Quantitative Analytics.
Lectures. Week 3.
Bond Yields and Return Calculations.
Доходности облигаций и методы их расчёта.

Еникеев Эмиль

2 октября 2022 г.

Contents

1 Realized return

Совокупный реализованный доход (**gross** realized return) - конечная стоимость с купоном за вычетом начальной стоимости:

$$R_{t-1,t} = \frac{BV_t + C_t - BV_{t-1}}{BV_{t-1}}$$

$$\begin{aligned}
&BV_t - \text{конечная стоимость облигации,}\\
&BV_{t-1} - \text{начальная стоимость облигации,}\\
&C_t - \text{купон выплаченный на момент времени t}
\end{aligned}$$

Net realized return - 'чистый' реализованный доход (за вычетом затрат на финансирование):

$$R_{t-1,t} = \frac{BV_t + C_t - BV_{t-1}}{BV_{t-1}} - r \times T(t-1,t)$$

$$\begin{aligned}
&BV_t - \text{конечная стоимость облигации,}\\
&BV_{t-1} - \text{начальная стоимость облигации,}\\
&C_t - \text{купон выплаченный на момент времени t,}\\
&r - \text{ставка,}\\
&T(t-1,t) - \text{длина периода в годах}
\end{aligned}$$

Для расчёта реализованной доходности облигации **за несколько периодов** мы должны учитывать ставки по которым реинвестируется каждый купон.
Риск реинвестирования - риск того, что получаемые денежные потоки будут реинвестированы под более низкую ставку, чем ожидается.
Пример: Расчёт совокупного реализованного дохода с реинвестированием одного купона

$$\begin{aligned}
&BV_t = 112 \text{ у.е.}\\
&BV_{t-1} = 105 \text{ у.е.}\\
&T(t-1,t) = 1 \text{ год}\\
&C_t = 2 \text{ у.е.}\\
&C_{t-1} = 2 \text{ у.е.}\\
&r = 1\%
\end{aligned}$$

Решение:

$$R_{t-1,t} = \frac{BV_t + C_t + C_{t-1} \times (1 + \frac{r}{m}) - BV_{t-1}}{BV_{t-1}} = \frac{112 + 2 + 2 \times (1 + \frac{0.01}{2}) - 105}{105} = 10.49\%$$

Примечание: m - количество выплат купона в год, ставка в примере начисляется только на первый купон, т.к. второй выплачен в конце периода

2 Bond Spread

Спрэд облигации - надбавка которую нужно сделать к ставке дисконтирования, чтобы теоретическую стоимость облигации сравнять со стоимостью облигации на рынке

$$\text{Bond Price} = \frac{C}{[1+z(1.0)]} + \frac{C+F}{[1+z(2.0)]}$$

$$\text{Market Bond Price} = \frac{C}{[1+z(1.0)+s]} + \frac{C+F}{[1+z(2.0)+s]}$$

s – спрэд

С помощью спрэда мы можем понять, насколько, относительно нашей оценки, торгуется облигация - дороже или дешевле. Иными словами, спрэд показывает разницу ставок дисконтирования которые закладывали мы, от оценки рынка

3 Yield to Maturity

Доходность к погашению (YTM) = Внутренняя норма доходности (IRR) = Совокупная доходность (Realized return, в случае реинвестирования денежных потоков по ставке YTM) - ставка дисконтирования которая приравнивает приведенную стоимость всех денежных потоков по инструменту к его цене:

$$\text{P} = \frac{C_1}{(1+YTM)^1} + \frac{C_2}{(1+YTM)^2} + ... + \frac{C_{n\times m}+F}{(1+YTM)^{n\times m}}$$

P – текущая цена облигации

C_k – купон за период k

n – количество лет

m – количество периодов в году

YTM – доходность к погашению

F – номинальная стоимость

Примечание: зачастую YTM вычисляется численными методами, Excel или на финансовым калькуляторе

Пример: Расчёт YTM на финансовом калькуляторе

coupon = 50 у.е.

m = 2, полугодовые платежи

n = 5 лет

F, face value = 1000 у.е.

