Quantitative Analytics.
Lectures. Weeks 5-8.
Проект по оценке стоимости свопов

Angela Abdrazakova

25 октября 2022 г.

Contents

1 Свопы

Своп (англ. swap) — это соглашение между двумя сторонами об обмене (свопе) определёнными денежными потоками в определённые сроки в будущем.

$$PV = K\sum_{i=1} D_i - \sum_{i=1} L_i D_i,$$

где K- купоны (coupons, fixed leg rate, strike rate), L_i - форвардные ставки и D_i - дисконт-факторы.

На рынке свопы котируются в номинальных ставках свопа (par swap rates) (значение фиксированной ставки , которая делает стоимость свопа равной нулю). Пусть S - номинальная ставка свопа. Тогда:

$$0 = PV = S\sum_{i=1} D_i - \sum_{i=1} L_i D_i \Leftrightarrow \sum_{i=1} L_i D_i = K\sum_{i=1} D_i \rightarrow PV = (K-S)\sum_{i} D_i$$

2 Доходность облигации vs ставка свопа (Bond Yield vs Swap rates)

Каким образом сравнивать доходность облигации и ставку свопа? Небходимо сравнивать DV01 (первая производная по отношению к ставке (доходности).

Облигации:

$$DV01_B = -\frac{\partial PV_B}{\partial Y} = \sum_i t_i c_i e^{-Yt_i}$$

Свопы:

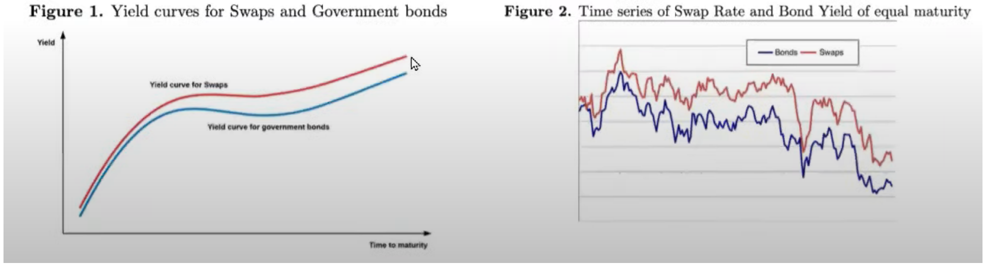
$$DV01_S = -\frac{\partial PV_S}{\partial S} = \sum_i D_i$$

Считаем Hedge ratio по формуле: Hedge ratio$=\frac{DV01_S}{DV01_B}$

3 Спред свопа (Swap spread)

Спред свопа - это разница между фиксированным компонентом (fixed leg) данного свопа и доходностью суверенной долговой ценной бумаги с аналогичным сроком погашения.

Figure 1. Yield curves for Swaps and Government bonds **Figure 2.** Time series of Swap Rate and Bond Yield of equal maturity



При моделировании ставок и спредов, особенно на коротких временных горизонтах обычно используют линейные случайные блуждания, а не экспоненциальные.

Рассмотрим процесс $A_t = S_t + X_t$, где S_t и X_t - ставка свопа и спред свопа соответственно, которые описываются следующими уравнениями:

$$dS_t = \sigma_S dW_t$$

$$dX_t = \sigma_X dZ_t$$

$$dW_t dZ_t = 0$$

Q. а) Найти волатильность процесса A_t

б) Найти корреляцию между A_t и S_t

Решение: а. По условию, $S_t = S_0 + N(0, \sigma_S^2 t)$ и $X_t = X_0 + N(0, \sigma_X^2 t)$.

Тогда $A_t = A_0 + N(0, (\sigma_S^2 + \sigma_X^2)t)$ или $dA_t = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_X^2} dV_t$

$$Var(A_t) = Var(S_t + X_t) = Var(S_t) + Var(X_t) + 2Cov(X_t, S_t) = Var(\int_0^t \sigma_S \, dW_t) + Var(\int_0^t \sigma_X \, dZ_t) =$$

$$= \sigma_S^2 Var(W_t) + \sigma_X^2 Var(Z_t) = \sigma_S^2 t + \sigma_X^2 t,$$

так как X_t и S_t не коррелируют.

б.

$$Cov(A_t, S_t) = Cov(S_t + X_t, S_t) = Cov(S_t, S_t) + Cov(X_t, S_t) = \sigma_S^2 t$$

$$corr(A_t, S_t) = \frac{\sigma_S^2 t}{\sqrt{\sigma_S^2 t + \sigma_X^2 t}\sqrt{\sigma_S^2 t}} = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_X^2}}$$

4 Опционы на свопы (Swaptions)

