

Quantitative Analytics.
Lectures. Week 3.
Option Sensitivities Measures The Greeks. Греки или меры
чувствительности опционов к изменению параметров.

Akhundzhanova Elina

8 октября 2022 г.

Содержание

1	Стратегии хеджирования	2
1.1	Непокрытая, покрытая и stop-loss стратегии	2
1.2	Дельта-нейтральная стратегия	3
2	Греки	3
2.1	Дельта	3
2.2	Тета	5
2.3	Гамма	6
2.4	Вега	7
2.5	Ро	8
3	Хеджирование на практике	9
4	Соотношение между греками	10
5	Портфель	10
5.1	Греки для всего портфеля	10
5.2	Страхование портфеля с помощью создания синтетической позиции в Put опционе	10

1 Стратегии хеджирования

1.1 Непокрытая, покрытая и stop-loss стратегии

- **Непокрытая стратегия (naked position)** означает продажу Call опциона без приобретения соответствующего underlying (базового) актива.

Какие риски возникают? В случае, если базовый актив в дату экспирации опциона сильно вырос в цене, тогда у нас, как у стороны, продавшей опцион, возникает обязанность доставить базовый актив по цене страйк. Так как у нас нет базового актива, то необходимо купить его на рынке по сильно выросшей цене, то есть мы имеем потенциально неограниченные убытки в рамках данной стратегии.

- **Покрытая стратегия (covered position)** подразумевает продажу Call опциона и одновременно покупку базового актива.

Какие риски возникают? Риски здесь реализуются, если экспирация опциона происходит в области out-of-the-money ("вне денег" или "без денег"). Когда базовый актив является акцией, то у нас ограниченный downside (потенциал падения), так как цена не может быть отрицательной, но при приближении цены к 0 убытки могут существенно превысить премию от продажи опциона.

Возможно ли совместить стратегии naked и covered в одной? Да, рассмотрим следующую стратегию:

- **Стратегия stop-loss** спроектирована так, чтобы ограничить убытки от коротких позиций в опционах. Стратегия заключается в том, что если цена базового актива в области in-the-money ("в деньгах") для позиции Call, то стратегия подразумевает покупку базового актива (то есть в in-the-money области это covered позиция). Если базовый актив в области out-of-the-money (то есть ниже, чем страйк), то в данном случае происходит продажа базового актива.

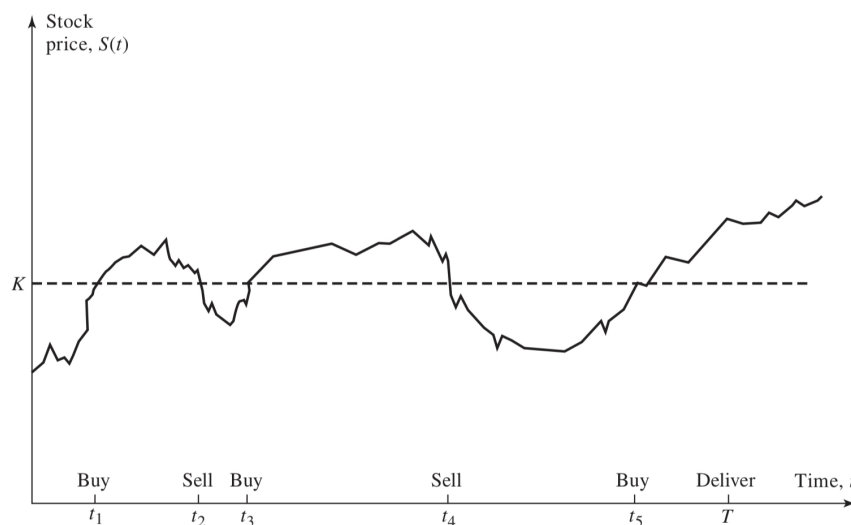


Рис. 1: Стратегия stop-loss

Эта стратегия предполагает, что если в момент экспирации T мы оказываемся в области in-the-money, то автоматически имеется базовый актив, который можно доставить. Если мы оказываемся в области out-of-the-money, то нет базового актива, который и не нужен.

