Del 2

Tillämpningar och utvidgningar

Innehåll

KAPITEL 1

Differentialekvationer

1.1. Introduktion

(Materialet hämtat från Howard Anton och Chris Rorres Elementary Linear Algebra.)

y betecknar en reellvärd funktion av en variabel och y' dess derivata, och a betecknar en konstant. Differentialekvationen $y' = ay$ har lösningen $y = ce^{ax}$. Exempelvis har differentialekvationen $y' = 5y$ lösningen $y = ce^{5x}$. Konstanten c bestäms ur ett så kallat randvillkor t.ex. att $y(0) = 7$ vilket ger att $y(0) = ce^{5\cdot 0} = c = 7$, så att $y = 7e^{5x}$. Vi ska nu lösa system av (första ordningens) differentialekvationer. Ett system av differentialekvationer har följande utseende:

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ y_2' & = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{array}$$

som skrivs med nya beteckningar som

$$y' = Ay.$$

Anmärkning 1.1. Notera nomenklaturen. Tidigare har vi haft t.ex. X och X' och då har X och X' varit uttryckta i olika baser. Nu har vi prim igen men på gemener. Prim på gemener innebär derivata och prim på versaler innebär olika baser.

Exempel 1.1. Vi överför följande system till matrisform:

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & 3y_1 \\ y_2' & = & -2y_2 \\ y_3' & = & 5y_3 \end{array}$$

vilket blir

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

eller

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} y = Ay.$$

Eftersom det endast är *diagonalelement* är ekvationerna inte kopplade (y_1' innehåller bara y_1 inte t.ex. y_3 eller y_2'), varje ekvation kan lösas för sig.

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & c_1e^{3x} \\ y_2 & = & c_2e^{-2x} \\ y_3 & = & c_3e^{5x} \end{array}$$

som också kan skrivas

$$y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^{3x}\\ c_2e^{-2x}\\ c_3e^{5x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}e^{3x}+\begin{pmatrix} 0\\ c_2\\ 0\end{pmatrix}e^{-2x}+\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ c_3\end{pmatrix}e^{5x}$$

och om vi har randvillkor t.ex. $y_1(0)=1$, $y_2(0)=4$ och $y_3(0)=-2$ så erhålls $c_1=1$, $c_2=4$, $c_3=-2$, vilket med matrisbeteckningar är

$$y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{3x}\\ 4e^{-2x}\\ -2e^{5x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}e^{3x}+\begin{pmatrix} 0\\ 4\\ 0\end{pmatrix}e^{-2x}+\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -2\end{pmatrix}e^{5x}.$$

1.2. Lösning med hjälp av diagonalisering

Som konstaterades i föregående avsnitt så kan system av differentialekvationer som är på diagonal form lösas med kända metoder. Vi har tidigare studerat hur icke-diagonaliserade matriser kan överföras på diagonal form. För att lösa ett allmänt system av differentialekvationer, ej på diagonal form, använder vi våra kunskaper om hur det överförs på diagonal form och sedan löser vi det.

Exempel 1.2. Vi löser

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1+y_2\\ y_2' &= 4y_1-2y_2\end{aligned}$$

Matrisen är

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

och vi bestämmer som tidigare egenvärdena och egenvektorerna. Egenvärdena:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-2-\lambda)-4=0$$

$$-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-4=0$$
$$\lambda^2+\lambda-6=0$$
$$\lambda=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=-\frac{1}{2}\pm 2,5.$$

Så $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$. Egenvektorerna för $\lambda_1=2$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1\\ 4 & -2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} -x_1+x_2 &= 0\\ 4x_1-4x_2 &= 0\end{aligned}$$

där $-x_1+x_2=0$ ger $x_1=x_2$ och vi sätter $x_2=s$ så egenvektorerna är

$$X=s\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

För $\lambda_2=-3$ får vi

$$\begin{pmatrix} 1+3 & 1\\ 4 & -2+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} 4x_1+x_2 &= 0\\ 4x_1+x_2 &= 0\end{aligned}$$

och med $x_2 = s$ erhålls $x_1 = -s/4$. Egenvektorerna är

$$X = s\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nu vet vi att matrisen med egenvektorerna som kolonner

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonaliserar A och det gäller att

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

med

$$S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Påminner lite om tidigare resonemang. Matrisen S är basbytesmatrisen. Den definierades ur att om basbytet är

$$\begin{array}{rcl} \overline{e}'_1 & = & a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + ... + a_{n1}\overline{e}_n \\ \overline{e}'_2 & = & a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + ... + a_{n2}\overline{e}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{e}'_n & = & a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + ... + a_{nn}\overline{e}_n \end{array}$$

så är S

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

och för koordinaterna gäller $X = SX'$ med de beteckningarna vi hade då; de innebär att X (oprimat) var de gamla koordinaterna och X' (primat, inte derivata) är de nya, precis som vid basbytet.

I differentialekvationen byter vi också. Vi har differentialekvationen $y' = Ax$. Om vi jämför med tidigare hade vi $Y = AX$ och gjorde ett basbyte enligt $X = SX'$ och $Y = SY'$ som ledde till att avbildningen i primade koordinater är

$$\begin{array}{rcl} Y & = & AX \\ SY' & = & ASX' \\ Y' & = & S^{-1}ASX' \end{array}$$

så att den nya avbildningsmatrisen är

$$A' = S^{-1}AS$$

vilket är D om man väljer just S bestående av egenvektorerna! Väljer man inte dem får man inte en diagonaliserad A'.

Tidigare bytte vi X och Y till X' och Y' nu byter vi y (X) och y' (Y) till u (X') och u' (Y'): $Y = AX$ respektive $y' = Ay$. Vi har för basbytet

$$y' = Su' \text{ och } y = Su.$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{1.2.1}$$

Vi löser det diagonaliserade systemet

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

vilket är ekvationerna

$$\begin{aligned} u_1' &= 2u_1 \\ u_2' &= -3u_2 \end{aligned}$$

som har lösningarna

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 e^{2x} \\ u_2 &= c_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

som vi sedan transformerar tillbaka till $y_1$och y_2 genom 1.2.1 som är

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

med S^{-1} enligt tidigare. Lösningarna är

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 - 1/4u_2 \\ y_2 &= u_1 + u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\ y_2 &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

Om vi har randvillkor t.ex. $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 6$ får vi

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 e^0 - \frac{1}{4} c_2 e^0 \\ 6 &= c_1 e^0 + c_2 e^0 \end{aligned}$$

vilket är ekvationssystemet

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{1}{4} c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned}$$

som löses och ger $c_1 = 2$ och $c_2 = 4$. Slutligen

$$\begin{aligned} y_1 &= 2e^{2x} - e^{-3x} \\ y_2 &= 2e^{2x} + 4e^{-3x} \end{aligned}$$

eller med annat skrivsätt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

Anmärkning 1.2. Är avbildningsmatrisen inte diagonaliserbar så måste man använda andra metoder.

Problem 1.1. Lös systemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= -y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

med randvillkoren $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 4$.

Anmärkning 1.3. Med andra beteckningar hade uppgiften kunnat formuleras som

$$\frac{dx}{dt} = -2x - 2y$$

och

$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y$$

där $x(t)$ och $y(t)$ är funktioner av t.

Problem 1.2. Lös följande system

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{aligned}$$

med randvillkoren $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

Problem 1.3. Lös systemet av första ordningens differentialekvationer som ges av

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + 4y_3 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + y_2 - y_3 \end{aligned}$$

med randvillkoren $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 2$.

Exempel 1.3. Även differentialekvationer av högre ordning kan hanteras genom ett inledande variabelbyte. Lös andra ordningens differentialekvation (där y inte är en matris)

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Den kan lösas genom att göras om till två stycken 1:a ordningens differentialekvationer. Sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$. Vi erhåller

$$y'' - 5y' + 4y = y_2' - 5y_2 + 4y_1 = 0$$

eller $y_2' = -4y_1 + 5y_2$ och $y_1' = y_2$. Vi får systemet

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Där som tidigare vi ska beräkna egenvärden och egenvektorer. Vi erhåller egenvärdena $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = 1$ med egenvektorerna $v_1 = (1\,4)^T$ och $v_2 = (1\,1)^T$. Basbytesmatrisen S har egenvektorerna som kolonner

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ och vi får } S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vårt diagonaliserade system är

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

som har lösningarna $u_1 = c_1e^{4x}$ och $u_2 = c_2e^x$. Vi tar oss tillbaka till y_1 och y_2 genom$y = Su$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{4x} \\ c_2e^x \end{pmatrix}$$

så att

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{4x} + c_2e^x \\ y_2 &= 4c_1e^{4x} + c_2e^x \end{aligned}$$

eller med annat skrivsätt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} ce_1^{4x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 e^x.$$

Anmärkning 1.4. Observera dock att differentialekvationen också kan lösas med standardprocedurer för andra ordningens differentialekvationer med hjälp av karaktäristisk ekvation. Den karaktäristiska ekvationen för $y'' - 5y' + 4y = 0$ är $r^2 - 5r + 4y = 0$ som har lösningarna

$$r = 2,5 \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = 2,5 \pm 1,5$$

så $r_1 = 4$ och $r_2 = 1$, vilket ger lösningarna.

Problem 1.4. Lös differentialekvationen av andra ordningen $y'' + y' - 12y = 0$.

1.3. Facit

1.1 Avbildningsmatrisen är

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer.

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 2 = 0$$

$6 + 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$, $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ har lösningarna $\lambda = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = -2,5 \pm 1,5$. Så $\lambda_1 = -4$ och $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorer är

$$\begin{pmatrix} -2-(-4) & -2 \\ -1 & -3-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs

$$-x_1 + x_2 = 0$$

så med $x_2 = s$ får vi $x_1 = s$, egenvektor är

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nästa egenvektor ges av

$$\begin{pmatrix} -2-(-1) & -2 \\ -1 & -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

dvs

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

och $x_2 = s$ ger $x_1 = -2s$ så en egenvektor är

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi löser det diagonaliserade systemet

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

så

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 e^{-4x} \\ u_2 &= c_2 e^{-x} \end{aligned}$$

som vi transformerar till y med hjälp av S som har egenvektorer som kolonner

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 - 2u_2 = c_1 e^{-4x} - 2c_2 e^{-x} \\ y_2 &= u_1 + u_2 = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} \end{aligned}$$

och med randvillkoren

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 = c_1 - 2c_2 \\ y_2(0) &= 4 = c_1 + c_2 \end{aligned}$$

som ger $3c_2 = 3$ så $c_2 = 1$. $c_1 + 1 = 4$ ger $c_1 = 3$.

1.2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena är -2 och -1. Egenvektorerna/basbystesmatrisen S är

$$\begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösningarna är

$$\begin{aligned} y_1 &= -c_1 e^{-2x} + \frac{2}{3} c_2 e^{x/2} \\ y_2 &= c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x/2} \end{aligned}$$

$c_1 = 1/5$ och $c_2 = 9/5$.

1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

som har egenvärdena $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$. Egenvektorerna och S matrisen är

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Så

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Och $c_1 = -1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$.

1.4 Variabelbyte $y_1 = y$ och $y_2 = y'$.

Ekvationen är

$$y_2' + y_2 - 12y_1 = 0$$

Systemet

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

som har egenvärdena $\lambda_1 = -4$ och $\lambda_2 = 3$ samt egenvektorerna $v_1 = (-1\,4)$och $v_2 = (1\,3)$. Basbytesmatrisen har egenvektorerna som kolonner

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ och vi får } S^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi löser vårt diagonala system

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

som har lösningarna $u_1 = c_1 e^{-4x}$ och $u_2 = c_2 e^{3x}$. Vi tar oss tillbaka till y_1 och y_2 genom$y = Su$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-4x} \\ c_2 e^{3x} \end{pmatrix}$$

så att

$$\begin{aligned} y_1 &= -c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x} \\ y_2 &= 4c_1 e^{-4x} + 3c_2 e^{3x} \end{aligned}$$

eller med annat skrivsätt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} ce_1^{-4x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} c_2 e^{3x}.$$

Om man löser den karaktäristiska ekvationen $r^2 + r - 12 = 0$ erhålls

$$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

så lösningarna är $r_1 = 3$ och $r_2 = -4$.

KAPITEL 2

Matriser i ekonomi och affärsverksamhet

EXEMPEL 2.1. Ett företag tillverkar 3 produkter P_1, P_2 och P_3. De innehåller alla samma 3 ingredienser I_1, I_2 och I_3, men i olika proportioner. Följande matris beskriver förhållandena

$$R_{PI} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

vilket innebär att produkt P_1 använder 2 enheter av ingrediens I_1, 3 enheter av ingrediens I_2 och 5 enheter av I_3. Produkt P_2 använder 1 enhet av ingrediens I_2. Indexen PI anger, precis som tidigare att raden anges av P och kolonnen av I.

Om vi nu vill producera 10 av P_1, 20 av P_2 och 100 av P_3, hur mycket material behövs av varje ingrediens? Problemet löses genom

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 & 150 & 570 \end{pmatrix}$$

vilket innebär 160 av ingrediens I_1, 150 av I_2 och 570 av I_3. Multiplikationen måste vara från vänster så att antalet av varje produkt först multipliceras med mängden av ingrediens 1, sedan med mängden av ingrediens 2 och sist antalet av varje produkt med mängden av ingrediens 3 för varje produkt.

EXEMPEL 2.2. Vad är kostnaden per produkt om ingredienserna har priserna $K_1 = 2$, $K_2 = 5$ och $K_3 = 7$? Vi måste nu multiplicera från andra sidan

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 51 \\ 35 \end{pmatrix}$$

vilket innebär att produkt P_1 kostar 54, P_2 kostar 51 och P_3 kostar 35. Rad 1 är produkt 1 och varje element på raden anger mängden av varje ingrediens, som då multipliceras med priset för varje ingrediens.

EXEMPEL 2.3. Säg att företaget på lagret har 101 enheter av ingrediens I_1, 62 av I_2 och 300 av I_3. Hur många av varje produkt kan produceras? Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 101 \\ 3x + y + z &= 62 \\ 5x + 6y + 4z &= 300 \end{aligned}$$

där x är antalet av produkt P_1 o.s.v. Ekvationssystemet har lösningarna $x = 5,2$, $y = 44,2$ och $z = 2,2$. Företaget kan producera 5 av produkt P_1, 44 av P_2 och 2 av P_3.

KAPITEL 3

Matriser som argument i funktioner

3.1. Matriser i polynom

Polynomet $p(x) = x^2 + x - 2$ har nollställena $x = 1$ och $x = -2$ så $p(1) = p(-2) = 0$ och $p(x) = (x-1)(x+2)$. Om vi använder matriser och tolkar formen som $p(A) = A^2 + A - 2I$ kan vi undersöka vad som händer. Vi undersöker matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

som ger

$$A^2 + A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problem 3.1. Är matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

också ett nollställe till polynomet?

Problem 3.2. Visa att matrisen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ger nollmatrisen för polynomet $p(x) = x^2 + px + q$ om $p = -(a+d)$ och $q = ad - bc$. Jämför med de klassiska sambanden mellan rötter och koefficienter för andragradspolynom.

3.2. Matriser i funktioner allmänt

Vi är vana vid att se funktioner angivna som $f(x)$ så tanken infinner sig huruvida det kan ges någon mening att skriva $f(A)$ där A är en matris? Går det att ge mening till $\sin(A)$ och e^A o.s.v.?

Faktum är att dessa uttryck definieras med Taylorutveckling (om de har någon). T.ex. kan exponentialfunktionen formellt skrivas som

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + ...$$

där högerledet eventuellt kan beräknas. Symbolen 1 ska tolkas som enhetsmatrisen med samma dimension som A. A är en kvadratisk matris. Högerledet definierar hur vänsterledet ska tolkas. Ett stort behov av att beräkna olika potenser av matriser uppkommer och här kommer diagonaliseringen till hjälp.

KAPITEL 4

Rotation av kurvor

En andragradskurva skrivs på parameterform som $(x, y) = \big(t,\, t^2\big)$. Dessa punkter kan vridas av en matris. Rotationsmatrisen för rotationer moturs är

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Om andragradskurvan ska roteras $45^\circ = \pi/4$ rad så är matrisen

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Uttrycket för

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}t - \frac{1}{\sqrt{2}}t^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}t + \frac{1}{\sqrt{2}}t^2 \end{pmatrix}$$

så $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}t - \frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\, \frac{1}{\sqrt{2}}t + \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right)$. I Geogebra skrivs en kurva på parameterform som

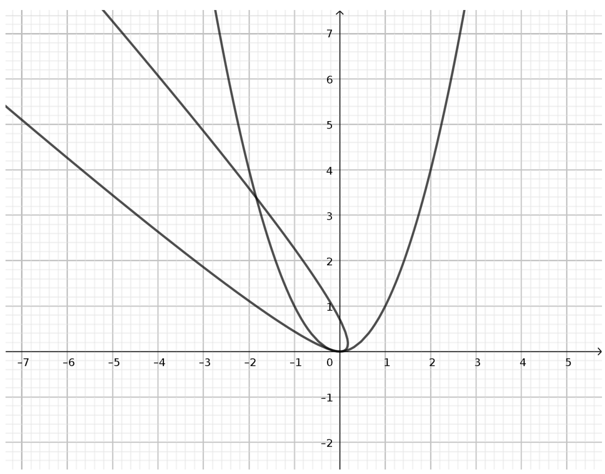
Curve(<Expression>, <Expression>, <Parameter Variable>, <Start Value>, <End Value>)

i detta fall

Curve$(t, t**2, t, -10, 10)$

och den roterade som

Curve$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} * t - \frac{1}{\sqrt{2}} * t**2, \frac{1}{\sqrt{2}} * t + \frac{1}{\sqrt{2}} * t**2, t, -10, 10\right)$



FIGUR 4.0.1. $y = x^2$ i original och roterad.

