目前，所有的NP完全问题都没有能够在多项式时间内求解的算法，我们通常可以采用以下几种解题策略：

- 只对问题的特殊实例求解
- 用动态规划法或分支限界法求解
- 用概率算法求解
- 只求近似解
- 用启发式方法求解

本节主要讨论的是解NP完全问题的近似算法。

近似算法的性能

若一个最优化问题的最优值为C^{OPT}，求解该问题的一个近似算法的一个近似最优解相应的目标函数值为C，则将**近似算法的性能比**定义为：

$$\eta = max(\frac{C}{C^{OPT}}, \frac{C^{OPT}}{C})$$

通常情况下，该性能比是问题输入规模n的一个函数$\rho(n)$，即

$$max(\frac{C}{C^{OPT}}, \frac{C^{OPT}}{C}) \le \rho(n)$$

顶点覆盖问题的近似算法

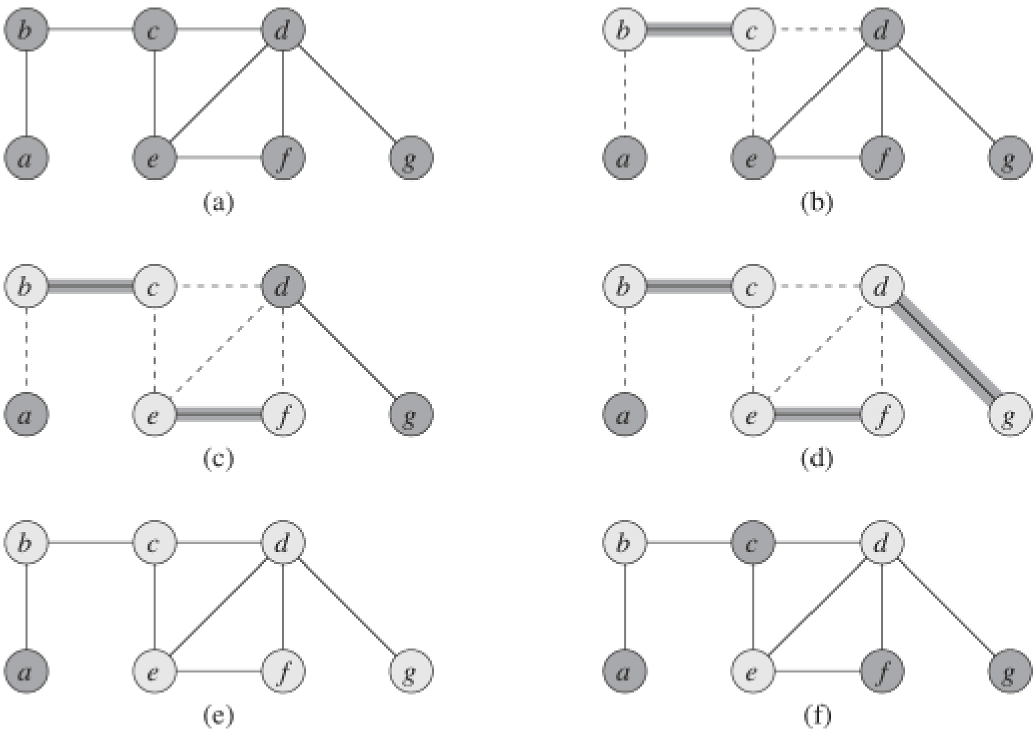
问题描述

无向图$G=(V,E)$的顶点覆盖是它的顶点集V的一个子集$V' \subseteq V$，使得若(u,v)是G的一条边，则$v \in V'$或$u \in V'$。顶点覆盖V'的大小是它所包含的顶点个数$|V'|$。 下面给出一个近似比为2的算法的伪代码：

```
VertexSet approxVextexCover(Graph g)
{
    cset = NULL;
    e = g.e;
    while (e != NULL)
    {
        从e中任取一条边(u, v);
        将顶点u,v加入cset;
        从e中删去与u和v相关联的边;
    }
    return cset;
}
```

算法运行过程

下图是《算法导论》中顶点覆盖问题近似算法的图例，说明了算法的运行过程和结果。



图(e)表示近似算法产生的近似最优顶点覆盖cset，它由顶点b,c,d,e,f,g所组成。图(f)是图G的一个最小顶点覆盖，它只含有3个顶点：b,d和e。

性能分析

假定算法选取的边集为A，则返回的顶点个数为2A。即$|C|=2|A|$。图G的任一顶点覆盖都至少包含A中各条边中的一个顶点，即$|C^{OPT}|\geq|A|$。