В чем подвох данной стратегии? Проблема в том, что при приближении к уровню страйк цены, необходимо выбрать такое ε , начиная с которого будет осуществляться продажа или покупка базового актива. Как только $\varepsilon \rightarrow 0$, сразу же транзакционные издержки данной стратегии увеличиваются, и нивелируются все ее преимущества.

1.2 Дельта-нейтральная стратегия

- **Основная идея:** прибыль по опционной позиции должна компенсироваться убытком по позиции базового актива, а убыток по опционной позиции должен компенсироваться прибылью по позиции базового актива.
- **Цель:** комбинировать позицию в базовом активе с позицией в опционе на этот базовый актив так, что стоимость (value) портфеля при бесконечно малом изменении цены базового актива не меняется.
- **Важно помнить:** [Дельта](#) (см. определение внизу страницы) опциона меняется в случае изменения цены базового актива, а также если меняется время до экспирации опциона. В таком случае необходимо периодически (чем чаще, тем лучше в рамках стратегии) перестраивать портфель, то есть менять количество базового актива в нашем комбинированном портфеле.
- Когда выполняются предпосылки модели Блэка-Шоулза-Мёртона, то стоимость (cost) данной стратегии, дисконтированной в момент времени 0, представляет собой цену опциона по модели Блэка-Шоулза-Мёртона.
- Косты (costs) в данной стратегии практически неизбежны, так как если цена базового актива вырастает, то дельта для Call позиции также вырастает. В этом случае мы должны докупить дополнительно базового актива. Если же сток цена начинает снижаться, тогда необходимо распродавать базовый актив, а это неизбежно гарантирует возникновение костов данной стратегии. Но при этом в рамках данной стратегии при приближении к моменту экспирации опциона мы приближаемся в случае in-the-money к дельте, равной единице, в случае out-of-the-money к дельте, равной нулю. Таким образом, эта стратегия гарантирует, что к моменту экспирации европейского опциона мы будем захеджированы.
- Немного похоже на стратегию stop-loss, которая также в момент экспирации опциона гарантирует, что мы захеджированы. В чем же отличие между этой стратегией и стратегией stop-loss? Эта стратегия является partially covered, то есть, в случае если Дельта равна 50%, то, соответственно, вместо того, чтобы или быть covered (100%) , или быть naked (0%), мы нечто среднее реализуем. Так мы рассчитываем количество базового актива, которое необходимо продать или купить для реализации данной стратегии.
- Стоимость (value) нашего комбинированного портфеля практически не меняется, если цена базового актива меняется незначительно.
- Важно часто ребалансировать портфель (обычно ребалансировка происходит не реже 1 раза в рабочий день). Чем чаще происходит ребалансировка, тем выше транзакционные издержки на реализацию данной стратегии.
- Данная стратегия является динамической стратегией хеджирования. Необходимо постоянно следить за состоянием портфеля и динамически его менять в зависимости от изменения рыночных параметров (например, цена базового актива и изменение времени до экспирации опциона).

2 Греки

2.1 Дельта

Сначала дадим определение одного из самых важных греков Дельта.

Дельта (Δ) - мера чувствительности стоимости (value) дериватива к изменению цены базового актива.

Математическое выражение определения:

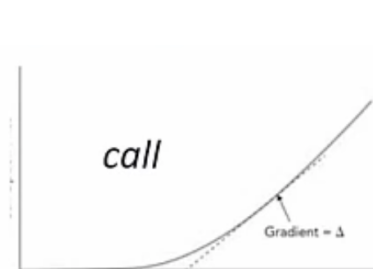
$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S},$$

где f - стоимость (value) дериватива, S - цена базового актива.

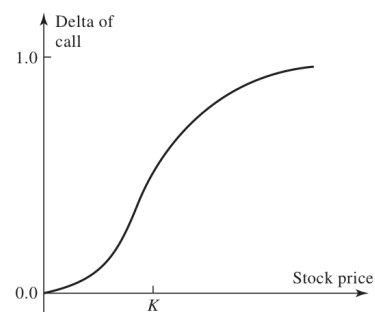
Напоминания:

Дериватив	Дельта	Свойства
Форвард	1	Такое же Δ , как у базового актива
Фьючерс	e^{rT} (дивидендные платежи), $e^{(r-q)T}$ (бездивидендные платежи)	Daily settlement (ежедневное урегулирование)
Call опцион	$N(d_1)$ (из формулы Б.-Ш.-М.)	S (цена спот) $\uparrow \Rightarrow c$ (цена Call опциона) \uparrow
Put опцион	$N(d_1) - 1$	S (цена спот) $\uparrow \Rightarrow p$ (цена Put опциона) \downarrow

