Linjär algebra

Ämnesdidaktisk övning 1.1

Innehåll

Kursen innehåller två delar. Den första delen innehåller den centrala delen av matematiken och benämns ”Centralt”. Den andra delen innehåller olika tillämpningar och utvidgningar.

Övningar i den löpande texten i del 1 är övningar direkt på det som behandlas. De är avsedda att utföras när texten läses; böcker i matematik är böcker man arbetar sig igenom. Problem i slutet på varje kapitel är tänkta att göras efter att hela kapitlet är läst.

I del 2...

Del 1

Centralt

Inledning

Kort om vad som behandlas i de olika kapitlena:

1: Lösning av linjära ekvationssystem. Successiv eliminiation av obekanta. De 3 olika lösningskategorierna. Du förutsätt vara bekant med det mesta av innehållet i detta kapitel.

2: Geometriska vektorer, som du också förutsätts vara bekant med. Kopplingen mellan linjära ekvationssystem och geometriska vektorer introduceras. Begreppen linjärt beroende och oberoende samt bas behandlas. Vektorer som modell för verkligheten diskuteras.

3: Vektorers användning för studiet av geometri exemplifieras.

KAPITEL 1

Linjära ekvationssystem

Kapitlet behandlar:

- *Linjärkombination.*
- *Linjära ekvationssystem.*
- *Lösning genom successiv elimination av obekanta.*
- *Lösningskategorier.*
- *Geometrisk tolkning av lösningar.*

Det förutsätts att du har erfarenhet av att lösa ekvationssystem.

1.1. Inledning

Repetition av hur ekvationssystem löses.

1.1.1. Definitioner. Vi inleder med två definitioner eftersom vi ska studera *linjär* algebra.

DEFINITION 1.1. Linjär avbildning. En *avbildning* (eng. map) eller *funktion* L, sägs vara *linjär* om följande likheter är uppfyllda $L(kx) = kL(x)$ och $L(x+y) = L(x) + L(y)$. k är en konstant, x och y är variabler.

Funktion och avbildning behandlas som synonymer i denna text. Funktionen $f(x) = 3x$ är linjär ty vänster led i definitionen är $f(kx) = 3(kx) = 3kx$ och höger led i definitionen är $kf(x) = k(3x) = 3kx$. Vänster led och höger led är lika, således linjär. På liknande sätt med den andra delen av definitionen $f(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y$ och för höger led $f(x) + f(y) = 3x + 3y$.

Funktioner av typen $f(x) = ax+b$, då $b \neq 0$, är inte linjära (a och b är konstanter). Exempelvis gäller för $f(x) = 4x+2$; att vänster led är $f(kx) = 4(kx)+2 = 4kx+2$, och höger led är $kf(x) = k\,(4x+2) = 4kx+2k$. Höger led och vänster led är ej lika, det är inte en linjär funktion eller avbildning. Avbildningar på formen $f(x) = ax+b$ kallas för affina. Linjära funktioner är en delmängd av de affina, $b = 0$. En rät linje i ett koordinatsystem som inte passerar origo, $(0, 0)$, är affin, en rät linje genom origo är linjär (och affin).

Funktionen $f(x) = e^x$ är inte linjär ty $e^{kx} \neq ke^x$. Funktionen $g(x) = \sin(x)$ är inte linjär ty $g(kx) = \sin(kx) \neq k \sin(x)$.

De två kraven kan sättas samman till $L(k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n) = k_1L(x_1) + k_2L(x_2) + ... + k_nL(x_n)$.

Med ord kan det första kravet, $L(kx) = kL(x)$, i definitionen formuleras som att det blir samma resultat oavsett om du multiplicerar med skalären k före eller efter den linjära avbildningen. Det andra kravet, $L(x+y) = L(x) + L(y)$, innebär att resultatet blir samma oavsett om du gör additionen före eller efter avbildningen. Om exempelvis $f(x) = 3x$ så gäller att

$$f(2x + 4x) = f(2x) + f(4x) = 2f(x) + 4f(x) = 2 \cdot 3x + 4 \cdot 3x = 6x + 12x = 18x$$

vilket är samma som $f(2x + 4x) = f(6x) = 6f(x) = 6 \cdot 3x = 18x$. Eller att

$$f(2x + 4y) = 2f(x) + 4f(y) = 2 \cdot 3x + 4 \cdot 3y = 6x + 12y.$$

Definition 1.2. Linjär ekvation. En linjär *ekvation,* med två obekanta, är en algebraisk ekvation på formen $ax + by = c$. x och y är obekanta; a och b är givna reella tal.

Observera skillnaden i definitionerna av begreppen linjär funktion och linjär ekvation. Vi säger att ekvationer är linjära om var och en av termerna är linjär. Om flera ekvationer ska lösas samtidigt sägs de utgöra ett ekvationssystem. Att ekvationer ska lösas samtidigt innebär att lösningen ska vara en lösning till alla ekvationer i systemet. Linjäritet hos ett ekvationssystem innebär att alla de ingående ekvationerna var och en är linjära.

Ekvationen

$$x + 2y = 6 \tag{1.1.1}$$

är linjär. Däremot är inte $2x^2 + 3y = 0$ en linjär ekvation ty x har exponenten 2, ej 1. Ej heller är $x^{0,5}y^{0,5} - 2 = 0$ eller $xy - 2 = 0$ linjära ekvationer eftersom x och y förekommer som produkt. Definitionen innebär krav på enbart de obekanta, t.ex. är

$$\frac{2}{3}x - \pi^2 y = \sqrt{e}$$

en linjär ekvation.

Ekvationen $x + 2y = 0$ sägs vara homogen ty termen utan obekant är 0, medan 1.1.1 är inhomogen ty termen utan obekant är skild från 0.

Ekvationen 1.1.1 sägs ha en lösning om det finns tal x och y så att likheten är sann. Uttrycket $x + 2y = 6$ kan i sig själv inte tilldelas ett sanningsvärde. Till exempel är paret $x = 1$ och $y = 2,5$ en lösning (likheten är sann ty det står 6 i båda leden). Ekvationen 1.1.1 har oändligt många lösningar i mängden av reella tal.

Anmärkning 1.1. Språkbruket kring linjär avbildning och linjär funktion är varierande. Det förekommer att man skiljer på funktioner respektive avbildningar. Det förekommer att funktionen $f(x) = ax + b$ ses som linjär men det är då inte en linjär avbildning. En ”rät linje” måste inte vara linjär.

1.1 Övning 1.1. Är ekvationssystemet linjärt?

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcrcl} (x & - & y)^2 & = & 2 \\ x & - & 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{rcl} x/y & = & 2 \\ y & = & 3 \end{array} \right.$$

1.1.2. Lösningsprocedur. Vi börjar fördjupa oss i proceduren för att lösa ekvationssystem. Även om det är en procedur som kanske kan uppfattas som mekanisk så finns det mycket bakom den för att förstå varför den fungerar.

Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - 4x_2 = -4 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

och låt oss studera lösningsmetoden i detalj. Systemet kan lösas genom att använda två grundläggande principer, den första är: lösningarna förändras inte om samma tal adderas på båda sidor i en ekvation.

Ekvationen

$$(A):\ x_1 - 4x_2 + C = -4 + C$$

(där C är ett reellt tal) har samma lösningar som (2); uttrycken är ekvivalenta. Det är viktigt att i varje steg enbart utföra operationer som inte förändrar lösningarna. Vi kan låta C i vänster led, VL, i (A) vara VL i (1) (dvs. $C = x_1 + x_2$); och C i HL måste då vara samma tal, men vi utnyttjar det faktum att VL=HL i (1) och låter C i HL i (A) vara HL i (1), vilket är 6, se 1.1.3.

$$\begin{array}{c} (1) \\ \\ (A) \end{array} \begin{cases} \qquad \underbrace{x_1 + x_2} = \underbrace{\ 6\ } \\ \qquad\quad \searrow \qquad\quad \searrow \\ x_1 - 4x_2 + C = -\,4 + C \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Den andra principen är att en ekvation som multipliceras med ett tal, skilt från 0, förändrar inte sina lösningar: $-x_1 - x_2 = -6$ har samma lösningar som (1), vi har multiplicerat med -1.

Idén är att multiplicera och addera ekvationer, enligt de två principerna, så att antalet obekanta i en ekvation minskar. Om antalet obekanta reduceras till endast en i en av ekvationerna så är den löst; om vi bestämt en av de två obekanta kan därefter, eventuellt, andra obekanta bestämmas. Utifrån de diskuterade två principerna kan vi i 1.1.2 utföra $-(1) + (2)$ ledvis och kalla den nya ekvationen för $(2')$:

$$(-x_1 - x_2) + x_1 - 4x_2 = -6 - 4 \quad (2')\,,$$

vilket är ekvivalent med

$$-5x_2 = -10\,,$$

som löses på känt sätt

$$x_2 = 2\,.$$

Och med känt x_2 kan x_1 erhållas ur ekvation (1): $x_1 + x_2 = 6$, vilket innebär $x_1 = 4$. Systemets lösning är $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

Uttrycket $-\,(1) + (2)$ innebär att ekvation 1 eller rad 1 multipliceras med -1 och detta resultat adderas till (2), vilket är ekvation 2 eller rad 2. Vi har nu en ny (2) medan (1) är oförändrad. Det är den sist angivna ekvationen eller raden i uttrycket $-\,(1) + (2)$ som förändras.

Anmärkning 1.2. Två *linjära* ekvationssystem som har samma lösning är ekvivalenta.

Anmärkning 1.3. Ekvationen $x_2 = 2$ sägs ange en lösning ty vänsterledet är x_2 och högerledet 2 och denna likhet är sann om x_2 är just talet 2. Likheten är då $2 = 2$ vilket är sant.

1.2 Övning 1.2. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 5y = 13 \\ -x + 2y = -4,6 \end{cases}.$$

Exempel 1.1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + 4y = 10 \end{cases}.$$

Om vi följer proceduren enligt tidigare så kan vi exempelvis multiplicera översta raden (ekvationen) med -4 och addera till nedersta raden. Resultatet är

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 0x + 0y = -6 \end{cases},$$

vilket innebär att systemet saknar lösning; likheten i nedersta uttrycket, $0 = -6$, är falskt oavsett värdena på de obekanta x och y. Det kan också uttryckas som att det finns inga tal x och y som om de multipliceras med noll och adderas är -6. Det finns lösningar till översta ekvationen men inte bara den ska lösas utan hela systemet ska lösas; *systemet* saknar lösningar om minst en ekvation saknar lösningar.

1.3 Övning 1.3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + 4y = 11 \end{cases}.$$

Anmärkning 1.4. Exempel-problem par. Texten räknar ett exempel, du räknar ett nästan exakt likadant omedelbart efter. Att lösa ett problem omedelbart efter ett exempel och fortsätta så kallas alternerande uppgifter. Att först se en mängd exempel och sedan räkna en mängd exempel kallas för ge uppgifter i block. Alternerande ger större inlärning än block för en novis. Om du dessutom ägnar dig åt att förklara för dig själv i varje steg vad du gör, så är det ännu bättre. Metakognition hjälper dig skapa schema för dina kunskaper.

Exempel 1.2. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 16x - 8y = 8 \end{cases}.$$

Vi ser att den ena ekvationen är en multipel av den andra. De två ekvationerna är ekvivalenta så vi har bara en unik ekvation. Av anledningar som framgår senare väljer vi att ändra beteckningar så att en av de två obekanta betecknas med en parameter $t \in \mathbb{R}$; vi sätter $x = t$, vilket ger att

$$4t - 2y = 2$$

som är ekvivalent med $y = 2t - 1$. Lösningarna ges av $x = t$ och $y = 2t - 1$. Vi väljer ett värde på t och beräknar det x och det y som tillsammans är *en* lösning, av oändligt många. Parametern t *genererar* lösningarna. Det går också att välja $y = t$ vilket ger $4x - 2t = 2$ eller omskrivet $x = 1/2t + 1/2$. Det går också bra att välja $x = 2t$ o.s.v. Om inte parametern t införs kan lösningarna t.ex. anges som den oändliga mängden av talpar $(x,\, 2x - 1)$ där x är ett reellt tal.

ANMÄRKNING 1.5. Parameter. Genom att införa $x = t$ ser vi x som ett tal som beräknas utifrån ett värde på t, och y också som ett tal som beräknas utifrån samma värde på t. Ett värde på t genererar samhörande värden på x och y. Innebörden av parameter varierar dock i matematiken. I andra sammanhang betyder parameter något mellan en konstant och en variabel. Den ska variera på ett långsammare sätt än en variabel och ändå inte vara helt fix. I funktions uttryck som $y = (x-a)^2$ kan vi betrakta a som en parameter. När vi ändrar a flyttas andragradskurvan längs x-axeln. a tillåts variera men x är fortfarande variabeln.

ÖVNING 1.4. Lös ekvationssystemet 1.4

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}.$$

Vi sammanfattar med ett teorem.

TEOREM 1.1. *Lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem ändras inte om:*

(1) *ordningen mellan ekvationer (numrering) eller obekanta (namnbyte) kastas om;*
(2) *en ekvation multipliceras med en konstant skild från noll;*
(3) *en multipel av en ekvation adderas till en annan.*

En multipel behöver inte vara heltal. Dessa operationer kan utföras hur många gånger som helst i ett ekvationssystem utan att lösningsmängden förändras.

Teoremet lämnas utan bevis.

1.2. Linjärkombination

Begreppet linjärkombination definieras och vi studerar vad som händer med lösningarna då linjärkombinationer av ekvationer skapas. Vi fortsätter fördjupningen av vår förståelse av proceduren för att lösa ekvationssystem.

En linjärkombination innebär att man två matematiska objekt adderas, de kan multipliceras med var sin konstant koefficient innan de adderas. Om vi har de två obekanta matematiska objekten x och y och kombinerar dem linjärt, med konstanta koefficienter, får vi $ax + by$ med $a, b \in \mathbb{R}$. Vi kan också skapa en linjärkombination av två ekvationer exempelvis $3x + 2y = 3$ och $-x + y = 4$. En linjärkombination av dessa är $a\,(3x + 2y) + b\,(-x + y) = a \cdot 3 + b \cdot 4$; samma linjärkombination på båda sidor om likhetstecknet.

Vi studerar förhållandet mellan lösningar till ekvationssystem och lösningar till linjärkombinationer av ekvationerna i ett ekvationssystem. Vi studerar systemet:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + y = 4 \end{cases}.$$

Den översta ekvationen har lösningarna $x = t$, $y = -3/2t + 3/2$, den nedersta har lösningarna $x = t$, $y = t + 4$. Ekvationssystemet har lösningarna $x = -1$ och $y = 3$.

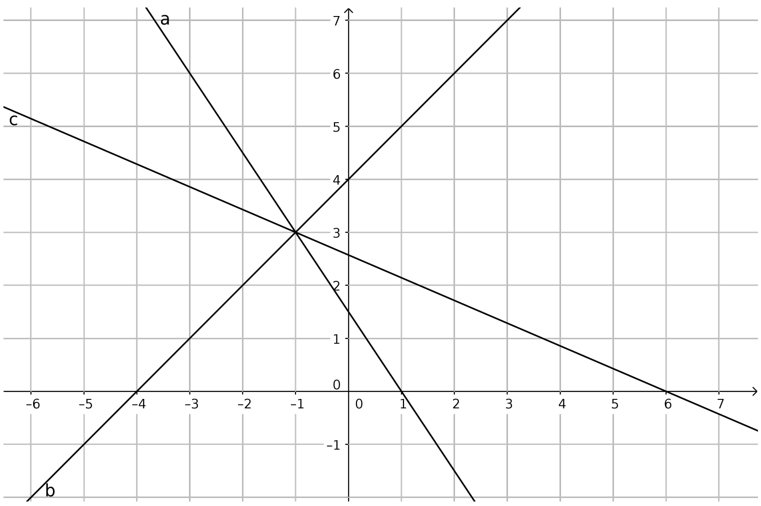
Linjärkombinationen, där vi godtyckligt valt 2 av den första ekvationen och 3 av den andra

$$\begin{aligned} 2(3x+2y)+3(-x+y) &= 2\cdot 3+3\cdot 4 \\ &\Leftrightarrow \\ 3x+7y &= 18 \end{aligned}$$

har lösningarna $x = t$, $y = -3/7t + 18/7$, vilket inte är samma som någon av de 2 linjärt kombinerade ekvationerna. Denna linjärkombination har dock också som en av sina lösningar $x = -1$ och $y = 3$; då $t = -1$; vilken var lösningen för systemet.

De 3 ekvationerna kan representeras av 3 linjer, se figur 1.2.1. Linjen markerad (a) i figuren ger lösningarna till $3x + 2y = 3$, linjen (b) ger lösningarna till $-x + y = 4$. Lösningen till ekvationssystemet ges av skärningen till dessa två linjer. Linjen (c), själva linjärkombinationen, skär de två andra linjernas skärningspunkt och innehåller således ekvationssystemets lösning. Om tidigare lösningen gavs av skärningen mellan linjerna (a) och (b), kan vi nu studera lösningen exempelvis som skärningen mellan linjerna (a) och (c). Linjärkombinationen erhålls genom att först multiplicera rad 2 med 3 och rad 1 med 2 (tillåtet) och sedan addera rad 1 till rad 2.

Genom att bilda en linjärkombination, enligt reglerna i teorem 1.1 skapar vi ekvivalenta system i den meningen att de har samma lösning.



FIGUR 1.2.1. Två ekvationer i ett ekvationssystem samt en linjärkombination.

Omvändningen gäller inte. Lösningsmängden till linjärkombinationen, som bara är 1 ekvation (och i vårt exempel har oändligt många lösningar), är inte nödvändigtvis en lösning till ekvationssystemet, men innehåller ekvationssystemets lösning.

Följande påstående ligger nära till hands. Om ekvationssystemet med ekvationerna E_1, E_2, $E_3, ..., E_n$ har lösningsmängden M så har en linjärkombination av dem $E = a_1E_1 + a_2E_2 + ... + a_nE_n$ också lösningsmängden M (och kan ha fler lösningar). Detta pekar på teorem 1.1 som vi formulerat. I teoremet sägs just att man kan bilda linjärkombinationer (punkt 2 och 3) och de har också den lösning som ekvationssystemet har. I teoremet ersätter den skapade linjärkombinationen endast en av de tidigare ekvationerna och de andra behålls och därmed bibehåller systemet sin lösning och får inga fler lösningar. Observera dock att de skapade linjärkombinationerna inte behöver ha samma lösningsmängder. Se också exempel 1.3.

Vid val av en *speciell* linjärkombination, i exemplet ovan, $a = 1$ och $b = 3$ erhålls enligt tidigare $5y = 15$. Det är denna speciella linjärkombination med enbart en obekant som vi använder för att lösa systemet.

Exempel 1.3. Betrakta lösningarna till ekvationerna (var för sig) och ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + \ \ y = 4 \end{cases}.$$

Genom att i

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + \ \ y = 4 \end{cases}$$

skapa en speciell linjärkombination $3(-x + y) + (3x + 2y) = 3 \cdot 4 + 3$ erhålls en linjärkombination med bara en obekant, eller en variabel om vi ser det som en graf: $5y = 15$ eller linjen $y = 3$ som sedan ger oss linjen $x = -1$, skärningen mellan dessa två räta linjer, parallella med axlarna, anger lösningen explicit.

1.3. Successiv elimination

Exempel ges på metoden successiv elimination, även kallad Gauss-elimination. Detta är din huvudsakliga metod för att lösa linjära ekvationssystem. Du bör arbeta fram en rutin och ett eget tänkande kring hur du ska ta itu med ett ekvationssystem. Successiv elimination används som jämförelse i många sammanhang och som utgångspunkt för att förstå andra metoder.

Övning 1.5. Redogör för substitutionsmetoden för lösning av ekvationssystem. 1.5

Vi studerar ett exempel för att förstå successiv, stegvis, elimination. Namnet successiv elimination sammanfattar proceduren som innebär just successiv elimination av de obekanta genom användning av reglerna i teorem 1.1 som verktyg.

Exempel 1.4. Successiv elimination. Genom att använda teorem 1.1 löser vi ekvationssystem. Lös

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} \quad\ \ - 4x_2 - \ \ x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ \ \ x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 = 2 \end{cases}$$

där ekvationerna är numrerade med (1), (2) och (3), detta bibehålles under hela beräkningen; översta ekvationen kallas alltid (1) o.s.v. För att öka läsbarheten sätts dock inte numreringen ut och ej heller vänsterparentesen som omfattar hela systemet. Det är dock tradition att skriva den sammanhållande parentesen för att betona att lösningen ska gälla för alla ekvationerna.

Steg 1: Vilken *obekant* ska elimineras? Vi väljer att eliminera x_1.

Steg 2: *Ordningen* mellan ekvationerna. En ekvation med den obekanta som ska elimineras ska stå på första raden; vi valde att eliminera x_1. Växla därför ekvation (1) och (3);

$$\begin{matrix} - 4x_2 - \ \ x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ - 4x_2 - \ \ x_3 = 9 \end{matrix}.$$

Steg 3: Koefficienten för det element, x_1, som används för elimineringen kallas *pivotelement* och skall vara 1, i detta fall är den 1.

Steg 4a: *Påbörja* eliminering av samma obekant, x_1, i övriga ekvationer, i detta fall endast ekvation (2) eftersom x_1 saknas i (3). Ekvation (1) adderas till ekvation (2) och skrivs på rad 2: skrivs (1) + (2) (i den ordningen). Vi får

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 & & x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 & \Leftrightarrow & - x_2 + x_3 = 6 \\ - 4x_2 - x_3 = 9 & & - 4x_2 - x_3 = 9 \end{array}.$$

Steg 4b: *Fortsätt* elimineringen av x_1 i övriga ekvationer. Vi har inga x_1 i ekvation (3) som ska elimineras, så vi är klara med att använda ekvation (1).

Vi börjar om med steg 1.

Steg 1: Vilken obekant ska elimineras i nästa steg? Vi väljer att eliminera x_2.

Steg 2: Ordningen mellan ekvationerna. En ekvation med nästa obekant som ska elimineras ska stå överst bland de icke-använda ekvationerna (ekvation (2) och (3)). Den är redan på plats.

Steg 3: Justera pivotelementet till 1 genom att multiplicera med -1.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 & & x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ - x_2 + x_3 = 6 & \Leftrightarrow & x_2 - x_3 = -6 \\ - 4x_2 - x_3 = 9 & & - 4x_2 - x_3 = 9 \end{array}.$$

Steg 4a: Påbörja elimination av samma obekant, x_2, i övriga ekvationer (det finns bara ekvation (3) som den ska elimineras från). Vi utför $4(2) + (3)$.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 & & x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -6 & \Leftrightarrow & x_2 - x_3 = -6 \\ - 4x_2 - x_3 = 9 & & - 5x_3 = -15 \end{array}.$$

Steg 4b: Fortsätt elimineringen av vald obekant. Finns inga fler ekvationer. Avsluta med att justera koefficienten framför x_3 till 1.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 & & x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -6 & \Leftrightarrow & x_2 - x_3 = -6 \\ - 5x_3 = -15 & & x_3 = 3 \end{array}.$$

De obekanta är nu successivt eliminerade. Formen som det sista ekvationssystemet har kallas för trappform (eng. echelon form), vilket framträder om varje rad ses som en rektangel:

$$\begin{array}{r} \boxed{x_1 - 3x_2 - x_3 = 2} \\ \boxed{x_2 - x_3 = -6} \\ \boxed{x_3 = 3} \end{array}.$$

Vi har 1 obekant nederst, 2 obekanta i ekvationen ovanför den och 3 i översta. Återstår nu att nysta ut värdena på de obekanta. Värdet på x_3 erhålls ur (3). Värdet på x_3 sätts in i ekvation (2). Ur ekvation (2) bestäms x_2. Värdena på x_2 och x_3 sätts in i ekvation (1) och x_1 bestäms. Lösningen till ekvationssystemet är $x_3 = 3$, $x_2 = -3$, $x_1 = -4$, detta är den enda lösningen.

Anmärkning 1.6. Genomgången beskriver ganska strikt successiv elimination. Vid räkning för hand modifieras den ofta på vissa sätt för att ge mindre numeriska beräkningar. T.ex. uppfyller man inte alltid att pivot-elementet ska vara 1. Ej heller behöver den ekvation som används stå överst. För att successiv elimination ska kunna skrivas som en algoritm för en dator krävs ytterligare precisering av metoden.

Systemet kan också skrivas på så kallad reducerad trappform (eng. reduced echelon form). Det innebär att i rad 1 endast förekommer x_1, i rad 2 endast x_2 och i rad 3 endast x_3; lösningen anges därmed explicit. Vi reducerar

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -6 \\ x_3 &= 3 \end{aligned},$$

genom att utföra $3\,(2) + (1)$ så att x_2 elimineras

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 4x_3 &= -16 \\ x_2 - x_3 &= -6 \\ x_3 &= 3 \end{aligned};$$

och sist använder vi rad 3 för att eliminera x_3 i rad 1 och 2. Vi utför $(3) + (2)$ samt $4\,(3) + (1)$,

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= -4 \\ x_2 \quad &= -3 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}.$$

Algoritmen kallas för Gauss-Jordan om denna sista del utförs, så att det finns endast en obekant per rad.

Om man löser ekvationssystem ofta inses att anteckningarna för proceduren går att förenkla. Lösningsmetoden vi använt kan användas utan att de obekanta skrivs ut. Skriv talen i kolonner och rader och utför operationerna direkt på talen. Även högerledets tal skrivs in. Varje kolonn, utom den sista, svarar mot en obekant (kolonnens nummer anger vilken variabel det är), varje rad svarar mot en ekvation. Denna tal-uppställning kallar vi för en sammansatt matris (eng. augmented matrix); om högerledet utelämnas kallas uppställningen för en (koefficient) matris (eng. matrix). Vi får då följande sekvens av tal-uppställningar för exempel 1.4:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.3.1}$$

Namnet trappform (eng. echelon form) används även för matriser och framgår tydligt i den högra matrisen i 1.3.1. Den sista matrisen kan reduceras, på samma sätt som tidigare enligt Gauss-Jordan algoritmen, så att vi endast har siffran 1 på diagonalen (sista kolonnen räknas inte in) och 0 i övriga positioner utom längst till höger, då är lösningarna *explicit* angivna

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matriser på denna form sägs vara på *reducerad* trappform (eng. reduced echelon form): samma terminologi som för ekvationssystem.

Anmärkning 1.7. De engelska termerna är brukliga vid användning av datorer för att lösa ekvationssystem. Ofta läggs i engelskan till ordet 'row' för rad om trappformen uppkommit genom manipulering av rader, vilket är det vanligaste. Terminologin blir då 'row echelon form' och 'reduced row echelon form'.

Exempel 1.5. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}.$$

Vi skriver upp ekvationerna radvis med koefficienterna för de obekanta under varandra och tar även med högerledet. Sedan utför vi önskade radoperationer för att reducera systemet.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ Vi har utfört } -4(1)+(3).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ Vi har utfört } -2(1)+(2).$$

(Redan här kan vi se vart det leder) Och ett sista steg,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Vi har utfört } -3(2)+(3).$$

Slutligen på trappform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

observera att endast två rader har en inledande 1:a (från vänster till höger).

Lösningarna ges av (matrisen med inskrivna obekanta)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases},$$

där vi i den nedersta raden har $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ vilket betyder att vilka värden som helst på de obekanta uppfyller ekvationen. Låt oss skriva $x_3 = t$ med innebörden att x_3 antar alla värden och att t är en parameter. De obekanta kan visserligen enligt den nedersta ekvationen anta alla värden, men det är inte säkert att de kan anta dessa värden *oberoende* av varandra eftersom de övriga två ekvationerna kan ställa krav på relationer mellan de obekanta talen. De två kvarvarande ekvationerna är

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{array}\right. , \tag{1.3.2}$$

vilket med $x_3 = t$ ger

$$\begin{array}{rl} x_1 = & 1 + t \\ x_2 = & - 2t \\ x_3 = & t \end{array} .$$

Anmärkning 1.8. Om t.ex. vi satt $x_2 = t$, vilket också är korrekt, så kommer svaret att vara samma mängd av tal men skrivet på ett annat sätt.

Anmärkning 1.9. Ekvationssystemet 1.3.2 har 3 obekanta men endast 2 ekvationer. Ett ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer kallas för underbestämt. Ett ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta kallas för överbestämt och ett system med lika antal ekvationer som obekanta är kvadratiskt.

Exempel 1.6. Lös ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{array}\right.$$

Lösningen ges av

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1 \end{array}\right.$$

där den nedersta raden är $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, vilket inte kan uppfyllas av något val av obekanta. *Systemet* saknar lösning eftersom minst en av ekvationerna saknar lösning.

Exempel 1.7. Ange lösningarna till ekvationen

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 .$$

I denna situation har vi större frihet än tidigare. Ekvationen definierar ett samband mellan de obekanta talen. Om vi som tidigare sätter $x_3 = t$ så finns det frihet kvar. Men om både x_3 och x_2 är valda så är x_1 bestämd. Vi uttrycker detta genom att sätta $x_2 = s$. Så lösningarna kan skrivas

$$\begin{array}{rl} x_1 = & 1 - 2s - 3t \\ x_2 = & s \\ x_3 = & t \end{array} .$$

Redan här kan man lägga märke till att vi har 3 obekanta men bara 1 ekvation och behöver 2 parametrar; återkommer till detta.

Övning 1.6. Lös följande 3 ekvationssystem och redogör hela tiden för dig själv vad du gör och varför du kan göra det när du följer stegen i algoritmen. *Så kallad egen-förklaring hjälper din inlärning.* 1.6

(1)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_1 - 9x_2 - 6x_3 = -3 \end{cases}$$

Exempel 1.8. Om högerledet är 0 för alla ekvationer kallas systemet för *homogent*, annars inhomogent. Det homogena har alltid den triviala lösningen $x = y = z = 0$. Systemet kan dock ha fler lösningar.

$$\begin{cases} x + y - \phantom{\tfrac{5}{3}}z = 0 \\ -5x + y + \phantom{\tfrac{5}{3}}z = 0 \\ 3x + y - \frac{5}{3}z = 0 \end{cases}$$

har lösningarna $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$.

1.4. Lösningskategorier i 2 dimensioner

Exempel ges på de tre olika lösningskategorierna (inga andra finns): ingen lösning, en lösning, oändligt många lösningar. Lösningskategorierna illustreras geometriskt med hjälp av grafer.

Lösningsmängden till en linjär ekvation med två obekanta, $ax+by = c$ kan genereras med hjälp av en funktion. Uttrycket $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ innebär att om du vill bestämma en lösning, ett ordnat par av tal, så om du vet x så beräknar funktionen det andra talet, y i lösningen (och omvänt om vi löser ut x). Grafen, en representation av lösningsmängden $\{(x, y)|\, x, y \in \mathbb{R}$ och $ax + by = c\}$, utgörs i ett koordinatsystem av en rät linje. Två ekvationer med två obekanta, ett ekvationssystem, kan representeras av två räta linjer i ett plan.

Grafiskt föreställer vi oss 3 olika fall för de två linjerna.

- Om linjerna är parallella och ej överlappar så finns det inga lösningar till systemet. Det finns inga skärningspunkter, dvs. inga lösningar som löser båda ekvationerna. Lösningsmängdernas snitt är tomt.
- Om linjerna är parallella och överlappar så finns det oändligt många lösningar. Ekvationerna är lika (ekvivalenta). Lösningsmängderna är lika, snittet mellan lösningsmängderna är själv lösningsmängden.
- Om linjerna skär varandra, vilket de bara kan göra i en punkt, ej två eller tre etc., så finns det 1 lösning. Det x och det y (koordinater) som anger skärningspunkten löser båda ekvationerna. Skärningspunkten anger grafiskt ett element som finns i båda lösningsmängderna. Snittet mellan lösningsmängderna består av *ett* talpar.

Beteckna mängden av de ordnade par av tal som löser första ekvationen i ett ekvationssystem med E_1 och de ordnade par som löser andra ekvationen med E_2. Då ges ekvationssystemets lösning av snittet av de båda mängderna: $E_1 \cap E_2$. Inga lösningar innebär att snittet är tomma mängden, $\{\}$.

Övning 1.7. Ange en procedur för att skapa ett ekvationssystem (två obekanta, två ekvationer) tillhörande de 3 olika kategorierna av lösningar. Hur många parametrar erhålls för de olika lösningarna? 1.7

Exempel 1.9. Vi löser ett ekvationssystem med en parameter i ekvationerna. Systemet innehåller en parameter, a, och lösningsmängden beror på värdet på parametern:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x_1 + ax_2 = 6\\ x_1 - 4x_2 = -4\end{cases}.$$

Observera att systemet inte har någon lösning då $a = -4$ ty då är vänster-leden lika men höger-leden olika. Eliminera x_1 i ekvation (1) genom $-(2) + (1)$ som är $ax_2 + 4x_2 = 6 + 4$, eller $(a + 4)x_2 = 10$ och slutligen $x_2 = 10/(a + 4)$. Vi tar också fram ett uttryck för $x_1 = -4 + 4x_2 = -4 + 40/(a + 4)$. För $a = -4$ erhålls i x_2 en nämnare som är 0 och divisionen saknar värde, dvs. det finns inget tal x_2 sådant att $x_2 \cdot 0 = 10$. För övriga värden på a har systemet lösningar.

Om x_1 och x_2 ses som variabler och inte obekanta kan de två ekvationerna betraktas geometriskt som två räta linjer i planet. Om linjerna är parallella men inte överlappar, finns det inga lösningar till systemet; om de är parallella och överlappar så finns det oändligt många lösningar; om de har olika lutning så finns det en entydig lösning. Vi skriver ekvationerna $x_1 = -ax_2 + 6$ respektive $x_1 = 4x_2 - 4$. Linje (1) har intercept vid 6 och linje (2) vid -4, alltså är de inte sammanfallande. Däremot kan de vara parallella och då skär de aldrig varandra och då saknar systemet lösning; detta inträffar för $a = -4$. I övriga fall har de olika riktningskoefficienter och har en skärningspunkt, som är lösningen till systemet. Vid skärningspunkten har vi värden för x_1 och x_2 som löser båda ekvationerna.

Övning 1.8. Lös ekvationssystemet med 5 obekanta och 3 ekvationer: 1.8

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 5\\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 10x_5 = 16\\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 5x_5 = 1\end{cases}.$$

1.5. Ekvationssystem med obestämda högerled

Ekvationssystem av formen

$$\begin{cases}3x_1 + 2x_2 = x_1'\\ -x_1 + x_2 = x_2'\end{cases}$$

kan lösas formellt genom att vi löser ut x_1 och x_2 med Gauss elimination. Det innebär att vi finner lösningarna för alla ekvationssystem med samma koefficienter men med olika högerled. Vi börjar med $3\,(2) + (1)$ för att eliminera $3x_1$:

$$\begin{cases}+5x_2 = x_1' + 3x_2'\\ -x_1 + x_2 = x_2'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}+x_2 = 0,2x_1' + 0,6x_2'\\ -x_1 + x_2 = x_2'\end{cases}.$$

Och ur (2) får vi $x_1 = x_2 - x_2' = (0,2x_1' + 0,6x_2') - x_2' = 0,2x_1' - 0,4x_2'$. Vårt system är nu

$$\begin{cases}x_2 = 0,2x_1' + 0,6x_2'\\ x_1 = 0,2x_1' - 0,4x_2'\end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x_1 = 0,2x_1' - 0,4x_2' \\ x_2 = 0,2x_1' + 0,6x_2' \end{cases}.$$

Övning 1.9. Lös systemet genom att lösa ut $x_1$och x_2.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = x_1' \\ 2x_1 + 2x_2 = x_2' \end{cases}.$$

1.6. Facit övningar

1.1 1. Nej ty den innehåller kvadratiska termer: x^2, y^2 och $2xy$.

2. Ja.

3. Nej x/y är inte en linjär term. Fundera på skillnaderna i lösningsmängden för $x/y = 2$ och $x - 2y = 0$.

1.2 Addera rad 1 till rad 2 och erhåll $7y = 8,4$. $y = 1,2$. $x = 7$.

1.3 Vi ser att rad 2 vänster led är 4 gånger rad 1 vänster led, men för höger led gäller inte det. Således saknar systemet lösning. För att systemet skulle ha en lösning borde t.ex. rad 2 höger led vara 16.

1.4 Rad 1 är 2 gånger rad 2, vi har bara en ekvation men två obekanta. Vi löser $2x + y = 1$ genom att införa parametern $x = s$ och erhåller $y = -2s + 1$. Lösningarna till ekvationssystemet ges av mängden av de, oändligt många, ordnade paren $(s, -2s + 1)$.

1.5 Substitutionsmetoden innebär att en variabel löses ut ur en ekvation och uttrycket för variabeln sätts in i den andra. Metoden har potential att fungera för icke-linjära ekvationssystem.

1.6

(1) $x_1 = 7/10$, $x_2 = 2/5$, $x_3 = 9/10$.
(2) $x_1 = -s + 1$, $x_2 = -2s + 1$, $x_3 = s$.
(3) $x_1 = -3s - 2t + 1$, $x_2 = t$, $x_3 = s$.

1.7 Oändligt många lösningar har man då den ena ekvationen är en multipel av den andra, en parameter. Inga lösningar får man om VL:en är multiplar av varandra men ej HL, inga parametrar. En lösning får man i alla andra fall, inga parametrar.

1.8 Utgångsläget var

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 10x_5 = 16 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}.$$

Vi försöker med att sätta två obekanta som parametrar $x_5 = t$, $x_4 = s$. Med dessa insatta erhålls

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4s - t = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - s - 10t = 16 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 10s + 5t = 1 \end{cases}.$$

Flyttar om så det är enbart icke parametriserade obekanta på vänster sida,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4s + t + 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = s + 10t + 16 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 10s - 5t + 1 \end{cases}.$$

Vi har nu ett ekvationssystem med 3 ekvationer och 3 obekanta. För att reducera systemet utförs $3(1) + (2)$ och $-5(1) + (3)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4s + t + 5 \\ 4x_1 + 5x_2 = 13s + 13t + 31 \\ -3x_1 - 4x_2 = -10s - 10t - 24 \end{cases}.$$

Vi multiplicerar (2) med 4/5 och adderar den till (3): $4/5 \cdot (2) + (3)$ så att x_2 blir eliminerad.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4s + t + 5 \\ 4x_1 + 5x_2 = 13s + 13t + 31 \\ \frac{1}{5}x_1 = \frac{2}{5}s + \frac{2}{5}t + \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Skriver om (3) som $x_1 = 2s{+}2t{+}4$. Ur (2) bestäms $x_2 = (13s + 13t + 31 - 4x_1)/5 = s + t + 3$. Slutligen $x_3 = s - 2t - 2$. Lösningarna sägs vara givna på parameterform. Enskilda lösningar erhålls om värden för s och t sätts in i uttrycken. T.ex. $s = 1$ och $t = 0$ ger $x_1 = 2 + 0 + 4 = 6$, $x_2 = 1 + 0 + 3 = 4$, $x_3 = 1 - 0 - 2 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. De ordnade talen $(6, 4, -1, 1, 0)$ är *en* lösning; de är ett element i lösningsmängden.

1.9

$$\begin{cases} 0,5x_1' - 0,5x_2' = x_1 \\ -0,5x_1' + x_2' = x_2 \end{cases}.$$

1.7. Kapitelproblem

1.1 Lös följande ekvationssystem:

(a)

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

(d) Ange antalet icke-ekvivalenta ekvationer (antalet ekvationer vi egentligen har) i deluppgifterna a, b och c; ange antalet parametrar som införts för att uttrycka lösningarna i respektive a, b och c. Vilket mönster framträder? (Finns naturligtvis ett oändligt antal sätt att uttrycka det, men försök med något enkelt.) *Mönstret som framträder behandlas mer utförligt senare men det är viktigt att lägga märke till det redan nu.*

1.2 Enligt en anmärkning finns det 2 olika saker som benämns parametrar. En form förekommer i uttryck som $x = t$ och en annan i $y = (x - a)^2$. Lös ekvationssystemet och ange de olika fallen beroende på parametern a. *Uppgiften övar dig i att hantera parametrar i ekvationssystem. Parametrar i ekvationssystem är vanligt när man vill studera hur lösningarna beror på vissa förhållanden.*

(a)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + ay = 4 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 2y = a \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}-x_2} + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

1.3 Utgå från avsnittet om linjärkombination och exempel 1.3. Ekvationssystemet som används som exempel har en lösning. Genomför resonemangen med ett ekvationssystem (2 obekanta och 2 ekvationer) som har oändligt många lösningar och med ett som har inga lösningar. *Övar dig i att självständigt genomföra resonemang utifrån en förlaga.*

1.4 Definiera linjär ekvation respektive linjär funktion. *Definitioner är viktiga i matematiken och just här är det viktigt att diskriminera begreppen.*

1.5 Ett uttryck på formen $y = kx+b$ är t.ex. $y = 2x+3$. Ett uttryck på formen $Ax + By + C = 0$ är t.ex. $3x + 2y - 3 = 0$. Skriv ekvationen $y = kx + b$ på formen $Ax + By + C = 0$. Uttryck A och B i k och b. *Knyter ihop den form som du tidigare sett en rät linje uttryckas på med den nya formen; knyter ihop det nya med det gamla.*

1.6 Skriv ekvationen $Ax + By + C = 0$ på formen $y = kx + b$. Uttryck k och b i A och B.

1.7 Lös det underbestämda (fler obekanta än ekvationer) ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}.$$

Oftast löses kvadratiska ekvationssystem, och ibland visar de sig vara underbestämda. Detta system är underbestämt från början.

1.8 *Mängdövning, om du behöver mer.* Använd Gauss-Jordans algoritm för att skriva ekvationssystemet på reducerad form,

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + \ \ x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 4 \end{cases}.$$

1.9 Lös följande icke-linjära ekvationssystem genom att sätta $x^2 = X$, $y^2 = Y$ och $z^2 = Z$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \ \ z^2 = 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 = 2 \\ 2x^2 + y^2 - \ \ z^2 = 3 \end{cases}.$$

System kan göras linjära. När de sedan är lösta kan det icke-linjära tas om hand. Bara för att system inte har den form som du känner igen som linjär kan man ibland ändå lösa dem genom att 'göra' dem linjära.

1.10 *Mängdövning om du behöver mer.*

(a)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 2 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3 \\ 5x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \qquad\quad 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 \qquad\quad + x_3 = 3 \\ 5x_1 + \ \ x_2 \qquad = 7 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \qquad\quad 2x_2 + \ \ x_3 = 2 \\ 3x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

1.11 En 4×4. Lös systemet genom att använda eliminations-metoden. *Bra att prova på lite större system för hand också.*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 = 2 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \qquad\quad = 3 \\ 5x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 \qquad\quad + 2x_3 \qquad\quad = 1 \end{cases}$$

1.12 *Extremfall testar ens förståelse.* Vid lösningen av ett ekvationssystem på 3×3 erhålls följande

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_1 &= -x_3 \, . \\ x_1 &= -x_3 \end{aligned}$$

Skriv lösningen till ekvationssystemet med parametrar.

1.8. Facit Kapitelproblem

1.1

(a) Gör $-2(1)+(2)$ och $-(1)+(3)$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \ x_3 &= \ \ 2 \\ x_2 - 3x_3 &= -3 \\ x_2 - \ \ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$-(2)+(3)$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \ x_3 &= \ \ 2 \\ x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_3 &= \ \ 1 \end{aligned}$$

så $x_3 = 1/2$, $x_2 = -3/2$, $x_1 = 3/2$.

(b) Med $x_3 = s$ erhålls $x_2 = s$ och $x_1 = -2s+1$. Gör$-2(1)+(2)$ och $-(1)+(3)$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - \ \ x_3 &= 0 \\ x_2 - \ \ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi har förlorat en ekvation eftersom (2) och (3) är ekvivalenta.

(c) Med $x_3 = s$ och $x_2 = t$ erhålls $x_1 = -3s+2t+1$. Gör $-2(1)+(2)$ och $(1)+(3)$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vi har enbart en ekvation.

(d) Gör en tabell.

uppgift	antal ekvationer	antal parametrar	summa
(a)	3	0	3
(b)	2	1	3
(c)	1	2	3

1.2 (a) Utför $-2\,(1)+(2)$ som ger $(-8+a)\,y = 0$. Om $a \neq 8$ så är $y = 0$ och vi får $x = 1$. Om däremot $a = 8$ erhålls $0y = 0$ vilket är sant för alla värden på y så sätt $y = s$ och vi får $x = -2s+1$.

(b) Utför $-2\,(2)+(1)$ och vi har

$$0 = 2(1-a)$$

vilket är falskt om $a \neq 1$ men sant om $a = 1$ då vi har $0 = 0$. Sätter vi in $a = 1$ i det ursprungliga ekvationssystemet erhålls två ekvivalenta ekvationer $x + 2y = 1$. Vi inför en parameter s och sätter $y = s$ och har $x = -2s+1$.

(c) Utför $-\,(1)+(3)$ och $-2\,(1)+(2)$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 2 \\ -x_2 + (a-4)\,x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Utför $(2)+(3)$

$$(a-4)\,x_3 - x_3 = 0$$

dvs.

$$(a-5)\,x_3 = 0.$$

Om $a \neq 5$ så är $x_3 = 0$, vilket ger $x_2 = 1$ och $x_1 = 2$. Men om $a = 5$ så har vi $0x_3 = 0$ vilket är uppfyllt för alla värden på x_3 så vi sätter $x_3 = s$. Vi erhåller $x_2 = s + 1$ och $x_1 = -2s + 2$.

1.3 Ett ekvationssystem som har oändligt många lösningar är

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 4x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

Den översta har lösningarna $x = t$, $y = -2t + 3$. Den nedersta har samma lösningar. Vi tar 2 av den översta och 1 av den nedersta som linjärkombination: $2\,(2x + y) + 1\,(4x + 2y) = 2\cdot 3 + 6$ som är ekvivalent med $8x + 4y = 12$ som är ekvivalent med (dividera med 4) $2x + y = 3$. Vilket naturligtvis är samma som tidigare. Översta ekvationen har en mängd lösningar, det är samma som den nedersta, vilket är samma lösningar som linjärkombinationer ger.
Vi betraktar nu ett ekvationssystem utan lösningar

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}$$

Den översta ekvationen har samma lösningar som tidigare $x = t$, $y = -2t + 3$. Den nedersta har lösningarna $x = t$, $y = -2t + 4$. Dessa två linjer är parallella och skär inte varandra. Vi skapar en linjärkombination, samma kombination som i förra: $2\,(2x + y) + 1\,(2x + y) = 2\cdot 3 + 4$ vilket är ekvivalent med $6x + 3y = 10$ som har lösningarna $x = t$, $y = -2t + 10/3$ som också är parallell med de andra två men inte ekvivalent. Den skär ingen av de andra två så om linjärkombinationen ersätter en av dem saknar systemet fortfarande lösning. Det är inte så att linjärkombinationen saknar lösningar.

1.4 Se boken.

1.5 $kx - y + b = 0$. $A = k$, $B = -1$, $C = b$.

1.6 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. $k = -\frac{A}{B}$ och $b = -\frac{C}{B}$.

1.7 Sätter vi $x_3 = t$ erhålls $x_2 = 3t + 2$ och $2x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 1 = -2\,(3t + 2) - 3t + 1 = -9t - 3$. Som ger att $x_1 = -9/2t - 3/2$.

1.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

1.9 Ekvationssystemet kan skrivas

$$\begin{cases} X + Y + Z = 6 \\ X - Y + 2Z = 2 \\ 2X + Y - Z = 3 \end{cases}$$

vilket ger en sammansatt matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Om vi utför $-(1)+(2)$ och $-2\,(1)+(3)$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{pmatrix},$$
byter rad för ordningens skull
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$
och därefter $-2\,(2)+(3)$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix},$$
som vi snyggar till
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Detta innebär $Z=2$ vilket är $z^2=2$ som har lösningarna $z=\pm\sqrt{2}$. På liknande sätt för de andra: $y=\pm\sqrt{3}$ och $x=\pm 1$.

1.10

(a) $x_1 = 8/13$, $x_2 = 3/13$, $x_3 = 12/13$.

(b) $x_1 = 15/13$, $x_2 = 16/13$, $x_3 = -6/13$.

(c) $x_1 + \frac{1}{3}x_3 = 1$, $x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1$ som löses t.ex. genom $x_3 = t$ som ger $x_2 = -\frac{1}{2}t + 1$ och $x_1 = -\frac{1}{3}t + 1$.

1.11 $x_1 = 3/5$, $x_2 = 2/5$, $x_3 = 4/5$, $x_4 = 1/5$.

1.12 Ekvationssystemet har bara en ekvation $x_1 = -x_3$. Både x_2 och x_3 är fria att anta värden. Vi sätter dem som parametrar: $x_2 = s$ och $x_3 = t$. $x_1 = -t$. Lösningsmängden är ett plan
$$\begin{aligned} x_1 &= - t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= t \end{aligned}.$$

KAPITEL 2

Vektorbegreppet

Kapitlet behandlar:

- *Vektorbegreppet (geometriska vektorer).*
- *Konstruktion av koordinatsystem.*
- *Basvektorer.*
- *Begreppen linjärt beroende respektive oberoende.*

Tal är inte tråkiga men det finns annat, vektorer till exempel. Om du är ute och går så är det inte bara viktigt hur långt du har gått (ett tal och en enhet) utan även i vilken riktning du gått; för att beskriva detta matematiskt effektivt krävs mer än ett reellt tal. Det objekt som ligger nära till hands tankemässigt är kanske en pil för att ange riktning, sedan kan man låta pilens längd, i någon lämplig skala, representera hur långt man gått.

Det förutsätts att du har erfarenhet av vektorer.

2.1. Inledande definition

Tal är ett matematiskt objekt. De kan användas för att representera en temperatur, en längd, en area o.s.v. En annan typ av matematiskt objekt är vektorer. Vektorer har förutom en storlek också en riktning. För att förstå detta begrepp börjar vi med det geometriska begreppet riktad sträcka.

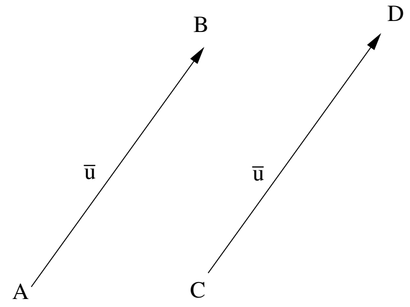
Låt A och B vara två punkter i rummet: det matematiska rummet $\mathbb{R}^3$ eller $\mathbb{R}^2$. Punkterna A och B bestämmer en sträcka. Om vi *ordnar* punkterna A och B så att A kommer före B och ger detta en speciell betydelse så erhålls en *riktad* sträcka. En riktad sträcka *representeras* av en pil med sin fot i A och sin/sitt spets/huvud i B. Punkterna skrivs i en ordning som är från vänster till höger och markeras med ett streck eller en pil ovanför: $\overline{AB}$, eller $\overrightarrow{AB}$. Det gäller att $\overline{AB} \neq \overline{BA}$ eftersom olika ordning representerar olika riktning och är olika riktade sträckor. En riktad sträcka bestäms av: en fotpunkt; en riktning; en sträcka av en viss storlek.

Den abstraktion som leder till vektorer innebär att betrakta alla riktade sträckor med olika fotpunkter men samma storlek (längd) på sträckan och riktning, som en mängd av ekvivalenta objekt: de är alla samma vektor. Alla riktade sträckor av en viss storlek och i en viss riktning är ekvivalenta såsom vektorer. På så sätt är en vektor en mängd. Om du ritar en riktad sträcka mellan punkterna A och B i $\mathbb{R}^3$ så betraktas den som *en* representant för vektorn. Vektor betecknas $\overline{u}$ och riktad sträcka $\overline{AB}$. Ibland skrivs

$$\overline{u} = \overline{AB}$$

vilket betyder att den riktade sträckan $\overline{AB}$ är en *representant* för vektorn $\overline{u}$.

Som utgångspunkt för figur 2.1.1 tänker vi oss 4 punkter i $\mathbb{R}^2$-rummet som representeras av markeringarna A, B, C och D. För de riktade sträckorna gäller att $\overline{AB} \neq \overline{CD}$, men $\overline{u} = \overline{AB}$ och $\overline{u} = \overline{CD}$. Dock skrivs ofta $\overline{AB} = \overline{CD}$ med innebörden



FIGUR 2.1.1. Två riktade sträckor i $\mathbb{R}^2$. De representerar samma vektor.

att de representerar samma vektor. AB betecknar storleken, längden, av den riktade sträckan eller vektorn $\overline{AB}$. Storleken betecknas även med $\left|\overline{AB}\right|$ för den riktade sträckan och $|\overline{u}|$ för vektorn, med hjälp av tecknet för absolutbelopp.

Om två vektorer är parallella kan de vara lika riktade eller motsatt riktade.

ANMÄRKNING 2.1. Ordet vektor används också i en mer allmän betydelse (mer om det senare), det vi behandlat kallas för en geometrisk vektor.

Vi sammanfattar med följande definition:

DEFINITION 2.1. En vektor $\overline{u}$ är en mängd av riktade sträckor. Två riktade sträckor tillhör samma (vektor)mängd om de kan fås att exakt täcka varandra genom parallellförflyttning (bibehållen riktning).

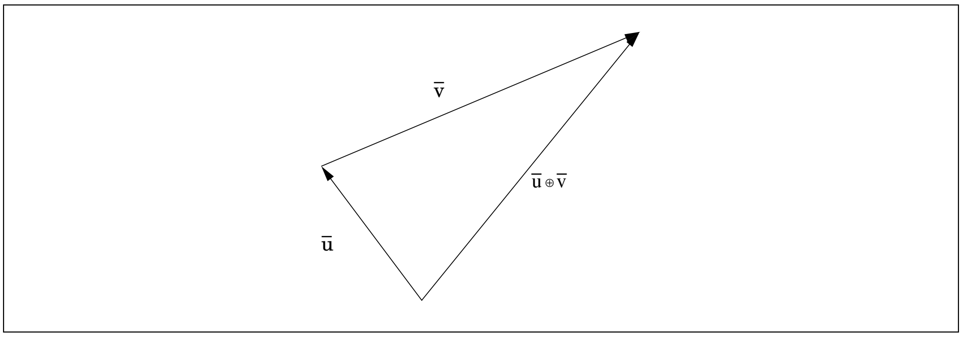
ANMÄRKNING 2.2. En riktad sträcka som börjar och slutar i samma punkt, $\overline{AA}$, representerar en vektor med längden 0, den så kallade nollvektorn, betecknas $\overline{0}$. Nollvektorn är parallell med alla vektorer.

2.2. Räkneoperationer

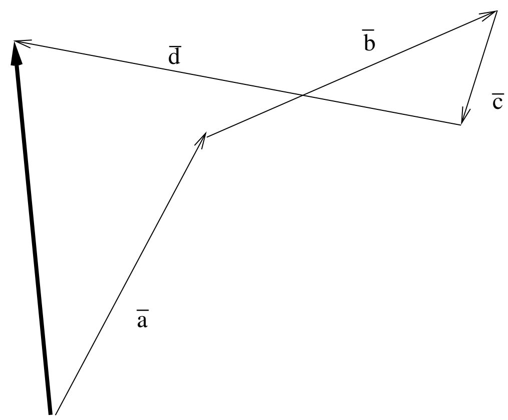
På det matematiska objektet vektor kan olika operationer konstrueras , dvs. *vi kan kombinera vektorer enligt vissa regler på olika sätt.*

Vi börjar med en operation som har stora likheter med addition av tal: vektoraddition, betecknas med $\oplus$.

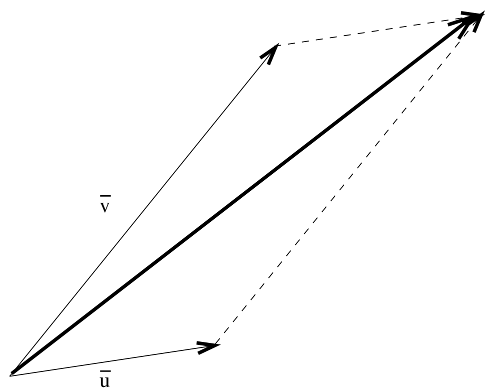
DEFINITION 2.2. Vektoraddition. För att konstruera vektorsumman $\overline{u} \oplus \overline{v}$ välj representanter för $\overline{u}$ och $\overline{v}$ så att foten av $\overline{v}$ är samma punkt som spetsen hos $\overline{u}$. Den riktade sträckan från foten av $\overline{u}$ till spetsen av $\overline{v}$ är en representant för vektorsumman.



Observera att definitionen inte använder tal utan just en geometrisk representation av vektorbegreppet. Vi har inte heller ett koordinatsystem. Metoden som använts för att utföra vektoraddition kallas polygonmetoden eftersom om den utförs med flera vektorer så bildas en fler-hörning, en poly-gon, se figur 2.2.1. En liknande metod grundar sig på att vektorsumman ses som diagonalen i en parallellogram, se figur 2.2.2.

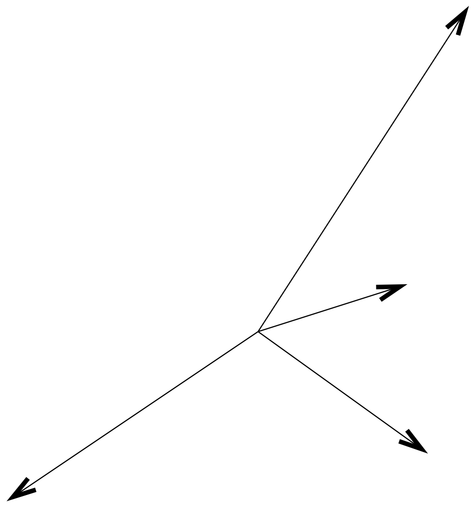


FIGUR 2.2.1. Polygonmetoden. Vektoraddition: $\overline{a}\oplus\overline{b}\oplus\overline{c}\oplus\overline{d}$. Den tjocka pilen representerar vektorsumman.



FIGUR 2.2.2. Parallellogrammetoden.

ÖVNING 2.1. Bestäm vektorsumman med hjälp av polygonmetoden för vektorerna i figur 2.2.3. 2.1



FIGUR 2.2.3. Vektorsumma.

Nästa operation har följande definition.

DEFINITION 2.3. Multiplikation av vektor med skalär, i detta fall ett reellt tal. Låt λ vara en skalär, dvs. $\lambda \in \mathbb{R}$. Med $\lambda \odot \overline{u}$ menas den vektor parallell med $\overline{u}$ som har

(1) längden $|\lambda|\,|\overline{u}|$,
(2) samma riktning som $\overline{u}$ om $\lambda > 0$, motsatt om $\lambda < 0$. Om $\lambda = 0$ så är $\lambda\overline{u} = \overline{0}$.

ANMÄRKNING 2.3. I definition 2.3 har använts en speciell symbol för operationen mellan tal/skalär och vektor, $\odot$. Vi använder inledningsvis inte den vanliga multiplikationssymbolen "$\cdot$". Symbolerna "+" och "$\cdot$" är reserverade för addition och multiplikation mellan *tal*. Vi kommer dock senare att återanvända dessa symboler även för vektorer. *Vi gör så eftersom det är viktigt att uppfatta skillnaden, kontrasten, mellan begreppen; det är inte addition och multiplikation med tal.*

ANMÄRKNING 2.4. Vi har byggt våra vektorer i ett rum, $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, med reella tal på axlarna, denna byggsten för vektorer kallas skalär. När skalärer sätts samman erhålls vektorer. Även andra byggstenar kan kallas för skalärer, tex, komplexa tal.

EXEMPEL 2.1. Visa att $\overline{u} \oplus \overline{u} = 2 \odot \overline{u}$. I vänster led står en vektor-addition($\oplus$), den ska utföras enligt den geometriska definitionen. I höger led står en multiplikation av en vektor med ett tal, det har en *egen* definition. Uppgiften består i att visa att dessa två operationer ger samma resultat om de två ingående vektorerna är samma vektor. Observera att formeln är *suggestiv,* eftersom vi är vana vid att tänka att $u + u = 2u$ i algebran där $u \in \mathbb{R}$, men det är inte tal som vi ska visa det för.

$\overline{u} \oplus \overline{u}$ konstrueras genom att geometriskt placera ut de riktade sträckorna enligt definitionen. De två vektorerna representeras av $\overline{AB}$ och $\overline{BC}$, med lika längd: $AB = BC$. Sträckan AC är nu dubbelt så lång som sträckan AB (sträckan för AC klar), och $\overline{BC}$ är parallell med $\overline{AB}$ (riktningen för $\overline{AC}$ klar), vilket gör att vi kan skriva $2 \odot \overline{AB}$ eller $2 \odot \overline{BC}$; dvs. en vektor som är dubbelt så lång som AB och har samma riktning som $\overline{AB}$, och det som gäller för en *godtycklig* representant gäller för vektorn $\overline{u}$.

ANMÄRKNING 2.5. *Den här typen av resonemang försöker öka din känslighet för nyanser i matematiska begrepp. Algebran ser ut att följa bekanta regler men det är inte samma matematiska objekt. Olika matematiska objekt kan ha liknande algebror.*

ANMÄRKNING 2.6. Vektor-addition ger samma resultat, i en enkel mening, som tal-addition om vektorerna läggs parallellt. Om de läggs parallellt har vi bara en positiv och en negativ riktning, som på en tallinje. Talet ges av vektorns längd och talets tecken är samma som vektorns tecken.

Räknelagar

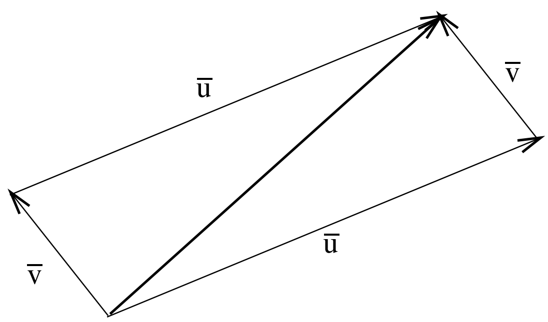
För (geometriska) vektorer gäller en mängd räknelagar, 10 stycken.

