

Data Science.  
Лекции. Неделя 3 - 4.  
Волатильность Доходности и Корреляция.

Айвазова Кристина

23 октября 2022 г.

## Contents

1	Измерение доходности	2
2	Волатильность и риск	2
3	Подразумеваемая волатильность	2
4	Распределение доходности	3
5	Корреляция и зависимость	3
6	Коэффициент корреляции Спирмена	3
7	Ранговая корреляция Кендалла	3

## 1 Измерение доходности

- Простая доходность активов:  $R_t = \frac{(P_t + P_0)}{P_0}$
- Для нескольких периодов:  $(1 + R_t) = \prod_{t=1}^T (1 + R_t)$
- Составная доходность (логарифмическая доходность):  $r_t = \log(P_t) + \log(P_0)$
- Обратите внимание на то, что :  $1 + R_t = e^{r_t}$
- Логарифмическая доходность менее интуитивная (например, 100% убытка соответствует тому же при простой доходности, но примерно 63% при логарифмической)

## 2 Волатильность и риск

- Волатильность финансового актива обычно измеряется стандартным отклонением его доходности
- Предположим, что  $r_t = \mu + \sigma * \varepsilon_t$  с имеет нулевое среднее значение и дисперсию 1, часто обозначается (0,1)
- Поскольку логарифмическая доходность является аддитивной, для n периодов  $r_n t = n\mu + \sigma \sum_{k=1}^n \varepsilon_k t$ ; предполагая, что среднее значение независимости и шкала дисперсии линейны
- Например, если среднее значение за день равно  $\mu$ , а дисперсия  $\sigma^2$ , то среднее значение за неделю равно  $5\mu$  и стандартное отклонение  $\sqrt{5}\sigma$ .

## 3 Подразумеваемая волатильность

- Подразумеваемая волатильность - это альтернативный показатель, который рассчитывается с использованием цен опционов.
- Модель Блэка-Шоулза-Мертон связывает цену опциона "колл" с волатильностью как  $C_t = f(r_t, T, P_t, K, \sigma^2)$ , где  $r_t$  - безрисковая процентная ставка,  $T$  - срок погашения опциона (в годах),  $K$  - цена исполнения.
- В модели наблюдаемы все значения, кроме волатильности; решение этого уравнения относительно  $\sigma^2$  дает нам подразумеваемое значение волатильности.
- Полученная волатильность рассчитана на один год и считается постоянной до истечения срока действия.
- VIX - это еще один показатель подразумеваемой волатильности.
- Он сочетает в себе опционы для SP500 с различными ценами исполнения на 30 дней
- Наиболее важным ограничением VIX является то, что он может быть рассчитан только для активов с крупными ликвидными рынками деривативов.
- VIX - это прогнозный показатель волатильности по сравнению с оценками волатильности в обратном направлении, полученными с использованием (исторической) доходности активов

## 4 Распределение доходности

- Статистика теста Жарке-Бера используется для формальной проверки того, совместимы ли асимметрия выборки и эксцесс с предположением о нормальном распределении результатов.
- Общая черта многих рядов финансовой доходности - доходности, рассчитанные за более длительные периоды, по-видимому, лучше аппроксимируются нормальным распределением
- Хвосты распределения определяются как поведение  $P(X > x)$  и  $P(X < -x)$  для больших  $x$
- Хвост степенного закона -  $P(X > x) = ax - b$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$
- Тяжелые хвосты (например, хвост степенного закона) приводят к тому, что большие потери появляются чаще, чем при нормальном распределении

## 5 Корреляция и зависимость

- Ковариация двух случайных величин определяется как  $Cov(X, Y) = EXY - EXEY$ .
- Корреляция определяется как  $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$ .
- Две переменные определяются как статистически независимые, если знание об одной из них не влияет на распределение вероятности для другой  $f(Y|X = x) = f(Y)$ , где  $f$  обозначает плотность.
- Если две случайные величины независимы, их корреляция равна нулю, однако обратное неверно (например, нулевая корреляция не всегда означает независимость).
- Обратите внимание, что корреляция описывает только линейную зависимость.

## 6 Коэффициент корреляции Спирмена

- Определяется как коэффициент корреляции Пирсона между ранжированными переменными.
- Ранг - это индекс данных в упорядоченном наборе.
- Ранговая корреляция Спирмена не зависит от распределения данных и является надежной в отношении выбросов.
- Если все ранги являются различными целыми числами, то  $r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2-1)}$ , где  $d_i = rg(X_i) - rg(Y_i)$ .
- Для линейной зависимости Корреляция Спирмена приблизительно равна корреляции Пирсона.
- Корреляция Спирмена инвариантна относительно нелинейных монотонных преобразований.

## 7 Ранговая корреляция Кендалла

- $\tau$  Кендалла - это показатель ранговой корреляции: сходство порядка данных при ранжировании по каждой из величин.
- Предположим, что наблюдения  $X$  и  $Y$  уникальны. Пары наблюдений  $(X_i, X_j)$  и  $(Y_i, Y_j)$  согласуются, если  $X_i > X_j$ ,  $Y_i > Y_j$  или  $X_i < X_j$ ,  $Y_i < Y_j$ .
- Определите  $\tau = \frac{n_c - n_d}{n(n-1)}$ , где  $n_c$  - количество согласующихся пар,  $n_d$  - количество несогласованных пар.
- Альтернативно  $\tau = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=j} sgn(X_i - X_j)sgn(Y_i - Y_j)$ .
- Монотонные возрастающие преобразования также не влияют на  $\tau$  Кендалла.