PROBLEM 4.1. Rotera $\sin(x)$ vinkeln 30° moturs och rita graf.

4.1. Facit

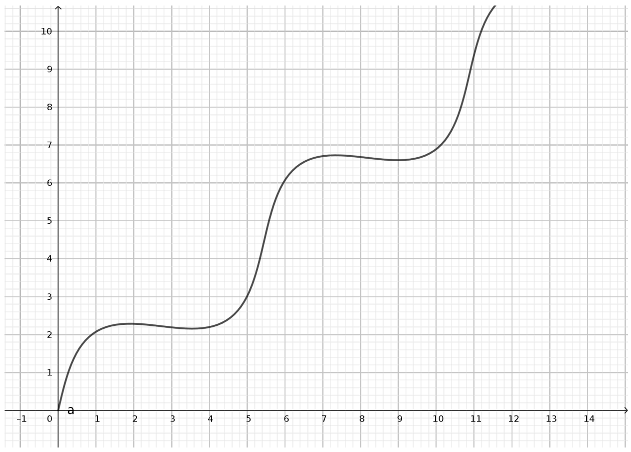
4.1Matrisen för rotation 30°ges av

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Sinusfunktionen skrivs på parameterform som $(x, y) = (t, \sin(t))$. Och den roterade funktione ges av

$$(x,\, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\sin \quad (t), \; \frac{1}{\sqrt{2}}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Geogebra ritar den:



Figur 4.1.1. Sinusfunktion roterad 30° moturs.

KAPITEL 5

Bestämning av kurvor

5.1. Bestämning av linje

Vi studerar en linje genom två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2). En rät linje på affin form ges av $a_1x + a_2y + a_3 = 0$. Vi sätter in värden för x och y och erhåller

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2y_1 + a_3 &= 0 \\ a_1x_2 + a_2y_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

och totalt har vi

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3 &= 0 \\ a_1x_1 + a_2y_1 + a_3 &= 0 \\ a_1x_2 + a_2y_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

och vi vill ha icke-triviala lösningar, d.v.s. inte alla koefficienter a_1, a_2, a_3 är 0. Detta kan uttryckas som att determinanten ska vara 0,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exempel 5.1. Använd föregående metod för att bestämma en linje genom $(3, 1)$ och $(-2, 2)$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= x\,(1-2) - y\,(3+2) + 6 + 2 = \\ &= -x - 5y + 8 = 0. \end{aligned}$$

5.2. Bestämning av plan

För ett plan erhålls på liknande sätt

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problem 5.1. Bestäm det plan som går igenom de 3 punkterna $(1, 2, 1)$, $(-1, 1, 3)$, $(2, -1, 4)$.

EXEMPEL 5.2. Bestäm det 3:e gradspolynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ som går igenom punkterna $(0, 1)$, $(2, 4)$, $(-1, 3)$ och $(4, -1)$. Använd ekvationssystem. Ekvationerna blir för $(2, 4)$: $4 = p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3$. Med $p(0)$ på översta raden och därunder $p(2)$, $p(-1)$ och nederst $p(4)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & -1 \end{pmatrix},$$

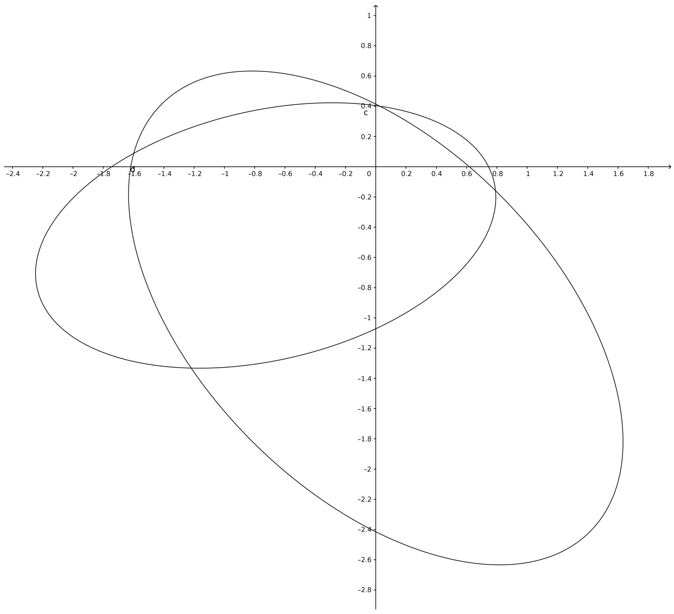
som löses genom successiv elimination

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & \frac{1}{30} \\ & & 1 & & \frac{8}{5} \\ & & & 1 & -\frac{13}{30} \end{pmatrix},$$

d.v.s. $a_0 = 1$, $a_1 = 1/30$, $a_2 = 1,6$ och $a_3 = -13/30$. Vi ser t.ex. att det stämmer för $(2, 4)$ ty $p(2) = 1 + \frac{1}{30} \cdot 2 + 1,6 \cdot 4 - \frac{13}{30} \cdot 8 = 4$.

PROBLEM 5.2. Bestäm det 4:e gradspolynom som går igenom punkterna $(0, 1)$, $(-1, -2)$, $(3, 142)$, $(-3, -86)$. Använd gärna datorstöd för att lösa ekvationssystemet.

PROBLEM 5.3. För att entydigt bestämma en ellips krävs 5 punkter, se exempel på ellipser i figur 5.2.1. Bestäm den ellips som går igenom punkterna (använder semikolon som skiljetecken mellan koordinater): $A = (-0,816; 0,47)$, $B = (-0,169; 0,507)$, $C = (0,793; 0,344)$, $D = (0,375; -1,362)$, $E = (-2,59; -1,456)$. En ellips beskrivs av ekvationen: $x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0$ där a, b, c, d, e är de obekanta som ska bestämmas. Sätt upp ekvationssystemet och lös det med hjälp av datorstöd.



FIGUR 5.2.1. De två ellipserna $x^2 + xy + y^2 + x + 2y - 1 = 0$ och $x^2 - xy + 3y^2 + x + 2y - 1,3 = 0$. Observera att de har 4 punkter gemensamma.

5.3. Facit

5.1

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= x\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}. \\ &= 3x + 8y + 7z - 26 = 0\end{aligned}$$

5.2 $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$

5.3 $x^2 - xy + 4y^2 + x + 4y - 3 = 0$

KAPITEL 6

Skapa ortogonala vektorer

KAPITEL 7

Kryptering

Om vi konstruerar ett enkelt substitutions chiffer med ett alfabet så kan det knäckas genom att frekvenserna i originaltextens bokstäver överförs till den kodade texten. På så sätt kan man få ledtrådar och testa sig fram. Ett sätt att försvåra detta är att para ihop bokstäverna 2 och 2. Ett enkelt substitutions chiffer som enbart är en förskjutning ges i tabell 1.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	...	s	t	u	v	w	x	y	z	å	ä	ö
w	x	y	z	å	ä	ö	a	b	c	...	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v

Tabell 1. Förskjutningskrypto.

Om vi kodar meddelandet 'huset' så blir det i krypterad form 'anlåm'. Vi diskuterar nu en metod som heter Hill chiffer. Först så anger vi tal för alla bokstäverna, se tabell 2.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
t	u	v	w	x	y	z	å	ä	ö									
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29									

Tabell 2. Tal ersätter bokstäver.

Sedan inför vi en 2×2 matris med heltal som element och vi skriver bokstäverna parvis som en kolonnmatris. Vi väljer t.ex.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

och ordet 'ut' skrivs som

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 20 \end{pmatrix}$$

och i kod

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 142 \end{pmatrix}$$

som är större än 29 så vi räknar bort så många 29 vi kan och behåller resten. Vi finner att $81 - 2 \cdot 29 = 23$ d.v.s. w. Och $142 - 4 \cdot 29 = 26$ d.v.s. z. Vårt ord 'ut' skrivs nu i kodad form som 'wz'. Kan vi avkoda ett meddelande? Vi behöver inversen till vår matris så att

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi erhåller

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi provar

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 \\ 20 \end{pmatrix}$$

och vi adderar 29 två gånger till -37 för att få minsta positiva tal: $-37+2\cdot 29 = 21$. Vi är tillbaka där vi började.

Problem 7.1. Kryptera meddelandet 'gå hem nu'. Ignorerar mellanslag. När det är ett udda antal bokstäver så upprepa bara sista bokstaven. Använd matrisen i exemplet.

7.1. Facit

7.1 Ej klart.

KAPITEL 8

Komplexa tal

8.1. Komplexa tal samt komplexa vektorrum...(finns en fil om detta)

Låt $a+ib$ motsvaras av

(8.1.1) $$C=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

och dess konjugat $a-ib$ motsvaras av

(8.1.2) $$C^*=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Problem 8.1. Beräkna $(a+ib)(a-ib)$ med hjälp av matriserna. Kontrollera också addition och subtraktion. Kontrollera också att svaret är på rätt form för dessa matriser.

Komplexa tal, vektorer och den delmängd av matriser som ges av 8.1.1 och 8.1.2 är vad som i matematiken kallas isomorfa. Vi ska inte här fördjupa oss i själva begreppet utan undersöka likheterna. Alla 3 fallen är vektorrum och då vet vi vilka räkneregler som gäller. Sedan kan man definiera fler operationer för komplexa tal, t.ex. division vilket vi inte har för matriser. Men inom vektorrummets väggar är de isomorfa.

Matriserna för komplexa tal kan alltid delas upp

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=aI+bJ$$

där dessutom

$$J^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-I.$$

vilket man kan associera med $i^2=-1$.

Problem 8.2. Några saker att undersöka:

(1) Relationen mellan C och C^* kan uttryckas på ett enkelt sätt, vilket?
(2) Om C tolkas som två kolonnvektorer, vilken vinkel har de mellan varandra?
(3) Vektorer har skalärprodukt, vad motsvarar det hos de komplexa talen? Skalärprodukten mellan de två komplexa talen z_1 och z_2 ges av
$$\frac{1}{2}\left(z_1 z_2^*+z_1^* z_2\right)$$
där z^* betecknar konjugatet. Visa att uttrycket verkligen ger skalärprodukten.
(4) Vad motsvar uttrycket hos matriser?
(5) Komplexa tal kan skrivas på polär form $re^{i\theta}$. Ett komplext tal som multipliceras med $e^{i\theta}$ kan ses som att det roteras vinken θ. Skriv det komplexa talet $e^{i\theta}$ som matris, vinkeln ska vara med.

(6) Bestäm inversen till C.

Det finns också olikheter då man går utanför vektorrummet(addition och multiplikation med skalär). Bland annat är division med komplexa tal definierat men det är det inte för vektorer eller matriser.

Problem 8.3. Utgå från hur du arbetar med en division med komplexa tal och försök överföra den till en liknande arbetsgång men med matriser.

8.2. komplexa tal och egenvärden?

Exempel 8.1. Komplexa tal som egenvärden. Vi undersöker

$$G=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|G-\lambda I|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-(3-\lambda)(1+\lambda)+8=0.$$

Förenklad är ekvationen $\lambda^2-2\lambda+5=0$ som har lösningarna

$$\lambda=1\pm 2i.$$

Vi undersöker egenvärdet $\lambda_1=1+2i$. Ekvationen som ska uppfyllas är $GX=(1+2i)X$

$$\begin{pmatrix} 3-(1+2i) & -2 \\ 4 & -1-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att determinanten för matrisen är 0 så vektorerna är linjärt beroende. Determinanten är $-(2-2i)(2+2i)-(-2)\cdot 4=-(4+4i-4i+4)+8=0$. Faktorn mellan kolonnernas element är $-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ ty $-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)=-2$ och $-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\cdot 4=-2-2i$.

Vi använder bara en av ekvationerna

$$(2-2i)x_1-2x_2=0$$

eller

$$(1-i)x_1-x_2=0.$$

Inför parametern $x_1=s$ och vi får $x_2=(1-i)x_1=(1-i)s$. Vektorn X är

$$X=\begin{pmatrix} s \\ (1-i)s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}s.$$

På samma sätt för egenvärdet $\lambda_2=1-2i$ som ger

$$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}s.$$

Anmärkning 8.1. Om polynomet har reella koefficienter så är egenvärdena konjugat till varandra. Egenvektorerna är då också konjugat till varandra.

Problem 8.4. Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$\begin{pmatrix} 4 & -20 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.3. Facit

8.1 Vi får för multiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \left(a^2+b^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(a^2+b^2\right) I.$$

Addition $(a+ib)+(a+ib) = 2(a+ib)$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ -2b & 2a \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Och även $(a+ib)+(a-ib) = 2a$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2aI.$$

Subtraktion $(a+ib)-(a-ib) = 2ib$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2b & 0 \end{pmatrix} = 2b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.2

(1) $C^T = C$

(2) De två vektorerna $(a,-b)$ och (b,a) bildar en rät vinkel ty $(a,-b)\bullet(b,a) = ab+(-b)a = ab-ba = 0$.

(3) Inför $z_1 = a+ib$ och $z_2 = c+id$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(z_1 z_2^* + z_1^* z_2\right) &= \frac{1}{2}\left((a+ib)(c-id)+(a-ib)(c+id) =\right) \\ \frac{1}{2}\left((ac-adi+cbi+bd)+(ac+adi-cbi+bd)\right) &= \frac{1}{2}\left(2ac+2bd\right) \\ &= ac+bd \end{aligned}$$

Vi ser att vi får samma uttryck som för $(a,b)\bullet(c,d) = ac+bd$.

(4) Om vi beräknar $\frac{1}{2}\left(C_1 C_2^* + C_1^* C_2\right)$ så erhålls

$$\begin{pmatrix} ac+bd & 0 \\ 0 & ac+bd \end{pmatrix} = ac+bd\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = a+ib$ vilket ger

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

vilket stämmer med tidigare diskussioner om matriser som utför rotationer.

(6) Inversen definieras ur $CC^{-1} = I$. Vi har redan sett i övning 8.1 att $(a+ib)(a-ib)$ innebär

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \left(a^2+b^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(a^2+b^2\right) I.$$

Så inversen bör vara

$$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

8.3 För division

$$\begin{aligned} \frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \end{aligned}$$

som med matriser är

$$\begin{aligned} \frac{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}} &= \frac{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} ac+bd & -ad+bc \\ -bc+ad & bd+ac \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} c^2+d^2 & 0 \\ 0 & c^2+d^2 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} ac+bd & bc-ad \\ -(bc-ad) & ac+bd \end{pmatrix}}{(c^2+d^2)\, I} \\ & \frac{\frac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} ac+bd & bc-ad \\ -(bc-ad) & ac+bd \end{pmatrix}}{I}. \end{aligned}$$

8.4 Det karaktäristiska polynomet ges av

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -20 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda) + 20 = 0.$$

Lösningarna ges av

$$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$$

som har lösningarna

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-20} = 2 \pm 4i.$$

Vi behöver bara egenvektorn för den ena lösningen, den andra ges av konjugatet till den funna egenvektorn. Sätt in egenvärdena i ekvationen

$$\begin{pmatrix} 4-(2+4i) & -20 \\ 1 & -(2+4i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som innebär ekvationerna $(2-4i)\,x - 20y = 0$ och $x - (2+4i)\,y = 0$. Vi ser att de är multiplar av varandra och faktorn är $0,1+0,2i$. Återstår att lösa $(2-4i)\,x - 20y = 0$. Börjar med att sätt $x = t$:

$$(2-4i)\,t - 20y = 0.$$

Vi behöver lösa ut y:

$$y = \frac{(2-4i)\,t}{20} = (0,1-0,2i)\,t.$$

Egenvektorn är

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

och den andra är konjugatet

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$

KAPITEL 9

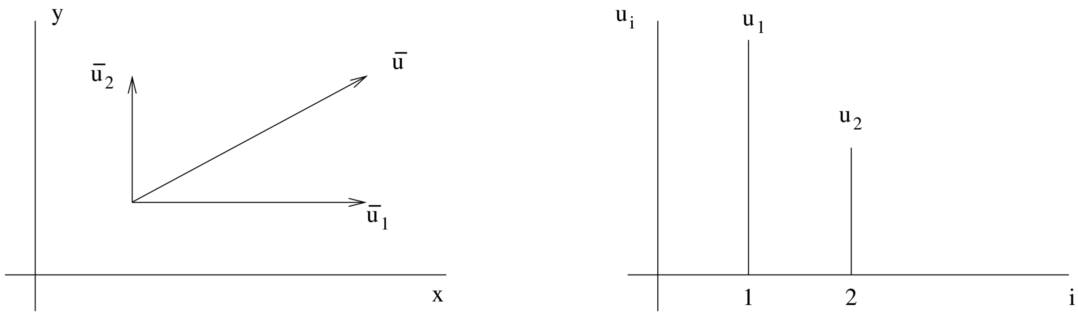
Funktioner som vektorer

9.1. Tankegången

En vektor skrivs t.ex. som

$$\overline{u} = u_1\overline{e}_1 + u_2\overline{e}_2,$$

där $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ anger basvektorer (koordinataxlar). Vektorn $\overline{u}$ är en linjärkombination av vektorerna $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$. Vi inför också $\overline{u}_1 = u_1\overline{e}_1$, $\overline{u}_2 = u_2\overline{e}_2$, se vänster del av figur 9.1.1. Ett annat sätt, som du förmodligen inte träffat på, att representera detta är i ett så kallat spik-diagram där komponenternas storlek anges som funktion av sitt index: 1 och 2, se höger del av figur 9.1.1. Indexet anger i princip riktningen eftersom varje basvektor har en väldefinierad riktning.



