Kaströrelse

1 Introduktion

Nu ska vi studera en rörelse i 2 dimensioner. Tidigare har vi studerat linjerörelse även kallad endimensionell rörelse. Att studera en rörelse i 2 dimensioner innebär att studera 2 stycken endimensionella rörelser. En rörelse i 2 dimensioner kan alltid delas upp i 2 helt separata endimensionella rörelser. Låt oss kalla den horisontella eller vågräta rörelsen för en rörelse i x-led. Låt oss på samma sätt kalla den lodräta rörelsen för en rörelse i y-led. Om vi, exempelvis, har en kraft i y-led så påverkar den bara hastigheten och läget i y-led; den påverkar inte alls hastigheten och läget i x-led. Hade det inte varit så här så hade det varit betydligt krångligare.

1.1 Kast utan gravitation

Vid ett kast på en plats där det inte finns gravitation så finns det ingen kraft som påverkar föremålet. Om det inte finns en kraft som påverkar föremålet så använder vi Tröghetslagen: ett föremål fortsätter rakt fram med den hastighet den har från början.

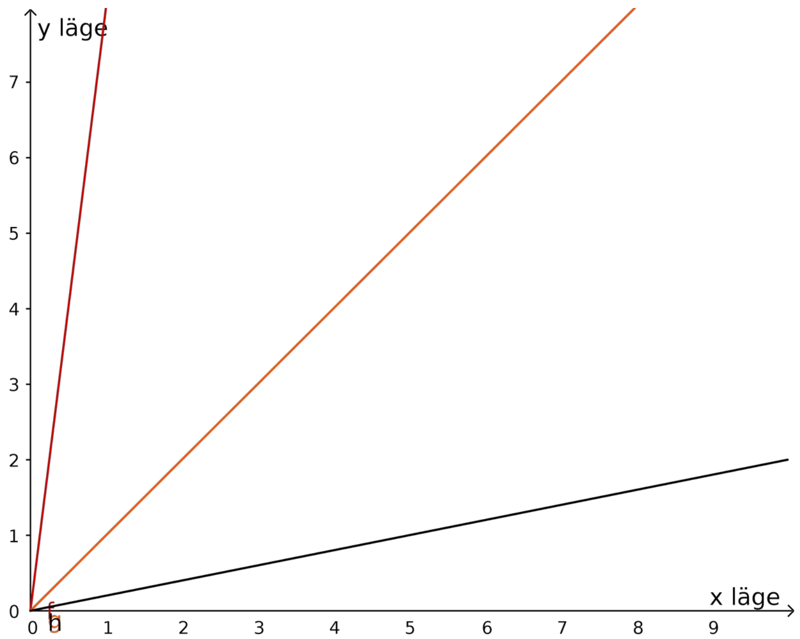


Illustration 1: Tre kast av ett föremål som inte påverkas av en kraft. Föremålet rör sig längs en rät linje, enligt Tröghetslagen. Koordinatsystemet har rumskoordinater.

1.2 Kast med gravitation

1.2.1 Vi börjar med att släppa ett föremål (enklaste möjliga kast).

Om jag håller en sten i handen och sedan släpper den så den faller fritt så påverkas den av gravitationskraften rakt nedåt (det är ju detta som definierar vad som är nedåt…).

Gravitationskraften är konstant här vid Jordens yta där vi går omkring. Är kraften konstant så är accelerationen konstant. En konstant acceleration innebär att farten ändras lika mycket varje sekund. Gravitationskraften ger en acceleration på cirka 10 m/s^2. Farten ökar med 10 m/s varje sekund.

Hur kan vi beräkna hastigheten och läget i y-led utifrån denna kunskap?

Hastigheten ges av definitionen av acceleration $a=\Delta v/\Delta t$.

Om vi bara släpper föremålet så är utgångshastigheten i y-led 0 m/s.
1 s senare är hastigheten i y-led 10 m/s; medelhastigheten är 5 m/s.
Med medelhastigheten 5 m/s faller vi 5 m under den första sekunden.
Sammanfattning: Efter 1:a sekunden har vi hastigheten 10 m/s och har fallit 5 m.