- q - непрерывно начисляемая дивидендная доходность (continuously compounded dividend yield)
- $N(x)$ - кумулятивная функция для стандартного нормального распределения.
- $d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, где K - цена страйк, S_0 - цена актива в нулевой момент времени, T - время до экспирации опциона, σ - волатильность, r - безрисковая непрерывно начисляемая процентная ставка.
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

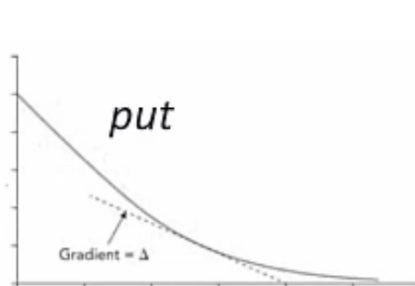


(a) Стоимость (value) Call

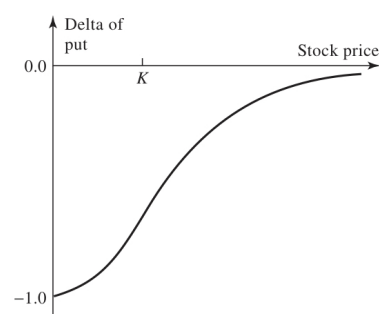


(b) Зависимость Дельты от сток цены

Рис. 2: Call опцион



(a) Стоимость (value) Put



(b) Зависимость Дельты от сток цены

Рис. 3: Put опцион

2.2 Тета

Тета (Θ) - мера чувствительности стоимости (value) дериватива к изменению времени до экспирации. Математическое выражение определения:

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial t},$$

где f - стоимость (value) дериватива, t - время.

- В чем особенность Теты? Параметры других греков являются стохастическими параметрами, например, цена базового актива или волатильность и т.д., а у Теты время - детерминированный параметр.
- Тету для обычного ванильного Call или Put опциона легко вычислить с помощью формулы Блэка-Шоулза-Мёртона, взяв производную дериватива по времени. Формулы выглядят следующим образом:

$$\Theta_{call} = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - r K e^{-rT} N(d_2),$$

$$\Theta_{put} = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + r K e^{-rT} N(-d_2),$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2}$$

- Если мы разделим формулы выше на 365, то получим, на сколько изменяется стоимость (value) дериватива за один день.
- При изменении времени стоимость (value) дериватива, как правило, уменьшается. Чем больше времени, тем больше возможностей для исполнения опциона, тем выше его стоимость (value). Чем меньше времени до экспирации, тем меньше возможностей для исполнения, значит, тем меньше возможностей оказаться в области in-the-money в момент экспирации, следовательно, тем меньше стоимость (value).
- По графику Тета для Call опциона является величиной отрицательной. Для Put опциона в некоторых случаях Тета может быть положительной (для deep in-the-money).

