TRIGONOMETRIE

définitions

Si ABC est un triangle rectangle en C, on définit :

- le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$, noté $\cos(\widehat{BAC})$, le quotient :

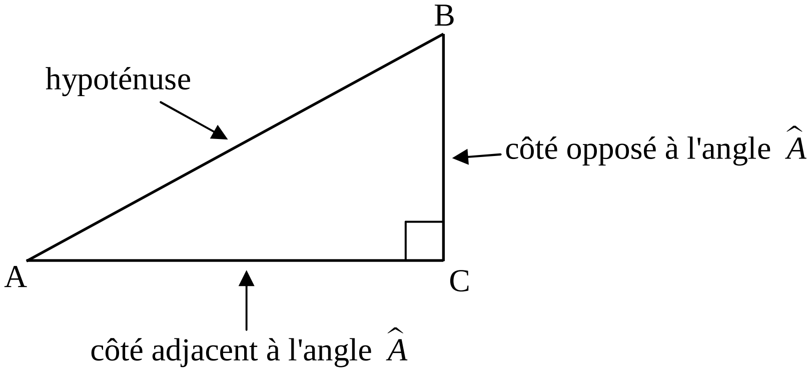
$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}};$$

- le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$, noté $\sin(\widehat{BAC})$, le quotient :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}};$$

- la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$, noté $\tan(\widehat{BAC})$, le quotient :

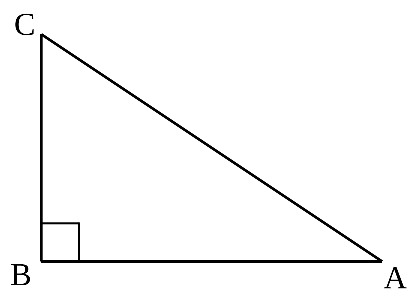
$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}};$$



exemple

ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 5\ cm$ et $\widehat{BAC} = 33°$.

Calculer $\widehat{BCA}$, BC et AC (on arrondira les longueurs au dixième).



$90 - 33 = 57$ donc $\underline{\widehat{BCA} = 57°}$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$ (car [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$).

$\cos(33) = \frac{5}{AC}$

$AC \times \cos(33) = 5$

$AC = \frac{5}{\cos(33)} \approx 6$. <u>[AC] mesure environ 6 cm</u>.

$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$ (car [BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$ et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$).

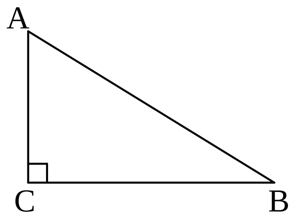
$\tan(33) = \dfrac{BC}{5}$

$BC = 5 \times \tan(33) \approx 3,2$. [BC] mesure environ 3,2 cm.

Autre exemple :

ABC est un triangle rectangle en C tel que $AB = 7\ cm$ et $BC = 4\ cm$. Calculer la mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.

Dans le triangle ABC rectangle en C :



$\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AB}$

$\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{4}{7}$

$mes(\widehat{BAC}) = \sin^{-1}(4:7) \approx 35°$

$\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BC}{AB}$

$\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{4}{7}$

$mes(\widehat{ABC}) = \cos^{-1}(4:7) \approx 55°$

propriétés

Si x désigne la mesure d'un angle aigu, on a les relations suivantes :

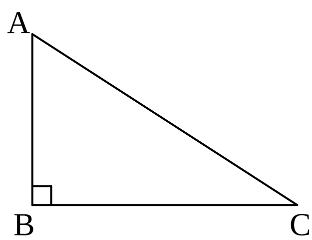
$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Preuve

On se place dans un triangle ABC rectangle en B. Appelons x la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BCA}$:

$\sin x = \dfrac{AB}{AC}$, $\cos x = \dfrac{BC}{AC}$ et $\tan x = \dfrac{AB}{BC}$.



$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$$

$$= \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$$

$$= \frac{AC^2}{AC^2}$$ car $AB^2 + BC^2 = AC^2$ d'après le théorème de Pythagore

$$= 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} = \tan x .$$