(1) Vektoraddition (operation 1)
- (a) $\overline{u} \oplus \overline{v} = \overline{v} \oplus \overline{u}$ kommutativa lagen
- (b) $\overline{u} \oplus (\overline{v} \oplus \overline{w}) = (\overline{u} \oplus \overline{v}) \oplus \overline{w}$ associativa lagen med avseende på addition
- (c) $\overline{u} \oplus (-1)\overline{u} = \overline{0}$ motsatt vektor (invers vid addition)
- (d) $\overline{u} \oplus \overline{0} = \overline{u}$ nollvektorn ($\overline{0}$ är neutralt element vid addition)

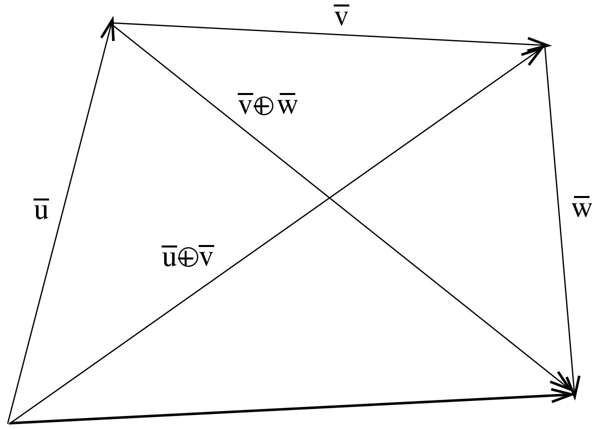
(2) Multiplikation med skalär/tal, λ och μ är reella tal (operation 2)
- (a) $\lambda(\mu \odot \overline{u}) = (\lambda\mu) \odot \overline{u}$
- (b) $1 \odot \overline{u} = \overline{u}$
- (c) $0 \odot \overline{u} = \overline{0}$
- (d) $\lambda \odot \overline{0} = \overline{0}$

(3) Distributiva lagar (blandade räkneoperationer)
- (a) $(\lambda \oplus \mu) \odot \overline{u} = \lambda \odot \overline{u} \oplus \mu \odot \overline{u}$ vektor är distributiv över skalär
- (b) $\lambda \odot (\overline{u} \oplus \overline{v}) = \lambda \odot \overline{u} \oplus \lambda \odot \overline{v}$ skalär är distributiv över vektor

BEVIS. Lagarna ska bevisas utifrån definitionen av vektoraddition och definitionen av multiplikation med skalär/tal. 1a kan visas med hjälp av figur 2.2.4. Naturligtvis är det inte den ritade figuren som är beviset. För att göra ett bevis ska vektorerna ha representanter och man hänvisar till parallellförskjutning och definitionen av en parallellogram. I och med att vi ofta utgår från att mängderna $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kan användas som modell för verklighetens yta och rymd så har vi en intuitiv förståelse för det matematiska begreppet vektorer, men det kan också leda oss fel. 1b kan visas med figur och definitionen av vektoraddition liknande den i 1a,



FIGUR 2.2.4. Vektoraddition är kommutativ, 1a).



FIGUR 2.2.5. Vektoraddition är associativ, 1b).

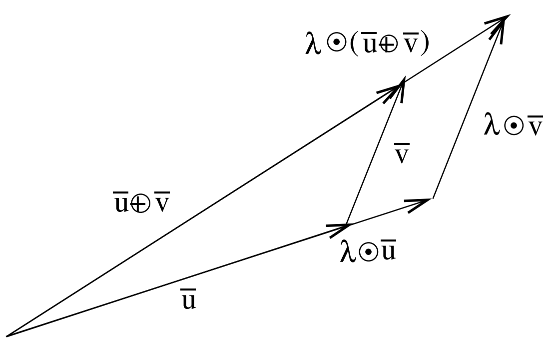
2.2.5. 1c kan visas med figur och vektoraddition och multiplikation med skalär. Utgå från $\overline{u}$, ändra riktning genom multiplikation med skalär, addera dessa två vektorer. Eftersom de är lika långa men motsatt riktade är vektorsumman nollvektorn.

Observera att 1c kan användas för att definiera vektorsubtraktion: $\overline{u} \ominus \overline{v} = \overline{u} \oplus (-1)\overline{v}$. Det innebär att subtraktion beräknas genom att 'vända' vektorn $\overline{v}$ och sedan vektoraddera den till $\overline{u}$. Se figur 2.2.7.

1d följer direkt ur vektoraddition och definitionen av nollvektorn. Längden hos summan ändras inte.

2a-d visas genom att konstatera att vänster led och höger led är vektorer med samma längd och samma riktning samt användning av multiplikation med skalär. T.ex. $\lambda(\mu \odot \overline{u})$ är $\overline{u}$ med en längdändringsfaktor μ, denna nya vektor ändrar längd en gång till genom att multipliceras med skalären λ. Vi förstår det som att ordningen på skalärerna inte spelar någon roll för vektorns slutliga längd. Vi kan också se det som att $|\lambda(\mu \odot \overline{u})| = |\lambda|\,|\mu \odot \overline{u}| = |\lambda|\,|\mu|\,|\overline{u}|$ och för längden på den högra sidan av likheten gäller samma sak; således är vektorerna lika långa. Riktningen ges av tecknet på $\lambda\mu$ och vid multiplikation ändras inte tecknet på grund av ordningen. Vektorerna har samma längd och samma riktning: de är lika. I 2d behövs också att nollvektorn är parallell med alla vektorer (detta är också en motivering till att välja just denna konstruktion).

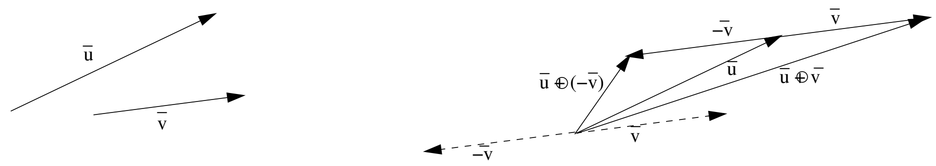
Lagen 3b visas med hjälp av likformiga trianglar, se figur 2.2.6, man bör också reda ut vad som händer då skalären är negativ. Och i 3a uttrycks det att eftersom det



FIGUR 2.2.6. Distributiva lagen för skalär.

endast är en vektor, $\overline{u}$, så är vektorn additiv i samma mening som tal. Vi går längs tallinjen. Här liknar vektor-additionen tal-addition om vi tänker på en vektor längs med en tallinje. □

ÖVNING 2.2. Utför subtraktionen $\overline{u} \ominus \overline{v}$ genom att vända $\overline{v}$ och sedan addera enligt definitionen. Rita själv två godtyckliga vektorer $\overline{u}$ och $\overline{v}$ och utgå från dem; använd parallellogrammetoden. Konstruera en minnesregel för att snabbt kunna rita $\overline{u} \ominus \overline{v}$ utan att vända $\overline{v}$. Rita i parallellogramen också in vektorsumman. Se figur 2.2.7 2.2



FIGUR 2.2.7. Vektorsubtraktion.

2.2.1. Operationer och modeller i praktiken. Föreställ dig att du har 5 stenar framför dig. Räkna stenarna enligt den bekanta ramsan 1, 2, 3, 4 och 5. Du kommer till 5 på den sista stenen, därför säger vi att vi har 5 stenar; 5 blir namnet på antalet. Säg nu att du har en hög med 5 stenar och en hög med 3 stenar. Addition är att lägga ihop högarna och sedan räkna dem: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Vi skriver $5+3$ för att lägga ihop högarna. När vi sedan räknar igenom dem får vi 8 (talet för sista stenen) och skriver 5+3=8. För vektorer gör vi inte samma praktik. Vi har inte ett antal pilar i en hög och lägger samman dem med en annan hög. Pilarna lägger vi efter varandra. Efter innebär att nästa pils fot läggs vid föregående pils huvud; med bibehållen riktning. När vi lägger dem efter varandra så kallar vi det för vektor-addition och vektor-summan är pilen som kan läggas från första pilens fot till sista pilens huvud, vilket uppenbarligen inte är samma sak som tal-addition. Det visar sig dock att det finns likheter. Eftersom det inte är samma praktik så bör vi inte använda samma tecken för att tala om vad som ska göras: ofta används + för praktiken lägga ihop eller tal-addition; $\oplus$ för praktiken lägga efter varandra eller vektor-addition. Till talen 3 och 5 skapar vi ett nytt tal $3 + 5 = 8$ som är tal-summan. Till pilen $\overline{u}$ och pilen $\overline{v}$ skapar vi en ny pil $\overline{u} \oplus \overline{v} = \overline{w}$ som är vektor-summan. Likheterna mellan tal-addition och vektor-addition framträder t.ex. om vi begränsar oss till pilar som är parallella, men kan ha olika riktning, och lägger ut pilarna efter varandra.

Naturligtvis kan jämförelsen med pilar i det verkliga rummet inte drivas speciellt långt men det är en utgångspunkt att fortsätta från. Två pilar på marken kan inte ersättas med en pil som är vektorsumman. Att skjuta iväg två pilar med olika hastigheter (hastighet som vi hypotetiskt modellerar med vektorer) är inte samma sak som att skjuta iväg en pil med summan av hastigheterna (som vi beräknat med vektorsumman). Även i mer abstrakta situationer måste man se upp. Två krafter, representerade av två vektorer, som verkar på ett föremål kan inte alltid ersättas med en vektorsumma, en total kraft, i den meningen att den totala kraften skulle ge samma resultat i verkligheten. Huruvida något i verkligheten kan *modelleras* med matematikens vektorer måste avgöras på empirisk väg. En kraft är inte en vektor.

2.3. Geometri med vektorer och utan koordinater

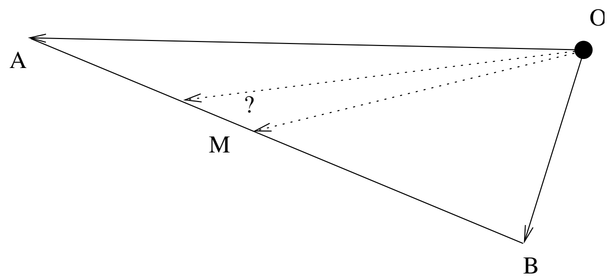
Innan vi börjar använda koordinatsystem tittar vi på några koordinatfria formler i geometri. Geometri kan göras med hjälp av vektorer. Vi återanvänder tecknen för addition respektive multiplikation av tal för motsvarande operationer med vektorer..

Exempel 2.2. Mittpunktsformeln. Vi utgår från en sträcka i rummet, t.ex. $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, mellan punkterna A och B, se figur 2.3.1. Vi väljer en godtycklig punkt i rummet, O, och söker den vektor som går till mitten, M, på sträckan mellan A och B. Från vår godtyckliga, men fasta punkt, konstruerar vi vektorer till sträckans ändpunkter: $\overline{OA}$ och $\overline{OB}$. (Som du ser blandar vi riktade sträckor och vektorer men det brukar inte orsaka missförstånd.) En vektor till mittpunkten på sträckan mellan A och B ges av

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right).$$

Formeln kan visas, som följer, genom att introducera en vektor $\overline{AB}$ från A till B och använda vektoraddition. Om M är mittpunkten så gäller $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (samma riktning, halva längden). Vidare gäller ur reglerna för addition(subtraktion) att $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Ur detta följer

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\left(\overline{OB} - \overline{OA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right).$$



Figur 2.3.1. Var ligger mittpunkten på sträckan mellan A och B?

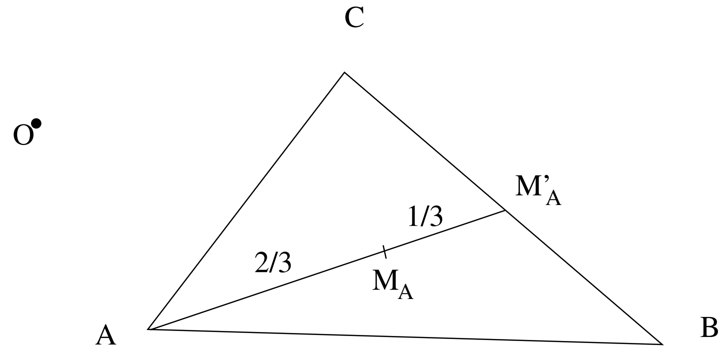
2.3 Övning 2.3. I ett tredimensionellt system färdas ett föremål från punkten A : $(2,\ 3,\ -4)$ mot punkten B : $(10,\ 3,\ -6)$ längs en rät linje med en given fart. Samtidigt färdas ett annat föremål från B mot A med samma fart. I vilken punkt träffas de?

Exempel 2.3. Formel för masscentrum. Vi har en triangel, figur 2.3.2, med hörnen A, B, C. Median är ett linjesegment som sammanbinder ett hörn med motstående sidas mittpunkt. Punkten på medianen som delar den i förhållandet 2:1 där den kortaste biten är närmast sidan betecknas M_A. Denna punkt är också läget för masscentrum för en triangel med homogen massfördelning. Vi visar formeln för denna punkt som delar medianen i förhållandet 2:1.

$$\overline{OM}_A = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

Vi har som förutsättning att $\overline{AM}_A = \frac{2}{3}\overline{AM}'_A$ och vi erhåller

$$\overline{OM}_A = \overline{OA} + \overline{AM}_A = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AM}'_A$$



FIGUR 2.3.2. Triangel med median.

och enligt mittpunktsformeln är

$$\overline{AM'_A} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)$$

som vi sätter in på höger sida i föregående

$$\overline{OM_A} = \overline{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right).$$

För $\overline{AB}$ och $\overline{AC}$ använder vi $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ samt $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$ som vi sätter in i föregående

$$\overline{OM_A} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\left(\overline{OB} - \overline{OA} + \overline{OC} - \overline{OA}\right) = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

Om liknande beräkning utförs för de andra sidorna erhålls samma resultat, eller så inses att inget i beviset vilar på information om en speciell sida. Beviset förutsätter sammanbindningslinjen från A till M'_A, och att vi delar sträckan i 2:1. Med detta visas att de tre medianerna har en gemensam skärningspunkt, $\overline{OM_A} = \overline{OM_B} = \overline{OM_C} = \overline{OM}$, så i allmänhet skrivs formeln

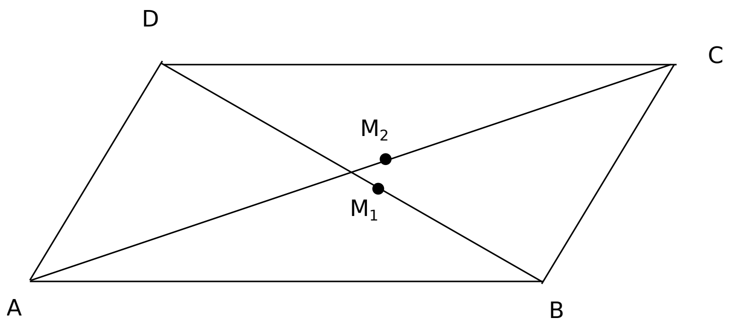
$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

ÖVNING 2.4. Beräkna masscentrum för en homogen triangel (skiva) med hörn i (2, 2, 1), (−1, 0, 1) och (0, 2, 1). 2.4

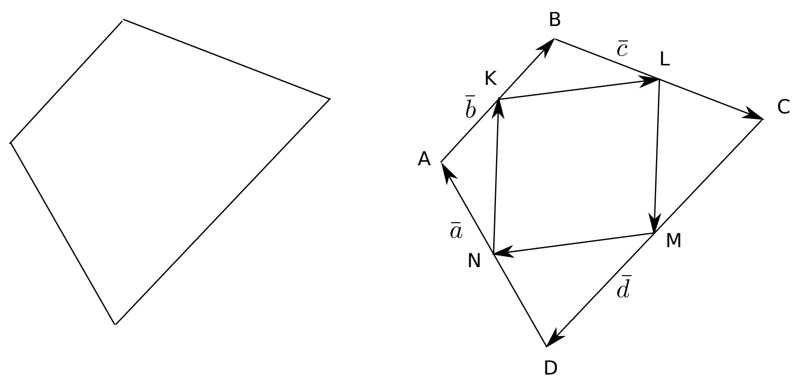
EXEMPEL 2.4. Diagonalerna i en parallellogram skär varandra mitt itu. Låt M_1 vara mittpunkt på DB och M_2 mittpunkt på AC. Om vi kan visa att mittpunkterna M_1 och M_2 är samma punkt har vi visat påståendet. Vi har att $\overline{AM_2} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Enligt mittpunktsformeln gäller $\overline{AM_1} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AD}\right)$ men $\overline{AD} = \overline{BC}$ i en parallellogram så vi har $\overline{AM_1} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{AC}\right)$. Således är $\overline{AM_2} = \overline{AM_1}$ och därför är M_1 och M_2 samma punkt.

EXEMPEL 2.5. Konstruktion av parallellogram i fyrhörning. Om de på varandra följande mittpunkterna på sidorna i en fyrhörning förbinds med linjesegment så skapar de en parallellogram, se figur 2.3.4. 4-hörningen är $ABCD$ och mittpunkterna på sidorna är K, L, M och N. För att visa att man erhåller en parallellogram kan man visa t.ex. att $\overline{NK} = -\overline{LM}$. Från figuren framgår att $\overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} = \frac{1}{2}\left(\overline{a} + \overline{b}\right)$ (från N till A samt från A till K). På samma sätt på andra sidan $\overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{c} + \frac{1}{2}\overline{d} = \frac{1}{2}\left(\overline{c} + \overline{d}\right)$. Men vi vet att $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} = \overline{0}$ så $\overline{a} + \overline{b} = -\left(\overline{c} + \overline{d}\right)$. Vi har

$$\overline{NK} = \frac{1}{2}\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overline{c} + \overline{d}\right) = -\overline{LM}.$$



FIGUR 2.3.3. Exempel 2.4. Diagonalerna i en parallellogram skär varandra på mitten.



FIGUR 2.3.4. Konstruktion av parallellogram utifrån en fyrhörning.

2.4. Rummet i verkligheten och rummet i matematiken.

Begreppet rum behöver tydliggöras. Vi har redan berört detta vid definitionen av vektor. Vi existerar i ett fysiskt rum och matematiken utförs i ett matematiskt rum t.ex. $\mathbb{R}^3$. För att reda ut detta bör vi betänka vissa grundläggande saker angående tal. Vi startar med tal som abstraktioner för att räkna föremål; ett tal gäller för det abstrakta begreppet antal utan hänsyn till vad föremålen jag räknar är. Detta ger de naturliga talen.

Vid lösning av ekvationer uppkommer sedan negativa tal $x + 2 = 0$, rationella tal $3x = 1$ och irrationella tal $x^2 = 2$ och även komplexa tal $x^2 = -1$. De är *utvidgningar* av ett mer grundläggande tal-begrepp. Talen definieras som det som löser vissa ekvationer. Detta har inget med det fysiska rummet att göra. Det fysiska rummet kan beskrivas, ur ett vardagsperspektiv, som en bakgrund där objekt befinner sig i. Det fysiska rummet upplevs som kontinuerligt och existerar oberoende av föremålen i det; föremål kan turas om att inneha en viss plats i rummet. En fysisk kurva är spåret efter ett föremål som rör sig kontinuerligt i det fysiska rummet; föremål försvinner inte och dyker upp på en annan plats. En punkt är en plats i fysiska rummet. Om det fysiska rummet är kontinuerligt och om det existerar oberoende av föremålen är en empirisk fråga, men det är så vi ofta tänker på det.

Genom att införa Descartes tänkande om att tal är punkter på en linje, en så kallad tallinje, så kan aritmetik och algebra uttryckas geometriskt: visualiseras. En tallinje är dock inte en linje i fysisk mening. En matematisk punkt är diskret; hur det fysiska rummet är konstruerat vet vi inte men vi tänker på det som kontinuerligt. Häri ligger konflikten mellan det diskreta och det kontinuerliga; det fysiska rummet upplevs som kontinuerligt. En tallinje är en *mängd* av oändligt många tal. En matematisk punkt på tallinjen är en metaforisk sak. Om du betraktar den rent bokstavligt så uppkommer motsägelser. En av dem kan formuleras som *Berör punkterna på en (tal)linje varandra?* Om de inte berör varandra så finns det ett avstånd mellan dem (då är det inte kontinuerligt) och om de berör varandra så är de samma punkt (de är oändligt små). Om vi föreställer oss de två mängder som utgör två cirklar som berör varandra i en punkt så innebär det i detta fall att det finns ett element som ingår i båda mängderna. När vi använder vårt vardagsperspektiv och säger *berör* så är det två föremål i det fysiska rummet. I matematiken är det själva det matematiska rummet (mängden). En matematisk punkt är inte ett föremål i rummet och begreppet 'berör' har ingen betydelse. Om punkter i matematiken är element i en mängd så finns det ingen betydelse i ordet 'berör'. Vi använder mängden av tal för att metaforiskt tala om saker i det fysiska rummet. Metaforer innebär inte att saker är samma sak utan att de har vissa likheter. Blandar man ihop metaforen med verkligheten så uppkommer problem. Eftersom människor ibland tänker vektorer som objekt i det fysiska rummet finns det mycket i bevisföring som förefaller självklart. Ser man däremot vektorer som ordnade par av tal, $\mathbb{R}^2$, så är det inte alls självklart. Denna typ av sammanblandning leder t.ex. till problem vid förståelse för gränsvärdesbegreppet. Ofta framställs detta som att det finns två metaforer för att beskriva tal. Den ena är mängden i form av en hög med föremål; ett diskret tänkande. Den andra är att tal är punkter på en tallinje; ett kontinuerligt tänkande. Dessa två metaforer är ibland i konflikt med varandra, blandar man även in det fysiska rummet uppkommer fler möjligheter till missförstånd.

Övning 2.5. I relativitetsteorin sägs rummet vara krökt. Vilket 'rum' är det som är krökt, det fysiska eller matematiska? 2.5

2.5. Bas och koordinater

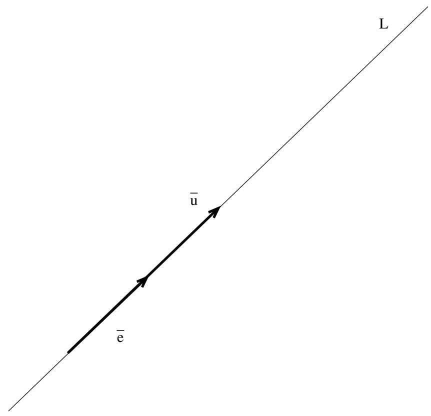
Än så länge har vi betraktat vektorer med hjälp av en geometrisk representation. Vi ska nu representera vektorer även algebraiskt. Ett centralt begrepp för att genomföra detta är 'bas'.

Vi börjar med ett lemma (hjälpsats), dvs. vi kommer att använda denna hjälpsats i andra satser. Vi visar att varje vektor på en linje kan skrivas med utgångspunkt från en godtycklig vektor (ej nollvektorn) på linjen, se figur 2.5.1.

Lemma 2.1. *Om $\overline{e} \neq \overline{0}$ är en vektor (dess representant) på en linje så kan varje vektor $\overline{u}$ på linjen skrivas*

$$\overline{u} = x\overline{e} \tag{2.5.1}$$

där x är ett entydigt bestämt (reellt) tal.



FIGUR 2.5.1. Vektorn $\overline{u}$ på linjen L kan skrivas med hjälp av vektorn $\overline{e}$.

BEVIS. Två vektorer, $\overline{e}$ och $\overline{u}$, på en linje är parallella men kan vara lika riktade eller motsatt riktade. Därutöver kan de ha olika längd. Beloppet av en vektor är definierat, så låt oss välja talet x så att

$$x = \begin{cases} |\overline{u}| \,/\, |\overline{e}| \text{ om } \overline{u} \text{ och } \overline{e} \text{ är lika riktade} \\ -|\overline{u}| \,/\, |\overline{e}| \text{ om } \overline{u} \text{ och } \overline{e} \text{ är motsatt riktade} \end{cases}$$

och med detta val gäller 2.5.1, enligt definitionen av multiplikation med skalär, se definition 2.3.

Låt oss studera detta lite noggrannare. Enligt definitionen 2.3: "Med $x\overline{e}$ menas den vektor parallell med $\overline{e}$ som har längden $|x|\,|\overline{e}|$". I vårt fall tar vi beloppet av x och multiplicerar det med $|\overline{e}|$, $||\overline{u}| \,/\, |\overline{e}|| \cdot |\overline{e}| = |\overline{u}|$, vilket är den önskade längden. Har vi minustecknet framför så försvinner det vid längdberäkningen. Punkt 2 i definitionen hanterar minustecknet i valet av x: $\lambda < 0$. Längden är entydig. □

Vardagligare uttryckt så mäter kvoten $|\overline{u}| \,/\, |\overline{e}|$ hur lång $\overline{u}$ är i förhållande till $\overline{e}$ och sedan förändras $\overline{e}$ med denna faktor. Återstår att välja riktning med hjälp av tecknet.

ANMÄRKNING 2.7. Två vektorer sägs vara *parallella* om de kan skrivas $\overline{u} = x\overline{v}$ där x är ett reellt tal. Om $x > 0$ har de samma riktning och om $x < 0$ har de olika riktning.

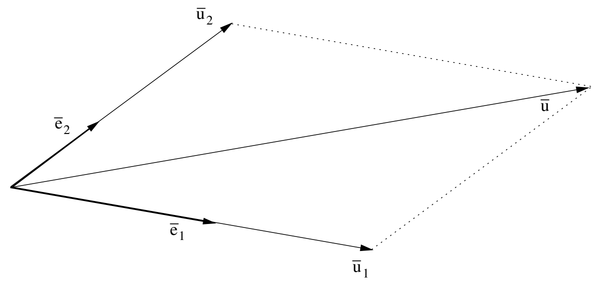
Vi går vidare till två dimensioner.

TEOREM 2.1. *Om $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ är två icke-parallella vektorer i planet så kan varje vektor $\overline{u}$ i planet skrivas*

$$\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2,$$

med entydigt bestämda tal x_1, x_2.

BEVIS. Vi har tre vektorer givna, $\overline{u}$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, och ska visa att $\overline{u}$ kan skrivas som en linjär-kombination (vektor-addition) av de två andra. Placera vektorerna så att foten hos $\overline{e}_1$ ligger vid foten hos $\overline{u}$, och samma för $\overline{e}_2$:s fot; se figur 2.5.2. Lägg en linje på $\overline{e}_1$ respektive $\overline{e}_2$ så att vi skapar situationen i lemmat. Bilda en parallellogram enligt figuren, dvs. parallellförflytta $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ eller linjerna. Enligt lemmat kan vi skapa vektorer $\overline{u}_1 = x_1\overline{e}_1$ och $\overline{u}_2 = x_2\overline{e}_2$ på linjerna parallella med $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ och enligt parallellogrammens sidor gäller $\overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$; eftersom vi använt parallellogrammen så är det enligt definitionen en vektoraddition.



FIGUR 2.5.2. Uppdelning av vektor, basbeskrivning.

I och med detta har vi visat *existensen* av denna framställning. Vi måste också visa att det bara finns *ett sätt* att göra detta på, annars är inte talen x_1 och x_2 *entydiga.* Entydigheten ska ses utifrån att vektorerna $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ är givna. För ett annat givet par $\overline{e}'_1$ och $\overline{e}'_2$ erhålls andra tal, också entydiga, x'_1 och x'_2 för vektorn $\overline{u}$.

Beviset för att det endast finns *ett* sätt att skriva det på är ett så kallat *motsägelsebevis.* Vi antar att det finns två sätt att skriva vektorn på och visar att detta leder till en motsägelse, alltså är det inte sant att det finns två sätt att skriva det på. Vi skriver $\overline{u}$ på två olika sätt

$$(\overline{u} =)\, x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 = x'_1\overline{e}_1 + x'_2\overline{e}_2.$$

Observera att det är samma vektorer $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ men olika tal x_1 och x'_1 respektive x_2 och x'_2. Enligt *räknereglerna* kan vi flytta om och erhålla

$$(x_1 - x'_1)\,\overline{e}_1 = -\,(x_2 - x'_2)\,\overline{e}_2.$$

Här är åtminstone den ena koefficienten skild från 0, annars är inte uttrycken olika. Låt oss dividera med den som säkert är skild från 0, antag att det är $x_1 - x'_1$ (annars bara byter vi beteckningar).

$$\overline{e}_1 = -\frac{x_2 - x'_2}{x_1 - x'_1}\overline{e}_2. \tag{2.5.2}$$

Detta uttryck visar att $\overline{e}_1 = \lambda\overline{e}_2$ där λ är ett tal, d. v. s. att $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ är parallella (de ligger på samma linje). Men de ska enligt förutsättningarna vara valda icke-parallella. □

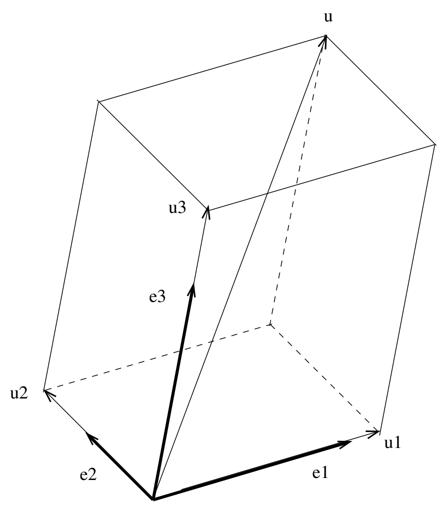
ÖVNING 2.6. Studera vad som händer i beviset om $x_2 - x'_2 = 0$. Studera också vad som händer om $\overline{u} = \overline{0}$. 2.6

Utan att fördjupa oss i det så gäller motsvarande i tre dimensioner, se figur 2.5.3.

$$\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3.$$

Här förutsätts att vektorerna $\overline{e}_i$ inte ligger i ett plan (två av dem kan alltid beskrivas som i ett plan, men den tredje ligger då inte i detta plan). Entydigheten visas på samma sätt; det leder till att en av $\overline{e}_i$ kan skrivas som en kombination av de andra, och således ligger i ett plan, vilket vi utgått från att de inte gör.

ÖVNING 2.7. Visa motsvarigheten till 2.5.2 för 3 dimensioner. 2.7



FIGUR 2.5.3. Exempel på uppdelning av vektorn u. Basvektorer betecknas $e1$, $e2$ och $e3$. Komposanter betecknas $u1$, $u2$ och $u3$. Vinklar mellan axlar är inte nödvändigtvis räta.

2.8 ÖVNING 2.8. Studera följande påstående: Om $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ och $\overline{e}_3$ är tre icke-parallella vektorer i planet så kan varje vektor $\overline{u}$ i planet skrivas (existens)

$$\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3,$$

med entydigt bestämda tal x_1, x_2 och x_3. Varför är det inte sant att värdena på x_1, x_2 och x_3 är entydiga? Jämför med Teorem 2.1 och övning 2.7.

DEFINITION 2.4. Bas.

Linje: En vektor $\overline{e}$ är en *bas* för vektorer på en linje. Om linjen skrivs på formen $\overline{u} = x\overline{e}$ så benämns x koordinat i basen $\overline{e}$. $\overline{e}$ kan inte vara $\overline{0}$.

Plan: Två icke-parallella vektorer $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ är en *bas* för vektorerna i ett plan. Om planet skrivs på formen $\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$ så benämns x_1 och x_2 koordinater i basen $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$.

Rum: Tre vektorer som ej alla ligger i samma plan är en *bas*. $\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$.

ANMÄRKNING 2.8. Observera att basvektorerna inte behöver vara i rät vinkel mot varandra eller ha längden 1. För en given bas gäller att $\overline{e}_1 = (1, 0)$ och $\overline{e}_2 = (0, 1)$ i sin egen bas oavsett vinkel eller storlek.

ANMÄRKNING 2.9. En bas är en *mängd* av vektorer t.ex. $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

ANMÄRKNING 2.10. Koordinater kallas ibland för *komponenter* (eng. components). Vektorerna $\overline{u}_1 = x_1\overline{e}_1$ och $\overline{u}_2 = x_2\overline{e}_2$ kallas *komposanter* (eng. component vectors). Håll begreppen isär. Beteckningen komponenter härrör från att man utgår från tal-tiplar, (2, 3, 1, 0...), och definierar räkneregler för dem, se kapitel 6.

Om det ej finns möjlighet till missförstånd angående vad basen är skrivs en vektor på följande sätt

$$\overline{u} = (x_1, y_1, z_1).$$

I denna representation kan visas att för t.ex. i två dimensioner gäller

$$
\begin{aligned}
\overline{u}+\overline{v} &\overset{1}{=} \underline{(x_1,\, y_1)+(x_2,\, y_2)} \overset{2}{=} x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2 + x_2\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 \\
&\overset{3}{=} (x_1+x_2)\,\overline{e}_1 + (y_1+y_2)\,\overline{e}_2 \overset{4}{=} \underline{(x_1+x_2,\, y_1+y_2)}.
\end{aligned}
\tag{2.5.3}
$$

På liknande sätt kan visas att

$$\lambda\,(x_1,\, y_1) = (\lambda x_1,\, \lambda y_1)\,.$$

Anmärkning 2.11. En vektor beror inte på basen men koordinaterna som anger (representerar) vektorn gör det.

Anmärkning 2.12. I litteraturen är även beteckningar av typen $x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}$ för $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ vanliga. Även $(x_1\, x_2\, x_3)$ och $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ är vanliga; varför framgår senare.

Övning 2.9. Ange i 2.5.3 vad som möjliggör likheterna 1-4. 2.9

2.6. Ekvationssystem och vektorer

I kapitel 1 behandlades ekvationssystem och i detta kapitel har vektorer behandlats. Om du inte arbetat med linjär algebra tidigare så finns det ingen uppenbar koppling mellan dessa två. Vi kommer nu att ge oss in på att koppla samman dessa områden, och ytterligare områden så småningom. En viktig del av ditt lärande i linjär algebra är just att se sambanden mellan de olika områdena. Här följer ett första kort försök att associera de olika områdena med varandra; detta är en viktig del av kursen och ditt tänkande i linjär algebra. Konstruera gärna själv fler exempel.

Exempel 2.6. Uttryck som $\overline{u} = a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2$ (en *linjärkombination* av vektorer) med $\overline{u}_1 = (1,\, 3)$ och $\overline{u}_2 = (-1,\, 4)$ samt $\overline{u} = (2,\, 3)$ utgör ett ekvationssystem

$$(2,\, 3) = a(1,\, 3) + b(-1,\, 4)$$

$$(2,\, 3) = (a,\, 3a) + (-b,\, 4b)$$

och likheten gäller komponentvis

$$
\begin{aligned}
2 &= a - b \\
3 &= 3a + 4b
\end{aligned}
\tag{2.6.1}
$$

som har lösningarna $a = 11/7$ och $b = -3/7$ så att

$$(2,\, 3) = \frac{11}{7}(1,\, 3) - \frac{3}{7}(-1,\, 4).$$

Av uttrycken framgår kopplingen mellan vektorer och ekvationssystem. Vektorn $(2,\, 3)$ står i en kolonn i vänster led i ekvation 2.6.1. Vektorerna $(1,\, 3)$ och $(-1,\, 4)$ står på liknande sätt som *kolonner* i högerledet med sina komponenter som koefficienter för a respektive b.

Vi kan uttrycka det som att koordinaterna för $\overline{u}$ uttryckt i (bas)vektorerna $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_2$ är $11/7$ respektive $-3/7$.

Använder vi ett beteckningssystem som innebär att vi skriver $\overline{u} = (2,\, 3)$ som $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ framgår kopplingen ännu tydligare Vi har $\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ och uttrycket $\overline{u} = a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2$ skrivs

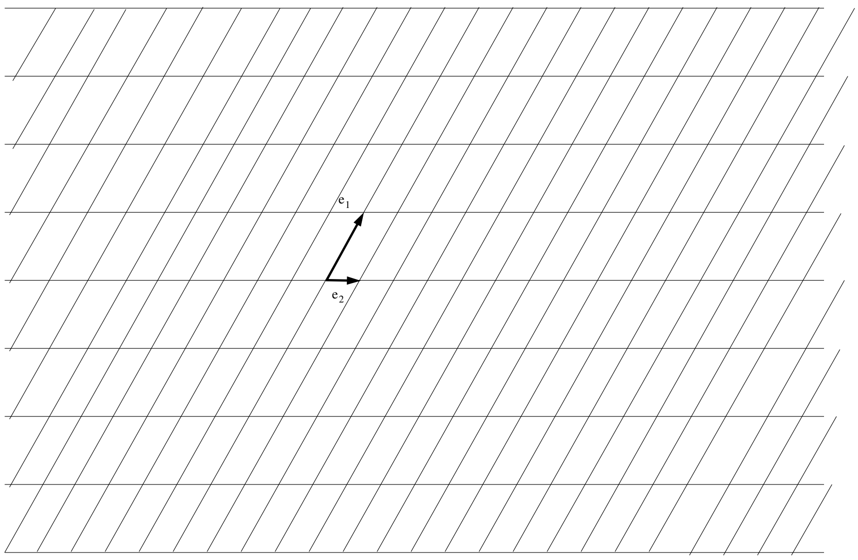
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \tag{2.6.2}$$

att jämföra med 2.6.1.

Att lösa ekvationssystemet ovan kan ses som att man ska sätta ihop två vektorer, som en *linjärkombination*, på rätt sätt för att få en tredje. Är de två vektorerna basvektorer, i planet, så kan alla vektorer i planet skrivas som en linjärkombination av basvektorerna, dvs. det finns en lösning till ekvationssystemet. Genom att betrakta *kolonnerna* i ett ekvationssystem bör man kunna säga något om huruvida det är lösbart eller inte. Kan kolonnerna, sedda som basvektorer kombineras linjärt till en viss given vektor? Dessa mentala bilder är viktiga för din förmåga att förstå sambanden mellan vektorer, ekvationssystem och matriser.

2.10 Övning 2.10. Skriv $(4,\, 5) = a(1,\, 2) + b(1,\, -4)$ på samma form som 2.6.2 och bestäm även a och b. Vilket är ekvationssystemet?

2.11 Övning 2.11. Rita i figuren 2.6.1 vektorerna a) $\overline{a} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, $\overline{b} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$ b) $\overline{a} + \overline{b}$ c) $\overline{c} = -2\overline{e}_1 + \overline{e}_2$. d) $\overline{a} + 3\overline{b}$ och $3\overline{b} - \overline{c}$.



Figur 2.6.1. Rita vektorer.

Exempel 2.7. Med $(x, y)_S$ avses en vektor given i standardbasen. Ange $(2, 3)_S$ med hjälp av basvektorerna $\overline{a}_1 = (1, 2)_S$ och $\overline{a}_2 = (-1, 1)_S$: $A = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$. Detta innebär att vi ska skriva $(2, 3)_S = c_1\,(1, 2)_S + c_2\,(-1, 1)_S$. Koefficienterna c_1 och c_2 är då koordinaterna för $(2, 3)_S$ i basen A. Vi har uttrycket

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

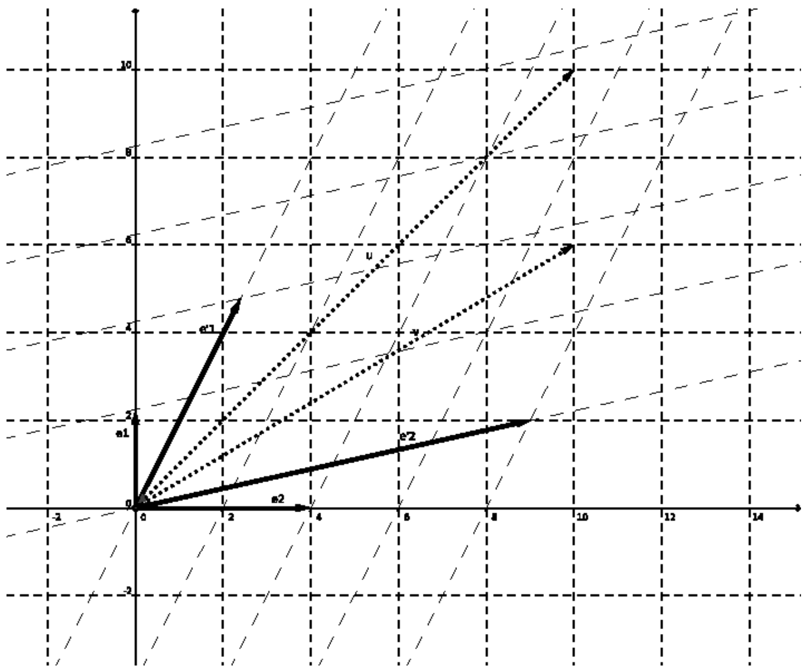
vilket är ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2 &= 1c_1 - 1c_2 \\ 3 &= 2c_1 + 1c_2 \end{aligned}$$

som löses. $5 = 3c_1$ så $c_1 = 5/3$. $c_2 = c_1 - 2 = 5/3 - 6/3 = -1/3$. Vilket innebär att vektorn $(2,3)_S$ ska betecknas i basen A som $(5/3,\ -1/3)_A$.

Övning 2.12. Ange koordinaterna för vektorn $(1,7)_S$ med hjälp av basvektorerna 2.12
$\overline{a}_1 = (1,1)_S$ och $\overline{a}_2 = (-1,3)_S$, $A = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$, genom att ställa upp och lösa ett ekvationssystem. dvs. ange $(1,7)_S$ i basen A: $(x,y)_A$. Rita graf utifrån standardbasen.

Övning 2.13. I figur 2.6.2 finns två vektorer (representanter) u och v . Ange koor- 2.13
dinaterna för dessa två vektorer med hjälp av basvektorerna $e1$ och $e2$. Ange även u och v med hjälp av basvektorerna $e'1$ och $e'2$.



Figur 2.6.2. Vektorer beskrivna utifrån två olika koordinatsystem.

Övning 2.14. Beskriv de olika uppgifterna 2.10-2.13 som är på ett tema. Beskriv 2.14
hur vektorer representeras i de olika uppgifterna.

2.7. Linjärt beroende och oberoende

Vi har tidigare använt geometrisk åskådlighet för att beskriva när vektorer är en bas: två icke-parallella(2D), ej alla 3 i samma plan(3D). Dessa krav formuleras nu algebraiskt; vi byter representation.

En linjärkombination av *vektorerna i mängden* $U = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ är t.ex.

$$\overline{u} = 2\overline{u}_1 + \overline{u}_2 - 3\overline{u}_3 \tag{2.7.1}$$

eller mer allmänt en linjärkombination av 3 vektorer

$$\overline{u} = \lambda_1\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + \lambda_3\overline{u}_3 \tag{2.7.2}$$

där den 4:e vektorn $\overline{u}$ är en linjär-kombination av de tre vektorerna $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$.

2.15 Övning 2.15. I vilket antal dimensioner är 2.7.2 skriven? I 3 dimensioner eller 4 eller det går inte att avgöra.

2.16 Övning 2.16. Uttrycket 2.7.2 kan jämföras med vårt tidigare teorem som säger att om $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ är en bas så kan varje vektor skrivas som

$$\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3. \tag{2.7.3}$$

med entydigt bestämda x_1, x_2 och x_3. Vad är skillnaden mellan 2.7.2 och 2.7.3, dvs. vad innebär det att det är en bas i ena fallet men inte i det andra?

Definition 2.5. Om det i en mängd av vektorer, $U = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_p\}$ där $p \geq 2$, någon av vektorerna är en linjärkombination av de övriga sägs mängden vara linjärt beroende. Om ingen av vektorerna är en linjärkombination av de övriga sägs mängden vara linjärt oberoende.

Här följer påståenden och resonemang kring linjärt oberoende och beroende. Övertyga dig om dem:

- Alla vektorer i ett plan kan skrivas som en linjärkombination av två linjärt oberoende vektorer i planet; alla vektorer i planet är linjärt beroende av basvektorerna. De två basvektorerna sägs *spänna* (eng. span) upp planet.
- Med två linjärt beroende vektorer kan man *inte* skriva *alla* vektorer i planet, dvs. man kan inte konstruera dem med en linjärkombination av de två linjärt beroende vektorerna.
- Har vi 3 vektorer i *planet* så är de linjärt beroende.
- Om alla 3 vektorer i planet är parallella spänner de bara upp en linje.
- Om endast 2 av 3 vektorer i planet är parallella spänner de 3 vektorerna upp ett plan.
- Om de 3 vektorerna i planet inte är parallella spänner de upp planet; vilken som helst av de 3 vektorerna kan skrivas som en linjärkombination av de andra två i detta fall.
- Om de 3 vektorerna i planet spänner upp planet är de linjärt beroende; ändå kan det vara så att en av dem inte kan skrivas som en linjärkombination av de andra, t.ex. om två är parallella kan de inte kombineras till den tredje som inte är parallell med de andra två.
- Alla vektorer i *rummet,* $\mathbb{R}^3$, kan skrivas med hjälp av tre linjärt oberoende vektorer.
- Om alla 3 vektorer i *rummet,* $\mathbb{R}^3$*,* är parallella spänner de bara upp en linje.
- Har vi 4 vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$ så är de linjärt beroende.
- Om vi har 3 linjärt oberoende i rummet, $\mathbb{R}^3$, så är de en bas. Lägger vi till en vektor i $\mathbb{R}^3$ blir mängden linjärt beroende. Tar vi bort en vektor så spänns inte rummet $\mathbb{R}^3$ upp.
- Att ha en bas innebär att man har maximala antalet linjärt oberoende vektorer, dvs. lika många vektorer som det är dimensioner.

Anmärkning 2.13. Vi säger att två vektorer spänner upp ett rum (det linjära höljet). Rummet kan vara 0 dimensioner eller 1 eller 2 dimensioner men inte fler dimensioner. Den engelska termen är 'span'. På svenska benämns det ibland som det linjära höljet.

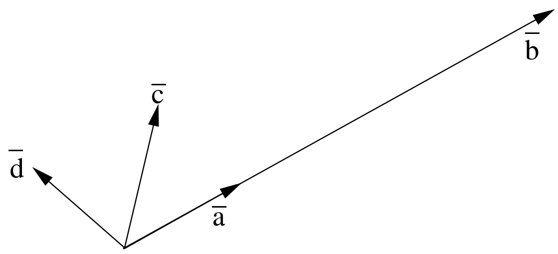
ÖVNING 2.17. Skriv $(2,\ 3) = \lambda_1\,(1,\ 4) + \lambda_2\,(-1,\ -2) + \lambda_3\,(2,\ 2)$, på minst tre sätt, dvs. finn 3 olika uppsättningar av λ_1, λ_2 och λ_3. Uttrycket innebär att vektorn $(2,\ 3)$ i planet kan skrivas på flera sätt som en linjärkombination av de 3 vektorerna i planet. Sätt upp ett ekvationssystem och lös det. 2.17

Frågor kring linjärt beroende och oberoende uppkommer allmänt i frågeställningar som:

- Ligger vektorn $(x,\ y,\ z)$ i planet som spänns upp av $(1, 2, 0)$ och $(0, 1, 1)$? Om $(x,\ y,\ z)$ ligger i planet så är den linjärt beroende.
- Om jag ska välja 4 linjärt oberoende vektorer för att nå alla punkter i ett 4-dimensionellt rum, hur vet jag att de vektorer jag valt verkligen är linjärt oberoende? Jag har t. ex. valt $(1, 2, 1, 0)$, $(0, -1, 2, 3)$, $(1, 1, 1, 1)$, hur finner jag en fjärde som är linjärt oberoende av dessa 3?

ÖVNING 2.18. Fyll i mellanrummen med 'linjärt beroende' eller 'linjärt oberoende', se figur 2.7.1: 2.18

- $\overline{b}$ är ____ av $\overline{a}$
- $\overline{a}$ är ____ av $\overline{b}$
- $\overline{c}$ är ____ av $\overline{d}$, $\overline{a}$
- $\overline{d}$ är ____ av $\overline{c}$
- $\overline{d}$ är ____ av $\overline{c}$, $\overline{d}$



FIGUR 2.7.1. 4 vektorer i planet.

EXEMPEL 2.8. Undersök om de tre vektorerna är linjärt beroende: $(2,\ -1,\ 1)$, $(3,\ -4,\ -2)$, $(5,\ -10,\ -8)$. Ett sätt att lösa detta är att se vilka lösningar som finns till $(2,\ -1,\ 1) = a(3,\ -4,\ -2) + b(5,\ -10,\ -8)$. Vilket kan skrivas som ett ekvationssystem

$$\begin{aligned} 3a + \ \ 5b &= \ \ 2 \\ -4a - 10b &= -1 \\ -2a - \ \ 8b &= \ \ 1 \end{aligned}$$

Vi beräknar $-2(3) + (2)$ som ger $16b - 10b = -2 - 1$, dvs. $b = -0,5$ och därmed $a = 1,5$. Vi kan skriva $(2,\ -1,\ 1) = 1,5(3,\ -4,\ -2) - 0,5(5,\ -10,\ -8)$; de är linjärt beroende. För insiktens skull gör vi systemet homogent genom att studera $\overline{0} = -(2,\ -1,\ 1) + a(3,\ -4,\ -2) + b(5,\ -10,\ -8)$ och mer allmänt genom att sätta koefficienter framför alla 3 vektorerna $\overline{0} = \lambda_1(2,\ -1,\ 1) + \lambda_2(3,\ -4,\ -2) + \lambda_3(5,\ -10,\ -8)$. Denna form används vanligtvis vid undersökningar av linjärt beroende. Om vi sätter upp detta system erhålls

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \ \ 5\lambda_3 &= 0 \\ -1\lambda_1 - 4\lambda_2 - 10\lambda_3 &= 0\,. \\ 1\lambda_1 - 2\lambda_2 - \ \ 8\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi beräknar (2) + (3) och erhåller $-\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$. Och 2(2) + (1) ger $-\lambda_2 - 3\lambda_3$. Dessa, (3) och (1), två är lika så vi behöver en parameter. $t = \lambda_3$. $\lambda_2 = -3t$ och $\lambda_1 = 2\lambda_2 + 8\lambda_3 = -6t + 8t = 2t$. Vi erhåller

$$\overline{0} = 2t(2,\ -1,\ 1) - 3t(3,\ -4,\ -2) + t(5,\ -10,\ -8)$$

och inser att varje värde på t ger en lösning. Vi sätter $t = 1$: $\overline{0} = 2(2,\ -1,\ 1) - 3(3,\ -4,\ -2) + (5,\ -10,\ -8)$. Om vi nu löser ut vektorn $(2,\ -1,\ 1)$ får vi samma koefficienter som i den första lösningen. Vektorerna är således linjärt beroende.

Vad händer med våra lösningar om vektorerna är linjärt oberoende? Vi studerar därför $(2,\ -1,\ 0) = a(3,\ -4,\ -2) + b(5,\ -10,\ -8)$ som ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 3a + \ \ 5b &= \ \ 2 \\ -4a - 10b &= -1\,. \\ -2a - \ \ 8b &= \ \ 0 \end{aligned}$$

Den nedersta ger oss $a = -4b$. Detta insatt i (2) ger $-4(-4b) - 10b = -1$ dvs. $6b = -1$ $b = -1/6$ och $a = -4(-1/6) = 4/6 = 2/3$. Men detta insatt i (1) ger $3 \cdot 2/3 + 5 \cdot (-1/6) = 2 - 5/6 = 7/6 \neq 2$. Vi har inga lösningar. Vi löser vårt homogena system istället, på samma sätt som tidigare, som nu är

$$\begin{array}{rrrl} 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +5\lambda_3 & = 0 \\ -1\lambda_1 & -4\lambda_2 & -10\lambda_3 & = 0\,. \\ & -2\lambda_2 & -8\lambda_3 & = 0 \end{array}$$

Vi börjar med att eliminera λ_1 i (1) och får $-5\lambda_2 - 15\lambda_3 = 0$ dvs. $-\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$ vilket motsäger (3). Vi saknar icke-triviala lösningar. Naturligtvis har vi lösningen att alla $\lambda_i = 0$; lösningen innebär att vi tar 0 av alla vektorerna för att få nollvektorn. Så om vektorerna är linjärt oberoende får vi *enbart den triviala lösningen.* Om de är linjärt beroende får vi också den triviala lösningen, $t = 0$ ger alla $\lambda_i = 0$, men *inte enbart den.*

Vi har funnit i exemplen att linjärt beroende ger parameterlösningar och linjärt oberoende ger enbart den triviala lösningen. Naturligtvis har vi inte bevisat det men det är ett mönster att fundera kring.

Exempel 2.9. Är följande vektorer linjärt oberoende eller beroende? a) $(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ 0)$ b) $(1,\ 2,\ 3)$, $(-1,\ 6,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 2)$.

a) Ekvationen $\lambda_1\,(1,\ 1,\ 1) + \lambda_2\,(1,\ 1,\ -1) + \lambda_3\,(1,\ 0,\ 0) = (0,\ 0,\ 0)$ kan skrivas som ett ekvationssystem

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Som vi löser genom (2) + (3) och får

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

så om vi börjar med (3): $2\lambda_1 = 0$ erhålls $\lambda_1 = 0$. (2) är $1\lambda_1 + 1\lambda_2 = 0$ som ger att $\lambda_2 = 0$ och på liknande sätt $\lambda_3 = 0$. De är linjärt oberoende eftersom vi erhåller endast den triviala lösningen.

b) $\lambda_1\,(1,\ 2,\ 3) + \lambda_2\,(-1,\ 6,\ 1) + \lambda_3\,(1,\ 0,\ 2) = (0,\ 0,\ 0)$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Använd (1) för att eliminera variabel 3 i (3).

$$\begin{array}{cc} 1 & -1\,1\,0 \\ 2 & 6\,0\,0 \\ 1 & 3\,0\,0 \end{array}$$

Använd (3) för att eliminera variabel 2 i (2) (eller så ser man redan nu att de är multiplar av varandra).

$$\begin{array}{cc} 1 & -1\,1\,0 \\ 0 & 0\,0\,0 \\ 1 & 3\,0\,0 \end{array}$$

Vi inför en parameter t så $\lambda_1 = t$. Vi får från (3) $t + 3\lambda_2 = 0$ vilket innebär $\lambda_2 = -t/3$. Och från (1) $t - (-t/3) + \lambda_3 = 0$ som innebär $\lambda_3 = -4t/3$. Således är de linjärt beroende $t\,(1,\,2,\,3) - \frac{t}{3}\,(-1,\,6,\,1) - \frac{4t}{3}\,(1,\,0,\,2) = (0,\,0,\,0)$. Vi sätter som exempel $t = 3 : 3\,(1,\,2,\,3) - (-1,\,6,\,1) - 4\,(1,\,0,\,2) = (0,\,0,\,0)$.

Övning 2.19. Är följande vektorer linjärt beroende eller oberoende? En del fall går att genomskåda enklare än att sätta upp ekvationssystem. 2.19

(1) $(1,\,1,\,1)$, $(3,\,1,\,2)$
(2) $(1,\,0,\,2)$, $(-2,\,0,\,-4)$
(3) $(1,\,1,\,1)$, $(3,\,1,\,2)$, $(0,\,1,\,2)$
(4) $(0,\,1,\,1)$, $(1,\,0,\,1)$, $(1,\,1,\,0)$
(5) Ligger $(0,\,5,\,-1,\,0)$ i planet som spänns upp av $(1,\,3,\,-1,\,1)$ och $(2,\,1,\,-1,\,2)$?

Teorem 2.2. *Bassatsen.*

(1) Två/Tre vektorer i planet/rummet är en bas om och endast om ($\Leftrightarrow$) de är linjärt oberoende.
(2) Fler än två/tre vektorer i planet/rummet är ($\Rightarrow$) linjärt beroende.

Vi lämnar satsen utan bevis.

Övning 2.20. Lös uppgifterna 1 och 2 för både 2 och 3 dimensioner. 2.20

(1) Om $\overline{u}_1$ är linjärt oberoende av $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_2$ är linjärt oberoende av $\overline{u}_3$ är då $\overline{u}_1$ linjärt oberoende av $\overline{u}_3$?
(2) De tre vektorerna $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$ är parvis linjärt oberoende av varandra är det då sant att $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$ är linjärt oberoende?
(3) Jämför de två språkliga uttrycken "$\overline{u}_1$ är linjärt beroende av $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$" och "$\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$ är linjärt beroende". Den som uttalar dem avser säga samma sak.
(4) Jämför de två språkliga uttrycken "$\overline{u}_1$ är linjärt oberoende av $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$" och "$\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$ är linjärt oberoende". Den som uttalar dem avser säga samma sak.

Anmärkning 2.14. Om $\overline{u}_1$ är linjärt beroende av $\overline{u}_2$, dvs. $\overline{u}_1 = a\overline{u}_2$ så är de tre vektorerna $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$ linjärt beroende även om $\overline{u}_3$ inte har samma riktning som $\overline{u}_1$ ty $\overline{u}_1 = a\overline{u}_2 + 0\overline{u}_3$. Det räcker med att minst en av koefficienterna är skild från 0. Finns det någon form av linjärt beroende i en mängd av vektorer anges *mängden* som linjärt beroende.

EXEMPEL 2.10. Om tre vektorer är linjärt beroende kan de skrivas

$$\overline{u}_1 = \lambda_2\overline{u}_2 + \lambda_3\overline{u}_3$$

med något $\lambda_i \neq 0$, vilket kan skrivas om som

$$-\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + \lambda_3\overline{u}_3 = \overline{0}.$$

Eftersom koefficienterna är godtyckliga (kan multiplicera likheten med ett godtyckligt tal, skilt från 0) så skrivs det mer allmänt som

$$\lambda_1\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + \lambda_3\overline{u}_3 = \overline{0}.$$

Och här vet vi i vårt exempel att koefficienterna inte alla är 0; om vi löser ekvationssystemet får vi λ_i som inte alla är 0.

EXEMPEL 2.11. Om den allmänna ekvationen för att undersöka linjärt beroende eller oberoende, $\lambda_1\overline{u}_1+\lambda_2\overline{u}_2+\lambda_3\overline{u}_3 = \overline{0}$, bara kan ge $\overline{0}$ genom den *triviala* lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ så är de linjärt oberoende. Om de är linjärt beroende kommer vi att kunna finna andra tal (minst ett) än 0 för λ_i, t.ex. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = 5$ så att

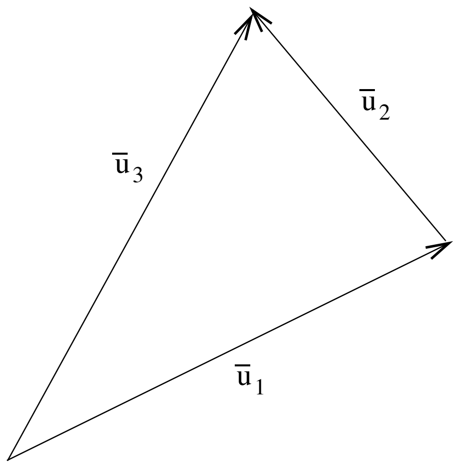
$$2\overline{u}_1 + 3\overline{u}_2 + 5\overline{u}_3 = \overline{0}$$

där t.ex. $\overline{u}_2$ kan lösas ut

$$\overline{u}_2 = -\frac{5}{3}\overline{u}_3 - \frac{2}{3}\overline{u}_1.$$

Extrauppgift: Hur många gånger har detta påstående gjorts i denna text och på hur många olika sätt? Försök själv uttrycka det på flera sätt.

EXEMPEL 2.12. Betrakta en vektor $\overline{u}_3$, i $\mathbb{R}^3$, som är en linjärkombination av två andra vektorer $\overline{u}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Föreställ dig detta geometriskt se figur 2.7.2. Vänd på $\overline{u}_3$ och addera vektorerna: vi ska alltså addera $-\overline{u}_3$ och $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_2$, och erhåller då naturligtvis $\overline{0}$ eftersom $\overline{u}_1 + \overline{u}_2 + (-\overline{u}_3) = \overline{u}_3 + (-\overline{u}_3) = \overline{0}$. Om de tre vektorerna däremot inte är linjärt beroende (dvs. är linjärt oberoende) så är enda möjligheten att lägga ihop tre vektorer till $\overline{0}$ att ta 0 av varje vektor $0\overline{u}_1 + 0\overline{u}_2 + 0\overline{u}_3 = \overline{0}$.



FIGUR 2.7.2. Linjärt beroende.

TEOREM 2.3.

(1) Att vektorer är linjärt beroende är ekvivalent med att det finns tal λ_i vilka minst ett är skilt från 0 så att

$$\lambda_1\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + ... + \lambda_n\overline{u}_n = \overline{0}.$$

Vilket innebär att ekvationssystemet har icke-trivial lösning eftersom λ_i är de obekanta.

(2) Att vektorer är linjärt oberoende är ekvivalent med att systemet bara har den triviala lösningen $\lambda_i = 0$ för alla i.

Bevis. Beviset har vi i princip redan utfört. Att de båda påståendena är lika har diskuterats före satsen.

Vi bevisar skissartat ekvivalensen i det första påståendet. Att vektorer är linjärt beroende ($\Rightarrow$) innebär att en vektor är en linjärkombination av de andra och då gäller $\overline{u}_1 = \lambda_2\overline{u}_2 + ... + \lambda_p\overline{u}_p$, eftersom numreringen inte är väsentlig. Uttrycket kan skrivas om som $-\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + ... + \lambda_p\overline{u}_p = \overline{0}$ där vi helt säkert har minst en koefficient skild från 0 och således en icke-trivial lösning. Om vi börjar med ($\Leftarrow$) att det finns tal λ_i så att vi kan skriva $\lambda_1\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + ... + \lambda_n\overline{u}_n = \overline{0}$ så kan vi lösa ut en vektor $\overline{u}_1$ så

$$\overline{u}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{u}_2 - ... - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\overline{u}_p$$

vilket innebär linjärt beroende. □

Anmärkning 2.15. Om det bra finns *en* vektor? Om $\overline{u} = \overline{0}$ så kan kan vi finna ett tal λ så att $\lambda\overline{u} = \overline{0}$, tex. $\lambda = 2$. Vektorn $\overline{u} = \overline{0}$ är linjärt beroende. Därav ordalydelsen 'vilka minst ett är skilt från 0. För en vektor skild från $\overline{0}$ så kan vi inte finna ett λ skilt från 0 så att produkten ändå blir $\overline{0}$, λ måste vara 0, således är en enstaka vektor skild från nollvektorn linjärt oberoende.

Övning 2.21. Övertyga dig om följande: 2.21

(1) Två vektorer i planet är en bas $\Leftrightarrow$De är linjärt oberoende.
(2) Tre vektorer i rummet är en bas $\Leftrightarrow$ De är linjärt oberoende.
(3) Fler än två vektorer i planet är linjärt beroende och fler än tre vektorer i rummet är linjärt beroende.
(4) Två vektorer är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ De är parallella.
(5) Tre vektorer är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ De är i samma plan.

Anmärkning 2.16. Vektorerna $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n$ sägs spänna upp ett rum (linjära höljet) med en dimension $k \leq n$ om för varje vektor $\overline{v}$ i rummet så kan vi finna tal $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ så att $\lambda_1\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + ... + \lambda_n\overline{u}_n = \overline{v}$. Det kan finnas flera lösningar för talen λ_i. Om vektorerna $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n$ är linjärt oberoende och spänner upp ett rum så är de en bas för rummet och λ_i är entydigt bestämda.

Övning 2.22. Linjärt beroende och oberoende om en vektor läggs till eller tas bort. 2.22

(1) Mängden $M = \left\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}\right\}$ av vektorer är linjärt oberoende. Vad kan man säga om linjärt beroende/oberoende om 1 vektor tas bort från mängden?
(2) Mängden M av vektorer är linjärt beroende. Vad kan man säga om linjärt beroende/oberoende om 1 vektor tas bort från mängden?
(3) Mängden M av vektorer är linjärt oberoende. Vad kan man säga om linjärt beroende/oberoende om 1 vektor läggs till mängden?

(4) Mängden M av vektorer är linjärt beroende. Vad kan man säga om linjärt beroende/oberoende om 1 vektor läggs till mängden?

Anmärkning 2.17. Övningarna och exemplena handlar om linjärt beroende/oberoende formulerat på lite olika sätt. Om du börjar tycka det är tjatigt är det bra.

2.8. Introduktion Basbyte

Vi har sett att representationen av en vektor i komponentform beror på valet av bas. Frågan är då hur man enkelt kan göra ett basbyte? Detta är en introduktion och kommer att behandlas mer senare. Vi studerar ett exempel och iakttager mönster.