Опционы на свопы (свопционы) дают одной из сторон право в будущем заключить своп, в котором заранее установленная фиксированная ставка обменивается на плавающую. Стоимость опциона-колл рассчитывается по следующей формуле:

$$Call(S_t, K, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_t[(S_T - K)]^+ = \mathbb{E}_t[S_T \mathbb{I}_{S_T > K}] - \mathbb{E}_t[K \mathbb{I}_{S_T > K}] = \mathbb{E}_t[S_T \mathbb{I}_{S_T > K}] - K\mathbb{Q}_t[S_T > K]$$

$$\mathbb{E}_t[S_T \mathbb{I}_{S_T > K}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_K^\infty x e^{-\frac{(x-S_t)^2}{2\sigma^2\tau}} \, dx$$

Сделаем замену:

$$y = \frac{x - S_t}{\sqrt{\sigma^2\tau}}, \; x = y\sqrt{\sigma^2\tau} + S_t, \; dx = \sqrt{\sigma^2\tau} dy$$

Пусть $h = \frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2\tau}}$, тогда

$$\mathbb{E}_t[S_T \mathbb{I}_{S_T > K}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-h}^\infty (y\sqrt{\sigma^2\tau} + S_t) e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{\sigma^2\tau} \, dy =$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^\infty y e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy + \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy = \frac{\sqrt{\sigma^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-h}^\infty - e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy = \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} + \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

$$\mathbb{Q}_t[S_T > K] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_K^\infty e^{-\frac{(x-S_t)^2}{2\sigma^2\tau}} \, dx$$

Делаем аналогичную замену:

$$\mathbb{Q}_t[S_T > K] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-h}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{\sigma^2\tau} \, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

В результате получаем:

$$Call(S_t, K, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_t[S_T \mathbb{I}_{S_T > K}] - K\mathbb{Q}_t[S_T > K] =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} + \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-h}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy = (S_t - K) \int_{-h}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} =$$

$$= (S_t - K)(1 - N(-h)) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} = (S_t - K)N(h) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}},$$

где $N(h)$ - значение функции стандартного нормального распределения в точке h.

Стоимость пут-опциона можно найти из паритета опционов пут и колл (Put–call parity):

$$S_T - K = [(S_T - K)]^+ + [(K - S_T)]^+$$

$$\mathbb{E}_t[S_T - K] = \mathbb{E}_t[(S_T - K)]^+ + \mathbb{E}_t[(K - S_T)]^+$$

$$S_t - K = Call(S_t, K, \sigma, \tau) - Put(S_t, K, \sigma, \tau)$$

$$Put(S_t, K, \sigma, \tau) = Call(S_t, K, \sigma, \tau) - S_t + K = (S_t - K)N(h) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} - S_t + K =$$

$$= (K - S_t)(1 - N(h)) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} = (K - S_t)N(-h) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}}$$

Дельта колл-опциона :

$$\frac{\partial Call(S_t, K, \sigma, \tau)}{\partial S_t} = \left[(S_t - K) N\left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right)^2}{2}} \right]'_{S_t} =$$

$$= N\left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right) + (S_t - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right)^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right) e^{-\frac{\left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right)^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} =$$

$$= N\left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right) + \frac{S_t - K}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} e^{-\frac{(S_t - K)^2}{2\sigma^2\tau}} - \frac{S_t - K}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} e^{-\frac{(S_t - K)^2}{2\sigma^2\tau}} = N\left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right)$$

Используя Put-Call Parity, получим, что:

$$\frac{\partial Put(S_t, K, \sigma, \tau)}{\partial S_t} = \frac{\partial Call(S_t, K, \sigma, \tau)}{\partial S_t} - 1 = N\left(\frac{S_t - K}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right) - 1 = -N\left(\frac{K - S_t}{\sqrt{\sigma^2 \tau}}\right)$$

5 Модели Башелье и Блэка-Шоулза

$$C = e^{-rT}\left[(F - K)N(d_1) + \sigma\sqrt{T}\, n(d_1)\right]$$

$$P = e^{-rT}\left[(K - F)N(-d_1) + \sigma\sqrt{T}\, n(d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{(F - K)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Bachelier model