Vad händer under 2:a sekunden?
Efter 2 s har vi hastigheten 20 m/s; medelhastighet sedan början är då 10 m/s.
Med medelhastigheten 10 m/s i 2s har vi fallit 20 m.
Sammanfattning: Efter 2:a sekunden har vi hastigheten 20 m/s och läget är 20 m.

Vad händer under 3:e sekunden?
Efter 3 s har vi hastigheten 30 m/s; medelhastigheten sedan början är då 15 m/s.
Med hastigheten 15 m/s i 3 s har vi läget 45 m.

Vi gör en tabell:

tid/t	hastighet efter t sekunder: v=at	medelhastighet efter t sekunder	läget, meter, efter t sekunder
1	10	5	5*1=5
2	20	10	10*2=20
3	30	15	15*3=45
4	40	20	20*4=80
5	50	25	25*5=125

Om accelerationen är 10 m/s hur bildar vi en talföljd som ger läget?

tid	1	2	3	4	5	6
sträcka	5	20	45	80	125	?

Ledtråd hur många gånger 5?

Slutsats: Talföljden beskrivs av $s=5t^2$ eller i allmänhet för olika värden på accelerationen, a, $s=0{,}5at^2$. Detta är talföljden för fritt fall. Med denna kan du lösa många problem.

För att illustrera fallet konkret kan man hänga träkulor i snören som är klippta skalenligt. Under en tidsenhet faller en kula 5 längdenheter. Under 2 tidsenheter faller en kula 20 längdenheter, dvs. 4 gånger så långt som det första snöret. För att illustrera fallet efter 3 tidsenheter behövs ett snöre på 45 längdenheter, dvs. 9 gånger så långt som det första snöret, osv.

Tabellen får följande utseende om tidsenheten väljs som 1/10 sekund.

tid t (s)	hastighet efter t sekunder: v=at (m/s)	medelhastighet från 0 till t sekunder (m/s)	läget efter t sekunder
1/10	10/10	5/10	5/10 · 1/10 = 5/100 m =5 cm
2/10	20/10	10/10	10/10 · 2/10 = 20/100 =20 cm
3/10	30/10	15/10	15/10 · 3/10 = 45/100 =45 cm
4/10	40/10	20/10	20/10 · 4/10 = 80/100 =80 cm
5/10	50/10	25/10	25/10 · 5/10 = 125/100 =125 cm

1.2.2 Vi kastar horisontellt

Om jag i stället kastar stenen rakt fram, horisontellt/vågrätt, vad händer då? För att lösa detta delar vi upp problemet i ett y-problem och ett x-problem. Med x menar jag vad som händer vågrätt. Med y menar jag vad som händer lodrätt. Lodrätt har vi gravitationskraften som ger en acceleration, en hastighetsändring. Gravitationskraften är konstant så vi har en konstant acceleration, en konstant hastighetsändring, en likformigt accelererad rörelse. Vågrätt har vi dock ingen kraft (som vanligt idealiserar vi och bortser från luften). Ingen kraft ger accelerationen 0 m/s^2 . En acceleration som är 0 innebär att vi *inte* har en hastighetsändring, vi har konstant hastighet helt enkelt. Hastigheten är i vågrätt riktning hela tiden lika stor.

I illustration 2 ser vi ett horisontellt kast.

