correspond à un déplacement nul.

Le vecteur \overrightarrow{AA} est par conséquent appelé **vecteur nul**, et on note $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$

Composée de deux symétries centrales

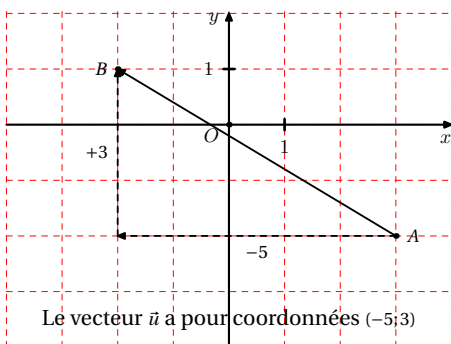
Soient A et B deux points distincts du plan. La **composée de la symétrie de centre A et de la symétrie de centre B** est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ (que l'on notera $2\overrightarrow{AB}$ par analogie avec le calcul numérique).

REPÈRES & VECTEURS

Lecture graphique des coordonnées d'un vecteur

Pour passer de A à B , on effectue deux translations successives :

- La première parallèlement à l'axe des abscisses, de a carreaux dans le sens de l'axe (comptés positivement) ou dans le sens opposé à l'axe (comptés négativement) ;
- la seconde parallèlement à l'axe des ordonnées de b carreaux dans le sens de l'axe (comptés positivement) ou dans le sens opposé à l'axe (comptés négativement) ;



Le couple $(a; b)$ sont les **coordonnées du vecteur \vec{u}** .

Calcul des coordonnées d'un vecteur

Si, dans un repère, les coordonnées des points A et B sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, alors les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

⚠ Attention à l'ordre des lettres!!

Exemple : Si on a $A(-1, -3)$ et $B(4, 3)$ alors le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées $(4 - (-1); 3 - (-3))$, c'est-à-dire $(5; 6)$.

Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

Milieu d'un segment

Si, dans un repère du plan, les coordonnées des points A et B sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, alors les coordonnées du point I milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

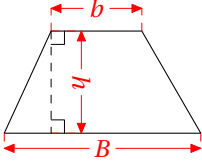
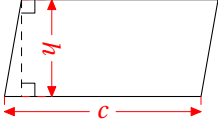
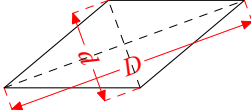
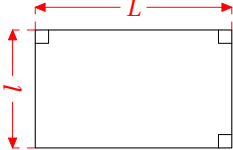
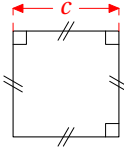
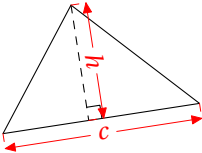
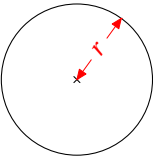
Exemple : Si on a $A(-1, -3)$ et $B(4, 3)$ alors le point I milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-1+4}{2}; \frac{-3+3}{2} \right)$, c'est-à-dire $(1, 5; 0)$.

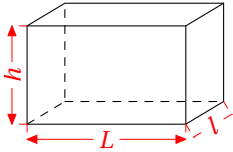
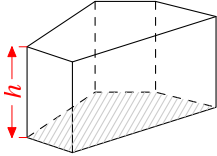
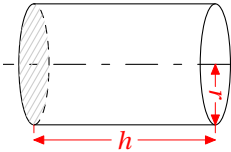
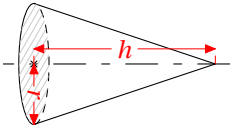
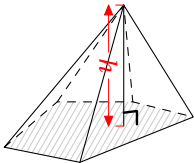
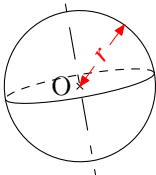
Calcul de la distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, si les coordonnées des points A et B sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, alors la distance entre les points A et B est donnée par : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple : Si dans un repère orthonormé on a $A(-1, -3)$ et $B(4, 3)$ alors la distance AB vaut $\sqrt{(4 - (-1))^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \approx 7,8$ unités.

AIRES & VOLUMES

Nom de la figure	Représentation	Aire
<i>Trapeze</i> de petite base b , de grande base B et de hauteur h		$\mathcal{A} = \frac{(B + b) \times h}{2}$
<i>Parallélogramme</i> de côté c et de hauteur h relative à ce côté		$\mathcal{A} = c \times h$
<i>Losange</i> de côté c , de grande diagonale D et de petite diagonale d		$\mathcal{A} = \frac{d \times D}{2}$
<i>Rectangle</i> de longueur L et de largeur l		$\mathcal{A} = L \times l$
<i>Carré</i> de côté c		$\mathcal{A} = c^2$
<i>Triangle</i> de côté c et de hauteur h relative à ce côté		$\mathcal{A} = \frac{c \times h}{2}$
<i>Cercle et disque</i> de rayon r		$\mathcal{A} = \pi r^2$ (Périmètre : $\mathcal{P} = 2\pi r$)

Nom du solide	Représentation	Volume
<i>Parallélépipède rectangle</i> de longueur L , de largeur l et de hauteur h . Le <i>cube</i> de côté c en est un cas particulier ($L = l = h = c$).		$V = L \times l \times h$ (Pour le cube de côté c : $V = c^3$)
<i>Prisme</i> – \mathcal{A} est l'aire d'une base et h la hauteur du prisme.		$V = \mathcal{A} \times h$
<i>Cylindre</i> – h est la hauteur du cylindre, et r est le rayon du disque de base		$V = \pi r^2 \times h$
<i>Cône</i> – r est le rayon du disque de base et h la hauteur du cône.		$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$
<i>Pyramide</i> – \mathcal{A} est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.		$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$
<i>Sphère</i> ou <i>Boule</i> de centre O et de rayon r		$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$ (Aire : $\mathcal{A} = 4\pi r^2$)

— Agrandissement-réduction —

- Appliquer un **agrandissement** à une figure ou à un solide, c'est multiplier toutes ses dimensions par un nombre k **supérieur à 1**.
- Appliquer une **réduction** à une figure ou à un solide, c'est multiplier toutes ses dimensions par un nombre k **compris entre 0 et 1**.
- Lorsque l'on réduit ou agrandit une figure d'un rapport k , alors l'**aire** de cette figure est **multipliée par k^2** .
- Lorsque l'on réduit ou agrandit un solide d'un rapport k , alors le **volume** de ce solide est **multiplié par k^3** .