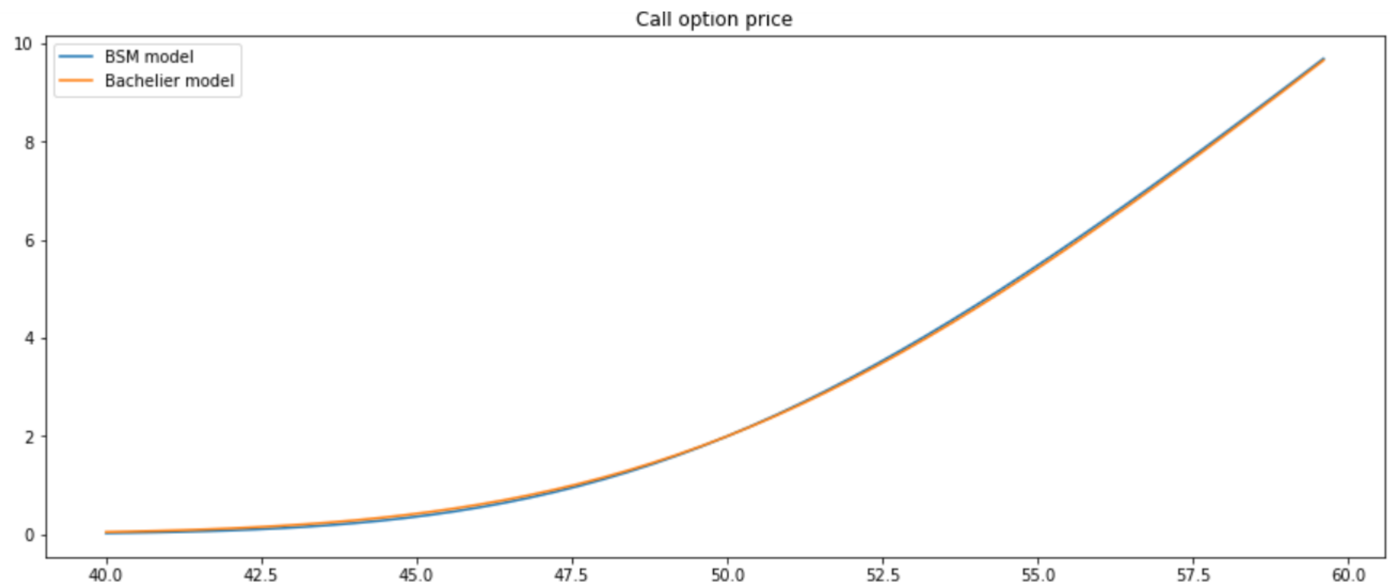
$$C = e^{-rT}[F\,N(d_1) - K\,N(d_2)]$$

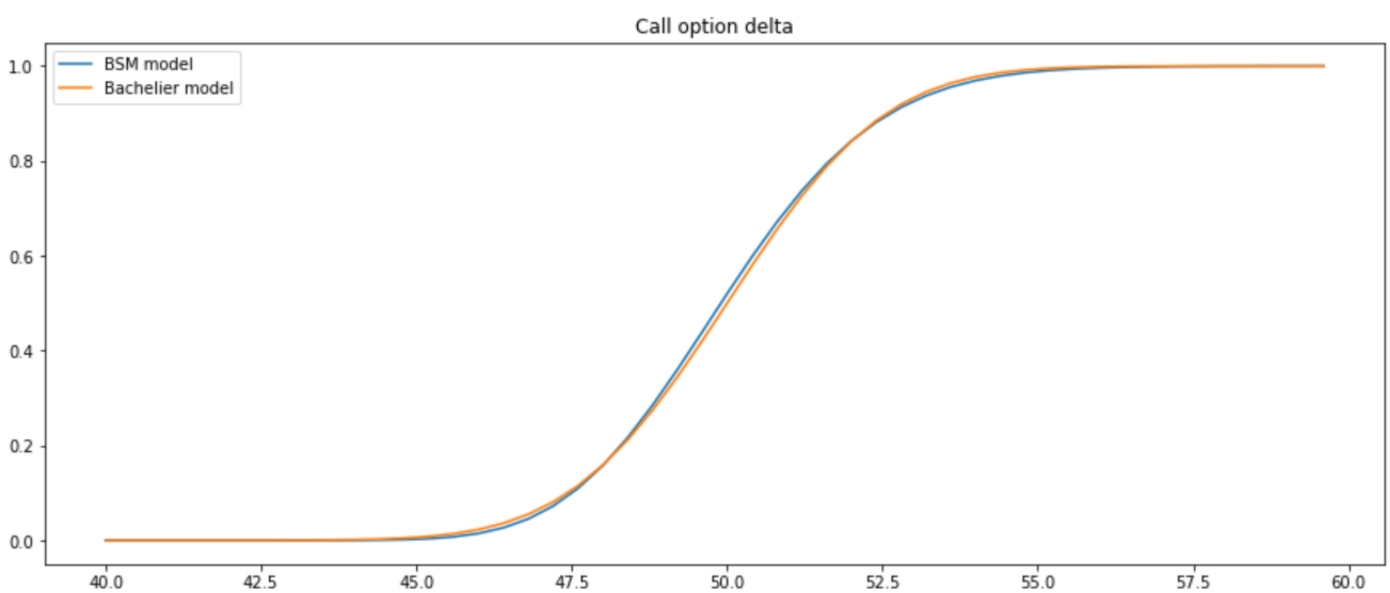
$$P = e^{-rT}[K\,N(-d_2) - F\,N(-d_1)]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Black model

Fig. 1: формулы стоимости европейских опционов


Call option price
BSM model
Bachelier model
10
8
6
4
2
0
40.0
42.5
45.0
47.5
50.0
52.5
55.0
57.5
60.0


Call option delta
BSM model
Bachelier model
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
40.0
42.5
45.0
47.5
50.0
52.5
55.0
57.5
60.0