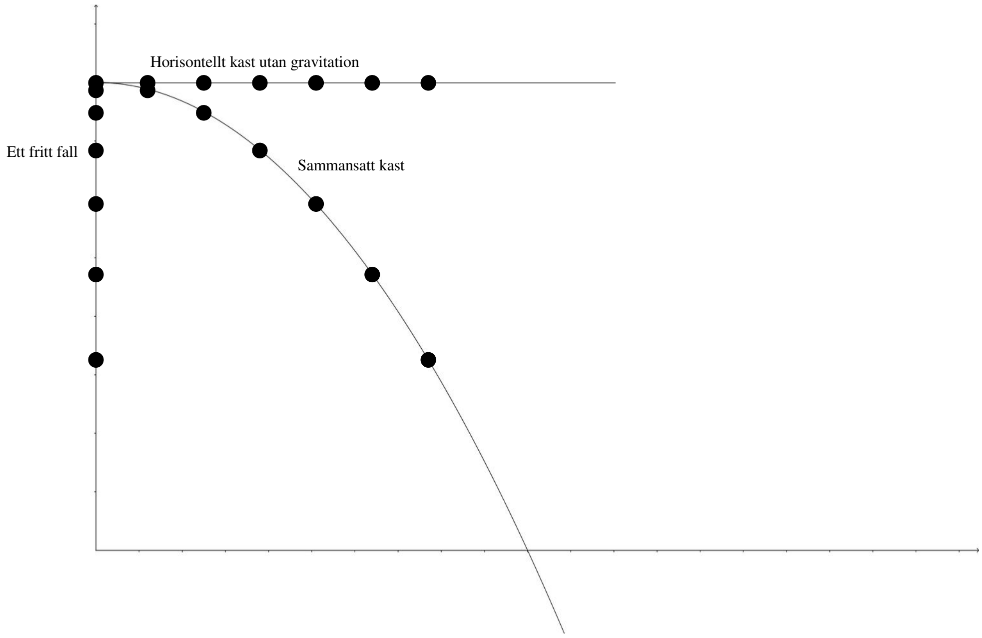


Illustration 2: Ett kast i horisontell led.

Överst längs den vågräta linjen syns ett vågrätt kast såsom det skulle sett ut om ingen gravitation fanns. Då har vi ingen ändring av hastighet vågrätt eller lodrätt. Stenen bibehåller sin hastighet i x-led och sin hastighet i y-led (vilken är 0 m/s). I det sammansatta kastet har vi ingen kraft i x-led så stenen kommer att röra sig så här i x-led. Denna serie lägen anger läget i x-led för det sammansatta kastet. x-läget för det horisontella kastet ges av kastet horisontellt utan gravitation. y-läget ges av läget för ett fritt fall. Den verkliga kastbanan är *sammansatt* av dessa två rörelser.

1.2.3 Vi kastar rakt upp

Att kasta rakt upp är samma som att släppa i ett fritt fall, man måste bara addera utgångshastigheten. Tecknen på hastighet respektive acceleration är viktiga. Om upp räknas som positiv ska ner räknas som negativ. Om vi kastar en boll upp med utgångsfarten 30 m/s så har den sin acceleration nedåt i negativ riktning så efter 1 s så har farten ändrats med -10 m/s (värdet från då vi släpper den fritt); farten är nu $+30+(-10)=+20\,\mathrm{m/s}$. Bollen är fortfarande på väg upp men hastigheten har minskat från +30 m/s till +20 m/s. Vilket läge har den? Medelhastigheten är

$$\frac{+30+(+20)}{2}=25\,\mathrm{m/s}$$

så $y=+25\cdot 1\,\mathrm{m}$ enligt y=<v>t .
Hur ser situationen ut efter 5 s? Efter 5 s har hastigheten ändrats med $5\cdot(-10)=-50\,\mathrm{m/s}$ (hastighetsändring vid fritt fall). Vi har $+30+(-50)=-20\,\mathrm{m/s}$. Bollen är på väg ner med hastigheten -20 m/s. Vilket läge har den? Medelhastigheten är

$$\frac{+30+(-20)}{2}=5\,\mathrm{m/s}$$

vilket innebär $y=5\cdot 5=25\,\mathrm{m}$; samma höjd som för 1 s men nu på väg ner (-20 m/s) i stället för upp. **Lägg märke till att y är en koordinat, läge är koordinater(vektorer).**