FIGUR 9.1.1. Vektorn $\overline{u}$ uppdelad i komposanter och komponenter. Två olika representationer.

I tre dimensioner erhålles tre 'spikar'. I ett stort antal dimensioner får vi en figur enligt 9.1.2.

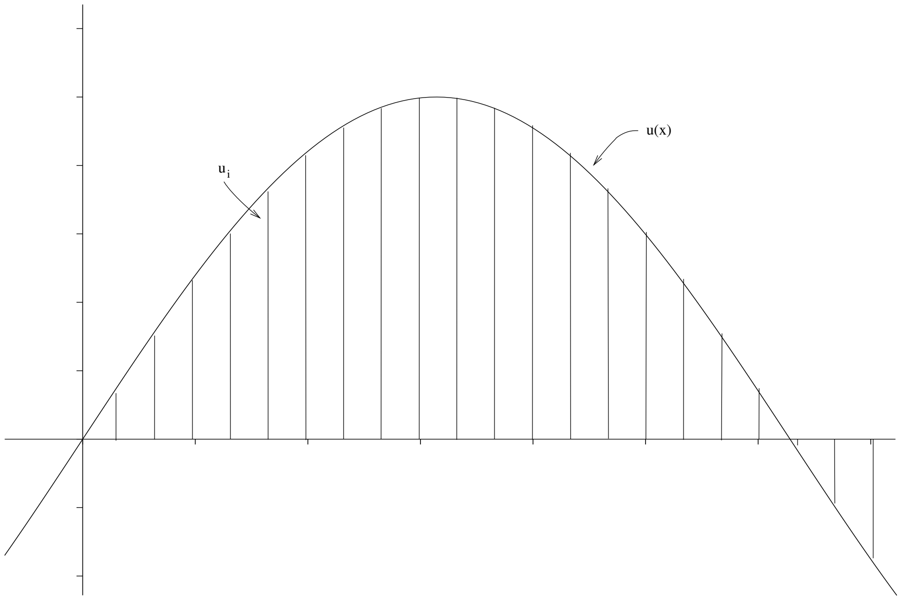
I en intuitiv form av gränstänkande blir indexet kontinuerligt, i stället för u_i skriver vi u_x eller $u(x)$. Betrakta $u(x)$ som en oändligt-dimensionell vektor; varje reellt tal x är ett index. $u(3,12317...) = 4$ innebär att koefficienten framför basvektorn med index $3,12317...$ är 4: $(u_{3,12317...} = 4)$. Naturligtvis krävs mer än detta för att göra denna idé formellt korrekt, det är i själva verket ganska besvärligt.

Jämför med notationen för talföljder där man t.ex. skriver $u_i = 3i$ vilket är $u(x) = 3x$ i en annan notation. Symbolen i ska tolkas som att man ska använda heltal medan x anger att det är reella tal som ska användas.

9.2. Inre produkt

Vi betraktar funktioner som oändligt-dimensionella vektorer. Precis som andra vektorer kan vi definiera en skalärprodukt mellan funktioner. En skalärprodukt mellan vektorerna $\overline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ och $\overline{g} = (g_1, g_2, g_3)$ skrivs

$$\overline{f} \bullet \overline{g} = f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3.$$



FIGUR 9.1.2. En mångdimensionell vektor.

De med samma index multipliceras med varandra och sedan adderas de, vi kan skriva för n vektorer

$$\overline{f} \bullet \overline{g} = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i.$$

För längden av en vektor gäller

$$|\overline{f}| = \sqrt{\sum f_i^2}.$$

För att komma förbi begränsningen att vektorn är reell införs

$$\overline{f} \bullet \overline{g} = \sum_{i=1}^{n} f_i * \cdot g_i$$

där f_i^* är komplexkonjugatet. Och för längden motsvarande

$$|\overline{f}| = \sqrt{\overline{f} \bullet \overline{f}} = \sqrt{\sum f_i^* \cdot f_i}$$

så att längden av en vektor alltid är ett reellt tal (observera att utan komplexkonjugatet kan vi inte säkerställa att vi får ett reellt tal). Skalärprodukten generaliseras och skrivs med nya symboler

$$\langle \overline{f} | \overline{g} \rangle \equiv \sum f_i^* \cdot g_i \text{ diskret.}$$

Beteckningen $\langle \overline{f} | \overline{g} \rangle$ gäller för både diskreta och kontinuerliga fall. Om vi som tidigare gör indexet i till kontinuerligt skriver vi $f(x)$ och $g(x)$. Summatecknet ersätts av en integral (och ta bort streck ovanför bokstav)

$$\langle f | g \rangle = \int f^*(x) g(x) \, \mathrm{dx} \, \text{kontinuerligt.}$$

Språkbruket kring detta är att $\langle f|$ kallas för en 'bra'-vektor och $|g\rangle$ är en 'ket'-vektor; från engelskans 'bracket'. Naturligtvis uppkommer, som nämnts tidigare, många svårigheter vid denna övergång till funktioner. Denna typ av uttryck är vanliga i kvantmekaniken och går under benämningen Dirac-notation.

PROBLEM 9.1. Beräkna skalärprodukten mellan $\sin(x)$ och $\sin(2x)$ samt mellan $\sin(x)$ och $\cos(x)$ över intervallet $[0, 2\pi]$. Beräkna längden av $\sin(x)$ över samma intervall. Är $\sin(x)$ ortogonal mot $\sin(2x)$? Är $\sin(x)$ ortogonal mot $\cos(x)$? Vågar du dig på en gissning för vad som gäller i allmänhet?

PROBLEM 9.2. Skriv $\sin^2(x/2)$ respektive $\cos^2(x/2)$ som linjärkombinationer genom att använda a, $\sin(x)$ och $\cos(x)$, där a är ett godtyckligt reellt tal. D.v.s. $\sin^2(x/2) = a + b\sin(x) + c\cos(x)$ (koefficienter kan vara 0).

9.3. Facit

9.1

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(2x)\,\mathrm{dx} = \int \sin(x) 2\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{dx} &= \\ 2\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{dx} &= 2\left[\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{2\pi} = \pi$$

9.2 I formelsamlingar anges de som $\sin^2(x/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x)$ och $\cos^2\big(x/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x)\big)$. Vilket innebär att för $\sin^2$ är $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ och $c = -\frac{1}{2}$. För $\cos^2$ är $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ och $c = \frac{1}{2}$.

KAPITEL 10

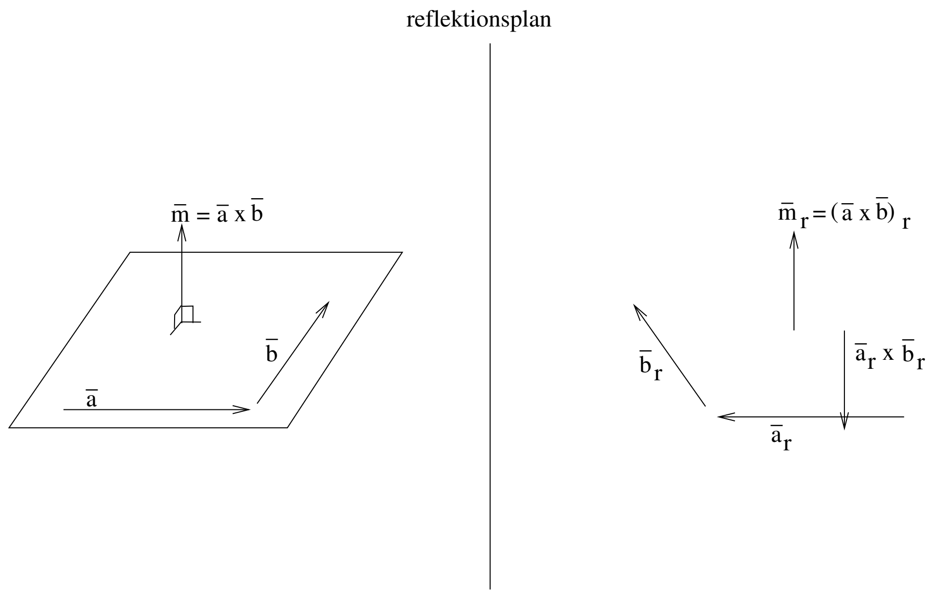
Fysik

10.1. Pseudovektor

Ofta beskrivs en vektor som en matematisk entitet som har storlek och riktning. I fysiken ställer man ytterligare krav. Det görs för att vektorerna ska kunna användas som modell i vissa situationer. Kraven som ställs har att göra med hur en vektor ska transformeras. Om en vektor i fysiken som beskriver t.ex. ett läge $\overline{x}$ reflekteras i en plan spegel vinkelrät mot den så kan den speglade vektorn skrivas $-\overline{x}$. Att byta tecken på komponenter kallas inversion. Detta är i någon mening det normala för en vektor vid en spegling.

Vektorer bildade med vektorprodukt kallas för pseudovektorer eftersom de utöver teckenbytet vid inversion har ytterligare ett teckenbyte, vilket resulterar i inget byte av tecken. Speciellt i 3 dimensioner används också benämningen axialvektor för dessa; de vanliga vektorerna kallas polarvektorer.

I 3 dimensioner kan inte vektorn som är resultatet av en vektorprodukt speglas, den kommer att peka i fel riktning i förhållande till speglingen av de två vektorer som användes för att beräkna den, se figur 10.1.1.

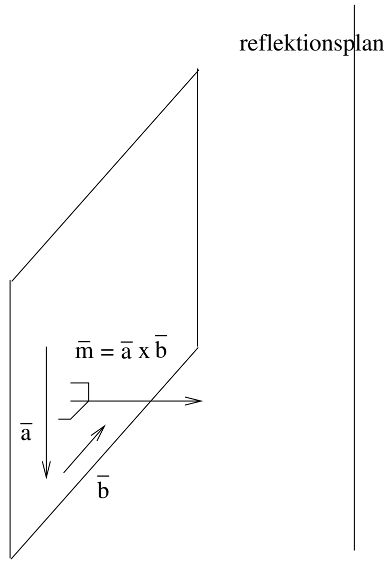


Figur 10.1.1. Vektorer(polar) och axialvektorer.

Utgå från vektorerna $\overline{a}$ och $\overline{b}$, spegla dessa och erhåll $\overline{a}_r$ och $\overline{b}_r$. Bilda vektorprodukten $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{m}$. Vad händer vid en spegling av dessa 3? I figuren, högra delen ser vi $\overline{a}_r$ och $\overline{b}_r$. Beräknar vi vektorprodukten av dessa erhålls $\overline{a}_r \times \overline{b}_r$ som pekar nedåt. Speglar vi däremot $\overline{m}$ till $\overline{m}_r$ så pekar den uppåt. Världen och spegelvärlden är inte lika.

Det fysikaliskt korrekta är $\overline{a}_r \times \overline{b}_r$ (nedåt) men $\overline{m}_r$ pekar uppåt. Vektorprodukten, av de speglade, ger oss korrekt vektor, den vektor vi fysikaliskt anser är korrekt; men det till priset av att den inte speglas korrekt, som $\overline{a}$ och $\overline{b}$ gör.

Övning 10.1. Visa att vektorprodukten även är en pseudovektor om spegeln placeras enligt figur 10.1.2. Den speglande ytans normal är parallell med vektorprodukten.

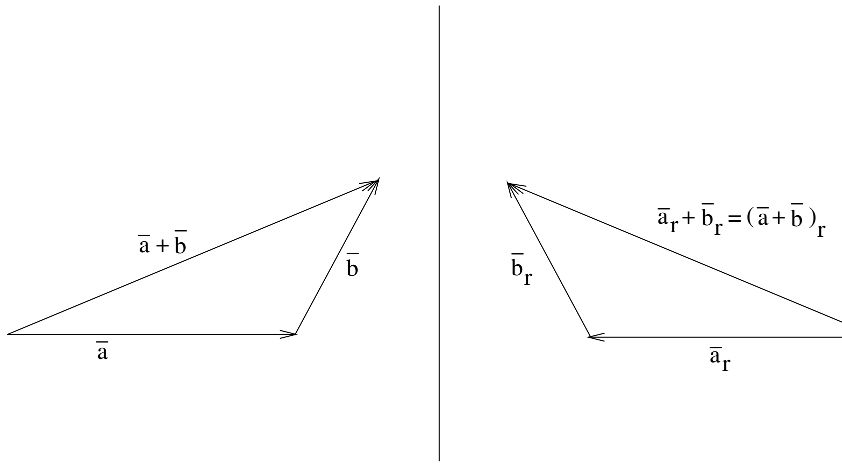


Figur 10.1.2. Vektorer speglas.

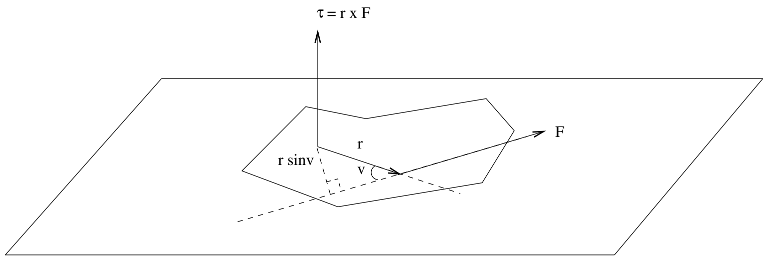
I kontrast till detta betraktar vi addition av två vektorer. Om vi bildar en ny vektor genom addition, se figur 10.1.3, så stämmer förhållandena efter spegling. Addition ger en vektor men vektorprodukten ger en pseudovektor, om de två ingående vektorerna är polarvektorer. Man kan inte addera en vektor med en pseudovektor eftersom de inte förändras på samma sätt vid en spegling.

I fysiken förekommer vridmoment: $\overline{\tau} = \overline{r} \times \overline{F}$, rörelsemängdsmoment $\overline{L} = \overline{r} \times \overline{p}$ och $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$ där $\overline{\omega}$ är vinkelhastigheten. Vektorerna $\overline{r}$, $\overline{F}$, $\overline{p}$ och $\overline{v}$ är polarvektorer men $\overline{\tau}$ och $\overline{\omega}$ och $\overline{L}$ är pseudovektorer. I uttrycket för Lorentzkraften $\overline{F} = q\overline{v} \times \overline{B}$ är $\overline{F}$ och $\overline{v}$ polarvektorer medan magnetfältet $\overline{B}$ är en pseudovektor. Två pseudovektorer kan adderas; vi kan t.ex. addera vridmoment. Att en vektor är ett matematiskt objekt (en pseudovektor uppfyller axiomen för en vektor) med storlek och riktning är inte tillräckligt för fysiken. Den vektoriella trippelprodukten är en riktig vektor (i 3 dimensioner). Vi går inte här in på vad som händer med dessa begrepp i fler än 3 dimensioner. För fördjupning i området kan man studera geometrisk algebra och bivektorer, som ger insikt i vad som egentligen händer i dessa situationer.

Övning 10.2. Vridmoment definieras som $\overline{\tau} = \overline{r} \times \overline{F}$, i den ordningen, se figur 10.1.4. Den grekiska bokstaven τ läses som 'tau'. Beräkna vridmomentet med avseende på origo om på en kropp i punkten $\overline{r} = (2, 1, 0)$ anbringas en kraft $\overline{F} = (2, 2, 0)$. Vridmoment är en pseudovektor (axialvektor). *Tillämpning från fysiken.*



FIGUR 10.1.3. Spegling av polarvektorer.



FIGUR 10.1.4. Definition av vridmoment.