则

$$\rho=\frac{|C|}{|C^{OPT}|}\leq 2$$

旅行商问题的近似算法

问题描述

给定一个完全无向图$G=(V,E)$，其每一边$(u,v)\in E$有一非负整数费用$c(u,v)$。要找出G的最小费用哈密顿回路。

费用函数c往往具有三角不等式性质，即对任意的3个顶点$u,v,w\in V$，有：$c(u,w)\le c(u,v)+c(v,w)$。

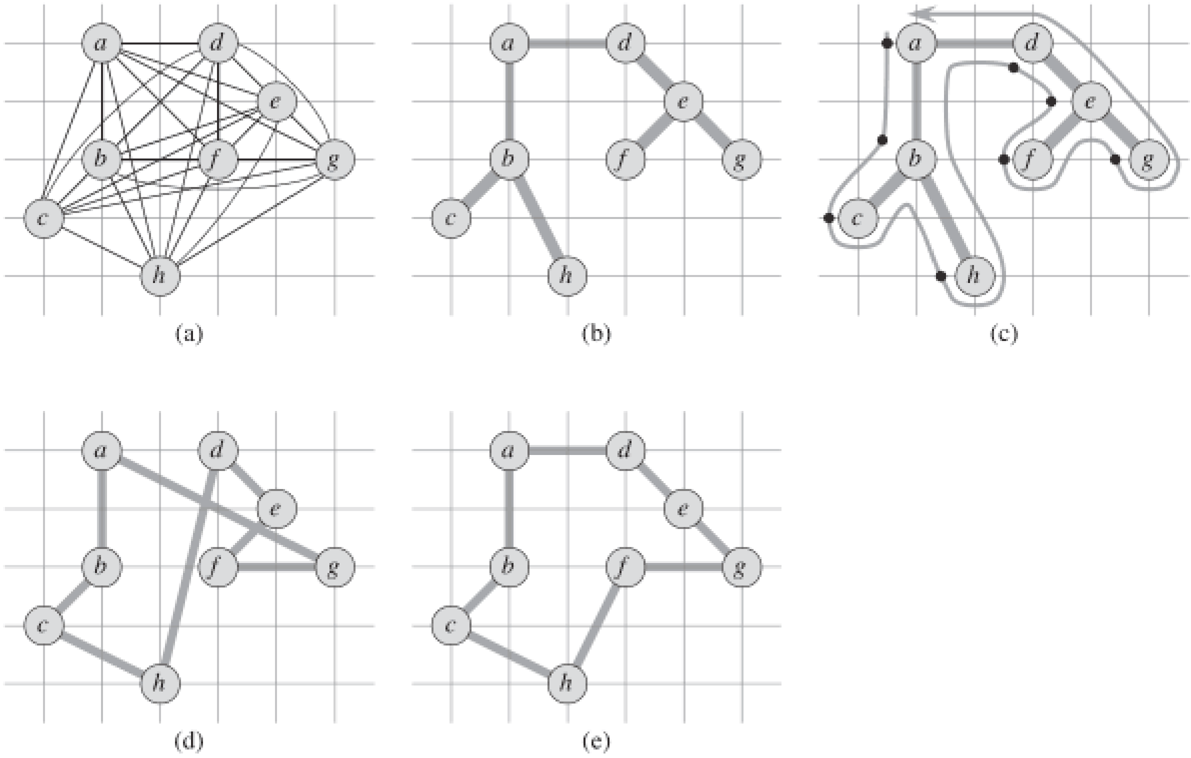
在费用函数不一定满足三角不等式的一般情况下，不存在具有常数性能比的解TSP问题的多项式时间近似算法，除非$P=NP$。换句话说，若$P\ne NP$，则对任意常数$\rho>1$，不存在性能比为ρ的解决旅行售货员问题的多项式时间近似算法。

下面给出一个解决满足三角不等式的旅行商问题的近似算法伪代码：

```
APPROX-TSP-TOUR(G, c)
    任意选择V中的一个顶点r，作为树根节点
    调用Prim算法得到图G的最小生成树T
    先序遍历T，得到顶点序列L
    删除L中的重复顶点形成哈密顿环C
    输出C
```

算法运行过程

下图是APPROX-TSP-TOUR的操作过程，(a)示出了给定点的集合，(b)示出了一个最小生成树T，它是由MST-PRIM计算出来的，根为a节点，(c)是对T进行先序遍历时的顶点序列，(d)是近似算法得到的路线。



性能分析

假设H^{opt}是一个最优游程，如图e所示。由于我们通过删除一个游程路线中的任一边而得到一棵生成树，故最小生成树T的权值是最优游程代价的一个下界，即$c(T) \leq c(H^{opt})$。

假设图c中的遍历的代价为$c(W)$，该遍历经过了T的每条边两次，则有$c(W) = 2c(T)$，两式联立有$c(W) \leq 2c(H^{opt})$。由于H是从完全遍历W中删除了某些顶点得到的，故有$c(H) \leq c(W)$，则$c(H) \leq 2c(H^{opt})$。

则

$$\frac{C(H)}{C(H^{opt})} \leq 2$$