Количественная аналитика.
Лекции. Неделя 4.
Торговля опционами - Антон Филатов | 4 лекция

Михаил Беляев

5 октября 2022 г.

Contents

1 Поставочные опционы и расчётные опционы **2**

1.1 Определения . . . 2

1.2 Пример на расчётный опцион . . . 2

1.3 Пример на разницу поставочного и расчётного опциона . . . 2

2 Vanna **3**

2.1 Определение . . . 3

2.2 Пример. Улыбка волатильности в паре USD-RUB . . . 3

2.3 Пример на применение Vanna . . . 4

3 Vega **6**

3.1 Определение . . . 6

3.2 Нахождение Vega с помощью модели бинарного дерева . . . 6

3.3 Усложнение модели . . . 8

3.4 Важное замечание о форварде и споте . . . 9

1 Поставочные опционы и расчётные опционы

1.1 Определения

Пусть имеется опцион колл USD-RUB, номинал $N = 10m\$$, $T_e = 2$ часа, страйк равен споту $k = s$.

Если опцион **поставочный** (delivery), мы имеем право через 2 часа купить по страйку k 10 миллионов \$ за рубли. Это реальная сделка, в рамках которой мы поставим реальные рубли на какой-то счёт контрагента, а контрагент поставит нам доллары на наш счёт.

Если опцион **расчётный** (cash-settled), мы имеем право получить разницу между курсом и страйком. Курс при этом определяется посредством процедуры **фиксинга** (fixing). Спот может быть зафиксирован ЦБ или биржей. В большинстве случаев курс определяется следующим образом: рассматривается некоторое кратковременное окно на бирже и по всем прошедшим сделкам с учётом объёмов торгов рассчитывается средневзвешенный курс.

Иногда значение реального курса расходится со значением курса, оценённого биржей или ЦБ через фиксинг. В случае «разрыва» курса валюты фиксинг обычно уменьшает разрыв. Таким образом, в некоторых ситуациях опцион будет исполнен не по курсам реального рынка, к которому имеется доступ, а по курсам какого-то другого рынка, к которому доступа не имеется.

1.2 Пример на расчётный опцион

Расчётный опцион колл USD-RUB, номинал $N = 10m\$$, $T_e = 2$ часа, страйк равен споту $k = s$.

Пусть фиксинг вышел на 1% выше, чем страйк. Тогда по опциону будет получена сумма, равная разности фиксинга и страйка, умноженная на номинал и переведенная обратно в доллары по курсу фиксинга. Выйдет 100000\$. Поставка, скорее всего, будет в \$, поскольку практически все участники рынка имеют долларовый счёт.

В общем случае, если хочется купить или продать опцион на валюту, с которой не работаем в обращении, или данная валюта является редкой (например, турецкая лира), есть два варианта: 1) завести счёт в турецких лирах и использовать поставочный опцион 2) использовать расчётный опцион, но тогда конечный курс будет определяться через фиксинг.

1.3 Пример на разницу поставочного и расчётного опциона

Пусть мы купили поставочный опцион на $100m\$$ со страйком 70. Тогда, если мы воспользуемся опционом, получим $100m\$$, на нашем счету при этом должно быть 7 млрд рублей.

Пусть теперь мы купили такой же опцион, но он расчётный, а не поставочный. И пусть в момент экспирации опцион на 1% в деньгах. Тогда мы получим $1m\$$. В таком случае нам намного легче управлять деньгами, поскольку мы получим меньшую сумму в долларах, чем в случае поставочного опциона, и эту сумму будет легче разместить в каких-то активах. И к тому же нам не нужно иметь на счетах 7 млрд рублей на момент экспирации опциона.

2 Vanna

2.1 Определение

По определению:

$$Vanna = \frac{\partial Delta}{\partial Vol} = \frac{\partial Vega}{\partial Spot} = \frac{\partial^2 MV}{\partial Spot\, \partial Vol}$$

где MV - рыночная стоимость (market value) опциона

$Vanna$ - это характеристика опциона, либо портфеля опционов. На практике, лучше всего понимать Vanna как $\frac{\partial Vega}{\partial Spot}$, то есть чувствительность изменения волатильности при изменении спота. Другими словами, это то, на сколько меняется риск Vega, в зависимости от того, насколько поменялся спот.