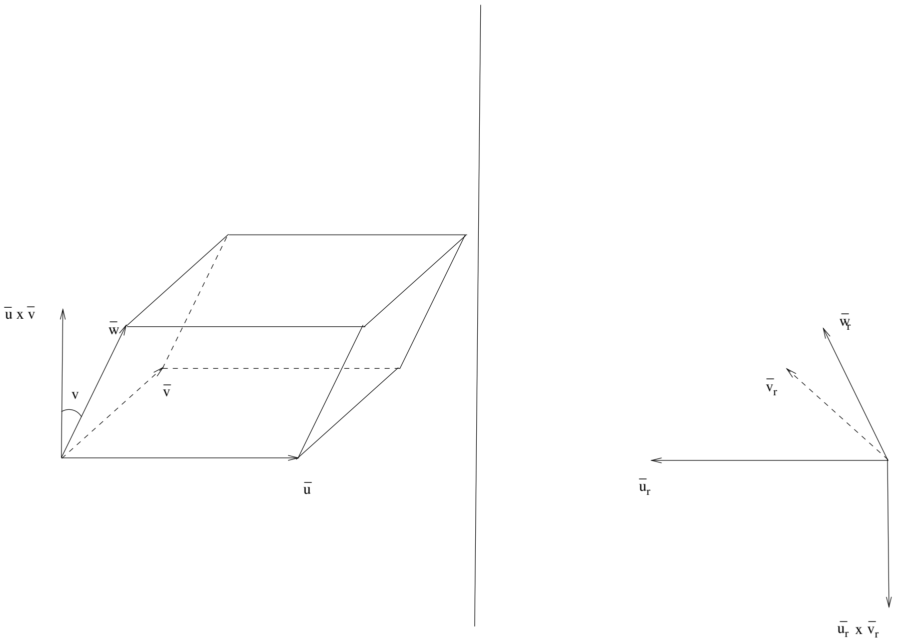
ÖVNING 10.3. Om vridmomentet i ovanstående uppgift anbringas på en kropp med tröghetsmomentet $I = 4$ kgm^2 vilken vinkel-acceleration, $\overline{\alpha}$, erhålls? Vinkelaccelerationen är en pseudovektor precis som vinkelhastighet. $\overline{\tau} = I\overline{\alpha}$ är motsvarigheten i rotationssammanhang till $\overline{F} = m\overline{a}$.

ÖVNING 10.4. Rörelsemängdsmoment definieras som $\overline{L} = \overline{r} \times \overline{p}$, i den ordningen. En punktformig kropp rör sig längs den räta linjen $\bar{l} = (1 + 2t, -1 + t, 3 - t)$, parametern t är tiden. Kroppen har massan 2 kg. Beräkna rörelsemängdsmomentet för $t = 0$, 1, 2 med avseende på origo. Varför blir det så?

ÖVNING 10.5. Varför är magnetfält en pseudovektor? I exemplet ovan framgår att pseudovektorn $\overline{m}$ inte ändrar riktning vid reflektion i en spegel; på samma sätt beter sig t. ex. ett magnetfält skapat av en spole/slinga. Studera en horisontell slinga med ström framför en vertikal spegel: vad händer med strömriktningen (egentligen strömtätheten, A/m^2) vid spegling?; vad händer med speglingen av magnetfältet?

I figur 10.1.5 i den vänstra delen har vi att $\overline{w}$ har samma orientering som vektorprodukten $\overline{u} \times \overline{v}$ och skalära trippelprodukten är positiv. I den högra, speglade delen har vi spegelbilderna $\overline{u}_r$, $\overline{v}_r$ och $\overline{w}_r$. Men vektorprodukten av de speglade vektorerna $\overline{u}_r$ och $\overline{v}_r$ ger inte $\overline{w}_r$. Vektorprodukten av de speglade vektorerna $\overline{u}_r \times \overline{v}_r$ pekar nedåt så skalärprodukten med $\overline{w}_r$ är negativ, i stället för positiv. Ett fysikexempel är magnetiskt flöde som ges av $\phi = \overline{B} \cdot \overline{A}$ där $\overline{A}$ är en normalvektor till arean och

$\overline{B}$ är magnetisk flödestäthet. $\overline{B}$ är en pseudovektor precis som vektorprodukten. Skalärprodukten är således en pseudoskalär.



FIGUR 10.1.5. Pseudoskalär byter tecken vid reflektion.

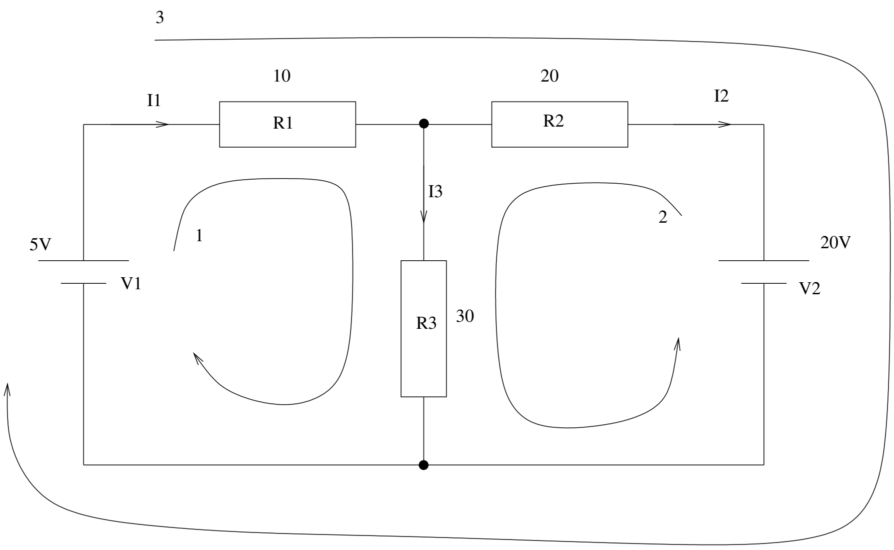
10.2. Kirchoffs lagar

Gustav Kirchoff angav två lagar 1845 som blev centrala för beräkningar på elektriska kretsar. Den första lagen säger att den algebraiska summan av strömmar vid en (kopplings)nod är 0, eller att summan av inkommande strömmar är lika med summan av utgående strömmar. Formuleras som $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = 0$, där I_k är strömmen in eller ut från en nod. Välj inkommande ström som positiv och utgående som negativ. Den andra lagen innebär att om man går runt en sluten slinga så är summan av alla potentialändringar (med tecken) 0. Om ett batteri passeras från minus till plus räknas potentialändringen som positiv. Passeras en resistor i strömmens riktning så räknas den som negativ.

EXEMPEL 10.1. Vi använder lagarna på kretsen i figur 10.2.1. För slinga 1 får vi $+V_1 - R_1I_1 - R_3I_3 = 0$. Slinga 2 ger $+V_2 + I_2R_2 - I_3R_3 = 0$. Slinga 3 ger $-I_1R_1 - I_2R_2 - V_2 + V_1 = 0$. Vi har två noder. Den övre ger $+I_1 - I_3 - I_2 = 0$ och den nedre $+I_3 + I_2 - I_1 = 0$. Vi för in värdena för resistanserna och de kända potentialändringarna

$$\begin{array}{rcl} 10I_1 + 30I_3 & = & 5 \\ 20I_2 - 30I_3 & = & -20 \\ 10I_1 + 20I_2 & = & 5 - 20 \\ I_1 - I_2 - I_3 & = & 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 & = & 0 \end{array} .$$

Med 5 ekvationer och 3 obekanta är systemet överbestämt. Tittar vi på de två nedersta ekvationerna ser vi att de är lika (linjärt beroende) så vi kan ta bort en:



FIGUR 10.2.1. Elektrisk krets.

4 ekvationer och 3 obekanta. Det finns flera möjliga vägar att gå nu. En av dem är att lösa ut I_1 ur 4 och sätta in i 3 (eller $-10 \cdot (4) + (3)$)

$$\begin{array}{rcl} 10I_1 + 30I_3 & = & 5 \\ 20I_2 - 30I_3 & = & -20 \\ 10\,(I_2 + I_3) + 20I_2 & = & 5 - 20 \\ I_1 - I_2 - I_3 & = & 0 \end{array}$$

så

$$\begin{array}{rcl} 10I_1 + 30I_3 & = & 5 \\ 20I_2 - 30I_3 & = & -20 \\ 30I_2 + 10I_3 & = & -15 \\ I_1 - I_2 - I_3 & = & 0 \end{array}$$

och därefter $-3/2 \cdot (2) + (3)$

$$\begin{array}{rcl} 10I_1 + 30I_3 & = & 5 \\ 20I_2 - 30I_3 & = & -20 \\ 30I_2 + 10I_3 \quad -30I_2 + 45I_3 & = & -15 + 30 \\ I_1 - I_2 - I_3 & = & 0 \end{array}$$

så

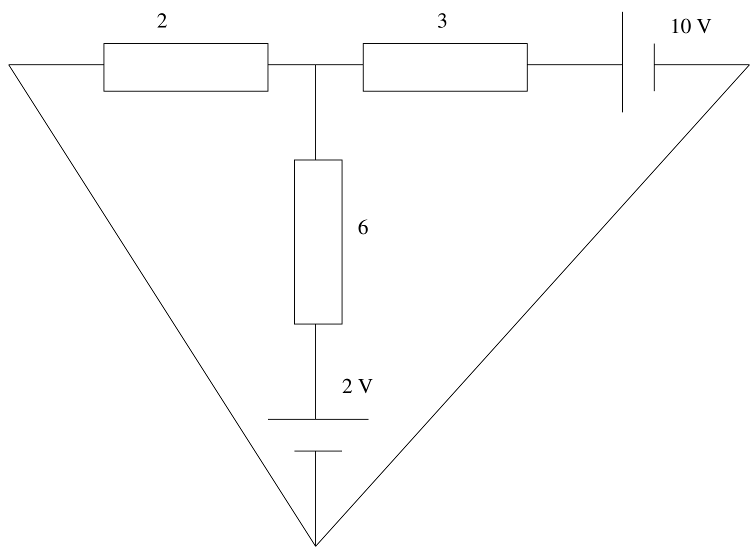
$$\begin{array}{rcl} 10I_1 + 30I_3 & = & 5 \\ 20I_2 - 30I_3 & = & -20 \\ 55I_3 & = & 15 \\ I_1 - I_2 - I_3 & = & 0 \end{array}.$$

Vi har ni $I_3 = 15/55 = 3/11$. Ur (2) erhålles $I_2 = (-20 + 30 \cdot 3/11)/20 = -1 + 9/22 = -13/22$. Och slutligen ur (4) $I_1 = -13/22 + 3/11 = -7/22$. Eftersom värdet på I_2 är negativt är strömriktningen i figuren fel, likaså för I_1.

Låt oss studera ekvationerna igen, och ändra dem lite genom att dividera med 10 på de tre första. Vi ser att (1) + (2) är $I_1 + 3I_3 + 2I_2 - 3I_3 = 0,5 - 2$ vilket är ekvivalent med $I_1 + 2I_2 = -1,5$ vilket är samma som (3). Här inser vi att det är endast 3 linjärt oberoende ekvationer och 3 obekanta.

$$\begin{array}{rcl} I_1 + 3I_3 & = & 0,5 \\ 2I_2 - 3I_3 & = & -2 \\ I_1 + 2I_2 & = & -1,5 \\ I_1 - I_2 - I_3 & = & 0 \end{array}$$

PROBLEM 10.1. Beräkna strömmarna i kretsen, se figur 10.2.2.



FIGUR 10.2.2. Elektrisk krets. Bestäm strömmarna i ledningarna.

10.3. Krafters jämvikt

EXEMPEL 10.2. En massa m är upphängd i punkten $M = (0, 0, 0)$. Tre linor kopplade till massan är fastsatta i punkterna $L_1 = (1, 2, 10)$, $L_2 = (3, -4, 10)$ och $L_3 = (-5, -1, 10)$. Bestäm storleken av krafterna i linorna när jämvikt råder. Kravet för jämvikt är $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 = \overline{0}$. Vi sätter tyngdkraften som $\overline{F}_4 = -mg\overline{e}_z$ med $\overline{e}_z = (0, 0, 1)$. Vi bestämmer riktningsvektorer för de 3 dragkrafterna i linorna och normerar dem; vi inför också en parameter för att ange storleken.

$$\bar{l}_1 = \frac{(1,2,10) - (0,0,0)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 10^2}} = \frac{(1,2,10)}{\sqrt{105}} \text{ så att } \overline{F}_1 = t_1 \frac{(1,2,10)}{\sqrt{105}}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{(3,-4,10) - (0,0,0)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 10^2}} = \frac{(3,-4,10)}{\sqrt{125}} \text{ så att } \overline{F}_2 = t_2 \frac{(3,-4,10)}{\sqrt{125}}$$

$$\bar{l}_3 = \frac{(-5,-1,10) - (0,0,0)}{\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 10^2}} = \frac{(-5,-1,10)}{\sqrt{126}} \text{ så att } \overline{F}_3 = t_3 \frac{(-5,-1,10)}{\sqrt{126}}$$

Vårt system är

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 & = & \overline{0} \\ t_1 \frac{(1,2,10)}{\sqrt{105}} + t_2 \frac{(3,-4,10)}{\sqrt{125}} + t_3 \frac{(-5,-1,10)}{\sqrt{126}} & = & mg(0,0,1) \end{array}$$

som komponentvis innebär

$$\begin{aligned}
t_1\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{105}} + 3t_2\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{125}} - 5t_3 &= 0\\
2t_1\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{105}} - 4t_2\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{125}} - t_3 &= 0\\
10t_1\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{105}} + 10t_2\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{125}} + 10t_3 &= \sqrt{126}mg
\end{aligned}$$

och om vi avrundar

$$\begin{aligned}
1,1t_1 + 3t_2 - 5t_3 &= 0\\
2,2t_1 - 4t_2 - t_3 &= 0\\
12t_1 + 10t_2 + 10t_3 &= 11,2mg
\end{aligned}$$

Vi eliminerar t_1 genom $-2(1) + (2)$ och $-11(1) + (3)$,

$$\begin{aligned}
1,1t_1 + 3t_2 - 5t_3 &= 0\\
2,2t_1 - 4t_2 - t_3 &= 0\\
12t_1 + 10t_2 + 10t_3 &= 11,2mg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1,1t_1 + 3t_2 - 5t_3 &= 0\\
-10t_2 + 9t_3 &= 0\\
-23t_2 + 65t_3 &= 11,2mg
\end{aligned}$$

och $-2,3\,(2) + (3)$ för att eliminera t_2,

$$\begin{aligned}
1,1t_1 + 3t_2 - 5t_3 &= 0\\
-10t_2 + 9t_3 &= 0\\
+44,3t_3 &= 11,2mg
\end{aligned}$$

så att $t_3 = 0,25mg$, $t_2 = 9t_3/10 = 0,25 \cdot 9/10 = 0,23mg$, $t_1 = (5t_3 - 3t_2)/1,1 = (5 \cdot 0,25 - 3 \cdot 0,23)/1,1 = 0,53mg$.

Wolfram alpha ger svaret

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{23}{4\sqrt{105}}mg \approx 0,56mg\\
t_2 &= \frac{3}{28}\sqrt{5}mg \approx 0,24mg\\
t_3 &= \frac{1}{\sqrt{14}}mg \approx 0,27mg
\end{aligned}$$

10.4. Flöde och area

Flöde. Magnetisk flödestäthet ges av vektorn $\overline{B}$. Flödestäthetens skalärprodukt med en normalvektor $\overline{A}$ till ett plan med en viss area ger flödet ϕ. Enligt vanligt förekommande beteckningar $\phi = \overline{B} \cdot \overline{A}$.

Exempel 10.3. I ett rum ges flödestätheten av $\overline{B} = (1,\ 1/2,\ 2)$ och normalen till ytan är $\overline{A} = (1,\ 1,\ 2)$ (arean är $\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \approx 2,4\,\mathrm{m}^2$) Totala flödet genom ytan är $(1,\ 1/2,\ 2) \cdot (1,\ 1,\ 2) = 1 + 0,5 + 4 = 5,5$. Flödestätheten mäts i $1\,\mathrm{T}$, Tesla, och flödet i $1\,\mathrm{Tm}^2$, Tesla-kvadratmeter som även benämns $1\,\mathrm{Wb}$, Weber. Då uttrycks $1\,\mathrm{T}$ som $1\,\mathrm{Wb/m}^2$. Flödet kan anges som $5,5\,\mathrm{T}m^2$ eller $5,5\,\mathrm{Wb}$.

10.5. Facit

10.2 Använd formeln.

$$\overline{\tau} = \overline{r} \times \overline{F} = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\overline{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\overline{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{e}_3$$

där bara $\overline{e}_3$får en koefficient, $\overline{\tau} = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 2)\overline{e}_3 = 2\overline{e}_3 = (0, 0, 2)$.