Exempel 2.13. *Ibland är det enklare att börja med ett exempel än att börja med definitioner eller regler.* Låt $e = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ vara en bas i planet. Vektorerna

$$\begin{cases} \overline{e}_1' &= 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \\ \overline{e}_2' &= 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 \end{cases} \tag{2.8.1}$$

utgör också en bas ty de är inte parallella, $e' = \{\overline{e}_1', \overline{e}_2'\}$. En vektor $\overline{u}$ skrivs i basen e som

$$\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$$

medan i basen e' skrivs den som

$$\overline{u} = x_1'\overline{e}_1' + x_2'\overline{e}_2'. \tag{2.8.2}$$

Detta är två olika representationer, olika baser, av samma matematiska objekt. Om vi i det primade uttrycket, 2.8.2 sätter in 2.8.1 erhålls

$$\overline{u} = x_1'\left(4\overline{e}_1 + \overline{e}_2\right) + x_2'\left(2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2\right)$$

där vi flyttar om och samlar koefficienter framför basvektorerna

$$\overline{u} = \left(4x_1' + 2x_2'\right)\overline{e}_1 + \left(x_1' + 3x_2'\right)\overline{e}_2.$$

Lägg märke till hur det som står framför $\overline{e}_1$bildas: det är 4 och 2 från första *kolonnen,* framför $\overline{e}_1$, i 2.8.1, samt 1 och 3 från andra kolonnen, framför $\overline{e}_2$. Således

$$\begin{cases} x_1 = & 4x_1' + 2x_2' \\ x_2 = & x_1' + 3x_2' \end{cases}. \tag{2.8.3}$$

Anmärkning 2.18. Tankegången ovan är central för att förstå beräkningar kring basbyte. Studera den noga.

2.23 Övning 2.23. Låt $e = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ vara en bas i planet. Vektorerna

$$\begin{cases} \overline{e}_1' &= 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 \\ \overline{e}_2' &= \overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 \end{cases}$$

utgör också en bas ty de är inte parallella, $e' = \{\overline{e}_1', \overline{e}_2'\}$. Ange matrisen som avbildar x_1' och x_2' på x_1 och x_2. *Arbeta dig igenom exempel 2.13 och förklara för dig själv stegen i resonemanget.*

Anmärkning 2.19. Observera att i föregående exempel står det "Låt $e = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ vara en bas i planet. Vektorerna

$$\begin{cases} \overline{e}_1' &= 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \\ \overline{e}_2' &= 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 \end{cases}$$

utgör också en bas..." Det innebär att basen $e = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ kan vara vilken bas som helst, den är inte given. Avbildningen beskriver enbart *förändringen*, hur e'

konstrueras ur e. En avbildning gäller för 'alla' vektorer; frågan är bara vilka vi väljer som grund-vektorer. Om basen avbildas enligt angivet så avbildas alla andra vektorer i rummet på samma sätt.

EXEMPEL 2.14. Samma exempel en gång till men på ett litet annat sätt. Säg att vi har en vektor $\overline{u}$ uttryckt i basen e som $(2,3)_e$. Vad har den för koordinater i basen e' enligt basbytet

$$\begin{cases} \overline{e}'_1 &= 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \\ \overline{e}'_2 &= 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 \end{cases}.$$

Låt oss studera detta i detalj. Vi har två vektorer $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$. Om vi tar en viss mängd av $\overline{e}_1$ och en viss mängd av $\overline{e}_2$ så via vektoraddition ger detta $(2,3)_e$. Vi ska ta $2\overline{e}_1$och $3\overline{e}_2$ och (vektor)addera dem för att få $\overline{u} = (x_1,\, x_2) = (2,3)_e = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$. Om vi nu väljer två andra vektorer som bas, hur skriver vi vektorn $(2,3)_e$? Vektorn finns där oavsett vilka basvektorer vi använder; det gäller bara att finna de rätta mängderna av de nya basvektorerna. Vad ska fyllas i för värden på x'_1 och x'_2 för att vi ska kunna skriva $\overline{u} = (x'_1,\, x'_2)_{e'} = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2$? Vi har samma vektor $\overline{u}$ men olika basvektorer och därför olika koordinater. I exemplet uttryckte vi $\overline{u}$ på två olika sätt och räknade därmed ut de nya koordinaterna (koefficienterna framför basvektorerna). Nu gör vi annorlunda och tänker att vi ska direkt sätta in i $\overline{u} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$ uttrycken för vad $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ är i basen $e' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\}$. Vi måste lösa ut $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ ur ekvationssystemet. Vi erhåller

$$\begin{cases} \overline{e}_1 &= \frac{3}{10}\overline{e}'_1 - \frac{1}{10}\overline{e}'_2 \\ \overline{e}_2 &= -\frac{1}{5}\overline{e}'_1 + \frac{2}{5}\overline{e}'_2 \end{cases}.$$

Dessa två uttryck anger hur mycket vi ska ta av $\overline{e}'_1$ och $\overline{e}'_2$ för att skapa vektorerna $\overline{e}_1$ respektive $\overline{e}_2$. Vi får för $\overline{u}$

$$\overline{u} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 = 2\left(\frac{3}{10}\overline{e}'_1 - \frac{1}{10}\overline{e}'_2\right) + 3\left(-\frac{1}{5}\overline{e}'_1 + \frac{2}{5}\overline{e}'_2\right) =$$
$$\left(\frac{6}{10} - \frac{6}{10}\right)\overline{e}'_1 + \left(-\frac{2}{10} + \frac{12}{10}\right)\overline{e}'_2 = 0\overline{e}'_1 + 1\overline{e}'_2 = (0,\, 1)_{e'}\,.$$

Om nu $(0,\, 1)_{e'} = (x'_1,\, x'_2)$ sätts in i det tidigare 2.8.3

$$\begin{cases} x_1 = & 4x'_1 + 2x'_2 \\ x_2 = & x'_1 + 3x'_2 \end{cases}$$

erhålls $x_1 = 2$ och $x_2 = 3$, vilket var de koordinater vi startade med (i basen e).

ANMÄRKNING 2.20. Vi erhöll $(x'_1,\, x'_2) = (0,\, 1)$ vilket således är koordinaterna för vår vektor i basen e'. Dessa koordinater kan också bestämmas genom att lösa ut x'_1 och x'$_2$ ur 2.8.3,

$$\begin{cases} x_1 = & 4x'_1 + 2x'_2 \\ x_2 = & x'_1 + 3x'_2 \end{cases}.$$

Lösningen är

$$\begin{cases} x'_1 = & 0,3x_1 - 0,2x_2 \\ x'_2 = & -0,1x_1 + 0,4x_2 \end{cases}.$$

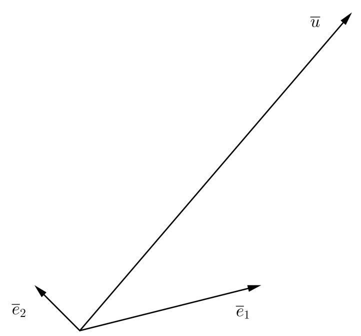
Där vi konstaterar att om $(x_1,\, x_2) = (2,\, 3)$ sätts in så erhålls $(x'_1,\, x'_2) = (0,\, 1)$.

ÖVNING 2.24. Uttryck mönstret, för hur koefficienternas platser ändras, så tydligt du kan. Jämför hur relationen mellan $\overline{e}$ och $\overline{e}'$ skrivs i förhållande till relationen mellan x och x'. Använd begrepp som rader och kolonner samt primade och oprimade symboler för att uttrycka vad som händer. 2.24

2.25 Övning 2.25. Vektorerna $\overline{e}_1'$, $\overline{e}_2'$ och $\overline{e}_3'$ har koordinaterna $(1,0,1)$, $(1,2,1)$ respektive $(1,-1,-1)$ i basen $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Skriv påståendet på samma form som i 2.8.1. Visa att mängden $\{\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\}$ verkligen är linjärt oberoende och kan användas som bas. Bestäm ett samband mellan koordinaterna i de två baserna. Skriv planet $2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3 = 0$ med hjälp av de primade koordinaterna. *Förklara för dig själv tankegången som löser uppgiften, motivera stegen i tankegången.*

2.26 Övning 2.26. Gör det algebraiska geometriskt.

(1) I figur 2.8.1 finns två basvektorer $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$. Uttryck vektorn $\overline{u}$ i denna bas, dvs. ange koordinaterna x_1 och x_2 för $\overline{u}$ i denna bas.
(2) Konstruera två nya basvektorer enligt uttrycket i 2.8.1.
(3) Uttryck vektorn $\overline{u}$ med hjälp av de två nya basvektorerna $\overline{e}_1'$ och $\overline{e}_2'$, dvs. ange koordinaterna x_1' och x_2' i denna bas.
(4) Konstatera därefter att koordinaterna uppfyller sambandet enligt 2.8.3.



Figur 2.8.1. Uttryck vektorn $\overline{u}$ med hjälp av basvektorerna $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$.

Exempel 2.15. För att erhålla de primade koordinaterna i oprimade löses ekvationssystemet. I ekvationssystemet 2.8.3

$$\begin{cases} x_1 = 4x_1' + 2x_2' \\ x_2 = x_1' + 3x_2' \end{cases}$$

utförs $-4\,(2) + (1)$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 2x_2' - 12x_2' \\ x_2 = x_1' + 3x_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -10x_2' \\ x_2 = x_1' + 3x_2' \end{cases}$$

så att $x_2' = -\frac{1}{10}\,(x_1 - 4x_2)$ och slutligen erhålls

$$\begin{cases} x_1' = \frac{3}{10}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \\ \\ x_2' = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \end{cases}.$$

Sammanfattningsvis vid basbyte (ny bas som funktion av gammal bas) så

(1) byts rader mot kolonner avseende koefficienter, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) och oprimade (gamla) mot primade (nya) beteckningar (gamla koordinater uttryckt i nya),

$$\begin{aligned} \bar{e}_1' &= 4\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' &= 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 \\ \downarrow & \qquad \downarrow \\ x_1 &= 4x_1' + 2x_2' \\ x_2 &= x_1' + 3x_2' \end{aligned}$$

(3) och för att erhålla primade (nya) koordinater beräknas lösningen till föregående ekvationssystem med koordinater.

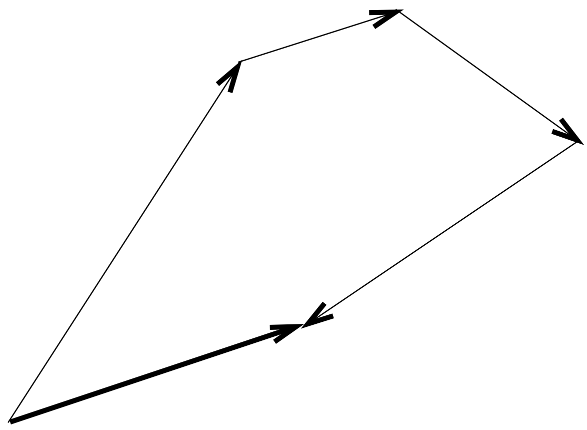
Vi fördjupar oss i detta när matriser behandlats mer systematiskt.

Övning 2.27. Om du har (x_1, x_2) uttryckt i (x_1', x_2') hur bestämmer du relationen mellan *baserna*? Använd 2.27

$$\begin{cases} x_1 = & 4x_1' + 2x_2' \\ x_2 = & x_1' + 3x_2' \end{cases}.$$

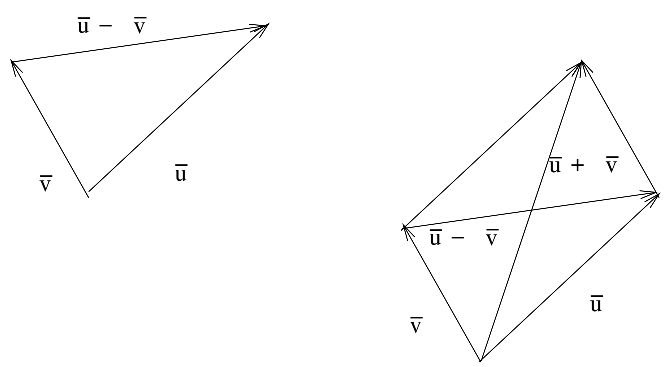
2.9. Facit övningar

2.1Vektorsumman representeras av den tjocka pilen.



FIGUR 2.9.1. Vektorsumma enligt polygonmetoden.

2.2 Jag har observerat fyra sätt att tänka. Om $\overline{u}-\overline{v}$ ska beräknas så ges differensen av vektorn från $\overline{v}$:s spets till $\overline{u}$:s spets och man associerar det med att differensen går "tillbaka" från $\overline{v}$ till $\overline{u}$ motsatt läsriktningen. Andra ser det som att summan är den ena diagonalen i parallellogrammen och differensen den andra. Ett tredje sätt är att tänka $\overline{v}+(\overline{u}-\overline{v})=\overline{u}$, dvs. att den sökta vektorn $\overline{u}-\overline{v}$ ska adderas till $\overline{v}$ så att $\overline{u}$ erhålls. Se figur 2.9.2. (Det fjärde är att vända $\overline{v}$ till $-\overline{v}$ och därefter addera $\overline{u}$. Men det alternativet ingick inte i uppgiften.)



FIGUR 2.9.2. Tankegångar vid subtraktion av vektorer.

2.3 En vektor till mötespunkten är $M=\frac{1}{2}\left((2,3,-4)+(10,3,-6)\right)=\frac{1}{2}(12,6,-10)=(6,3,-5)$.

2.4 Låt oss sätta $\overline{OA}=(2,\ 2,\ 1)$, $\overline{OB}=(-1,\ 0,\ 1)$ och $\overline{OC}=(0,\ 2,\ 1)$. Vi erhåller

$$\overline{OM}=\frac{1}{3}\left((2,\ 2,\ 1)+(-1,\ 0,\ 1)+(0,\ 2,\ 1)\right)=\frac{1}{3}(1,\ 4,\ 3)\,.$$

2.5 Det matematiska rummet. Det i matematisk mening krökta rummet är en metafor för det fysiska rummet. Utför vi beräkningar i det matematiska rummet har vi funnit att de resultat vi erhåller överensstämmer med vad vi mäter i det fysiska rummet. Det krökta matematiska rummet är en modell som vi använder för att representera det fysiska rummet. Det finns andra metaforer som skulle kunna ge samma resultat, och i framtiden kanske vi behöver en annan modell.

2.6 Om $x_2 - x_2' = 0$ så har vi

$$(x_1 - x_1')\,\overline{e}_1 = 0\overline{e}_2$$

vilket betyder att $x_1 - x_1' = 0$ dvs. att all koefficienterna är lika, det finns inte två sätt att skriva vektorn på. Om $\overline{u} = \overline{0}$ så är $x_1 = x_1' = 0$ och $x_2 = x_2' = 0$, de är entydigt bestämda. Observera att $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ inte kan vara nollvektorer eftersom nollvektorn är parallell med alla vektorer och kravet i satsen är att $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ inte är parallella.

2.7 Antag att det finns två sätt att skriva en vektor $\overline{u}$ på. På samma sätt som tidigare har vi

$$(\overline{u} =)\, x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 = x_1'\overline{e}_1 + x_2'\overline{e}_2 + x_3'\overline{e}_3.$$

Flytta om

$$(x_1 - x_1')\,\overline{e}_1 = -\,(x_2 - x_2')\,\overline{e}_2 - (x_3 - x_3')\,\overline{e}_3$$

och dividera med $x_1 - x_1'$ som är skild från 0. Vi erhåller

$$\overline{e}_1 = \frac{-(x_2 - x_2')}{(x_1 - x_1')}\overline{e}_2 + \frac{-\,(x_3 - x_3')}{(x_1 - x_1')}\overline{e}_3.$$

Detta visar att $\overline{e}_1$ är summan av de två andra vektorerna: $\overline{e}_1 = \lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3$, således ligger de i samma plan. Men vi har utgått från att vektorerna $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ och $\overline{e}_3$ inte ligger i samma plan.

2.8 Det som inte är sant i efterledet är att koordinaterna är entydiga. Det som är sant är att vektorn $\overline{u}$ kan skrivas på formen $\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$. Satsen är falsk. 3 vektorer i planet är linjärt beroende vilket medför att koefficienterna inte är entydiga. Om man sätter upp och löser ekvationssystemet så får man fler än en lösning.

2.9 1. Vi använder detta sätt då basen ej kan missförstås, vi anger komponenterna som ett ordnat par. 2. Vektorerna uttryckta i sin bas. 3. Regler för addition av vektorer. 4. Vi byter representation och anger talen framför varje basvektor.

2.10

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

med $a = 3,5$ och $b = 0,5$. Ekvationssystemet är

$$\begin{aligned} a + b &= 4 \\ 2a - 4b &= 5 \end{aligned}.$$

2.11

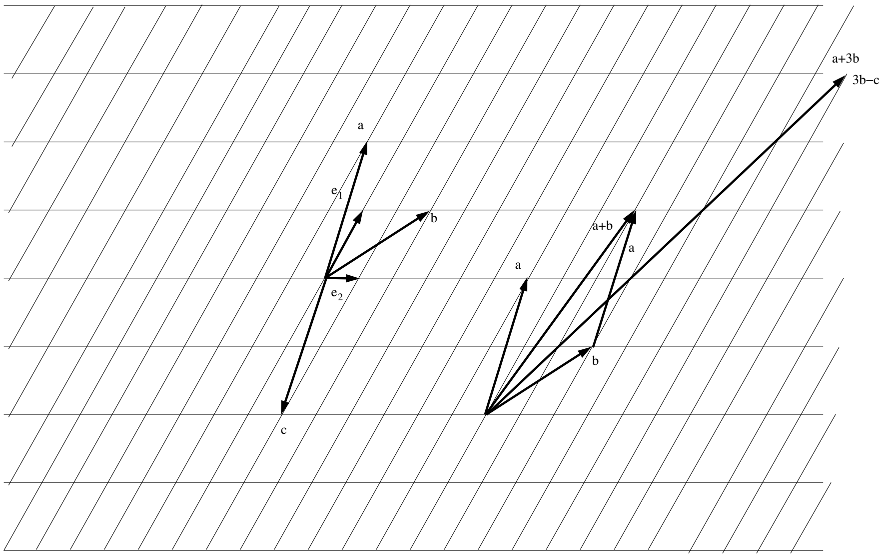
2.12 Ekvationssystemet är

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{aligned} a - b &= 1 \\ a + 3b &= 7 \end{aligned}$$

som genom $-$ (1)+(2) ger $-1+7 = 4b$ så $b = 1,5$ och $a = 1+b = 2,5$. Således $(1,7) = 2,5\,(1,1) + 1,5\,(-1,3)$. Det innebär att vektorn, kalla den $\overline{u}$, har ursprungligen



FIGUR 2.9.3. Ritade vektorer.

koordinaterna $(1, 7)$ i ett *okänt* koordinatsystem. De nya basvektorerna, angivna i det ursprungliga, okända, systemets basvektorer är $(1, 1)$ och $(-1, 3)$. I dessa basvektorer har vektorn $\overline{u}$ koordinaterna $(2, 5; 1, 5)$. Ibland kan det vara enklare att tänka på det som att $(1, 7)$ är given i basen $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

2.13 u: I $e1$ och $e2$ är koordinaterna 5 respektive $2, 5$. I $e'1$ och $e'2$ är koordinaterna $1, 92$ respektive $0, 61$.

2.14

2.10 Vektorer på komponentform. Bestäm koordinaterna a och b. $(4,\ 5) = a(1,\ 2) + b(1,\ -4)$.

2.11 Basvektorer givna grafiskt, rita nya vektorer. Konstruktion av vektorer i ett snett system.

2.12 Ange en vektor i nya basvektorer, Komponentform.

2.13 Två vektorer anges i två olika baser. Grafisk framställning.

2.15 Antalet dimensioner framgår inte, det går inte att avgöra. T.ex. kan vektorn $\overline{u}_1 = (1, 1, 1)$ och då är den i 3 dimensioner. Men den kan också vara $\overline{u}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ och är då i 5 dimensioner.

2.16 I 2.7.2 ska en vektor skrivas som en linjärkombination av tre vektorer, det är allt. Dessa tre vektorer behöver inte vara en bas; vi kan vara i ett rum med fem basvektorer. Tre vektorer är inte en bas i ett femdimensionellt rum. Det är möjligt att $\overline{u}_1$ är parallell med $\overline{u}_2$, men inte att $\overline{e}_1$ är parallell med $\overline{e}_2$. Det är också möjligt att $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$ ligger i ett plan. Tre vektorer kan beskriva en vektor $\overline{u}$ i ett rum med 5 basvektorer men vektorn ligger då så att det räcker med 3 (eller färre) för att uttrycka den som en linjärkombination.

2.17 Sätt upp ekvationssystemet, λ_i som obekanta, som en sammansatt matris

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Med $-4(1)+(2)$erhålls

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

vilket är $2\lambda_2 - 6\lambda_3 = -5$. Inför parameter $t = \lambda_3$ så $\lambda_2 = 3t - 2,5$ och vidare har vi $\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 2$ som ger $\lambda_1 = \lambda_2 - 2\lambda_3 + 2 = 3t - 2,5 - 2t + 2 = t - 0,5$. Sammanfattar:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t - 0,5 \\ \lambda_2 &= 3t - 2,5\,. \\ \lambda_3 &= t \end{aligned}$$

Vilket värde som helst på t ger en lösning till hur de tre vektorerna kan sättas ihop till vektorn $(2,3)$. Exempelvis $t = 2$ ger $\lambda_1 = 1,5$, $\lambda_2 = 3,5$, $\lambda_3 = 2$ så att

$$1,5\,(1,4) + 3,5\,(-1,-2) + 2\,(2,2) = (2,3)\,.$$

Går naturligtvis bra att skriva det som ett ekvationssystem och lösa det med hjälp av Gauss elimination

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \end{aligned}$$

2.18

- $\overline{b}$ är __linjärt beroende__ av $\overline{a}$
- $\overline{a}$ är __linjärt beroende__ av $\overline{b}$
- $\overline{c}$ är __linjärt beroende__ av $\overline{d}$, $\overline{a}$
- $\overline{d}$ är __linjärt oberoende__ av $\overline{c}$
- $\overline{d}$ är __linjärt beroende__ av $\overline{c}$, $\overline{d}$

2.19

(1) Ekvationer koordinat för koordinat: $3 = k \cdot 1$, $1 = k \cdot 1$, $2 = k \cdot 1$. Första koordinaten skulle ge $k3$, men det stämmer inte på de andra, linjärt oberoende.

(2) Första koordinaten ger -2 vilket stämmer på de andra.

(3) Sätt upp $(0,1,2) = a(1,1,1) + b(3,1,2)$ och erhåll ekvations systemet

$$\begin{cases} 0 = & a + 3b \\ 1 = & a + b \\ 2 = & a + 2b \end{cases}$$

Tag $-(2)+(3)$ som ger $b = 1$, som ger $a = 0$ i (2), men då är (1) $0 = 0+3$. Saknar således lösning, således linjärt oberoende.

(4) De ligger i olika plan. $(0,1,1)$ ligger i yz-planet, $(1,0,1)$ ligger i xz-planet, $(1,1,0)$ ligger i xy-planet. Således linjärt oberoende.

(5) Sätt upp

$$(0,5,-1,0) = a\,(1,3,-1,1) + b\,(2,1,-1,2)$$

som ger

$$\begin{aligned} 0 &= a + 2b \\ 5 &= 3a + b \\ -1 &= -a - b \\ 0 &= a + 2b \end{aligned}$$

som ger lösningarna $a = 2$ och $b = -1$. Ja den ligger i planet.

2.20 Vi konstaterar först att 3 vektorer i 2 dimensioner inte kan vara linjärt oberoende och att 3 vektorer i 3 dimensioner kan vara linjärt oberoende men behöver inte vara det.

2 dimensioner.

(1) I översta delen av figur 2.9.4 gäller att $\overline{u}_1$ är linjärt oberoende av $\overline{u}_2$ ty de kan inte parallellförflyttas så de ligger på samma linje, om vi tänker kring representanter för vektorerna. Ser vi det mer stringent som vektorer så är inte $\overline{u}_1$ parallell med $\overline{u}_2$, dvs. $\overline{u}_1 \neq a\overline{u}_2$ där a är ett reellt tal. Av samma anledning är $\overline{u}_2$ linjärt oberoende av $\overline{u}_3$. Vi har också att $\overline{u}_1$ är linjärt oberoende av $\overline{u}_3$. Så det kan inträffa men det är inte sant i allmänhet. I figuren nederst gäller också att $\overline{u}_1$ är linjärt oberoende av $\overline{u}_2$ samt att $\overline{u}_2$ linjärt oberoende av $\overline{u}_3$. Men slutsatsen att $\overline{u}_1$ är linjärt oberoende av $\overline{u}_3$ gäller inte.
(2) Att de är parvis linjärt oberoende innebär att alla par är linjärt oberoende, dvs. ett godtyckligt par inte kan parallellförflyttas till samma linje eller att de inte är multiplar av varandra. Man kan ordna vektorerna (representanterna) så att de inte ligger på samma linje (se överst i figur 2.9.4). Men uttrycket "$\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$ är linjärt oberoende" innebär mer än så. Det innebär att de tre vektorerna inte ingår i en linjärkombination, vilket är en annan sak.
(3) Det senare uttryckssättet ska användas. Att säga "$\overline{u}_1$ är linjärt beroende av $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$" gör att $\overline{u}_1$ hamnar i en särställning vilket kan vara vilseledande. Om en vektor är linjärt beroende av två andra ingår minst en i en linjärkombination. Uttryckssättet kan tolkas på två sätt. Antingen "$\overline{u}_1$ är linjärt beroende av ($\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$)" eller "$\overline{u}_1$ är linjärt beroende av $\overline{u}_2$ och linjärt beroende av $\overline{u}_3$". Det första innebär kanske $\overline{u}_1 = a\left(\overline{u}_2 + \overline{u}_3\right)$ med $a \neq 0$ för den osäkre. Den andra tolkas kanske som $\overline{u}_1 = a\overline{u}_2 + b\overline{u}_3$ eller $\overline{u}_1 = a\overline{u}_2$ och $\overline{u}_1 = b\overline{u}_3$. Vad händer då $a = 0$ eller $b = 0$?
(4) Det senare uttryckssättet ska användas.

3 dimensioner

(1) Inte nödvändigtvis.
(2) Inte nödvändigtvis.

2.21 Svar anges ej.

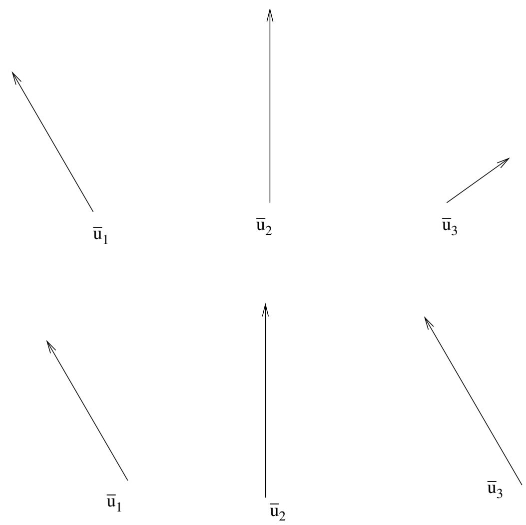
2.22

(1) De är fortfarande linjärt oberoende.
(2) Mängden kan bli linjärt beroende eller oberoende.
(3) Mängden kan bli linjärt beroende eller oberoende.
(4) Fortfarande linjärt beroende.

2.23
$$\begin{cases} x_1 = & 3x_1' + x_2' \\ x_2 = & 2x_1' + 4x_2' \end{cases}$$

2.24 Första raden står nu som första kolonnen och andra raden som andra kolonnen.

2.25 Formen är
$$\begin{cases} \overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + \overline{e}_3 = \overline{e}_1' \\ \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3 = \overline{e}_2' \\ \overline{e}_1 - \overline{e}_2 - \overline{e}_3 = \overline{e}_3' \end{cases}.$$



FIGUR 2.9.4. Parvisa relationer.

Att visa att de är linjärt oberoende innebär att lösa ekvationen $\lambda_1\overline{e}_1'+\lambda_2\overline{e}_2'+\lambda_3\overline{e}_3' = \overline{0}$ och om $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ så är basen $\{\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\}$ linjärt oberoende. Ekvationen kan skrivas

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket är ekvationsystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

som på reducerad trappform är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vilket innebär att $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_1 = 0$. De är linjärt oberoende.

För att erhålla sambandet mellan koordinater byter vi primade beteckningar mot oprimade samt byter koefficienterna på raderna till koefficienter för kolonnerna

$$\begin{cases} x_1' + \ \ x_2' + x_3' = x_1 \\ 0x_1' + 2x_2' - x_3' = x_2 \\ x_1' + \ \ x_2' - x_3' = x_3 \end{cases} .$$

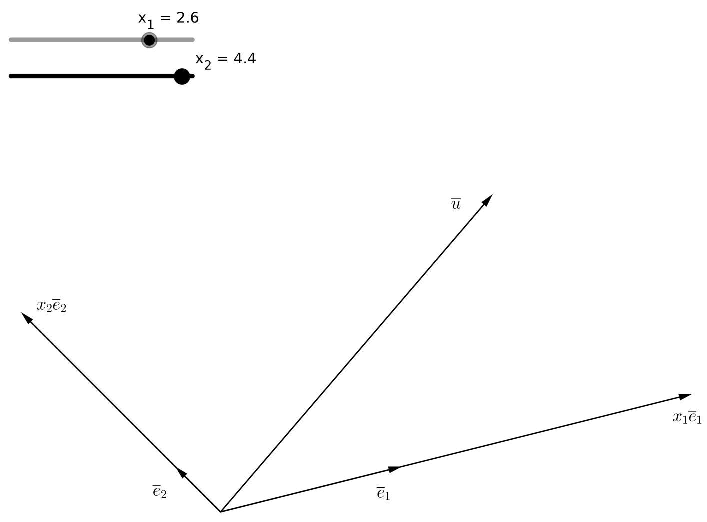
Detta är samma koefficientmatris som för ekvationssystemet för attt bestämma om den nya basen är linjärt oberoende men då är högerledet 0. För att bestämma ekvationen för planet $2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3 = 0$ sätter vi utttrycken för x_1 etc.

$$2\,(x_1' + x_2' + x_3') + (2x_2' - x_3') - 3\,(x_1' + x_2' - x_3') + 3 = 0$$

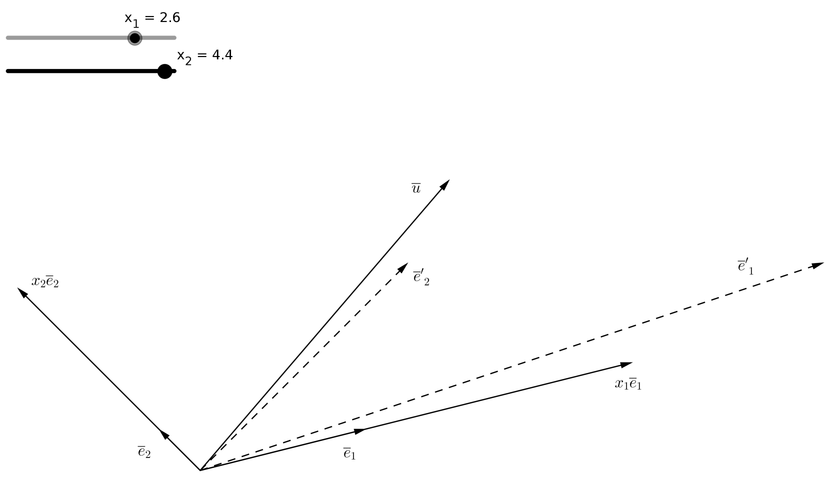
ger

$$-x_1' + x_2' + 4x_3' + 3 = 0.$$

2.26 Med $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ enligt figur 2.9.5 så erhålls vektorn $\overline{u}$ genom addition av $2,6\overline{e}_1$ och $4,4\overline{e}_2$: $\overline{u} = 2,6\overline{e}_1 + 4,4\overline{e}_2$. Vektorn $\overline{u}$ har koordinaterna $(x_1; x_2) = (2,6; 4,4)$ i basen $\overline{e}_1, \overline{e}_2$.



FIGUR 2.9.5. Basvektorer $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$. $\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$. Konstruerat i Geogebra.

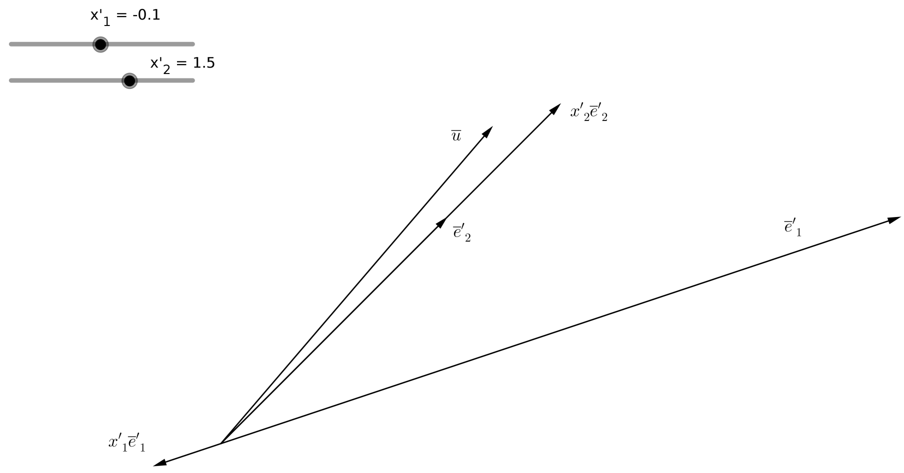


FIGUR 2.9.6. Införandet av en ny bas: $\overline{e}'_1$ och $\overline{e}'_2$.

I figur 2.9.6 införs en ny bas enligt

$$\begin{cases} \overline{e}'_1 & = 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \\ \overline{e}'_2 & = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 \end{cases}.$$

I figur 2.9.7 har vi kvar $\overline{u}$ men använder basen $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2$. Nu erhålls vektorn $\overline{u}$ genom addition av $-0,1\overline{e}'_1$ och $1,5\overline{e}'_2$: $\overline{u} = -0,1\overline{e}'_1 + 1,5\overline{e}'_2$. Koordinaterna för vektorn $\overline{u}$ i basen $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2$ är $(-0,1; 1,5)$.



FIGUR 2.9.7. $\overline{u}$ i basen $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2$.

Gäller då relationen

$$\begin{cases} x_1 = & 4x'_1 + 2x'_2 \\ x_2 = & x'_1 + 3x'_2 \end{cases}$$

för de erhållna koordinaterna? Vi har $(x'_1, x'_2) = (-0,1; 1,5)$ som insatt ger oss $x_1 = 4 \cdot (-0,1) + 2 \cdot 1,5 = 2,6$ och $x_2 = -0,1 + 3 \cdot 1,5 = 4,4$. Naturligtvis bevisar detta inget men det ger ett stöd för tanken och ökar graden av tillit till uttrycken.

2.27 Enligt tidigare har vi

$$x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2$$

och enligt uppgiften

$$\begin{cases} x_1 = & 4x'_1 + 2x'_2 \\ x_2 = & x'_1 + 3x'_2 \end{cases}$$

som sätts in

$$(4x'_1 + 2x'_2)\,\overline{e}_1 + (x'_1 + 3x'_2)\,\overline{e}_2 = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2.$$

Vi flyttar om i vänster led

$$x'_1\,(4\overline{e}_1 + \overline{e}_2) + x'_2\,(2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2)$$

och genom identifiering ser vi att

$$\overline{e}'_1 = 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \text{ och } \overline{e}'_2 = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2.$$

Vi har nu en relation mellan baserna.

2.10. Kapitelproblem

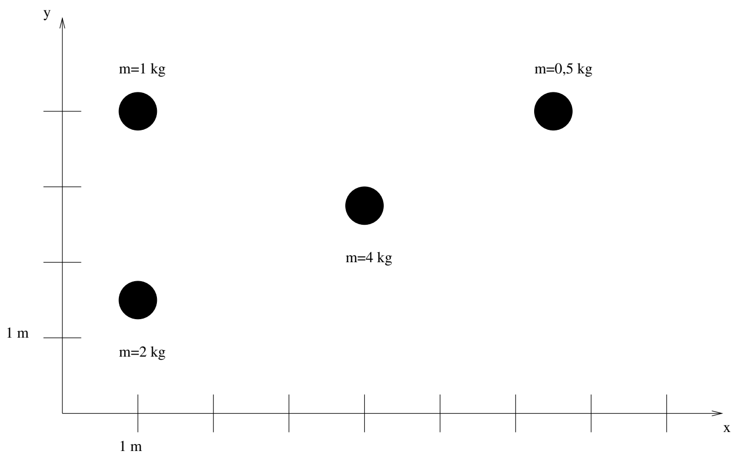
2.1 Utför bevisen för lemma 2.1 och teorem 2.1. *Övning i att arbeta självständigt efter en förebild.*

2.2 Ange definitionerna för linjärt beroende/oberoende och bas. *Särskilja begrepp.*

2.3 Masscentrum (eng. center of mass) för en diskret massfördelning. Masscentrum definieras som

$$\overline{x}_{cm} = \frac{\overline{x}_1 m_1 + \overline{x}_2 m_2 + ... + \overline{x}_n m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Tyngdpunkten sammanfaller med masscentrum om tyngdkraften inte varierar över området. Bestäm masscentrum för massfördelningen i figur 2.10.1. *En tillämpning från fysiken.*



FIGUR 2.10.1. Bestäm masscentrum.

2.4 Tre lika stora massor m befinner sig i var sitt hörn (A, B, C) av en triangel. Bestäm masscentrum med hjälp av formeln i 2.3.

2.5 Visa att

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$$

för en triangel med masscentrum $\overline{OM}$ och hörn i $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ och $\overline{OC}$.

2.6 Formeln för mittpunkt på sträckan mellan punktern A och B ges av

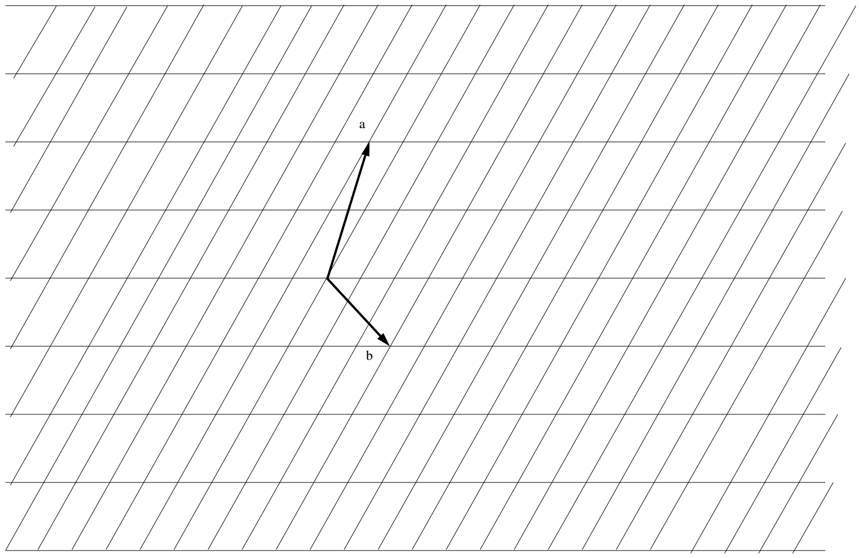
$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right).$$

Om vi inför basvektorerna $\overline{e}_1 = \overline{OA}$ och $\overline{e}_2 = \overline{OB}$ vilka koordinater har $\overline{OM}$ i denna bas?

2.7 Bestäm talet a så att vektorerna $\overline{e}$ och $\overline{f}$ är parallella.
   (a) $\overline{e} = (2, a+3)$ och $\overline{f} = (4, 3)$ *Bara variation i en.*
   (b) $\overline{e} = (a, -2)$ och $\overline{f} = (1, 2-a)$ *Möjligt att variera båda.*

2.8 Associera begreppen koordinat, basvektor och linjärt beroende. Med associera menas att du ska hitta så många kopplingar du kan. Använd både algebraisk och geometrisk representation. *Hjälper dig att se helheter och skillnader, du minns bättre då.*

2.9 Rita i figur 2.10.2 vektorerna $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ så att $\overline{a} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2$ och $\overline{b} = -2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$. *Övar kopplingen mellan ren geometrisk framställning och algebraisk, dessutom ett icke rätvinkligt system.*



FIGUR 2.10.2. Problem 2.9.

2.10 *Ytterligare övning på förhållandet mellan geometrisk representation och algebraisk, och sneda koordinatsystem.* Uttryck vektorn $\overline{u}_1$ i basvektorerna $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ (konstruera grafiskt, skriv som heltal), se figur 2.10.3. Inför den nya basen $\overline{f}_1 = 2\overline{e}_1 + 0,5\overline{e}_2$ och $\overline{f}_2 = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2$. Uttryck $\overline{u}_1$ i $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$; gör det både grafiskt och algebraiskt .

2.11 I fysiken modelleras begreppen läge, hastighet och acceleration med vektorer; begreppen representeras av det matematiska begreppet vektorer. Däremot är fart absolutbeloppet av hastighetsvektorn, ett vanligt tal. En boll som studsar helt elastiskt mot en vägg, se figur 2.10.4, kommer in med en hastighet representerad av vektorn $\overline{v}_1$ i figuren, och studsar ut med hastigheten $\overline{v}_2$. Tiden för studsen $t_2 - t_1$ är cirka $0,1$ s. Skala i figuren. Beräkna accelerationen $\overline{a}$, en vektor, genom $\overline{a} = (\overline{v}_2 - \overline{v}_1) / (t_2 - t_1)$. Hur stor är ändringen i fart? Observera skillnaden mellan absolutbeloppet av hastighetsändringen och ändringen i absolutbeloppet av hastigheten. *En tillämpning från fysiken.*

2.12 Vektorerna $\overline{e}_1$och $\overline{e}_2$ är en bas i planet. Vektorerna $\overline{e}'_1$ och $\overline{e}'_2$ ges av

$$\begin{aligned}\overline{e}'_1 &= -\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2\\ \overline{e}'_2 &= \overline{e}_1 + \overline{e}_2\end{aligned}$$

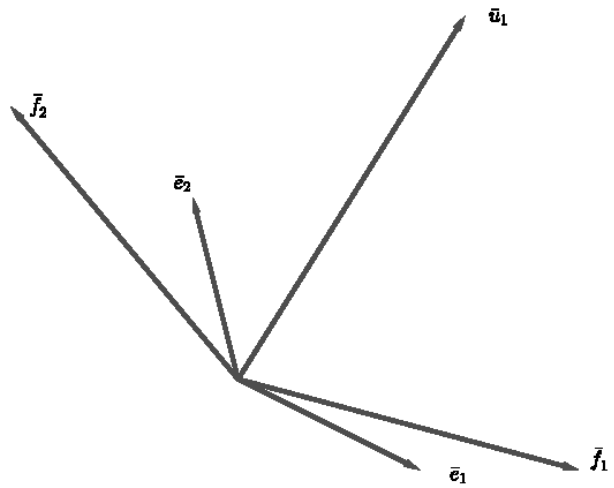
Visa att de primade vektorerna är en bas. Bestäm koordinaterna för vektorn $\overline{u} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$ i den primade basen. *Vektorn ändras inte, bara representationen av den.*

2.13 I övning 2.25 ska planet skrivas med de nya koordinaterna. Skriv den räta linjen

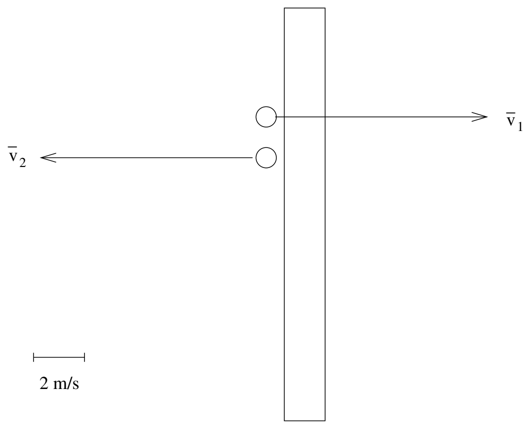
$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + 2t\\ x_2 &= -1 + t\\ x_3 &= 2 - t\end{aligned}$$

med de nya koordinaterna.

2.14 För vilka värden på x är de 3 vektorerna en bas i $\mathbb{R}^3$?



FIGUR 2.10.3. De gamla och de nya basvektorerna.



FIGUR 2.10.4. Boll som studsar elastiskt mot en vägg. Bollen är ritad precis innan och precis efter studsen. De är också något förskjutna i förhållande till varandra för att bilden ska vara tydlig.

2.11. Facit Kapitelproblem

2.1 Se boken.
2.2 Se boken.

2.3
$$\frac{(1,\,1,5)\cdot 2+(1,\,4)\cdot 1+(4,\,2,7)\cdot 4+(6,5,\,4)\cdot 0,5}{2+1+4+0,5}=$$
$$\frac{(2+1+16+3,25,\;3+4+10,8+2)}{7,5}=$$
$$\frac{(22,25,\;19,8)}{7,5}\approx(3,\;2,6).$$

2.4 Vi använder
$$\overline{x}_{cm}=\frac{\overline{x}_1m_1+\overline{x}_2m_2+...+\overline{x}_nm_n}{m_1+m_2+...+m_n}.$$
Vektorerna från origo till de tre massorna är $\overline{x}_1=\overline{OA}$, $\overline{x}_2=\overline{OB}$ och $\overline{x}_3=\overline{OC}$. Vi får
$$\overline{x}_{cm}=\frac{\overline{OA}\cdot m+\overline{OB}\cdot m+\overline{OC}\cdot m}{m+m+m}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$$
vilken överensstämmer med resultatet i exempel 2.3. Samma formel erhålles om massan i stället är jämnt fördelad över ytan.

2.5 ??? $\overline{OM}+\overline{MA}=\overline{OA}$,$\overline{OM}+\overline{MB}=\overline{OB}$, $\overline{OM}+\overline{MC}=\overline{OC}$. Dessa samband, vektoraddition, sätts in i formeln för masscentrum
$$\frac{1}{3}\left(\overline{OM}+\overline{MA}+\overline{OM}+\overline{MB}+\overline{OM}+\overline{MC}\right)=$$
$$\frac{1}{3}\left(3\overline{OM}+\left(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}\right)\right)=$$
$$\overline{OM}+\frac{1}{3}\left(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}\right).$$
vilket enligt formeln är lika med $\overline{OM}$, således måste
$$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}.$$

2.6 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{e}_1+\frac{1}{2}\overline{e}_2=(1/2,\,1/2)$.

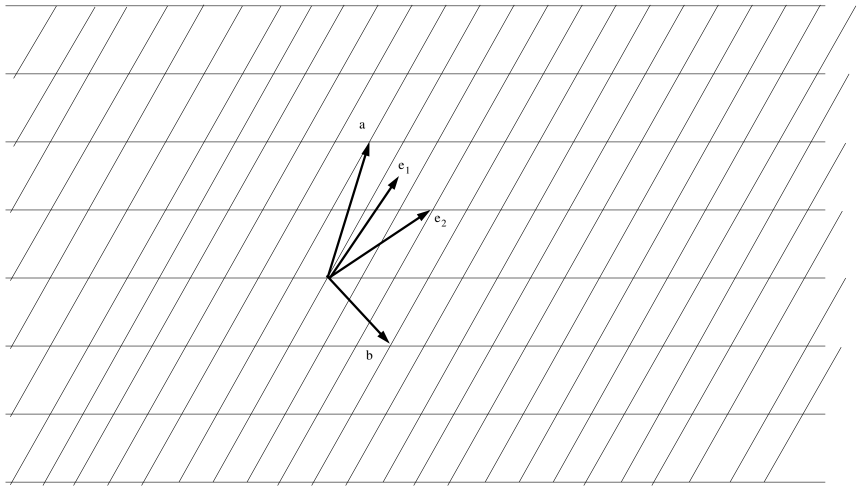
2.7 (a) $\overline{e}=k\overline{f}$ där k är ett reelt tal innebär att de är parallella. Vi erhåller
$$(2,a+3)=k\,(4,3)$$
som ger ekvationerna
$$2=4k$$
som ger $k=0,5$, och
$$a+3=3k.$$
Som med $k=0,5$ ger
$$a+3=3\cdot 0,5$$
som har lösningen $a=-1,5$.

(b) $a=k$, $-2=k\,(2-a)=k\,(2-k)$, dvs. $-2=2k-k^2$ eller $k^2-2k-2=0$ som har lösningarna
$$k=1\pm\sqrt{1+2}=1\pm\sqrt{3}.$$

2.8 Inget facit ges.

2.9 Se figur 2.11.1.

2.10 Genom att konstruera en parallellogram med $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ på sidorna och $\overline{u}_1$ som diagonal erhålls $\overline{u}_1=2\overline{e}_1+3\overline{e}_2$. Ur avbildningen bestäms att $\overline{e}_1=\frac{2}{5}\overline{f}_1-\frac{1}{5}\overline{f}_2$ och $\overline{e}_2=\frac{2}{5}\overline{f}_1+\frac{4}{5}\overline{f}_2$. Detta ger $\overline{u}_1=2\overline{f}_1+2\overline{f}_2$ vilket också erhålls genom grafisk konstruktion.



FIGUR 2.11.1. Basvektorerna $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$.

2.11 Enligt skalan har hastighetsvektorerna längden $8,5$ m/s. Accelerationen är $(8,5-(-8,5))\,/0,1 = 17/0,1 = 170\,\mathrm{m/s^2}$. $(17,09/0,1)$

2.12 Addera (1) och (2): $\overline{e}'_1 + \overline{e}'_2 = 4\overline{e}_2$ vilket ger $\overline{e}_2 = 0,25\overline{e}'_1 + 0,25\overline{e}'_2$. Från (2) erhålls $\overline{e}_1 = \overline{e}'_2 - \overline{e}_2 = \overline{e}'_2 - 0,25\overline{e}'_1 - 0,25\overline{e}'_2$, dvs. $\overline{e}_1 = 0,75\overline{e}'_2 - 0,25\overline{e}'_1$. De oprimade vektorerna är linjärt oberoende ty de är inte multiplar av varandra; ligger inte på samma linje. Vi sätter in uttrycken för $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ i $\overline{u} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$ och får

$$\begin{aligned}\overline{u} &= 2\,(0,75\overline{e}'_2 - 0,25\overline{e}'_1) + 3\,(0,25\overline{e}'_1 + 0,25\overline{e}'_2) = \\ &= 0,25\overline{e}'_1 + 2,25\overline{e}'_2.\end{aligned}$$

2.13 Sätt in uttrycken för koordinaterna i vänster leden för den räta linjen. Lös ut de primade koordinaterna

$$\begin{aligned}x'_1 &= 3 + 2t \\ x'_2 &= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t \\ x'_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t\end{aligned}$$

KAPITEL 3

Linjer och plan

Vi har lärt oss om vektorer och lärt oss representera dem. Vi studerar nu hur linje, plan och rum beskrivs med hjälp av vektorer.

3.1. Rummet

Att särskilja olika 'rum'.

När vi studerar linjer, plan och rum bör vi, som tidigare, skilja på det fysiska rummet och det matematiska. I det fysiska rummet ser vi punkter, linjer, ytor och rummet själv. I det matematiska rummet använder vi oftast samma ord men avser något annat. En linje i det matematiska rummet är en mängd av ordnade tal (tal från $\mathbb{R}$) (x, y, z). Varje möjlig tal-trippel är ett element i det matematiska rummet $\mathbb{R}^3$. En rät linje är en delmängd av $\mathbb{R}^3$-rummets tal-tripplar. Om vi betonar det fysiska, använder $\mathbb{R}^3$ som en modell för det fysiska rummet, säger vi t.ex. att linjen 'går igenom' två punkter i rummet. Matematiskt innebär det att linjen, en delmängd av $\mathbb{R}^3$, innehåller två angivna tal-tripplar; de två tal-tripplarna är element i mängden som representeras av linjen. Vi har t.ex. två element $A = (2,\, 1,\, -2)$ och $B = (5,\, 0,\, -1)$ och en linje som är en mängd av tal-tripplar $L = \{(x,\, y,\, z)\,|x = 2 + 3t,\; y = 1 - t,\; z = -2 + t \text{ och } t \in \mathbb{R}\}$. Vi skriver $A \in L$ och $B \in L$. Ett fysiskt plan modelleras av ett matematiskt plan. Ett plan i $\mathbb{R}^3$ utgörs av alla de element (tal-tripplar) $(x,\, y,\, z)$ som uppfyller en relation på formen $ax + by + cz + d = 0$ t.ex. $2x + 3y - z + 2 = 0$.

Vi säger att 'linjen *går* genom två punkter' men naturligtvis finns det ingen rörelse implicerad. Uttryck som 'går uppåt' och 'går nedåt' är ur matematisk synvinkel innehållslösa.

Lite etymologi kan vara på sin plats då vi numera tänker på t.ex. det matematiska begreppet linje när ordet linje sägs. Linje kommer från latinets linea och betyder tråd av lin. Plan kommer från en betydelse av platt yta och även plana, att göra jämn. Engelskans space är kopplat till rum att vara i, en plats, storlek, avstånd men även tidsintervall. Det svenska rum är kopplat till latinets rus som betyder landsbygd. Rum användes förr för öppna platser på land och till havs. Punkt har kopplingar till latinets punctum som betyder ett litet hål gjort genom att sticka något.

3.2. Ortsvektor

Vi behöver hålla reda på flera olika matematiska objekt och introducerar dem stegvis. Först har vi punkterna P och Q i mängden $\mathbb{R}^3$ utan koordinater; vilka koordinater de får beror på val av koordinatsystem. Med PQ avser vi linjesegmentet mellan punkterna P och Q. Om vi tänker förflytta oss från P till Q inför vi begreppet förflyttning och betecknar den som $Q - P = \overline{PQ}$; vi definierar här också vad vi ska mena med $Q - P$. Om vi väljer att se alla förflyttningar med samma storlek och samma riktning som ekvivalenta kallar vi dem för vektorer. $\overline{u} = \overline{PQ}$ betyder att $\overline{PQ}$ är en representant för vektorn $\overline{u}$. 'Förflyttning' och 'riktad sträcka' behandlas ekvivalent i denna text.

Sedan kan vi introducera ett koordinatsystem. Det görs genom att välja ett origo, en godtycklig men fix punkt. Kalla denna punkt för O. En godtycklig punkt i rummet, P, kan skrivas som en förflyttning till den punkten $O + \overline{u} = P$. Vektorn $\overline{u}$ anges i sina basvektorer $\{\overline{e}_x, \overline{e}_y, \overline{e}_z\}$ som

$$x\overline{e}_x + y\overline{e}_y + z\overline{e}_z = \overline{OP}.$$

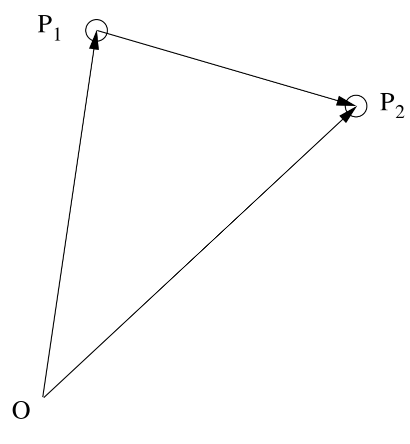
Varje punkt tillskrivs då koordinater som är koefficienterna framför basvektorerna. Vektorn $\overline{OP}$ kallas för ortsvektor. Koordinatsystemet betecknas $O\overline{e}_x\overline{e}_y\overline{e}_z$. En punkt kan under dessa förutsättningar skrivas som $(x,\, y,\, z)$. Koordinatsystem innebär:

- en fix punkt;
- basvektorer (kan ha olika längd och är inte nödvändigtvis vinkelräta);
- koefficienter/koordinater (för en godtycklig vektor $\overline{u}$ eller en punkt) som beror på valet av basvektorer.

ANMÄRKNING 3.1. En godtycklig vektorrepresentant från punkt P_1 till punkt P_2 (en förflyttning), se figur 3.2.1, som inte har sin fot i origo, kan skrivas

$$\begin{aligned}\overline{P_1P_2} &= P_2 - P_1 \\ &= (x_2,\, y_2,\, z_2) - (x_1\,, y_1,\, z_1) \\ &= (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1)\end{aligned}$$

Skillnaden mellan punkternas koordinater ger koefficienterna för basvektorerna. Vektorn uttrycks som en ortsvektor, dvs. att representanten har sin fot i origo. För att ange en vektor i ett koordinatsystem så konstrueras en förflyttning som representant för vektorn; förflyttningen har sin fot i origo; förflyttningens huvud är en viss punkt; denna punkts koordinater får representera vektorn.



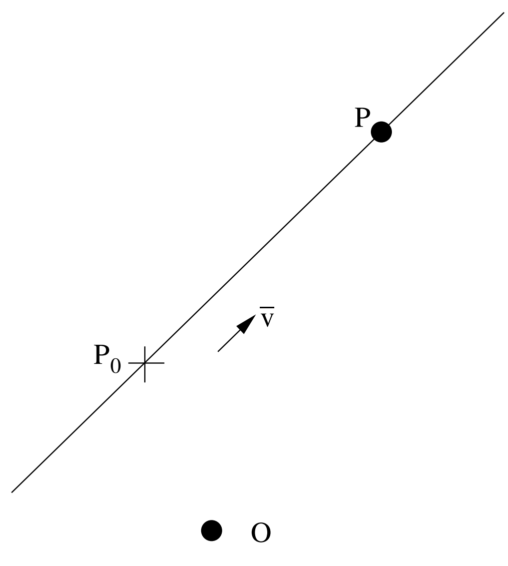
FIGUR 3.2.1. Godtycklig vektor $\overline{P_1P_2}$ uttryckt med hjälp av två ortsvektorer: $\overline{OP}_2 - \overline{OP}_1$ men den kan också uttryckas med punkter som $P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$.

ANMÄRKNING 3.2. Notera att en punkt $(x,\, y,\, z)$ betecknas på samma sätt som en ortsvektor $(x,\, y,\, z)$ men att detta oftast inte är ett problem; det finns dock litteratur som använder olika beteckningar. För att förtydliga används ofta för punkten S skrivsättet $S : (x,\, y,\, z)$ och för vektorn $\overline{S}$ skrivsättet $\overline{S} = (x,\, y,\, z)$. Vektorer kan adderas men punkter kan inte adderas. En punkt adderad med en vektor ger en ny punkt; man tänker sig punkten förflyttad (avbildad) med hjälp av vektorn. Subtraktion mellan punkter ger definitionsmässigt en vektor.

ANMÄRKNING 3.3. Metaforiskt är en matematisk punkt en plats och en geometrisk vektor en förflyttning utan hänsyn till var du börjar och slutar. I ett koordinatsystem har en punkt angetts som utgångspunkt, alla andra punkter erhålls som denna utgångspunkt plus en vektor (en förflyttning utan given start- och slutpunkt). Denna vektor kan uttryckas i basvektorer. Koefficienterna för basvektorerna när de uttrycker förflyttnings-vektorn kallas för koordinater och anger punkten samtidigt. Förflyttning eller riktade sträckor mellan två punkter kallas ibland bundna vektorer och de som inte är bundna kallas för (fria) vektorer.

3.3. Linjens ekvation

Vad behövs för att definiera en (rät) linje entydigt? Ett svar är att det behövs en punkt och en riktning. Ett bra sätt att föreställa sig tankegången är att betrakta figur 3.3.1 i tre dimensioner.



FIGUR 3.3.1. Linje.

I figuren finns en fix *punkt*, O kallad origo. Vi har en *punkt* P_0 som linjen 'går igenom' (en punkt P_0 som är ett element i den mängd L som är linjen). Och vi har en riktning given av vektorn $\overline{v}$. Observera att vektorn $\overline{P_0P}$ är parallell med $\overline{v}$. Då kan vi skriva att $\overline{P_0P} = t\overline{v}$ för något visst värde på t, enligt lemma 2.1. Detta ger ett uttryck för linjen; uttrycket genererar alla element som tillhör den mängd, L, som är linjen. För att göra det mer explicit så sätter vi $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$. Vidare sätter vi $P : (x, y, z)$ och $\overline{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Vi har ur $\overline{P_0P} = t\overline{v}$

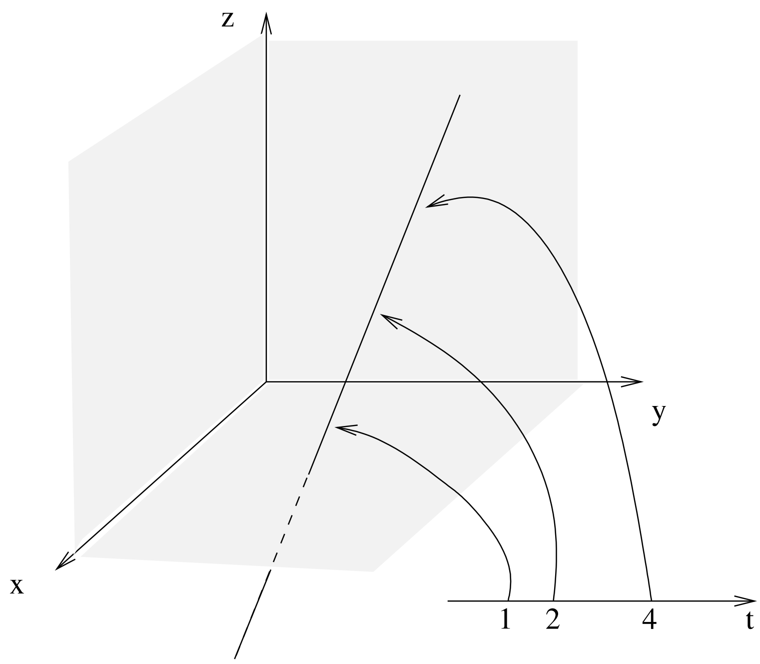
$$\begin{aligned}
\overline{P_0P} &= t\overline{v} \\
&\Leftrightarrow \\
\overline{OP} - \overline{OP_0} &= t\overline{v} \\
&\Leftrightarrow \\
(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) &= t\overline{v} \\
&\Leftrightarrow \\
(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t\overline{v} \\
&\Leftrightarrow \\
(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t\,(\alpha, \beta, \gamma)
\end{aligned}$$

eller komponentvis

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$

vilket är den räta linjens ekvation på *parameterform* (t är parametern). Detta är det sätt som vi använder för att skriva en rät linje i tre dimensioner. Den kan också skrivas mer kompakt $(x_0 + t\alpha,\ y_0 + t\beta,\ z_0 + t\gamma)$.

Observera att α anger hur mycket x ändrar sig då t ändrar sig. Parametern t kan ses som en extra axel (tallinje) som inte är närvarande i själva koordinatsystemet, se figur 3.3.2.



Figur 3.3.2. Parametern t.

Exempel 3.1. Bestäm en ekvation för den linje som går igenom $(2, 0, 1)$ och $(3, 2, 1)$ (en ekvation för den delmängd av $\mathbb{R}^3$ som har de två elementen i sin mängd samt uppfyller kravet på att vara en linje, och i detta fall ska skrivas på en viss form).

Tag en av punkterna som P_0, t.ex. $(2,0,1)$. Riktningen kan bestämmas ur $\overline{v} = (3,2,1) - (2,0,1) = (3-2, 2-0, 1-1) = (1,2,0)$ så vi får

$$P = (2,0,1) + t\,(1,2,0)$$

eller

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 0t \end{cases}$$

eller $L = \{(x,y,z) \,|\, x = 2+t,\ y = 2t,\ z = 1 \text{ och } t \in \mathbb{R}\}$.