2.2 Пример. Улыбка волатильности в паре USD-RUB

Рассмотрим валютную пару USD-RUB. Пусть при цене спота в 70 волатильность известна и равна V_1. Хотим понять зависимость волатильности от спота.

Где будет волатильность, например, через 3 месяца, если знаем, что спот будет в 80? Намного более вероятно, что к такому изменению спота привело какое-то неблагоприятное событие, и почти всегда неблагоприятные для экономики события вызывают увеличенную волатильность. Таким образом, ожидаем, что при споте в 80 волатильность будет выше.

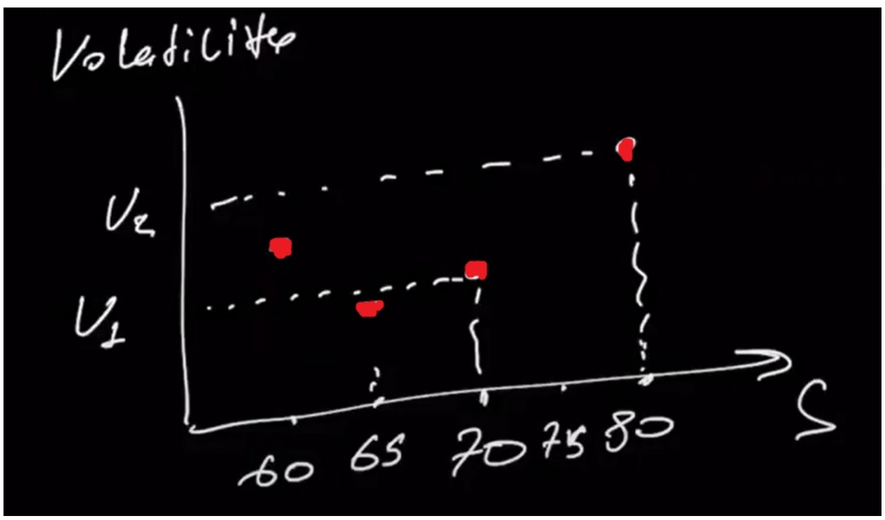

Fig. 1: График зависимости волатильности от спота

А какой должна быть волатильность при споте в 65? Можно рассуждать следующим образом: спот в 65 - это довольно неплохое укрепление рубля, вероятно, будет много людей, желающих приобрести доллар по такой цене, тем самым создавая сопротивление движению курса вниз. Также такой курс говорит нам о том, что в экономике всё хорошо, а обычно в таких случаях ликвидность растёт, а волатильность падает. На практике волатильность в точке 65 находится примерно там же, что и волатильность в точке 70. Однако, волатильность в точке 60 иногда находится выше, так как это слишком сильное и быстрое падение (на 10 единиц за 3 месяца) - вероятно, произошло что-то неожиданное для рынка, что также увеличивает волатильность.

В реальности улыбка волатильности выглядит как на рисунке 2. Пусть в данный момент цена спота равна S_0. Если спот смещается немного влево, то вероятно, в экономике происходят благоприятные события, и волатильность уменьшается. Если спот смещается вправо, волатильность быстро увеличивается. Если спот смещается сильно влево (обведено кружком на рисунке 2), это свидетельствует о наличии неожиданных событий и волатильность немного увеличивается в сравнении с волатильностью при текущем споте S_0. Важно понимать, что в «разумной» окрестности текущего спота (область выделена прямоугольником на рисунке 2) улыбка волатильности для валютной пары USD-RUB часто выглядит как линейная функция.

Последнее согласуется с утверждением, что в некоторой окрестности текущего спота выполняется следующее:

$$corr(spot, volatiliy) > 0$$

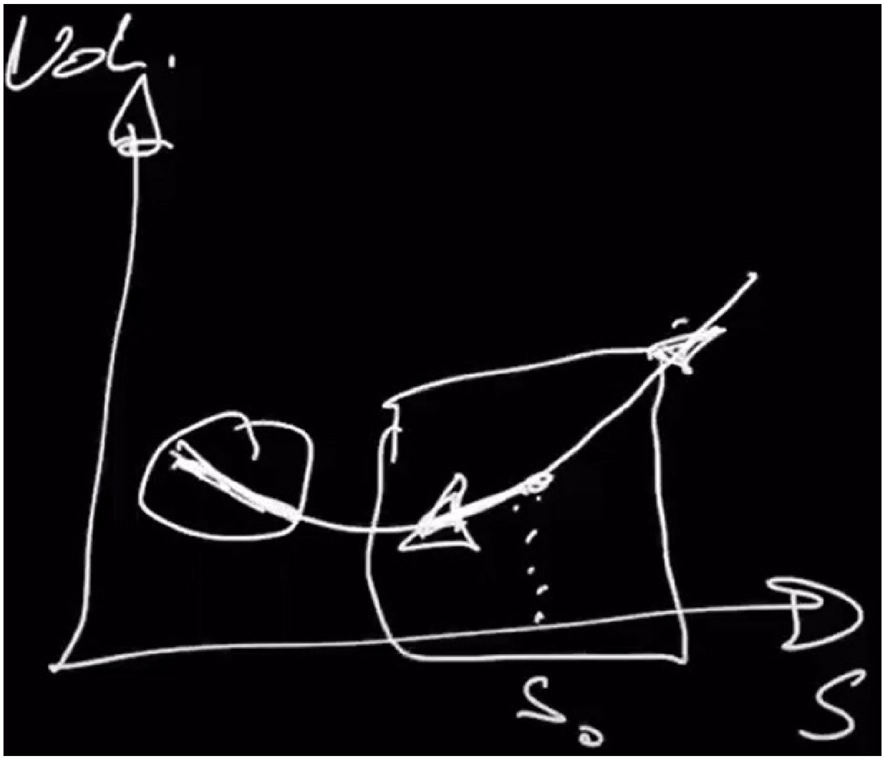

Fig. 2: Улыбка волатильности для пары USD-RUB

2.3 Пример на применение Vanna

Продолжим предыдущий пример. Пусть теперь знаем, что $Vanna$ в валютной паре USD-RUB равна $X > 0$. Пусть спот изменился. Что произойдёт с $Vega$ портфеля и с его PL?

Вариант 1: спот увеличился

$Vanna$ - это характеристика портфеля опционов, в то время как волатильность - это характеристика рынка (то, насколько волатилен базовый актив - в данном примере курс USD-RUB). $Vega = \dfrac{\partial MV}{\partial Vol}$ - это то, насколько зависит стоимость портфеля от того, насколько волатилен рынок.

По условию, $Vanna > 0$, $S \uparrow$, тогда из определения $Vanna$ следует, что $Vega \uparrow$.

С другой стороны, так как спот повысился, можно утверждать, что в некоторой окрестности начального спота $Vol \uparrow$, поскольку корреляция спота и волатильности положительна.

В итоге получаем, что $Vega \uparrow$, $Vol \uparrow$, но тогда из определения $Vega$ следует, что MV портфеля увеличивается, и тогда $PL \uparrow$.

Вариант 2: спот уменьшился

По условию, $Vanna > 0$, $S \downarrow$, тогда из определения $Vanna$ следует, что $Vega \downarrow$.

С другой стороны, так как спот понизился, $Vol \downarrow$, поскольку в некоторой окрестности начального спота корреляция спота и волатильности положительна.

Таким образом, $Vega \downarrow$, $Vol \downarrow$. Это означает следующее: портфель имеет отрицательную чувствительность к волатильности (чем ниже волатильность, тем больше PL) на рынке с уменьшающейся волатильностью. Тогда из определения $Vega$ следует, что MV портфеля увеличивается, и тогда $PL \uparrow$.

Отметим, что если бы в этой задаче корреляция волатильности и спота был бы отрицательной, тогда в обоих случаях $PL \downarrow$.

Из всего вышеперечисленного можно сделать вывод о том, что $Vanna$ каким-то образом отражает корреляцию спота и волатильности:

$$Vanna \sim corr(spot, volatility)$$

3 Vega

3.1 Определение

Vega - это производная стоимости портфеля по волатильности:

$$Vega = \frac{\partial MV}{\partial Vol}$$

.

3.2 Нахождение Vega с помощью модели бинарного дерева

Рассмотрим опцион колл со страйком $k = 70$, номиналом $N = 100m\$$, временем до экспирации $T = 1\ year$, $spot = 70$, и пусть по условию ставки будут нулевыми, тогда форвард равен споту: $FWD = 70$.

Рассматриваем модель бинарного дерева. Пусть исходы равновероятны и X - это шаг в данной модели.