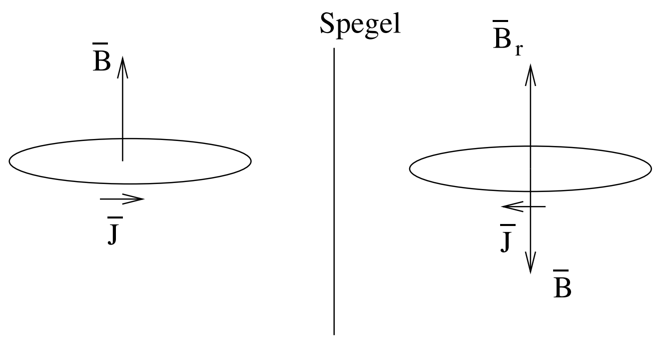
10.3$\overline{\tau}/I = (0, 0, 2)/4 = (0, 0, 1/2)$ rad/s.

10.4 $\overline{r}$ ges av linjen $\bar{l}$. Hastigheten ges av derivatan av linjen $\overline{v} = d\bar{l}/dt = (2, 1, -1)$och $\overline{p} = (4, 2, -2)$.

$$\begin{aligned}
\overline{L} &= (1 + 2t, -1 + t, 3 - t) \times (4, 2, -2) = \\
&= ((-1 + t) \cdot (-2) - (3 - t) \cdot 2,\ (3 - t) \cdot 4 - (1 + 2t) \cdot (-2), \\
&\quad (1 + 2t) \cdot 2 - (-1 + t) \cdot 4) \\
&= (2 - 2t - 6 + 2t,\ 12 - 4t + 2 + 4t,\ 2 + 4t + 4 - 4t) \\
&= (-4,\ 14,\ 6)\,.
\end{aligned}$$

Rörelsemängdsmomentet är konstant under hela rörelsen, vilket den ska vara om inga krafter påverkar den, och inga krafter påverkar den eftersom den har konstant hastighet.

10.5 Vektor märkt $\overline{B}$ är den fysikaliskt korrekta. $\overline{B}_r$ är spegelbilden av $\overline{B}$ som finns



FIGUR 10.5.1. Spegling av magnetfält.

i den vänstra delen. $\overline{J}$ är vektorn för strömtäthet.

KAPITEL 11

Geogebra

Innehåller information om Geogebra och uppgifter som kan utföras med Geogebra.

11.1. Vektorer

PROBLEM 11.1. Komposanter.

Utgå från filen komposanter.ggb. I filen finns två basvektorer u och v. Det finns också två vektorer A och B. Till basvektorerna finns det två glidare, $k1$ och $k2$, så att man kan erhålla $u1 = k1 \cdot u$ och $v1 = k2 \cdot v$, vilka automatiskt är ortsvektorer.

Vektorer konstrueras med kommandot Vector[<Start Point>, <End Point>] eller Vector[<Point>]. Punkter, <Point> anges i formatet (x, y) där x och y är tal.

Observera u i grafen, var börjar den var slutar den? Observera hur u är skriven i Algebra-fönstret. Dubbel-klicka på u i Algebra-fönstret, vad visas? Observera skillnaden.

Börja med att avmarkera u och v.
Konstruera:

(1) Representanter för A och B som har sin fot i origo, kalla dem OA och OB. Avmarkera de ursprungliga A och B.
(2) Sätt samman komposanter så att du konstruerar en vektor $OAA = u1 + v1 = k1 \cdot u + k2 \cdot v$ så att OAA sammanfaller med OA. Avläs värdena för $k1$ och $k2$ och ange dem. Upprepa för OB genom att konstruera en vektor OBB som sammanfaller med OB genom justering av $k1$ och $k2$. Avläs värdena för $k1$ och $k2$ och ange dem. $k1$ och $k2$ är koordinater för vektorn $OA(OB)$ i basen $\{u, v\}$.

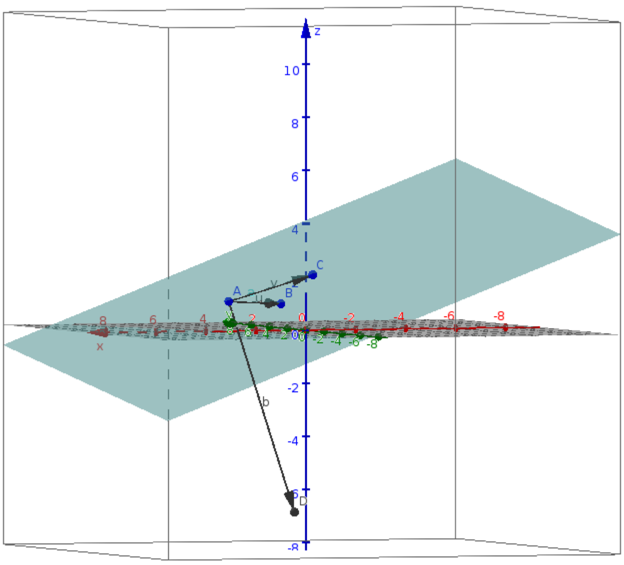
PROBLEM 11.2. Linje utifrån fix punkt och riktningsvektor i 3-dimensioner.

(1) Ange en fix punkt $P0 = (a, b, c)$ och skapa glidare för a, b och c.
(2) Skapa en riktningsvektor $\overline{v} = vector(k, l, m)$ och skapa glidare för k, l och m.
(3) Skapa en linje genom $Curve[x(P0)+x(v)t,\ y(P0)+y(v)t,\ z(P0)+z(v)t,\ t, -10,\ 10]$ (det finns andra sätt). Kommandot $x()$ ger x-komponenten av en punkt, t.ex. $P0$, eller vektor, t.ex. $\overline{v}$.
(4) Ställ in en *punkt* och *variera* riktningen och observera hur linjen går igenom punkten men följer riktningsvektorn.
(5) Ställ in en *riktningsvektor* och *flytta* punkten och observera att trots att punkten flyttas så bibehålles riktningen.

PROBLEM 11.3. Plan I

Plan i 3D, se figur 11.1.1.

(1) Ange tre punkter ($A = (2, 3, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (-1, 2, 3)$) som ritas i 3D grafen. Försök se planet.
  (a) Lägg ut två riktningsvektor med hjälp av de tre punkterna. Använd A som startpunkt för de två riktningsvektorerna. Vector[<Start Point>,<End Point>]. Föreställ dig planet när de två vektorerna ritats.
  (b) Rita planet. Plane[<Point>,<Point>,<Point>]. Se hur vektorerna verkligen ligger i planet.
  (c) Skapa vektorprodukten mellan de två riktningsvektorerna. Den ska vara en normal till planet. Vektorn placeras automatiskt i i origo.
  (d) Flytta normalen till punkten A. Normera den.



FIGUR 11.1.1. Plan i Geogebra.

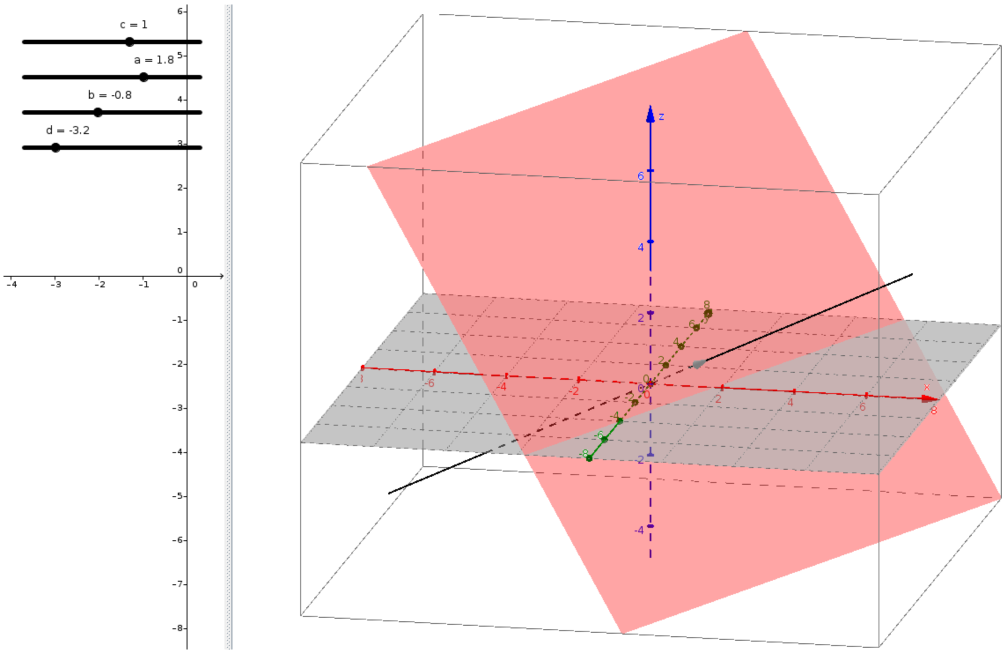
PROBLEM 11.4. Plan II

Kontroll av planet $ax + by + cz + d = 0$.

Ange ett allmänt plan i Geogebra på parameterform. Använd den affina formen enligt ovan som utgångspunkt så att a, b, c och d ingår i parameterformen. Använd kommandot: Surface[<Expression>, <Expression>, <Expression>, <Parameter Variable 1>, <Start Value>, <End Value>, <Parameter Variable 2>, <Start Value>, <End Value>]

Den första Expression anger $x(s, t)$, den andra anger $y(s, t)$ och den tredje $z(s, t)$. s är första parameter-variabeln och t den andra. Välj t.ex. intervallet $[-20, 20]$ för parametrarna.

Inför glidare för a, $b\,c$ och d. Rita normalvektor till planet, foten i origo. Rita en linje parallell med normalvektorn och också genom origo.



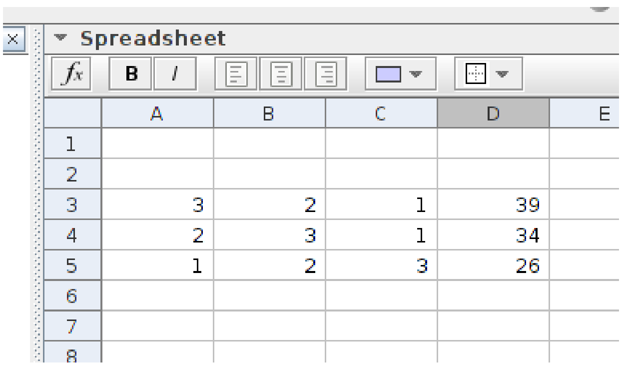
FIGUR 11.1.2. Ett plan med en linje i normalens riktning.

11.2. Matriser

Viktiga kommandon och information för att kunna komma igång med ekvationssystem och matriser i Geogebra är:

EXEMPEL 11.1.

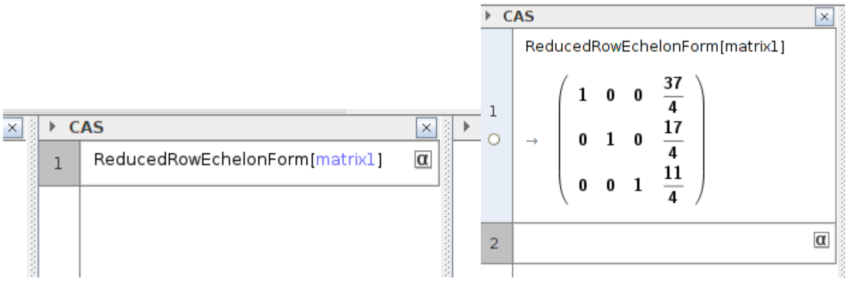
- Matriser representeras som listor av listor $M = \{\{3,2,1\},\{2,3,1\},\{1,2,3\}\}$; M blir beteckningen på matrisen. 1:a listan blir första raden, 2:a listan blir 2:a raden osv.
- Addition, subtraktion och multiplikation: använd symbolerna för motsvarande för tal.
- Matriser matas bekvämast in genom att skriva dem i kalkylarket, markera elementen, högerklicka och välj Create-Matrix. De dyker upp i algebrafönstret. I figuren finns den sammansatta (augmented) matrisen från avsnitt 15.1 inmatat.


Spreadsheet

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	3	2	1	39	
4	2	3	1	34	
5	1	2	3	26	
6					
7					
8					

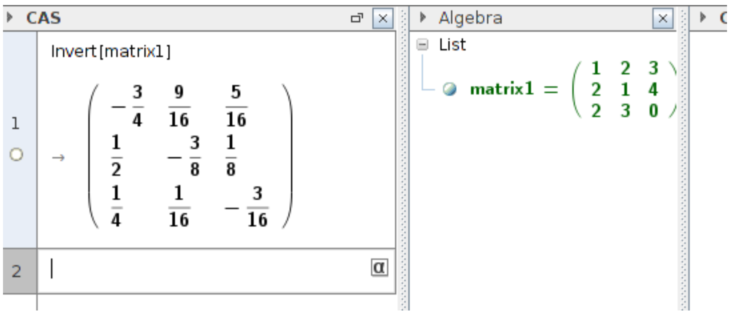
FIGUR 11.2.1. Inmatning av matris i kalkylarket.

- `ReducedRowEchelonForm[ <Matrix> ]`: Beräknar den reducerade trappmatrisen i CAS-fönstret.



FIGUR 11.2.2. Kommandot för att lösa ett ekvationssystem givet i CAS-fönstret. Matris från föregående punkt. Och svaret.

- `Invert[ <Matrix> ]`: Beräknar inversen till matrisen <Matrix>. (cas/algebra)



FIGUR 11.2.3. En matris och dess invers.

EXEMPEL 11.2. Öppna Algebra-, Kalkyl- och CAS-fönsterna. Observera att man bör ange (augmented) den *utvidgade* matrisen. Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =3 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \end{array}$$

Ange det som

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

i kalkylarket och markera dessa, och välj 'create matrix' (högerklicka eller ikon). Matrisen skrivs i algebra-fönstret. Skriv i CAS-fönstret `ReducedRowEchelonForm[<Matrix>]`. Skriv in matrisens namn i stället för `<Matrix>`. I CAS-fönstret anges lösningsmatrisen i det som kallas 'Reduced row echelon form'

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

vilket innebär att $z = 1$, $y = 1$, $x = 1$.

PROBLEM 11.5. Lös följande ekvationssystem med hjälp av geogebra:

$$\begin{array}{llll} x & +y & +2z & = 9 \\ 2x & +4y & -3z & = 1 \\ 3x & +6y & -5z & = 0 \end{array}$$

Reduced syftar på ett det är ettor i diagonalen (sett som koefficientmatris). Echelon kan i detta fall översättas som trappstege: reducerad rad trappstegsform.

11.3. Area utifrån koordinater

En triangel har hörn i (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Triangelns area kan beräknas som en vektorprodukt vilket ger

$$A = \frac{1}{2}\left(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3\right).$$

PROBLEM 11.6. Konstruera ett uttryck som gäller för en polygon med n-hörn. Redovisa härledningen och dess eventuella begränsningar. Vad är en konvex polygon?

(1) Hur skulle du beskriva mönstret som förekommer i termerna?
   (a) Klistra in en bild i Geogebra och beräkna önskad area. Skriv en text som beskriver förfarandet och ange data.

Ett exempel från verkligheten: *Geodetisk och fotogrammetrisk mätnings- och beräkningsteknik* av Lantmäteriet med flera. Creative Commons, icke kommersiell. För grundläggande kurser inom geodetisk och fotogrammetrisk mätningsteknik.

11.4. Transformationer

EXEMPEL 11.3. Skriv in kolonnmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

i geogebra genom att öppna ett kalkylark, se figur. Markera de två talen, högerklicka och välj Create-List of points, se figur 11.4.1 a. Kolonnmatrisen är nu lagrad som en punkt och en lista, men listor av listor är matriser; punkten finns som två representationer, du kan dock använda A för att refererar till matrisen. Ange k i Input, tacka Ja till att skapa glidare, se figur 11.4.1 b. Skriv in matrisen

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i kalkylarket, markera och skapa matris. Se figur 11.4.2. Dra glidaren till t.ex. 2. Skapa den transformerade vektorn(matrisrepresentation): C=matrix1*A, se figur 11.4.2. A är originalet och C är den transformerade. Genom att dra i glidaren flyttas C.

PROBLEM 11.7. 2D. Konstruera på samma sätt som i exemplet reflektion av punkter i x-axeln med matrisen $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, reflektion av punkter i y-axeln med $M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, reflektion av punkter i linjen $y = x$, med $M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och skjuvning (shear) av punkter i x-riktningen med $S_x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Konstruera också en moturs-rotation med vinkeln som glidare.

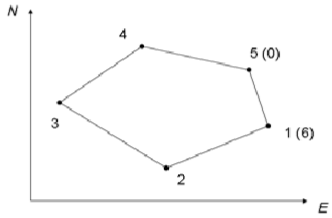
8.2.9 Beräkning av arean av en polygon

I flera detaljmätningstillämpningar behöver man beräkna arean av en polygon. Detta kan t.ex. vara beräkning av arean av en byggnad eller en fastighet. För att beräkna arean på polygonen (a) används följande formel:

$$a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} N_i (E_{i+1} - E_{i-1}) \qquad 8.1$$

där n är antalet brytpunkter.

Formel 8.1 förutsätter att punkterna i polygonen är numrerade medurs (se Figur 8.9). Vidare måste första och sista punkten ha dubbla beteckningar. Detta fås genom att addera beteckningen $n+1$ till första punkten och beteckningen 0 till sista punkten. Detta är ett krav för att indexeringen ska vara korrekt i summationen i formel 8.1.