Anmärkning 3.4. Svaret kan se olika ut beroende på val av fixpunkt: (2, 0, 1) eller (3, 2, 1). Riktningen kan också se olika ut. T. ex. kan man välja $(2,0,1) - (3,2,1)$ istället. Varje vektor parallell med $(1,2,0)$ är en lämplig riktningsvektor. Observera att ett visst värde på parametern t motsvarar precis *en* punkt på linjen. Om t går från 0 till 5 så genomlöps linjen i en viss riktning. Parametriserade kurvor i allmänhet sägs genomlöpas i en viss riktning, ökande t anger positiv riktning.

Anmärkning 3.5. I planet kan riktningsvektorn kopplas till riktningskoefficienten. En riktningsvektor (3, 4) innebär 3 enheter i x-led och 4 enheter i y-led då t ökas med 1. Det innebär att vi arbetar med en linje som har riktningskoefficienten 4/3. Riktningsvektorn tar över riktningskoefficientens uppgift i 3 dimensioner; riktningsvektorn fungerar i alla dimensioner.

Övning 3.1. En linje i planet har riktningsvektorn (1, 4) och går igenom (0, 2). 3.1
Bestäm den på parameterform och på formen $y = kx + m$. *Kopplar nya sätt till gamla sätt.*

Övning 3.2. Skriv ner direkt en linje genom $(0,2,0)$ med riktningen $(1,4,1)$. Fundera ut en så snabb arbetsgång som möjligt. Diskutera tolkningen av riktningsvektorn som antal 'steg' i riktning av varje axel då parametern t ökas med 1. *Att snabbt överföra information om en rät linje till parameterform, det ska kännas som ett naturligt steg att tänka på räta linjer i parameterform.* 3.2

Exempel 3.2. Bestäm om en punkt ligger på en linje. Ligger (5, 6, 1) på linjen i exempel 3.1? Med $(x,y,z) = (5,\ 6,\ 1)$ erhåller vi ett ekvationssystem

$$\begin{cases} 5 = t + 2 \\ 6 = 2t + 0 \\ 1 = + 1 \end{cases}.$$

Den nedersta ekvationen är uppfylld. Den översta leder till att $t = 3$ vilket också satisfierar den andra ekvationen. Således är lösningen att då $t = 3$ är vi vid punkten (5, 6, 1) som ligger på linjen.

Övning 3.3. Linjen L går igenom punkten $(-1,2,-4)$. Vilken riktning ska linjen 3.3
ha för att också gå igenom $(7,3,1)$?

Exempel 3.3. Skär två linjer varandra; har de en gemensam punkt? Linjerna utgörs av mängderna L_P och L_Q. Båda linjerna kan inte beskrivas med en parameter t utan frågeställningen kräver två parametrar, en för varje linje, t.ex. t, s. Skär linjerna $P = (1,2,3) + t\,(1,1,1)$ och $Q = (3,5,7) + s\,(1,2,3)$ varandra? Det leder till frågan om, för lösningsmängderna, $L_P \cap L_Q \neq \emptyset$, dvs. finns det något gemensamt element i de två mängderna? Vilket också kan formuleras som

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} 1+t=3+\ \ s \\ 2+t=5+2s \\ 3+t=7+3s \end{cases}.$$

Vi utför $-(1)+(2)$ och erhåller

$$2+t-1-t=5+2s-3-s$$

$$1=2+s$$

så att $s=-1$. Vi sätter in det i ekvation (1) och erhåller

$$1+t=2$$

så att $t=1$. Kontrollera alla ekvationer innan du avger svar.

Exempel 3.4. En partikels hastighet. En partikel rör sig längs den räta linjen $P=(2t,\,4t,\,-2t)$ där parametern t anger tiden, vilken hastighet har partikeln? Hastigheten i x led ges av dx/dt, hastigheten i y led ges av dy/dt etc. Hastighetsvektorn ges av

$$\overline{v}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{dx}{dt},\,\frac{dy}{dt},\,\frac{dz}{dt}\right)=(2,\,4,\,-2)\,.$$

Hastighet är en vektor, den grundar sig på gränsvärdet för en *differens*-kvot. Partikelns fart är beloppet av hastighetsvektorn: $|\overline{v}|=\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. I en tillämpning ingår också enheter.

3.4 Övning 3.4. En partikel rör sig längs den räta linjen $\overline{x}=(4t,\,8t,\,-4t)$, vilket är 'samma' linje som i exempel 3.4. Att det är 'samma' linje innebär att mängderna är lika. Vilken hastighet har partikeln? Vilken fart?

3.3.1. Affin form och parameterform. En form som kallas för affin form kommer vi att ha användning för senare. En linje i planet på parameterform

$$\begin{cases} x=2-\ \ t \\ y=3+2t \end{cases}$$

har en parameter, i detta fall t, som kan elimineras

$$\begin{aligned} 2-x &= \frac{y-3}{2} \\ &\Leftrightarrow \\ 4-2x &= y-3 \\ &\Leftrightarrow \\ -2x-y+7 &= 0 \end{aligned}$$

eller

$$2x+y-7=0.$$

Detta uttryck kallas för linjens ekvation på affin form.

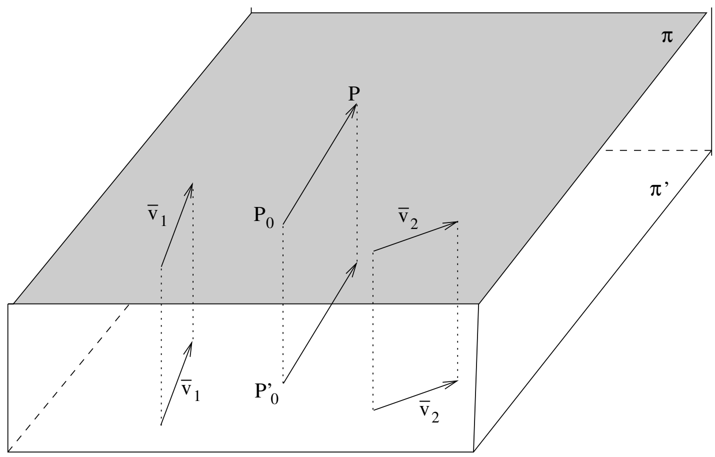
3.5 Övning 3.5. Hur omvandlas ett uttryck på affin form, $ax+by=c$ till parameterform $(x_0+\alpha t,\,y_0+\beta t)$? Bestäm en procedur. *Kopplar det nya till det gamla.*

3.4. Planets ekvation

Vi studerar hur de punkter, P, som utgör ett plan kan skrivas med hjälp av vektorbegreppet. Som tidigare behöver vi ett origo, en utgångspunkt för koordinatsystemet. Vi behöver en punkt i planet samt två vektorer som anger planet; de två vektorerna får inte vara parallella utan måste utgöra en bas enligt tidigare. De två vektorerna kan ses som sidorna i en parallellogram och spänner upp ett oändligt plan. Ekvationerna följer ur det faktum att de två vektorerna utgör en bas för alla vektorer i planet; en godtycklig vektor i planet kan skrivas som en linjärkombination av de två vektorerna.

Se figur 3.4.1. Vi väljer ett plan, kalla det π. I planet väljer vi en fix punkt P_0. En godtycklig punkt i planet betecknas P. Från origo O (ej i figuren) till P_0 har vi en vektor $\overline{OP}_0$. Vektor från P_0 till godtycklig punkt P, benämnd $\overline{P_0P}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$, så $P - P_0 = \overline{P_0P} = t_1\overline{v}_1 + t_2\overline{v}_2$. Vi skriver om: $P = P_0 + t_1\overline{v}_1 + t_2\overline{v}_2$

Av figuren framgår att $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$ inte räcker för att definiera ett plan, ty de är vektorer och inte riktade sträckor. Planet π' har P_0' och planet π har P_0; båda planen kan använda $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$ för sin beskrivning.



FIGUR 3.4.1. Att definiera ett plan entydigt.

Återstår att se detta mer explicit med riktningsvektorerna angivna,

$$P = P_0 + t_1\,(\alpha_1,\,\beta_1,\,\gamma_1) + t_2\,(\alpha_2,\,\beta_2,\,\gamma_2)$$

som kan skrivas

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 \\ y = y_0 + t_1\beta_1 + t_2\beta_2 \\ z = z_0 + t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 \end{cases}.$$

Kolonnerna i högerledet är, från vänster till höger: en punkt i planet $(x_0,\,y_0,\,z_0)$; en riktningsvektor $(\alpha_1,\,\beta_1,\,\gamma_1)$; ytterligare en riktningsvektor $(\alpha_2,\,\beta_2,\,\gamma_2)$. Lägg märke till hur de tre vektorerna skrivs i kolonner.

EXEMPEL 3.5. Hur avgör man om en punkt ligger i ett plan? Punkten ger värdena på x, y, z. Lös ekvationssystemet dvs. bestäm parametrarna. Ligger $(7, 1, 8)$ i planet

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 1 + 2s - t\,? \\ z = 2 + 2s + 2t \end{cases}$$

Med värdena insatta och en mindre omändring erhålls

$$\begin{cases} 5 = s + 2t \\ 0 = 2s - t \\ 6 = 2s + 2t \end{cases}$$

och med $-(1)+(3)$ erhålls $s = 1$ och t =2. Punkten ligger i planet.

3.6 Övning 3.6. Ligger $(2, 3, 1)$ i planet

$$\begin{cases} x = 4 + 2s + t \\ y = 1 - s - t\,? \\ z = -2 + s + 2t \end{cases}$$

Exempel 3.6. Bestäm planet genom de tre punkterna $(1, 0, 1)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 1, -3)$. Kalla dem i tur och ordning för P_0, P_1, P_2. Konstruera vektorer i planet: låt $\overline{v}_1 = \overline{P_0P_1} = (2-1, 2-0, 3-1) = (1, 2, 2)$; $\overline{v}_2 = \overline{P_0P_2} = (1-1, 1-0, -3-1) = (0, 1, -4)$. Planet på parameterform skrivs

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \; 2t + s \\ z = 1 + 2t - 4s \end{cases}$$

Kontrollera att: P_0 är $t = s = 0$; P_1 är $t = 1, s = 0$; P_2 är $t = 0, s = 1$.

Anmärkning 3.6. Observera att även planet kan skrivas på affin form. Lös ut t ur en ekvation och s ur den andra, sätt in detta i den tredje. $t = x - 1$; $s = y - 2t = y - 2(x-1) = y - 2x + 2$. Ekvationen är $4y - 10x + z + 9 = 0$. De punkter $(x,\, y,\, z)$ som uppfyller ekvationen är de punkter som ligger i planet.

3.7 Övning 3.7. Skriv planet

$$\begin{aligned} x &= 2 + s + t \\ y &= -2 + 2s - t \\ z &= 3 - s + 2t \end{aligned}$$

på affin form. Skriv också planet $2x - 3y + z - 2 = 0$ på parameterform.

3.8 Övning 3.8. Bestäm planet genom de tre punkterna $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ och $(-1, 2, -4)$. *Ett plan är helt bestämt av 3 punkter.*

Exempel 3.7. Bestäm skärningen mellan två plan. Hur ser lösningsmängden ut? Bestäm skärningspunkten mellan planen $2x + 9y - z - 5 = 0$ och $x + 4y - 7 = 0$. Att bestämma skärningspunkten är det samma som att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 9y - z = 5 \\ x + 4y \phantom{{}-z} = 7 \end{cases}$$

Vilket vi kan lösa genom att sätta $z = t$

$$\begin{cases} 2x + 9y - t = 5 \\ x + 4y \phantom{{}-t} = 7 \end{cases}$$

och sedan exempelvis eliminera x i översta raden

$$\begin{cases} y - t = -9 \\ x + 4y \phantom{{}-t} = 7 \end{cases}$$

Vi har $z = t$, $y = -9 + t$ och $2x + 9(-9 + t) - t = 5$ som ger $x = 43 - 4t$. Sammanfattningsvis

$$\begin{cases} x = & 43 - 4t \\ y = - & 9 + t \\ z = & t \end{cases}.$$

Skärningen beskrivs av en linje, oändligt många lösningar. Lösningsmängden ges av $L = \{(x, y, z) \,|\, x = 43 - 4t,\ y = -9 + t,\ z = t \text{ och } t \in \mathbb{R}\}$ (L är mängden av x, y och z sådana att $x = 43 - 4t$ och o.s.v.). Om lösningsmängden till $2x + 9y - z - 5 = 0$ är M_1 och för $x + 4y - 7 = 0$ M_2 så är $L = M_1 \cap M_2$.

Exempel 3.8. Bestäm skärningen mellan de två planen: $2x + 9y - z = 5$ och $4x + 18y - 2z = 10$. Planen är parallella och sammanfallande så lösningen är att ange planet.

Exempel 3.9. Bestäm skärningen mellan de två planen: I :$2x + 9y - z = 5$ och II :$2x + 9y - z = 6$. Planen är parallella men ej sammanfallande, saknar lösningar. Tag t.ex $-I + II$ och vi erhåller $0 = 1$. Lösningsmängden är tomma mängden.

3.5. Tre plan i rummet

En linjär ekvation med tre obekanta kan representeras av ett plan. Följande möjligheter finns för ett ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta, se figur 3.5.1:

- Alla tre planen sammanfaller, oändligt många lösningar, två parametrar.
- Två plan sammanfaller, det tredje är parallellt men ej sammanfallande, inga lösningar.
- Tre parallella plan utan skärning, ingen lösning.
- Två plan sammanfaller och det tredje i vinkel, oändligt många lösningar, en parameter.
- Två parallella plan, ej sammanfallande och ett i vinkel, ingen lösning.
- Tre plan skär varandra längs en linje, oändligt många lösningar, en parameter.
- Tre plan, skärning i en punkt. Linjen som är skärningen mellan två plan går igenom det tredje planet.
- Tre plan i vinkel men skärningen mellan planen parvis (linjer) skär inte varandra. Inga lösningar.

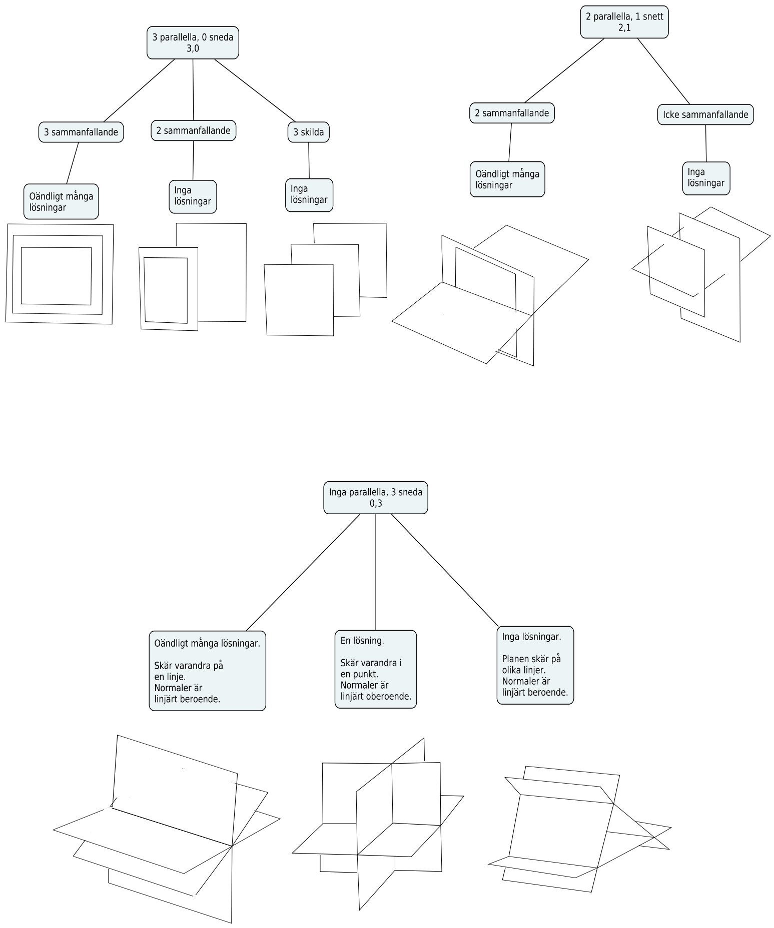
Nedan följer några exempel på möjliga lösningar. Identifiera dem i figur 3.5.1.

Exempel 3.10. De 3 planen är $z = 1$, $z = 3$ och $y = 4$. Två parallella plan och ett plan vinkelrät mot dessa. Inga lösningar för systemet som helhet.

Exempel 3.11. De 3 planen är $x = 2$, $y = 3$ och $z = 4$. Tre vinkelräta plan. Skärningspunkten är (2, 3, 4).

Exempel 3.12. De 3 planen är $5x + y = 10$, $3y + z = 12$, $x + 4z = 12$. Genom att lösa ekvationssystemet erhålls lösningen (84/61, 190/61, 162/61). Tre plan som är nästan vinkelräta.

Exempel 3.13. De 3 planen är $y - 2x + 7 = 0$, $z + x - 4 = 0$, $2z + y - 1 = 0$. Genom att lösa ekvationssystemet erhålls lösningen $(t + 3,\ 2t - 1,\ -t + 1)$, en linje.



FIGUR 3.5.1. 3 plan och deras möjliga skärningar.

3.6. Facit Övningar

3.1 $y = kx + m$. $y = 4x + 2$; $x = 0 + 1t$ och $y = 2 + 4t$.

3.2 Välj den första som en punkt som linjen går igenom. Tag t.ex. $(1, 4, 1) - (0, 2, 0) = (1, 2, 1)$ som riktningsvektor. Vi erhåller linjen på parameterform

$$
\begin{aligned}
x &= 0 + 1t \\
y &= 2 + 2t \\
z &= 0 + 1t
\end{aligned}
$$

3.3 Den ska ha riktningen (uttryckt som riktningsvektor) $(7, 3, 1) - (-1, 2, -4) = (7 + 1, 3 - 2, 1 + 4) = (8, 1, 5)$ eller motsatta riktningen till denna.

3.4 Dubbla farten jämfört med exemplet. Observera att geometriskt är det samma figur men de olika sätten att parametrisera figuren ger att den genomlöps olika fort (dvs. om t representerar tiden). $\overline{v} = (4, 8, -4)$.

3.5 Börjar med den affina och sätter t.ex. $x = t$ samt löser ut y: $y = -a/bx + c/b$ så

$$
\begin{cases}
x = t \\
y = -\frac{a}{b}t + \frac{c}{b}
\end{cases}
$$

3.6 Nej.

3.7 Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x &= 2 + s + t \\ y &= -2 + 2s - t \\ z &= 3 - s + 2t \end{aligned}.$$

Utför t.ex. $-2\,(1) + (2)$ och $(1) + (3)$ för att eliminera s. Därefter $(2) + (3)$ för att eliminera t. Planet är på affin form $x - y - z - 1 = 0$. Exempelvis ger $-2\,(1) + (2)$: $y - 2x = -2 + 2s - t - 4 - 2s - 2t$ eller $y - 2x = -6 - 3t$.

För att kunna skriva ett plan givet på affin form införs parametrar, t.ex. s och t. Enklast är att sätta $y = s$ och $z = t$ så att $2x - 3y + z - 2 = 0$ kan skrivas $2x - 3s + t - 2 = 0$ eller $x = 1 + 3/2s - 1/2t$:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \tfrac{3}{2}s - \tfrac{1}{2}t \\ y &= \phantom{1 + \tfrac{3}{2}}s \\ z &= \phantom{1 + \tfrac{3}{2}s - \tfrac{1}{2}}t \end{aligned}.$$

3.8 Bestäm 2 riktningsvektorer t.ex. $\overline{v}_1 = (1,1,1) - (1,2,3) = (0,-1,-2)$ och $\overline{v}_2 = (1,1,1) - (-1,2,-4) = (2,-1,5)$. Använder $(1,1,1)$ som fix punkt:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 0s + 2t \\ y &= 1 - s - t \\ z &= 1 - 2s + 5t \end{aligned}.$$

3.7. Kapitelproblem

3.1 En kropp i rörelse har hastigheten $\overline{v} = (v_x, v_y, v_z) = (2, 3, -4)$ och startar i $(1, 1, 3)$, ange den linje längs vilken den rör sig. Ange också kroppens fart; fart är hastighetsvektorns längd. *Tillämpning från fysiken.*

3.2 En kropp i rörelse har hastigheten $\overline{v} = (v_x, v_y, v_z) = (6, 9, -12)$ och startar i $(1, 1, 3)$, ange den linje längs vilken den rör sig. Ange kroppens fart. *Observera att uppgift 1 och 2 är samma geometriska figur men olika fysikaliska skeenden.*

3.3 En kropp rör sig längs linjen ovan, 3.1, och är då $t = 0$ vid $(1, 1, 3)$. En annan kropp rör sig längs en linje med hastigheten $\overline{v}_2 = (1, -1, 3)$. Från vilken punkt ska den andra kroppen starta, $t = 0$, för att de ska kollidera vid $t = 5$? *Tillämpning från fysiken.*

3.4 Är ortsvektorn $(1, 3, 10)$ parallell med planet $x + 3y - z + 2 = 0$?

3.5 Vad är det för otydligt med frågan "Ligger vektorn $(1, 3, 10)$ i planet $x + 3y - z + 2 = 0$?" *Precision i begreppen.*

Lite olika varianter på frågeställningar kring linjer och plan: från 3.6 till 3.12.

3.6 Bestäm koordinaterna för linjens skärning med koordinatplanen.

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 2 + 4t \,. \\ z &= -2 - t \end{aligned}$$

3.7 Bestäm skärningen mellan linjen

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 2 + 4t \,. \\ z &= -2 - t \end{aligned}$$

och planet $x + 3y - z + 2 = 0$.

3.8 Bestäm skärningen mellan planen

$$\begin{aligned} x &= 1 + s - 2t \\ y &= s + t \\ z &= 2 + 2s + t \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} x &= + 2s + t \\ y &= 2 - 2s + 3t \,. \\ z &= 1 - s - 4t \end{aligned}$$

3.9 Bestäm för olika värden på parametern k skärningen mellan linjen

$$\begin{aligned} x &= 2 + s \\ y &= 3 + 2s \\ z &= k + 5s \end{aligned}$$

och planet $3x + y - z + 2 = 0$.

3.10 Bestäm k så att de två linjerna $(x, y, z) = (2 - t, 1 - 2t, 2 + 3t)$ och $(x, y, z) = (1 + 2t, 2 - t, k - 2t)$ skär varandra.

3.11 Bestäm ett plan som innehåller linjen l_1 och som är parallell med l_2.

$$l_1 : \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= 2 + 3t \end{aligned} \,.$$

$$l_2 : \begin{array}{rl} x = & 2 - t \\ y = & 3 - 0,5t \\ z = & -2 + 2t \end{array}.$$

3.12 Bestäm ett plan som linjen l_1 skär och som är parallell med l_2 i föregående uppgift. **Från kapitel 1 och 2**

3.13 Bestäm masscentrum för punktmassor som befinner sig i hörnen (1, 0, 2), (2, 3, 1) och (−1, 2, 2) De har alla massan m.

3.14 På sträckan AB ligger C fyra gånger så långt från A som B. Bestäm koordinaterna för C om A:(2, 4, 6) och B:(2, −3, 5).

3.15 Avgör om (1, 4, −1), (−1, 2, 1) och (5, 2, −5) är linjärt oberoende eller inte.

3.8. Facit Kapitelproblem

3.1 $x = 2t + 1$, $y = 3t + 1$, $z = -4t + 3$. Farten är $\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} \approx 5,4$. Om vi använder SI-systemets grundenheter så är farten $5,4\,\mathrm{m/s}$.

3.2 $x = 6t{+}1$, $y = 9t{+}1$, $z = -12t{+}3$. Kroppens fart är $\sqrt{6^2 + 9^2 + (-12)^2} = \sqrt{36 + 81 + 144} = \sqrt{261} \approx 16,2$.

3.3 $x_1 = 1 + 2t$, $y_1 = 1 + 3t$, $z_1 = 3 - 4t$. $x_2 = x_{20} + s$, $y_2 = y_{20} - s$, $z_2 = z_{20} + 3s$. Kropp 1 är vid $(11,\ 16,\ -17)$ då $t = 5$. Det ger oss $11 = x_{20} + 5$, $16 = y_{20} - 5$, $-17 = z_{20} + 15$, så $x_{20} = 6$, $y_{20} = 21$, $z_{20} = -32$.

3.4 Vektorn är angiven som ortsvektor så planet kan läggas genom origo, dvs. $x + 3y - z = 0$. $(1, 3, 10)$ löser ekvationen och vektorn är i planet $x + 3y - z = 0$ och således parallell med planet $x + 3y - z + 2 = 0$.

3.5 Vektorer har ingen fix plats så den 'ligger' inte i något speciellt plan. Om man å andra sidan antar att vektorn är bunden till foten vid origo så är svaret nej eftersom planet inte går igenom origo.

3.6 Koordinatplanen ges av $x = 0$ som är yz-planet; $y = 0$ som är xz-planet; $z = 0$ som är xy-planet. $x = 0$ ger

$$\begin{aligned} 0 &= \ \ 3 + 2t \\ y &= \ \ 2 + 4t\,. \\ z &= -2 - \ \ t \end{aligned}$$

Första ekvationen $3 + 2t = 0$ innebär att $t = -3/2$. Vilket sätts in i ekvation 2 och 3. $y = 2 + 4\,(-3/2) = -4$. $z = -2 - (-3/2) = -1/2$. Koordinatplanet $x = 0$ skärs vid $(y,\ z) = (-4,\ -1/2)$. För $y = 0$ erhålls $t = -1/2$ och $(x,\ z) = (2,\ 5/2)$ och för $z = 0$ erhålls $t = -2$ och $(x,\ y) = (-1,\ -6)$.

3.7 Skärningen ges av att sätta in parameteruttrycken för linjens koordinater i uttrycket för planet för att bestämma eventuelle värden på parametern t. Vi får

$$x + 3y - z + 2 = (3 + 2t) + 3\,(2 + 4t) - (-2 - t) + 2 = 0.$$

Lösningen är $t = -13/15$. Som i sin tur ger skärningspunkten $(x,\ y,\ z) = (19/15,\ -22/15,\ -17/15)$.

3.8 Samma procedur som då skärningen mellan två linjer, på parameterform, bestäms. En viktig del i den beräkningen var att parametern för den ena linjen inte är samma som för den andra linjen. Detta åtgärdades genom att en av parametrarna bytte namn. I uppgiften används parametrarna s och t. Vi måste byta namn på parametrarna för det ena planet. Vi väljer p och q. Vi erhåller

$$\begin{aligned} 1 + \ \ s - 2t &= \quad\ \ 2p + \ \ q \\ s + \ \ t &= 2 - 2p + 3q\,. \\ 2 + 2s + \ \ t &= 1 - \ \ p - 4q \end{aligned}$$

Löses t.ex. genom $-\,(1) + (2)$ och $-2\,(1) + (3)$ för att eliminera s. Därefter $-3\,(3)$ och $5\,(2) + (3)$ för att eliminera t. Ekvation (3) är då $-12 = -5p + 28q$ vilket är $q = -3/7 + 5/28p$ vilket sätts in i

$$\begin{aligned} x &= \quad + 2p + \ \ q \\ y &= 2 - 2p + 3q \\ z &= 1 - \ \ p - 4q \end{aligned}$$

som ger linjen

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{3}{7} + \tfrac{61}{28}p \\ y &= \tfrac{5}{7} - \tfrac{41}{28}p \\ z &= \tfrac{19}{7} - \tfrac{12}{7}p \end{aligned}$$

3.9 Linjens parameteruttryck sätts in i det affina uttrycket för planet:

$$3\,(2+s) + (3+2s) - (k+5s) + 2 = 0,$$

som löses och ger $k = 11$. För $k = 11$ ligger linjen i planet; lösningen beror inte på s. För $k \neq 11$ är linjen parallell med planet men ligger inte i planet (oavsett värde på s), saknas lösningar.

3.10 Byt namn på parameter i den ena ekvationen, sätt dem lika, lös systemet.

$$\begin{aligned} 2 - \;\, t &= 1 + 2s \\ 1 - 2t &= 2 - \;\, s \\ 2 + 3t &= k - 2s \end{aligned}$$

har lösningen $s = 0,6$ och $t = -0,2$. Insatt i den sista ekvationen erhålls $k = 2,6$. Linjerna skär varandra i $(2,2;\ 1,4;\ 1,4)$. För alla andra värden på k finns det ingen skärningspunkt.

3.11 Uppgiftens lösning kräver inte direkt några beräkningar. Planet behöver 2 riktningsvektorer och en fix punkt. De två riktningsvektorerna kan avläsas i uttrycken för linjerna: $\overline{v}_1 = (1,\ -1,\ 3)$ och $\overline{v}_2 = (-1,\ -0,5,\ 2)$. En punkt som tillhör l_1 är $(1,\ 1,\ 2)$. Planet ges av

$$\begin{aligned} x &= 1 + \;\, s - \;\;\;\, t \\ y &= 1 - \;\, s - 0,5t\,. \\ z &= 2 + 3s + \;\; 2t \end{aligned}$$

3.12 Låt planet gå igenom samma punkt som l_1: $(1,1,2)$ då $t = 0$. Välj riktningsvektor från l_2: $(-1;\ -0,5;\ 2)$. Sedan kan den andra riktningsvektorn väljas på måfå men får ej vara parallell med den för l_2; väljer $(1,2,1)$. Slutligen skriver vi planet som

$$\begin{aligned} x &= 1 + \;\, s - \;\;\;\, t \\ y &= 1 + 2s - 0,5t\,. \\ z &= 2 + \;\, s + \;\; 2t \end{aligned}$$

3.13 Masscentrum ges av

$$\overline{OM}_A = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

Med insatta värden erhålls

$$\frac{1}{3}\left((1,0,2) + (2,3,1) + (-1,2,2)\right) = \frac{1}{3}\,(2,5,5)\,.$$

3.14 Uppgiften innebär att vi ska gå 4/5 av sträckan från A till B. Riktningen från A till B ges av $\overline{v} = (2,-3,5) - (2,4,6) = (0,-7,-1)$. Vi går 4/5 av denna $\overline{OC} = \overline{OA} + \frac{4}{5}\,(0,-7,-1) = (2,4,6) + \frac{4}{5}\,(0,-7,-1) = (2,-8/5,26/5) = \frac{2}{5}\,(1,-4,13)$.

3.15 De är linjärt beroende. $2\,(1,4,-1) - 3\,(-1,2,1) = (5,2,-5)$.

KAPITEL 4

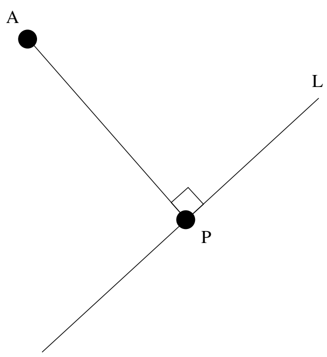
Skalärprodukt

Med vektorer har vi utfört operationerna addition, subtraktion samt multiplikation med skalär. Vi studerar nu operationen skalärprodukt, en operation mellan två vektorer som genererar ett tal.

4.1. Projektion

Innan vi börjar med skalärprodukt behöver vi begreppet projektioner.

Först lite allmänt om projektionsbegreppet och då *vinkelrät* projektion. Det behövs två objekt och det ena ska projiceras *vinkelrät* på det andra. Se figur 4.1.1. En punkt A befinner sig i $\mathbb{R}^2$ på ett avstånd från en linje. Den vinkelräta projektionen av A på linjen L är punkten P. Avståndet AP är det vinkelräta avståndet från linjen (AP är en normal till linjen). Riktningen AP kallas projektionsriktningen.



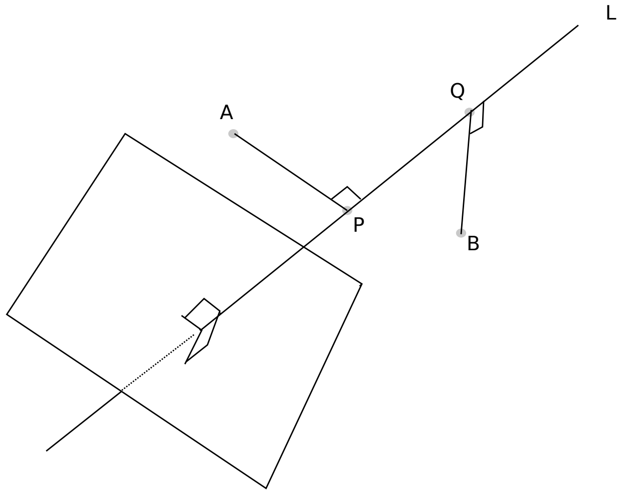
FIGUR 4.1.1. Vinkelrät projektion av punkt A på en linje L.

På liknande sätt i rummet $\mathbb{R}^3$, se figur 4.1.2. P och Q är de vinkelräta projektionerna av A och B på linjen L. Projektionsriktningen är parallell med planet som är vinkelrät mot linjen.

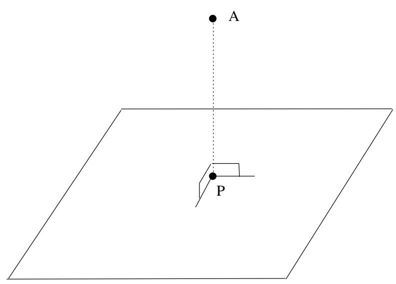
En punkt kan också projiceras vinkelrät på ett plan, se figur 4.1.3. Punkten P är den vinkelräta projektionen av punkten A på planet. För utsträckta föremål ges projektionen av att föremålets punkter projiceras.

Projektionen av en *vektor* på en linje kan förstås med hjälp av figur 4.1.4. Vektorn $\overline{v}_1$:s projektion på linjen L är vektorn $\overline{v}_{1L}$ och motsvarade för $\overline{v}_2$; i figuren är längden av $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$ lika. Observera hur storleken på projektionen beror på vinkeln mellan linjen L och vektorn. Projektionen kan som längst vara lika lång som vektorn, $|\overline{v}_1|$, och som kortast ha längden 0. Inte enbart linjesegmentet projiceras utan vektorn projiceras, så riktningen följer med.

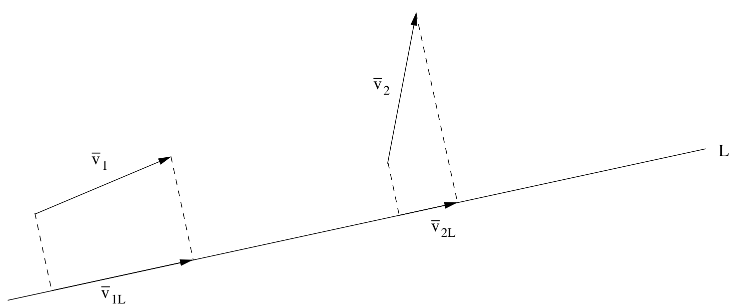
ÖVNING 4.1. Punkten (3, 5, −2) projiceras på z-planet, bestäm projektionens koordinater. 4.1



FIGUR 4.1.2. Vinkelräta projektioner i rummet på en linje.



FIGUR 4.1.3. Vinkelrät projektion av punkten A på ett plan.



FIGUR 4.1.4. Projektion av vektor på linje.

4.2 ÖVNING 4.2. Åskådliggör grafiskt att

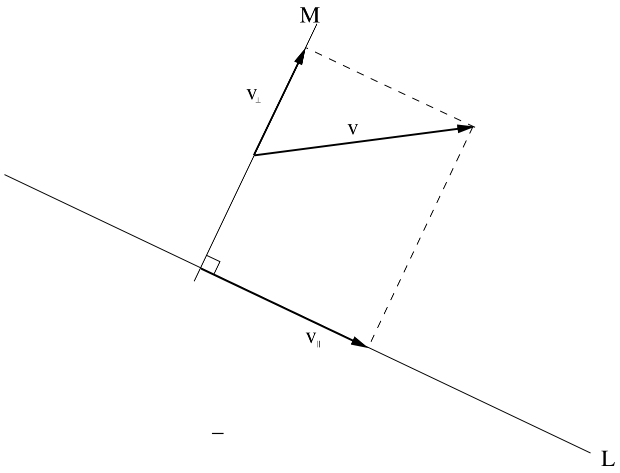
$$(\overline{v}+\overline{u})_L = \overline{v}_L + \overline{u}_L$$

dvs. att projektionen av summan är lika med summan av projektionerna. Åskådliggör även att

$$(k\overline{v})_L = k\left(\overline{v}_L\right).$$

EXEMPEL 4.1. Se figur 4.1.5. En vanlig projektionssituation är att projicera en vektor på en linje, L, och samtidigt projicera den på en annan linje, M, vinkelrät mot den tidigare. Vektorn parallell med L betecknas $\overline{v}_{\shortparallel}$ den andra med $\overline{v}_{\perp}$. För en sådan projektion gäller att

$$\overline{v} = \overline{v}_{\shortparallel} + \overline{v}_{\perp}$$



FIGUR 4.1.5. Projektion på två vinkelräta linjer.

För att komma vidare behövs storleken på projektionen uttryckas *algebraiskt* och det görs med begreppet skalärprodukt.

4.2. Skalärprodukt

Vi definierar begreppet skalärprodukt.

DEFINITION 4.1. Med den skalära produkten (alternativa beteckningar: Euklidisk/geometrisk produkt, inre produkt) $\overline{u} \bullet \overline{v}$ av de två vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ menas det reella talet

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = \begin{cases} |\overline{u}|\,|\overline{v}| \cos[\overline{u}, \overline{v}] \text{ om } \overline{u} \neq \overline{0}, \text{ och } \overline{v} \neq \overline{0} \\ 0 \text{ om } \overline{u} = \overline{0} \text{ eller } \overline{v} = \overline{0} \end{cases}$$

med $[\overline{u}, \overline{v}]$ avses den minsta vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$.

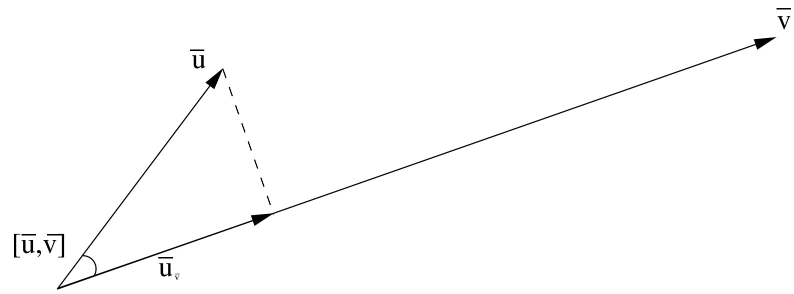
Se figur 4.2.1. Uttrycket i definitionen kan betraktas som att vektorn $\overline{u}$ projiceras på vektorn $\overline{v}$ så $\overline{u}_v$ bildas och sedan beräknas produkten av längderna av dessa två vektorer (eller tvärtom $\overline{v}$ projiceras på $\overline{u}$).

$$(|\overline{u}| \cos[\overline{u}, \overline{v}])\,|\overline{v}| = |\overline{u}_{\overline{v}}|\,|\overline{v}|$$

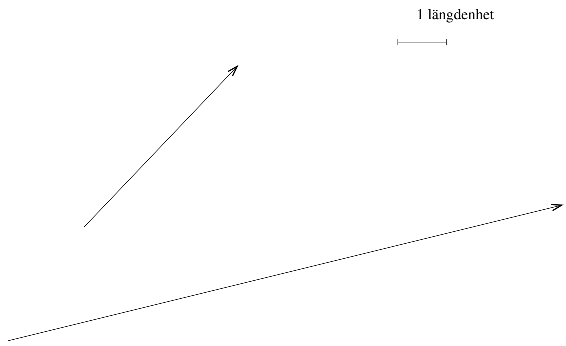
kan tolkas som att $|\overline{u}| \cos[\overline{u}, \overline{v}]$ är längden av $\overline{u}$:s projektion på $\overline{v}$, detta multipliceras sedan med längden av $\overline{v}$. Ordet 'på' ska förstås på ett speciellt sätt och kan vara missvisande. Kanske är det tydligare att säga att projektionen är på en linje med riktningen $\overline{v}$; $\overline{u}$ projiceras på $\overline{v}$:s riktning.

ÖVNING 4.3. Bestäm skalärprodukten av vektorerna i figur 4.2.2. 4.3

ANMÄRKNING 4.1. Två vektorer med $\overline{u} \bullet \overline{v} = 0$ sägs vara vinkelräta eller ortogonala och det betecknas $\overline{u} \perp \overline{v}$.



FIGUR 4.2.1. Skalärprodukt.



FIGUR 4.2.2. Skalärprodukt.

4.2.1. Ortogonal projektion som vektor. Vi anger ett uttryck för vektorn $\overline{u}_{\overline{v}}$ ($\overline{u}$:s projektion på $\overline{v}$). Först beräknas längden av $\overline{u}_{\overline{v}}$ och sedan ges den samma riktning som $\overline{v}$; $\overline{u}_{\overline{v}}$ är parallell med $\overline{v}$ och ska kunna uttryckas på formen $\overline{u}_{\overline{v}} = k\overline{v}$. Längden av $\overline{u}_{\overline{v}}$ kan beräknas genom skalärprodukten; längden av $\overline{u}_{\overline{v}}$ är $|\overline{u}| \cos [\overline{u}, \overline{v}]$ vilket kan skrivas som

$$|\overline{u}_{\overline{v}}| = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|}.$$

Då är längden bestämd. Sedan måste $\overline{v}$:s riktning anges. Riktningen måste anges med hjälp av en enhetsvektor, vi har redan rätt längd; en enhetsvektor i $\overline{v}$:s riktning är

$$\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|},$$

som vi sätter ihop till

$$\overline{u}_{\overline{v}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|} \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2} \overline{v}.$$

Detta påstående utgör teorem 4.1.

TEOREM 4.1. *Den ortogonala vektorprojektionen av $\overline{u}$ på $\overline{v}$ ges av* $\left(\overline{v} \neq \overline{0}\right)$

$$\overline{u}_{\overline{v}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|} \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2} \overline{v}.$$

Denna formel kallas för projektionsformeln och återkommer ofta.

Satsen kan också skrivas

$$\overline{u}_{\overline{e}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|} \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \overline{u} \bullet \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = (\overline{u} \bullet \overline{e})\, \overline{e}$$

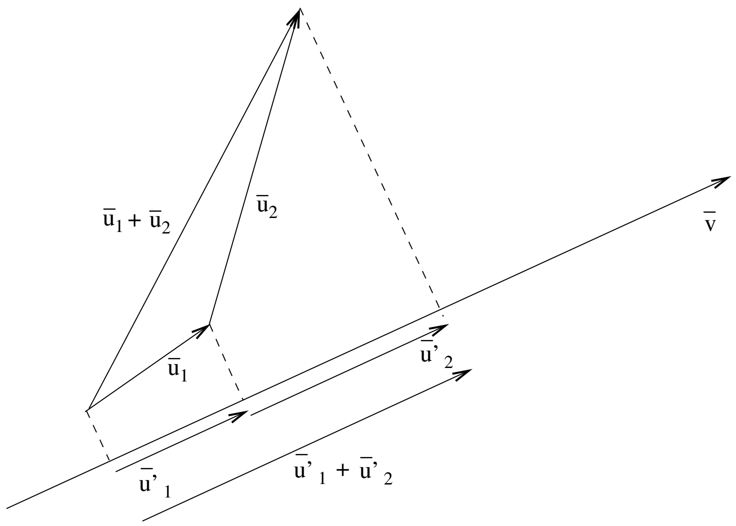
där $\overline{e}$ betecknar en normerad vektor som projektionen sker på.

TEOREM 4.2. *Följande räknelagar gäller för skalärprodukten*

(1) $\overline{u} \bullet \overline{u} = |u|^2$
(2) $\overline{u} \bullet \overline{v} = \overline{v} \bullet \overline{u}$ (kommutativ)
(3) $(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) \bullet \overline{v} = \overline{u}_1 \bullet \overline{v} + \overline{u}_2 \bullet \overline{v}$ (distributiv)
(4) $(\lambda \overline{u}) \bullet \overline{v} = \lambda\, (\overline{u} \bullet \overline{v})$

BEVIS. Punkt 1 följer direkt ur definitionen. Punkt 2 följer likaså direkt ur definitionen.

Punkt 3 kan bevisas med geometriskt stöd, se figur 4.2.3. Projektionen av en vektor $\overline{u}$ betecknas $\overline{u}'$ i figuren. Språkligt kan algebran uttryckas som att projektionen av vektorsumman (vänster sida) är lika stor som summan av projektionerna (höger sida). Påståendet kan också bevisas algebraiskt med hjälp av satsen om ortogonal projektion, teorem 4.1. På liknande sätt visas punkt 4. □



FIGUR 4.2.3. Summan av projektionerna är lika med projektionen av summan.

Räknereglerna för skalärprodukt ger beräkningar som påminner om den algebra du redan kan.

ÖVNING 4.4. Konjugat. Visa att $(\overline{u} + \overline{v}) \bullet (\overline{u} - \overline{v}) = |\overline{u}|^2 - |\overline{v}|^2$. 4.4

4.3. Ortonormerad bas

Vi studerar uttryck för skalärprodukten i koordinatform.

4.3.1. Skalärprodukt i koordinatform. Om basvektorerna har längden 1 (normerade) och är vinkelräta (ortogonala), benämns de ortonormerade (skrivs ON-system: ortogonala och normerade), så kan skalärprodukt skrivas speciellt enkelt i koordinatform. Uttrycket för skalärprodukt erhålls genom att räkna rakt fram med uttrycken $\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2$ och $\overline{v} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2$. Vi har för deras skalärprodukt

$$\begin{aligned}\overline{u} \bullet \overline{v} = (x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2) \bullet (y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2) \text{ [distributiva lagen] } = \\ x_1y_1\overline{e}_1 \bullet \overline{e}_1 + x_1y_2\overline{e}_1 \bullet \overline{e}_2 + x_2y_1\overline{e}_2 \bullet \overline{e}_1 + x_2y_2\overline{e}_2 \bullet \overline{e}_2.\end{aligned}$$

Om $\overline{e}_1$ är ortogonal mot $\overline{e}_2$ så är $\overline{e}_1 \bullet \overline{e}_2 = 0$. Om sedan dessutom basvektorerna är normerade till 1, $\overline{e}_i \bullet \overline{e}_i = 1$, så blir högerledet enkelt

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

För tre dimensioner

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{4.3.1}$$

Här följer nu ett antal exempel på användning av begreppen och uttrycken.

Anmärkning 4.2. Observera att 4.3.1 enbart gäller i ortonormerade system, annars är det 9 termer i 3 dimensioner!

Exempel 4.2. Beräkna vinkeln mellan vektorerna (1, 2, 0) och (2, 3, 4) i ett ON-system. Vi har

$$(1,\ 2,\ 0) \bullet (2,\ 3,\ 4) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 2 + 6 + 0 = 8.$$

Och $|(1, 2, 0)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$, $|(2, 3, 4)| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ så vi erhåller

$$8 = \sqrt{5}\sqrt{29}\cos(v)$$

som ger oss att

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{5}\sqrt{29}}\right) \approx 48,4°.$$

Detta kan användas till att beräkna vinkeln mellan två *linjer* i rummet, även om de inte skär varandra. Lämpligen föreställer man sig linjerna parallellförflyttade (bibehållen riktning) tills de skär varandra.

4.5 Övning 4.5. Beräkna den ortogonala vektorprojektionen av vektorn (1, 2, 3) på vektorn (1, 1, 1) i ett ON-system. Resultatet är en vektor.

4.6 Övning 4.6. En triangel har hörn i (1, 2, 0), (−1, 3, 1) och (0, 1, 4)i ett ON-system. Bestäm sidornas längder och vinklarna mellan sidorna.

Anmärkning 4.3. Vi behandlar inte skalärprodukt i sneda koordinatsystem.

Koordinater kan ses som resultatet av en skalärprodukt om systemet är ortonormerat. Om vi har $\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$ så erhåller vi x_1 genom

$$\overline{u} \bullet \overline{e}_1 = (x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3) \bullet \overline{e}_1 = x_1 \tag{4.3.2}$$

då $\overline{e}_1 \bullet \overline{e}_1 = 1$ och $\overline{e}_1 \bullet \overline{e}_2 = 0$ osv. Detta uttrycks också som att vinkelräta projektionen av $\overline{u}$ på basvektorn $\overline{e}_1$ ger koordinaten.

4.7 Övning 4.7. Vi har en vektor $\overline{u} = (1, 2)$ i ett system med basen $\overline{e}_1 = (1, 0)$ och $\overline{e}_2 = (0, 1)$. Vi inför ett nytt ortonormerat system genom $\overline{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ och $\overline{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. Beräkna med hjälp av formeln ovan, 4.3.2, koordinaterna för $\overline{u}$ i basen $\{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\}$.

Exempel 4.3. Ett plan Π kan skrivas som $ax+by+cz+d=0$ där a, b, c, d är fixa tal och x, y, z är obekanta vars värden ska uppfylla ekvationen; dessa taltripplar (x, y, z) är mängden som är planet. Planet parallellt med Π men som går igenom origo är $ax+by+cz=0$. Tolkas vänsterledet som en skalärprodukt kan vi skriva

$$(a, b, c) \bullet (x, y, z) = ax + by + cz = 0$$

där (x, y, z) är en godtycklig vektor (en godtycklig taltrippel i lösningsmängden) i planet. Vektorn (a, b, c) är vinkelrät mot (godtycklig vektor i) planet, eftersom skalärprodukten är 0, och kallas för planets normalvektor. Vektorn (a, b, c) är en normalvektor för alla plan, även då $d \neq 0$ eftersom d endast parallellförflyttar planet. På samma sätt följer att linjen $ax+by+c=0$ har normalen (a, b).

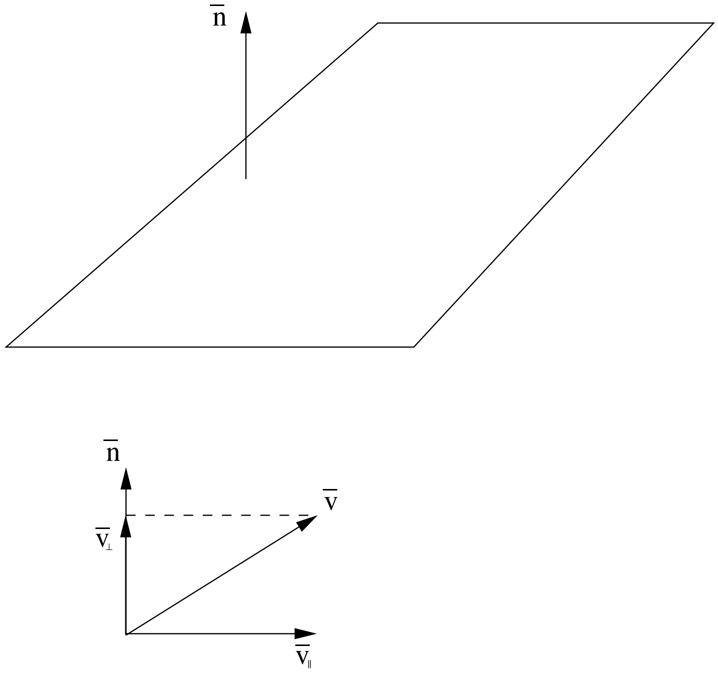
Övning 4.8. Bestäm planet vinkelrät mot vektorn $(2, 1, -1)$ som går igenom origo. 4.8
Bestäm planet som har samma normal men som innehåller punkten $(1, 4, 2)$.

Exempel 4.4. Bestäm vinkeln mellan planen $2x+3y-z=5$ och $x-y+z=0$ i ett ON-system. Vinkeln mellan planen är samma som vinkeln mellan normalvektorerna; normalvektorerna är $(2, 3, -1)$ och $(1, -1, 1)$ och vinkeln beräknas med hjälp av skalärprodukten $\overline{u} \bullet \overline{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = |\overline{u}|\,|\overline{v}| \cos[\overline{u}, \overline{v}]$

$$(2, 3, -1) \bullet (1, -1, 1) = 2 - 3 - 1 = \sqrt{14}\sqrt{3} \cos v$$

så $v \approx 108°$.

Exempel 4.5. Dela upp en vektor i vinkelräta komposanter, den ena ska ligga i ett plan betecknat π, och den andra är vinkelrät mot planet. Planet är $2x+3y-z=5$ med normalvektorn $\overline{n} = (2, 3, -1)$ och vektorn som ska delas upp är $\overline{v} = (1, -1, 1)$. Vi inför att $\overline{v}_{\|} \parallel \pi$ och $\overline{v}_{\perp} \perp \pi$. Se figur 4.3.1.



Figur 4.3.1. Uppdelning av vektor. En komposant parallell med planet och en vinkelrät.

Vi kan direkt med hjälp av figurerna se att $\overline{v}_\perp$ ges av $\overline{v}$:s projektion på normalen till planet $\overline{n}$

$$\overline{v}_\perp = \frac{\overline{n} \bullet \overline{v}}{|n|^2}\overline{n} = \frac{(2,\ 3,\ -1) \bullet (1,\ -1,\ 1)}{14}(2,\ 3,\ -1) = -\frac{1}{7}(2,\ 3,\ -1)$$

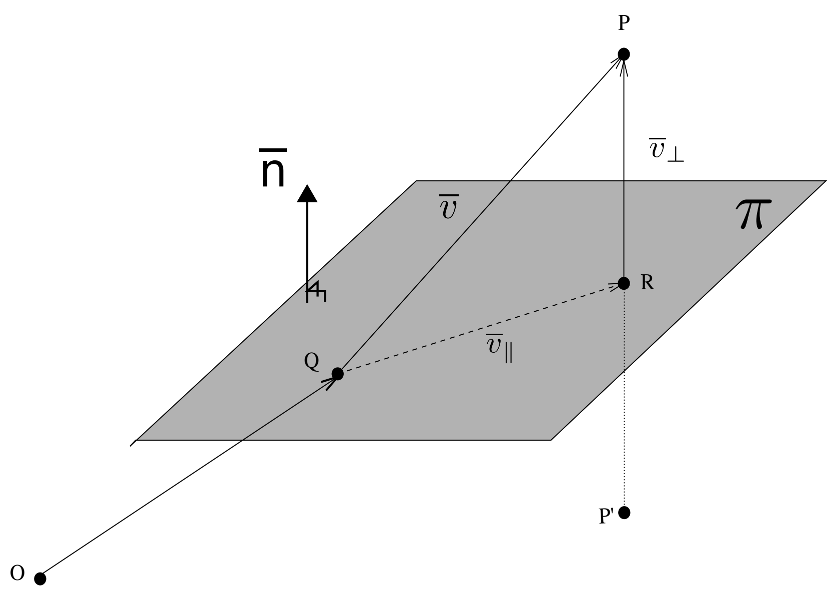
och $\overline{v} = \overline{v}_\parallel + \overline{v}_\perp$ så

$$\overline{v}_\parallel = \overline{v} - \overline{v}_\perp = (1,\ -1,\ 1) + \frac{1}{7}(2,\ 3,\ -1) = \left(\frac{9}{7},\ -\frac{4}{7},\ \frac{6}{7}\right) = \frac{1}{7}(9,\ -4,\ 6)\,.$$

Denna typ av beräkning återkommer ofta som delar i större beräkningar. Kontrollera alltid att $\overline{v}_\perp \bullet \overline{v}_\parallel = 0$.

4.9 Övning 4.9. Dela upp $\overline{v} = (1, -1, 1)$ i vinkelräta komposanter, den ena ska vara parallell med planet $3x - y + 2z = 2$ och den andra är vinkelrät mot planet.

Exempel 4.6. Projektion av punkt på ett plan. Vilka koordinater får punktens projektion på planet? Vi illustrerar med punkten $P\ :\ (1,\ -3,\ 1)$ och planet $\pi\ :\ 2x+y-z+3 = 0$, se figur 4.3.2. En godtycklig punkt Q i planet ges t.ex. av $(0, 0, 3)$



Figur 4.3.2. Projektion av punkt på plan.

eftersom den satisfierar planets ekvation. Vektorn $\overline{v}$ ges av $\overline{v} = \overline{QP} = (1,\ -3,\ 1)\ -$

$(0,\,0,\,3) = (1,\,-3,\,-2)$. Och projektionen av $\overline{v}$ på normalen $\overline{n} = (2,\,1,\,-1)$ ger

$$\begin{aligned}\overline{v}_\perp &= \frac{\overline{n} \bullet \overline{v}}{|n|^2}\overline{n} = \frac{(2,\,1,\,-1) \bullet (1,\,-3,\,-2)}{6}\,(2,\,1,\,-1) \\ &= \frac{2-3+2}{6}\,(2,\,1,\,-1) \\ &= \frac{1}{6}\,(2,\,1,\,-1)\,.\end{aligned}$$

Vektorn $\overline{v}_\| = \overline{v} - \overline{v}_\perp = (1,\,-3,\,-2) - \frac{1}{6}\,(2,\,1,\,-1) = (2/3,\,-19/6,\,-11/6)$. Ortsvektor $\overline{OR}$ är $\overline{OQ} + \overline{v}_\| = (0,\,0,\,3) + (2/3,\,-19/6,\,-11/6) = (2/3,\,-19/6,\,7/6)$ vilket är koordinaterna för punkten R. Vi kan också skriva ortsvektorn $\overline{OR} = \overline{OP} - \overline{v}_\perp = (1,\,-3,\,1) - \frac{1}{6}\,(2,\,1,\,-1) = (2/3,\,-19/6,\,7/6)$. Vi kontrollerar också $\overline{v}_\perp \bullet \overline{v}_\| = \frac{1}{6}\,(2,\,1,\,-1) \bullet (2/3,\,-19/6,\,-11/6) = 8/36 - 19/36 + 11/36 = 0$.

Anmärkning 4.4. För att lära sig proceduren i föregående exempel är det lämpligt med lite tänkande kring arbetsgången. Titta tillbaka på exemplet och beskriv arbetsgången för dig själv. Försök sedan lösa exemplet själv och motivera i varje steg arbetsgången. Gör sedan följande uppgift och motivera för dig själv igen arbetsgången. Din inlärning är bättre om du tänker lite på hur du löser denna typ av uppgifter.

Övning 4.10. Punkten $P : (2, -3, 3)$ projiceras på planet $\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$. 4.10
Bestäm projektionens koordinater.

Exempel 4.7. Om vi i föregående exempel vill konstruera spegelbilden P' så måste vi gå $-\overline{v}_\perp$ två gånger från punkten P. Vi har från figuren $\overline{OP}' = \overline{OQ} + \overline{v} - 2\overline{v}_\perp$som ger

$$\begin{aligned}(0,\,0,\,3) + (1,\,-3,\,-2) - \frac{1}{3}\,(2,\,1,\,-1) &= (0 + 1 - 2/3, 0 - 3 - 1/3, 3 - 2 + 1/3) = \\ &\qquad (1/3,\,-10/3,\,4/3)\,.\end{aligned}$$

Men också $\overline{OR} - \overline{v}_\perp = (2/3,\,-19/6,\,7/6) - \frac{1}{6}\,(2,\,1,\,-1) = (1/3,\,-10/3,\,4/3)$.

Övning 4.11. Fortsättning på föregående övning. Spegla punkten given i övningen 4.11
i planet. Redogör också för dig själv arbetsproceduren.

Exempel 4.8. Avstånd mellan punkt och plan. Det kortaste avståndet mellan en punkt och ett plan är avståndet mellan punkten och dess ortogonala projektion på planet. Beräkningarna kommer att påminna om föregående exempel; vi utför dem dock generellt så en formel erhålls. Planet är $ax + by + cz + d = 0$ med normalen $\overline{n} = (a,\,b,\,c)$. Punkten utanför planet betecknar vi $P_0 : (x_0,\,y_0,\,z_0)$. Vi inför en vektor mellan en godtycklig punkt i planet, $A : (p,\,q,\,r)$, och punkten P_0 (vilket gör att vi är tillbaka till de föregående beräkningarna, rita figur)

$$\overline{u} = \overline{AP}_0 = (x_0 - p,\,y_0 - q,\,z_0 - r)\,.$$

Dennes projektion på normalvektorn är en vektor med rätt längd

$$\overline{u}_\perp = \frac{\overline{u} \cdot \overline{n}}{|n|^2}\overline{n}$$

och dess längd är

$$l = |\overline{u}_\perp| = \left|\frac{\overline{u} \cdot \overline{n}}{|n|^2}\overline{n}\right| = \frac{|\overline{u} \cdot \overline{n}|}{|n|^2}\,|\overline{n}| = \frac{|\overline{u} \cdot \overline{n}|}{|n|} =$$

$$= \frac{|a\,(x_0 - p) + b\,(y_0 - q) + c\,(z_0 - r)|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

Vi vet också att för punkten $A : (p,\, q,\, r)$ som ligger i planet gäller $ap + bq + cr + d = 0$ vilket vi kan använda för att förenkla täljaren i uttrycket. I täljaren erhålls $-\,(ap + bq + cr)$ vilket är d så uttrycket blir

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \tag{4.3.3}$$

4.12 Övning 4.12. Beräkna avståndet mellan punkten $(2,\, 0,\, 3)$ och planet $2x + 3y - z + 1 = 0$ enligt metoden i föregående exempel.

Exempel 4.9. Avståndet mellan en punkt och en linje i rummet. Bestäm avståndet mellan punkten $P : (1,\, 3,\, 2)$ och linjen $l : (3 - t,\, -2 + t,\, 2 + 3t)$. Eftersom linjer, i allmänhet, anges på parameterform har vi linjens riktning $\overline{v} = (-1, 1, 3)$ och därmed enklast en projektion på denna riktning i stället för på normalen. En linje har flera normaler med olika riktningar, ett plan har bara, om vi bortser från tecknet, en riktning på sin normal. Vi måste arbeta på ett annat sätt med problemet. En vektor från en godtycklig punkt på linjen, t.ex. med $t = 0$, till P ges av $\overline{u} = (1,\, 3,\, 2) - (3,\, -2,\, 2) = (-2,\, 5,\, 0)$. Projektionen på linjens riktning (inte normalen som vid planet) $\overline{v}$

$$\overline{u}_{\parallel} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v} = \frac{(-2,\, 5,\, 0) \cdot (-1,\, 1,\, 3)}{11}(-1,\, 1,\, 3) = \frac{7}{11}(-1,\, 1,\, 3)$$

och med $\overline{u}_{\parallel} + \overline{u}_{\perp} = \overline{u}$ erhålls $\overline{u}_{\perp} = \overline{u} - \overline{u}_{\parallel} = (-2,\, 5,\, 0) - \frac{7}{11}(-1,\, 1,\, 3) = \frac{3}{11}(-5,\, 16,\, -7)$ som har längden $\frac{3}{11}\sqrt{5^2 + 16^2 + 7^2} = \frac{3}{11}\sqrt{330} = \frac{3}{11}\sqrt{11}\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ vilket är cirka $4,95$. Avslutningsvis kontrollerar vi $\overline{u}_{\parallel} \bullet \overline{u}_{\perp} = \frac{7}{11}(-1,\, 1,\, 3) \bullet \frac{3}{11}(-5,\, 16,\, -7) = \frac{21}{11}(5 + 16 - 21) = 0$.

Anmärkning 4.5. Tänk igenom arbetsproceduren, beskriv den för dig själv. Detta gör det lättare för dig att minnas proceduren. Hur skiljer sig denna procedur från beräkningen av avstånd mellan punkt och plan?

4.13 Övning 4.13. Hur långt från origo befinner sig planet $ax + by + cz + d = 0$? Förklara varför det inte är möjligt att avståndet ges av d.

