使用线性规划来近似顶点覆盖问题

ILP（整数线性规划）

对于每一个顶点$v \in V$，有$x(v) \in \{0,1\}$，$x(v)=1$意为v在顶点覆盖中，$x(v)=0$意为v不再顶点覆盖中。那么，对于顶点覆盖问题的任意边(u,v)，u和v至少有一个必须在顶点覆盖中，即$x(u)+x(v) \geq 1$。这样就引出了以下用于寻找最小顶点覆盖的**0-1整数规划**。

$$
\begin{aligned}
& & min \sum_{v \in V} x(v) \\
s.t. & \quad & x(u)+x(v) \geq 1 \quad \forall (u,v) \in E \\
& & x(v) \in \{0,1\} \quad \forall v \in V
\end{aligned}
$$

relax to LP（线性规划松弛）

假设去掉了$x(v) \in \{0,1\}$这一限制，并代之以$0 \leq x(v) \leq 1$，就可以得到以下的线性规划，称为线性规划松弛。

$$
\begin{aligned}
& & min \sum_{v \in V} x(v) \\
s.t. & \quad & x(u)+x(v) \geq 1 \quad \forall (u,v) \in E \\
& & 0 \leq x(v) \leq 1 \quad \forall v \in V
\end{aligned}
$$

Rounding（使用Rounding的方法来构造近似算法）

对于每一个顶点v，都会求得一个$x(v)$的值$x^*(v)$，对$x(v)$做以下的rounding：

若$x^*(v) \geq 1/2$，则将该顶点加入到点覆盖集合中（$x(v)=1$），否则舍去顶点v（$x(v)=0$），直至图中的所有顶点处理完毕。

由以上算法可看出：

$$\sum_{u \in V} x^*(v) \leq \sum_{u \in V} x(v) \leq 2 \sum_{u \in V} x^*(v)$$

故此算法是一个近似度为2的近似算法。