Quantitative Analytics.
Lectures. Week 1.
Derivatives Pricing: PDE vs. Risk-Neutral Approach.

Zabello Maria

9 октября 2022 г.

Contents

1 Повестка дня

- Math needed for risk-neutral pricing.
- Main results of the risk-neutral approach.

Мы посмотрим с Вами на два подхода: это на риск-нейтральный прайсинг и на основные результаты без вывода теорем - просто формулировки, но чтобы у Вас было полное представление о том, как можно прайсить дериватив. Это я уже повторяю раз, наверно, десятый, мы так никак не можем дойти до математики.

- Main results of the PDE approach.

Потом посмотрим на основные результаты подхода, основанного на уравнениях в частных производных: все, что касается Блэка-Шоулза. Быстро выведем его, быстро посмотрим, на чем он основывается, как его можно улучшить, где косяки, и сравним, собственно, два подохода.

- Greek coefficients. Estimation techniques.

В конце поговорим про оценку греков и три основных способа, как их можно оценить.

2 Риск-нейтральный прайсинг

2.1 Первая фундаментальная теорема

Итак, обозначим за $X\left(t\right) = ((X_1(t), ..., X_p(t)))^T$ ценовой процесс. Пусть в нашей экономике существует p активов (самый базовый пример: у нас есть что-то безрисковое - его можно как X_1 смотреть и простейший случай - опцион на акцию - X_2 обозначает цену акции).

Строго положительный процесс Ито, который мы будем использовать для дисконтирования наших цен на активы, мы будем называть дефлятором.

За дефлятор обозначим $D\left(t\right)$, а также наш дисконтированный процесс цены $X^D\left(t\right) = \left(\dfrac{X_1\left(t\right)}{D\left(t\right)}, \dots, \dfrac{X_P\left(t\right)}{D\left(t\right)}\right)^T$, то есть кажый актив (независимо от того, безрисковый актив или цена) мы поделим на $D\left(t\right)$.

Будем говорить, что мера $\mathbb{Q}$ является эквиввалентной мартинглальной мерой, если порожденный дефлятором $D\left(t\right)$ процесс $X^D\left(t\right)$ является мартингалом относительно меры $\mathbb{Q}$ (или $\mathbb{Q}$-мартингалом).

амечание. Мы работаем на одном и том же вероятностном пространстве, поэтому меры должны быть эквивалентными, то есть для любой пары таких мер одна мера абсолютно непрерывна относительно другой.

Теорема 1.1(Достаточное условие для отсутствия арбитража) Если существует дефлятор такой, что дисконтированный процесс цен позволяет создать эквивалентную мартингальную меру (т.е. $X^D\left(t\right)$ является мартингалом), то отсутствует арбитраж.

Замечание. Нам не нужно в таком случае каждый портфель проверять на отсутствие арбитража (арбитраж: создаем портфель, который в начальный момент ничего не стоит, а затем что-то стоит с положительной вероятностью и не стоит меньше этого). Достаточно найти такой дефлятор, чтобы ценовой процесс стал мартингалом (значит в экономике отсутствует арбитраж и все цены честные).

Если дефлятор - один из P активов, мы его будем называть *numeraire*.

2.2 Теорема Гирсанова

Поговорим о замене мер. У нас есть глобальная теорема. Проверка всех портфелей на безарбитражность. Можно ли создав портфель, получить гарантированнный профит в конечный момент времени. От этой проблемы перейдем к другой. Что мы должны сделать с ценовым процессом, чтобы он позволял работать с какой-то эквивалентной мартингальной мерой? При каких условиях дефлятор действительно будет существовать? Что случится с ценовым процессом, если мы потеряем меру. Ценовой процесс, как правило, представляется в виде стохастиеского дифференциальнго уравнения. Есть случайная часть, которая отвечает за броуновское движение и броуновское движение живет в некотором вероятностном мире относительно своей меры. Если поменяем мир, непонятно, что случится с броуновским движением.