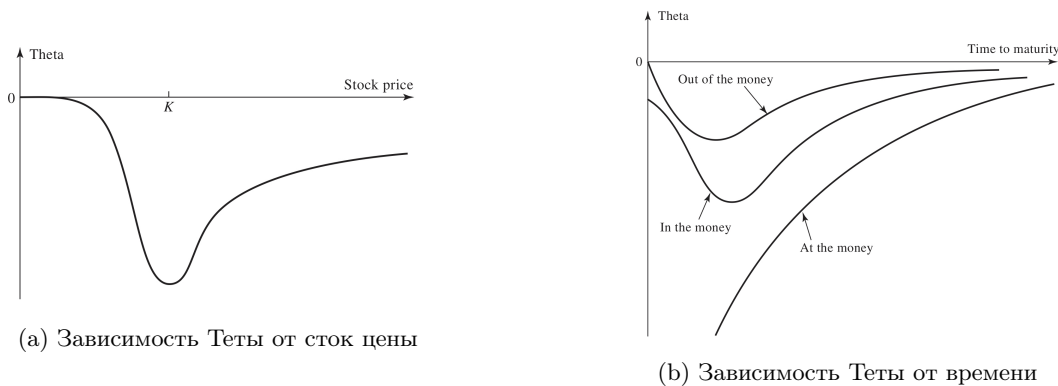


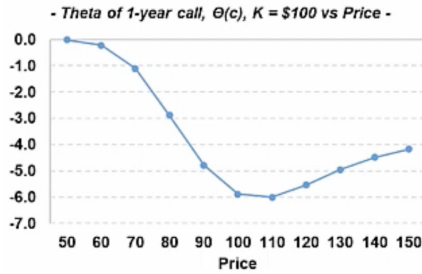
Рис. 4: Графики Теты для Call опциона

Сформулируем вкратце свойства Теты, исходя из графиков.

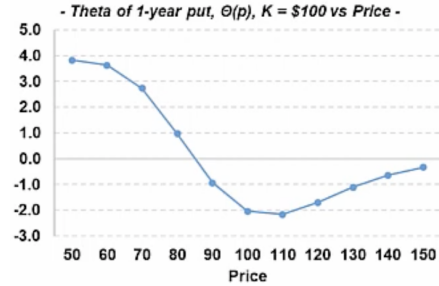
Свойства Теты:

- Тета принимает отрицательные значения.
- Тета меняется при изменении цены базового актива и с течением времени.

- Больше всего Тета для at-the-money опционов по сравнению с out-of-the-money и in-the-money опционами.
- При приближении к дате экспирации опциона value Теты увеличивается в абсолютном значении.
- Для in-the-money Put опциона Тета может быть положительной.
- На графике изменения Теты от цены мы видим, что если цена уходит в регион deep in-the-money для Put опциона, то Тета принимает положительные значения.



(a) Зависимость Теты от цены для Call опциона



(b) Зависимость Теты от цены для Put опциона

Рис. 5: Графики зависимости Теты от цены

2.3 Гамма

Гамма (Г) - мера чувствительности Дельты к изменению цены базового актива. Математическое выражение определения:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S},$$

где S - цена базового актива. Альтернативная форма записи:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2},$$

где f - стоимость дериватива, S - цена базового актива.

- Зачем нужен этот грек? Дельта-нейтральные позиции таковыми являются и хеджируют портфель от изменения цены базового актива только в том случае, если эти изменения небольшие. В то же время Гамма помогает захеджировать портфель от относительно больших изменений в цене базового актива.
- Формула для Гаммы для обычных ванильных Call и Put опционов выводится из формулы для Дельты и выглядит следующим образом:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

- Из определения Гаммы следует, что для линейных пэйоффов Гамма нулевая (для самого базового актива, для форвардного инструмента Гамма равна нулю). Что следует отсюда? Прежде всего, если ненулевая Гамма для всего портфеля, нам необходимо использовать инструменты с нелинейным пэйоффом, чтобы захеджировать Гамму нашего портфеля. Иными словами, мы не можем захеджировать портфель с ненулевой Гаммой по базовому активу с помощью самого базового актива, форварда на этот базовый актив и т.д., нам нужен, так сказать, опцион, чтобы это реализовать. Сколько нам понадобится опционов? Количество опционов можно найти по следующей формуле. В портфеле должна быть добавлена позиция $\left(-\frac{\Gamma_p}{\Gamma_T}\right)$, где Γ_p - Гамма существующего портфеля, Γ_T - Гамма торгуемого опциона. Добавив такое количество опционов, мы получим нулевую Гамму по всему портфелю (по совокупной позиции).

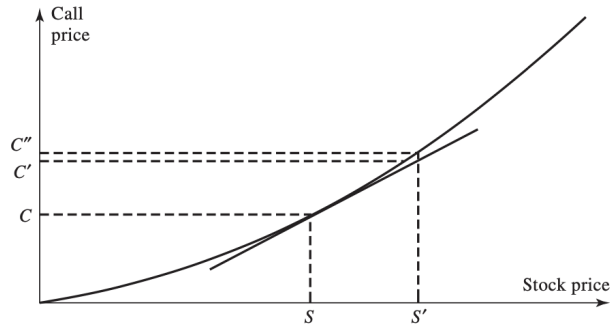


Рис. 6: Профиль цены дериватива в зависимости от сток цены

Чем больше выпуклость/вогнутость графика в точке, тем выше Гамма в данной точке для данного значения S , если мы нарисуем профиль цены дериватива в зависимости от сток цены.