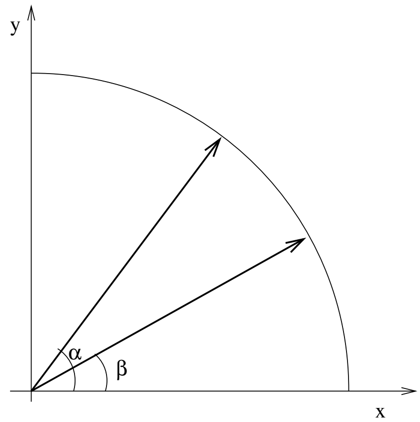
Exempel 4.10. Avgör om $\overline{u} = (1,\, 2,\, 3)$ (ortsvektor) är parallell med planet π: $4x + y - 2z + 1 = 0$. Låt π' vara planet genom origo parallellt med π (varför gör man så?). Det planet har ekvationen $4x + y - 2z = 0$. Det gäller att $\overline{u} \parallel \pi \Leftrightarrow \overline{u} \in \pi'$. Vi sätter in $(1,\, 2,\, 3)$ i planets ekvation

$$4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$

den tillhör alltså π', den är alltså parallell med π. Observera att lösningen bygger på att vektorer inte är lokaliserade. Att tänka att $\overline{u}$ och normalen till π ska vara ortogonala leder till samma uttryck: $\overline{u} \bullet (4,\, 1,\, -2) = (1,\, 2,\, 3) \bullet (4,\, 1,\, -2) = 0$.

4.14 Övning 4.14. Ange ett plan på affin form som är parallell med vektorn $\overline{v} = (2,\, -1,\, 0)$.

EXEMPEL 4.11. Skalärprodukten är också en ingång till en del trigonometriska likheter. Vi har två enhetsvektorer i ett ortonormerat system, kalla dem $\overline{u}$ respektive $\overline{v}$. De bildar vinklarna α respektive β med positiva x-axeln, se figur 4.3.3. Vinkeln mellan dem är $\alpha - \beta$. Skalärprodukten kan skrivas $\overline{u} \bullet \overline{v} = |\overline{u}|\,|\overline{v}| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$, men skalärprodukten kan också beräknas som $\overline{u} \bullet \overline{v} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \bullet (\cos(\beta), \sin(\beta)) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$. Detta ger den trigonometriska additionsformeln $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.



FIGUR 4.3.3. Härledning av trigonometrisk subtraktionsformel.

4.4. Sammanfattning

Sammanfatta kapitlet genom att arbeta dig igenom följande lista och ge exempel eller standarduppgift för varje fråga. Förklara svaret på varje fråga för dig själv.

(1) Vad är vinkelrät projektion?
(2) Hur definieras skalärprodukt?
(3) Härled projektionsformeln.
(4) Härled avståndsformeln.
(5) Hur beräknas avstånd mellan:
  (a) punkt och punkt,
  (b) punkt och linje,
  (c) punkt och plan,
  (d) linje och plan?
(6) Hur gör man en uppdelning av en vektor i en parallell och en vinkelrät komposant?
(7) Hur kan de affina formlerna för linje och plan ses som en skalärprodukt?

Tag för vana att göra denna typ av sammanfattning efter varje kapitel. Det skapar struktur och förbättrar ditt lärande.

4.5. Facit övningar

4.1 $(3, 5, 0)$

4.2 Ingen kommentar.

4.3 ca. 267 längdenheter.

4.4 $(\overline{u}+\overline{v}) \bullet (\overline{u}-\overline{v}) = \overline{u} \bullet (\overline{u}-\overline{v}) + \overline{v} \bullet (\overline{u}-\overline{v}) = \overline{u} \bullet \overline{u} - \overline{u} \bullet \overline{v} + \overline{v} \bullet \overline{u} - \overline{v} \bullet \overline{v} = \overline{u} \bullet \overline{u} - \overline{v} \bullet \overline{v} = |\overline{u}|^2 - |\overline{v}|^2$.

4.5

$$\overline{u}_{\overline{v}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v} = \frac{(1,2,3) \bullet (1,1,1)}{3}(1,1,1) = \frac{6}{3}(1,1,1) = 2\,(1,1,1)\,.$$

4.6 Se figur 4.5.1. $\overline{s}_1 = (1,2,0) - (-1,3,1) = (2,-1,-1)$. $|\overline{s}_1| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

$\overline{s}_2 = (1,2,0) - (0,1,4) = (1,1,-4)$. $|\overline{s}_2| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

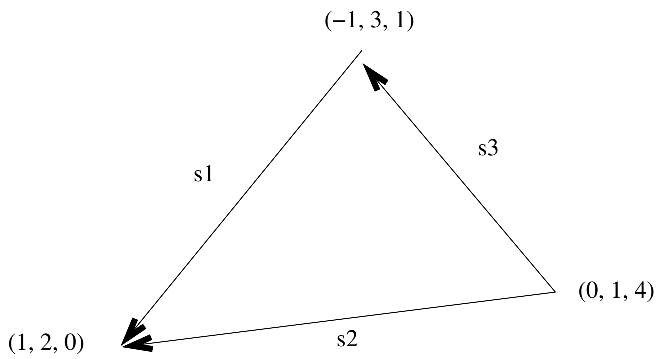
$\overline{s}_3 = (-1,3,1) - (0,1,4) = (-1,2,-3)$. $|\overline{s}_3| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

$\overline{s}_1 \bullet \overline{s}_2 = (2,-1,-1) \bullet (1,1,-4) = 2-1+4 = 5$. De pekar i samma riktning och vinkeln är mindre än $90°$. Skalärprodukten kan också skrivas $\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}\cos(v)$ så $5/\left(\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}\right) = \cos(v)$ och slutligen $\arccos\left(5/\left(\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}\right)\right) \approx 1,07$ rad $(61,2°)$.

$\overline{s}_1 \bullet \overline{s}_3 = (2,-1,-1) \bullet (-1,2,-3) = -2-2+3 = -1$. De pekar i olika riktning och vinkeln är mindre än $90°$. $\arccos\left(-1/\left(\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}\right)\right) \approx 1,68$ rad $(96,3°)$. Vinkeln måste vara $180° - 96,3° = 83,7°$

$\overline{s}_2 \bullet \overline{s}_3 = (1,1,-4) \bullet (-1,2,-3) = -1+2+12 = 13$. De pekar i samma riktning så vinkeln är mindre än $90°$. $\arccos\left(13/\left(3\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}\right)\right) \approx 0,61$ rad $(35,0°)$.

Vinkelsumman är $180°$.



FIGUR 4.5.1

4.7 De nya koordinaterna är x_1' och x_2'. De beräknas med $\overline{u} \bullet \overline{e}_1' = (1,\,2) \bullet (1,\,1)\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = x_1'$. $\overline{u} \bullet \overline{e}_2' = (1,\,2) \bullet (1,\,-1)\,\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = x_2'$. Observera att både $\overline{u}$ och e' är givna i samma bas e.

4.8 $2x+y-z=0$. Det andra planet bestäms genom att sätta d som en obekant, sätta in punkten $(1,4,2)$ som värden för x, y och z.

$$2 \cdot 1 + 4 - 2 + d = 0$$

så att $d=-4$. Planet är $2x+y-z-4=0$.

4.9

$$\overline{v}_{\perp} = \frac{(3,\,-1,\,2) \bullet (1,\,-1,\,1)}{14}(3,\,-1,\,2) = \frac{3}{7}(3,\,-1,\,2)\,.$$

och

$$\overline{v}_{\|} = \overline{v} - \overline{v}_{\perp} = (1,\,-1,\,1) - \frac{3}{7}(3,\,-1,\,2) = \frac{(7-9,\,-7+3,\,7-6)}{7} = \frac{1}{7}(-2,\,-4,\,1)\,.$$

4.10 En ortsvektor till en godtycklig punkt Q i planet är $\overline{OQ} = (-1, 0, 0)$ vilken uppfyller planets ekvation. Vektorn $\overline{v}$ ges av $\overline{v} = \overline{QP} = (2, -3, 3) - (-1, 0, 0) = (3, -3, 3)$. Projektionen av $\overline{v}$ på normalen $\overline{n} = (1, 2, -2)$ är

$$\begin{aligned}\overline{v}_{\perp} &= \frac{\overline{n} \bullet \overline{v}}{|n|^2}\overline{n} = \frac{(1, 2, -2) \bullet (3, -3, 3)}{9}(1, 2, -2) \\ &= \frac{3-6-6}{9}(1, 2, -2) \\ &= -(1, 2, -2).\end{aligned}$$

Vektorn $\overline{v}_{\|} = \overline{v} - \overline{v}_{\perp} = (3, -3, 3) - (-(1, 2, -2)) = (3+1, -3+2, 3-2) = (4, -1, 1)$. Ortsvektor $\overline{OR}$, till den projicerade punkten R, är $\overline{OQ} + \overline{v}_{\|} = (-1, 0, 0) + (4, -1, 1) = (3, -1, 1)$.

4.11Vi har från figuren i exemplet att en vektor till den speglade punkten är $\overline{OP}' = \overline{OQ} + \overline{v} - 2\overline{v}_{\perp}$som ger

$$\begin{aligned}(-1, 0, 0) + (3, -3, 3) + 2(1, 2, -2) = (-1+3+2,\ 0-3+4,\ 0+3-4) = \\ (4,\ 1,\ -1).\end{aligned}$$

4.12

$$l = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \approx 0,53.$$

4.13 Origo är punkten $P_0 : (0, 0, 0)$ som insatt i formeln ger $d/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Avståndet kan inte ges av d eftersom om man multiplicerar ekvationen för planet med ett tal så ökar inte avståndet till origo, det är fortfarande samma plan. T.ex har $2x + 3y - z + 5 = 0$ samma avstånd till origo som $4x + 6y - 2z + 10 = 0$ fastän d är olika; de är samma plan.

4.14 Planet ansätts som $ax + by + cz = 0$. Vi får

$$a \cdot 2 + b \cdot (-1) + c \cdot 0 = 0$$

eller

$$2a - b = 0.$$

Vi kan välja $a = 2$ och får då $b = 4$. Ett plan parallellt med $\overline{v}$ är $2x + 4y + 3z - 2 = 0$. Där vi tagit godtycklig koefficient framför z och en godtycklig konstant -2.

4.6. Kapitelproblem

4.1 Definitionen av arbete ges av en skalärprodukt $W = \overline{F} \bullet \overline{s}$. Beräkna arbetet då $\overline{F} = (0, 2, 4)$ och $\overline{s} = (1, 1, 0)$. Hur stor är vinkeln mellan kraften $\overline{F}$ och förflyttningen $\overline{s}$? *Fysikens användning av kraft och sträcka för att beräkna arbete.*

4.2 Vektorn $\overline{u}$ har längden 4 och $\overline{v}$ har längden 3. Vinkeln mellan dem är $\pi/3$. Bestäm genom att använda att skalärprodukt är distributiv värdet på $(\overline{u} + 3\overline{v}) \bullet (-2\overline{u} + \overline{v})$.

4.3 Finn en vektor som är linjärt oberoende av $(1, 2, 1, 0)$, $(0, -1, 2, 3)$, $(2, 0, 1, 1)$ genom att kräva att vektorn är vinkelrät mot de andra 3. (Det finns flera metoder, men detta är ett sätt.) *Att konstruera en bas.*

4.4 Cosinussatsen. Visa att $|\overline{u} - \overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 - 2\,|\overline{u}|\,|\overline{v}| \cos[\overline{u}, \overline{v}]$. Illustrera satsen geometriskt.

4.5 Visa att $|\overline{u} + \overline{v}|^2 + |\overline{u} - \overline{v}|^2 = 2\left(|\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2\right)$. Illustrera satsen geometriskt.

Mängdövningar

4.6 Vilka koordinater får projektionen av punkten $P : (2, -1, 2)$ på planet $\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$. Vilka koordinater får spegelbilden?

4.7 Bestäm vinkeln mellan planen $3x + y - 2z = 3$ och $2x - 2y + z = 0$..

4.8 Beräkna avståndet mellan punkten $P : (1, 1, 3)$ och planet $x + 2y - z + 3 = 0$.

4.9 Beräkna den ortogonala vektorprojektionen av vektorn $\overline{u} = (0, 1, -1)$ på vektorn $\overline{v} = (1, 1, 2)$. Resultatet är en vektor.

4.10 Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\overline{u} = (2, 1, 0)$ och $\overline{v} = (1, 1, 2)$ i ett ON-system.

4.11 Dela upp en vektor i vinkelräta komposanter, den ena ska ligga i ett plan betecknat π, och den andra är vinkelrät mot planet. Planet är $3x - 2y - 2z = 4$, och vektorn som ska delas upp är $\overline{v} = (2, -1, 3)$.

4.12 Bestäm avståndet mellan punkten $P : (1, 3, 2)$ och linjen $l : (3 - t,\ -2 + t,\ 2 + 3t)$.

4.13 Punkten $P : (1, -2)$ speglas i linjen $y = 3x + 2$ bestäm med kapitlets metoder spegelbilden.

4.14 Punkterna $(1, 1, 2)$ och $(2, 3, 1)$ är spegelbilder av varandra i ett plan. Vilket plan?

4.15 Visa att vektorerna $\overline{a}_1 = \frac{1}{10}(6,\ 8)$ och $\overline{a}_2 = \frac{1}{10}(-8, 6)$ är en ortonormerad bas. Bestäm koordinaterna för $\overline{u} = (1,\ 3)$ i denna bas.

4.16 Spegla linjen

$$\begin{aligned} x &= \quad 1 + 2t \\ y &= -1 + \ \ t \\ z &= \quad 2 - 3t \end{aligned}$$

i planet $2x + 3y - z + 2 = 0$. Ledning: Rita ordentlig figur och jämför med spegling av punkt i plan.

4.17 Vad gäller för avståndet (minsta) mellan en linje och ett plan i rummet? Hur beräknas det? Återför svaret på tidigare beräkningar för avstånd. Beräkna avståndet mellan planet

$$\begin{aligned} x &= 2 + \ \ s + 2t \\ y &= 1 - 2s + \ \ t \\ z &= \ \ + \ \ s - \ \ t \end{aligned}$$

och linjen

$$\begin{aligned} x &= \ \ - \ \ t \\ y &= 1 - 3t\,. \\ z &= 1 + 2t \end{aligned}$$

4.7. Facit Kapitelproblem

4.1 $W = (0,2,4) \bullet (1,1,0) = 2$. $\cos v = W/\left(\left|\overline{F}\right| |\overline{s}|\right) = 2/\left(\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}\right)$ så $v \approx 71,6°$.

4.2 $(\overline{u} + 3\overline{v}) \bullet (-2\overline{u} + \overline{v}) = \overline{u} \bullet (-2\overline{u}) + \overline{u} \bullet \overline{v} + 3\overline{v} \bullet (-2\overline{u}) + 3\overline{v} \bullet \overline{v} = -2\overline{u} \bullet \overline{u} - 5\overline{u} \bullet \overline{v} + 3\overline{v} \bullet \overline{v} = -2 \cdot 16 - 5 \cdot 6 + 3 \cdot 9 = -35$. $\cos(\pi/3) = 0,5$.

4.3 Det finns speciella metoder för detta men de gås inte igenom i denna kurs. Först och främst ser vi att de 3 vektorerna är linjärt oberoende. Att finna en fjärde som är linjärt oberoende kan man göra genom att kräva att den är vinkelrät mot de 3 givna.

$$(a,b,c,d) \bullet (1,2,1,0) = 0$$
$$(a,b,c,d) \bullet (0,-1,2,3) = 0$$
$$(a,b,c,d) \bullet (2,0,1,1) = 0$$

vilket ger oss ekvationerna

$$a + 2b + c = 0$$
$$-b + 2c + 3d = 0$$
$$2a + c + d = 0$$

och vi ger den utvidgade matrisen till Python

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

och kommandot rref ger oss

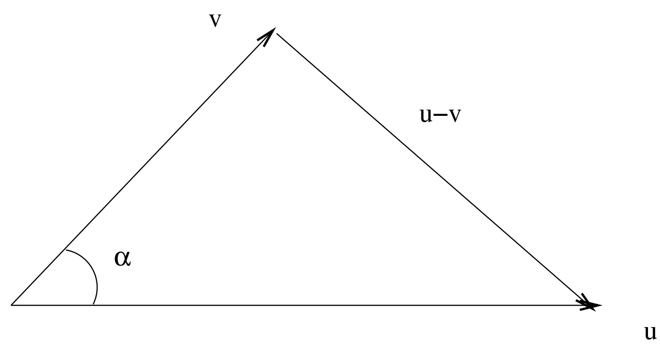
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 & 0 \end{pmatrix}$$

dvs. vi har en parameter i 4 kolonnen

$$a - 1/9d = 0$$
$$b - 5/9d = 0$$
$$c + 11/9d = 0$$

så om vi sätter $d = 9$ erhåller vi följande lösning $a = 1$, $b = 5$, $c = -11$ d. v. s. vektorn $(1, 5, -11, 9)$ är vinkelrät mot de andra tre, kolla gärna.

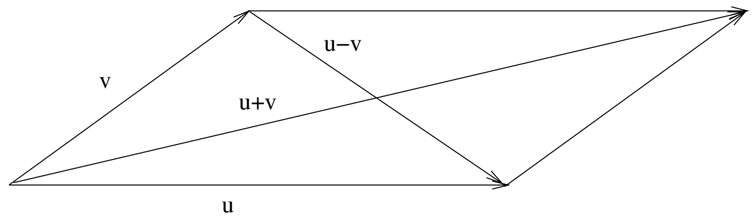
4.4 $|\overline{u} - \overline{v}|^2 = (\overline{u} - \overline{v}) \bullet (\overline{u} - \overline{v}) = \overline{u} \bullet \overline{u} - \overline{u} \bullet \overline{v} - \overline{v} \bullet \overline{u} + \overline{v} \bullet \overline{v} = |\overline{u}|^2 - 2\overline{u} \bullet \overline{v} + |\overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 - 2|\overline{u}||\overline{v}| \cos[\overline{u}, \overline{v}]$.



FIGUR 4.7.1. Cosinus-satsen.

4.5

$$\begin{aligned}
|\overline{u}+\overline{v}|^2+|\overline{u}-\overline{v}|^2 &= \\
(\overline{u}+\overline{v})\bullet(\overline{u}+\overline{v})+(\overline{u}-\overline{v})\bullet(\overline{u}-\overline{v}) &= \\
|\overline{u}|^2+|\overline{v}|^2+2\,|\overline{u}|\,|\overline{v}|\cos[\overline{u},\overline{v}]+|\overline{u}|^2+|\overline{v}|^2-2\,|\overline{u}|\,|\overline{v}|\cos[\overline{u},\overline{v}] &= \\
2\left(|\overline{u}|^2+|\overline{v}|^2\right).
\end{aligned}$$



FIGUR 4.7.2. Diagonalsatsen för parallellogrammer.

4.6 En godtycklig punkt i planet är $Q=(-1,0,0)$. Vektor från Q till P är $\overline{v}=(2,-1,2)-(-1,0,0)=(3,-1,2)$. Och $\overline{v}$:s projektion på normalen är

$$\overline{v}_\perp=\frac{\overline{v}\bullet\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n}$$

där $\overline{n}=(1,2,-2)$. Så

$$\overline{v}_\perp=\frac{(3,-1,2)\bullet(1,2,-2)}{9}(1,2,-2)=-\frac{1}{3}(1,2,-2)\,.$$

Och

$$\overline{v}_\parallel=\overline{v}-\overline{v}_\perp=(3,-1,2)-\left(-\frac{1}{3}\right)(1,2,-2)=\frac{1}{3}(10,-1,4)\,.$$

Slutligen koordinaten för projektionen $\overline{OR}=\overline{OQ}+\overline{v}_\parallel=(-1,0,0)+\frac{1}{3}(10,-1,4)=\frac{1}{3}(7,-1,4)$. Spegelbilden ges av förflytta sig från P två $-\overline{v}_\perp$ eller från R en $-\overline{v}_\perp$ så koordinaten för den speglade punkten är $\overline{OP}'=\overline{OP}-2\overline{v}_\perp=(2,-1,2)-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(1,2,-2)=\frac{1}{3}(8,1,2)$.

4.7 Vinkeln mellan planen ges av vinkeln mellan normalerna. Beräkna vinkeln mellan $(3,1,-2)$ och $(2,-2,1)$. $\overline{u}\bullet\overline{v}=(3,1,-2)\bullet(2,-2,1)=6-2-2=2$. Men också $|\overline{u}|\,|\overline{v}|\cos[\overline{u},\overline{v}]=\sqrt{14}\cdot\sqrt{9}\cdot\cos(\alpha)$ så

$$2=\sqrt{14}\cdot\sqrt{9}\cdot\cos(\alpha)$$

vlket ger $\alpha=\cos^{-1}(0,178)\approx 1,39\,\text{rad}=79,7^\circ$.

4.8 *Proceduren, som du bör kunna redogöra för tyst för dig själv,* är att ta en godtycklig punkt i planet och skapa en vektor till punkten given i uppgiften. Denna vektor projiceras sedan på planets normal. Vektorn som därmed uppkommer har en längd som är avståndet mellan planet och punkten. För att finna en punkt i planet anger vi godtyckliga $x=1$ och $y=0$ som ger att $1+2\cdot 0-z=3$, dvs. att $z=-2$. En godtycklig punkt i planet är $Q:(1,0,-2)$. En vektor från Q till P är $\overline{u}=\overline{QP}=(1,1,3)-(1,0,-2)=(0,1,5)$. Projicera u på planets normal $\overline{n}=(1,2,-1)$.

$$\overline{u}_{\overline{n}}=\frac{\overline{u}\bullet\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n}=\frac{(0,1,5)\bullet(1,2,-1)}{6}(1,2,-1)=-\frac{3}{6}(1,2,-1)$$

som har längden $l=\frac{3}{6}\sqrt{6}=3/\sqrt{6}$.

4.9
$$\overline{u}_{\overline{v}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v} = \frac{(0,1,-1) \bullet (1,1,2)}{6}(1,1,2) = -\frac{1}{6}(1,1,2)\,.$$

4.10 $\overline{u} \bullet \overline{v} = (2,1,0) \bullet (1,1,2) = 2+1+0 = 3$. Men också $|\overline{u}|\,|\overline{v}|\cos[\overline{u},\overline{v}] = \sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos(\alpha)$ så
$$3 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos(\alpha)$$
vlket ger $\alpha = \cos^{-1}(0,548) \approx 0,99\,\text{rad} = 56,8°$.

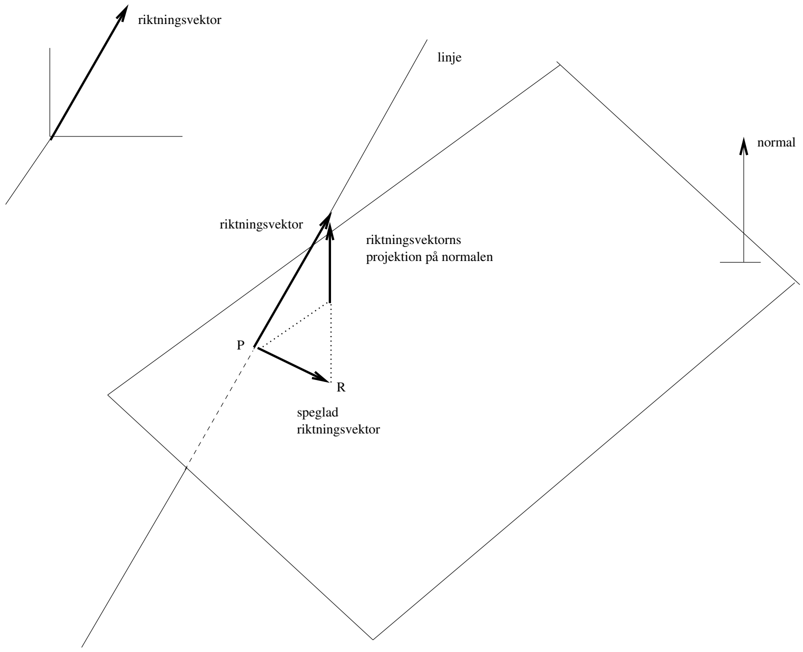
4.11 Projicera $\overline{v}$ på normalen $\overline{n}$ så erhålls den vinkelräta komposanten.
$$\overline{v}_{\overline{n}} = \frac{\overline{v} \bullet \overline{n}}{|n|^2}\overline{n} = \frac{(2,\,-1,\,3) \bullet (3,\,-2,\,-2)}{17}(3,\,-2,\,-2) = \frac{2}{17}(3,\,-2,\,-2)\,.$$
Därefter bestämmer vi $\overline{v}_{\|}$som är parallel med planet: $\overline{v}_{\overline{n}} + \overline{v}_{\|} = \overline{v}$.
$$\overline{v}_{\|} = \overline{v} - \overline{v}_{\overline{n}} = (2,\,-1,\,3) - \frac{2}{17}(3,\,-2,\,-2) = \frac{1}{17}(28,\,-13,\,55)\,.$$

4.12 *Proceduren, som du bör kunna redogöra för tyst för dig själv* är att konstruera en vektor mellan P och en punkt Q på linjen, kalla den $\overline{u} = \overline{QP}$. Denna projiceras på linjens riktningsvektor $\overline{r}$, kalla den $\overline{u}_{\|}$. Vi vet att $\overline{u}_{\|} + \overline{u}_{\perp} = \overline{u}$. Längden hos $\overline{u}_{\perp}$ är det sökta avståndet. Rita alltid figur. En punkt på linjen ges av $Q : (3,-2,2)$. Vektorn $\overline{u} = \overline{QP} = P - Q = (1,3,2) - (3,-2,2) = (-2,5,0)$. Linjens riktningsvektor är $\overline{r} = (-1,1,3)$
$$\overline{u}_{\|} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{r}}{|\overline{r}|^2}\overline{r} = \frac{(-2,5,0) \bullet (-1,1,3)}{11}(-1,1,3) = \frac{7}{11}(-1,1,3)\,.$$
Och
$$\overline{u}_{\perp} = \overline{u} - \overline{u}_{\|} = (-2,5,0) - \frac{7}{11}(-1,1,3) = \frac{1}{11}(-15,48,-21)\,.$$
Vars belopp är $\sqrt{2970}/11 = 3\sqrt{30}/\sqrt{11} \approx 4,95$.

4.13 Linjen har normalen $\overline{n} = (3,-1)$. $P : (1,-2)$. Linjen går inte genom origo så vi väljer en punkt på linjen och lägger en vektor mellan punkten på linjen och punkten P: $\overline{v} = (1,-2) - (0,2) = (1,-4)$. Projektionen på normalen ges av
$$\overline{v}_{\perp} = \frac{\overline{n} \bullet \overline{v}}{|n|^2}\overline{n} = \frac{(3,-1) \bullet (1,-4)}{10}(3,-1) = \frac{7}{10}(3,-1)\,.$$
Och spegelpunkten S ges av (rita bild)
$$(1,-2) - 2\overline{v}_{\perp} = (1,-2) - 2\frac{7}{10}(3,-1) = (1,-2) - \frac{7}{5}(3,-1) = (-3,2,\,-0,6)\,.$$
Redogör för proceduren!

4.14 Skillnaden mellan de två punkterna är $2\overline{v}_{\perp} = (1,1,2)-(2,3,1) = (-1,-2,1)$ så $\overline{v}_{\perp} = \frac{1}{2}(-1,-2,1)$. Det innebär att $(1,1,2)-\frac{1}{2}(-1,-2,1) = (1,5,\,2,\,1,5)$ är en punkt i planet och att $(-1,-2,1)$ är en normal till planet. Vi får att planet är $-1x - 2y + 1z + d = 0$ och att $-1\cdot 1,5 - 2\cdot 2 + 1\cdot 1,5 + d = 0$ så $d = 4$. Planet är $-x - 2y + z + 4 = 0$.
Vi kontrollerar. En punkt i planet är $(0,0,-4)$. En vektor från planet till $(1,1,2)$ är $\overline{v} = (1,1,2)-(0,0,-4) = (1,1,6)$. Dess projektion på normalen $\overline{n} = (-1,-2,1)$ är
$$\overline{v}_{\perp} = \frac{(1,1,6) \bullet (-1,-2,1)}{6}(-1,-2,1) = \frac{1}{2}(-1,-2,1)\,.$$
Spegelbilden S ges av
$$(1,1,2) - 2\overline{v}_{\perp} = (1,1,2) - (-1,-2,1) = (2,3,1)\,.$$

4.15 $x_{a1} = \overline{u} \bullet \overline{a}_1 = (1,\, 3) \bullet \frac{1}{10}\,(6,\, 8) = 3$. $x_{a2} = \overline{u} \bullet \overline{a}_2 = (1,\, 3) \bullet \frac{1}{10}\,(-8,\, 6) = 1$.
4.16 Se figur 4.7.3. Den sökta speglade riktningsvektorn ges enligt figur av



Figur 4.7.3. Spegling av linje.

sambandet $\overline{PR} + 2\overline{v}_\perp = \overline{v}$ där $\overline{PR}$ är den speglade riktningsvektorn, $\overline{v}_\perp$ är riktningsvektorns projektion på normalen, och $\overline{v}$ är riktningsvektorn för den givna linjen. Vi har $\overline{v} = (2,\, 1,\, -3)$, och får $\overline{v}_\perp$ ur projektionsformeln

$$\overline{v}_\perp = \frac{\overline{v} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \frac{(2,\, 1,\, -3) \bullet (2,\, 3,\, -1)}{14}\,(2,\, 3,\, -1) = \frac{5}{7}\,(2,\, 3,\, -1)\,.$$

Och

$$\overline{PR} = \overline{v} - 2\overline{v}_\perp = (2,\, 1,\, -3) - \frac{10}{7}\,(2,\, 3,\, -1) = \frac{1}{7}\,(-6,\, -23,\, -11)\,.$$

Den givna räta linjen skär planet i $(1,2;\, -0,9;\, 1,7)$ (Vilket erhålls genom att sätt in $x = 1 + 2t$ o.s.v. i uttrycket för planet, $2x + 3y - z + 2 = 0$, och lösa ut t som sedan ger x, y och z.) Den speglade linjen är

$$\begin{aligned} x &= \quad 1,2 - \tfrac{6}{7}t \\ y &= -\,0,9 - \tfrac{23}{7}t\,. \\ z &= \quad 1,7 - \tfrac{11}{7}t \end{aligned}$$

Det finns många sätt att ange riktningsvektorn: $(6,\, 23,\, 11)$ går också bra.

4.17 4.17 Avståndet är lika stort hela tiden om de inte skär varandra, då är avståndet 0. Linjens riktningsvektor är parallell med planet annars skär de varandra. Linjens riktningsvektor är ortogonal mot planets normal. Tag en godtycklig punkt på linjen, P_0, och genomför beräkningen för avstånd mellan punkt och plan. Ett alternativ är att först undersöka om de är parallella, annars är minsta avståndet 0, ty de skär varandra om de inte är parallella. Parallellitet kan undersökas på flera sätt. Ett sätt är att se om riktningsvektorerna i planet i linjärkombination kan skapa riktningsvektorn för linjen

$$a\,(1, -2, 1) + b\,(2, 1, -1) = (-1, -3, 2)$$

vilket har lösningen $a = 1$ och $b = -1$. Således ligger linjens riktningsvektor i planet. Förskjutningen från origo är inte väsentlig eftersom vektorerna inte är lokaliserade. Ett annat sätt är att skriva om planet på affin form och sedan sätta in riktningsvektorn för linjen i uttrycket för planet och observera om ekvationen är uppfylld. Åter spelar inte den konstanta vektorn i linjen någon roll. Vi går från parameterform till affin form; vi har

$$\begin{aligned} x &= s + 2t \\ y &= -2s + t \\ z &= s - t \end{aligned}$$

och eliminerar s i (1) och (2) genom att använda (3):

$$\begin{aligned} x - z &= 3t \\ y + 2z &= - t \\ z &= s - t \end{aligned}$$

så att $t = -y - 2z$ ur (2) som sätts in i (1): $x - z = 3\,(-y - 2z) = -3y - 6z$ eller förenklat $x + 3y + 5z = 0$. Vi sätter in linjens riktningsvektor i uttrycket för planet

$$x + 3y + 5z = (-t) + 3\,(-3t) + 5\,(2t) = -t - 9t + 10t = 0$$

och ser att den är uppfylld. Avståndet mellan en godtycklig punkt på linjen $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ (då $t = 0$) och planet $ax + by + cz + d = 0$ som i vårt fall är $x + 3y + 5z - 5 = 0$ (konstanten bestäms av $s = t = 0$ som tillhör planet) ges av

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 5}{\sqrt{1 + 9 + 25}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

KAPITEL 5

Vektorprodukt

I skalärprodukten skapades ett tal (en skalär) utifrån två vektorer, i vektorprodukten skapas en vektor utifrån två vektorer. I projektionsformeln skapas en vektor parallell med en given vektor, vid vektorprodukt skapas en vektor vinkelrät mot ett givet plan. Vektorprodukt existerar endast i 3-dimensioner.

När vi har skalärprodukt och vektorprodukt kombinerar vi dem till skalär trippelprodukt (en skalär) och vektoriell trippelprodukt (en vektor).

5.1. Orientering

Höger- och vänsterorienterade system definieras. I regel används högerorienterade system.

Vi börjar med att ange konventionen för om tre vektorer är positivt eller negativt orienterade i 3 dimensioner. Ordningen som vektorerna anges i är avgörande.

DEFINITION 5.1. De tre vektorerna $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ ligger inte i ett plan, se figur 5.1.1. Vi placerar oss på spetsen av $\overline{v}_3$ och tittar nedåt på de två andra vektorerna i sitt plan. Vi vrider $\overline{v}_1$ till $\overline{v}_2$ den minsta vridning som är möjlig. *Om* denna vridning sker *moturs* så är de tre vektorerna positivt orienterade, annars negativt. Fler möjligheter finns ej.

Alternativ. Om $\overline{v}_2$ läggs efter (nästa vektors fot läggs vid föregående vektors huvud) $\overline{v}_1$ och högerhandens handflata följer $\overline{v}_1$ och fingrarna följer $\overline{v}_2$ så pekar den utfällda tummen i den riktning som $\overline{v}_3$ *ska ha* för att de tre vektorerna ska vara positivt orienterade. Se figur 5.1.2 och 5.1.3.

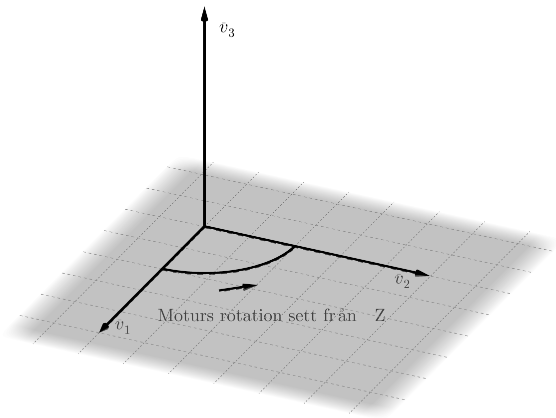
I figur 5.1.4 ser vi till vänster ett positivt system med avseende på vektorerna längs med xyz-axlarna (i den ordningen), i den högra delen ser vi ett negativt ordnat system.

Vi har tre objekt och ska ange huruvida de är positivt orienterade eller inte. Beteckna objekten 1, 2 respektive 3 (i vårt fall är det tre vektorer). Följande lemma anger regeln för ordningen om objekten ordnas om.

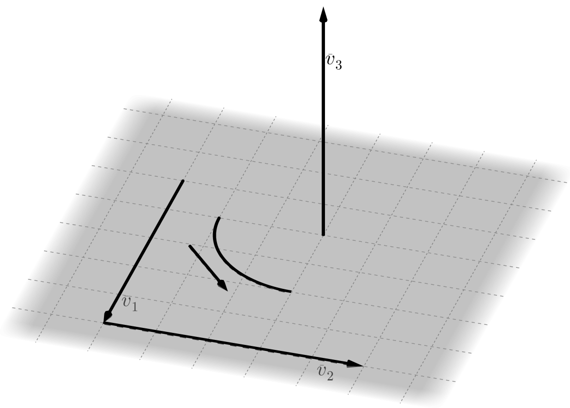
LEMMA 5.1. *Följande gäller för ordningen (213 betyder att vektorerna är i ordningen $\overline{v}_2$,$\overline{v}_1$,$\overline{v}_3$)*

Om 123 är en positivt orienterad ordning så är 231, 312 också positivt orienterade. Lägg märke till att cykeln är den samma.

Om 123 är en positiv ordning så är 213 en negativ ordning, så även 132, 321.



FIGUR 5.1.1. Definition av positivt orienterat koordinatsystem. Alternativ 1.



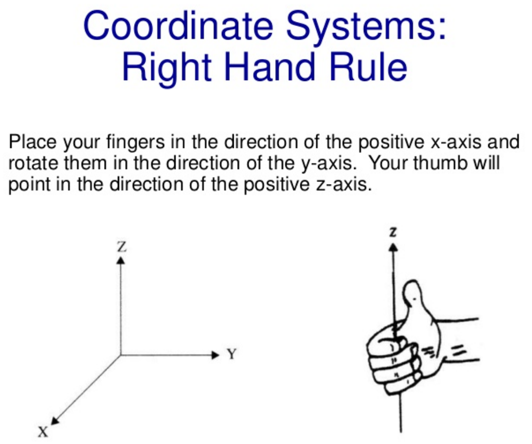
FIGUR 5.1.2. Definition av positivt orienterat koordinatsystem. Alternativ 2.

Figur 5.1.5 kan vara en tankehjälp. Du kan börja på vilket tal som helst och gå i pilarnas riktning för att få en positiv orientering.

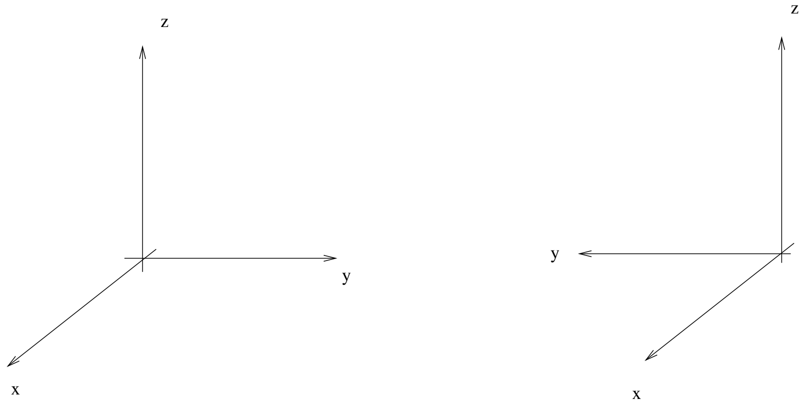
5.2. Definition

Vi definierar vektorprodukt.

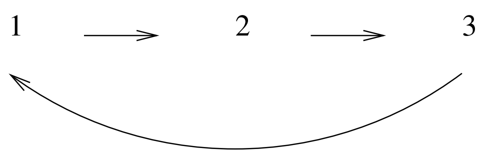
DEFINITION 5.2. Se figur 5.2.1. Låt $\overline{u} \neq \overline{0}$ och $\overline{v} \neq \overline{0}$ vara två vektorer i rummet. Med vektorprodukten $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{k}$ menas den (pseudo)vektor (uppfyller inte alla fysikens krav på en vektor) som har egenskaperna:



FIGUR 5.1.3. Definition av positivt orienterat koordinatsystem. Ungefär som alternativ 2.



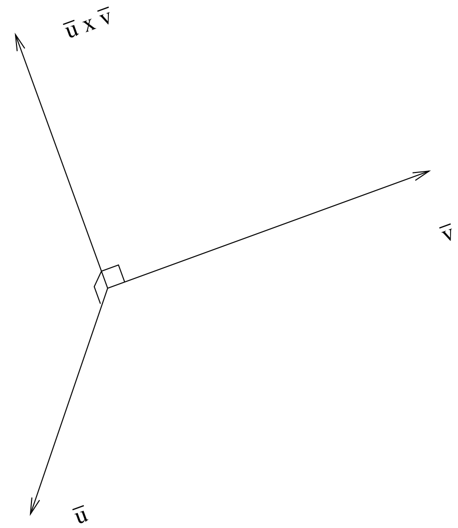
FIGUR 5.1.4. Vektorerna $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ positivt respektive negativt orienterade.



FIGUR 5.1.5. Minnesregel för positiv orientering om objekten permuteras.

(1) $|\overline{k}| = |\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}|\,|\overline{v}| \sin[\overline{u}, \overline{v}]$ (anger storleken);
(2) $\overline{k} = \overline{u} \times \overline{v}$ är ortogonal mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$. (anger riktningen, men ej helt entydigt);
(3) de tre vektorerna $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u} \times \overline{v}$ är *positivt* orienterade, i den ordningen!; tillsammans med 2 är riktningen nu entydig.

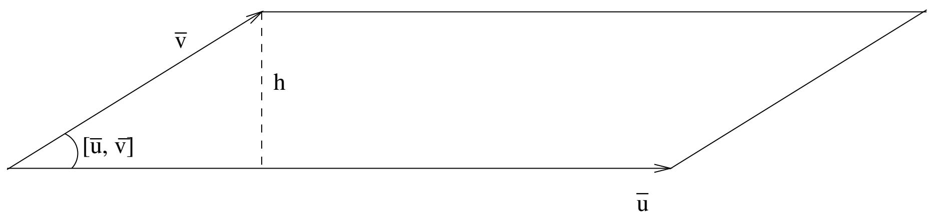
Varför vektorn kallas pseudovektor behandlas i del 2.



FIGUR 5.2.1. $\overline{u} \times \overline{v}$ är vinkelrät mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$.

En konsekvens av definitionen är att $\overline{u}\times\overline{v} = -\overline{v}\times\overline{u}$. Vektorprodukt är *inte* kommutativt. Algebran ska tolkas som att om ordningen ändras kommer vektorprodukten att peka i motsatt riktning.

En viktig praktisk konsekvens av definitionen är också att absolutbeloppet av vektorprodukten, $|\overline{u} \times \overline{v}|$, kan tolkas som arean av den parallellogram som formas av $\overline{u}$ och $\overline{v}$, se figur 5.2.2. Ena sidans längd är $|\overline{u}|$ (basen) och höjden har längden $|\overline{v}| \sin[\overline{u}, \overline{v}]$, så parallellogrammens area är $|\overline{u}| \left(|\overline{v}| \sin[\overline{u}, \overline{v}]\right)$. Motsvarande triangel har halva arean.



FIGUR 5.2.2. Vektorprodukt som area av en parallellogram.

5.1 ÖVNING 5.1. Beräkna $|\overline{u} \times \overline{v}|$ om $\overline{u} = (1, 2, 0)$ och $\overline{v} = (3, -1, 0)$ med hjälp av definitionen av vektorprodukt och skalärprodukt.

5.2 ÖVNING 5.2. Bestäm alla vektorer vinkelräta mot vektorerna $\overline{u} = (1, 2, 0)$ och $\overline{v} = (3, -1, 0)$.

5.3 ÖVNING 5.3. Visa att $|\overline{u} \times \overline{v}|^2 + |\overline{u} \bullet \overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2\,|\overline{v}|^2$.

Övning 5.4. Utgå från definitionen av vektorprodukt. Bestäm vektorprodukten, $\overline{u} \times \overline{v}$, till $\overline{u} = (1, 2, -1)$ och $\overline{v} = (2, 3, 5)$ genom att utföra följande: 5.4

(1) Skriv den sökta vektorprodukten som $\overline{k} = (x, y, z)$.
(2) Använd att $\overline{u} \bullet \overline{k} = 0$ och $\overline{v} \bullet \overline{k} = 0$ för att bestämma så mycket som går om $\overline{k}$. Lös ekvationssystemet genom att införa en parameter $z = t$.
(3) Använd $|\overline{u} \times \overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2\,|\overline{v}|^2 - |\overline{u} \bullet \overline{v}|^2$för att bestämma längden på $\overline{k}$.
(4) Använd också kravet om positiv orientering för att slutligen bestämma $\overline{k}$.

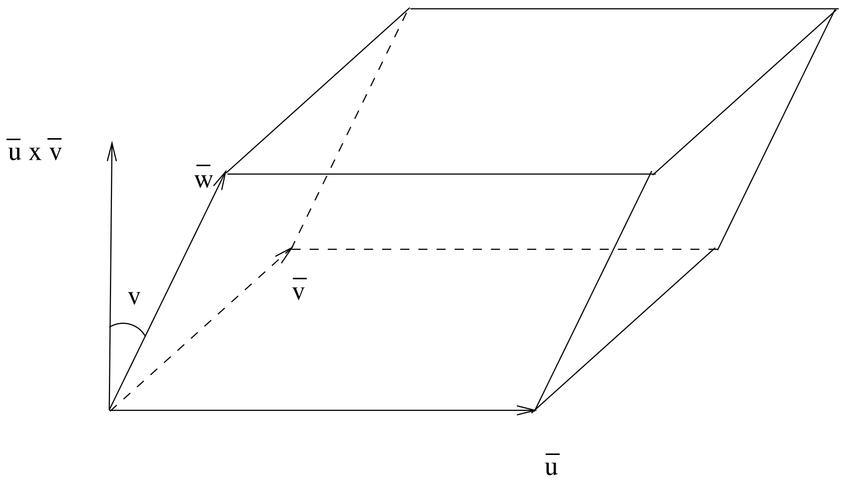
5.3. Skalär trippelprodukt

Vektorprodukt kombineras med skalärprodukt.

Vi definierar den skalära trippelprodukten.

Definition 5.3. Med den skalära trippelprodukten av $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ menas $(\overline{u} \times \overline{v})\bullet\overline{w}$ (i den ordningen).

Den skalära trippelprodukten är ett tal och beloppet av produkten kan tolkas som volymen av den parallellepiped som formas av de tre vektorerna, se figur 5.3.1. Vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ anger kanterna i en parallellogram. Arean av parallellogrammen ges av talet $|\overline{u} \times \overline{v}|$ och vektorprodukten är en normal till planet som parallellogrammen ligger i. Projektionen av $\overline{w}$ på enhets-normalen till planet ger höjden av parallellepipeden så $\overline{w}$:s projektion (skalärprodukt) på $\overline{u} \times \overline{v}$ ger volymen, med tecken.



Figur 5.3.1. Skalär trippelprodukt tolkad som volym av parallellepiped. Volymen är $|(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w}|$.

Anmärkning 5.1. Skalära trippelprodukten har positivt värde om vektorerna är positivt orienterade, annars negativ.

Teorem 5.1. *För den skalära trippelprodukten gäller följande räkneregler*

(1) $(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} = \overline{w} \bullet (\overline{u} \times \overline{v})$ skalärprodukten är kommutativ.
(2) $(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} = (\overline{v} \times \overline{w}) \bullet \overline{u} = (\overline{w} \times \overline{u}) \bullet \overline{v}$ ordningen 123 bibehålls cykliskt.
(3) $(\overline{v} \times \overline{u}) \bullet \overline{w} = (\overline{u} \times \overline{w}) \bullet \overline{v} = (\overline{w} \times \overline{v}) \bullet \overline{u}$ ordningen 213 bibehålls cykliskt; alla i punkt 3 har motsatt tecken till de i 2.

Den första följer ur att skalärprodukt är kommutativ. Den andra och tredje följer ur geometrin, dvs. det är samma parallellepiped. Bibehålles ordningen mellan vektorerna ändras ej volymens tecken.

TEOREM 5.2. *Följande lagar gäller för vektorprodukt:*

(1) $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{u} \parallel \overline{v}$
(2) $\overline{v} \times \overline{u} = -\overline{u} \times \overline{v}$
(3) $(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) \times \overline{v} = \overline{u}_1 \times \overline{v} + \overline{u}_2 \times \overline{v}$ (distributiv över addition)
(4) $(\lambda \overline{u}) \times \overline{v} = \lambda (\overline{u} \times \overline{v})$

Vi ser på bevisen men först behövs en hjälpsats (lemma)

LEMMA 5.2. $\overline{u} \bullet \overline{r} = \overline{v} \bullet \overline{r}$ *för alla* $\overline{r} \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{v}$. *(kancellering)*

Observera att vänster led innebär att $\overline{u} \bullet \overline{r} = \overline{v} \bullet \overline{r}$ *är sant för* <u>*alla*</u> $\overline{r}$*, inte bara att* <u>*det finns*</u> $\overline{r}$ *för vilket detta är sant.*

BEVIS. $\Leftarrow$ är självklar.

För $\Rightarrow$antag att $\overline{u} \bullet \overline{r} = \overline{v} \bullet \overline{r}$ gäller för <u>alla</u> $\overline{r}$ och visa att det medför att $\overline{u} = \overline{v}$.

$$\overline{u} \bullet \overline{r} = \overline{v} \bullet \overline{r} \Leftrightarrow (\overline{u} - \overline{v}) \bullet \overline{r} = 0$$

Detta ska vara sant för alla $\overline{r}$. Vi kan då välja specifikt (eftersom det är sant för alla val av $\overline{r}$ så är det sant helt säkert för detta val av $\overline{r}$) att $\overline{r} = \overline{u} - \overline{v}$ så vi erhåller

$$(\overline{u} - \overline{v}) \bullet (\overline{u} - \overline{v}) = 0$$

vilket är, per definition

$$|\overline{u} - \overline{v}|^2 = 0$$

vilket bara är möjligt om $\overline{u} = \overline{v}$. □

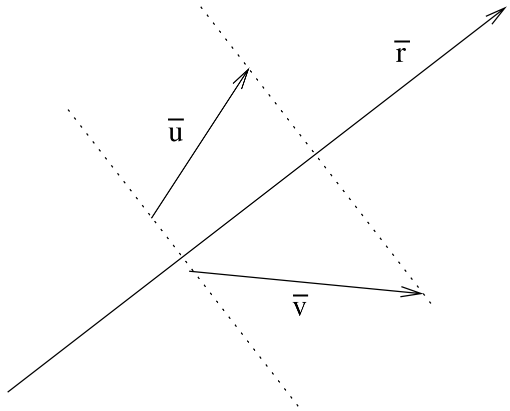
ANMÄRKNING 5.2. Intuitivt kan satsen verka sann eftersom motsvarande gäller för tal fast i lemmat krävs mer. Man kan se det som att om projektionerna av $\overline{u}$ och $\overline{v}$ på $\overline{r}$ är lika, för alla val av $\overline{r}$, så är vektorerna som projicerats lika. Eller kortare: två vektorer $\overline{u}$ och $\overline{v}$ som alltid har samma projektion på alla vektorer $\overline{r}$ är lika. Fundera över detta geometriskt. Observera att för ett givet $\overline{r}$ och *ett* givet $\overline{u}$ kan man alltid finna ett $\overline{v} \neq \overline{u}$ så att $\overline{u} \bullet \overline{r} = \overline{v} \bullet \overline{r}$, se figur 5.3.2.

Så följer bevisen

BEVIS. Formlerna 1 och 2 följer ur definitionen. Vi bevisar 3, att vektorprodukt är distributiv. Vi låter med utgångspunkt från lemmat $\overline{r}$ vara en godtycklig vektor

$$[(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) \times \overline{v}] \bullet \overline{r} = [\text{bibehåll ordningen mellan de tre vektorerna}]$$

$$\overline{v} \times \overline{r} \bullet (\overline{u}_1 + \overline{u}_2) = [\text{skalärprodukt är däremot distributiv!}]$$



FIGUR 5.3.2. Lika projektion men olika vektorer. Om $\overline{u} \bullet \overline{r} = \overline{v} \bullet \overline{r}$ för alla val av $\overline{r}$ så måste $\overline{u} = \overline{v}$. Bilden visar ett fall där $\overline{u}$ och $\overline{v}$ har samma projektion på *en* vektor $\overline{r}$.

$$(\overline{v} \times \overline{r}) \bullet \overline{u}_1 + (\overline{v} \times \overline{r}) \bullet \overline{u}_2 = [\text{bibehåll ordningen}]$$
$$(\overline{u}_1 \times \overline{v}) \bullet \overline{r} + (\overline{u}_2 \times \overline{v}) \bullet \overline{r} = [\text{skalärprodukt är distributiv}]$$
$$[\overline{u}_1 \times \overline{v} + \overline{u}_2 \times \overline{v}] \bullet \overline{r}.$$

Och därefter följer det lilla tricket från lemmat att de två parenteserna måste vara lika, dvs.

$$(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) \times \overline{v} = \overline{u}_1 \times \overline{v} + \overline{u}_2 \times \overline{v}.$$

$\square$

ANMÄRKNING 5.3. $\overline{u} \times \overline{u} = \overline{0}$ ej $\overline{u} \times \overline{u} = 0$. Resultatet är en vektor.

LEMMA 5.3. *Beräknar vektorprodukten representerat med koordinater. Egentligen är detta en räkning rakt fram. Vi skriver $\overline{u}$ och $\overline{v}$ som $\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$ och $\overline{v} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3$. Vi förutsätter inget speciellt om ortogonalitet och normering än. Med hjälp av distributiva lagen*

$$\overline{u} \times \overline{v} = (x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3) \times (y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + y_3\overline{e}_3) = [\textit{9 termer!}]$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)\,\overline{e}_2 \times \overline{e}_3 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\overline{e}_3 \times \overline{e}_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{e}_1 \times \overline{e}_2.$$

Vi har använt att om två vektorer är parallella så är vektorprodukten 0, och att $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$.

I ett ortogonalt och normerat och positivt orienterat system gäller att $\overline{e}_1 \times \overline{e}_2 = \overline{e}_3$ dvs. de tre vektorerna är positivt orienterade. Ur detta följer att $\overline{e}_2 \times \overline{e}_3 = \overline{e}_1$ och $\overline{e}_3 \times \overline{e}_1 = \overline{e}_2$. I ett sådant system kan vektorprodukten skrivas

$$\overline{u} \times \overline{v} = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\overline{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\overline{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{e}_3. \tag{5.3.1}$$

Skalära trippelprodukten $(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w}$ i ett ON-system erhålls genom att beräkna termer av typen $\overline{e}_1 \bullet \overline{w}$ (där $\overline{e}_1$ är från ekvation 5.3.1), men i ett sådant system är detta komponenterna hos $\overline{w}$ så $\overline{e}_1 \bullet \overline{w} = \overline{e}_1 \bullet (z_1, z_2, z_3) = z_1$ o.s.v. Vi erhåller

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} = (x_2y_3 - x_3y_2)\,z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,z_3.$$

En regel som kan hjälpa dig hålla reda på termerna i vektorprodukten och skalära trippelprodukten. Använd ordningen 1,2,3. Element nr 1 har x_2y_3 (123 således). Element 2 har x_3y_1 (231, samma ordning) . Element 3 har x_1y_2 (312). Om 123 är orienterat på ett visst sätt så är 231 och 312 samma orientering; detta ger hur indexen ska vara.

Exempel 5.1. Vektorprodukten leder till nya framställningar. Arean av en parallellogram i planet med hörn i $(x_1, x_2, 0)$ och $(y_1, y_2, 0)$, samt ett i origo och ON-system, kan beräknas ur

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{e}_3 = ((x_1, x_2, 0) \times (y_1, y_2, 0)) \bullet \overline{e}_3 =$$
$$(x_1y_2 - x_2y_1)\, \overline{e}_3 \bullet \overline{e}_3 = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Vi har använt $\overline{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)$. Detta är parallellogrammens area som måste divideras med 2 för att ge triangelns. Denna formel har stor tillämpning inom praktisk area bestämning med hjälp av kartor och positionerings-system (Galileo av Europa, GPS av USA, Glonass av Ryssland, Compas av Kina). Om du använder tjänster på internet för att klicka fram en area så är det troligt att den beräknas med denna metod i generaliserad form.

5.5 Övning 5.5. Beräkna arean av triangeln med hörn i $(1,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 3,\ -1)$ och $(-3,\ 1,\ 2)$ i ett ON-system.

Exempel 5.2. Beräkna kortaste avståndet mellan linjerna

$$L_1 \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{array}$$

och

$$L_2 \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t\,. \\ z = 2 + 3t \end{array}$$

Se figur 5.3.3. Vi lägger den första linjen i ett plan som är parallell med den andra linjen, på så sätt får vi ett konstant avstånd mellan ett plan och en linje. De två riktningsvektorerna, för linjerna, kan då tänkas spänna upp ett plan och normalriktningen till detta plan ges av vektorprodukten till de två riktningsvektorerna: $\overline{n} = (2,\ 2,\ 1) \times (1,\ -2,\ 3)$ som ger oss $\overline{n} = (8,\ -5,\ -6)$. Planet är $\pi\ :\ 8x - 5y - 6z + d = 0$ där d bestäms ur att tex. $(1,\ 1,\ -1)$ ska tillhöra planet: $8 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + d = 0$ ger $d = -9$.

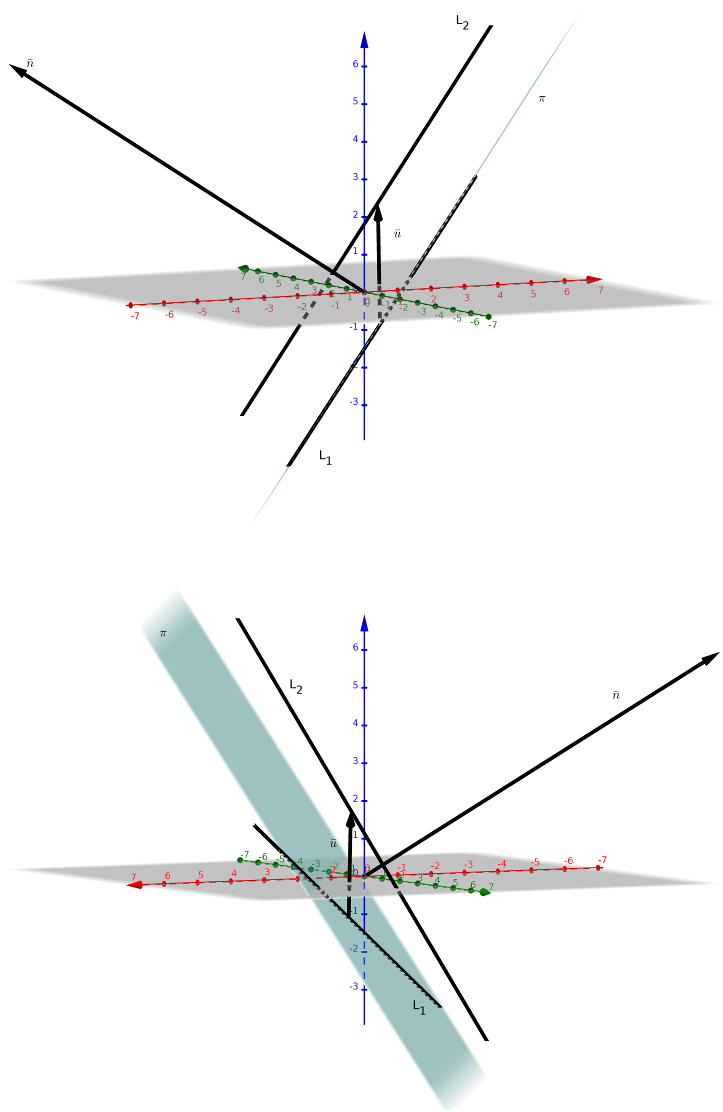
Om vi nu tar en vektor från första linjen till andra linjen och projicerar den på normalen till planet så ger det oss kortaste avståndet. Första linjen är då inbäddat i ett plan och andra linjen ger oss en godtycklig punkt; att jämföra med tidigare procedurer. En vektor från första till andra planet ($t = 0$): $\overline{u} = (2,\ 3,\ 2) - (1,\ 1,\ -1) = (1,\ 2,\ 3)$. Och enligt projektionsformeln 4.1

$$\overline{u}_{\overline{v}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|} \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2} \overline{v}$$

så har vi med $\overline{v}$ som normalen $\overline{n}$

$$\begin{aligned} \overline{u}_{\overline{n}} &= \frac{(1,\ 2,\ 3) \bullet (8,\ -5,\ -6)}{125} (8,\ -5,\ -6) \\ &= \frac{-20}{125} (8,\ -5,\ -6) \end{aligned}$$

vars längd är $\frac{20}{125}\sqrt{64+25+36} = \frac{20}{\sqrt{125}} \approx 1,79$.



FIGUR 5.3.3. Exempel 5.2. Kortaste avståndet mellan 2 linjer. Sett ur två olika perspektiv.

5.4. Vektoriell trippelprodukt

Vektoriell trippelprodukt av $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{w}$, i den ordningen, definieras som

$$\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w})$$

med parentes ty produkten är inte associativ. $\overline{v} \times \overline{w}$ är en vektor vinkelrät mot både $\overline{v}$ och $\overline{w}$. Om den vektorn 'kryssas' med en annan vektor $\overline{u}$, inte i planet som $\overline{v}$ och $\overline{w}$ spänner upp, så skapas en vektor i planet som $\overline{v}$ och $\overline{w}$ spänner upp. Således borde trippelprodukten kunna skrivas som en linjärkombination av $\overline{v}$ och $\overline{w}$. Se figur 5.4.1.

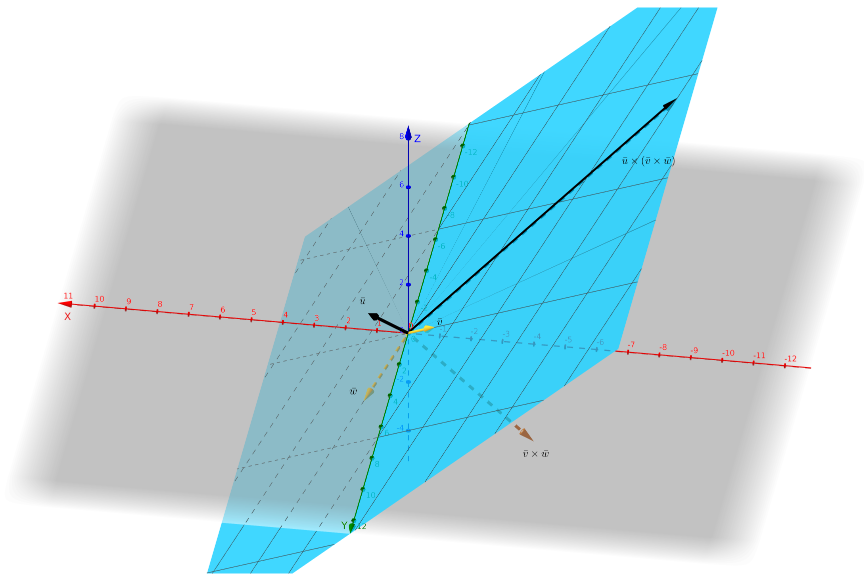
TEOREM 5.3. *Det gäller att*

$$\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = (\overline{u} \bullet \overline{w})\, \overline{v} - (\overline{u} \bullet \overline{v})\, \overline{w}. \tag{5.4.1}$$

BEVIS. Relationen visas enklast genom att införa tre vektorer enligt följande. Sätt $\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$ som en allmän vektor. Vektorn $\overline{v}$ kan läggas i samma plan genom att sätta den som $\overline{v} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2$. Och om $\overline{u}$ och $\overline{v}$ ligger i samma plan, där $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ ligger, så är $\overline{w}$ vinkelrät mot planet och kan sättas som $\overline{w} = z_3\overline{e}_3$. Vi väljer våra koordinataxlar efter hur vektorerna ligger och det medför inga begränsningar i allmängiltigheten för beviset. Sätt in de 3 vektorerna i vänster respektive höger sida och konstatera att det ger samma resultat. □

Följande relation gäller också

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = -\overline{w} \times (\overline{u} \times \overline{v}) = -\{(\overline{w} \bullet \overline{v})\, \overline{u} - (\overline{w} \bullet \overline{u})\, \overline{v}\} = (\overline{w} \bullet \overline{u})\, \overline{v} - (\overline{w} \bullet \overline{v})\, \overline{u}.$$



FIGUR 5.4.1. Trippelprodukten $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w})$ ligger i planet som spänns upp av $\overline{v}$ och $\overline{w}$.