P = 900 у.е.

Решение:

N = 5×2 = 10; $FV = 1000; PV = 900; PMT = 50$

CPT I/Y ⇒ $6.3835 \times 2 = \mathbf{12.77}\%$

4 Calculating the price for annuity

$$P = \frac{c/2}{(1+y/2)^1} + \frac{c/2}{(1+y/2)^2} + ... + \frac{c/2}{(1+y/2)^{2T}} = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{2T}\frac{1}{(1+\frac{y}{2})^i}$$

$$\sum_{i=1}^{2T}\frac{1}{(1+\frac{y}{2})^i} - \text{геометрическая прогрессия}$$

$$x^1 + x^2 + ... + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$$

$$x = \frac{1}{1+\frac{y}{2}}, \text{ тогда:}$$

$$P = \frac{c}{2} \times \frac{\frac{1}{1+\frac{y}{2}} \times (1 - \frac{1}{(1+\frac{y}{2})^{2T}})}{1 - \frac{1}{1+\frac{y}{2}}} = \frac{c}{2} \times \frac{2}{y} \times (1 - \frac{1}{(1+\frac{y}{2})^{2T}})$$

$$\text{PV for annuity} = \frac{c}{2} \times \frac{2}{y} \times (1 - \frac{1}{(1+\frac{y}{2})^{2T})})$$

5 Calculating the price for perpetuity

$$\text{PV of a perpetuity} = \frac{C}{y}$$

Пример: Расчёт цены для annuity, perpetuity
Годовые платежи 100 у.е. при YTM = 10%
Решение:
Для 10 лет:

$$PV = \frac{100}{(1+0.1)^1} + \frac{100}{(1+0.1)^2} + ... + \frac{100}{(1+0.1)^{10}} = 614.46$$

Бесконечно (perpetuity):

$$PV = \frac{100}{0.1} = 1000$$

6 Spot rates and YTM

$$P = PV = \frac{C_1}{(1+z(1))^1} + \frac{C_2}{(1+z(2))^2} + \frac{C_{n\times m}+F}{(1+z(n\times m))^{n\times m}} = \frac{C_1}{(1+YTM)^1} + \frac{C_2}{(1+YTM)^2} + \frac{C_{n\times m}+F}{(1+YTM)^{n\times m}}$$

$$\begin{aligned}\text{Upward slopping spot curve} &\Rightarrow YTM < z(nm)\\ \text{Flat spot curve} &\Rightarrow YTM = z(nm)\\ \text{Downward slopping curve} &\Rightarrow YTM > z(nm)\end{aligned}$$

7 The relationship between YTM, coupon rate and price

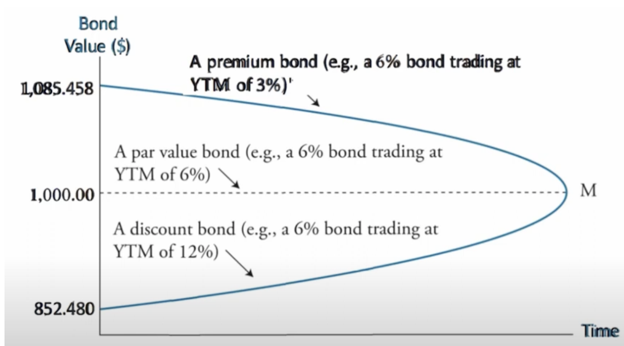

Fig. 1: The relationship between YTM, coupon rate and price

8 The limitations of traditional yield measures

- YTM предполагает что все денежные поступления будут реинвестироваться под ставку YTM и будет удерживаться до погашения
- Риск реинвестирования присутсвует в купонах которые могут быть реинвестированы под более низкую ставку (это также применимо к досрочно погашенным облигациям и амортизирующим облигациям)
- Риск реинвестирования становится более существенной проблемой для более долгосрочных облигаций и облигаций с более крупными купонами