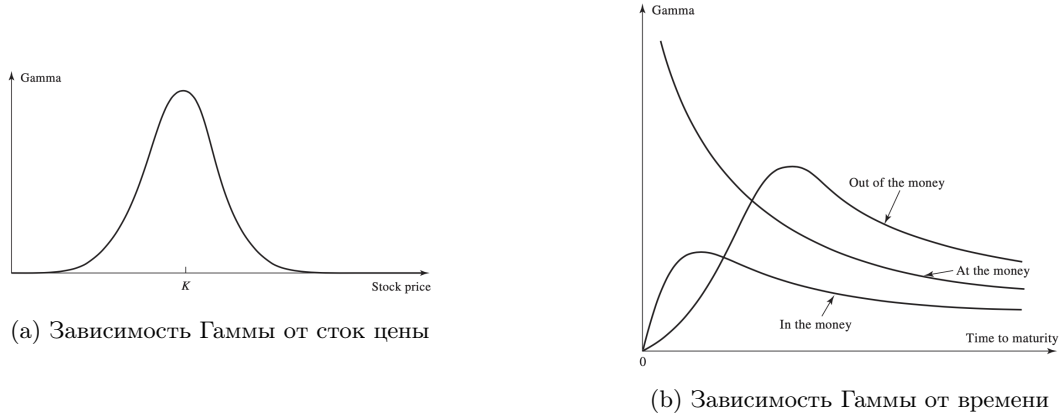


Рис. 7: Графики зависимости Гаммы

График колоколообразный, поскольку плотность нормального распределения имеет такую же форму.

2.4 Вега

Вега (\mathcal{V}) - мера чувствительности цены дериватива к изменению implied волатильности базового актива. Математическое выражение определения:

$$\mathcal{V} = \frac{\partial f}{\partial \sigma},$$

где f - стоимость (value) дериватива, σ - implied волатильность базового актива.

Замечание: Вега не название греческой буквы, обычно обозначается как большая ν , так как внешне она напоминает букву V .

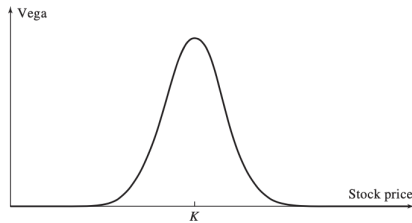
Свойства Веги:

- Для европейского Call и Put опциона на бездивидендную акцию Вега рассчитывается по следующей формуле:

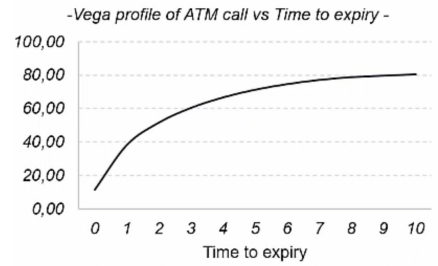
$$\mathcal{V} = S_0 N'(d_1) \sqrt{T}$$

- Профиль Веги напоминает профиль Гаммы с максимумом в цене страйк.

- Опционы наиболее чувствительны к изменениям в волатильности, когда мы находимся в области at-the-money. Если мы находимся в областях deep in-the-money или deep out-of-the-money, и даже если волатильность в этих точках увеличивается, то мы все равно при увеличенной волатильности остаемся в области in-the-money или out-of-the-money, то есть мы не переходим в другую область, и value опциона не меняется критическим образом.
- При увеличении времени до экспирации Вега также увеличивается, при уменьшении - уменьшается.



(a) Зависимость Веги от сток цены



(b) Зависимость Веги от времени

Рис. 8: Графики зависимости Веги

2.5 Po

Po (ρ) - мера чувствительности стоимости (value) дериватива к изменению в значении безрисковой процентной ставки. Математическое выражение определения:

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial r},$$

где f - стоимость (value) дериватива, r - безрисковая процентная ставка.