Figur 8.9. Polygon med 5 brytpunkter. Punkterna är numrerade i enlighet med kraven för formeln för areaberäkning (formel 8.1).

119

(A) Beräkning av area för oregelbunden polygon.

Exempel 8.2: Beräkna arean för polygonen i Figur 8.9 där brytpunkterna har koordinatvärden enligt tabellen nedan:

Punktnummer	N (m)	E (m)
1 (6)	5,0	9,0
2	2,0	5,0
3	6,0	1,0
4	9,0	4,0
5 (0)	8,0	8,0

För att beräkna arean används formel 8.1. Då erhålls:

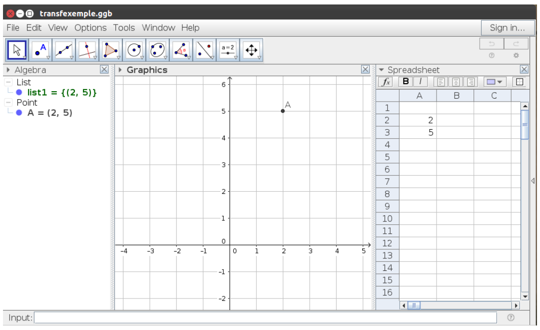
$$a = \frac{1}{2}\left[5,0 * (5,0 - 8,0) + 2,0 * (1,0 - 9,0) + 6,0 * (4,0 - 5,0) + 9,0 * (8,0 - 1,0) + \right.$$
$$\left. + 8,0 * (9,0 - 4,0)\right] = \frac{1}{2}\left[-15 - 16 - 6 + 63 + 40\right] = 33\,\mathrm{m}^2$$

Svar: Arean på polygonen är 33 m^2.

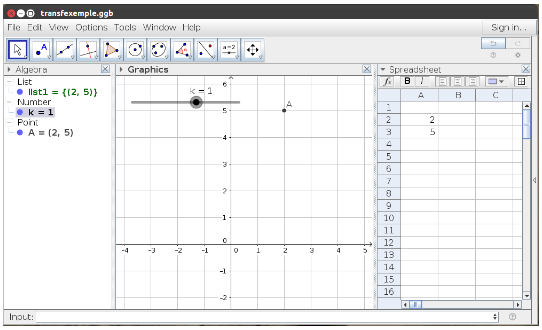
(B) Exempel.

PROBLEM 11.8. Ange en triangel genom att ange tre vektorer/punkter i 2D. Använd föregående problems avbildningar/transformationer på triangeln. Vad händer med triangeln? Ledning: 3 kolonnmatriser som en matris, Create-List of points.

PROBLEM 11.9. Ange en kub i 3D. Rotera den med hjälp av 3 matriser, en för varje axel. Ange vinklar med hjälp av glidare.

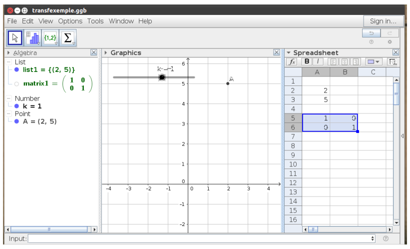


(A)

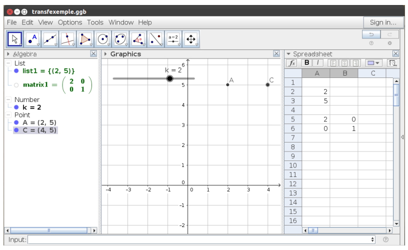


(B)

FIGUR 11.4.1. Skapa en matris med hjälp av kalkylblad.



(A)



(B)

FIGUR 11.4.2. Skapat matrix1 och C.

11.5. Egenvektorer och egenvärden

Egenvärden och egenvektorer definieras av ekvationen $AX = \lambda X$ vilket innebär att när matrisen A opererat på kolonnvektorn X så erhålles X med en faktor λ där $\lambda \in \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Vi kan säga att X avbildas på sig själv med en faktor λ. En given matris A kan undersökas med hjälp av Geogebra. Om X framställs grafiskt som en geometrisk vektor, ortsvektor, och denna roteras runt origo (alla möjliga riktningar) så om bilden AX faller på den linje som går igen X så har vi en linje på vilken vi har egenvektorer. Egenvärdesekvationen säger att X och AX vilket är λX är parallella.

Konstruera i Geogebra ett program där du kan rotera ortsvektorn X och ser hur AX förflyttas.

Modifiera programmet så att du enkelt kan avläsa λ.

eigenvalues3.ggb

11.6. Facit Problem

KAPITEL 12

Python

????

KAPITEL 13

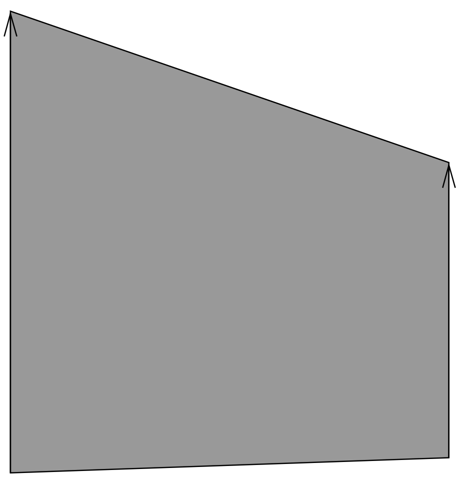
Didaktik

13.1. Diverse

Problem 13.1. I skolan används i regel två metoder för lösning av ekvationssystem. Den ena kan ses som en enklare variant på Gausselimination/successiv elimination och kallas ofta för additionsmetoden, och den andra kallas substitutionsmetoden. Vilka nackdelar och fördelar har dessa? Hur skulle du undervisa om additionsmetoden så att det blir lätt att gå vidare till Gausselimination? Varför introducera två metoder? Undersök på en skola.

Problem 13.2. I undervisning är det en styrka att kunna hänvisa till upplevelsen av det fysiska rummet för att förstå vektorbegreppet, men man måste beakta skillnaderna mellan det fysiska rummet och det matematiska rummet. Fundera på var i matematikundervisningen dessa skillnader kan vålla problem.

Problem 13.3. Varför spänner de två 'vektorerna' i figur 13.1.1 inte upp ett 'plan'?



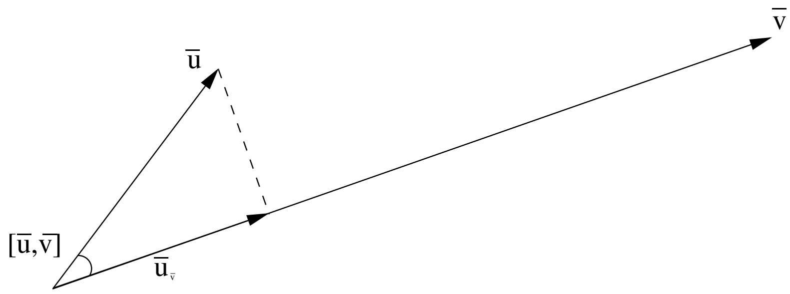
Figur 13.1.1. Ett plan uppspänt av två vektorer?

Problem 13.4. Undersök någon lärobok för gymnasiet med avseende på:

(1) hur den handskas med skillnaden mellan riktade sträckor och vektorer;
(2) framställning av vektorer geometriskt respektive i koordinatsystem, påpekas skillnaden?;
(3) rätvinkliga respektive snedvinkliga koordinatsystem;

(4) skillnaden mellan komponenter och komposanter;
(5) hur den ser på skillnaden mellan vektor-addition och tal-addition.

Problem 13.5. Studera de 3 följande representationerna. Vad säger de? Vilka likheter finns det? Vilka skillnader finns det? Representation 2: $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}|\,|\overline{v}| \cos \alpha$.

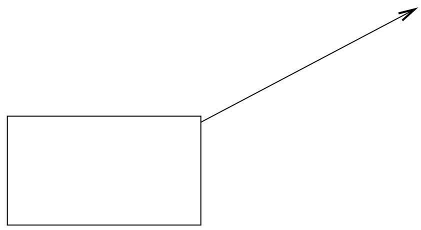


Figur 13.1.2. Representation 1.

Representation 3: $\overline{u} \cdot \overline{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

13.2. Begreppsbildning

13.2.1. Vektorer i fysik. Figuren illustrerar en vanlig situation i en fysikbok, en kraft anbringas på ett föremål.



FIGUR 13.2.1. Kraft anbringad på ett föremål.

Det finns flera saker som gör situationen otydlig:

(1) Det finns inga basvektorer eller koordinatsystem?
(2) Kraften är 'på' föremålet och inte i origo, eller har man lagt origo precis där pilens fot är?
(3) I fysik spelar det ofta roll var på objektet kraften angriper men vektorer ska kunna parallellförflyttas. Men en pil som flyttas till en annan punkt på föremålet kommer att orsaka andra händelser. Så vad är det för pil som ritats?

Bilden innehåller de grafiska elementen rektangel och pil. Rektangeln representerar föremålet i verkligheten, pilen representerar det matematiska objektet vektor. Föremålet är i det fysiska rummet. Vektorn är i $\mathbb{R}^3$ eller $\mathbb{R}^2$ med enheten Newton på axlarna. Ibland anges storleken på kraften direkt som ett tal i figuren, riktningen framgår av geometrin.

Oftast behandlas föremålet som punktformigt fastän det inte ritas så. Författare vill koppla innehållet till verkligheten och använder utsträckta föremål: bilar, sängar, lådor osv. Vad som egentligen händer är att utgångsläget är ett utsträckt föremål som en kraft anbringas på och sedan konstrueras en modell där föremålet är punktformigt och därefter utförs beräkningar. Modellen brukar undertryckas så att läsaren inte blir medveten om detta.

Om läget av kraften på objektet ska ingå, t.ex. vid vridmoment, så brukar bilderna vara noggrannare och ett origo/vridpunkt eller liknande anges. Att undertrycka att det är olika 'rum', att inte ha med axlar och liknande, bortse från modellskapandet o.s.v. kallas att ikonifiera. Pilen blir en *symbol* för kraft, den är inte längre ett matematiskt objekt.

I princip har vi 3 användningar av vektorer. Den första, som behandlats i kursen, är de så kallade *fria* vektorerna, de kan parallellförflyttas. Hastighetsvektorer är av denna typ men även vridmoment.

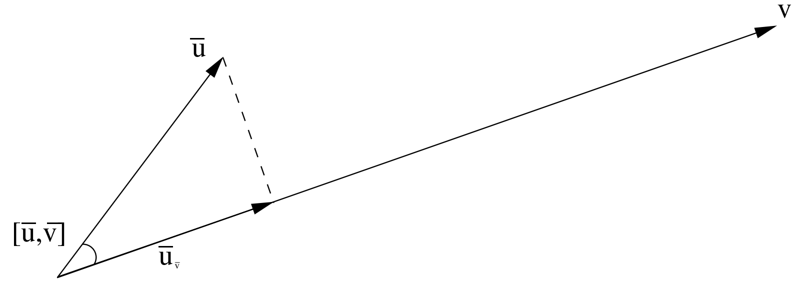
Den andra användningen är när vektorn kan *glida* längs en linje utan att det fysikaliska innehållet förändras; en parallellförflyttning i sidled fungerar inte i den fysikaliska situationen, det blir fel resultat. Kraftvektorer på en utsträckt stel kropp som kan roteras är ett exempel.

Den tredje användningen är vektorer som har en angiven fotpunkt eller angreppspunkt, de sägs vara *bundna*; vid utsträckta kroppars deformation kan inte vektorn flyttas vare sig enligt de fria vektorerna eller de glidande vektorerna utan att det fysikaliska resultatet ändras. En kraft som anbringas på t.ex. en tvättsvamp måste beskrivas av en bunden vektor. Om den flyttas på något sätt så är det ett annat område som blir deformerat.

Dessa 3 olika användningar tillsammans med uppdelningen i vektorer respektive pseudovektorer(skalärer) beskriver fysikens användning av vektorer. Det finns dock närliggande objekt t.ex. bivektorer och tensorer.

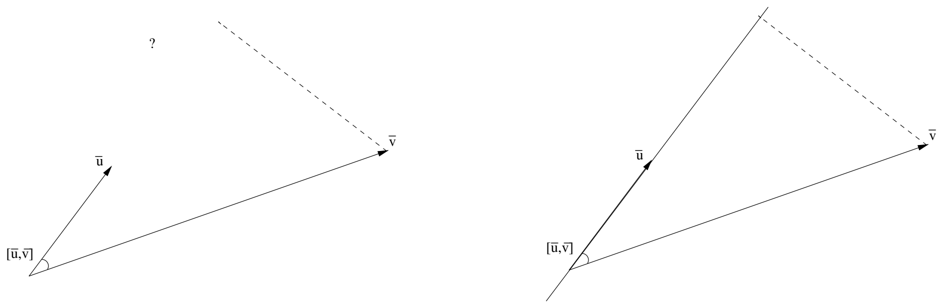
Problem 13.6. Konstruera fysikexempel för de 3 olika vektortyperna: fri vektor, glidande vektor och bunden vektor.

13.2.2. Projektion. I avsnittet om skalärprodukt står det "Ordet 'på' ska förstås på ett speciellt sätt och kan vara missledande, se figur Skalärprodukt.. Kanske är det tydligare att säga att projektionen är på en linje genom $\overline{v}$."



Figur 13.2.2. Skalärprodukt.

Anledningen till kommentaren i texten är att svårigheter uppkommer om en till synes längre vektor ska projiceras på en kortare och eleven kan då ha föreställningen att den korta vektorn 'inte räcker till', se figur 13.2.3. Föreslå sätt att hjälpa eleven komma förbi denna föreställning. Ytterligare ett sätt att uttrycka sig är att säga att en vektor ska projiceras på den riktning som anges av den andra vektorn.



Figur 13.2.3. Projektion på en vektor som 'inte räcker till'. Vektorn $\overline{v}$ ska projiceras på vektorn $\overline{u}$. Den vänstra figuren illustrerar elevens problem att inte ha något att projicera på; den streckade linjen träffar inte på vektorn $\overline{u}$. I den högra figuren finns även en linje parallell med vektorn $\overline{u}$.

13.3. Forskningsresultat

13.3.1. Vektorer och skalärer. I en undersökning[Appova, 2013] ställdes frågan : Uttryck vektorn $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ som en summa av två vektorer, den ena parallell med $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, och den andra ortogonal med $\overline{y}$. Uppgiften gavs med

$\overline{x} = (4, 12, 11)$ och $\overline{y} = (5, -1, 2)$. Översättningen är min. Symboler är utbytta till symboler som passar bättre med denna text. Studenternas beräkningar är redigerade bland annat i de fall då flera fel utförs samtidigt.

PROBLEM 13.7. Lös uppgiften fullständigt och allmänt. Här följer några exempel på fel.

(1) Vilket fel förekommer i följande beräkning

$$6 - \left(\frac{5}{24,83}, -\frac{1}{24,83}, \frac{2}{24,83}\right) = \left(\frac{1}{24,83}, \frac{7}{24,83}, \frac{4}{24,83}\right).$$

(a) Vilket fel förekommer i följande beräkning

$$(4, 5, -1) - \left(\frac{-12}{15}\right) = \left(\frac{60}{15} + \frac{75}{15} - \frac{15}{15}\right) + \frac{12}{15}.$$

(b) Vilket fel förekommer i följande beräkning

$$(4, 5, -1)\left(\frac{-156}{\sqrt{65}}\right) = \frac{-624}{\sqrt{65}} + \frac{-780}{\sqrt{65}} + \frac{1092}{\sqrt{65}}.$$

(c) Vilket fel förekommer i följande beräkning

$$(2, -1, 3) \bullet (5, 8, -3) = (10, -8, -9)\,.$$

13.3.2. Symboler. Barniol och Zavala [Barniol and Zavala, 2014] undersökte förståelsen för vektorer skrivna i så kallad enhets-vektor notation, en form som är vanlig i introduktionsböcker i fysik på universitetsnivå i Sverige. De undersökta bestod av cirka 140 till 200 studenter.

På uppgiften ”Draw in the grid the vector $\overline{a} = -2\overline{i}+3\overline{j}$” gav cirka 80%av studenterna korrekt svar. Fel som förekom var bland annat:

- en vektor från $(-2, 0)$ till $(0, 3)$;
- en vektor i punkten $(-2, 3)$ i stället för en vektor från $(0, 0)$ till $(-2, 3)$.

De försökte också utröna hur studenterna hanterade riktning och frågade efter riktningen hos vektorn $-3\overline{i}+4\overline{j}$: “Consider vector $\boldsymbol{A} = -3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$. Calculate the direction of this vector measured from the positive x-axis.”

Cirka 17% angav det korrekta värdet $180° - \arctan(4/3) \approx 126,87°$. 38% av studenterna svarade inte med vinkel utan ritade en skiss eller ett mer kvalitativt svar. 24% ritade en skiss, 18% ritade en korrekt skiss. Vanliga språkliga uttryck var: “in the negative direction of the x-axis and in the positive direction of the y-axis”; “to the northwest”; “-3i”. Vanligt är också svaret $-53,13°$.