5.6 ÖVNING 5.6. Kontrollera genom insättning i höger och vänster led att formel 5.4.1 stämmer för t.ex. $(1,\ 2,\ 3)$, $(-1,\ 0,\ 2)$ och $(1,\ 1,\ -2)$. Använd formel 5.3.1.

5.5. Rum

Vi började med rummen $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ som består av punkter. Varje punkt har koordinater, dvs. vi anger talpar eller tal-tripplar för punkterna. Detta är ofta en bra modell av det fysiska rummet. Riktade sträckor infördes som ordnade par av punkter. Alla riktade sträckor är i någon mening lika och vi skapar en så kallad ekvivalensklass, en mängd.

Vektorer fungerar utmärkt för att representera fysikens förflyttningar i det fysiska rummet. Rummet $\mathbb{R}^3$ består av alla möjliga punkter. Vi kan också skapa ett rum bestående av alla möjliga vektorer; det är inte exakt samma sak som ett rum bestående av alla möjliga punkter. Vi adderar inte punkterna i $\mathbb{R}^3$ men vi adderar vektorer. Vi kan inte beräkna skalärprodukt med punkter men med vektorer. Vi kan inte beräkna vektor-produkt med punkter men med vektorer. Vi anger dem ibland på samma sätt vilket kan vara förvirrande. En punkt kan anges med koordinaterna $(2,3)$ och vi anger även vektorer på det sättet. Eftersom vektorer kan parallellförflyttas så förflyttar vi dem alla så att foten är i origo och använder spetsens koordinater för att ange vektorn. Man hade kunnat ha olika beteckningar, t.ex. $(2,3)$ för en punkt och $< 2,3 >$ för en vektor. För en vektor mellan punkterna $(2,3)$ och $(4,7)$ kunde vi skrivit $< 2,4 >= (4,7) - (2,3)$. Beteckningen $(1,3)$ kan vara en punkt men också en vektor från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,3)$. Till en del använder vi olika beteckningar eftersom A är en punkt, $\overline{AB}$ en riktad sträcka och $\overline{a}$ en vektor. Du måste själv hålla isär de olika begreppen med det stöd som finns i beteckningarna; det är en avvägning mellan precision och bekvämlighet.

5.6. Facit Övningar

5.1 $|\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}|\,|\overline{v}| \sin[\overline{u}, \overline{v}] = \sqrt{5}\sqrt{10} \sin[\overline{u}, \overline{v}]$. Saknar vinkeln men den kan fås från skalärprodukten. $|\overline{u} \bullet \overline{v}| = |\overline{u}|\,|\overline{v}| \cos[\overline{u}, \overline{v}]$ så att

$$\frac{|\overline{u} \bullet \overline{v}|}{|\overline{u}|\,|\overline{v}|} = \frac{3-2+0}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \cos[\overline{u}, \overline{v}] \,.$$

Vinkeln är $81,9°$. Vinkeln sätts in i uttrycket för vektorprodukten enligt tidigare

$$\sqrt{5}\sqrt{10} \sin[\overline{u}, \overline{v}] = \sqrt{5}\sqrt{10} \sin 81,9° = 7$$

5.2 Enligt föregående övning är vektorprodukten $(0,\ 0,\ -7)$, eftersom $\overline{u}$ och $\overline{v}$ ligger i xy-planet, så alla vektorer vinkelräta mot de två givna vektorerna är parallella med denna och ges därför av $k\,(0,\ 0,\ -7)$ där $k \in \mathbb{R}$.

5.3

$$\begin{aligned}
|\overline{u} \times \overline{v}|^2 + |\overline{u} \bullet \overline{v}|^2 &= |\overline{uv} \sin(\alpha)|^2 + |\overline{uv} \cos(\alpha)|^2 \\
&= |\overline{uv}|^2 \left(|\sin(\alpha)|^2 + |\cos(\alpha)|^2\right) \\
&= |\overline{uv}|^2 \cdot 1.
\end{aligned}$$

5.4

$(1, 2, -1) \bullet (x, y, z) = x + 2y - z = 0$. $(2, 3, 5) \bullet (x, y, z) = 2x + 3y + 5z = 0$. Två ekvationer och tre obekanta. Inför en parameter $z = t$.

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ 2x + 3y + 5t = 0 \end{cases}$$

med $-2\,(1) + (2)$ får vi

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ - y + 7t = 0 \end{cases}$$

så $y = 7t$. $x + 2y - t = x + 14t - t = x + 13t = 0$. Lösningarna är $x = -13t$, $y = 7t$ och $z = t$ och är geometriskt en linje. Alla lösningarna är vinkelräta mot de givna vektorerna $(1, 2, -1)$ och $(2, 3, 5)$.

I nästa steg måste längden bestämmas. Efter det bör det finnas två alternativ kvar och definitionen av positivt orienterad ger den sista pusselbiten så lösningen, dvs. vektorprodukten är då entydigt bestämd.

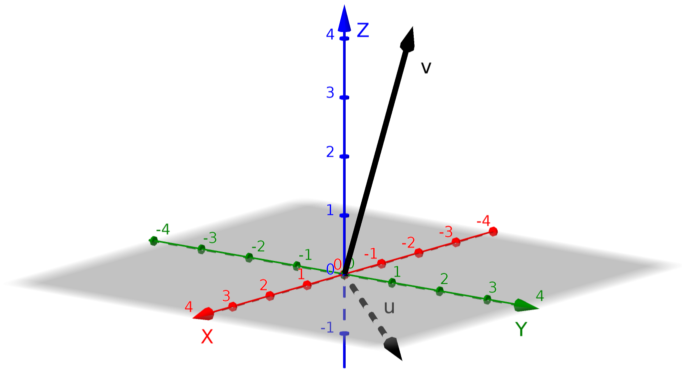
Längden beräknas ur $|\overline{u} \times \overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2\,|\overline{v}|^2 - |\overline{u} \bullet \overline{v}|^2$. $|\overline{u}|^2 = 6$, $|\overline{v}|^2 = 38$ och $|\overline{u} \bullet \overline{v}|^2 = 9$ så $|\overline{u} \times \overline{v}|^2 = 6 \cdot 38 - 9 = 219$. För längden erhåller vi

$$\begin{aligned}
(13t)^2 + (7t)^2 + (t)^2 &= 219 \\
219t^2 &= 219
\end{aligned}$$

så $t^2 = 1$, $t = \pm 1$. Utifrån en enkel skiss av systemet, figur 5.6.1, ser vi att $t = -1$ är det rätta värdet för att uppfylla att $\overline{u}$, $\overline{v}$ och $\overline{u} \times \overline{v}$ är positivt orienterade. $\overline{u} \times \overline{v} = (13,\ -7,\ -1)$. Från figuren syns t.ex. att x måste vara positivt, vilket ger att $t = -1$ är det korrekta alternativet.

5.5 Skapa två vektorer: $\overline{u} = (1,\ 2,\ 4) - (2,\ 3,\ -1) = (-1,\ -1,\ 5)$ och $\overline{v} = (-3,\ 1,\ 2) - (1,\ 2,\ 4) = (-4,\ -1,\ -2)$. Beräkna vektorprodukten $(7,\ -22,\ -3)$. Halva beloppet $\frac{1}{2}\sqrt{7^2 + (-22)^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{542} \approx 11,6$.

5.6 $(-2,\ -5,\ 4)$ är trippelprodukten.



FIGUR 5.6.1. Bild till 5.4.

5.7. Kapitelproblem

5.1 Beräkna avståndet mellan de två linjerna $l_1 = (1+t, 2-t, -1+3t)$ och $l_2 = (2t, 3+2t, 3-t)$. *Övar din visualisering.*

5.2 Fyll i tabell 1 angående avstånd. Fundera på följande för varje tom ruta: Vad är idén bakom lösningen till att beräkna avståndet i den givna situationen?; beskriv proceduren; rita en bild som illustrerar situationen. En del av rutorna redogjordes för i sammanfattningen 4.4. *Det är viktigt att organisera sin kunskap, du minns den bättre då.*

TABELL 1. Avstånd.

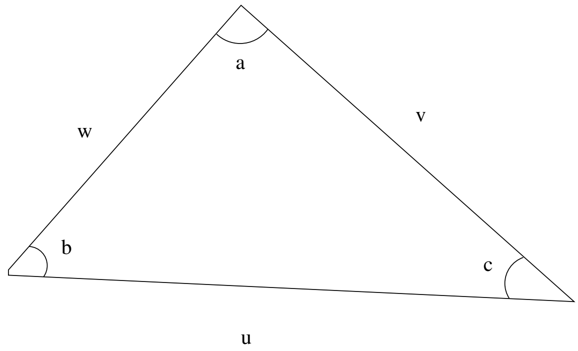
Avståndet mellan	punkt	linje	plan
punkt			
linje	X		
plan	X	X	

5.3 *Koppling mellan geometri och algebra.*
(a) Visa påståendet att om $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w} = \overline{0}$ så är $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{v} \times \overline{w} = \overline{w} \times \overline{u}$.
(b) Visa med hjälp av (a) sinusteoremet, se figur 5.7.1,

$$\frac{u}{\sin a} = \frac{v}{\sin b} = \frac{w}{\sin c}.$$

5.4 *Visualisering.* Bestäm en positivt orienterad bas ortonormerad bas $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ som också uppfyller villkoren:

- $\overline{e}_1$ är parallell med linjen $(x, y, z) = (1+2t, 3t, -2-2t)$
- $\overline{e}_2$ är parallell med planet $\pi : 4x + 3y - 2z = 0$.



FIGUR 5.7.1. Sinusteoremet.

5.8. Facit Kapitelproblem

5.1 Ett sätt är att lägga ett plan som linjen l_1 går igenom och l_2 är parallell med. Sedan beräknar man avståndet mellan planet och linjen l_2. Man kan också se det som att man konstruerar två plan, ett som innehåller l_1 och ett som innehåller l_2, som är parallella med varandra. Ett annat sätt att tänka är att se det som att de två riktningsvektorerna konstruerar ett plan som innehåller l_1 och som sedan parallellförskjuts till l_2. Ur $l_1 = (1+t,\, 2-t,\, -1+3t)$ och $l_2 = (2t,\, 3+2t,\, 3-t)$ konstrueras planet

$$\begin{aligned} x &= 1 + t + 2s \\ y &= 2 - t + 2s \\ z &= -1 + 3t - s \end{aligned}$$

som innehåller l_1. En punkt i l_2 är $(0,3,3)$. En vektor konstruerad ur en punkt i vardera plan är $\overline{P_1P_2} = (0,3,3) - (1,2,-1) = (-1,1,4)$. Denna ska projiceras på en normal till planen ges av vektorprodukten till riktningsvektorerna. En normal ges av

$$\overline{n} = \overline{u} \times \overline{v} = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\overline{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\overline{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{e}_3$$

där $\overline{u} = (x_1, x_2, x_3) = (1,-1,3)$ och $\overline{v} = (y_1, y_2, y_3) = (2,2,-1)$.

$$\begin{aligned} \overline{n} &= (-1\cdot(-1) - 3\cdot 2,\ 3\cdot 2 - 1\cdot(-1), 1\cdot 2 - (-1)\cdot 2) = \\ &(-5,7,4)\,. \end{aligned}$$

Vi har nu en normal $(-5,7,4)$ en en vektor s.a.s. från plan till plan $(-1,1,4)$. Projektionsformeln ger

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2}_{\overline{n}} &= \frac{\overline{P_1P_2} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \frac{(-1,1,4) \bullet (-5,7,4)}{25+49+16}(-5,7,4) \\ &\frac{14}{45}(-5,7,4)\,. \end{aligned}$$

som har längden

$$\left|\overline{P_1P_2}_{\overline{n}}\right| = \frac{14}{45}\sqrt{25+49+16} = \frac{14}{45}\cdot\sqrt{90} = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{45}}\ (\approx 2{,}95)\,.$$

5.2 Ingen kommentar.

5.3

(a) $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{u} \times \left(\overline{0} - \overline{u} - \overline{w}\right) = \overline{u} \times \overline{0} - \overline{u} \times \overline{u} - \overline{u} \times \overline{w} = -\overline{u} \times \overline{w} = \overline{w} \times \overline{u}$.

(b) $|\overline{u} \times \overline{v}| = uv\sin c = |\overline{v} \times \overline{w}| = vw\sin a$ kan skrivas som

$$\frac{u}{\sin a} = \frac{w}{\sin c}.$$

5.4 Normeringen väntar vi med till sist. Krav 1 innebär att vår basvektor ska ha samma riktning som riktningsvektorn för linjen, den kan direkt avläsas som $\overline{v}_1 = (2,\ 3,\ -2)$. Sedan behöver vi en vektor vinkelrät till denna (ortogonal) och som ligger i planet (krav 2). Att den ligger i planet innebär att den kan skrivas som en linjärkombination av två vektorer som spänner upp planet. Skriver vi planet på parameterform ser vi det. $4x + 3y - 2z = 0$ med $z = t$ och $y = s$ innebär

$$\begin{aligned} x &= -\,0,75s + 0,5t \\ y &= s \\ z &= t \end{aligned}$$

så två vektorer i planet är $\overline{v}_2 = (-0,75;\ 1;\ 0)$ och $\overline{v}_3 = (0,5;\ 0;\ 1)$. Ingen av dessa duger ty $\overline{v}_1 \bullet \overline{v}_2 \neq 0$ och $\overline{v}_1 \bullet \overline{v}_3 \neq 0$. Vi ansätter en linjärkombination

$$\overline{v}_1 \bullet (a\overline{v}_2 + b\overline{v}_3) = 0.$$

Uttrycket leder till kravet att $1,5a = b$ och vi väljer $a = 1$ som bestämmer $b = 1,5$. Linjärkombinationen är då $\overline{v}_{23} = (0,\ 1,\ 3/2)$. Vi kontrollerar också att $\overline{v}_1 \bullet \overline{v}_{23} = 0$. Återstår den tredje vektorn som ska vara vinkelrät mot både $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_{23}$, vi beräknar den ur $\overline{v}_{123} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_{23}$ och erhåller $(13/2,\ -3,\ 2)$. Återstår att snygga till samt normera dem.

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{17}}\,(2,\ 3,\ -2) \\ \overline{e}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{13}}\,(0,\ 2,\ 3) \\ \overline{e}_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{221}}\,(13,\ -6,\ 4) \end{aligned} \quad .$$

KAPITEL 6

Flera dimensioner

Vi generaliserar till fler än 3 dimensioner.

6.1. n-tiplar

Vektorbegreppet går att generalisera på flera sätt. Ett sätt är att utöka antalet dimensioner. Vektorerna kan då inte längre åskådliggöras fullt ut med hjälp av bilder i tre dimensioner, även om man fortfarande har användning för dem för förståelse och principiella resonemang. Vanligt är att man talar om n-tiplar (bildat från 'triplar' och 'multiplar'. eng. n-tuples); det innebär att man fokuserar på tal givna som koordinater och använder räkneregler som axiom. En n-tipel är en ordnad följd av n stycken tal; talen behöver inte representera koordinater. Följden av tal omgärdas tex. av vanliga parenteser (). I det följande använder vi $(x_1,\, x_2,\, x_3, ...,\, x_n)$ som representation för en n-tipel. Det implicerar att vi infört en bas och ofta är det också ett ortonormerat system.

DEFINITION 6.1. Låt $\mathbb{R}^n$ beteckna mängden av n-tiplar $(x_1,\, x_2,\, x_3, ...,\, x_n)$ av reella tal x_i, $i = 1, ..., n$. På $\mathbb{R}^n$ definierar(!) vi räkneoperationerna 'addition', och 'multiplikation' med skalär enligt

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$\lambda\,(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)\,.$$

TEOREM 6.1. *Räknelagarna för n-tiplar i $\mathbb{R}^n$ är samma som för geometriska vektorer. Utifrån definitionen i 6.1 erhålls samma räkneregler som när vektorer representeras med koordinater.*

Vi lämnar teoremet utan bevis men bevisen vilar på definitionen av räkneregler, vilka vi tagit från de geometriska vektorerna i två och tre dimensioner.

Standardbasen.

DEFINITION 6.2. Standardbasen är $\overline{e}_1 = (1, 0, 0, 0, ..., 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 0, 0, ..., 0)$, $\overline{e}_3 = (0, 0, 1, 0, ..., 0)$ och så vidare. Nollor på alla positioner utom på position i för basvektorn $\overline{e}_i$.

Begreppen bas, linjärt beroende och oberoende är samma, fast ekvationssystemen blir större.

DEFINITION 6.3. Vektorerna $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$,...,$\overline{e}_n$ sägs vara en bas i $\mathbb{R}^n$ om varje $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i$$

med *entydigt* bestämda tal $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Vi kallar dessa tal för koordinater för $\overline{y}$ i den givna basen.

6.1 ÖVNING 6.1. Vad implicerar ”med entydigt bestämda tal $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$” i definitionen av bas?

DEFINITION 6.4. En vektor $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ är en linjärkombination av vektorerna $\overline{a}_1, ..., \overline{a}_p$, i $\mathbb{R}^n$, om det finns tal $x_1, ..., x_p$ så att

$$\overline{y} = x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + ... + x_p\overline{a}_p = \sum_{i=1}^{p} x_i \overline{a}_i.$$

DEFINITION 6.5. Att mängden $\{\overline{a}_1, ..., \overline{a}_p\}$ är linjärt beroende är ekvivalent med att det finns tal $x_1, x_2, ..., x_p$, av vilka minst ett är skilt från noll, så att

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + ... + x_p\overline{a}_p = \overline{0}.$$

Att de är linjärt oberoende är ekvivalent med att det endast finns den triviala lösningen $x_1 = x_2 = ... = x_p = 0$.

DEFINITION 6.6. Vektorerna $\overline{a}_1, ..., \overline{a}_p$ i $\mathbb{R}^n$ sägs spänna (eng. span) upp $\mathbb{R}^n$ om varje vektor $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ är en linjärkombination av de nämnda vektorerna (som dock inte behöver vara den enda linjärkombination som ger $\overline{y}$).

Alternativ: Det linjära höljet till vektorerna $\overline{a}_1, ..., \overline{a}_p$ är *mängden* av alla linjärkombinationer $\overline{y} = x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + ... + x_p\overline{a}_p$. Det linjära höljet skrivs $LH(\overline{a}_1, ..., \overline{a}_p)$.

ANMÄRKNING 6.1. $n - 1$ vektorer kan inte spänna upp $\mathbb{R}^n$. Däremot kan $p \geq n$ stycken vektorer göra det. Om $p > n$ är de dock linjärt beroende.

EXEMPEL 6.1. Det linjära höljet till

$$(1,\ 0,\ 2)\,,\ (2,\ 1,\ -2)\,,\ (3,\ 1,\ 0)$$

är ett plan ty $(3, 1, 0) = (1, 0, 2) + (2, 1, -2)$.

6.2 ÖVNING 6.2. Flera av uttrycken hitintills i detta kapitel innehåller summor av vektorer men betyder ändå olika saker. Gör en lista på definitioner och skillnader för: linjärt oberoende, linjärt beroende, bas samt linjärt hölje.

Teorem 6.2. *Bassatsen i $\mathbb{R}^n$. För rummet $\mathbb{R}^n$ gäller*

(1) Varje bas i $\mathbb{R}^n$ har exakt n element.
(2) För n stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$ gäller att: de är en bas $\Leftrightarrow$ de är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$det linjära höljet (spänner upp) är $\mathbb{R}^n$.
(3) Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende; om färre än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ så kan inte det linjära höljet vara (spänna upp) $\mathbb{R}^n$.

Vi lämnar bassatsen utan bevis.

Exempel 6.2. Visa att $(1,1,1,2)\,,\ (0,1,2,3)\,,\ (-1,0,1,2)\,,\ (-1,0,4,0)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. För att visa att de är en bas räcker det att visa att de är linjärt oberoende. Vi löser ekvationssystemet

$$x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 + x_4\overline{e}_4 = \overline{0}$$

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

som ger $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, dvs. de är linjärt oberoende. Beräkningarna kan t. ex. göras enligt följande. Utför $4(1) + (3)$: $5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Utför $-5(2) + (3)$ samt $-2(2) + (4)$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

och ur den sista får vi $x_2 = -2x_3$ som insatt i den näst sista ger $-3(-2x_3) - 3x_3 = 0$ d. v. s. $x_3 = 0$. Därur följer $x_2 = 0$ och ur (2) att $x_1 = 0$ och naturligtvis att $x_4 = 0$. Således linjärt oberoende.

Övning 6.3. Visa att $\overline{e}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\overline{e}_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\overline{e}_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)$, 6.3
$\overline{e}_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)$ och $\overline{e}_5 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$ är linjärt oberoende. Ange också koordinaterna för vektorn $\overline{v} = (1,1,1,1,1)$ samt vinkeln mellan $(1,1,1,1,1)$ och $(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$.

Anmärkning 6.2. Skalärprodukt generaliseras på liknande sätt. Avståndsbegreppet likaså. Skalärprodukten mellan två vektorer ges t.ex. av $(1,0,1,4,2)\cdot(0,2,-1,1,2) = 0 + 0 - 1 + 4 + 4 = 7$. Avståndet mellan två punkter $P = (1,0,1,4,2)$ och $Q = (0,2,-1,1,2)$ ges av

$$\begin{aligned} \left|\overline{OP} - \overline{OQ}\right| &= \left|\overline{PQ}\right| = |(1,0,1,4,2) - (0,2,-1,1,2)| = |(1,-2,2,3,0)| = \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18}. \end{aligned}$$

Övning 6.4. Sorteringsövning, sant eller falskt? 6.4

(1) Om två vektorer är en bas så är de linjärt oberoende.
(2) Om två vektorer är linjärt oberoende så är de en bas.
(3) Om två vektorer är linjärt oberoende så spänner de upp ett plan, $\mathbb{R}^2$.
(4) Om två vektorer spänner upp ett plan så är de linjärt oberoende.
(5) Om två vektorer är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^2$ så är de en bas.
(6) Om två vektorer är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^3$ så är de en bas.
(7) Om 4 vektorer är linjärt oberoende så kan de vara en bas.
(8) Om 4 vektorer spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är de en bas.
(9) Om 4 vektorer spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är de linjärt beroende.

6.5 Övning 6.5. Vi är i rummet $\mathbb{R}^n$.

(1) Varför är n linjärt oberoende vektorer en bas i rummet?
(2) Varför är $n+1$ vektorer inte en bas?
(3) Varför behöver inte n vektorer i rummet vara en bas?

6.2. Axiomatiska vektorer

Utvidgning av vad som kallas vektorer.

Hela projektet kan nu vändas. Vi har utgått från en geometrisk åskådlighet och definierat vektorer i 2 och 3 dimensioner; sedan utvidgat detta till ett godtyckligt tal n i $\mathbb{R}^n$. Genom att ta satserna för räknelagar som *axiom* kan man istället *undersöka vilka matematiska objekt* som uppfyller dem: formellt kan de kallas för vektorer.

Definition 6.7. Axiom för Vektorrum. Se 2.2.

(1) Om $\overline{u}$ och $\overline{v}$ är objekt i vektorrummet (eng. vector space) så är $\overline{u}+\overline{v}$ också det (vektorrummet är slutet; eng. closed)
(2) $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$
(3) $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$
(4) Det finns ett objekt kallat $\overline{0}$ som har egenskapen att $\overline{u}+\overline{0}=\overline{u}$. Det finns en nolla (eng. a zero).
(5) Det finns ett objekt $-\overline{u}$ för vilket det gäller $\overline{u}+(-\overline{u})=\overline{0}$. Det finns en additiv invers.
(6) Om k är en skalär så tillhör $k\overline{u}$ också vektorrummet.
(7) $k(\overline{u}+\overline{v})=k\overline{u}+k\overline{v}$
(8) $(k+m)\overline{u}=k\overline{u}+m\overline{u}$
(9) $k(m\overline{u})=(km)\overline{u}$
(10) $1\overline{u}=\overline{u}$, det finns en etta.

Anmärkning 6.3. Skalärprodukt och avstånd ingår inte i axiomen!

Exempel 6.3. $u\oplus v=uv$ dvs. vår nya operation $\oplus$ motsvarar vår gamla multiplikation; $k\otimes u=u^k$ dvs. vår nya multiplikation svarar mot exponentiering. Vi har exempelvis att $1\oplus 1=1$ och $3\oplus 3=9$. Och för $3\otimes 2=2^3=8$. Man kan dock visa att dessa nya operationer utgör ett vektorrum.

Exempel 6.4. Ett polynom är definierat som $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$. Det är klart att summan av två polynom är ett polynom, och att produkten av ett polynom med en skalär är ett polynom. De 10 axiomen kan visas för polynom, alltså är de ett vektorrum.

Exempel 6.5. Två funktioner kan vara linjärt oberoende. T.ex. är $\overline{f} = x$ och $\overline{g} = \sin(x)$ linjärt oberoende eftersom den ene inte kan skrivas som en skalär multipel av den andre. Däremot är $\overline{h}_1 = \sin(2x)$ och $\overline{h}_2 = \sin(x)\cos(x)$ inte linjärt oberoende eftersom $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Exempel 6.6. Visa att polynomen

$$p_1 = 8x + 1,\ p_2 = 2x^2 - 1,\ p_3 = -x^2 + 4x + 1$$

är linjärt beroende. Med linjärt beroende avses att

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$$

där inte alla λ_i är 0. Sätter vi in polynomen i uttrycket erhålls

$$\lambda_1 (8x + 1) + \lambda_2 \left(2x^2 - 1\right) + \lambda_3 \left(-x^2 + 4x + 1\right) = 0$$

eller

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) + (8\lambda_1 + 4\lambda_3)\, x + (2\lambda_2 - \lambda_3)\, x^2 = 0$$

vilket måste vara uppfyllt för alla x i $\mathbb{R}$. Det leder till följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 8\lambda_1 + 4\lambda_3 \quad &= 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

vilken har icke-triviala lösningar. Om vi tar $(3) + (1)$ och $4\,(3) + (2)$ erhålls

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 \quad &= 0 \\ 8\lambda_1 + 8\lambda_2 &= 0\,. \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Vi sätter $\lambda_2 = t$, $\lambda_1 = -t$, $\lambda_3 = 2t$. Vilket innebär t. ex. att $p_3 = \left(-\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2\right)/\lambda_3 = 1/2 p_1 - 1/2 p_2$. Mängden $\{p_1, p_2, p_3\}$ är linjärt beroende.

Övning 6.6. Visa att polynomen 6.6

$$p_1 = 1 - x,\ p_2 = 5 + 3x - 2x^2,\ p_3 = 1 + 3x - x^2$$

är linjärt beroende.

6.3. Facit övningar

6.1 Att de är linjärt oberoende. Om två vektorer i summan är linjärt beroende kan andelen av dem var och en förändras.

6.2 Ingen kommentar.

6.3 Lös ekvationssystemet $(0,0,0,0,0) = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3 + a_4\bar{e}_4 + a_5\bar{e}_5$. Den enda lösningen är att alla koefficienter a_i är 0. Man kan följa algoritmiskt metoden för succesiv elimination och först eliminera a_1 med hjälp av rad 1, därefter a_2 med hjälp av rad 2 o.s.v.; det är inte mycket arbete.

Koordinaterna ges av ekvationssystemet $(1,1,1,1,1) = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3 + a_4\bar{e}_4 + a_5\bar{e}_5$ Systemet kan också skrivas

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + a_5\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{array}{rl} 1 = & a_1 \qquad\qquad\qquad + a_5 \\ 1 = & a_1 + a_2 \\ 1 = & \quad\; a_2 + a_3 \\ 1 = & \qquad\quad a_3 + a_4 \\ 1 = & \qquad\qquad\quad a_4 + a_5 \end{array}.$$

Koordinaterna är $\frac{1}{2}(1,1,1,1,1)$. Observera att i den vanliga basen, $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$ o.s.v., är naturligtvis koordinaterna just $(1,1,1,1,1)$.

Vinkeln ges av definitionen av skalärprodukt. $(1,1,1,1,1) \bullet (1,1,0,0,0) = 2$. Längden av vektorerna är $\sqrt{5}$ respektive $\sqrt{2}$ så

$$2 = \sqrt{5}\sqrt{2}\cos\alpha$$

som ger att $\alpha \approx 50,8°$.

6.4

(1) Sant.
(2) Falskt. Två vektorer i $\mathbb{R}^3$ är inte en bas.
(3) Sant oavsett antalet dimensioner.
(4) Sant. Sant oavsett antalet dimensioner.
(5) Sant. Maximala antalet oberoende vektorer i $\mathbb{R}^2$ är 2.
(6) Nej. För att det ska vara en bas krävs maximala antalet möjliga vektorer som kan vara linjärt oberoende, och det är 3 i $\mathbb{R}^3$.
(7) Sant. De 'kan vara' en bas om de är i $\mathbb{R}^4$.
(8) Falskt. 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan inte vara en bas ty de kan inte vara linjärt oberoende.
(9) Sant.

6.5 Ingen kommentar.

6.6 Med linjärt beroende avses att

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$$

vilket kan skrivas som

$$\lambda_1(1-x) + \lambda_2\left(5+3x-2x^2\right) + \lambda_3\left(1+3x-x^2\right) = 0$$

eller

$$(\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3) + (-\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3)\,x + (-2\lambda_2 - \lambda_3)\,x^2 = 0$$

vilket måste vara uppfyllt för alla x i $\mathbb{R}$. Det leder till följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 \quad &= 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

vilken har icke-triviala lösningar. Om vi tar $(3) + (1)$ och $3\,(3) + (1)$ erhålls

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 \; &= 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda_3 = t$, $\lambda_2 = -t/2$, $\lambda_1 = 3t/2$. Vilket innebär t. ex. att $p_3 = (-\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2)\,/\lambda_3 = -3/2p_1 + 1/2p_2$.

6.4. Kapitelproblem

6.1 Visa att de 3 matriserna A, B och C är linjärt oberoende.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

genom att visa att de 4 ekvationerna

$$c_1 A + c_2 B + c_3 C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

endast har lösningarna $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

6.5. Facit Kapitelproblem

6.1 De 4 ekvationerna är

$$
\begin{aligned}
-c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \\
c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\
-c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\
c_1 - c_2 - c_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Addera (1) och (2): $2c_2 = 0$ ger $c_2 = 0$ osv.

KAPITEL 7

Matriser

Utgångspunkten för konstruktion av begreppet matriser är beräkningsbehovet vid linjära avbildningar. En linjär avbildning från $\mathbb{R}^1$ till $\mathbb{R}^1$ ges av $y = ax$. En linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ ges av två uttryck: $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ och $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$. Om man begränsar sig till just linjära avbildningar så är uttryckens form konstant och det som är intressant är de fyra talen a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Dessa tal kommer att sättas upp enligt ett schema kallat matris. Matrisers räkneregler motiveras av behovet av att beräkna sammansättningar av linjära avbildningar.

7.1. Inledande definition av matris

Anger hur matriser skrivs (notation).

Definition 7.1. Med en matris menas ett rektangulärt schema av tal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Denna matris sägs vara av typen $m \times n$ där m är antalet rader (vågräta $\longleftrightarrow$) och n är antalet kolonner (lodräta $\updownarrow$). a_{ij} kallas för ett matriselement; skrivs även som $(A)_{ij}$. Första index är rad och det andra kolonn. Parenteserna runt om uppställningen av tal varierar i litteraturen, men någon form av parentes är det vanligaste: (), [] eller $\{\}$. Ofta används versaler för att beteckna matriser.

Exempel 7.1. Några matriser med exempel på element:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2/7 & 0,4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ (7), \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 3+2i & 4 \\ \tan\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi begränsar oss till reella tal som element i matriserna. Med dessa nya objekt kan vi precis som för tal och vektorer definiera olika operationer, matris-addition, matris-multiplikation och fler.

Exempel 7.2. Addition av matriserna A och B;

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+1 & -1+1 \\ 2+0 & 2+0 & 2+4 \\ 3+2 & -2+1 & 1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Elementvis gäller $a_{ij} + b_{ij}$, dvs. att de som har samma index adderas. Båda matriserna ska ha samma storlek, både rader och kolonner. Vi återanvänder tecknet för addition av tal eftersom addition av matriser leder till addition av elementen som kan vara reella tal. Annars skulle vi infört ett nytt tecken, som vi gjorde inledningsvis vid addition av vektorer.

EXEMPEL 7.3. Multiplikation med skalär. En matris multipliceras med talet 3 enligt

$$3\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 5\,6\,7\,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 18 & 21 & 24 \end{pmatrix}.$$

Eller mer allmänt $\lambda \in \mathbb{R}$ och A är en matris av godtycklig storlek $m \times n$:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ & & & \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ett element ges av λa_{ij}.

7.2. Matrismultiplikation, hur gör man

Visar hur matrismultiplikation utförs och vilka mönster som kan användas.

Det är viktigt att man finner en struktur när det gäller matrismultiplikation. Betrakta följande matrismultiplikation (juxtaposition används precis som för multiplikation med algebraiska symboler):

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Raderna i A multipliceras med kolonnerna i B elementvis. Låt oss börja med första raden och första kolonnen som ger $1 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot \mathbf{4} + 1 \cdot \mathbf{2} = 11$. Totalt kommer multiplikationen att generera 4 element i en 2×2 matris.

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot \mathbf{4} + 1 \cdot \mathbf{2} & 1 \cdot \mathbf{5} + 2 \cdot (-\mathbf{3}) + 1 \cdot \mathbf{0} \\ 3 \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot \mathbf{4} + (-1) \cdot \mathbf{2} & 3 \cdot \mathbf{5} + 0 \cdot (-\mathbf{3}) + (-1) \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Om matriserna ovan delas upp enligt (observera skrivsätten)

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} b_1 \, b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Ab_1 \, Ab_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} b_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} b_2 \right) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \mathbf{1} + 2 \cdot \mathbf{4} + 1 \cdot \mathbf{2} & 1 \cdot \mathbf{5} + 2 \cdot (-\mathbf{3}) + 1 \cdot \mathbf{0} \\ 3 \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot \mathbf{4} + (-1) \cdot \mathbf{2} & 3 \cdot \mathbf{5} + 0 \cdot (-\mathbf{3}) + (-1) \cdot \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denna typ av uppdelning kallas att en matris delas upp i blockmatriser b_1 och b_2.

EXEMPEL 7.4. Studera multiplikationen av en 3×1 och en 1×3 som ger en 3×3 matris

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,0\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och om vi vänder på på det, multiplikationen av en 1×3 och en 3×1 som ger en 1×1 matris

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2)\,.$$

Övning 7.1. Använd matriserna 7.1

$$A = \begin{pmatrix} 0\;1\;-2 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix},\; D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och beräkna AB, BA, AC, $C + D$, CD, C^2.

Genom att använda strukturen för skalärprodukt mellan vektorer kan matrismultiplikation uppfattas som en skalärprodukt mellan rader och kolonner. Elementen i en rad betraktas då som komponenter i en vektor, samma för kolonnerna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \text{Vi sätter } r_1 = (1\;0\;-2)\,,\; k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ osv.} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1\, k_2\, k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \bullet k_1 & r_1 \bullet k_2 & r_1 \bullet k_3 \\ r_2 \bullet k_1 & r_2 \bullet k_2 & r_2 \bullet k_3 \end{pmatrix}$$

så indexen anger vilken rad som bildar skalärprodukt med vilken kolonn. Rad 1 skalärt med kolonn 1 bildar element $a_{11} = r_1 \bullet k_1$, rad 1 skalärt med kolonn 2 bildar element a_{12} o.s.v., rad 2 skalärt med kolonn 1 bildar element a_{21} o.s.v.

Exempel 7.5. Ytterligare ett sätt att tänka kring matrismultiplikation finns i figur 7.2.1. Dra ett streck längs den rad och kolonn som ska multipliceras ihop. Där strecken korsar varandra, där ska resultatet stå.

Figur 7.2.1. Rad gånger kolonn. Korsningen ger platsen för det beräknade elementet. Multiplikationen ger 4 element.

Exempel 7.6. Och ännu ett sätt att tänka om matrismultiplikation. Om den högra matrisen förskjuts uppåt så kan vi se det som

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 0\,2 \\ 1\,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 0\,2 \\ 1\,3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix} \end{matrix}$$

där resultatet är matrisen med elementen a, b, c och d. Så a erhålls genom att ta raden framför a dvs. (1 2 3) och multiplicera elementvis med kolonnen ovanför a dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så vi erhåller $1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1$. Ur konstruktionen framgår också att första matrisen bestämmer antalet rader och andra matrisen bestämmer antalet kolonner.

Som framgår så måste antalet kolonner i den vänstra matrisen vara lika många som rader i den andra vid multiplikation. Det innebär att även om AB existerar så behöver BA inte göra det. Detta leder också till det nödvändiga villkoret att om AB ska kunna vara lika med BA så måste A och B vara lika stora och kvadratiska.

Exempel 7.7. Om två matriser ska multipliceras och den ena (vänster) är 2 rader och 2 kolonner, 2×2, och den andra (höger) är 2 rader och 5 kolonner, 2×5, så kan det skrivas

$$2 \times \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \times 5 \text{ skapar en } 2 \times 5.$$

Med innebörden att vi erhåller en matris av storleken 2×5. De två inre talen ska vara lika. De två yttre talen ger dimensionerna på resultat-matrisen. Om vi byter ordning på matriserna erhålls

$$2 \times \mathbf{5} \cdot \mathbf{2} \times 2,$$

och de två inre är olika och multiplikationen existerar inte.

7.2 Övning 7.2. Ange storleken på alla de matriser som kan multipliceras från vänster respektive höger med

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ange också ett exempel på en matris på 2×10 som kan multipliceras från höger med den givna matrisen.

Exempel 7.8. För reella tal a och b gäller att om $ab = 0$ så är $a = 0$ eller(inklusivt) $b = 0$. För matriser gäller att om $AB = 0$ (där 0 betyder noll-matrisen) behöver ingen av vare sig A eller B vara 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 7 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exempel 7.9. Matrismultiplikation är ej kommutativt. Det innebär att i allmänhet gäller $AB \neq BA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Även algebraiskt måste man se upp eftersom matriserna inte kommuterar: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ vilket i allmänhet *inte* kan förenklas till $A^2 + 2AB + B^2$.

Exempel 7.10. Kancellering gäller ej. För reella tal gäller att om $ab = ac$ så är $b = c$ men det gäller inte för matriser.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

och

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning 7.1. Observera att vi inte har matrisdivision.

Exempel 7.11. Ekvationssystem skrivs naturligt med hjälp av matriser. Vi skriver systemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

med hjälp av matrserna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

och

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

explicit som

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och algebraiskt

$$AX = b.$$

Observera hur räknereglerna för matrismultiplikation gör detta möjligt! En matris med enbart en kolonn kallas för kolonnmatris, enbart en rad kallas för radmatris. Matriser som har samma antal rader som kolonner kallas för kvadratiska matriser.

I matriser kan rader och kolonner tolkas som vektorer. Eftersom matrismultiplikation kan ses som flera skalärprodukter så om en noll-matris (alla element är 0) ska skapas genom en multiplikation måste vektorerna i första matrisens rader vara vinkelräta mot vektorerna i andra matrisens kolonner. Se exempel 7.9. För att få elementet a_{11}så tar vi skalärprodukten mellan rad ett och kolonn ett vilket skrivet som vektorer är $(1, -2) \bullet (4, 2) = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 0$. Vektorerna $(1, -2)$ och $(4, 2)$ är vinkelräta mot varandra. Se också exempel 7.8 där $(0, 1)$ $(0, 2)$ båda är vinkelräta mot $(3, 0)$ och $(7, 0)$. När matriser byter ordning, AB jämfört med BA, så är i den första varianten raderna i A vektorer medan i den andra varianten är kolonnerna i A vektorer. Detta innebär naturligtvis att vi inte behöver få samma resultat.

EXEMPEL 7.12. Exemplet kan uteslutas eller läsas kursivt vid en första läsning. Matrismultiplikation kan skrivas med summatecken. Vi utgår från 2 matriser A och B med element a_{ij} respektive b_{ij},

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} .$$

Vi ser mönstret. För att skapa element c_{rk} så är radindex för a_{ij} konstant, medan för b_{ij} är kolonnindex konstant; vi använder alla element i en rad i den vänstra matrisen och alla elementen i en kolonn i den högra. Det överblivna indexet för a_{ij} respektive b_{ij} summeras över. T. ex. är $c_{12} = \sum_k a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$.

$$\begin{pmatrix} \sum a_{1k}b_{k1} & \sum a_{1k}b_{k2} & \sum a_{1k}b_{k3} \\ \sum a_{2k}b_{k1} & \sum a_{2k}b_{k2} & \sum a_{2k}b_{k3} \\ \sum a_{3k}b_{k1} & \sum a_{3k}b_{k2} & \sum a_{3k}b_{k3} \end{pmatrix} .$$

I allmänhet skriver vi $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Med modifiering av gränserna för summering så beskrivs även multiplikation av icke-kvadratiska matriser.

För matriser finns en mängd räknelagar.

TEOREM 7.1. *För matriser gäller följande räknelagar (för matriser av typ som möjliggör operationerna) För att tydligt skilja nollmatrisen från skalären* 0 *är nollmatrisen markerad med ett streck under:* $\underline{0}$

(1) Kommutativa lagen, associativa lagen samt nolla och invers vid addition
 (a) $A + B = B + A$
 (b) $A + (B + C) = (A + B) + C$
 (c) $A + \underline{0} = A$
 (d) $A + (-1)A = \underline{0}$
(2) multiplikation med skalär
 (a) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
 (b) $1 \cdot A = A$
 (c) $0 \cdot A = \underline{0}$
 (d) $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$
(3) multiplikation med skalär är distributiv över addition
 (a) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
 (b) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
(4) associativa lagen vid matrismultiplikation samt distributiva lagen för matrismultiplikation över addition
 (a) $(AB)C = A(BC)$ matrismultiplikation är associativ
 (b) $(A + B)C = AC + BC$ matrismultiplikation är höger-distributiv över addition
 (c) $A(B+C) = AB+AC$ matrismultiplikation är vänster-distributiv över addition

Viktigt att lägga märke till är att matrismultiplikation inte är kommutativ men associativ.

Bevis. Följande bevis är en exercis i index, kan hoppas över vid en första läsning. Formlerna bevisas i princip genom att man visar att elementen på plats ij är desamma både för höger och vänster sida, vilket innebär en intensiv användning av summatecken. För 1, 2 och 3 är likheterna direkta konsekvenser av räkneregler för reella tal och definitionen av matrisaddition och multiplikation med skalär. Den besvärligaste att bevisa är $4a$, vilken vi bevisar här. $4a$ ger termer innehållande 3 faktorer och skillnaden mellan vänster och höger led är att de summeras i olika ordning.

Matrisen A har element A_{ik}, B har element B_{kj} och C har element C_{kj} (inledningsvis). Vi har

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

där vi som tidigare observerar att för A så är raden i konstant medan index löper över kolonnerna k. För B så är kolonnen j konstant medan index löper över raderna k. Vi kan summera över samma index eftersom antalet kolonner i A är samma som antalet rader i B.

Multiplicerar vi detta resultat med ännu en matris $(AB)\,C$ så ska för varje element raden i AB vara konstant och kolonnen i C vara konstant; vi får samma form på uttrycket (som föregående);

$$((AB)\,C)_{ij} = \sum_k (AB)_{ik} C_{kj}. \tag{7.2.1}$$

Vi behöver nu sätta in ett uttryck för elementen $(AB)_{ik}$ men indices får inte blandas så vi skriver

$$(AB)_{ik} = \sum_l A_{il} B_{lk}$$

och erhåller insatt i 7.2.1

$$((AB)\,C)_{ij} = \sum_k \left(\sum_l A_{il} B_{lk} \right) C_{kj} = \sum_k \sum_l A_{il} B_{lk} C_{kj}. \tag{7.2.2}$$

Vi studerar nu $A(BC)$,

$$(A\,(BC))_{ij} = \sum_k A_{ik}\,(BC)_{kj}$$

och, utan att index kolliderar, skriver vi

$$(BC)_{kj} = \sum_m B_{km} C_{mj}$$

som vi sedan sätter in

$$(A\,(BC))_{ij} = \sum_k A_{ik} \left(\sum_m B_{km} C_{mj} \right) = \sum_k \sum_m A_{ik} B_{km} C_{mj}. \tag{7.2.3}$$

Nu måste vi se att 7.2.2 och 7.2.3 är lika.

I 7.2.2 summerar l över $A_{il}B_{lk}$ och i 7.2.3 summerar k också över $A_{ik}B_{km}$, det är således samma summation. Vi byter k i 7.2.3 till l som i 7.2.2

$$\sum_l \sum_m A_{il} B_{lm} C_{mj}.$$

Sist byter vi m i 7.2.3 mot k i 7.2.2, dessa användes inte för att summera över elementen i AB,

$$\sum_l \sum_k A_{il} B_{lk} C_{kj}$$

vilket är samma som 7.2.3 eftersom summationsordningen kan ändras. $\square$

7.3 Övning 7.3. Utför beräkningen för $(AB)C = A(BC)$ för 2×2 system

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right)$$

och jämför med härledningen ovan.

7.3. Matrismultiplikation, varför?

Här ges en bakgrund till varför multiplikation med matriser ser ut som den gör.

Linjära funktioner, från $\mathbb{R}^1$ till $\mathbb{R}^1$, har formen $y = ex$, där e är en reell konstant. Om vi har två linjära avbildningar, $y = ex$ och $z = ay$ och sätter samman dem erhålls

$$z = ay = a(ex) = aex.$$

Eller mer formellt $y = f(x)$ och $z = g(y)$ och sammansättningen $g \circ f = g(f(x)) = g(ex) = a(ex) = aex$. Beräkna själv $f \circ g$. Denna avbildning var $\mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1$. Låt oss studera en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} y_1 &= ex_1 + fx_2 \\ y_2 &= gx_1 + hx_2 \end{aligned}$$

och koefficienterna i en matris

$$F = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

och den andra avbildningen

$$\begin{aligned} z_1 &= ay_1 + by_2 \\ z_2 &= cy_1 + dy_2 \end{aligned}$$

och dess matris

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Om vi nu sätter samman dessa $g(y) = g(f(x))$

$$\begin{aligned} z_1 &= ay_1 + by_2 = a(ex_1 + fx_2) + b(gx_1 + hx_2) = (ae + bg)\,x_1 + (af + bh)\,x_2 \\ z_2 &= cy_1 + dy_2 = c(ex_1 + fx_2) + d(gx_1 + hx_2) = (ce + dg)\,x_1 + (cf + hd)\,x_2 \end{aligned}$$

Vi kan skriva koefficient-matrisen som

$$Z = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Observera att Z ges av matrismultiplikationen, såsom vi definierat den $G \cdot F$.

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f = G \cdot F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Om vi nu tänker oss att sammansättningen på något sätt ska ges (representeras) av matriserna $g \circ f = G \cdot F$ så ser vi att för att få matrisen

$$Z = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix},$$

t.ex. $ae + bg$ måste vi göra just efter det schema som angivits för matrismultiplikation: första raden i vänstra matrisen gånger första kolonnen i högra matrisen elementvis: $(a,\, b) \bullet (e,\, g)$. Matrismultiplikation är ett sätt att konstruera en sammansättning av två linjära avbildningar. Metoden fungerar i alla dimensioner. Motiveringen här ovan är naturligtvis inte stringent.

Matrismultiplikation introducerades av den tyska matematikern Gotthold Eisensten (1832-1852) cirka 1844. Han införde den just för att förenkla substitutioner i linjära system.

7.4. Transponering

Rader blir kolonner och tvärtom.

Att transponera en matris innebär att rader skrivs som kolonner. Första raden flyttas till första kolonnen, andra raden till andra kolonnen o.s.v.

$$A = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1\,4 \\ 2\,5 \\ 3\,6 \end{pmatrix}$$

vilket kan skrivas $\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}$. Om $A^T = A$ så kallas matrisen för symmetrisk (måste vara kvadratisk). För kvadratiska matriser kan transponering grafiskt uppfattas som en spegling längs huvuddiagonalen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a}_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a}_{44} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & \mathbf{a}_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & \mathbf{a}_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & \mathbf{a}_{44} \end{pmatrix}.$$

Exempel 7.13. Följande matris är symmetrisk

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vilket kan skrivas som att $a_{ij} = a_{ji}$.

Exempel 7.14. Om en kolonnmatris transponeras erhålls en radmatris.

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ så är transponatet } B^T = \begin{pmatrix} 3\,3\,{-2}\,1 \end{pmatrix}.$$

Teorem 7.2. *För transponering gäller följande regler*

(1) $\left(A^T\right)^T = A$
(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
(4) $(AB)^T = B^T A^T$ OBS!

BEVIS. Vi bevisar 4 genom att skriva matrismultiplikationer med summatecken. Först måste vi kontrollera matrisstorlekarna eftersom både höger och vänster led ska kunna utföras. Vi sätter A som $n\times p$ och B som $p\times m$ och får att $AB = n\times m$ och $(AB)^T$ är $m\times n$. A^T är då $p\times n$ och B^T är $m\times p$ och eftersom de i höger led multipliceras i omvänd ordning får vi även nu storleken $m\times n$. Storleksförhållanden stämmer. Enligt tidigare så ges ett element i en matrismultiplikation av $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Transponerar vi detta erhålls $c_{ij} = \sum_k a_{jk}b_{ki}$ som således är elementen i $(AB)^T$. I A^T kallar vi elementen $a'_{ij} = a_{ji}$ och i B^T heter de $b'_{ij} = b_{ji}$. Elementen i matrisen B^TA^T betecknas c'_{ij}. Således $c'_{ij} = \sum b'_{ik}a'_{kj} = \sum b_{ki}a_{jk} = \sum a_{jk}b_{ki} = c_{ij}$. □

ANMÄRKNING 7.2. Om $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ och u^Tv beräknas, med matrismultiplikation, erhålls samma mönster som vid skalärprodukt mellan vektorer med matriselementen som komponenter. Med vektorbeteckningar har vi $\overline{u} = (1, 2, 3)$ och $\overline{v} = (4, 5, 6)$ och $\overline{u} \bullet \overline{v}$. Om vi inför en mer representationsoberoende beteckning för skalärprodukt $< u|v >$ så kan vi skriva att för vektorer gäller $< u|v >= \overline{u} \bullet \overline{v}$ och för matriser gäller $< u|v >= u^Tv$.

7.4 ÖVNING 7.4. Visa att för en kvadratisk 3×3 matris ger A^TA en symmetrisk matris. Vad ger AA^T.

7.5. Vad gör matriser?

Vad matriser gör med varandra. Det finns många sätt att tänka kring matriser, detta är ytterligare ett.

Vi betraktar några matris-multiplikationer för att få en känsla för vad matriser 'gör'. I det följande studeras ett antal matrismultiplikationer på formen AO. Inledningsvis är det lämpligt att tänka på det som att O gör något med matris A. Matris O kommer inledningsvis att vara en, i förhållande till A, enkel matris.

7.5.1. Kopiera och flytta.

EXEMPEL 7.15. Betrakta matrismultiplikationen AO_{11}

$$AO_{11} = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\4\,5\,6\\7\,8\,9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,0\,0\\0\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\,0\,0\\4\,0\,0\\7\,0\,0\end{pmatrix},$$

här har matrisen O_{11} avbildat 1:a kolonnen i A matrisen på 1:a kolonnen i produktmatrisen, övriga element 0. Matrisen O_{22}avbildar 2:a kolonnen i A på 2:a kolonnen i produkten, övriga element 0,

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\\4\,5\,6\\7\,8\,9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\,2\,0\\0\,5\,0\\0\,8\,0\end{pmatrix}.$$

Matrisen O_{12} avbildar 1:a kolonnen på 2:a kolonnen,

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\\4\,5\,6\\7\,8\,9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,4\,0\\0\,7\,0\end{pmatrix}.$$

Matrisen O_{21} avbildar 2:a kolonnen på 1:a kolonnen,

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\\4\,5\,6\\7\,8\,9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\,0\,0\\1\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,0\,0\\5\,0\,0\\8\,0\,0\end{pmatrix}.$$

Slutsatsen är att en matris O_{rk} avbildar kolonn r på kolonn k. Matrsien O_{rk} har en 1:a på rad r kolonn k, 0 på övriga platser. Matrisen ska multipliceras från höger.

Exempel 7.16. Kolonner kan adderas med hjälp av en matrismultiplikation. Vi adderar kolonn 1 till kolonn 2,

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\\4\,5\,6\\7\,8\,9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,1\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1+2 & 0\\0 & 4+5 & 0\\0 & 7+8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 15 & 0\end{pmatrix}.$$

Genom att välja en etta i $(O)_{12}$ som kopierar kolonn 1 till kolonn 2 samt en etta i $(O)_{22}$ som kopierar kolonn 2 till kolonn 2 kommer kolonn 1 och 2 att adderas och blir kolonn 2.

Övning 7.5. Addera alla kolonner (radvis som i föregående) och placera summan i kolonn 3. 7.5

Exempel 7.17. Genom att placera matrisen O_{11} på vänster sida så arbetar matrisen med rader;

$$O_{11}A=\begin{pmatrix}1\,0\,0\\0\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,2\,3\\4\,5\,6\\7\,8\,9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\0\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}.$$

Lägg märke till indexen

$$O_{12}A=\begin{pmatrix}0\,1\,0\\0\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,2\,3\\4\,5\,6\\7\,8\,9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\,5\,6\\0\,0\,0\\0\,0\,0\end{pmatrix}$$

så att en etta i $(O)_{12}$ kopierar rad 2 till rad 1. Om vi utgår från O på höger sida så kopierar O_{12} kolonn 1 till kolonn 2, gör vi transponat på den och placerar den på vänster sida $O_{21}A$ så kopierar den rad 1 till rad 2.

Övning 7.6. Vilken matris ska man använda för att byta två kolonner? Byta två rader? 7.6

Anmärkning 7.3. Man kan tänka på föregående övningar utifrån enhetsmatrisen

$$\begin{pmatrix}1\,0\,0\\0\,1\,0\\0\,0\,1\end{pmatrix}.$$

Om man tar 3 gånger rad 1 och adderar den till rad 3 så erhålls

$$\begin{pmatrix}1\,0\,0\\0\,1\,0\\3\,0\,1\end{pmatrix},$$

då kommer denna matris att utföra samma radoperationer på den matris som den multipliceras med (från vänster):

$$\begin{pmatrix}1\,0\,0\\0\,1\,0\\3\,0\,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\,2\,3\\1\,1\,1\\-1\,2\,0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\1 & 1 & 1\\6-1 & 6+2 & 9+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,2\,3\\1\,1\,1\\5\,8\,9\end{pmatrix},$$

och resten av matrisen är oberörd. Att det du gör med enhetsmatrisen kommer enhetsmatrisen sedan att göra med en annan matris som den multipliceras med är en viktig insikt för att förstå konstruktionen av invers matris i exempel 7.26.

7.7 Övning 7.7. Vad gör matrisen, i anmärkning 7.3, då den multipliceras från höger i stället för från vänster?

7.8 Övning 7.8. Ange en matris som tar -2 gånger rad 1 och adderar det till rad 2 (multiplikation från vänster således).

7.9 Övning 7.9. Ange hur man ska förfara om rad 2 ska multipliceras med 3 och adderas till rad 3, och kolonn 1 med ombytt tecken ska adderas till kolonn 2? Utför operationerna på matrisen i anmärkning 7.3.

Ovanstående resonemang innebär att addition kan göras med hjälp av multiplikation. Vi har en punkt med koordinaterna $(2, 1)$ (läs som vektor)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och vill addera 3 i x-led och 2 i y-led, vektoraddition ger oss;

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Men det går att utföra med matrismultiplikation enligt

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,3 \\ 0\,1\,2 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 1+2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Priset vi fick betala var en dimension. Observera vad som händer. Enhetsmatrisen kopierar exakt vår punkt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där vi lagt till en 1:a på sista raden. Nyckeln till additionerna är att använda 1 i rad 3 och multiplicera den med önskat tal och sedan addera till önskad rad, i detta fall rad $1(x)$ och $2(y)$. Den vänstra matrisen har skapats genom att utgå från enhetsmatrisen och ta 3 gånger rad 3 och addera till rad 1, 2 gånger rad 3 och addera till rad 2. Eftersom rad 3 endast innehåller en 1:a kommer 3 att adderas till rad $1(x)$ och $2(y)$ att adderas till rad 2. I datorsammanhang är denna konstruktion vanlig eftersom alla operationer kan utföras med endast en operation, matrismultiplikation.

7.6. Linjära ekvationssystem

Ekvationssystem skrivs naturligt med hjälp av matriser. Exempelvis har vi, sedan tidigare

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 2 \\ \ \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + \ \ x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och ekvationssystemet kan skrivas som

$$AX = b.$$

Matrisen A kallas för koefficientmatris eftersom den innehåller det linjära ekvationssystemets koefficienter för de obekanta.

Men det finns andra skrivsätt,

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eller om vi återknyter till vektorer

$$x_1\,(2,\,1,\,2) + x_2\,(1,\,-2,\,1) + x_3\,(-1,\,3,\,-4) = (2,\,4,\,1)\,.$$

Denna likhet i formulering, att en kolonn i en matris uppvisar likheter med vektorbegreppet, gör att vi kan överföra diskussionen om baser, linjärt beroende o.s.v. till matriser. Detta byte av representation används flitigt. En kolonnmatris kallas därför även, för bekvämlighets skull, för en kolonnvektor. I litteraturen förekommer att vektorer direkt skrivs som kolonnmatriser.

Exempel 7.18. Blockmatriser. Vi sätter

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

och med

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildas

$$A = (A_1\, A_2\, A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan skriva $BA = B(A_1\, A_2\, A_3)$ som innebär för vänster led

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Men vi kan också skriva $BA = (BA_1\ BA_2\ BA_3)$ som för höger led ger blocken

$$BA_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ BA_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$BA_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

så att vi kan sätta samman till

$$BA = (BA_1\ BA_2\ BA_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi konstaterar att B beter sig som ett tal som multipliceras med en matris med elementen A_1, A_2 och A_3. Jämför $2\,(3\,1\,4) = (2\cdot 3\,2\cdot 1\,2\cdot 4)$.

7.10 ÖVNING 7.10. Genomför exempel 7.18 med

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

och

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\; A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Allmänt för blockmatriser gäller

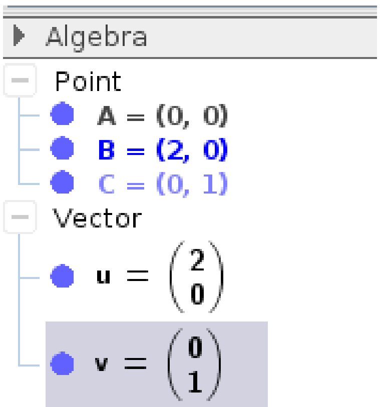
$$AB = A\,(B_1\;, B_2\; B_3) == (AB_1\; AB_2\; AB_3)$$

(A beter sig som ett tal) och

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \\ A_3B \end{pmatrix}$$

(där B beter sig som ett tal). Blockmatriser fungera i dessa situtaioner som ett reellt tal.

ANMÄRKNING 7.4. Lägg märke till hur Geogebra anger punkter respektive vektorer i 7.6.1.



FIGUR 7.6.1. Geogebra representerar punkter med (a, b) och vektorer med $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

TEOREM 7.3. *För kvadratiska matriser A av storleken $n \times n$ är följande påståenden ekvivalenta:*

(1) A:s kolonnmatriser är en bas i n dimensioner
(2) $AX = 0$ har endast den triviala lösningen $X = 0$ (linjärt oberoende basvektorer i n dimensioner)

(3) $AX = Y$ är lösbar för alla Y (alla vektorer kan skrivas med hjälp av basvektorerna, kolonnvektorn Y är linjärt beroende, en linjärkombination av kolonnvektorerna i A.)

Att A:s kolonnvektorer är en bas innebär att de spänner upp ett rum. Att $AX = 0$ bara har den triviala lösningen $X = 0$ innebär att de är linjärt oberoende, per definition. Och $AX = Y$ är lösbar innebär att varje annan vektor Y kan skrivas med en linjärkombination av basen.

7.6.1. Kvadratiska linjära ekvationssystem.

Bevis. Skiss och resonemang till bevis. I princip är satsen en översättning av vektorer till matriser (byte av representationsform).

(1) Om vi skriver kolonnmatriserna A_i i A som vektorer $\overline{a}_i$ och dessa enligt 1 är en bas i n dimensioner så gäller att $x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + ...x_n\overline{a}_n = 0$, i matrisrepresentation $AX = 0$, har endast den triviala lösningen $x_1 = x_2 = ...x_n = 0$, i matrisrepresentation $X = 0$. Är de en bas, n linjärt oberoende vektorer i n dimensioner, kan kolonnmatrisen Y tolkad som en vektor konstrueras som en linjärkombination av basvektorerna.

(2) Om $AX = 0$ sedd som ett uttryck med vektorer har bara den triviala lösningen $X = 0$ innebär det att de är linjärt oberoende och eftersom de är n är de en bas. Med n linjärt oberoende vektorer i n dimensioner kan alla punkter nås; $AX = Y$ är lösbar.

(3) Enligt basbegreppet är en uppsättning vektorer en bas om alla vektorer i rummet kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna. Det innebär att kolonnmatrisen Y sedd som en vektor är en linjärkombination av basvektorerna/kolonnmatriserna i A. Det enda sättet att konstruera $\overline{0}$ är den triviala lösningen, vilket innebär att $AX = 0$ endast har lösningen $X = 0$.

□

Exempel 7.19. Låt oss se på sambanden mer explicit och öva på omvandlingar mellan representationerna. "A:s kolonnvektorer är en bas i n dimensioner" innebär att vi kan skriva (blockmatriser)

$$A = \left(A_1\, A_2 \ldots A_n \right)$$

med kolonnmatriser $A_i = (a\, b\, c\, ...)^T$, eller om man så vill vektorer i vektorrepresentation $\overline{A}_i = (a,\, b,\, c, ...)$. Att vektorer är linjärt oberoende innebär att

$$\lambda_1\overline{A}_1 + \lambda_2\overline{A}_2 + ...\lambda_n\overline{A}_n = \overline{0}$$

har endast den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Men detta uttryck med vektorer kan skrivas på vektorform

(7.6.1)

$$\lambda_1 \left(a_{11},\, a_{12}, ...,\, a_{1n}\right) + \lambda_2 \left(a_{21},\, a_{22}, ...,\, a_{2n}\right) + ... + \lambda_n \left(a_{n1},\, a_{n2}, ...,\, a_{nn}\right) = (0,\, 0, ...,\, 0)$$

som i sin tur med kolonnmatriser kan skrivas

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

som är ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + ... + \lambda_n a_{n1} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + ... + \lambda_n a_{n2} &= 0 \\ \vdots \vdots & \vdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + ... + \lambda_n a_{nn} &= 0 \end{aligned}$$

vilket kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.6.2}$$

med endast triviala lösningar.