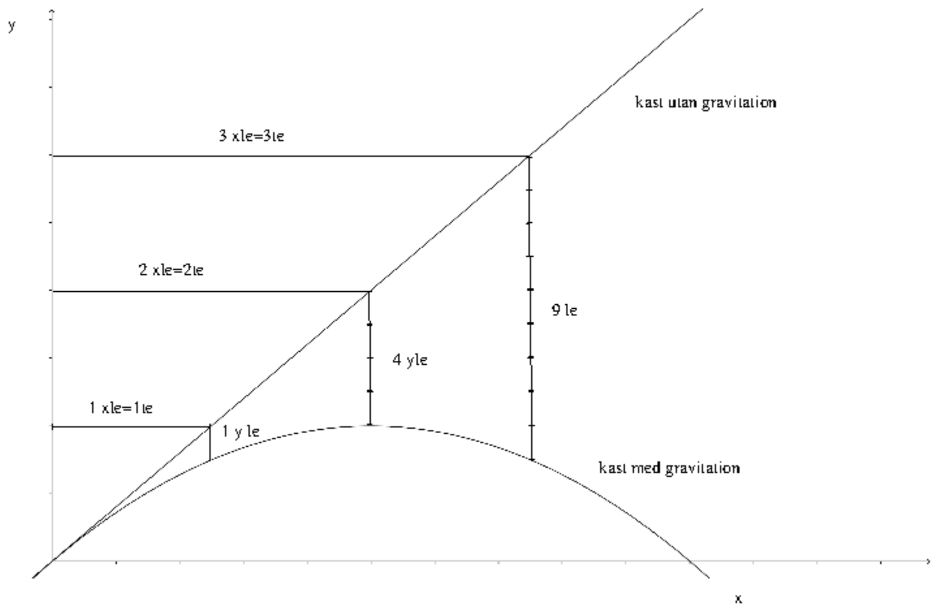
Låt oss slutligen titta på situationen efter 7 s. Hastigheten från fritt fall är $7\cdot(-10)=-70\,\text{m/s}$. Hastigheten är efter 7 s: $+30+(-70)=-40$ m/s . Medelhastigheten är

$$\frac{+30+(-40)}{2}=-5\,\text{m/s} .$$

Läget är $y=-5\cdot 7=-35\,\text{m}$. Vilket är under den höjd den kastades ifrån; vilken vi satt till 0 m. Utifrån härledningarna i texten om en-dimensionell rörelse vet vi att läget ges av $y=y_0+v_0 t+\frac{1}{2}a t^2$, där för ett kast vid Jordytan $a\approx 10\,\text{m/ s}^2$. Med denna erhåller vi samma värden som ovan (och + upp och - ner), exempelvis för t=5 får vi $y=0+(+30)\cdot 5+(-5)\cdot 5^2=150-125=25\,\text{m}$.

1.2.4 Ett snett kast uppåt

Precis som i föregående kan rörelsen tänkas ihopsatt av två rörelser: vi ritar hur kastet skulle sett ut utan gravitation (då blir x-led rätt); sedan lägger vi till ett fall.



I figuren har jag valt en godtycklig längd i x led kallad 1 xle. Att röra sig 1xle tar en viss tid. På den dubbla tiden har föremålet rört sig till 2xle eftersom den rör sig med konstant fart i x-led. Efter 3 gånger så lång tid som det tog att röra sig till 1 xle har den rört sig till 3 xle.
Efter 1 xle har den fallit en längdenhet i y-led; kallar denna sträcka för 1yle. Talföljden vi tog fram ger att nästa sträcka ska vara $2^2=4$ så lång, dvs 4 yle. Efter 3 tidsenheter så ska den vara $3^2=9$ gånger så lång osv.

Det absolut lättaste sättet att visa en kastbana är att ta en lång stav. Ta ett snöre med en viss längd t.ex. 5 cm. Sedan konstruerar man ett snöre som är 4 ggr så långt, 9 ggr så långt, 16 ggr så långt osv. Dessa snören fästes på staven (ska man knyta dem får man klippa lite längre så det räcker till att knyta och sedan justera längderna). Sedan kan man flytta snörena längs staven. Staven är kastet utan gravitation. Man kan enkelt kasta upp, ner och horisontellt. Repen visar alltid rätt.