Пусть есть две меры $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}(\theta)$. Они связаны между собой плотностями (Теорема Радона — Никодима работает в каждый момент времени, так как процессы случайные):

$\varsigma^{\theta}(t) = E_t^{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{P}(\theta)}{d\mathbb{P}})$ (математическое ожидение по мере $\mathbb{P}$ производной Радона — Никодима), предположим, что $\frac{d\varsigma^{\theta}(t)}{\varsigma^{\theta}(t)} = -\theta(t)^T dW(t)$

Замечание. $E_t^{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{P}(\theta)}{d\mathbb{P}}) = E(\frac{d\mathbb{P}(\theta)}{d\mathbb{P}}|\mathbb{F}_t)$, где $\mathbb{F}_t$ - элемент фильтрации в момент времени t (используется фильтрация, которая порождена броуновским движением.

Теорема 1.2(Теорема Гирсанова) Предположим, что $\varsigma^{\theta}(t)$ это мартингал. Тогда для всех $t \in [0, T]$:
$W^{\theta}(t) = W(t) + \int_t^0 \theta(s)ds$, где

- $W^{\theta}(t)$ - процесс броуновского движения относительно новой меры $\mathbb{P}(\theta)$.
- $W(t)$ - процесс броуновского движения относительно старой меры.

Применяя теорему Гирсанова мы получаем новое стохастическое уравнение для нашего ценового процесса:
$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \Longrightarrow dX(t) = (\mu(t) - \sigma(t)\theta(t))dt + \sigma(t)dW^{\theta}(t)$

При броуновском движении σ как была, так и осталась, но при dt появился новый член. Значит, если подобрать такое $\theta(t)$, чтобы множитель перед dt обнулился, то у нового ценового процесса относительно новой меры не будет дрифта. Следовательно такой процесс является мартингалом.

2.3 Свойство мартингала

- *Деривативный контракт* выплачивает в момент времени T измеримую относительно F_T случайную величину $V(T)$, и не делает никаких платежей перед моментом T.
- Будем называть дериватив *достижимым*, если существует торговая стратегия φ такая, что $V(T) = \varphi(T)^T X(T) = \pi(T)$
- Для отсутствия арбитража необходимо выполнение условия: $V(t) = \pi(t)$ для любого $t \in [0, T]$
- Свойство мартингала: $\frac{V(t)}{D(t)} = E_t{}^{\mathbb{Q}}(\frac{V(t)}{D(t)})$ (математическое ожидание относительно новой меры $\mathbb{Q}$ от дисконтированного дериватива в момент экспирации)

Теорема 1.3 Если нет арбитражных возможностей, рынок будет являться полным тогда и только тогда, когда мартингальная мера существует и единственная.

3 PDE(partial differential equation) approach

3.1 Предположения, лежащие в основе модели BS

- Можем хеджировать постоянно
- Нет транзакционных издержек
- Волатильность - константа
- Отсутствуют арбитражные возможности
- Underlying логнормально распределен
- Нет проблем в том, чтобы занять или продать акцию

3.2 Уравнение BS

$dV = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW$

Уравнение получается из уравнения цены актива $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ и применения леммы Ито.

Составим портфель

- 1 дериватив
- $\frac{\partial V}{\partial S}$ акций

Стоимость портфеля в момент t:

$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S}S$

Приращение стоимости портфеля:

$d\Pi = -dV + \frac{\partial V}{\partial S}dS$

Известно, что dV и dS можно представить в виде:

$d\Pi = (-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt$

Нет рисков:

$d\Pi = r\Pi dt$

Получим формулу BSM:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rV$$

- $\theta = \frac{\partial V}{\partial t}$, Тета - частная производная стоимости опциона по времени, "time decay term".
- $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, Дельта - изменение цены опциона с изменением цены underlying актива, hedge ratio.
- $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, Гамма - выпуклость, производная дельты по цене underlying актива.

Чтобы найти цену дериватива необходимо задать граничные условия и решить уравнение. Граничные условия зависят от опциона.

3.3 Преимущества модели BS

Устойчивая модель. Уравнение легко численно решается конечно-разностными методами.
Уравнение проще обобщить для:

- Дивидендов
- Нестандартных payoffs
- Стохастической волатильности
- Можно добавить скачки стоимости акций (процесс Пуассона)
- Транзакционные издержки (будет менятся волатильность)
- Стохастические процентные ставки

4 Греческие коэффициенты

4.1 Определение

Греки - набор величин, которые показывают чувствительность цены контракта к изменению параметров/переменных.
Производная по параметру/переменной - $\frac{\partial V}{\partial x}$

- V - цена опциона
- x - параметр/переменная

Дериватив может быть смешанным или высшего порядка.
В то время как цены можно посмотреть где-то на рынке, увидеть как прайсят опционы другие банки, узнать значение греков гораздо сложнее. Поэтому использование неверно посчитанных греческих коэффициентов может к привести к большим денежным потерям.