Exempel 7.20. Vi hoppar runt ytterligare lite i begreppen och termerna för att öva att skriva med olika representationer. Att A:s kolonnvektorer är en bas innebär att med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

så är $\overline{e}_1 = (1, 2, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 1)$ och $\overline{e}_3 = (1, 0, 2)$ basvektorer. Föreställ dig också dessa 3 kolonner i matrisen som 3 geometriska vektorer i rummet. För att de ska vara en bas måste de spänna upp de 3 dimensionerna. För att de ska kunna göra detta måste de vara linjärt oberoende. Att vektorer är linjärt oberoende innebär att $\lambda_1 \overline{e}_1 + \lambda_2 \overline{e}_2 + \lambda_3 \overline{e}_3 = \overline{0}$ (med endast den triviala lösningen) vilket kan skrivas

$$\lambda_1 (1, 2, 0) + \lambda_2 (0, 1, 1) + \lambda_3 (1, 0, 2) = 0$$

(som kan ses som frågan: hur mycket, λ_i, ska jag ta av varje basvektor och sätta ihop i en linjärkombination för att få nollvektorn) vilket i sin tur ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 2 &= 0 \end{aligned}$$

som kan med matrisers räkneregler skrivas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs.

$$A\lambda = 0.$$

Löser vi ekvationssystemet erhålls naturligtvis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. När vi diskuterat linjärt oberoende användes beteckningen λ_1, λ_2 o.s.v. För koordinater användes x_1, x_2 o.s.v. Om nu $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ och $\overline{e}_3$ är basvektorer så kan varje annan vektor i rummet skrivas som

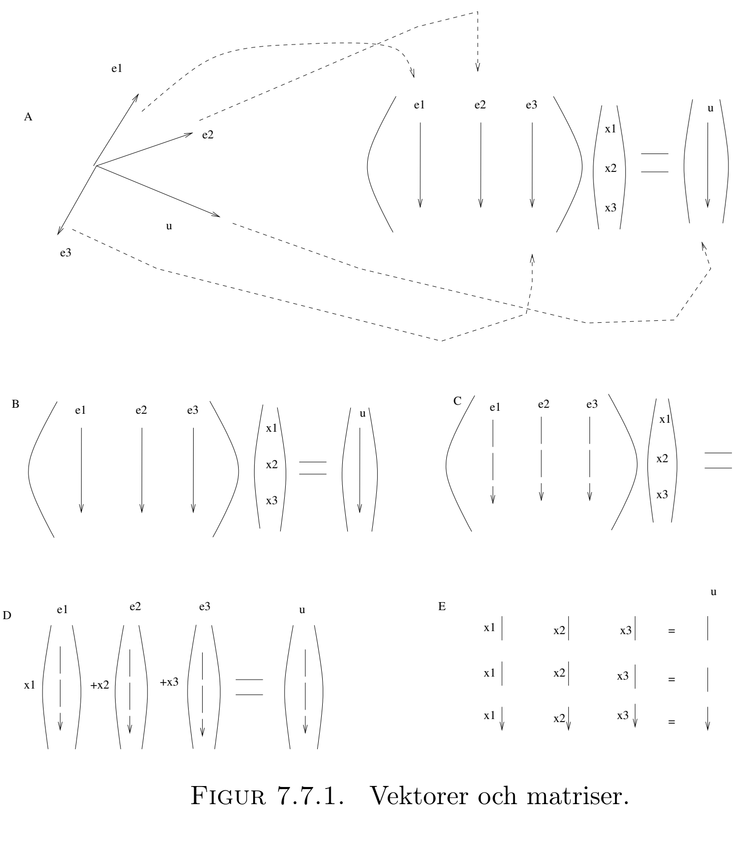
$$\overline{y} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2 + x_3 \overline{e}_3.$$

Denna ekvation ska vara lösbar för varje $\overline{y}$ då $\overline{e}_i$ utgör en bas; varje vektor $\overline{y}$ ska kunna skrivas som en linjärkombination av basvektorerna; om de tre basvektorerna är linjärt oberoende i 3 dimensioner så kommer den fjärde vektorn $\overline{y}$ automatiskt att vara en linjärt beroende vektor. Motsvarande påstående i matrisform har då icke-triviala lösningar. Frågan om ett ekvationssystems lösningar kan omformuleras till frågan om hur ett antal kolonnvektorer ska sättas samman för att erhålla en speciell vektor $\overline{y}$.

7.7. En artistisk syn

Suggestion.

En artistisk och grafisk och förmodligen suggestiv bild av kopplingen mellan geometriska vektorer och matriser ges av figur 7.7.1. Tänk på figuren i 3 dimensioner. A illustrerar hur de geometriska vektorerna associeras med kolonner i matrisen. B visar enbart matriser; här kan e1, e2, och e3 associeras till blockmatriser i kolonnform vilket framställs i D. I C är pilarna symboliskt delade i 3 delar eftersom ekvationssystemet är komponentvis. Ekvationssystemet framställs i E. Fyll själv i den artistiska framställningen genom att använda den på något exempel med basvektorer i 3 dimensioner.



FIGUR 7.7.1. Vektorer och matriser.

7.8. Invers matris

Den matris som som gör gjorda saker ogjorda.

Vi börjar med att jämföra med tal och hur vi löser ekvationen,

$$7x = 12.$$

För att lösa den kan vi multiplicera med $1/7 = 7^{-1}$. Det skrivs som

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} \cdot 7x &= \frac{1}{7} \cdot 12 \\ &\Leftrightarrow \\ x &= 12/7 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 7^{-1} \cdot 7x &= 7^{-1} \cdot 12 \\ &\Leftrightarrow \\ x &= 7^{-1} \cdot 12 \end{aligned}$$

Talet 7^{-1} är inversen till talet 7 vid multiplikation. Inversen till ett tal a vid multiplikation definieras som $a^{-1} = 1/a$ för reella tal; ej 0. Allmänt löser vi ekvationen $ax = y$ genom $a^{-1}ax = a^{-1}y$ som är $x = a^{-1}y$. Produkten av de två talen$a$ och a^{-1} är 1: $a^{-1}a^1 = a^{-1+1} = a^0 = 1$. Dessa *symboler* flyttas över till matriser ungefär på samma sätt som vid gjorde med plustecknet för addition av tal; det är suggestivt att använda samma symboler.

Begreppet invers kopplas till att 'gå tillbaka', 'göra samma sak fast omvänt'. Matematiskt kan vi säga att om a utförs först och därefter dess invers a^{-1} så är resultatet samma som om inget utförts. Om a betecknar ett tal så gäller att $a^{-1}a = 1$, ettan visar att man är tillbaka eller att inget förändras; ettan är identitet vid multiplikation. Talet 1 kan ses som det tal som avbildar ett tal på sig själv (vid multiplikation): $1 \cdot 5 = 5$. I funktionsanalysen finns motsvarande behov och motsvarande beteckningar. Vi börjar exempelvis med talet x , vi beräknar sinus för det: $\sin(x)$. Och om vi nu vill omintetgöra detta så utförs inversen till sinus och vi får tillbaka x . Beteckningen för invers är vald med tanke på att vara suggestiv, så beteckningen är -1 som 'exponent', det är dock ingen exponentiering av ett tal men suggererar oss till att förstå räknereglerna. Inversen betecknas $\sin^{-1}(x)$, vilket inte är $(\sin(x))^{-1} = 1/\sin(x)$. I funktionsanalysen gällde allmänt för avbildningar att en avbildning betecknades f och dess invers betecknas f^{-1}. Att utföra f och därefter f^{-1} skrevs $f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = x$. Som exempel kan vi ta $f(x) = 2x + 3$, $y = 2x + 3$, $x = (y - 3)/2$ så inversen kan skrivas $f^{-1}(x) = x/2 - 3/2$. Observera att $f^{-1}(x) \neq 1/f(x) = 1/(2x + 3)$. Vi ser nu hur detta symbolsystem används för inverser för matriser.

För ett ekvationssystem gäller med matrisbeteckningar

$$AX = Y.$$

För att lösa ekvationssystemet behövs en invers till A, beteckna den A_V^{-1}, där index V står för vänster eftersom matrismultiplikation *inte är kommutativ.* Vänsterinversen bör ha egenskapen, symboliskt, att $A_V^{-1}A = 1$, jämför $f^{-1} \circ f = 1$. Vad är då 1 i matrissammanhang? 'Ettan' har egenskapen att avbilda något utan att förändra det; att avbilda något på sig själv: $1 \cdot 5 = 5$. Vi söker en matris som om den multipliceras med en annan matris så ändrar den inte matrisen. En sådan matris känner vi och den har utseendet (för 5×5)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

och betecknas I. Att den ser ut så här framgår av 7.5.

Exempel 7.21. Ett exempel på *identitetsmatris* för höger sida för en icke-kvadratisk matris,

$$\begin{pmatrix} 1&0&2 \\ 3&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&2 \\ 3&1&1 \end{pmatrix},$$

naturligtvis är den inte identitetsmatris ('etta') från vänster sida eftersom multiplikationen inte är definierad då. Vi har även att

$$\begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&2 \\ 3&1&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&2 \\ 3&1&1 \end{pmatrix}.$$

För en *kvadratisk* matris A gäller att den sägs vara inverterbar om kraven

$$A^{-1}A = I$$

och

$$AA^{-1} = I$$

är uppfyllda. Dock behövs inte båda undersökas eftersom man kan visa att om den ena är uppfylld så är också den andra uppfylld. Dessutom är den entydigt bestämd.

Exempel 7.22. Beräkna vänster-inversen till

$$\begin{pmatrix} 1&0 \\ 2&-1 \end{pmatrix}.$$

Vi ställer upp som vänsterinvers en obestämd matris med elementen a, b, c, d.

$$\begin{pmatrix} a&b \\ c&d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0 \\ 2&-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}$$

Vilket ger oss att

$$\begin{pmatrix} a+2b & -b \\ c+2d & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}$$

så att $b = 0$; $a = 1$; $d = -1$; $c - 2 = 0$, $c = 2$. Således är vänster-inversen

$$\begin{pmatrix} 1&0 \\ 2&-1 \end{pmatrix},$$

den har sig själv som vänster-invers. Och naturligtvis har den en högerinvers.

Exempel 7.23. En matris kan ha flera höger eller vänster inverser, A har här ett oändligt antal högerinverser,

$$AA_H^{-1} = \begin{pmatrix} 1&2&0 \\ 2&5&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5&-2 \\ -2&1 \\ a&b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}.$$

Högerinverserna är oberoende av värdena på a och b. Men då kan inte A ha någon vänsterinvers. Observera att i exemplet är storleken på A och A_H^{-1} inte lika, ej heller har någon av dem samma storlek som I.

7.11 Övning 7.11. Visa genom att ansätta en matris A_V^{-1} i exempel 7.23 att A inte kan ha en vänsterinvers.

Vi kan sammanfatta genomgången av inverser på följande sätt:

- Inverser för matriser definieras utifrån 'ettan'.
- Eftersom matrismultiplikation inte är kommutativ måste vi vara öppna för höger- respektive vänsterinverser.
- En matris kan ha flera högerinverser. En matris kan ha flera vänsterinverser.

- Om en kvadratisk matris har både höger- och vänsterinvers så är de lika,
- och den sägs vara inverterbar,
- och inversen är i så fall kvadratisk,
- och det finns endast en invers.

Följande genvägar är bra att veta.

Teorem 7.4. *Räknelagar*

(1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
(2) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$
(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, observera den ändrade ordningen

Bevis.

(1) Det är frågan om att tolka innebörden av $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Inledningsvis tolkas den som att A^{-1} är inversen till A. Men de kan också tolkas som att vi har inversen till A^{-1} , dvs. $\left(A^{-1}\right)^{-1}$vilket då är A.
(2) Börjar med en ingång som kan skrivas på två sätt, eftersom ingången är lika är de två skrivsätten lika.

$$I = I^T = \left(A^{-1}A\right)^T = A^T\left(A^{-1}\right)^T$$

där sista likheten ges av en tidigare sats om att $(AB)^T = B^TA^T$. En gång till men vi väljer en annan ordning:

$$I = I^T = \left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T A^T$$

dvs. inversen till A^T för både höger och vänster är $\left(A^{-1}\right)^T$.
(3) Vi ska visa att inversen till AB som är $(AB)^{-1}$ kan skrivas $B^{-1}A^{-1}$. Vi gör det genom att multiplicera dem med varandra: $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)$ och från både vänster och höger.

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

således en högerinvers till AB. Andra sidan.

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

således uppfyller den kraven på en invers.

□

ÖVNING 7.12. Nummer 3 kan tyckas konstig men rita mängd-diagram för de två avbildningarna och tänk på att ABX är en sammansättning av två avbildningar; först utförs avbildning B på elementen i X sedan avbildning A. Eller så sätter man samman AB till en matris C. Hur ska du göra för att 'komma tillbaka'? Rita mängder för de olika avbildningarna. 7.12

EXEMPEL 7.24. Vid ekvationslösning och algebra uppkommer en del nya saker att ta hänsyn till. Lös ekvationen $AXB = Y$

$$\begin{aligned}
AXB &= Y \\
&\Leftrightarrow \\
A^{-1}AXB &= A^{-1}Y \\
&\Leftrightarrow \\
IXB &= A^{-1}Y \\
&\Leftrightarrow \\
XB &= A^{-1}Y \\
&\Leftrightarrow \\
XBB^{-1} &= A^{-1}YB^{-1} \\
&\Leftrightarrow \\
XI &= A^{-1}YB^{-1} \\
&\Leftrightarrow \\
X &= A^{-1}YB^{-1}
\end{aligned}$$

ANMÄRKNING 7.5. Dessutom måste rader och kolonner passa med varandra, vilket inte syns direkt i de algebraiska uttrycken.

EXEMPEL 7.25. Beräkning av invers. Lös ett ekvationssystem med hjälp av Gausselimination. Notera de radoperationer du gör och skriv den matris som utför den operation M_i som du gjort för hand (matrisen multipliceras således från vänster). Multiplicera ihop dessa, den första operationen längst till höger på vänster sida om, den sista längst till vänster (använd datorstöd). Kalla denna matris $G = M_p...M_3M_2M_1$. Konstruera koefficientmatrisen från ekvationssystemet och beräkna inversen (datorstöd) till denna, kalla den D. Jämför G och D. Detta leder till en lång beräkning, men den är endast till för att illustrera vad en invers är; inget du ska upprepa själv.

Vi väljer att lösa

$$\begin{array}{rcl}
x + 2y + 3z &=& 0 \\
2x + 5y + 3z &=& 0 \\
x \qquad + 8z &=& 0
\end{array}.$$

Koefficientmatrisen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Utför $-2\,(1) + (2)$ och $-\,(1) + (3)$ på enhetsmatrisen (som lagrar beräkningen och sedan kan utföra den som en operation)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och vi har på koefficientmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Utför $2\,(2) + (3)$ på enhetsmatrisen

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

och på koefficientmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi vill ha 1:or på diagonalen så de obekanta x, y, z är explicita. Vi utför $-3\,(3)+(2)$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och erhåller

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och slutligen $3\,(3) + (1)$ samt $-2\,(2) + (1)$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

då har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och vi utför $-\,(3)$ genom

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

så att vi får, äntligen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi multiplicerar ihop våra matriser

$$\begin{aligned} &M_5 M_4 M_3 M_2 M_1 = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Och denna är inversen till den ursprungliga matrisen. Inversen består av de radoperationer som gör att vi löste ekvationssystemet. Vi har således

$$\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Med datorstöd beräknas direkt inversen till koefficientmatrisen för ekvationssystemet och samma invers som ovan erhålls.

Exempel 7.26. Föregående uppgift tog en del tid och beräkningarna blir långa. Praktiskt beräknas inversen genom att bokföra dubbelt från början. Om kolonnvektorerna är linjärt oberoende så kan varje vektor i rummet skrivas som en linjärkombination, uttryckt med matriser är det ekvationssystemet $Y = AX$.

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 = & y_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 = & \quad y_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 = & \qquad y_3 \end{array}$$

som när den löses fullständigt överförs på formen

$$\begin{array}{lll} x_1 & & = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 \\ & x_2 & = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 \\ & \quad x_3 & = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 \end{array}$$

Detta kan bokföras genom att arbeta på uppställningen (för ett konkret exempel):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Där högra delen representerar y-sidan. Arbeta precis som tidigare med vänster del, gör samtidigt samma operationer på höger del. När du har erhållit *enhetsmatrisen* i vänster del så ska du ha inversen i höger del. Du har noterat alla operationer i enhetsmatrisen, på samma sätt som i exempel 7.25.

Exempel 7.27. Vi bestämmer inversen till matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

genom att konstruera en enhetsmatris i vänster del av

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Utför $(2) + (3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$0,5\,(3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{array}\right),$$

$-(3) + (2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{array}\right),$$

och slutligen $-(2)+(1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-0,5&0,5\\ 0&1&0&0&0,5&-0,5\\ 0&0&1&0&0,5&0,5 \end{array}\right)$$

så inversen är

$$\begin{pmatrix} 1&-0,5&0,5\\ 0&0,5&-0,5\\ 0&0,5&0,5 \end{pmatrix}$$

eller

$$M^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2&-1&1\\ 0&1&-1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}.$$

Denna invers kan nu användas för att lösa ekvationssystem som utgår från matrisen M, tex.

$$\begin{aligned} x+y\quad\; &= 2\\ y+z &= 0.\\ -y+z &= 1 \end{aligned}$$

Systemet kan skrivas på formen $MX=b$ och har lösningen $M^{-1}MX=M^{-1}b$ eller $X=M^{-1}b$ som kan skrivas

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2&-1&1\\ 0&1&-1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

och vi erhåller

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}$$

så att $x=5/2$, $y=-1/2$, $z=1/2$. Inversen kan användas ihop med olika högerled.

7.13 Övning 7.13. Beräkna inversen till matrisen, A, nedan.

$$A=\begin{pmatrix} -1&-1&0\\ 0&1&2\\ 0&-1&1 \end{pmatrix}$$

Använd inversen för att lösa systemet $AX=b$ där $b^T=(1\ 2\ -1)$.

7.14 Övning 7.14. Visa att matriser på formen

$$A=\begin{pmatrix} a_1&b_1&0\\ a_2&b_2&0\\ a_3&b_3&0 \end{pmatrix}$$

inte kan ha en invers. En matris som inte kan ha en invers kallas för singulär.

7.8.1. Inverser av kvadratiska matriser. *Vi begränsar oss till kvadratiska matriser.*

Nästa sats vi behöver är att 7.3 kopplas ihop med existensen av inversen. I regel görs detta i flera steg. Ett steg innebär att man visar att för en kvadratisk matris A gäller:

(1) Om A har en vänsterinvers så har ekvationssystemet $AX = 0$ endast den triviala lösningen $X = 0$.
(2) Om ekvationssystemet $AX = Y$ är lösbart för varje Y så har A högerinvers.

1 innebär att kolonnvektorerna i matrisen A är linjärt oberoende; endast obekanta (koordinater) i ekvationssystemet som är 0; $X = 0$. 2 innebär att de är en bas; de kan kombineras till vilken annan vektor som helst t.ex. kolonnvektorn Y. Vi kan säga att det är 'samma' påstående. Men vi ska uttala oss om matrisen (koefficienter som är 0 samt bas hänför sig till vektorer och linjärkombinationer av dem) och måste finna en koppling dit. På så sätt görs sats 7.3 ekvivalent med att A är inverterbar. Vi har nu för kvadratiska matriser 4 ekvivalenta påståenden som utgör en ny utvidgad sats:

(1) A:s kolonnmatriser är en bas i n dimensioner.
(2) $AX = 0$ har endast den triviala lösningen $X = 0$. (linjärt oberoende basvektorer i n dimensioner)
(3) $AX = Y$ är lösbar för alla Y. (alla vektorer kan skrivas med hjälp av basvektorerna, kolonnvektorn Y är linjärt beroende, en linjärkombination av kolonnvektorerna i A.)
(4) A är inverterbar.

Ett litet viktigt faktum återstår och det är: A är inverterbar $\Leftrightarrow$ A^T är inverterbar. Vilket betyder att både rader och kolonner är basvektorer. För att se detta kan vi utgå från $AA^{-1} = I$ och transponera båda leden $\left(AA^{-1}\right)^T = I$ som enligt räknereglerna ger $\left(A^{-1}\right)^T A^T = I$ vilket innebär att inversen till A^T är $\left(A^{-1}\right)^T$ så om A är inverterbar så existerar A^{-1} och även $\left(A^{-1}\right)^T$ och då har vi en invers till A^T. Vi kan också studera $A^{-1}A = I$. Detta i sin tur innebär att A^T:s kolonnmatriser är en bas i n dimensioner, vilket i sin tur är att A:s radmatriser är en bas. Både rader och kolonner i A är en bas.

7.9. Basbyte

Vi gör basbyte helt formellt. Repetera 2.13 och notera speciellt mönstret som uppträder vid basbyte.

TEOREM 7.5. *Låt $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ och $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n$ vara två baser i $\mathbb{R}^n$. Relationen mellan dessa ges av (i tre dimensioner)*

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= s_{11}\overline{e}_1 + s_{21}\overline{e}_2 + s_{31}\overline{e}_3 \\ \overline{e}'_2 &= s_{12}\overline{e}_1 + s_{22}\overline{e}_2 + s_{32}\overline{e}_3\,, \quad E' = S^T E \text{ med } S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \\ \overline{e}'_3 &= s_{13}\overline{e}_1 + s_{23}\overline{e}_2 + s_{33}\overline{e}_3 \end{aligned} \tag{7.9.1}$$

Avbildningsmatrisen S är en matris som har kolonner som vektorer. $\overline{e}'_1 = (s_{11}, s_{21}, s_{31})$ utgör en kolonn. Om en vektor $\overline{u}$ har koordinatframställningen

$$\overline{u} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2 + x'_3\overline{e}'_3$$

då gäller att (enligt tidigare: byt primat mot oprimat och rader mot kolonner)

$$X = SX'$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Sedan kan man ofta vara intresserad av att beräkna $X' = S^{-1}X$ (lösa ekvationssystemet.

Anmärkning 7.6. Observera att teoremet inte kräver vare sig ortogonala eller normerade vektorer, endast att de är baser. Vad som händer då de är ortonormerade diskuteras senare.

Anmärkning 7.7. Om vi försöker se det bildligt (och formellt sett oegentligt) så är koordinaterna för $\overline{e}'_1$, $\overline{e}'_2$, $\overline{e}'_3$ kolonner i matrisen, vilket artistiskt kan skrivas

$$S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \overline{e}'_1 & \overline{e}'_2 & \overline{e}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.$$

I teoremet finns det något otydliga uttrycket $E' = S^T E$. Det är oegentligt eftersom det skulle innebära

$$\begin{pmatrix} \overline{e}'_1 \\ \overline{e}'_2 \\ \overline{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \overline{e}_3 \end{pmatrix}$$

med vektorer som element i kolonnmatriserna. Räknereglerna ger rätt samband om vektorerna behandlas som vanliga reella tal. Skrivsättet med vektorer som element i matrisen kan kännas oegentligt men kan motiveras genom att tolka $\overline{e}'_1$ osv. som blockmatriser.

Ovanstående gällde för en bas, inget sagt om att den ska vara ortonormerad. Om basen är ortonormerad gäller i allmänhet att

$$A^{-1} = A^T$$

vilket ger i vårt fall

$$X^{'} = S^T X,$$

vilket är samma relation som i

$$E' = S^T E.$$

Det innebär att de två uttrycken är strukturellt 'lika', symbolerna $\overline{e}'_1$ osv. ska bytas mot x'_1 och $\overline{e}_1$ mot x_1 osv.

Anmärkning 7.8. Ge noga akt på hur matriserna definieras i teoremet. I princip så används transponatet av den matris man så att säga ser som mönster i ekvationssystemet för basbytet. Anledningen till vad som kan förefalla 'konstig' indexering i ekvationssystemet i teoremet framgår av vad som händer med indexen i exempel 7.19. I uttryck 7.6.1 har vi ett sätt att indexera som kan kännas naturligt såsom vektorer skrivs och i 7.6.2 ses hur indexen hamnar 'fel'. Vi inför helt enkelt konventionen att vektorerna ska placeras som kolonnvektorer med korrekt numrering: $a_{\text{rad kolonn}} = a_{ij}$.

Exempel 7.28. Bestäm sambandet mellan koordinaterna i de två baserna

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 \\ \overline{e}'_2 &= -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \end{aligned} \tag{7.9.2}$$

S definieras som (vektorerna $\overline{e}'_1 = (2, 3)$ och $\overline{e}'_2 = (-1, 1)$ sätts som kolonner)

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

och då gäller att

$$X = SX' \text{ innebär } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Vi har bytt plats på rader och kolonner och primat och oprimat jämfört med 7.9.2. Detta brukar ses som en minnesregel.

Om vi nu vill ha X' uttryckt i X så multiplicerar vi $X = SX'$ med S^{-1} från vänster

$$S^{-1}X = S^{-1}SX' = IX' = X'$$

dvs. vi behöver inversen som är

$$S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

så att

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Övning 7.15. Bestäm sambandet mellan koordinaterna i de två baserna 7.15

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \\ \overline{e}'_2 &= -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \end{aligned}$$

på formen $X = SX'$. Bestäm även S^{-1} så att $X' = S^{-1}X$. *Beskriv också proceduren.*

Definition 7.2. En matris M sägs vara ortogonal om dess kolonnvektorer utgör en ortonormerad bas. (språkförbistring)

För matriser med ortogonala och normerade kolonnvektorer gäller:

Teorem 7.6. *Följande påståenden är ekvivalenta:*

(1) kolonnvektorerna är ortonormerade
(2) radvektorerna är ortonormerade
(3) $A^T A = I$
(4) $AA^T = I$
(5) $A^{-1} = A^T$

BEVIS. Det intressanta är t.e.x. relationen mellan nummer 3 och nummer 1. Om kolonnvektorerna är ortogonala och normerade och vi betecknar en *kolonnvektor* (blockmatris) i med a_i så har vi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_1\, a_2 ... a_n) \text{ och då gäller också } A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

och matrisprodukten är

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1 \bullet a_1 & a_1 \bullet a_2 & \cdots & a_1 \bullet a_n \\ a_2 \bullet a_1 & a_2 \bullet a_2 & \cdots & a_2 \bullet a_n \\ \vdots & & & \\ a_n \bullet a_1 & a_n \bullet a_2 & \cdots & a_n \bullet a_n \end{pmatrix}$$

För att denna matris ska vara I så är det samma krav som på skalärprodukt mellan vektorer som då utgörs av kolonner från matrisen: $a_1 \bullet a_1 = 1$ (skalärprodukten mellan vektorerna a_1 och a_1), $a_1 \bullet a_2 = 0$ o.s.v. □

EXEMPEL 7.29. För en avbildningsmatris som har ortogonala och normerade kolonnvektorer (eller radvektorer) blir beräkningarna enklare vid basbyte. I startläget har vi $E' = S^T E$ som ger oss enligt tidigare $X = SX'$. Om vi söker X' som funktion av X erhåller vi $S^{-1}X = S^{-1}SX' \Leftrightarrow S^T X = S^T SX'$ eftersom $S^{-1} = S^T$, som ger oss $X' = S^T X$, dvs. samma matris som för $E' = S^T E$. Det gäller även att $E = SE'$ ty $SS^T = SS^{-1} = I$.

Sammanfattning: $X = SX'$, $E = SE'$, $X' = S^T X$, $E' = S^T E$. Det gäller också att hålla reda på definitionen av S. Vi studerar basbytet

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{e}_3 \\ \overline{e}'_2 &= \frac{2}{\sqrt{5}}\overline{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\overline{e}_3 \\ \overline{e}'_3 &= \frac{1}{\sqrt{30}}\overline{e}_1 + \frac{5}{\sqrt{30}}\overline{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{30}}\overline{e}_3 \end{aligned}$$

som har avbildningsmatrisen S med vektorerna som kolonner

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Denna ger oss $X = SX'$. Vi chansar på ortogonalitet och visar det genom att beräkna $S^T S$ (med referens till Teorem 7.6) och får det till I. Vi vet nu också att i stället för att beräkna inversen S^{-1} för att erhålla $X' = S^{-1}X$ så kan vi använda $X' = S^T X$ vilket är betydligt lättare.

7.16 ÖVNING 7.16. Visa att avbildningsmatrisen är ortonormerad. Ange förhållandet mellan X och X'.

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= \frac{2}{3}\overline{e}_1 + \frac{1}{3}\overline{e}_2 + \frac{2}{3}\overline{e}_3 \\ \overline{e}'_2 &= -\frac{2}{3}\overline{e}_1 + \frac{2}{3}\overline{e}_2 + \frac{1}{3}\overline{e}_3 \\ \overline{e}'_3 &= \frac{1}{3}\overline{e}_1 + \frac{2}{3}\overline{e}_2 - \frac{2}{3}\overline{e}_3 \end{aligned}$$

ÖVNING 7.17. Bestäm transponaten och kontrollera sedan om matriserna är ortogonala. 7.17

$$(1)\quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ÖVNING 7.18. Bestäm a och b så att matrisen är ortonormerad. 7.18

$$\begin{pmatrix} 4/5 & a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

ÖVNING 7.19. Bestäm sambandet mellan koordinaterna i de två ortonormerade baserna 7.19

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= \tfrac{\sqrt{3}\overline{e}_1}{2} + \tfrac{\overline{e}_2}{2} \\ \overline{e}'_2 &= -\tfrac{\overline{e}_1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}\overline{e}_2}{2} \end{aligned}$$

på formen $X = SX'$. Bestäm även S^{-1} så att $X' = S^{-1}X$. Visa också att $|\overline{e}'_1| = |\overline{e}'_2| = 1$ och $\overline{e}'_1 \bullet \overline{e}'_2 = 0$. *Beskriv också proceduren.*

7.10. Facit Övningar

7.1 $AB = 0$,

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

och $AC = \begin{pmatrix} -5 & -3\,5 \end{pmatrix}$,

$$C + D = \begin{pmatrix} 2\,3 & 5 \\ 0\,0 & 4 \\ 3\,2 & -1 \end{pmatrix}$$

och

$$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 0\,1 & 1 \\ 1\,1 & 2 \\ 3\,2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\,1 & 1 \\ 1\,1 & 2 \\ 3\,2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,3 & 0 \\ 7\,6 & -1 \\ -4\,1 & 11 \end{pmatrix}.$$

7.2 Vänster. Matrisen från vänster måste har lika många kolonner som den givna matrisen har rader: $(m, 4)$ där m är ett naturligt tal. Från höger gäller att matrisen har storleken$(2, n)$.

$$\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 4\,3 \\ 5\,6 \\ 8\,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,0 & -1\,1\,3\,4\,0\,2 & 0 \\ 1\,0\,1 & 2\,1\,3\,0\,1\,1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2\,2\,3 & -2 \\ 7 & 8 & -3 \\ 11 & 10 & \\ 15 & 16\,7 & -7 \end{pmatrix}$$

7.3 Ingen kommentar.

7.4 Ingen kommentar.

7.5 Vi behöver $(O)_{13}$, $(O)_{23}$ och $(O)_{33}$, dvs. en matris med ettor i 3:e kolonnen,

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \\ 7\,8\,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0\,1+2+3 \\ 0\,0\,4+5+6 \\ 0\,0\,7+8+9 \end{pmatrix}$$

7.6 Exempel. Enligt tidigare har vi en matris som avbildar kolonn 1 på kolonn 2 och en som avbildar kolonn 2 på kolonn 1, adderar vi dessa får vi

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix}.$$

Denna byter kolonn 1 och 2

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \\ 7\,8\,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,1\,0 \\ 5\,4\,0 \\ 8\,7\,0 \end{pmatrix}.$$

Och från vänster

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \\ 7\,8\,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,5\,6 \\ 1\,2\,3 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix},$$

där den byter raderna 1 och 2.

7.7 Om vi applicerar

$$\begin{pmatrix} 2\,2\,3 \\ 1\,1\,1 \\ -1\,2\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 3\,0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9\,2\,3 \\ 1+3\,1\,1 \\ -1+0\,2\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\,2\,3 \\ 4\,1\,1 \\ -1\,2\,0 \end{pmatrix}$$

från höger i stället så utför den 3 gånger kolonn 3 adderas till kolonn 1.

7.8 Vi kan utgår från enhetsmatrisen: -2 gånger rad 1 adderas till rad 2 ger

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ -2\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

7.9 Vi utgår från enhetsmatrisen. Radoperationer görs från vänster och kolonnoperationer från höger. Rad 2 multipliceras med 3 och adderas till rad 3 är

$$V = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,3\,1 \end{pmatrix}$$

samt för kolonnerna

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1\,0 \\ 0 & 1\,0 \\ 0 & 0\,1 \end{pmatrix}$$

så att (matrismultiplikation är associativ)

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,3\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\,2\,3 \\ 1\,1\,1 \\ -1\,2\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1\,0 \\ 0 & 1\,0 \\ 0 & 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,3\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\,0\,3 \\ 1\,0\,1 \\ -1\,3\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,0\,3 \\ 1\,0\,1 \\ 2\,3\,3 \end{pmatrix}.$$

7.10$BA = (BA_1\ BA_2\ BA_3)$. Höger led

$$BA_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$BA_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$BA_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

som sätts samman till

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Och för vänster led, utan blockmatriser erhåller vi samma.

7.11 $\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,0 \\ 2\,5\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b\,2a+5b\,0 \\ c+2d\,2c+5d\,0 \end{pmatrix}$ Vi ser att vi inte kan få ettor på 'diagonalen', vi har 0 i nedre högra hörnet. Att utvidga till 3×2 förändrar inte detta: $\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \\ e\,f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,0 \\ 2\,5\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b\ 2a+5b\ 0 \\ c+2d\ 2c+5d\ 0 \\ e+2f\ 2e+5f\ 0 \end{pmatrix}$.

7.12 Om man ser det som en avbildning så betecknas tillbakavägen med $C^{-1} = (AB)^{-1}$. Eller så tar man avbildningarna en och en. Den senaste avbildningen A, om AB opererar på en kolonnvektor till höger, måste då utföras först, dvs. vi måste gå den tillbaka först: A^{-1} först. Därefter tas den avbildning som gjordes först, den blir nu sista steget tillbaka: B^{-1}. Den totala vägen tillbaka är $B^{-1}A^{-1}$ där den högra utförs först.

7.13 $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Lösningen ges av

$$\begin{aligned} AX &= b \\ A^{-1}AX &= A^{-1}b \\ X &= A^{-1}b \end{aligned}$$

som är

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -x - y \quad &= 1 \\ y + 2z &= 2 \\ -y + z &= -1 \end{aligned}$$

är $x = -7/3$, $y = 4/3$, $z = 1/3$.

7.14 Skriv matrisen utifrån kolonnvektorer som $\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{0}\right)$. Antag att vi har en invers matris C då gäller att $CA = C\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{0}\right) = \left(C\overline{a}\,C\overline{b}\,\overline{0}\right)$. Eftersom matrisen CA har 0 i hela högra kolonnen kan den inte vara enhetsmatrisen.

7.15

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

så $X = SX'$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Och

$$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.16Matrisen S i $X = SX'$ ges direkt av att placera koefficienterna i varje rad som kolonner,

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7.17 Ingen kommentar.

7.18 $(4/5)^2 + a^2 = 1$, $a^2 + b^2 = 1$, $4/5a + ab = 0$ blir kraven.

Ur den första erhålls $a^2 = 1 - 16/25 = 9/25$ så att $a = \pm 3/5$. Krav 3 ger oss

$$a\left(\frac{4}{5} + b\right) = 0$$

som innebär $a = 0$ och $b = -4/5$.

$a = \pm 3/5$ går med $b = -4/5$ i krav 2. Krav 2 har också lösningen $b = 4/5$ men det passar inte i krav 3. Lösnngarna är $a = 3/5$, $b = -4/5$ samt $a = -3/5$, $b = -4/5$.

7.19

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

och eftersom bytet är normerat har vi

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

så att $X' = S^T X$ att jämföra med $E' = S^T E$ som var given i uppgiften.

$$\begin{aligned} x_1' &= \tfrac{\sqrt{3}x_1}{2} + \tfrac{x_2}{2} \\ x_2' &= -\tfrac{x_1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}x_2}{2} \end{aligned}$$

7.11. Kapitelproblem

7.1 Välj 3 linjärt oberoende vektorer i 3 dimensioner; vi har således en bas. Tänk på dem som kolonnvektorer och konstruera ekvationssystem. Vilka högerled kan du välja? *Försök resonera allmänt kring ekvationssystemens konstruktion och lösningar utifrån vektorrepresentationen.*

7.2 Välj 3 linjärt beroende vektorer i 3 dimensioner. Tänk på dem som kolonnvektorer och konstruera ekvationssystem. Vilka högerled kan du välja? Dela upp det i två möjligheter, antingen spänner de upp ett plan eller en linje.

7.3 Undersök genom exempel att för de kvadratiska blockmatriserna A, B, C, D och A_1, B_1, C_1, D_1 med storleken 2×2 gäller att

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 + BC_1 & AB_1 + BD_1 \\ CA_1 + DC_1 & CB_1 + DD_1 \end{pmatrix}$$

dvs. att blockmatriserna följer räknereglerna som om de vore tal. *Att använda det du kan i en lite annorlunda situation.*

7.4 *Att använda det du kan i en lite annorlunda situation, igen.* En matris B sägs vara kvadratroten ur en matris A om det gäller att $BB = A$.

(a) Bestäm de två kvadratrötterna till

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Hur många kvadratrötter finns det till

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}?$$

7.12. Facit Kapitelproblem

7.1 Alla högerled är möjliga.

7.2 Vi börjar med 2 linjärt oberoende och konstruerar en som är en linjärkombination av dem. Vi bör då få ett plan och alla högerled som ligger i det planet innebär ett lösbart ekvationssystem. Exempelvis $(0, 1, 2)$ och $(1, 1, 0)$ och en linjärkombination $2\,(0, 1, 2)+3\,(1, 1, 0) = (3, 5, 4)$. Vi skapar ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,1\,3 \\ 1\,1\,5 \\ 2\,0\,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

och frågan är vilka värden kan y_i ha för att systemet ska vara lösbart. Vi tar inga genvägar utan löser systemet

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 + 3x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 + 5x_3 \\ y_3 &= 2x_1 + 4x_3 \end{aligned}$$

Eliminera $x_1$ur (3) med hjälp av (2), sedan använder vi (1) på (3).

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 + 3x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 + 5x_3 \\ y_3 - 2y_2 &= -2x_2 - 6x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 + 3x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 + 5x_3 \\ y_3 - 2y_2 + 2y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Värdena på högerledet måste uppfylla denna ekvation. Ekvationen beskriver ett plan. Notera att $(0, 1, 2) \times (1, 1, 0) = (-2, 2, -1) = -\,(2, -2, 1)$ vilket är en normal till planet $2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$. Om vektorerna endast spänner upp en linje har vi t.ex.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,2\,3 \\ 2\,4\,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_3 &= 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \end{aligned}$$

och $-2\,(2) + (3)$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_3 - 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

som är en linje. y värden måste ligga på denna linje. Linjen för högerledet, med $y_2 = t$, är $(0, t, 2t)$ vilket är samma riktning som kolonnvektorn $(0, 1, 2)$.

7.3 Ingen kommentar.

7.4

(a) Vi ställer upp

$$\begin{pmatrix} a\;b \\ c\;d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\;b \\ c\;d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,2 \\ 2\,2 \end{pmatrix}$$

som ger ekvationerna

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ekvationerna $ab + bd = 2 \Leftrightarrow b(a + d) = 2$ och $ac + dc = 2 \Leftrightarrow c(a + d) = 2$ innebär att $b = c$. Om $a = -d$ har de dock inga lösningar. I de två andra ekvationerna kan nu c ersättas med b och vi får $a^2 + bc = a^2 + b^2 = 2$ och $d^2 + bc = d^2 + b^2 = 2$, vilka medför att $a^2 = d^2$ så $a = \pm d$, men enligt tidigare går ej $a = -d$. Vi har sammanfattningsvis $a = d$ och $b = c$. Vi ser tillbaka på vårt ursprungliga system och uttrycker det enbart i b och d:

$$\begin{pmatrix} d^2+b^2 & 2bd \\ 2bd & d^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Från $2bd = 2$erhålls $b = 1/d$ som vi sätter in i den andra: $d^2 + b^2 = d^2 + (1/d)^2 = 2$. Vi multiplicerar med d^2 och får $d^4 - 2d^2 + 1 = 0$, vilken vi löser på samma sätt som en andragradsekvation

$$d^2 = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$$

som ger $d = \pm 1$. $d = 1$ ger $a = 1$ som ger $b = 1/d = 1$ och $c = 1$, alla 1:or. För $d = -1$ erhåller vi endast -1:or. Kvadrötterna är således

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

vilka kan testas genom en direkt räkning.

(b) Uttrycket

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ger ekvationerna

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= 5 \\ ab + bd &= 0 \\ ca + cd &= 0 \\ bc + d^2 &= 9 \end{aligned}$$

vilket ger oss $b(a + d) = 0$ och $c(a + d) = 0$ som innebär i) $b = 0$, $c = 0$, ii) $b = 0$, $a + d = 0$ iii) $c = 0$, $a + d = 0$ iv) $a + d = 0$. Vi använder dessa på $a^2 + bc = 5$ och $d^2 + bc = 9$. Exempelvis ger $b = 0$ och $c = 0$ att $a^2 = 5$ och $d^2 = 9$ med lösningarna $a = \pm\sqrt{5}$ samt $d = \pm 3$. De andra fallen ger inget mer. Således har vi 4 lösningar:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

KAPITEL 8

Linjära avbildningar

Linjära avbildningar från olika sammanhang.

8.1. Inledning

8.1.1. Från $\mathbb{R}^1$ till $\mathbb{R}^2$. I denna text används funktion och avbildning som synonymer. En funktion kan vara en funktion av *en* variabel och beräkna *ett* värde, som t.ex. skrivs: $y = f(x)$. f anger funktionens namn och x är en variabel som kan anta olika värden i definitionsmängden; de beräknade värdena y är en del av värdemängden. En funktion med två värden in och två värden ut kan skrivas $(y_1,\, y_2) = f\,(x_1,\, x_2)$. Om variablerna är reella tal är det en avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Om funktionen dessutom är en linjär funktion, fortfarande från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$, kan den i allmänhet skrivas som $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ och $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$, där a_{ij} är reella tal. Den linjära funktionen/avbildningen kan med hjälp av matriser skrivas som

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Själva *regeln* för hur funktionsvärdena ska beräknas kan således anges med en matris vid linjära funktioner, t.ex. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vi skriver för just denna avbildning

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

som med matrisbeteckningar kan skrivas $Y = FX$ där F är matrisen som anger funktionen, koefficientmatrisen. Beteckningen $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ är mer allmän än matrisbeteckningen $Y = FX$.

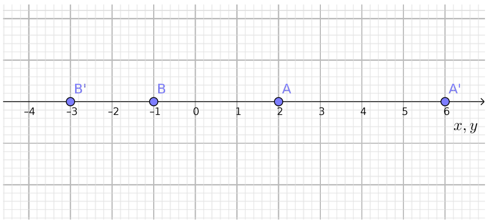
Koefficientmatrisen för den linjära avbildningen definierar avbildningen *helt* och kallas för avbildningsmatrisen. Avbildningen är från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ i detta exempel; två tal in och två tal ut. Vi kan också med mer vektor-lika beteckningar skriva exemplet $(y_1,\, y_2) = (2x_1 + 3x_2,\, 1x_1 + 0x_2)$.

Vi kan med hjälp av matriser inte bara hantera linjära avbildningar av typen $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, utan mer allmänt linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Matriser ger oss ett kompakt sätt att skriva en linjär avbildning i flera dimensioner. T.ex. en avbildning $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ som skrivs $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ och $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$, skrivs med matriser

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

där fokus helt är på matrisen med koefficienterna; vad precis variablerna heter är inte väsentligt för matematiken; endast matrisen behövs för att diskutera en linjär avbildning.

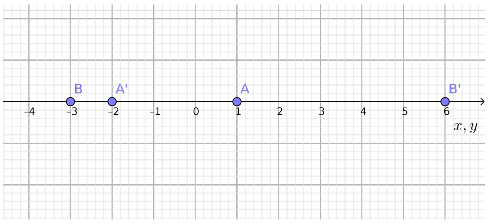
8.1.2. Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ jämfört med linjära avbildningar från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Linjära avbildningar från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ skrivs $y = ax$. Värdena till x representeras grafiskt av en axel, samma gäller för y-värdena. I figur 8.1.1 representeras den linjära avbildningen $y = 3x$ genom att $x = 2$, punkt A, och $x = -1$, punkt B avbildas på $y = 6$, punkt A', och $y = -3$, punkt B'. I envariabelanalysen är de två axlarna i regel placerade i rät vinkel mot varandra. Men eftersom vi nu ska arbeta med avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ hade vi behövt 4 koordinataxlar (x_1, x_2, y_1, y_2), så vi ändrar taktik och representerar x med en axel och y med en annan axel. Av bekvämlighet lägger vi dem ovanpå varandra.



FIGUR 8.1.1. Linjär avbildning representerad grafiskt genom två axlar. Axlarna är lagda ovanpå varandra. Den ena axeln är för x-värden, den andra är för y-värden: $y = 3x$.

När vi ser på avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ ska vi använda tal från ett plan, t.ex. x_1 och x_2, och avbilda dem till ett annat plan, t.ex. y_1 och y_2. Precis som tidigare studerar vi också delmängder, i detta fall delmängder av planet, t.ex. en cirkel, kvadrat eller triangel.

8.1 ÖVNING 8.1. Vilken linjär avbildning representeras grafiskt i figur 8.1.2. Punkten A avbildas på A' och B på B'.



FIGUR 8.1.2. En linjär avbildning $y = ax$; vad är a?

Om vi har en rektangel i $\mathbb{R}^2$ och utför en linjär avbildning på den t.ex. den tidigare diskuterade

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

vad sker med rektangeln? Vi hämtar x_1 och x_2 från de talpar som ingår i rektangeln och beräknar nya talpar. Studera en rektangel med hörn i $(-2, 1)$, $(1, 1)$, $(-2, -1)$ och $(1, -1)$. Vi utför den linjära avbildningen för varje punkt

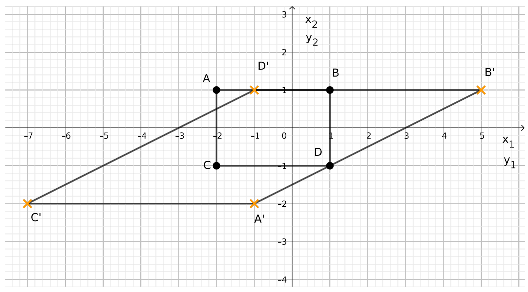
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

men alla kan göras på en gång

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser även att en punkt som $(1, 0)$ mellan B och D avbildas på segmentet mellan B'



FIGUR 8.1.3. Linjär avbildning från en delmängd av $\mathbb{R}^2$ till en delmängd av $\mathbb{R}^2$. Observera att det är 2 koordinatsystem.

och D': (2, 1). Observera att både originalet (definitionsmängden) och avbildningen (värdemängden) ritats tillsammans. Rektangeln $ABCD$ har axlarna x_1 och x_2 där värdena x_1 och x_2 hämtas från (samma beteckningar för enkelhetsskull). $A'B'C'D'$ har axlarna y_1 och y_2.

I detta kapitel ges exempel på linjära avbildningar som uppkommit i olika situationer.

8.2. Transformationer i 2D

Vi har betraktat en vektor som mängden av riktade sträckor med samma riktning och samma längd. En bunden vektor från (1, 2) till (3, 8) anger en förflyttning mellan dessa två punkter; vi startar med en punkt i (1, 2) som förflyttas längs en rät linje till (3, 8). Vektorn för förflyttningen är (3, 8) – (1, 2) = (2, 6). Vi kan samtidigt se detta som att vi har en ortsvektor (1, 2) och en (3, 8) och differensen mellan dem är förflyttningen.

Vi betraktar alla *punkter* i planet och betecknar dem $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Vad händer med dessa punkter då de multipliceras med matriser? Vi studerar olika typfall.

8.2.1. Reflektion, skjuvning, rotation. Matrisen

$$D_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ändrar koordinaten i x-led ty vi har

$$D_k X = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$$

så beroende på om $0 < k < 1$ eller $k > 1$ så kallas det för en kompression eller expansion; punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ har ändrat sin x-koordinat.

Reflektion av en punkt i x-axeln görs med matrisen $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ty $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$; reflektion av en punkt i y-axeln görs med $M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; reflektion av en punkt i linjen $y = x$, görs med $M_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Matrisen byter rad 1 till rad 2 och rad 2 till rad 1, dvs. byter x mot y.

En skjuvning (shear) av en punkt i x-riktningen ges av $S_x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. I denna skjuvning ändras x koordinaten i proportion till y-värdet. Exempelvis,

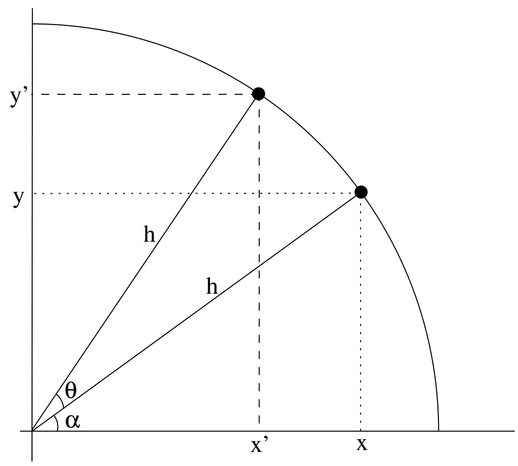
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix}.$$

Dilatation kallas det i detta sammanhang om en matris multipliceras med en skalär

$$k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

En moturs rotation av en punkt, i ett fixt koordinatsystem, ges av

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$



FIGUR 8.2.1. Punkt med koordinater (x, y) roteras moturs och erhåller koordinaterna (x', y').

Matrisen för rotation kan härledas ur figur 8.2.1. Vi har för de ursprungliga koordinaterna $x = h\cos(\alpha)$, $y = h\sin(\alpha)$. Vidare för den med vinkeln θ roterad moturs: $x' = h\cos(\alpha + \theta)$ och $y' = h\sin(\alpha + \theta)$. Uttrycken för x' och y' utvecklas med formlerna för summa av vinklar,

$$\begin{aligned} x' &= h\cos(\alpha + \theta) \\ &= h\left(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\right) \\ &= \{h\cos\alpha\}\cos\theta - \{h\sin\alpha\}\sin\theta \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta \end{aligned}$$

och på samma sätt för y'. Detta ger matrisen för rotation.

EXEMPEL 8.1. Matrisen för rotation i planet är

$$\begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix}.$$

Om vi vill rotera en punkt (1, 3) vinkeln 30° erhåller vi approximativt för de nya koordinaterna

$$\begin{pmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,634 \\ 3,098 \end{pmatrix}.$$

Övning 8.2. Matrisen 8.2

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kan ses om två transformationer eller en rotation, vilka kan de vara?

8.2.2. Translation. Men hur flyttar man en punkt en viss sträcka, en så kallad translation? Dilatationen är ingen translation. Dilatationen bibehåller inte avståndet mellan två punkter. En punkt vid $x = 1$ och en vid $x = 2$ ($y = 0$) (avståndet 1 mellan dem) avbildas, om den multipliceras med skalären 2, på $x = 2$ respektive $x = 4$ (avståndet 2). Om vi ser det som en förflyttning är förflyttningsvektorn $(2, 0) - (1, 0) = (1, 0)$ och efter det att de två punkterna multiplicerats med 2 så är förflyttningen $(4, 0) - (2, 0) = (2, 0)$ dvs. avståndet mellan punkterna har fördubblats. Så en dilatation är inte en translation. Frågan utmynnar i hur addition kan utföras med hjälp av matris multiplikation. Vi vill att *varje* punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avbildas t.ex. på $\begin{pmatrix} x+3 \\ y+4 \end{pmatrix}$, dvs. att x ändras med 3 och y med 4; en translation med 3 i x-led och 4 i y-led. Vi skriver vårt önskemål om att ha en matris M så att

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+4 \end{pmatrix}$$

speciellt ska detta gälla för $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

vilket inte är möjligt. Problemet löses genom införandet av så kallade *homogena* koordinater. Det innebär att en punkt har koordinaterna $(x,\ y,\ 1)$ i stället för (x, y); denna problematik stötte vi på i 7.5. Som exempel utgår vi från en triangel med hörn i (0, 0), (2, 0), (2, 4). Triangelns matris i homogena koordinater är

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vill flytta triangeln 3 x-enheter och 4 y-enheter, det gör vi med, utgående från enhetsmatrisen: 3 gånger rad 3 adderas till rad 1, 4 gånger rad 3 adderas till rad 2, vi multiplicerar från vänster.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

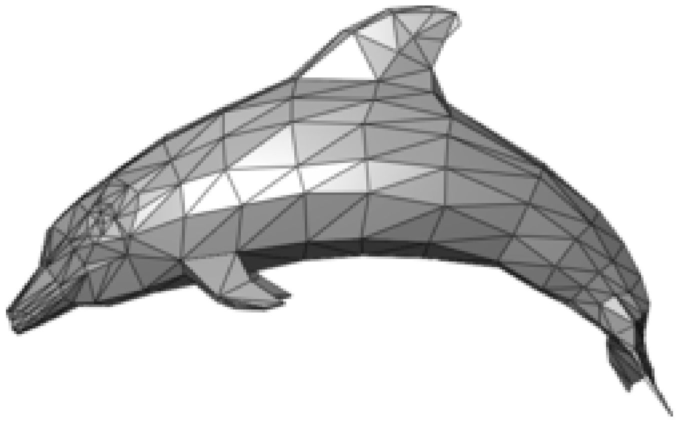
så

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning 8.1. Observera att om en *punkt* (2, 3) ska translateras så translateras *inte ortsvektorn* (2, 3). Det är skillnad mellan punkter och vektorer även om vi inte fördjupar oss i det.

Vi kan nu göra alla former av 'rörelser' med hjälp av samma operation, matrismultiplikation.

EXEMPEL 8.2. Avbildningarna som nämnts ovan används i datorgrafik. Varje objekt i en datorbild består av en mängd trianglar, se figur 8.2.2. Objektet rör sig genom att koordinaterna för triangelns hörn beräknas för nästa tidsögonblick.



FIGUR 8.2.2. Graf föreställande delfin, uppdelad i trianglar. Från Wikimedia commons.

ANMÄRKNING 8.2. I detta kapitel har vi berört det som kallas för affina avbildningar men vi fördjupar oss inte i förhållandet mellan linjära avbildningar och affina. Ett affint rum innehåller vektorer plus punkter, ett vektorrum bara vektorer. Vi har även berört detta i kapitel 3.

8.2.3. Allmän linjär avbildning för en allmän figur. Vad händer med t.ex. en kvadrat under en allmän linjär avbildning? Vi kommer inte att fördjupa oss i detta utan undersöker bara ett fall. Vi ritar en rektangel i ett koordinatsystem med x_1 och x_2 och ser vad som händer med den under en avbildning till y_1 och y_2, se figur 8.2.3. Den inre fyrhörningen (rektangel) beskrivs med en matris som

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

där koordinaterna för fyrhörningens hörn står som kolonnvektorer; varje kolonn anger en (x_1, x_2). Vi utför avbildningen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

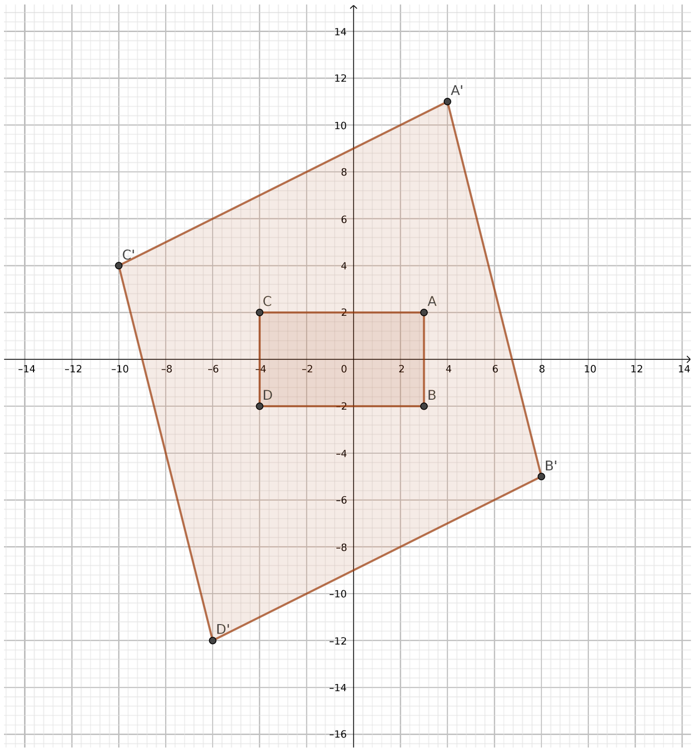
som innebär $y_1 = 2x_1 - x_2$ och $y_2 = x_1 + 4x_2$. Den nya fyrhörningens hörnpunkter ges av beräkningen

$$\begin{pmatrix} y_1 & \\ y_2 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -10 & -6 \\ 11 & -5 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

som ritats i samma koordinatsystem. Vi noterar att vinklarna mellan sidorna har ändrats, sidornas längder har ändrats och arean har ändrats. Arean hos rektangeln är $4 \cdot 7 = 28$ medan den nya fyrhörningen har arean

$$\overline{B'A'} \times \overline{B'D'} = ((4, 11) - (8, -5)) \times ((-6, -12) - (8, -5)) =$$
$$(-4, 16) \times (-14, -7) = 252.$$

Kvoten mellan dessa areor är $252/28 = 9$. Vi återkommer till detta värde, 9, i kapitlet om determinanter. Vi kan just nu bara notera att $2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 9$ med tal hämtade från avbildningsmatrisen. Hur avbildningar förändrar areor är en viktig komponent i multipelintegraler i flervariabelanalys.



FIGUR 8.2.3. En fyrhörning ABCD avbildas linjärt. Bilden av ABCD är A'B'C'D'.

8.3. Projektioner i 2D

EXEMPEL 8.3. Vektorn (1, 2) ska projiceras på x-axeln. Vad har projektionen (vinkelrät) för koordinater? På x-axeln är $y = 0$. Projektionen är (1, 0). Projektionen är naturligtvis x-koordinaten. Det är så vi bestämmer koordinaterna för en vektor, i ett rätvinkligt koordinatsystem, i planet. Matrisen för projektionen på x-axeln ges i allmänhet av

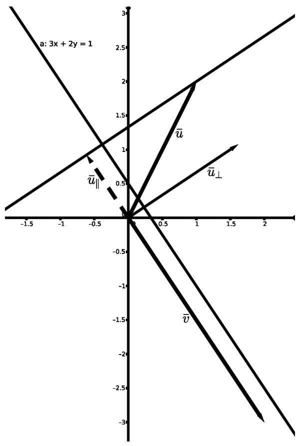
$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

EXEMPEL 8.4. Låt oss i planet projicera en vektor på en godtycklig linje. Vi börjar med att projicera $\overline{u} = (1, 2)$ på linjen $L : 3x + 2y = 1$, se figur 8.3.1. Enligt vår framtagna formel för projektion så gäller för när $\overline{u}$ projiceras på $\overline{v}$ och får $\overline{v}$:s riktning,

$$\overline{u}_{\|} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2} \overline{v}.$$

Vilken riktningsvektor har linjen $3x + 2y = 1$? Skriv om på parameterform $x = t$ $y = -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$, så en riktningsvektor för linjen är $\overline{v} = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$ men vi väljer, för att slippa bråk, $\overline{v} = (2,\, -3)$. Vi erhåller

$$\overline{u}_{\overline{v}} = \frac{(1,\, 2) \bullet (2,\, -3)}{2^2 + (-3)^2}\,(2,\, -3) = \frac{-4}{13}(2,\, -3).$$



FIGUR 8.3.1. $\overline{u}_\parallel$ och $\overline{u}_\perp$.

8.3 ÖVNING 8.3. Visa att den räta linjen $ax + by = c$ har riktningsvektorn $(b,\, -a)$.

Hur ser *avbildningsmatrisen* ut för en projektion av en vektor på en linje? Antag mer allmänt att vi har en vektor $\overline{u} = (u_x,\, u_y)$ och en linje L $ax_1 + bx_2 = c$ med riktningsvektorn $\overline{v} = (b,\, -a)$. Med projektionsformeln får vi

$$\overline{u}_\parallel = \frac{(u_x,\, u_y) \bullet (b,\, -a)}{a^2 + b^2}(b,\, -a)$$

Mer explicit har vi x-komponenten för $\overline{u}_\parallel$

$$\frac{1}{a^2 + b^2}\left(u_x b + u_y(-a)\right) b = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(u_x b^2 - u_y ab\right)$$

och för y-komponenten

$$\frac{1}{a^2 + b^2}\left(u_x b + u_y(-a)\right)(-a) = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(-u_x ab + u_y a^2\right)$$

så på matrisform med $\overline{u}_\parallel = \left(u_{\parallel x}\; u_{\parallel y}\right)^T$

$$\begin{pmatrix} u_{\parallel x} \\ u_{\parallel y} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}.$$

Vi har själva avbildningsmatrisen, kalla den $F_\parallel$ som

$$F_\parallel = \frac{1}{|\overline{v}|^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

Vi bestämmer också projektionen på en linje vinkelrät mot L, se exempel 8.4 och figur 8.3.1. Kalla projektionen på linjen L för $\overline{u}_\parallel$ enligt tidigare och projektionen på linjen M vinkelrät mot L för $\overline{u}_\perp$. Vi använder att $\overline{u}_\parallel + \overline{u}_\perp = \overline{u}$. Vilket ger oss i vårt tidigare exempel

$$\frac{-4}{13}(2,\, -3) + \overline{u}_\perp = (1,\, 2).$$

Så att

$$\overline{u}_\perp = \frac{7}{13}\,(3,\, 2)\,.$$

Men vi kan också förfara på annat sätt och allmänt. Vi vet att linjen $ax + by = c$ har normalen $(a,\, b)$ vilket är M:s riktning. Linjen M har riktningsvektorn $(a,\, b)$. Vi erhåller

$$\overline{u}_{\perp} = \frac{(u_x,\, u_y) \bullet (a,\, b)}{a^2 + b^2}(a,\, b)$$

som på samma sätt som tidigare ger avbildningsmatrisen

$$\begin{pmatrix} u_{\perp x} \\ u_{\perp y} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\overline{v}|^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

så

$$F_{\perp} = \frac{1}{|\overline{v}|^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

8.4. Projektioner i 3D

Exempel 8.5. Vektorn $(1,\, 2,\, 3)$ ska projiceras på xy-planet. Vad har projektionen för koordinater? I xy-planet är $z = 0$ så projektionen är $(1,\, 2,\, 0)$. Med matriser skriver vi

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

där $\begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix}$ är avbildningsmatrisen.

Övning 8.4. Visa att bilderna av $(1\,0\,0)^T$, $(0\,1\,0)^T$, $(0\,0\,1)^T$ är avbildningsmatrisens kolonner. Skriv avbildningsmatrisen som 8.4

$$\begin{pmatrix} a\; d\; g \\ b\; e\; h \\ c\; f\;\; i \end{pmatrix}$$

och visa att $(1\,0\,0)^T$ avbildas på $(a\,b\,c)^T$ o.s.v. Se även avsnitt 7.5.