Exempel Vi kastar iväg en boll med farten 20 m/s i 50° vinkel. Ange dess bana. Först måste vi dela upp i hastighet i x-led respektive y-led och sedan behandla x-led som en rörelse med konstant hastighet; behandla y-led som ett kast rakt upp med en viss starthastighet. Vi behöver bara beräkna värdena för en punkt en bit in, sedan följer de andra lägena enklare. Hastigheten i x-led är $20\cdot\cos(50^{\circ})\approx 12{,}86\,\mathrm{m/s}$. Och i y-led $20\cdot\sin(50^{\circ})\approx 15{,}32\,\mathrm{m/s}$. För tydlighets skull för vi in i tabell; alla läge i meter.

tid	x-läge	y-läge utan gravitation	y fritt fall	y-läge
0,05	12,86 · 0,05=0,64	15,32 · 0,05=0,77	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}05^2=0{,}0125$	0,77-0.0125=0,76
0,10	12,86 · 0,10=1,29	15,32 · 0,10=1,53	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}10^2=0{,}05$	1,53-0,05=1,48
0,30	12,86 · 0,30=3,86	15,32 · 0,30=4,60	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}30^2=0{,}45$	4,60-0,45=4.15
0,70	12,86 · 0,70=9,00	15,32 · 0,70=10,72	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}70^2=2{,}45$	
0,90	12,86 · 0,90=11,57	15,32 · 0,90=13,79	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}90^2=4{,}05$	
1,10	12,86 · 1,10=14,15	15,32 · 1,10=16,85	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1{,}10^2=6{,}05$	
1,40	12,86 · 1,40=18,00	15,32 · 1,40=21,45	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1{,}40^2=9{,}80$	21,45-9,80=11,65
1,60	12,86 · 1,60=20,58	15,32 · 1,60=24,51	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1{,}60^2=12{,}8$	
1,80	12,86 · 1,80=23,15	15,32 · 1,80=27,58	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1{,}80^2=16{,}2$	
2,00	12,86 · 2,00=25,72	15,32 · 2,00=30,64	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2{,}00^2=20{,}0$	30,64-20,0=10,64
2,20	12,86 · 2,20=28,29	15,32 · 2,20=33,70	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2{,}20^2=24{,}2$	
2,50	12,86 · 2,50=32,15	15,32 · 2,50=38,30	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2{,}50^2=31{,}25$	
3,00	12,86 · 3,00=38,58	15,32 · 3,00=45,96	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3{,}00^2=45{,}00$	45,96-45,00=0,96

Fyll i resten av tabellen själv. Kan du se ungefär när bollen når sin högsta höjd? Värdena för höjden är en tävling mellan kast utan gravitation $y=15{,}32\cdot t$ och fritt fall $y=-\frac{1}{2}g t^2$:

$y=15{,}32\,t-\frac{1}{2}g t^2=15{,}32-5t^2$. Nedslaget inträffar då y=0 vilket ger oss

$0=15{,}32t-5t2=t(15{,}32-5t)$ där vi ser att en lösning är t=0 vilket är uppkastet. Den andra lösningen, nedslaget är $15{,}32-5t=0$ som ger $t=15{,}32/5\approx 3{,}06\,s$. Maxhöjden nås vi halva tiden, dvs cirka 1,5 s.

2 Instuderingsfrågor

1. Hur ska man tänka när man ska behandla 2 dimensionell rörelse i förhållande till 1 dimensionell, speciellt kaströrelse. Vad är nyckeln till förståelse?
2. Varför beskrivs i texten först kast utan gravitation och därefter fritt fall.
3. Beskriv läge, hastighet och acceleration sekund för sekund under ett fritt fall; hur ändras de?
4. Hur hanterar man uppdelningen av utkasts-hastigheten (hastigheten vid start)?
5. Diskutera teckenkonventioner vid kaströrelse. Se också nästa fråga.
6. Diskutera teckenkonventioner i uttrycket $y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}at^2$ och $x=x_0+v_{0x}t$.
7. Redogör skissartat för ett snett kast. Hur konstrueras det principiellt.
8. Hur beräknas tiden för ett kast på horisontellt underlag?