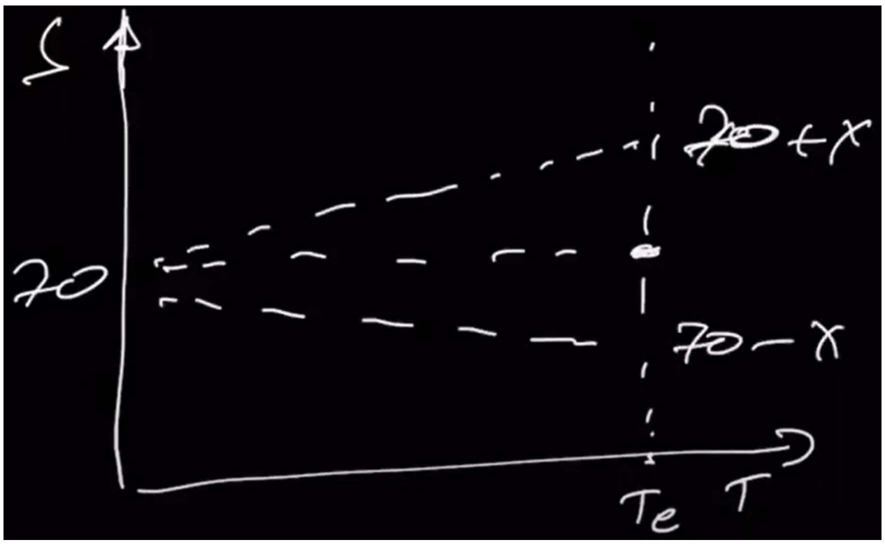

Fig. 3: Модель бинарного дерева

Очевидно, что $X \sim volatility$, так как при большей волатильности, цена, вероятно, сильнее отойдёт от центра (спота в 70). Далее будем считать X некоторой мерой волатильности.

По определению стоимость опциона - это математическое ожидание исходов:

$$MV = \frac{1}{2} \cdot N \cdot (70 + X - 70) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{N \cdot X}{2}$$

То есть в данной модели $MV \sim X$. Это интуитивное наблюдение о том, что цена опциона зависит от волатильности.

Если рассматривать не чистый опцион, а дельта-хеджированный портфель (Long Call + Short spot), данная пропорциональность останется верной.

Пусть теперь все условия прежние, но спот равен 50 (см. рис. 4).

Тогда при всех $X \leq 20$, опцион стоит 0 и $Vega = 0$. При $X > 20$ $Vega$ будет положительной.

Стоит отметить, что мы получили данные результаты, используя крайне простую бинарную модель. В реальности есть некоторое непрерывное распределение исходов, и у событий на хвостах распределения есть хоть и крайне маленькая, но отличная от 0 вероятность. Поэтому на практике всегда $Vega > 0$, в случае отклонения в $5 - 6\sigma$ $Vega$ может быть, например, 10^{-20}.

Продолжим рассмотрение бинарной модели для колл опциона (см. рис. 5). Пусть спот находится в $S_0 < K$. Тогда при малых X стоимость опциона будет равна 0. $Vega$ также будет равна 0, поскольку