Att beräkna vektorns längd gjorde 74% korrekt, 88% beräknade addition korrekt och 87% kunde multiplicera en vektor med en skalär. Skalärprodukt var svårare, endast 35% svarade rätt. Uppgiften var att beräkna $(1\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) \bullet 5\boldsymbol{i}$. Det vanligaste felaktiga svaret (20%) var $5\boldsymbol{i}$, d.v.s. en vektor inte en skalär. Näst vanligast (14%) var $5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$. En stor del av svaren, fler än de här redovisade, var en vektor trots att det rörde sig om att beräkna en skalärprodukt.

Även vektorprodukt undersöktes: “Consider vectors $\boldsymbol{A} = 1\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ and $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{i}$. Calculate the cross product $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$.” 61% svarade rätt på denna: $-15\boldsymbol{k}$. Det vanligaste (10%) felet var att svara $15\boldsymbol{k}$. Ett ’teckenfel’ kan dock ha en djupare grund än vanligt slarv. Forskarna anser, genom att referera till en annan undersökning, att det kan ha uppkommit genom att inte observera att vektorprodukten inte är kommutativ.

13.3.3. Vektorbegrepp. Följande text grundar sig på en forskningsartikel: Students' difficulties in problems that involve unit-vector notation av Pablo Barniol, Genaro Zavala Physics Education Research and Innovation Group. Department of Physics, Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, E. Garza Sada 2501, Monterrey, N. L. 64849 México.

Undersökningsgruppen består av nästan 1000 studenter som tagit sin första fysikkurs på ett privat universitet i Mexico. Studenterna ges öppna frågor kring att:

(1) rita en vektor
(2) beräkna en vektors riktning
(3) beräkna en vektors storlek
(4) addera två vektorer
(5) subtrahera två vektorer
(6) multiplicera en vektor med en negativ skalär
(7) beräkna skalärprodukten av två vektorer
(8) beräkna vektorprodukten av två vektorer

13.4. Från tal till vektorer i fysik

Kort sammanfattning av olika lägesbegrepp som människor brukar ha (så kallade 'concept images').

13.4.1. Plats. Föremål är på en plats i rummet. Inget hastighetsbegrepp som innehåller en kvot. Den som hinner längst på en viss tid rör sig fortast. Den som hinner en viss sträcka på kortast tid rör sig fortast. Om föremål börjar på olika platser och vid olika tidpunkter så är hastighet svårbedömt. Tid behöver egentligen inte mätas utan ersätts av rums-observationer: vem har hunnit längst nu?; den ene har kommit fram men den andre har en bit kvar.

13.4.2. Linjal och klocka. Läge mäts med linjal och tiden med en klocka. Två bilar kör på en väg och den ena hinner upp den andra så de befinner sig jämsides. Enligt denna tanke-modell har de då samma fart. Bilarna har samma läge. Och tiden är samma för alla; således har de samma fart, den ges av sträcka dividerat med tid. Formeln sträcka/tid = s/t ses som ett principiellt förhållande. Fart existerar som kvot men innebörden av kvoten är inte klar.

Grafiska beskrivningar av läge och tid är svårtolkade och ofta betonas hur föremålen ser ut i verkligheten: "de är på samma plats".

13.4.3. Tallinje. En *tallinje*, inte en linjal, läggs längs en linje-rörelse. Ett föremåls förflyttning mäts med koordinater från tallinjen. Föremålet startar vid 0 m och rör sig till positiva eller negativa koordinater. Olika start-tider för olika föremål. Mer fokus på *ändring* av läge och *ändring* av tid för varje enskilt föremål.

Beräkningar börjar bli hanterbara för personen. Ett föremål, se figur 13.4.1 som rör sig från $s_1 = -2$ (koordinat) då $t = t_1 = 0$, till $s_2 = +4$ (koordinat) då $t = t_2 = 3$ har haft en medelhastighet enligt

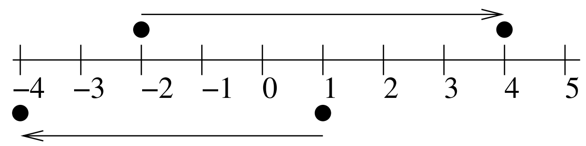
$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{(+4) - (-2)}{3 - 0} = +6/3 = +2.$$

Hastigheten är +2 m/s; föremålet har rört sig i positiv riktning. Distinktioner om att tecken anger riktning, ordningen på termer i nämnaren och täljaren ska vara lika, hastigheten i regel underförstått momentan eller över kort intervall, beroende på kontexten.

Ett föremål som rör sig från $s_1 = 1$ till $s_2 = -4$ under tiden $t_2 - t_1 = 2$ s har hastigheten

$$v = \frac{(-4) - (+1)}{2} = \frac{-4 - 1}{2} = -5/2 = -2,5.$$

D.v.s.$-2,5$ m/s. Föremålet har rört sig i negativ riktning.



FIGUR 13.4.1. Läge som koordinater på en tallinje (tillsammans med enhet).

Större förståelse för grafer. Hastighet bör också av personen kunna beskrivas med en tallinje men det är ett steg mer abstrakt eftersom tallinjen då inte är s.a.s. i det fysiska rummet.

13.4.4. Vektorer. Läge anges av en vektor. Rörelse i 2 och fler dimensioner kan hanteras. Vektormodellen uppfattas sammanfalla med Tallinjen för endimensionell rörelse. För att kunna hanteras krävs grunderna för hur vektorer används. Hastighet och acceleration är också vektorer. Viktigt för förståelse av kast och rotation. På grund av accelerationens vektor-natur finns det kontra-intuitiva saker som förstås bättre med ett vektorbegrepp; t.ex. acceleration orsakat av fartändring respektive riktningsändring.

13.5. Konstruktion av ekvationssystem

Att snabbt kunna konstruera ekvationssystem, med olika nollrum, är bekvämt. I

KAPITEL 14

APOS

Korta reflektioner kring APOS för olika delar av linjär algebra. Olika begrepp är numrerade men eftersom begrepp flätas ihop förekommer även andra begrepp i djupare nivå av numreringen, t.ex. i 1d.

(1) Ekvationssystem.
   (a) **Action** är att lösa ekvationerna enligt eventuellt en given metod. Kunna utföra metoden steg för steg. Stegen måste utföras. Detta har du lärt dig i tidigare kurser.
   (b) **Process** innebär att man kan se de olika stegen i en metod i sitt inre; en internalisering har skett. Detta behövs delvis när en strategi för att lösa ett visst ekvationssystem ska läggas upp: vilka koefficienter saknas, vilka obekanta elimineras lätt, kan jag se om ekvationer är multiplar av varandra o.s.v. I ens inre kan metoden utföras och varieras, olika möjligheter kan testas utan att utföras.
   (c) Systemet ses som ett **Objekt**. Action kan vid behov utföras på Processen; en inkapsling av Processen har skett. Objektet har lösningar av olika typ. Systemet kan analyseras utifrån linjärt oberoende kolonn-vektorer och lösningar förstås utifrån dessa. Om kolonnerna är linjärt oberoende finns alltid lösningar; om kolonnerna spänner upp ett rum måste högerledet ligga i detta rum för att lösningar ska erhållas o.s.v. Systemet ses som ett objekt med delar som kan varieras.
   (d) Begreppet **Koordination** är viktigt i konstruktionen av **Objekt** i detta fall. Koordination innebär att två olika objekt, i detta fall ekvationssystem och vektorer, kan av-kapslas (packas upp) och deras Processer Koordineras till ett nytt Objekt. Både ekvationssystemet och vektorer behövs för att skapa det sammanflätade Objektet: ekvationssystem och vektorer i en mental struktur.
   (e) **Schema.** Strukturer som har gemensamma egenskaper ordnade till ett schema, med Processer, Objekt o.s.v. Skapas genom tematisering. Kan ses som ett Objekt i sig. Vektorer i den generella betydelsen är temat. Detta finns i ekvationssystem och geometriska vektorer som vävs ihop till en helhet (det finns naturligtvis ännu större helheter, men inte i denna kurs). Subjektet kan avgöra hur Schemat kan användas i en given situation och av-kapsla (packa upp) olika processer och utföra dem.

(2) Vektorer.
   (a) Action är att rita vektorerna och kunna utföra vektoroperationer på figurerna.
   (b) Process innebär att man kan se i sitt inre hur de adderas, subtraheras och multipliceras med skalär. Även skalärprodukt och vektorprodukt. Vad kommer additionerna att ge för resultat, i vilken riktning pekar summan, är skalärprodukten positiv eller negativ, vilken riktning har

vektorprodukten o.s.v. Operationer kan utföras mentalt och resultatet kan föreställas i det inre.
   (c) Vektorer är ett objekt som följer vissa regler. ????
   (d) Koordination??
   (e) Schema??
(3) Matriser.
   (a) Att kunna utföra matrisaddition, matrismultiplikation o.s.v. Kunna beräkna inverser.
   (b) Matrisinverser o lösning av ekv system Koordination?

KAPITEL 15

Historia

15.1. Ekvationssystem

15.1.1. En teknik. Den kinesiska kulturen under perioden 100 fvt till 50 fvt kom nära matriser som ett matematiskt objekt. I texten 'Nio kapitel om den matematiska konsten' (Jiuzhang suanshu) som skrevs under Han-dynastin ges det första kända exemplet på matrismetoder. Första problemet i kapitel 8 är [Katz, 2009]:

> *There are three classes of grain, of which three bundles of the first class, two of the second, and one of the third make 39 measures. Two of the first, three of the second, and one of the third make 34 measures. And one of the first, two of the second, and three of the third make 26 measures. How many measures of grain are contained in one bundle of each class?*

Det finns tre olika klasser av säd. Tar man tre buntar av den bästa, två av den näst bästa och en av den sämsta så erhåller man 39 mått. Hur många mått kan man få av de olika klasserna av säd? Författaren ställer nu upp tal i ett mönster på ett räknebord enligt den vänstra tabellen, den högra är den nutida. Vi har tre ekvationer med tre obekanta.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

Vi skulle ha skrivit det i rad-form, författaren skriver i kolonn-form, men det spelar ingen roll för metoden.

Författaren ger nu instruktionen att först multiplicera mitten-kolonnen med 3 sedan subtrahera den högra så många gånger som 'möjligt'; d.v.s. tills du får 0 i första raden. Därefter multipliceras vänster-kolonnen med 3 och höger-kolonnen subtraheras så många gånger det är 'möjligt'. Man erhåller:

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

3	2	1	39
0	5	1	24
0	4	8	39

Förfarandet avviker lite från hur vi gör idag eftersom författaren undvek bråktal. I nästa steg så multipliceras den vänstra med 5 och mitten-kolonnen subtraheras ett antal gånger från den vänstra. De erhåller nu:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

3	2	1	39
0	5	1	24
0	0	36	99

Vi avläser resultatet för den tredje typen ($36z = 99$, $z = 11/4$) och erhåller de andra genom återsubstitution på vanligt sätt ($5y + z = 24$, $3x + 2y + z = 39$). Metoden är tydligt det vi kallar Gausselimination och blir inte en välkänd metod förrän på 1800-talet. Metoden återupptäcks flera gånger.

Tekniker för att lösa system av linjära ekvationer konstrueras av flera olika civilisationer men fram till mitten av 1700-talet var de enbart tekniker; det fanns inga direkt teoretiska undersökningar av lösningar eller lösningsmetoder.

15.1.2. Ekvationssytem, determinanter och matriser. Leibniz använde determinanter 1693 (Thomas Muir. *The Theory of Determinants in the historical order of development.* Dover 1960). För att beskriva ekvationerna

$$a + bx + cy = 0,\ d + ex + fy = 0,\ g + hx + ky = 0$$

skriver Leibniz

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 \end{aligned}$$

10 står för a, 11 står för b o.s.v. Han anger kravet för att systemet ska ha en lösning, vilket pekar på hur determinanter uttrycks. Leibniz experimenterar mycket med olika val av beteckningar. Maclaurin bevisar Cramers regel för 2×2, 3×3 och antyder hur 4×4 fallet skulle se ut. Senare, 1750, ger Cramer den allmänna regeln för beräkning av determinanter.

Fram till cirka 1750 antogs allmänt i matematiken att varje system av n linjära ekvationer med n obekanta hade en unik lösning. Leonhard Euler för i *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine 2 des Ligna Courbes*, 1750, (On an apparent contradiction in the doctrine of curved lines) ett resonemang kring antal ekvationer och möjligheten att bestämma de obekanta; här i engelsk översättning av Winifred Marshall:

> First of all, to begin with the simplest of cases, I say that it may occur that two equations are insufficient to determine the values of two unknowns, even though both appear in each of these two equations, and yet determine only a single dimension. For one need only to consider the two equations $3x - 2y = 5$ and $4y = 6x - 10$ and one will see at first, that it is not possible to determine here the two unknowns x and y : for in eliminating the variable x, the other variable disappears, and one obtains the equation of an identity, from which one can determine nothing. The reason for this occurrence now becomes clear, since the second equation can be written as $6x - 4y = 10$, which being nothing other than the first, $3x - 2y = 5$ doubled, does not differ from it. This is why, when one says that in order to determine two unknown quantities, it is enough to have two equations, it is necessary to add this restriction to this proposition: that these two equations are different from one another, or that the one is not already present in the other and it is only with this restriction, that the aforementioned proposition is admissible.

Här inser Euler att det måste införas restriktioner kring påståendet att n ekvationer med n obekanta har en unik lösning; dock säger Euler inte att ekvationer är linjärt beroende.

Uppgifterna om notationer i det följande är hämtade från Florian Cajoris *A History of Mathematical Notations vol. 2* (archive.org). Ungefär samtidigt som Euler publicerade Gabriel Cramer (1750) en studie, *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques,* där han introducerar en notation för att skriva ett system av linjära ekvationer med ospecificerade koefficienter:

$$\begin{array}{ccl} A^1 & = & Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + ... \\ A^2 & = & Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + ... \\ A^3 & = & Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + ... \\ ... & & ... \end{array}$$

där A^1, A^2,... är de kända värdena i likheten. Z^1, Z^2,... är koefficienterna för den obekanta z, i första, andra ekvationen o.s.v. Han introducerar också en regel för att uttrycka lösningarna till ett kvadratiskt ekvationssystem som funktion av koefficienterna: här används vad som senare kallas determinant. Han skriver lösningarna för ett kvadratiskt system, z och y, som

$$z = \frac{A^1 Y^2 - A^2 Y^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}.$$

Användningen av determinant-begreppet sprider sig och matematiken fokuserar på tekniken kring beräkningen av determinanter och inte så mycket på det mer kvalitativa sättet som Euler representerade. Under nästan 100 år arbetade matematikerna inte med problemen kring obestämda och inkonsistenta system, vilket är de områden som leder till förståelse för linjärt beroende och oberoende. Först ungefär vid mitten av 1800-talet tar begreppet rang form, inifrån teorin om determinanter, inte matriser.

Termen determinant användes för första gången av Gauss i *Disquisitiones arithmeticae* 1801 i en diskussion om kvadratiska former. En kvadratisk form i två variabler skrivs $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Gauss beskriver också matrismultiplikation och ser det som en sammansättning. Gauss-elimination använder han när han skapat ett system med 6 ekvationer och 6 obekanta för att bestämma asteroiden Pallas bana. Han ger en systematisk beskrivning av metoden. Den första förekomsten av Gauss-Jordan metoden är i en handbok i geodesi skriven av Wilhelm Jordan 1888.

Augustin-Louis Cauchy använder termen determinant i sin moderna betydelse; han använde även under-determinant (minor) och adjungerad (adjoint). För kvadratiska former använde Cauchy 1826 termen "tableau" för koefficient matrisen. Han bestämde egenvärden och presenterade resultat om diagonalisering av matriser. Han bevisade också att varje reell symmetrisk matris är diagonaliserbar.

Jacques Sturm använde egenvärden vid lösningen av system av ordinära differentialekvationer. Men begreppet egenvärde hade också dykt upp tidigare när Jean le Rond D'Alembert studerade rörelsen hos en sträng med massor vid olika punkter (1747). Vare sig Sturm eller D'Alembert generaliserade sina resultat utan de användes endast i sin kontext.

Den notation som används nu för determinanter framförs av Arthur Cayley (1821-1895) år 1841. Han skriver ”Let the symbols

$$|\alpha|\,,\; \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix},\; \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

denote the quantities α, $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, $\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma$, etc. Observera kommatecknen mellan de grekiska bokstäverna i determinanterna. Lite olika varianter av streck, dubbelstreck och [] samt {} används. Standardformen i ISO är ett enkelt streck på varje sida för determinanten.