- Для европейского Call и Put опциона на бездивидендную акцию Po рассчитывается по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\rho_{call} &= KTe^{-rT}N(d_2), \\ \rho_{put} &= -KTe^{-rT}N(-d_2)\end{aligned}$$

- Для Call опциона профиль похож на профиль кумулятивной функции нормального распределения, для Put опциона - на смещенный профиль кумулятивной функции нормального распределения.
- In-the-money Call и Put опционы более чувствительны к изменениям в процентных ставках, чем out-of-the-money опционы. Увеличение в значении процентных ставок вызывает большее увеличение цен (prices) in-the-money Call опционов по сравнению с ценами (prices) out-of-the-money Call опционов и большее снижение цен (prices) in-the-money Put опционов по сравнению с ценами (prices) out-of-the-money Put опционов.

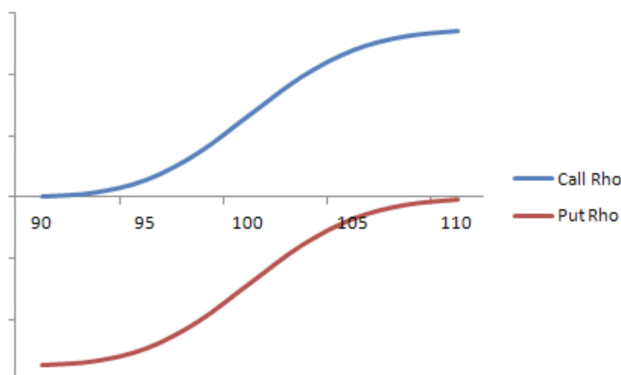


Рис. 9: Профиль ρ Call и Put опциона в зависимости от цены

3 Хеджирование на практике

- Дельта-нейтральные позиции могут быть сравнительно легко созданы (например, к портфелю опционов может быть добавлен базовый актив и линейный пэйофф).
- Не всегда легко найти деривативы по разумным ценам для того, чтобы нейтрализовать Гамму и Вегу. Нам необходим нелинейный пэйофф, но инструменты с нелинейным пэйоффом достаточно дорогие для целей хеджирования, отсюда возникает вопрос и достаточно высоких транзакционных издержек.
- Из практики дельта-нейтральность портфеля мониторится на ежедневной основе, чуть реже происходит управление Гаммой и Вегой портфеля.
- Гамма и Вега максимальны для at-the-money опционов и минимальны для deep in-the-money и deep out-of-the-money.
- Помимо мониторинга и управления греками, ещё одним инструментом управления прибыли и убытков портфеля является сценарный анализ.
- Ещё один технический аспект управления греками портфеля: установление лимитов для каждого из греков. Например, если лимит на Вегу установлен как 100 тысяч долларов за 1 процент, то это не означает, что мы должны добиваться нулевой Веги, но мы должны придерживаться следующего: при изменении волатильности на 1% стоимость (value) нашего портфеля вследствие этого изменения должна меняться не больше, чем на 100 000 долларов.
- Преимущество на стороне больших финансовых организаций, поскольку они обладают существенной экономией от масштаба на данном рынке. Дело в том, что если у нас 10 инструментов в портфеле, то транзакционные издержки на хеджирование этого портфеля распределяются по этим 10 транзакциям, если же у нас 10 тысяч транзакций в портфеле, соответственно, издержки на хеджирование этого портфеля распределяются на 10 тысяч транзакций, что, очевидно, более приемлемо с точки зрения абсолютного выражения транзакционной издержки.
- На больших объемах начинает вступать в силу закон больших чисел: где-то отклонились в +, где-то в — по тому или иному греку, но, в целом, у нас общая позиция не так сильно может меняться, особенно если корреляция между различными инструментами портфеля отрицательна или меньше единицы, в таком случае компоненты портфеля с точки зрения хеджирования благотворно влияют на общую позицию по портфелю.