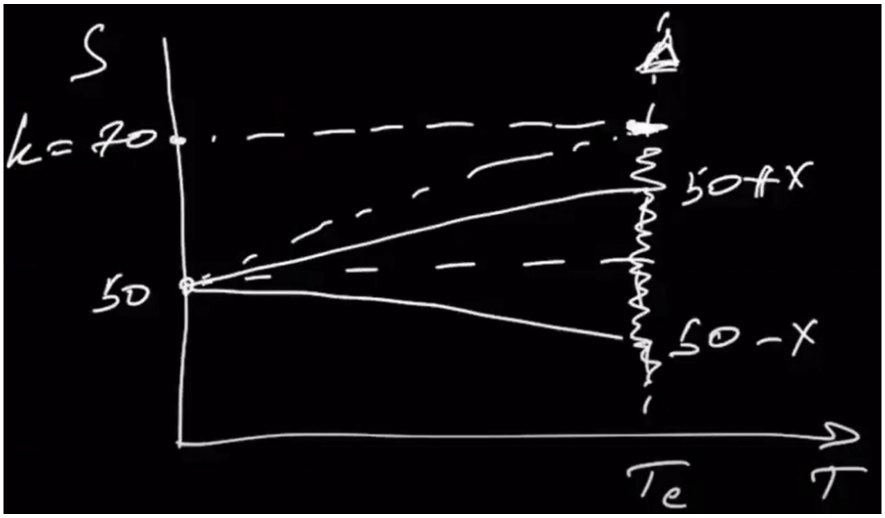

Fig. 4: Модель бинарного дерева для случая $s < k$

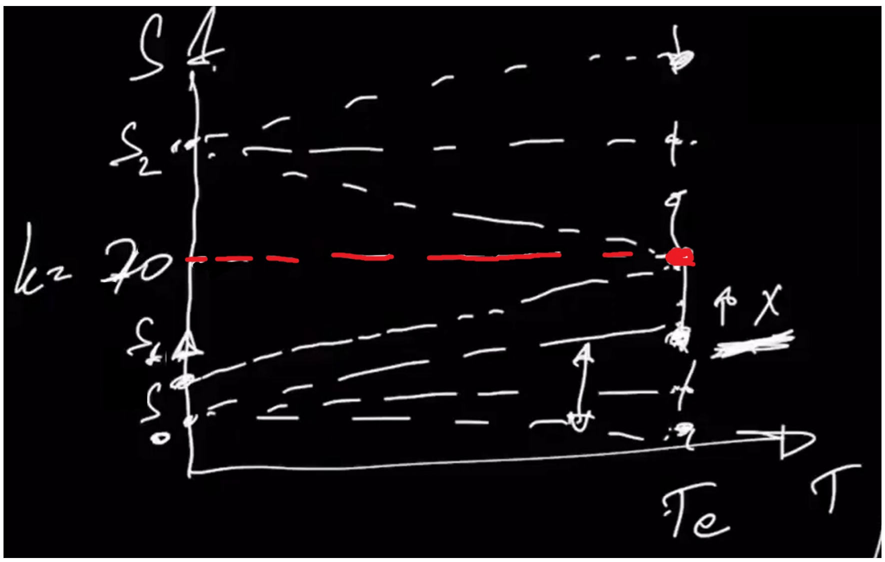

Fig. 5: Модель бинарного дерева для разных спотов

при малом увеличении X опцион всё также будет вне денег. Начнём двигать спот вверх. Тогда найдётся такая точка со значением спота S_1, которая при той же волатильности (разбросе веток) будет пересекать страйк K. Начиная с S_1, $Vega$ будет положительной до некой точки S_2, в которой нижняя ветка достигает ровно страйка, то есть $S_2 - X = K$. Для всех деревьев, нижняя ветка которых выше, чем страйк, стоимость опциона равна:

$$MV = \frac{1}{2} \cdot N \cdot (S_2 - X - 70) + \frac{1}{2} \cdot N \cdot (S_2 + X - 70) = N \cdot (S_2 - 70)$$

Как видно, зависимость стоимости опциона от X пропала, соответственно, $Vega$ будет равна 0.
Таким образом, зависимость $Vega$ от спота следующая:
$Vega = 0$ при $S \leq S_1$ или $S \geq S_2$ и $Vega = \frac{N \cdot X}{2} = const$ при $S_1 < S < S_2$.

3.3 Усложнение модели

Усложним модель бинарного дерева, добавив ещё 2 возможных исхода - прыжок в $(1+\alpha)\cdot X$ и прыжок в $(1-\alpha)\cdot X$. Пусть для простоты все 4 исхода равновероятны.

Вариант 1: все ветки ниже страйка или все ветки выше страйка. В таком случае $Vega = 0$ в полной аналогии с похожим случаем в модели бинарного дерева.

Вариант 2: две ветки ниже страйка и две ветки выше страйка. В таком случае:

$$MV = \frac{1}{4}\cdot N\cdot(S_1+(1+\alpha)\cdot X-70)+\frac{1}{4}\cdot N\cdot(S_1+X-70)+0+0=\frac{N\cdot(S_1-70)}{2}+\frac{N\cdot(2+\alpha)\cdot X}{4}$$

Тогда $Vega = \frac{N\cdot(2+\alpha)}{4}$

Вариант 3: одна ветка выше страйка и три ветки ниже страйка. В таком случае:

$$MV = \frac{1}{4}\cdot N\cdot(S_1+(1+\alpha)\cdot X-70)$$

Тогда $Vega = \frac{N\cdot(1+\alpha)}{4}$

Вариант 4: одна ветка ниже страйка и три ветки выше страйка. В таком случае:

$$MV = \frac{1}{4}\cdot N\cdot(S_1+(1+\alpha)\cdot X-70)+\frac{1}{4}\cdot N\cdot(S_1+X-70)+\frac{1}{4}\cdot N\cdot(S_1-X-70)+0=\frac{3\cdot N\cdot(S_1-70)}{4}+\frac{N\cdot(1+\alpha)\cdot X}{4}$$