9 Coupon effect

Облигации с низкой купонной доходностью более чувствительны к изменениям процентных ставок

	Price change from par (1000$)	
Change in rates	20-year, 8%	20-year, 12%
-2%	+231.15	+171.59
-1%	+106.77	+80.23
0	0	0
+1%	-92.01	-70.73
+2%	-171.59	-133.32

Fig. 2: Coupon effect

10 Carry roll-down scenarios

Первый сценарий Carry roll-down создан для расчета доходности полученной в случае если ставка остается неизменной

Realized forward сценарий:

- Наиболее частоиспользуемые предпосылки
- Форвардная ставка для будущих периодов остается неизменной с течением времени
- Когда начинается фьючерсный период, спот ставка для периода равна форвардной ставке
- Нет разницы между короткосрочными и долгосрочными инвестициями

Пример:
Двухгодовая облигация, купон 2.5%, цена в нулевой момент времени:

$$\frac{1.25}{1+0.0035}+\frac{1.25}{(1+0.0035)(1+0.006)}+\frac{1.25}{(1+0.0035)(1+0.006)(1+0.008)}+\frac{1.25+100}{(1+0.0035)(1+0.006)(1+0.008)(1+0.01)}=102.226$$

Через 6 месяцев цена будет:

$$\frac{1.25}{1+0.006}+\frac{1.25}{(1+0.006)(1+0.008)}+\frac{1.25+100}{(1+0.006)(1+0.008)(1+0.01)}=101.334$$

За эти 6 месяцев:

$$\text{купон} = 1.25 \text{ у.е.}$$
$$\text{изменение цены} = 101.334 - 102.226$$
$$\textbf{Carry roll-down = 1.25 - 0.892} = \mathbf{0.358}$$

Упрощенное вычисление для realized forward scenario: 102.226 * 0.0035 = 0.358
Второй сценарий: когда форвардные ставки при сдвиге во времени не изменяются. Такое происходит, когда рынок закладывают дополнительную премию за инвестиции на длинные сроки, соотвественно кривая не меняет форму.
Третий сценарий: Unchanched yields. В нем предполагается, что доходности облигаций в течение времени не меняются вообще. В таком случае требуется, чтобы купоны реинвестировались по ставке YTM

Period (months)	Forward rate (semi-annual)	6 months passed	Realized forward
0-6	0.7	=>	1.2
6-12	1.2	=>	1.6
12-18	1.6	=>	2.0
18-24	2.0		

Fig. 3: Первый Carry roll-down сценарий

Period (months)	Forward rate (semi-annual)	6 months passed	Realized forward	Unchanged term structure
0-6	0.7	=>	1.2	0.7
6-12	1.2	=>	1.6	1.2
12-18	1.6	=>	2.0	1.6
18-24	2.0			

Fig. 4: Второй Carry roll-down сценарий

11 Return decomposition

Мы можем разбить **доходность облигации (Profit and loss, PL)** на несколько компонентов, две крупные группы этих компонентов это изменение цены и внешний денежный поток (стоимость финансирования и купоны):

Изменение цены

- **Carry-roll-down** изменение стоимости облигации по мере изменение структуры ставок со временем
- **rate changes** скачки в ставках, отличающиеся от нормального изменения ставок со временем
- **spread changes** изменения в спреде, т.е. в надбавке к ставке дисконтирования денежных потоков по облигации

$$\begin{aligned}
&BV_t(R_t, S_t) - BV_{t-1}(R_{t-1}, S_{t-1}) = \\
&BV_t(R_t, S_t) - BV_t(R_t, S_{t-1}) \text{ spread change} \\
&BV_t(R_t, S_{t-1}) - BV_t(R'_t, S_{t-1}) \text{ rate changes} \\
&BV_t(R'_t, S_{t-1}) - BV_{t-1}(R_{t-1}, S_{t-1}) \text{ carry-roll-down}
\end{aligned}$$