Eisenstein använde en enkel bokstav, A, för att beteckna en linjär avbildning och visade räkneregler. Den förste som använde termen ”matrix” var Sylvester år 1850. Sylvester och Cayley möttes i England 1851 och arbetade med matriser. Cayley publicerade en mindre artikel där det för första gången finns en invers av en matris. Cayley publicerar 1858 sin *Memoir on the theory of matrices* som innehåller den första abstrakta definitionen av en matris. Han presenterar en algebra med addition, multiplikation, skalär produkt och invers. Cayley studerade sammansättningen av linjära avbildningar och detta ledde honom till regler för hur matrismultiplikation skulle utföras.

Teorin om determinanter fick en fast form 1903 då både Karl Weierstrass och Leopold Kronecker hade publicerat sina föreläsningar i ämnet. Matriserna tog lite längre tid. En viktig tidig text var *Introduction to higher algebra* av Maxime Bôcher 1907. Leon (Leonid) Mirskys *An introduction to linear algebra* 1955 gav matriser deras plats i grundläggande universitets utbildning.

Att identifiera kolonn-matriser med vektorer introducerades av fysiker under 1900-talet. Intresset för matriser tog ny fart efter andra världskriget i och med utvecklingen av digitala datorer. I och med internet har begrepp som trafik-matriser (traffic matrix) och Page-ranking fått stor betydelse. Page-ranking är en matris som visar rankning av nätsidor (efter Larry Page, en av Googles grundare).

15.2. Vektoranalysens allmänna historia

Den vektoranalys som förekommer på universitet är en sammansmältning av flera olika områden i matematiken. I huvudsak är det en sammansmältning av komplexa tal, vektorer, ekvationssystem, matriser, determinanter. Utvidgningen av komplexa tal till kvaternioner är också i högsta grad av betydelse. Närliggande områden som Geometrisk algebra har sett en renässans på senare år, bl.a. David Hestenes har drivit detta. Geometrisk algebra utvidgar begreppet ’riktade sträckor’ till ’riktade ytor’ osv.

Från Michael J. Crowe *A History of Vector Analysis.*

Crowe anser att vektoranalysens historia börjar cirka 1831 men att det finns 3 viktiga steg tagna tidigare: upptäckten av och den geometriska representationen av komplexa tal; Leibniz försök att skapa en geometri för läge; parallellogram-lagen för addition av krafter och hastigheter.

Jerome Cardan använder $\sqrt{-15}$ i sin bok *Ars Magna* år 1545. Problemet som diskuteras är att dela upp 10 i två delar, t.ex. 6 och 4, och sedan ska produkten av delarna vara t.ex. 40. Naturligtvis är detta omöjligt. Men Cardan fortsätter och kommer fram till att om man delar 10 i $5 + \sqrt{-15}$ och $5 - \sqrt{-15}$ så är summan 10. Produkten är

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 25 - (-15) = 40.$$

Denna konstruktion accepteras inte automatiskt.

Leibniz uttrycker idéer om ett nytt matematikområde (1679): "I am still not satisfied with algebra... I believe that, so far as geometry is concerned, we need still another analysis which is distinctly geometrical or linear and which will express situation directly as algebra expresses magnitude directly." Han fortsätter "I believe that by this metod one could treat mechanics almost like geometry..." Algebra uttrycker geometri men bara storlek och egentligen inte läge eller rörelse (vilka behandlas som vektorer idag):

> Algebra, in fact, is only one branch of the characteristic: it is the characteristic of magnitudes or indeterminate numbers; it does not express "situation, angles, or *movement* directly."
> I Couturat [1901] om Leibniz.

I Principia Mathematica (1687) använder Isaac Newton idén om att krafter som verkar enligt sidorna i en parallellogram kan ersättas av endast en kraft som verkar längs parallellogrammens diagonal. Detta är vektoradditionens princip.

Caspar Wessel publicerar, 1799, en artikel som använder en geometrisk representation av komplexa tal. Han uttrycker att hans mål är att undersöka "how we may represent *direction* analytically." Han försöker också finna en motsvarighet i 3 dimensioner, vilket han inte lyckas med. Artikeln blir inte välkänd förrän 100 år senare och då har andra publicerat samma idé. Även Gauss arbetar med samma inriktning 1799 och publicerar det 1831. Gauss prestige gör förmodligen att idén nu sprids.

William Rowan Hamilton (1805-1865) publicerar 1837 en artikel om komplexa tal som ett ordnat par av tal. Han skriver redan nu om en teori om tripletter, d.v.s. en tredimensionell variant på komplexa tal. Det verkar som om han arbetat med detta sedan 1830. År 1843 upptäcker han kvaternionerna, tripletterna. Under de 22 återstående åren av sitt liv skriver han över 100 artiklar om kvaternioner, samt 2 böcker.

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) blir klar med sitt verk *Theorie der Ebbe und Flut* på mer än 200 sidor år 1840. Detta verk innehåller ett system för rumslig analys baserat på vektorer och ligger ganska nära ett nutida system. Grassmann daterar själv uppkomsten av dessa idéer till 1832 och till tankar om att addera och subtrahera riktade sträckor (ty. strecken). Faktum är att han även spårar sin idé om geometrisk produkt till sin far, en matematiklärare vid Stettins Gymnasium(tyska), Justus Günther Grassmann. Fadern skrev om geometrisk produkt i två böcker *Raumlehre* och *Trigonometrie* som publicerades 1824 respektive 1835. Justus Grassmann skriver "The rectangle itself is the true geometrical product, and the construction of it...is really geometrical multiplication."

Grassmans eget arbete var inte knutet till den geometriska representationen av komplexa tal vilka han inte var medveten om förrän i december 1844. Grassmann publicerar sitt stora verk *Die lineale Ausdehnungslehre...* 1844 som är en fullständig genomgång av hans system. Verket har en lång titel men kallas i regel för Linear Extension Theory. Det röner ingen större uppmärksamhet. Verket var mycket abstrakt, mycket originellt och innehöll även filosofiska diskussioner. År 1862 publicerar Grassmann sitt system i ny form. Men inte heller denna gång uppskattas hans system. Grassmann dör 1877; han är skollärare hela sitt liv och får ingen akademisk position. Dock ökar intresset för hans arbete sakta under 1870-talet.

Under perioden fram till ca 1860-70 skapas två system: Hamiltons kvaternioner och Grassmanns system. Åren 1865-70-80 ses som period 2 då Hamilton och Grassmann

152. Erklärung. Normal zu einander heissen zwei von null verschiedene Grössen, deren inneres Produkt null ist.

152. Two nonzero vectors are normal to one another if their inner product is zero.

153. Erklärung. Normalsystem n-ter Stufe heisst ein Verein von n numerisch gleichen (von null verschiedenen) Grössen erster Stufe, von denen jede zu jeder normal ist;

153. A normal system of degree n is a collection of n mutually normal (nonzero) vectors of the same length.

154. Erklärung. Circuläre Aenderung nenne ich jede Transformation eines Vereins, durch welche 2 Grössen a und b des Vereins fich beziehlich in xa + yb und in ∓(xb — ya) verwandeln, vorausgefetzt, dass $x^2 + y^2 = 1$ fei. Ich nenne die circuläre Aenderung eine pofitive oder negative, je nachdem a und b fich in xa + yb und + (xb — ya), oder in xa + yb und — (xb — ya) verwandeln. Wenn hierbei x = cos. α und y = fin. α ist, und a und b numerisch gleich und zu einander normal find, fo fage ich, der Verein habe fich von a nach b hin um den Winkel α geändert.

154. A circular change of a collection of vectors is a transformation where two vectors, a and b, are respectively replaced by $xa+yb$ and $\pm(ya\text{-}xb)$, with $x^2+y^2=1$.

Anm. Stellt man fich unter a und b zwei gleichlange und zu einander fenkrechte Strecken vor, fo fieht man leicht, dass durch die circuläre Aenderung, durch welche a in $a_1 = a\cos.\alpha + b\,\text{fin}.\alpha$, b in $b_1 = b\cos.\alpha - a\,\text{fin}.\alpha$ übergeht, a_1 und b_1 von derfelben Länge find wie a und b und gegen einander fenkrecht bleiben. Es bleiben

$$[a_1,\, b_1] = [a,\, b]\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

FIGUR 15.2.1. Från Grassmann 1862. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form begründet.* www.archive.org
Engelsk översättning av Liesen https://archive.siam.org/meetings/la09/talks/liesen.pdf

inte längre är huvudpersoner i utvecklingen. Från 1840 till 1900 publicerades det 594 artiklar om kvaternioner och 217 artiklar i Grassmanns anda.

Vi ger oss in i period 2. Peter Guthrie Tait (1831-1901) inledde en intensiv korrespondens med Hamilton och publicerade 1859 den första av sina 70 artiklar om kvaternioner. Han skrev också en grundläggande redogörelse för systemet som publicerades 1866 och som gavs ut i 3 upplagor. Tait fokuserade sina texter kring användningen av kvaternioner i fysik. Han behandlade bland annat nabla operatorn $\overline{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ (behandlas i flervariabelanalys). Tait delade också upp produkten av två kvaternioner i en skalär-del (skalärprodukt) och en vektor-del (vektorprodukt). Hans texter ser moderna ut just i detta avseende. Tait korresponderade både med William Thomson (Lord Kelvin) och James Clerk Maxwell, som var barndomsvän till Tait, om kvaternioner men lyckades inte övertyga Thomson men delvis Maxwell.

År 1873 publicerar James Clerk Maxwell (1831-1879) sin legendariska *Treatise on Electricity and Magnetism.* I Treatise använder Maxwell delvis kvaternioner. Maxwell ser kvaternioner som ett steg framåt men betonar själva idéerna bakom, inte symbolerna.

William Kingdon Clifford (1845-1879) publicerar 1878 en grundläggande bok i mekanik, *Elements of Dynamic.* Clifford behärskade både kvaternioner och Grassmanns system. I hans bok syns det som blir allt allmännare, att dela upp en produkt av kvaternioner i en skalär produkt och en vektor produkt. Denna tendens fanns även hos Tait och Maxwell.

Vi kommer nu till den 3:e perioden där den nutida varianten växer fram genom speciellt Josiah Willard Gibbs och Oliver Heaviside.

Josiah Willard Gibbs (1839-1903) ger 1884 ut första delen av sin *Elements of Vector Analysis : Arranged for the Use of Students in Physics* vilken innehåller i princip det moderna systemet. I ett brev från Gibbs till Victor Schlegel 1888 framgår hans tankegångar. Från sin läsning av Maxwells Treatise konstaterar han

> "where Quaternion notations are considerably used, I became convinced that to master those subjects, it was necessary for me to

> commence by mastering those methods. At the same time I saw, that although the methods were called quaternionic, the idea of the quaternion was quite foreign to the subject. I saw that there were two important functions (or products) called the vector part & the scalar part of the product, but that the union of the two to form what was called the (whole) product did not advance the theory as an instrument of geom. investigation."

Gibbs började om kan man säga och skapade en vektoranalys som innehöll två produkter och andra egenskaper som vi nu ser i den moderna vektoranalysen. Gibbs läser så småningom även Grassmanns verk och inser att det är nästan exakt samma sak men att Grassmanns idé inte var spridd och att han själv inte påverkats av den. Däremot verkar det som om Gibbs lärt mycket från Taits *Treatise on Quaternions* och flyttat över till sitt vektorspråk. Han publicerar även den andra delen, 1884, där han introducerar mer avancerade begrepp som dyad. 1901 ges en bok ut av Edwin Bidwell Wilson, en av Gibbs studenter, som blir en klassiker på området och befäster den moderna vektoranalysens form.

Oliver Heaviside (1850-1925) använder vektormetoder i sina texter om elektricitiet. År 1885 ger han en enhetlig presentation av sitt system vilket väsentligen är identiskt med Gibbs och det moderna systemet. Vad vi vet så utarbetade han systemet själv från Hamilton och Tait. År 1888 läser han för första gången en av Gibbs texter och ser att det i allt väsentligt är samma system. Heavisides användning av vektoranalysen i sina böcker om elektricitet hjälpte att sprida systemet.

Giuseppe Peano (1858-1932) påverkades mycket av Grassmanns tankar. Han skrev ett verk, 1888, om Grassmanns system. Verket innehåller den första axiomatiska definitionen av ett vektorrum. Denna axiomatiska framställning blir dock inte känd. Först när Herman Weyl använder det i samband med relativitetsteorin, 1918, sprids kunskapen. Weyl hänvisar också till Grassmanns epokgörande insats.

Under åren 1890-1894 pågick en intensiv och infekterad kamp om vektormetoder. Det bildas också grupper från ca 1895 fram till 1908 som försöker skapa reda i själva systemen och beteckningarna. De 3 systemen betecknas ofta som: Hamilton, Grassmann och Gibbs-Heaviside. I princip så har Gibbs-Heaviside systemet segrat cirka 1910, med betoning på Heaviside. I slutet av 1920 är fältet enhetligt.

15.3. Några vektor notationer

Informationen hämtad från Florian Cajori *A history of mathematical notations vol 1 och 2.*

Jean Robert Argand (1768-1822) använde $\overline{AB}$ för en riktad sträcka eller vektor år 1806 och många tog upp denna beteckning. En annan vanlig variant för vektorer var gemena grekiska bokstäver α, β... Även beteckningen $\overrightarrow{A}$ förekom, med A för längden. År 1896 använde Woldemar Voigt (1850-1919) $\overline{a}$ för polarvektorer. En del författare använde fetstil, vilket också fortfarande är vanligt i tryckt material. H. G. Grassman använde $p = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ och W. R. Hamilton (1850) använde $\rho = ix + jy + kz$ för att beteckna en vektor till en punkt med koordinaterna x, y, z. e_1 etc. var enhetslängder längs med koordinat axlarna och i etc. var enhetsvektorer vinkelräta mot varandra: $i \times j = k = -j \times i$. För likhet mellan vektorer användes en mängd olika tecken bland annat $\neq$ (likhetstecken med ett lodrät streck över)

Historiskt så är komplexa tal och kvaternioner utvecklade tillsammans med vektorer och beteckningssystemen är sammanflätade. T.ex. skrev Hamilton endast *en* produkt av två vektorer, en kvaternion, som delades upp i en skalär del och en vektor del. Grassman hade däremot en 'inre produkt' eller skalär produkt och 'yttre produkt' eller vektorprodukt. Grassman skrev skalärprodukten som $a \times b$ (vektorprodukt med nutida beteckningar) 1862 och $[u \mid v]$ 16 år senare. För vektorprodukt använde han $[uv]$. Gibbs skrev skalärprodukten $u.v$ och kallade den 'dot product' (1902). Beteckningsystemen varierade mycket och det gjordes 3 försök att få ordning på systemet: 1895, 1903, 1908. I dag ges en del nomenklatur av ISO 80000-2.

KAPITEL 16

Övergripande uppgifter

PROBLEM 16.1. Vad är en matris?

- Matriser kan ses som ett talschema för att lösa ekvationssystem.
- Matriser kan ses som ett matematiskt objekt rent abstrakt som man kan utforska givet vissa grundläggande regler.
- Matriser kan ses som en uppradning av vektorer skrivna i kolonner.
- Matriser kan ses som transformationer som flyttar geometriska objekt.
- Matriser kan ses som ett objekt som flyttar runt rader och kolonner i en annan matris.

Försök ta ett samlat begrepp på dessa olika perspektiv på matriser. Hur hänger de ihop? Kan du skifta mellan de olika sätten att tänka om matriser?

PROBLEM 16.2. Vissa böcker representerar punkter med (x, y). Sedan väljer de att representera vektorer som $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ inte (x, y). Nackdelar och fördelar med detta? Ofta skrivs en punkt som $P : (x, y)$ och en vektor som $P = (x, y)$. Geogebra har valt versaler för punkter och gemener för vektorer (med likhetstecken i båda fallen): kommentar? I Geogebra kan en matris multipliceras med en punkt: kommentar.

PROBLEM 16.3. Vektorer definieras utan koordinatsystem. Vilka påståenden, satser, formler gäller för vektorer såsom de definieras, såsom de beskrivs med koordinatsystem, såsom de beskrivs i rätvinkliga koordinatsystem.

PROBLEM 16.4. Ge exempel på ekvationssystem som ger de 8 olika lösningarna i figur **??**. Konstruera dem metodiskt och ange hur du tänker.

PROBLEM 16.5. I magiska matriser så är summorna för de olika raderna lika, summorna för kolonnerna är också lika även diagonalsumman. Mängden av 3×3 magiska matriser är ett vektorrum. Basen kan väljas som

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

är alla magiska matriser och kan dessutom sägas utgöra en bas. Visa att de är linjärt oberoende.

Litteraturförteckning

T Appova, A & Berezovski. Students' misconceptions about vectors and vector operations. In *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, volume 2, pages 2–8, 2013.

Pablo Barniol and Genaro Zavala. Students' difficulties in problems that involve unit-vector notation. *Latin American Journal of Physics Education*, 8(4), 2014.

Louis Couturat. *La Logique de Leibniz*. 1901. I Ã¶versÃ€ttning av Donald Rutherford och R. Timothy Monroe 2012.

Victor J. Katz. *A History of Mathematics: An introduction*. Addison Wesley, 2009.