Тогда $Vega = \frac{N\cdot(1+\alpha)}{4}$

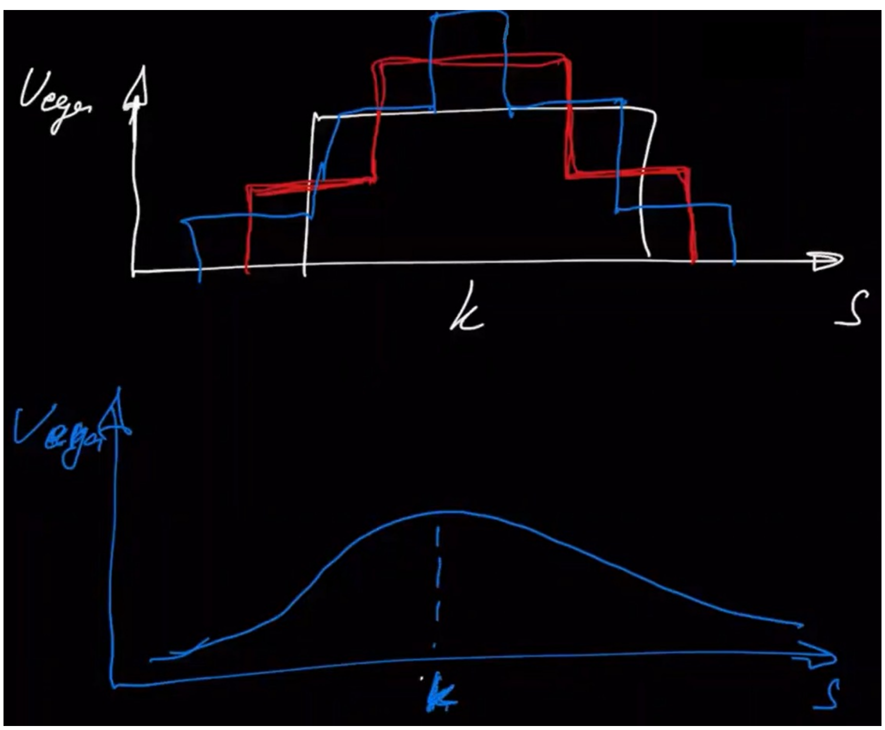

Fig. 6: Зависимость Vega от спота

На рисунке 6 изображена зависимость $Vega$ от спота. На верхним рисунке белым изображена зависимость для бинарного дерева. Красным изображена зависимость для дерева с четырьмя исходами. Синим изображена зависимость для дерева с шестью исходами. При переходе к непрерывному случаю (увеличиваем число исходов до бесконечности, при этом приближая исходы к нормальному распределению) получим график зависимости $Vega$ от спота (нижний график).

3.4 Важное замечание о форварде и споте

В начале рассмотрения предыдущей задачи было для упрощения принято, что ставки нулевые и, соответственно, форвард совпадает со спотом и как результат, совпадает со страйком. На практике, форвард редко совпадает со страйком. На самом деле, во всех графиках нас интересовала зависимость $Vega$ от **форварда**, а не от спота, потому что опцион заключается на форвард, а не на спот - имея право купить актив, например, через год, важно значения спота через год, а не текущее значения спота. Деревья в бинарной модели также строятся относительно форвардной цены, а не относительно спотовой.

Также отметим, что максимальное значение $Vega$ достигается при форварде, равном страйку. Любое движение из этой точки (уменьшение или увеличение) форварда ведёт к уменьшению $Vega$. Другими словами, чувствительность опциона к волатильности уменьшается, если форвард отходит от значения страйка опциона.

Примечание
$Vega$ у одного купленного ванильного опциона неотрицательная. Чтобы сделать портфель с $Vanna > 0$ и $Vega = 0$ необходимо использовать хотя бы два опциона, причём второй опцион надо продать, чтобы его $Vega$ была меньше 0.

Примечание
Дельта-хедж имеет $Vega = 0$ и $Vanna = 0$.