Количественная аналитика
Лекции (1 – 2 неделя)
Что особенно важно знать о случайных процессах

Максим Соснин

8 октября 2022 г.

Содержание

1 Случайный процесс

1.1 Определение

- **Дискретный случайный процесс** – это набор случайных величин $\{X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}\}$, индексированных некоторым параметром $t \in \{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

  Параметр t может быть временем, тогда t_i – это моменты времени, в которые была зарегистрирована случайная величина. Однако параметр может иметь и другие значения, например, координата. Далее будем подразумевать, что параметр – это время.

  Распределения случайных величин X_{t_i} могут быть как одинаковыми, так и разными.

- **Непрерывный случайный процесс** – это случайный процесс, параметр которого изменяется непрерывно. Обозначение: ξ_t или $\xi(t)$, где t, к примеру, принимает значения из отрезка $[0, T]$.

1.2 Характеристики случайного процесса

- **Среднее значение**

$$\mathrm{E}[X_{t_i}] = \mu(t_i)$$
$$\mathrm{E}[\xi_t] = \mu(t)$$

  Среднее значение случайного процесса в общем случае зависит от времени.

- **Дисперсия**

$$\mathrm{D}[\xi_t] \equiv \mathrm{Var}[\xi_t] = \mathrm{E}[\xi_t^2] - \mathrm{E}[\xi_t]^2 = \sigma^2(t)$$

  Дисперсия случайного процесса в общем случае также зависит от времени.

- **Ковариация (autocovariance, covariance)**

$$\mathrm{cov}(\xi_t, \xi_s) = \mathrm{E}[(\xi_t - \mu(t))(\xi_s - \mu(s))]$$

  В англоязычной литературе данная характеристика случайного процесса называется ***autocovariance****, поскольку это ковариация случайного процесса с самим собой в различные пары моментов времени. Существует путаница между русскоязычной и англоязычной терминологией, связанной с ковариацией и корреляцией. См. https://en.wikipedia.org/wiki/Autocovariance, https://en.wikipedia.org/wiki/Autocorrelation .*

- **Корреляция (autocorrelation, correlation)**

$$\mathrm{corr}(\xi_t, \xi_s) = \frac{\mathrm{cov}(\xi_t, \xi_s)}{\sqrt{\sigma_\xi^2(t) \cdot \sigma_\xi^2(s)}}$$

- **Моменты** – начальный, центральный, смешанный, ...

1.3 Стационарный случайный процесс

Случайный процесс называется **стационарным**, если его среднее значение и дисперсия (а следовательно, и все последующие моменты) не зависят от времени.

$$\mathrm{E}[\xi_t] = \mu = const$$
$$\mathrm{D}[\xi_t] = \sigma^2 = const$$

Различают стационарность **в узком смысле** и стационарность **в широком смысле**.

2 Случайное блуждание

2.1 Определение

Рассмотрим сумму независимых и одинаково распределённых случайных величин в моменты времени t_k:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{t_k}, \quad \forall i\, X_{t_i} - \text{i.i.d.}$$

Ряд $\{S_n\}$ называется **случайным блужданием**.
Случайное блуждание также можно определить следующим образом:

$$S_n = S_{n-1} + X_{t_n}$$

2.2 Среднее значение и дисперсия

- Среднее значение случайного блуждания:

$$\mathrm{E}[S_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[X_{t_k}] = \sum_{k=1}^{n} \mu = n\mu,$$

  где $\mu = \mathrm{E}[X_{t_i}]$.

- Дисперсия случайного блуждания:

$$\mathrm{D}[S_n] = \mathrm{D}\left[\sum_{k=1}^{n} X_{t_k}\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}[X_{t_k}] = n\sigma^2,$$

  где $\sigma^2 = \mathrm{D}[X_{t_i}]$. (Здесь дисперсия суммы равна сумме дисперсий, потому что X_{t_i} – независимы и одинаково распределены.)

2.3 Отнормированное случайное блуждание

Осуществим нормировку случайных величин X_{t_i}:

$$Y_{t_i} = \frac{X_{t_i} - \mu}{\sigma}.$$

Получим новое случайное блуждание

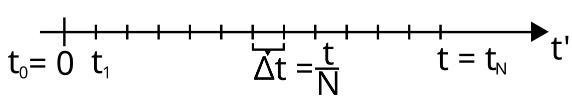
$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} Y_{t_k}$$

со средним значением $\mathrm{E}[\widetilde{S}_n] = 0$ и дисперсией $\mathrm{D}[\widetilde{S}_n] = n$.

3 Винеровский процесс

3.1 Винеровский процесс как предельный случай случайного блуждания

Винеровский процесс можно определить как предельный случай случайного блуждания. Разобьём отрезок $[0, t]$ точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{N-1} < t_N = t$ на N равных отрезков длины $\Delta t = t/N$.



Пусть $\varepsilon_i,\ i \in [0..N]$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины со средним значением 0 и дисперсией 1. Каждой точке t_i поставим в соответствие случайную величину ε_i.

Рассмотрим случайное блуждание

$$\widetilde{W}_t = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \cdot (\Delta t)^\alpha,$$

где α – некоторое число, которое мы пока что не знаем. Заметим, что случайная величина $\varepsilon_k \cdot (\Delta t)^\alpha$ имеет среднее значение 0 и стандартное отклонение $(\Delta t)^\alpha$. Случайное блуждание W_t будет иметь следующие значения среднего и дисперсии (см. пункт 2.2):

$$\mathrm{E}[\widetilde{W}_t] = 0,$$

$$\mathrm{D}[\widetilde{W}_t] = N(\Delta t)^{2\alpha} = N\left(\frac{t}{N}\right)^{2\alpha} = \frac{t^{2\alpha}}{N^{2\alpha-1}}.$$

Если мы устремим N к ∞, то при $\alpha > \frac{1}{2}$, $\mathrm{D}[\widetilde{W}_t] \to 0$, а при $\alpha < \frac{1}{2}$, $\mathrm{D}[\widetilde{W}_t] \to \infty$. Поэтому единственно возможное значение $\alpha = \frac{1}{2}$ (*лектор не поясняет, почему так*), при котором $\mathrm{D}[\widetilde{W}_t] = t$. Таким образом, при $N \to \infty$, мы получаем непрерывный случайный процесс со средним 0 и дисперсией t, который называется **винеровским процессом**:

$$W_t = \lim_{N\to\infty} \widetilde{W}_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \cdot \sqrt{\Delta t} = \sqrt{t} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \overset{\text{ЦПТ}}{=} \sqrt{t} \cdot N(0,1),$$

где $N(0,1)$ – стандартное нормальное распределение. В последнем равенстве переход совершён благодаря центральной предельной теореме.

Отметим, что винеровский процесс не является стационарным, поскольку $\mathrm{D}[W_t] = t$.

Также отметим, что ковариация винеровского процесса

$$\mathrm{cov}(W_t, W_s) = \min(t, s)$$

(см. https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process#Covariance_and_correlation).

3.2 Примеры винеровских процессов

- **Стандартизированный винеровский процесс**

$$W_t = \sqrt{t} \cdot N(0,1)$$

- **Не стандартизированный винеровский процесс**

$$W_t = \sigma\sqrt{t} \cdot N(0,1),$$

  где σ – некоторое положительное число.

- **Винеровский процесс со сдвигом (with drift)**

$$Y_t = \mu t + \sigma W_t,$$

  где μ и σ – некоторые числа ($\sigma > 0$). При этом $\mathrm{E}[Y_t] = \mu t$.