- Vega - $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$, где σ - волатильность

Для оценки Веги можно продифференцировать формулу Блэка-Шоулза по волатильности и вывести явную формулу. Но что делать, если не существует решения в замкнутой форме и непонятно, как оценивать грек?

4.2 Техники оценки греков

- Конечно-разностные приближения
- Pathwise Derivative method
- Метод, основанный на отношении правдоподобия

4.2.1 Конечно-разностные приближения

Существует модель, рассмотрим ее чувствительность к параметру θ (Y - дисконтированный payoff)

$$a\left(\theta\right) = E[Y\left(\theta\right)]$$

Найдем $a'(\theta)$.
Forward-difference estimator:

$$\hat{\Delta}_F = \frac{Y\left(\theta + h\right) - Y\left(\theta\right)}{h}$$

Разложим $a'(\theta + h)$ по Тейлору и получим смещение(так считать не стоит):

$$E[\hat{\Delta}_F - a'\left(\theta\right)] = \frac{1}{2}a''\left(\theta\right)h + o(h)$$

Попробуем улучшить оценку и избавиться от смещения.
Central-difference estimator:

$$\hat{\Delta}_C = \frac{Y\left(\theta + h\right) - Y\left(\theta - h\right)}{2h}$$

$$Bias\left(\hat{\Delta}_C\right) = o(h)$$

Чем меньше h, тем ближе мы к настоящему определению производной (предел при $h \longrightarrow 0$). Но при уменьшении h, мы уменьшаем смещение, но увеличеваем дисперсию.

$$Var[\hat{\Delta}_F] = \frac{Var[Y\left(\theta + h\right) - Y\left(\theta\right)]}{h^2}$$

Следовательно, в оценке греков методом конечно-разностных приближений всегда существует баланс между величиной смещения и дисперсии оценки.

4.2.2 Pathwise Derivative estimate

Честная производная:

$$Y'(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}$$

В случае, когда возможна следующая замена честная производная является несмещенной оценкой (помним, что $E[Y(\theta)]$ - это $a(\theta)$):

$$E[\frac{d}{d\theta} Y(\theta)] = \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)]$$

Проблемы с таким методом возникают в случае, когда финальный payoff не непрерывен. То есть при разрывах метод не работает.

Рассмотрим пример расчета дельты для модели Блэка-Шоулза:

$$Y = e^{-rT}[S(T) - K]^{+}$$

Y - дисконтированный payoff для call опциона

$$S(T) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}, Z \sim N(0, 1)$$

Мы хотим оценить математическое ожидание производной Y по θ. Помним, что нам нужно посчитать дельту(чувствительность к изменению текущего спота, то есть ищем производную по S в момент времени 0)

Цепное правило для дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{dS(0)}$$

Первая производная:

$$\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT} I[S(T) > K]$$

Вторая производная:

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT} \frac{S(T)}{S(0)} I[S(T) > K]$$

При взятии мат ожидания от $\frac{dY}{dS(0)}$ мы получим дельту. Такой метод более актуален для более сложных продуктов.

4.2.3 Метод, основанный на отношении правдоподобия

Преимущество данного метода заключается в том, что он не требует непрерывности выплат. Это достигается за счет дисконтирования вероятностей, а не выплат.

Ожидаемый дисконтированный payoff:

$$E_\theta[Y] = E_\theta[f(X)] = \int f(x) g_\theta(x) dx$$

x - случайная величина
$g_\theta(x)$ - плотность распределения случайной величины

Записываем определение того, что нам нужно оценить:

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[Y] = \int f(x) \frac{d}{d\theta} g_\theta(x) dx$$

Следовательно:

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[Y] = \int f(x) \frac{\dot{g}_\theta(x)}{g_\theta(x)} g_\theta(x) dx = E_\theta[f(X)] \frac{\dot{g}_\theta(x)}{g_\theta(x)}$$

От нахождения греческого коэффициенты мы перешли к нахождению математического ожидания функции $f(x)$ домноженной на отношение производной плотности по θ к плотности.

Например, чтобы посчитать дельту Блэка-Шоулза придется дисконтировать логнормальную плотность S(T) по S(0).