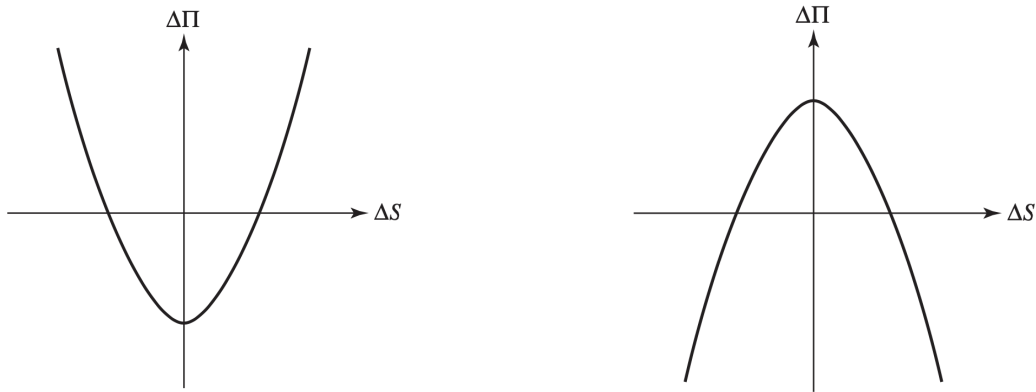
4 Соотношение между греками

Рассмотрим уравнение в частных производных Блэка-Шоулза-Мёртона. Если заменим производные в данном уравнении в частных производных на соответствующих греков, то получим:

$$r\Pi = \Theta + rS\Delta + 0.5\sigma^2 S^2\Gamma,$$

где r - безрисковая процентная ставка, Π - цена опциона или value портфеля, Θ - Тетта опциона, S - цена базового актива, Δ - Дельта опциона, σ^2 - дисперсия базового актива, Γ - Гамма опциона.

Это соотношение дает возможность для дельта-нейтрального портфеля записать соотношение на изменение стоимости (value) портфеля в зависимости от изменения цены базового актива. Поскольку имеем квадратичное соотношение, то график данного изменения представляет собой параболу. Отсюда получим важное соотношение:



(a) Зависимость $\Delta\Pi$ от ΔS при положительной Γ

(b) Зависимость $\Delta\Pi$ от ΔS при отрицательной Γ

Рис. 10: Графики зависимости для дельта-нейтрального портфеля

5 Портфель

5.1 Греки для всего портфеля

Выше мы рассматривали греков, рассчитываемых от отдельных опционов.

Как рассчитать грек для всего портфеля из опционов, базовых активов и других деривативов?

Вспомним свойство производной функции: производная линейной комбинации функций является линейной комбинацией производных этих функций. Греки представляют собой нечто иное, как производные по рыночным параметрам, поэтому мы можем использовать это свойство и для греков.

Рассмотри в качестве примера Дельту портфеля:

$$\Delta_{port} = \sum_{i=1}^n w_i \Delta_i,$$

где Δ_i - Дельта каждой компоненты, w_i - веса данных компонент в общем портфеле. Дельта портфеля представляет собой ожидаемое изменение общей позиции по портфелю в случае небольшого изменения цены базового актива. Аналогично, можно проделать то же самое и для других греков.

5.2 Страхование портфеля с помощью создания синтетической позиции в Put опционе

Предположим, что у нас есть портфель под управлением asset менеджера. Главный интерес asset менеджера - застраховаться от падения стоимости (value) данного портфеля в случае неблагоприятных рыночных условий.

Какой дериватив предоставляет страховку от падения цены базового актива? Это Put опцион.

- Идея: либо купить Put опционы на рынке на данный портфель, либо синтетически создать Put опцион на данный портфель. На рынке не всегда могут быть нужные нам опционы (например, опционы на индекс, за которым следует портфель), так как портфель может быть уникален по своим характеристикам. Поэтому зачастую до 80-х годов прошлого века управляющие портфелями использовали такой подход, как создание позиции в Put опционе на портфель синтетически.
- Если asset менеджер добивается того, что Дельта, получившаяся путем продажи/покупки частей портфеля, совпадает с Дельтой Put опциона, то он тем самым автоматически создает синтетическую позицию в Put опционе.
- Издержки по данной стратегии дают стоимость (value) Put опциона за применение подобной стратегии. Покупка происходит на рынке, идущем вверх, а продажа портфеля - на снижающемся рынке.
- Что же произошло? После черного понедельника, когда использование подобных синтетических Put опционов сделало достаточно глубокое неуправляемое падение, оно тем самым доказало слабость подобных стратегий страхования портфеля. Почему произошло падение? Дело в том, что рынок упал, затем рынок дальше стал падать путем срабатывания алгоритмов "продавай на снижающемся рынке", и все больше участников рынка стали продавать свои активы, что еще больше усугубило падение. В конечном счете, падение достигло катастрофических масштабов.