Exempel 8.6. Säg att en vektor $\overline{x}$ projiceras på en vektor $\overline{v} = (1,\, 0,\, 2)$ och får denna vektors riktning. Bestäm den avbildning som anger koordinaterna $\overline{x}'$ för projektionen. Vi har enligt tidigare om projektioner

$$\overline{x}' = \frac{\overline{x} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v}.$$

Eftersom bilderna av vektorerna i standardbasen, $\overline{e}_1 = (1, 0, 0)$ o.s.v., ger kolonnerna i avbildningsmatrisen F så kan F bestämmas kolonnvis genom att beräkna

$$\frac{(1,\, 0,\, 0) \bullet (1,\, 0,\, 2)}{1^2 + 0^2 + 2^2}(1,\, 0,\, 2) = \frac{1}{5}(1,\, 0,\, 2)$$
$$\frac{(0,\, 1,\, 0) \bullet (1,\, 0,\, 2)}{5}(1,\, 0,\, 2) = (0,\, 0,\, 0)$$
$$\frac{(0,\, 0,\, 1) \bullet (1,\, 0,\, 2)}{5}(1,\, 0,\, 2) = \frac{2}{5}(1,\, 0,\, 2)$$

Och avbildningsmatrisen F erhålls

$$F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 0\,0\,0 \\ 2\,0\,4 \end{pmatrix}.$$

Den kan också bestämmas direkt ur uttrycket

$$(y_1,\, y_2,\, y_3) = \frac{(x_1,\, x_2,\, x_3) \bullet (1,\, 0,\, 2)}{5}(1,\, 0,\, 2) =$$

$$(y_1,\, y_2,\, y_3) = \frac{1}{5}(x_1 + 2x_3)(1,\, 0,\, 2) =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 0\,0\,0 \\ 2\,0\,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Vilket kan skrivas som $Y = FX$ där matrisen F anger avbildningen i ett givet koordinatsystem. Väljer vi ett annat koordinatsystem får vi en annan matris för samma avbildning; även ett annat uttryck för linjen som projektionen sker på. Själva avbildningen definieras i detta fall utifrån geometri inte själva koordinatsystemet.

8.5. Transformationer i 3D

Exempel 8.7. Vektorprodukt som matris. Vektorprodukten definierar en avbildning enligt

$$\overline{y} = \overline{a} \times \overline{x}$$

där $\overline{a}$ är en given vektor. Uttrycket innebär att $\overline{x}$ avbildas på $\overline{y}$. Enligt tidigare ges vektorprodukten i ett ortogonalt och normerat system av

$$\overline{u} \times \overline{v} = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\overline{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\overline{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{e}_3$$

vilket i vårt fall innebär

$$\overline{y} = \overline{a} \times \overline{x} = (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1)$$

som på matrisform är

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Vilket vi skriver som $Y = MX$. Man kan notera att $M^T = -M$. En matris med denna egenskap kallas anti-symmetrisk eller skev-symmetrisk. Vektorprodukt är en linjär avbildning.

Exempel 8.8. Vektorprodukten mellan $\overline{a} = (0, 0, 1)$ (z-axeln) och en godtycklig vektor (x, y, z) är

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exempel 8.9. Rotationsmatrisen i 3D kan skrivas som en rotation kring de tre axlarna. En rotation kring z-axeln av en punkt $(x,\, y,\, z)$ ges av

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Avbildningsmatrisen står till vänster vilket innebär att elementet a_{33} som är en etta avbildar rad 3 på rad 3, dvs. z avbildas på sig själv. Så en godtycklig rotation i 3D av en kropp som består av punkterna $(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $(x_2,\, y_2,\, z_2)$ o.s.v. kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

som vi kan skriva $X' = R_z R_y R_x X$. Varje matris representerar en rotation kring en axel.

Anmärkning 8.3. I datorgrafikens värld realiseras detta t.ex. med OpenGL eller Direct3D vilka är så kallade 'application programming interfaces' (API), vilket fritt kan översättas till 'gränssnitt till program-applikationer'. Om du vill rita fina grafiska gränssnitt i t.ex. ett program som är ett spel behöver du kalla på funktioner, tex. från ett program skrivet i C++, som roterar, translaterar, skjuvar o.s.v. dina objekt. Kommandot glRotatef(angle,x,y,z) producerar en rotation kring vektorn (x, y, z). Ett alternativt sätt att hantera detta är att använda en utvidgning av de komplexa talen, kvaternioner (eng. quaternions).

Övning 8.5. Kontrollera genom direkt räkning om $R_z R_y = R_y R_z$. Vad innebär resultatet? 8.5

8.6. Linjär

I linje med definitionen av linjära avbildningar i inledningen, Definition 1.1, så definierar vi linjäritet i flera dimensioner för vektorn $\overline{x}$:

Definition 8.1. En avbildning $L : N \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto M \subseteq \mathbb{R}^m$ sägs vara linjär om följande två villkor är uppfyllda

(1) $L(\overline{x} + \overline{y}) = L(\overline{x}) + L(\overline{y})$ för alla $\overline{x}$, $\overline{y} \in N$
(2) $L(\lambda \overline{x}) = \lambda L(\overline{x})$ för alla $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{x} \in N$

Man kan visa att detta är ekvivalent med kravet att $L(\lambda \overline{x} + \mu \overline{y}) = \lambda L(\overline{x}) + \mu L(\overline{y})$. Observera också att $L(\overline{0}) = \overline{0}$, dvs. 'noll avbildas på noll', inget annat.

Exempel 8.10. Är avbildningen

$$L(\overline{x}) = L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z-2 \end{pmatrix}$$

en linjär avbildning? Vektorn är skriven som en kolonn-matris. Nej, ty $(0\,0\,0)$ avbildas ej på sig själv. Vi undersöker också:

$$L\left(\begin{pmatrix} x+x \\ y+y \\ z+z \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \\ 2z-2 \end{pmatrix},$$

för att jämföra med högerledet

$$L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ x \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \\ 2z-4 \end{pmatrix}.$$

De är inte lika, således inte en linjär avbildning.

Övning 8.6. Är avbildningen 8.6

$$L(\overline{x}) = L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ x+y \\ z-2 \end{pmatrix}$$

en linjär avbildning?

8.7 Övning 8.7. Är avbildningen

$$L(\overline{x}) = L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-z \\ 0 \end{pmatrix}$$

en linjär avbildning? Undersök genom att använda definitionen.

Exempel 8.11. Projektionen är en linjär avbildning ty skalärprodukten är linjär. Vi vet också att projektionen av en vektorsumma är summan av de enskilda vektorprojektionerna, vilket innebär att den är linjär. Om vi studerar projektionsformeln

$$\overline{v}_{\perp} = \frac{\overline{v} \bullet \overline{n}}{|n|^2}\overline{n}$$

för projektion av $\overline{v}$ på $\overline{n}$ och skriver $L(\overline{v}) = \frac{\overline{v} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n}$ så erhålls

$$L(\overline{u}+\overline{w}) = \frac{(\overline{u}+\overline{w}) \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{n} + \overline{w} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} + \frac{\overline{w} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = L(\overline{u}) + L(\overline{w}).$$

8.8 Övning 8.8. Visa att krav nummer 2, $L(\lambda\overline{x}) = \lambda L(\overline{x})$, gäller för projektion. Använd projektionsformeln.

Exempel 8.12. Vektorprodukten är linjär, enligt tidigare. Detta följer av reglerna 3 (distributiv över addition) och 4 (multiplikation med skalär) i teorem 5.2. Således gäller

$$\overline{a} \times (\overline{x} + \overline{y}) = \overline{a} \times \overline{x} + \overline{a} \times \overline{y}$$

och

$$\overline{a} \times (\lambda\overline{x}) = \lambda(\overline{a} \times \overline{x}).$$

Låt oss knyta ihop $\overline{y} = L(\overline{x})$ där L är en linjär avbildning med matrisuttrycket $Y = FX$ där F är en rektangulär matris. Säg att vi har en vektor $\overline{x}$ skriven i en bas $\overline{e}_i$ så att

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ... + x_n\overline{e}_n$$

och om vi utför den linjära avbildningen erhåller vi

$$\begin{aligned} \overline{y} &= L(\overline{x}) = L(x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ... + x_n\overline{e}_n) \\ &= x_1L(\overline{e}_1) + x_2L(\overline{e}_2) + ... + x_nL(\overline{e}_n) \\ &= x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + ... + x_n\overline{a}_n \end{aligned}$$

och detta samband kan skrivas som $Y = FX$. Uppmärksammas bör också att om vi tolkar vektorerna $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,..., $\overline{a}_n$ som kolonnmatriser (som blockmatriser) för F så är bilderna, $L(\overline{e}_1) = \overline{a}_1$, $L(\overline{e}_2) = \overline{a}_2$ osv., av basvektorerna $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ osv. det som är kolonnmatriserna i matrisen F. Ekvationssystemet $\overline{y} = x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + ... + x_n\overline{a}_n$ kan skrivas i $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ som

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} \vdots \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} \vdots \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} + ... + x_n\begin{pmatrix} \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

exempelvis har vi

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

med

$$Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observera att

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $L(\overline{e}_1)$ är första kolonnen i avbildningsmatrisen.

Övning 8.9. Följande gäller för en avbildning

$$\begin{array}{lll} (1,0,0) & \text{avbildas på} & (2,3,1) \\ (0,1,0) & \text{avbildas på} & (1,0,1) \\ (0,0,1) & \text{avbildas på} & (-1,1,2) \end{array}.$$

Ange avbildningsmatrisen.

Exempel 8.13. En avbildning definieras av att dess basvektorer $\overline{e}_1$ och $\overline{e}_2$ avbildas enligt

$$\begin{array}{l} L:\ \overline{e}_1 + \overline{e}_2 \mapsto 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2 \\ L: -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \mapsto 3\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \end{array},$$

vilket också kan skrivas som $(1,1) \mapsto (2,-1)$ och $(-1,1) \mapsto (3,1)$ eller med matriser där F, av typ 2×2, representerar den okända linjära avbildningen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta sätts samman till

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicera med inversen från höger så F blir fri, under förutsättning att inversen existerar.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = F\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = F.$$

Och vi beräknar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

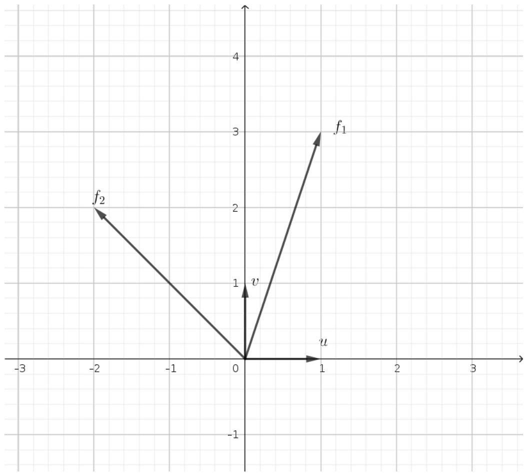
och F, avbildningsmatrisen, erhålls som

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

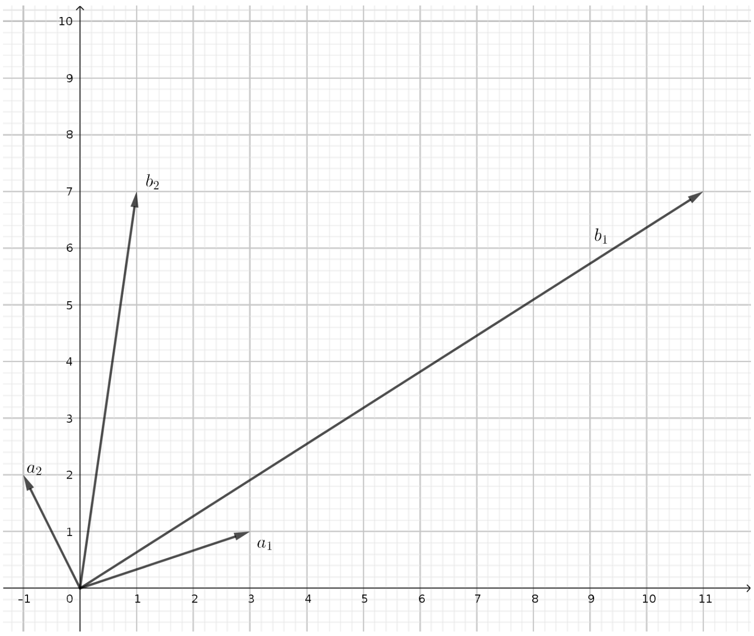
Övning 8.10. En linjär avbildning definieras av att dess basvektorer avbildas enligt 8.10
$(1,0) \mapsto (2,1)$ och $(1,1) \mapsto (0,1)$. Ange avbildningsmatrisen.

Övning 8.11. De två basvektorerna $\overline{u} = (1,0)$ och $\overline{v} = (0,1)$ i figur 8.6.1 avbildas 8.11
linjärt på vektorerna $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$ respektive, dvs. $\overline{u} \longmapsto \overline{f}_1$ och $\overline{v} \longmapsto \overline{f}_2$. Bestäm avbildningsmatrisen genom avläsning.

Övning 8.12. De två vektorerna $\overline{a}_1$ och $\overline{a}_2$ i figur 8.6.2 avbildas linjärt på vekto- 8.12
rerna $\overline{b}_1$ och $\overline{b}_2$ respektive. Avläs i figuren och bestäm ur avläsningarna avbildningsmatrisen.



FIGUR 8.6.1. Basvektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ avbildas på $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$. Vilken matris gör detta?



FIGUR 8.6.2. Vektorerna $\overline{a}_1$ och $\overline{a}_2$ avbildas på $\overline{b}_1$ och $\overline{b}_2$. Vilken matris gör detta?

EXEMPEL 8.14. En linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ beskrivs av

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ avbildas på } \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ avbildas på } \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ avbildas på } \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

Vad avbildas

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

på?

Vi kan räkna rakt igenom

$$L\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = L\left(-1\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 3\overline{e}_3\right) = -1L\left(\overline{e}_1\right) + 2L\left(\overline{e}_2\right) + 3L\left(\overline{e}_3\right)$$

$$= -1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+0+6\\-3+4-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

eller konstatera att kolonnerna är bilderna av basvektorerna så avbildningsmatrisen bör vara

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\3 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

eftersom $(1\,0\,0)^T$ då avbildas på $(1\,3)^T$ o.s.v. Vi får

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}.$$

8.7. Basbyten

Vi återvänder till basbyte. Vi observerar först skillnaden mellan *basbytes-matris* och *avbildnings-matris*.

Ett basbyte anges t.ex. som (enligt tidigare)

$$\begin{cases}\overline{e}_1' &= 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2\\ \overline{e}_2' &= 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2\end{cases}$$

Basbytesmatrisen S, i $X = SX'$, har kolonnvektorer (byt primat mot oprimat och rader mot kolonner) med komponenterna från vektorerna

$$S = \begin{pmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}.$$

För en linjär avbildning gäller $Y = AX$ i basen $\overline{e}_i$ och $Y' = A'X'$ i basen $\overline{e}_i'$. Vektorerna är de samma, det är matriserna som ändras. Vi har därför att $X = SX'$ och $Y = SY'$. Använder vi detta i uttrycket för avbildning

$$Y = AX \Leftrightarrow SY' = ASX'$$

och vi löser ut Y'

$$Y' = S^{-1}ASX'.$$

Vilket tolkas som att om avbildningsmatrisen är A så efter basbytet S är avbildningsmatrisen $A' = S^{-1}AS$.

EXEMPEL 8.15. Antag att en avbildning A har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

med avseende på basen $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ i planet. En ny bas införs genom

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= \overline{e}_1 + \overline{e}_2 \\ \overline{e}'_2 &= -\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 \end{aligned}$$

Bestäm hur avbildningsmatrisen A' ser ut i den nya basen $\overline{e}'_1$, $\overline{e}'_2$.

Basbytesmatrisen S har $\overline{e}'_1$och $\overline{e}'_2$ som kolonnvektorer

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vilken inte är normerad. Inversen är

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

och vi erhåller för avbildningsmatrisen

$$\begin{aligned} A' &= S^{-1}AS = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kolonnvektorerna är bilder av basvektorerna så $\overline{e}'_1$ avbildas på $2\overline{e}'_1 + 0\overline{e}'_2$ och $\overline{e}'_2$ på $0\overline{e}'_1 - \overline{e}'_2$, vilket kan skrivas (om vi använder samma A' för matrisen som funktionen) $A'(\overline{e}'_1) = 2\overline{e}'_1 + 0\overline{e}'_2$ och $A'(\overline{e}'_2) = 0\overline{e}'_1 - \overline{e}'_2$. Vilket innebär för en godtycklig vektor $\overline{u} = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2$ att den avbildas på

$$\begin{aligned} A'(\overline{u}) &= x'_1 A'(\overline{e}'_1) + x'_2 A'(\overline{e}'_2) = x'_1(2\overline{e}'_1 + 0\overline{e}'_2) + x'_2(0\overline{e}'_1 - \overline{e}'_2) \\ &= 2x'_1\overline{e}'_1 - x'_2\overline{e}'_2 \end{aligned}$$

8.13 ÖVNING 8.13. Antag att en avbildning F har matrisen

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

med avseende på basen $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ i planet. En ny bas införs genom

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 \\ \overline{e}'_2 &= -2\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 \end{aligned}$$

Bestäm hur avbildningsmatrisen F' ser ut i den nya basen $\overline{e}'_1$, $\overline{e}'_2$.

EXEMPEL 8.16. En rät linje har ekvationen $y = 3x/4$ beskriven i standardbasen. En ny bas anges av $\overline{u} = (1, 3)$ respektive $\overline{v} = (1, 0, 5)$. Vad är den räta linjens ekvation i den nya basen? Basbytet ges av

$$\begin{aligned} \overline{u} &= 1\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 \\ \overline{v} &= 1\overline{e}_1 + 0,5\overline{e}_2 \end{aligned}$$

så

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

och enligt $X = SX'$ så har vi $x = x' + y'$ och $y = 3x' + 0,5y$'. Sätter vi in detta i $y = 3x/4$ får vi $3x' + 0,5y' = \frac{3}{4}(x' + y')$ som ger $0,5y' - 0,75y' = 0,75x' - 3x'$

vilket är $0,25y' = 2,25x'$ eller $y' = 9x'$. Vi kan också tänka att ekvationen för linjen, $\frac{3}{4}x - y = 0$, är $\left(\frac{3}{4} \ -1\right) X = 0$ och

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0,5 \end{pmatrix} X'$$

och

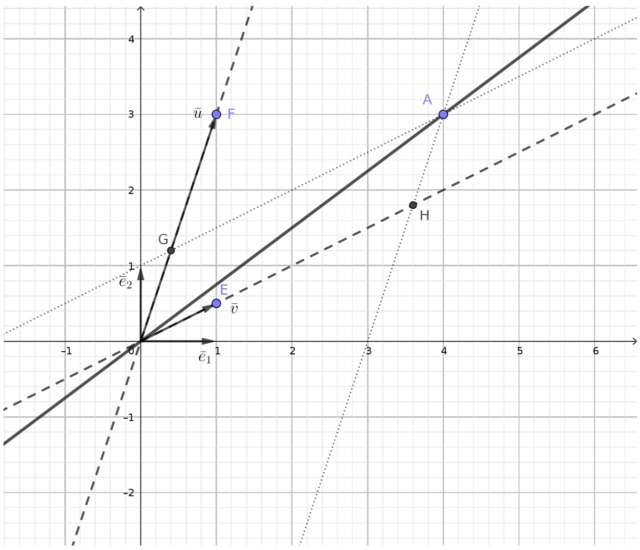
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0,5 \end{pmatrix} X'}_{X} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} X' = 0$$

vilket är

$$-\frac{9}{4}x' + \frac{1}{4}y' = 0$$

vilket är samma som $-9x' + y' = 0$ eller enligt tidigare $y' = 9x'$. I figur 8.7.1 kan koordinaterna för linjen genom origo och A avläsas i två olika koordinatsystem. I basen $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ är koordinaterna för punkten A (4, 3) och ekvationen för linjen är $y = 3x/4$. I basen $\{\overline{u}, \overline{v}\}$ är de, ungefärlig avläsning , $x' = 0,4$ (origo till G är ca. 40% av sträckan origo till F)

respektive $y' = 3,6$ (origo till H är ca. 3,6 gånger längden av origo till E); kvoten är $y'/x' = 3,6/0,4 = 9$, så linjen är $y' = 9x'$.



Figur 8.7.1. Linjen genom origo och A beskriven utifrån två olika koordinatsystem.

Övning 8.14. En rät linje har ekvationen $y = 3x$ beskriven i standardbasen. En ny bas anges av $\overline{u} = (1,2)$ respektive $\overline{v} = (2, 3)$. Vad är den räta linjens ekvation i den nya basen?

8.8. Facit Övningar

8.1 Avbildningen ges av $y = -2x$.

8.2 $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_y M_{y=x}$. Transformationen kan ses som en sammansättningav en reflektion i linjen $y = x$ följt av en reflektion i y-axeln. Matrisen N kan ses som *en* transformation, och det är en rotation 90°,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.3 Parametrisera linjen genom $x = t$ så erhålls $y = -a/b \cdot t + c/b$. Riktningsvektorerna ges av $(t, -a/b \cdot t)$ och om vi specifikt väljer $t = 1$ erhålls $(1, -a/b)$ men om vi väljer $t = b$ får vi $(b, -a)$.

8.4 Detta följer direkt av diskussionen kring vad matriser gör. $(1\,0\,0)$ från höger med a_{11} elementet till 1 avbildar kolonn 1 till kolonn 1.

8.5 $\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta \\ -\sin\gamma\cos\beta \\ \; \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta \\ -\sin\gamma \\ \; \end{pmatrix}$.Vi ser redan här att de inte är lika. Att rotera är inte kommutativt. Om man roterar 20° kring y-axeln och sedan 30° kring z-axeln så är föremålet inte i samma läge som om man först roterar 30° kring z-axeln och sedan 20° kring y-axeln.

8.6 Nej ty $(0\,0\,0)^T$ avbildas ej på $(0\,0\,0)^T$ utan $(1\,0\;-2)^T$.

8.7 Beräkna enligt definitionen

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

och se om det blir samma som i högerledet. Vilket det blir.

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ 2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

som ska jämföras med

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 2x_1 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ 2x_2 - z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ 2x_1 - z_1 + 2x_2 - z_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket onekligen är samma.

Beräkna också

$$L\left(\begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}\right)$$

för att se om den överensstämmer med

$$cL\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right).$$

Vi noterar också att en nollvektor avbildas på en nollvektor.

8.8 Med $F(\overline{v}) = \frac{\overline{v}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n}$ ska vi visa att $F(\lambda\overline{x}) = \lambda F(\overline{x})$. Vi börjar med höger led: $F(\lambda\overline{x}) = \frac{\lambda\overline{x}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2} = \lambda\frac{\overline{x}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}$ vilket är samma som vänster led $\lambda F(\overline{x})$.

8.10 Vi får

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

som sätts samman till

$$\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Inversen till högra matrisen är

$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

så F ges av

$$\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-2\\1&0\end{pmatrix}.$$

8.11 Avbildningen ges av

$$\begin{pmatrix}1&-2\\3&2\end{pmatrix}$$

ty

$$\begin{pmatrix}1&-2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

där (1 3) är avläst i figuren. På samma sätt är andra kolonnen bestämd. Vi hade kunnat börja med

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

och härur bestämt a, b, c och d. Vi hade också kunnat sätta upp

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\3&-2\end{pmatrix}.$$

Eller så har vi förstått att standardvektorerna avbildas på de nya basvektorerna, de reproducerar kolonnerna.

8.12

$$\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$$

Vektorn $(3, 1)$ ska avbildas på $(11, 7)$

$$\begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

samt $(-1, 2)$ ska avbildas på $(1, 7)$

$$\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

eller sammantaget

$$\begin{pmatrix}11&1\\7&7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}.$$

Vi beräknar inversen till

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

och multiplicerar från höger

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I.$$

Vi erhåller

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

vilket är matrisen för avbildningen.

8.13

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0,5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F' = S^{-1}FS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0,5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

8.14 Basbytet ges av

$$\overline{u} = 1\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$$
$$\overline{v} = 2\overline{e} + 3\overline{e}_2$$

så

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

och enligt $X = SX'$ så har vi $x = x' + 2y'$ och $y = 2x' + 3y$'. Sätter vi in detta i $y = 3x$ får vi $2x' + 3y' = 3\,(x' + 2y')$ som ger $3y' - 6y' = 3x' - 2x'$ vilket är $-3y' = x'$ eller $y' = -\frac{1}{3}x'$. Vi kan också tänka att ekvationen för linjen, $3x - y = 0$, är $(3\ -1)\,X = 0$ och

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X'$$

och

$$(3\ -1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X' = (1\,3)\,X' = 0$$

vilket är

$$x' + 3y' = 0$$

vilket är samma som $y' = -\frac{1}{3}x'$.

8.9. Kapitelproblem

8.1 Spegling i 2 D.

(a) Punkter speglas i linjen $3x_1 + 2x_2 = 0$. Skriv avbildningen på formen

$$Y = AX,$$

där $X = (x_1\, x_2)^T$ avbildas på $Y = (y_1\, y_2)^T$.

(b) En punkt (x_1, x_2) speglas till punkten $(5, 3)$, vilken punkt var det?

8.2 En kub beskrivs av matrisen

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

efter avbildningen med hjälp av matrisen M beskrivs parallellepipeden av

$$M \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&2&2&1 \\ 0&2&3&1&-1&1&2&0 \\ 0&1&-1&-2&-1&0&-2&-3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm avbildningsmatrisen M.

8.10. Facit Kapitelproblem

8.1

(a) Linjen går genom origo. En godtycklig punkt $\overline{u} = (x_1, x_2)$ har projektionen på linjens normal $(3, 2)$

$$\overline{u}_\perp = \frac{\overline{u} \bullet \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \frac{(x_1, x_2) \bullet (3,2)}{13}(3,2) = \frac{1}{13}(3x_1 + 2x_2)(3,2).$$

Spegelbilden har vektorn

$$\overline{u} - 2\overline{u}_\perp = (x_1, x_2) - \frac{2}{13}(3x_1 + 2x_2)(3,2) =$$

$$\left(x_1 - \frac{6}{13}(3x_1 + 2x_2), x_2 - \frac{4}{13}(3x_1 + 2x_2)\right) =$$

$$\left(-\frac{5}{13}x_1 - \frac{12}{13}x_2, -\frac{12}{13}x_1 + \frac{5}{13}x_2\right).$$

Detta kan skrivas i matrisform som

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att om $x_1 = -2$ och $x_2 = 3$, som ligger på linjen så avbildas den på sig själv.

(b) Vi har systemet

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

och ska bestämma (x_1, x_2) vilket vi gör genom att beräkna inversen. Den har sig själv som invers. Så följande gäller

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vilket ger att $x_1 = \frac{1}{13}(-25 - 36) = -61/13$ och $x_2 = \frac{1}{13}(-60 + 15) = -45/13$.

8.2 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Avbildningsmatrisen bestäms helt av avbildningen av $\overline{e}_1 = (1,0,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1,0)$ och $\overline{e}_3 = (0,0,1)$ så M kan avläsas genom att se vaad dessa 3 vektorer avbildas på. Vi ser att $\overline{e}_1 = (1,0,0)$ avbildas på $(1,2,1)$ så det måste vara första kolonnen i avbildningsmatrisen. Och så vidare.

KAPITEL 9

Determinanter

Determinanter behandlas ur två olika perspektiv. Det ena grundar sig på ett algebraiskt krav för att ett ekvationssystem ska ha en lösning. Det andra grundar sig på ett geometriskt tänkande. Dessa två perspektiv förenas.

9.1. Uppkomst av determinanter

Determinantens relation till ekvationssystem.

Vi studerar hur determinanter uppkommer vid lösning av linjära ekvationssystem. Vi löser ett allmänt 2×2 system genom att eliminera x_2. Utgå från

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

och multiplicera den översta ekvationen med a_{22} och den nedre med $-a_{12}$,

$$\begin{aligned} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 &= a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 + -a_{12}a_{22}x_2 &= -a_{12}b_2 \end{aligned}$$

och addera ekvationerna

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})\, x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

lös ut x_1

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \tag{9.1.1}$$

och x_2 erhålls som

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{9.1.2}$$

Notera nämnarna och att de är lika: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Om uttrycket i nämnaren är 0 så får vi inga värden på x_1 och x_2 ur uttrycken. Denna kombination av koefficienter i nämnaren är *determinanten* till matrisen för ekvationssystemet, den 'determinerar' lösningarna. Är determinanten 0 så finns det ej en *entydig* lösning, dvs. det kan finnas inga eller oändligt många. Om determinanten är skild från 0 så finns det en entydig lösning.

ANMÄRKNING 9.1. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ kan skrivas som $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ och som kvoter

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$$

vilket innebär att koefficienterna i ena raden, i ekvationssystemet, är proportionella mot koefficienterna i andra raden

$$a_{11} = ka_{21} \text{ och } a_{12} = ka_{22}.$$

Ekvationernas vänsterled är således multiplar av varandra; översta raden är

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

som med proportionella koefficienter innebär

$$ka_{21}x_1 + ka_{22}x_2 = k\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\,,$$

således en multipel av andra raden. Beroende på höger led, olika eller lika för de båda ekvationerna, finns det inga lösningar eller oändligt många (parameter) lösningar.

Determinanten för en matris av storleken $n \times n$, kalla den A, betecknas enligt något av följande:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Det är möjligt att skriva lösningarna för ekvationssystemet helt med determinanter. Vi definierar

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{och} \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

och kan skriva den tidigare lösningen i 9.1.1 och 9.1.2 som (Cramers regel)

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \;\text{ och }\; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}. \tag{9.1.3}$$

9.1 Övning 9.1. Lös ekvationssystemet genom att använda Cramers regel.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -x - 4y = 3 \end{cases}$$

Determinanter anger en area. Om vi backar tillbaka till exempel 5.1 ser vi samma mönster i beräkningen av skalär trippelprodukt som i utvecklingen av en determinant. För två vektorer, $(x_1,\, x_2)$ och $(y_1,\, y_2)$, i ett plan gäller att arean kan beräknas med $x_1y_2 - x_2y_1$. Det är samma uttryck som i utvecklingen av determinanter:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

vilket motsvarar att vi som vanligt satt vektorerna $\overline{u} = (x_1,\, x_2)$ $\overline{v} = (y_1,\, y_2)$ som kolonner i determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2.$$

Utveckling av determinanter av storleken 2 anger arean som vektorerna indikerar som sidor i en parallellogram. På liknande sätt anger determinanten av storleken 3 volymen som vektorerna indikerar som sidor i en parallellepiped.

Anmärkning 9.2. Determinanten/Arean förändras inte om vektorerna (x_1, x_2) och (y_1, y_2) placeras som rader i stället för kolonner

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2.$$

Detta gäller oavsett storleken på determinanten. Observera också att de två olika uppställningarna svarar mot en matris A och dess transponat; att transponera en matris ändrar inte värdet på tillhörande determinant och det motsvarar att lägga vektorerna som kolonnvektorer respektive radvektorer.

Anmärkning 9.3. Cramers regel finns även för 3 dimensioner. Om A_1 betyder att kolonn 1 ersatts med högerledet så gäller

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \text{ och } x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \text{ och } x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

Övning 9.2. Ange arean av parallellogrammen som har sidor bestämda av vektorerna (1, 3) och (−1, 4). 9.2

9.2. Regler

Regler är genvägar.

Utifrån determinanten för 2×2 matriser kan visas följande som gäller för alla storlekar på determinanter; beteckna matriser med A och blockmatriser med A_i:

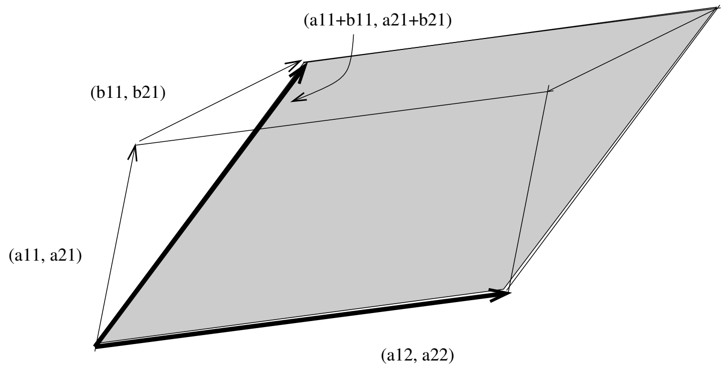
(1) En kolonn kan delas upp och ger då en extra determinant. Vi delar upp första kolonnen i två termer

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})\,a_{22} - a_{12}\,(a_{21}+b_{21}) =$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Se figur 9.2.1. Determinanten sägs vara linjär i varje kolonn. Med blockmatriser kan regeln skrivas $|A_1 + A_1' \; A_2| = |A_1 \; A_2| + |A_1' \; A_2|$. Geometriskt innebär det en addition av areor i 2 dimensioner. Vektorn i första kolonnen delas i 2, vektorn i andra kolonnen står kvar. Arean som anges av vektorerna (a_{12}, a_{22}) och $(a_{11}+b_{11}, a_{21}+b_{21})$ är lika stor som summan av de areor som anges av (a_{12}, a_{22}) och (a_{11}, a_{21}) samt (a_{12}, a_{22}) och (b_{11}, b_{21}).



Figur 9.2.1. Determinanten är linjär i varje kolonn. Geometriskt är det en addition av två areor.

(2) Om en kolonn multipliceras med en konstant k så ändras determinanten med faktorn k. Vi har

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} =$$

$$k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\,|A|\,.$$

Geometriskt innebär detta att om en vektor förlängs eller förkortas med en faktor k så ändras arean proportionellt; en sida i parallellogrammen ändras. En följd av detta är att en $n \times n$ determinant med faktorn k i varje element kan förenklas enligt

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots ka_{2n} \\ \vdots & \\ ka_{n1} & ka_{n2} \dots ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) Om två kolonner byter plats så ändras determinantens tecken.

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Samma gäller för radbyte, determinanten ändrar tecken. Operationen radbyte förekommer också vid lösning av ekvationssystem. Varje radbyte i matrisen ändrar tillhörande determinant tecken, men ändrar inte lösningarna för ekvationssystemet. Geometriskt är det samma area men ordningen bland vektorerna ändras. Determinanten ger arean med tecken.

(4) Om två kolonner är multiplar av varandra så är determinanten 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{21} - ka_{11}a_{21} = 0.$$

Geometriskt är det två parallella vektorer, därför ingen area. Vilket för större antal dimensioner innebär att om kolonnerna är linjärt beroende så är determinanten 0. Om $k = 1$ är kolonnerna lika.

(5) Om en kolonn är 0 så är determinanten 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - 0 \cdot a_{21}.$$

Om två kolonner är lika, regel 4, så kan en kolonn med 0 konstrueras genom att addera en multipel, -1, av en kolonn till en annan. Om en vektor är noll-vektorn, så är arean 0.

(6) Om en multipel av en kolonn adderas till en annan så ändras inte determinantens värde.

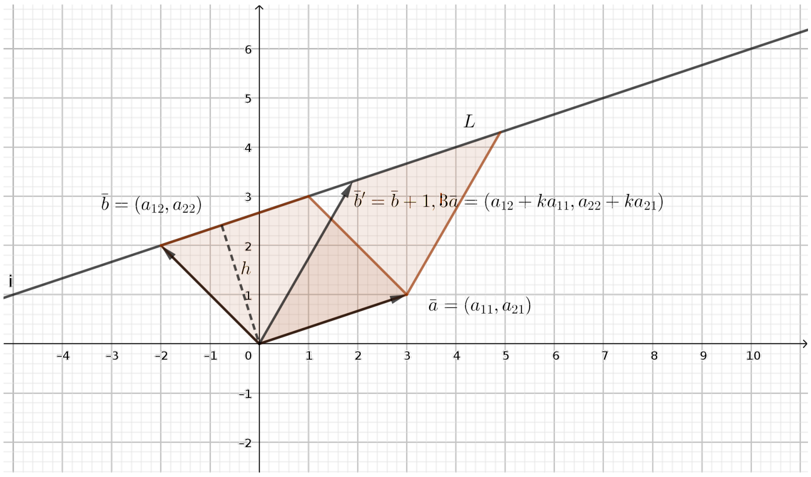
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22} + ka_{21}\right) - a_{21}\left(a_{12} + ka_{11}\right) =$$

$$a_{11}a_{22} + ka_{11}a_{21} - a_{21}a_{12} - ka_{21}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Samma regel gäller för rader. Vid lösning av ekvationssystem utförs denna radoperation på koefficientmatrisen och då ändras inte värdet på matrisens determinant. Determinanten för den matris vi börjar med ska vara lika med den vi slutar med, om vi endast utför denna typ av operationer vid ekvationslösning. Geometriskt innebär

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

att vi beräknar arean av parallellogramen som spänns upp av, enligt figur 9.2.2, de två vektorerna $\overline{a} = (a_{11}, a_{21})$ och $\overline{b} = (a_{12}, a_{22})$. När sedan en multipel av $\overline{a}$ (som exempel valt 1,3$\overline{a}$) (vänstra kolonnen) adderas till $\overline{b}$ (högra kolonnen), vi får $\overline{b}'$, så kan vi tänka oss att $\overline{b}$ förflyttas längs linjen L, som är parallell med $\overline{a}$. Detta innebär att höjden h i parallellogramen inte ändras och därmed inte heller arean.



Figur 9.2.2. Geometrisk tolkning av regel 6.

(7) Determinanten för transponatet är lika: $\left|A^T\right| = |A|$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ger ingen geometrisk tolkning av denna.

Övning 9.3. Reglerna ovan är uttryckta med kolonner. Övertyga dig själv genom egen räkning på samma sätt som ovan att reglerna gäller för rader. 9.3

Övning 9.4. Jämför reglerna för determinanter med reglerna för matriser vid lösning av ekvationssystem. Vilka likheter och skillnader finns? 9.4

Övning 9.5. De 3 vektorerna $(1, 2, 1)$, $(-1, 0, 1)$ och $(-3, 0, 3)$ är linjärt beroende. Sätt vektorerna som kolonner respektive rader och kontrollera att determinanten är 0 (enligt 4). 9.5

Konsekvenserna av regel 4 är viktiga. Här följer ett längre resonemang angående determinanter, linjärt beroende och lösningar till ekvationssystem.

Vi har en matris A med kolonnvektorer och radvektorer. För denna matris beräknar vi determinanten. Om determinanten är 0 så är kolonn-vektorerna linjärt beroende (samma för radvektorerna). Om kolonn-vektorer är linjärt beroende spänner de inte upp största möjliga antal dimensioner, vilket ges av antalet komponenter i en vektor. I 3 dimensioner (x, y, z) (3 komponeneter) blir det ingen volym och i 2 dimensioner (x, y) ingen area.

Om determinanten är skild från 0 är kolonnvektorer linjärt oberoende och de spänner upp största möjliga antal dimensioner, samma som antalet komponenter i vektorerna. För ekvationssystemet $AX = Y$ innebär det att alla punkter i rummet kan nås med hjälp av linjärkombinationer av vektorerna; speciellt kan *en* godtycklig punkt nås med *en* linjärkombination, dvs. det finns en *entydig* lösning. För $AX = 0$ innebär det att det bara finns den triviala lösningen; enda sättet att nå origo är att inte addera några vektorer. Om vi tänker oss situationen i 3 dimensioner, se figur 9.2.3 och determinanten är skild från 0 så är kolonnvektorerna linjärt oberoende och spänner upp en volym. Alla punkter h kan nås med hjälp av linjärkombinationer av de tre vektorerna.

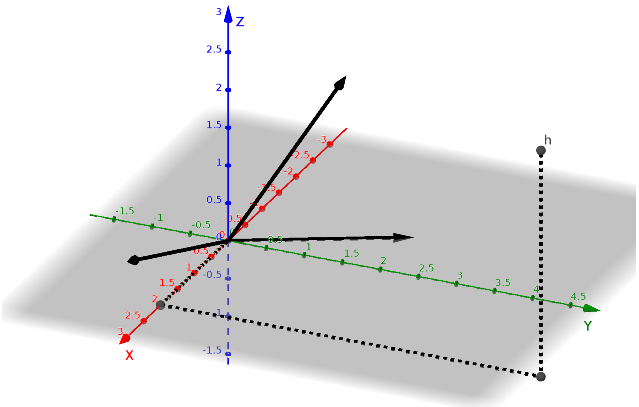
Vi återgår till att determinanten är 0 och studerar fallet i mer detalj. Om determinanten är 0 så spänns inte en tre-dimensionell volym upp. Om bara en två-dimensionell yta spänns upp, figur 9.2.4, måste högerledet $h1$ ligga i detta plan, annars inga lösningar. Ligger högerledet i planet som spänns upp av de 3 kolonnvektorerna så finns det oändligt många kombinationer av de 3 vektorerna som gör att vi kan nå den punkten som är högerledet $h1$. Om högerledet $h2$ inte ligger i detta plan saknas lösningar; inga kombinationer av de tre vektorerna kan ta oss dit.

Om determinanten är 0 och bara en linje spänns upp, figur 9.2.5, måste punkten som är högerledet ligga på denna linje, annars inga lösningar. Om högerledet $h1$ ligger på denna linje finns det oändligt många kombinationer av de 3 vektorerna som ger denna punkt. Om högerledet $h2$ inte ligger på denna linje kan ingen linjärkombination ta oss till denna punkt $h2$.

Sammanfattningsvis: om determinanten är skild från 0 finns det entydig lösning; om determinanten är 0 så finns det ingen eller oändligt många lösningar, beroende på högerledets utseende. Om punkten som är högerledet är nåbar finns det oändligt många lösningar, om den inte är nåbar finns det inga lösningar.

Sammanfattningsvis har vi nu 5 ekvivalenser. För kvadratiska matriser är följande ekvivalenta påståenden:

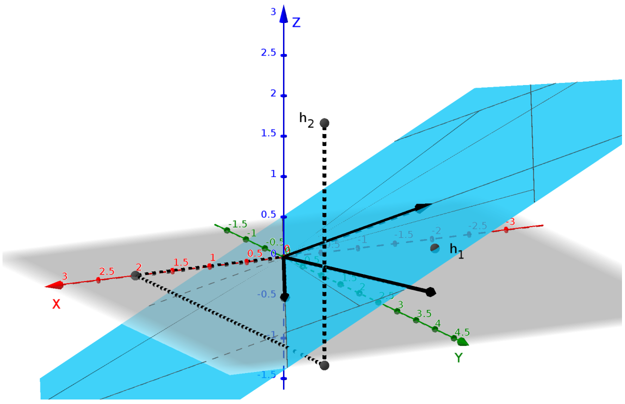
(1) A:s kolonnmatriser är en bas i n dimensioner.
(2) $AX = 0$ har endast den triviala lösningen $X = 0$. (linjärt oberoende basvektorer i n dimensioner)
(3) $AX = Y$ är lösbar för alla Y. (alla vektorer kan skrivas med hjälp av basvektorerna, kolonnvektorn Y är linjärt beroende, en linjärkombination av kolonnvektorerna i A.)
(4) A är inverterbar.
(5) determinanten av A är skild från 0, $\det(A) \neq 0$.



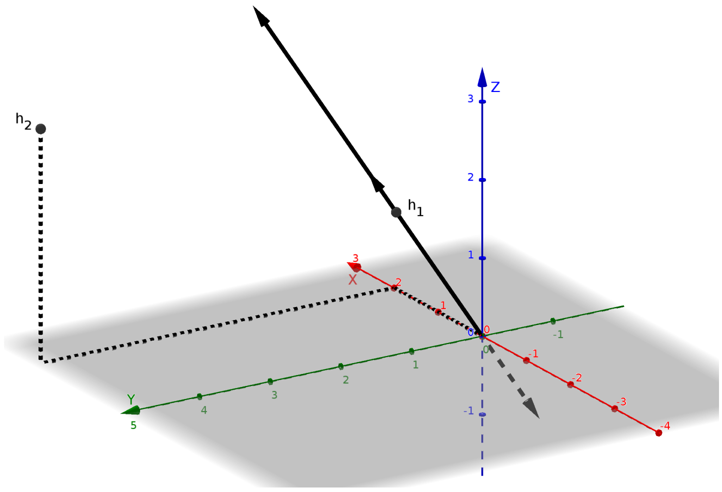
FIGUR 9.2.3. 3 linjärt oberoende vektorer och ett högerled h.

9.6 ÖVNING 9.6. Visa med hjälp av determinanten att ekvationssystemet har entydig lösning.

$$A = \begin{cases} 2x_1 - x_2 \phantom{{}+3x_3} = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$



FIGUR 9.2.4. 3 linjärt beroende vektorer som spänner upp ett plan. 2 högerled $h1$ och $h2$.



FIGUR 9.2.5. 3 linjärt beroende vektorer som spänner upp en linje. 2 högerled $h1$ och $h2$.

ÖVNING 9.7. Skriv själv på ett tomt papper resonemanget ovan, i din egen formulering, om ekvationssystem, matriser och determinanter och tillhörande grafer. Betona hur de olika sakerna hänger ihop. 9.7

ÖVNING 9.8. Se regel 6. Undersök genom att använda en generell 3×3 determinant att om en linjärkombination av t.ex. rad 2 och 3 adderas till rad 1 så ändras ej determinantens värde. 9.8

EXEMPEL 9.1. Ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

har koefficientmatrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om determinanten för matrisen är 0 så är kolonnvektorerna linjärt beroende och det finns ingen eller oändligt många lösningar. Om determinanten är skild från 0 är de linjärt oberoende och systemet har alltid lösning för alla högerled. Determinanten är

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

så systemet har entydig lösning.

Däremot har ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ 4x + 6y &= 1 \end{aligned}$$

ingen entydig lösning ty determinanten är

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0.$$

Systemet kan omformas t.ex. genom $-2\,(1) + (2)$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

vilket innebär att lösningar saknas. Vi har två vektorer (2, 3) och (4, 6) som ligger på samma linje, men punkten $(0, 1)$ ligger inte på den linjen, således inga lösningar. Systemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 4x + 6y &= 2 \end{aligned}$$

fortfarande med determinanten 0, har oändligt många lösningar. Vi har samma vektorer som i föregående men punkten (1, 2) ligger på linjen. De två vektorerna kan kombineras på ett oändligt antal sätt för att nå punkten (1, 2). Vi har endast en ekvation, eftersom de två raderna i ekvationssystemet är multiplar av varandra. Inför parametern t och lösningarna, oändligt många kan skrivas $x = t$, $y = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$. Denna linje är dock inte den linje (en mängd) som ges av att den ska gå igenom (2, 4) och (3, 6), utan denna mängd (linje) kallas för lösningsmängden. (2, 4) tillhör en mängd och $(x,\ y)$ tillhör en annan mängd.

9.3. Utveckling av determinanter

Rekursiv beräkning av determinanter.

Hitintills har vi studerat 2:a ordningens determinanter, vi går nu vidare till 3:e ordningens determinanter.

Determinanter kan definieras rekursivt. Determinanter av 3:e ordningen(3×3) reduceras till en summa av 2:a ordningens determinanter. På samma sätt kan sedan 4:e ordningen reduceras till en summa av 3:e ordningens som sedan reduceras till 2:a ordningen. För att enkelt kunna uttrycka detta behövs under-determinanter. En under-determinant erhålls när en rad och en kolonn 'stryks'; på så sätt reduceras determinantens storlek. I under-determinanten (eng. minors) M_{12} är rad 1 och kolonn 2 är strukna i determinanten. Om vi har determinanten för matrisen A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

så erhålls under-determinanten M_{13} genom att stryka rad 1 och kolonn 3,

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{4} \\ 2 & 0 & \cancel{-1} & 2 \\ -3 & 0 & \cancel{5} & 2 \\ 4 & 2 & \cancel{0} & 1 \end{vmatrix},$$

vi får

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Den rekursiva beskrivningen ger en algoritm som kallas *utveckling* av determinant efter rad eller kolonn. En utveckling kan se ut så här:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Här utvecklas determinanten efter första raden, men vilken rad eller kolonn som helst kan användas. Att utveckla efter första raden innebär att a_{11}, a_{12} och a_{13} används som koefficienter framför under-determinanterna i utvecklingen. Första termen i utvecklingen ges genom att a_{11} multipliceras med under-determinanten M_{11} som ges av att rad 1 och kolonn 1 stryks. Andra termen ges av att a_{12} multipliceras med under-determinanten M_{12} som ges av att rad 1 och kolonn 2 stryks. Regeln för tecknet framför termerna är att om koefficienten a_{ij} framför under-determinanten har udda $i + j$ så föregås den av faktorn -1, annars $+1$. Den tredje termen ges av a_{13}, med positivt tecken, multiplicerad med M_{13}.

Följande schema kan också användas:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} & + & - & + \\ + & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ + & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Tecknet kan avläsas i schemat genom att + och + ger positivt tecken framför a_{11}; + och − ger − framför a_{12}; − och − ger + framför a_{22}. Sammanfattningsvis kan utvecklingen efter första raden skrivas

$$\det(A) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Utveckling enligt andra kolonnen är

$$\det(A) = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}.$$

Anmärkning 9.4. Om tecknet införlivas med under-determinanterna kallas de för det algebraiska komplementet (eng. cofactors) $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Anmärkning 9.5. Observera att schemat för utveckling av en determinant innebär att

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

vilket benämns att determinanter är *multilinjära* i kolonner och rader.

Utvecklingen av en 5×5 determinant längs med första kolonnen börjar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41} + a_{51}M_{51}$$

där t.ex.

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Dessa under-determinanter ska i sin tur utvecklas, o.s.v.

9.4. Effektiv beräkning av determinanter

Kombinera regler för determinanter med utveckling och beräkning av determinanter.

Att utveckla determinanter efter rader eller kolonner tar mycket tid för större determinanter. En viktig faktor för att få ner beräkningstiden är förekomsten av talet 0. Att utföra radoperationer och kolonnoperationer så att antalet nollor ökar kan reducera beräkningstiderna. Vi gör några observationer.

Exempel 9.2. Determinanten med enbart tal skilda från 0 på diagonalen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

Vi inser också att

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 3 & 0 & 0 \\ d & e & f & 4 & 0 \\ g & h & i & j & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

För triangulära matriser (övre/nedre/diagonala) ges determinanten av produkten av diagonalelementen.

Vi vet att en multipel av en rad eller kolonn adderad till en annan rad eller kolonn inte förändrar determinantens värde. Genom att utföra denna typ av operationer för att erhålla triangulära determinanter kan arbetet med att beräkna determinanters värde reduceras, jämfört med att direkt utveckla efter rad eller kolonn. En hjälp är naturligtvis också att observera om en rad eller kolonn är en multipel av en annan.

Exempel 9.3. Beräkna determinanten för matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Flera möjligheter finns. Beräkningen som följer använder endast radoperationer.

(1) Utveckla efter rad 3 eller kolonn 4 eftersom det finns en nolla.
(2) En nolla till kan erhållas genom $(3) + (2)$ som ger

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

och därefter utveckla.
(3) Om vi därefter utför $-2\,(3) + (4)$ erhålls

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

som kan utvecklas.
(4) Vi kan också *börja* mer systematiskt

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

med att byta (3) och(1), notera minustecknet framför determinanten eftersom vi skiftat rader,

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Och kan nu utföra $(1) + (2)$, $-2(1) + (3)$, $-2(1) + (4)$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

vilken kan utvecklas, men vi kan också utföra $-(3) + (4)$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix},$$

och $5(2) + (3)$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix},$$

och skifta (3) och (4)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 32 \end{vmatrix},$$

och utföra 5(3) + (4)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 7 = 14.$$

Det finns många alternativ och olika avvägningar behöver göras.

9.9 Övning 9.9. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

9.5. Volym

En geometrisk tolkning av determinanten.

Volymen som spänns upp av tre vektorer (parallellepiped) ges av den skalära trippelprodukten enligt tidigare, 5.3.

$$V(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3) = (\overline{a}_1 \times \overline{a}_2) \bullet \overline{a}_3.$$

Där $V(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3)$ betecknar volymen som funktion av 3 vektorer. Vi studerar hur trippelprodukten kan skrivas som en determinant. Vektorprodukten är med $\overline{a}_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{a}_2 = (y_1, y_2, y_3)$ och $\overline{a}_3 = (z_1, z_2, z_3)$,

$$\overline{a}_1 \times \overline{a}_2 = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\overline{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\overline{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{e}_3 \tag{9.5.1}$$

och denna vektor ska tas skalärt med $\overline{a}_3 = (z_1, z_2, z_3)$. Uttrycken inom parentes i formel 9.5.1 är under-determinanterna; uttrycket inom parentes framför $\overline{e}_1$ är underdeterminanten M_{11}, nästa är $-M_{12}$ och sista är M_{13}. Skalärprodukten av $\overline{a}_3$ med vektorprodukten ger termer som innehåller $\overline{a}_3 \cdot \overline{e}_1 = z_1$ $\overline{a}_3 \cdot \overline{e}_2 = z_2$ och $\overline{a}_3 \cdot \overline{e}_3 = z_3$ i ett ortogonalt och normerat system; dessa, z_1, z_2, z_3, är koefficienterna framför under-determinanterna. Vi utgår från 9.5.1 och beräknar skalärprodukten med $\overline{a}_3$:

$$\begin{aligned} V(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3) = (\overline{a}_1 \times \overline{a}_2) \bullet \overline{a}_3 &= \\ (x_2y_3 - x_3y_2)\,\overline{a}_3 \bullet \overline{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\overline{a}_3 \bullet \overline{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{a}_3 \bullet \overline{e}_3 &= \\ (x_2y_3 - x_3y_2)\,z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,z_3 &= \\ z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} &= \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}&. \end{aligned}$$

Vi konstaterar att determinanten kan tolkas som en volym (med tecken) och att determinanten beräknar skalära trippelprodukten. Eftersom enligt reglerna $\left|A^T\right| = |A|$ så kan vektorerna även placeras i kolonner.

Exempel 9.4. Att beräkna volymen som spänns upp av de tre vektorerna $\overline{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\overline{a}_2 = (1, 2, 1)$ och $\overline{a}_3 = (-1, 1, 1)$ görs enkelt genom att beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vektorn $\overline{a}_1$:s komponenter står som första kolonnvektor (kunde också placerats som radvektor), vektorn $\overline{a}_2$ som andra kolonnvektor o.s.v. Vi utvecklar efter första kolonnen (eftersom vi har en 0:a där)

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-1) - 0 + 1 \cdot (1-(-2)) = 1 - 0 + 3 = 4.$$

Volymen är 4 volyms-enheter.

På samma sätt erhålls för två vektorer i planet parallellogrammens area genom att sätta vektorerna som kolonnvektorer i determinanten. Volymen kan också användas för arean för en parallellogram inbäddat i 3 dimensioner,

$$V(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{e}),$$

där $\overline{a}_1$ och $\overline{a}_2$ är vektorerna som bestämmer en parallellogram och $\overline{e}$ är en enhetsnormal till planet som parallellogrammen ligger i. Eftersom vektorerna för parallellogrammen ligger i ett plan får vi

$$V(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{e}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

9.6. Volym- och Area-ändringar

Hur avbildningar ändrar areor och volymer.

Två andra regler som är viktiga:

(1) $|AB| = |A|\,|B|$. Determinanten av en produkt är lika med produkten av determinanterna.
(2) $\left|A^{-1}\right| = 1/|A|$ Determinanten av en invers är inverterade värdet av determinanten.

Regel 2 följer av regel 1 och att $AA^{-1} = I$. Inget bevis för regel 1 ges.

Om tre kolonnvektorer spänner upp en parallellepiped med en viss volym, vilken volym spänner de tre bilderna av kolonnvektorerna upp? Betrakta linjära avbildningen $\tilde{X}_1 = FX_1$, från grundformen $Y = FX$, med

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

där symbolen $\tilde{}$ läses 'tilde'. Om vi vill avbilda fler än en vektor med avbildningen kan vi sätta samman dem till

$$\tilde{X} = FX$$
$$\left(\tilde{X}_1\,\tilde{Y}_1\,\tilde{Z}_1\right) = F\,(X_1\,Y_1\,Z_1)$$
$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 & \tilde{z}_1 \\ \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 & \tilde{z}_2 \\ \tilde{x}_3 & \tilde{y}_3 & \tilde{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

där vektorerna $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ och $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ spänner upp en parallellepiped med volymen V. Dessa 3 vektorer avbildas på $\overline{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, $\overline{\tilde{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ och $\overline{\tilde{z}} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)$ som i sin tur spänner upp en parallellepiped med volymen $\tilde{V}$. Vad är förhållandet mellan dessa två volymer? Vi vet att determinanten för en matris med vektorer som kolonner anger den volym som de 3 vektorerna spänner upp. Vi tar determinanten för vänster och höger sida i uttrycket $\tilde{X} = FX$

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 & \tilde{z}_1 \\ \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 & \tilde{z}_2 \\ \tilde{x}_3 & \tilde{y}_3 & \tilde{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

eftersom determinanten av en produkt är produkten av determinanterna. Vi ser att $|F|$ anger hur volymen ändras: $\tilde{V} = |F| \cdot V$. Avbildningsmatrisen anger volymförändringen.

9.10 Övning 9.10. I avsnitt 8.2.3 beräknas kvoten mellan volymerna som 9. Beräkna determinanten för avbildningen, dvs. determinanten för

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9.7. Vektorprodukt och determinanter

Vektorprodukt kan formellt skrivas med hjälp av räknereglerna för determinanter såsom

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{9.7.1}$$

Elementen $\overline{e}_i$ behandlas som reella tal (som blockmatriser). Om determinanten utvecklas efter första raden erhålls uttrycket för vektorprodukt

$$\overline{e}_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \overline{e}_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \overline{e}_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$
$$\overline{e}_1 (u_2v_3 - u_3v_2) + \overline{e}_2 (u_3v_1 - u_1v_3) + \overline{e}_3 (u_1v_2 - u_2v_1) =$$
$$(u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1).$$

Se tillbaka på 9.5. Med den skalära trippelprodukten av $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ menas $(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w}$. Den kan skrivas med hjälp av reglerna för determinanter såsom

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{9.7.2}$$

9.11 Övning 9.11. Vad händer om vektorprodukten beräknas som

$$\begin{vmatrix} \overline{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \overline{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \overline{e}_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

i stället för 9.7.1?

9.12 Övning 9.12. Vad händer om den skalära trippelprodukten beräknas som

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

i stället för 9.7.2?

9.8. Facit Övningar

9.1

$$\det(A) = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-1) = -8 + 3 = -5$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8$$

så

$$x = \frac{-17}{-5} = 3,4$$

$$y = \frac{8}{-5} = -1,6$$

Vi kontrollerar $2x + 3y = 2 \cdot 3,4 + 3 \cdot (-1,6) = 6,8 - 4,8 = 2$ och $-x - 4y = -3,4 - 4 \cdot (-1,6) = -3,4 + 6,4 = 3$, ok.

9.2 Sätter $(x_1,\, x_2) = (1,\, 3)$ och $(y_1,\, y_2) = (-1,\, 4)$ så

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 4 + 3 = 7.$$

9.3 Ingen kommentar.

9.4 Matriser kan för det första ha olika rader och kolonner men determinanter är alltid kvadratiska. Trots att uppställningarna ser lika ut är determinanten endast ett tal. Med matriser kopplade till lösningen av ekvationssytem är endast radoperationer tänkbara. Att byta två rader i en matris påverkar inte matrisen men ändrar determinantens tecken. En faktor framför matrisen som multipliceras in hamnar i varje element; i en determinant hamnar den t.ex. bara i en kolonn.

Regel 1: En term i utvecklingen innehåller ett element från varje rad som faktor, det innebär att determinanten är linjär radvis, och kolonnvis. Om en matris ska delas upp så erhålls en matris med 0 på övriga element.

Regel 2: Om en matris multipliceras med ett tal ska den skrivas på varje element i matrisen. Om en determinant multipliceras med ett tal ska det endast skrivas på en rad eller en kolonn.

Regel 3: Om två rader byter plats så ändras inte ekvationssystemet och därmed inte heller matris-ekvationens lösningar.

Regel 4: Motsvaras av att två rader i koefficientmatrisen är multiplar av varandra. Innebär att ekvationerna är linjärt beroende. Vi får då ingen entydig lösning. Lösningarna saknas eller är oändligt många beroende på högerledet.

Regel 5: Finns ingen direkt motsvarighet mer än att en matris är en noll-matris om alla elementen är 0.

Regel 6: Samma operation utförs vid lösning av ekvationssystem. Varje gång operationen utförs erhålls ett system som är ekvivalent med det föregående. Determinantens värde ändras inte vilket associerar till att matrisen inte ändras.

Regel 7: En matris och dess transponat är inte samma. Men om radvektorerna är linjärt oberoende så är kolonnvektorerna det också. Så på så sätt finns det en likhet.

9.5 Ingen kommentar.

9.6
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\,(3+1) + 1\,(3-1) = 8 + 2 = 10 \neq 0$$
så vektorerna är linjärt oberoende. Det innebär att $AX = 0$ endast har den triviala lösningen $X = 0$ och systemet $AX = Y$ har lösningar oavsett högerledet Y. Det tre kolonnvektorerna spänner upp en parallellepiped med volymen 10. Det finns också en invers till matrisen A.

9.7 Ingen kommentar.

9.8 Ingen kommentar.

9.9 Vi utför $(1) + (2)$, $-(1) + (3)$ och $-2\,(1) + (4)$ och erhåller
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$
Utvecklar enligt första kolonnen
$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -4 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$
Utför $(1) + (2)$
$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$
Utvecklar efter andra kolonnen
$$-4\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -4\,(3-16) - 3\,(40-6) = -50.$$
Naturligtvis finns det andra vägar.

9.10 Ingen kommentar mer än att determinanten av avbildningsmatrisen är $2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 9$.

9.11 Inget. Det blir samma resultat.

9.12 Inget. Det blir samma resultat.

9.9. Kapitelproblem

9.1 *Lite annorlunda, och svårare, uppgifter där du systematiskt måste använda hur beräkning av determinanter fungerar.* Från (?). Använd räknereglerna för determinanter och beräkna faktorerna i:

(a)

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}.$$

(b) *

$$\begin{vmatrix} x-y+z & x+z & \dots & x+z \\ x+z & x-y+z & \dots & x+z \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x+z & x+z & \dots & x-y+z \end{vmatrix}.$$

9.2 *Som föregående.* Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & d & 0 & x & x \\ d & d & d & 0 & 0 \\ d & d & d & d & 0 \\ d & d & d & d & d \end{vmatrix}.$$

9.10. Facit Kapitelproblem

9.1 (a) $(x-f)(x-d)(x-a)x$. Börja t.ex. med att multiplicera rad 3 med -1 och sedan addera den till rad 4.

(b) Bryt ut $x+z$ från varje kolonn, n stycken

$$(x+z)^n \begin{vmatrix} \frac{x-y+z}{x+z} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{x-y+z}{x+z} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \frac{x-y+z}{x+z} \end{vmatrix},$$

beteckna kvoten med a

$$(x+z)^n \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Addera raderna 2 till n, till rad 1,

$$(x+z)^n \begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \dots & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Bryt ut $a+n-1$

$$(x+z)^n (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Vi beräknar determinanten och börjar med att subtrahera 2:a kolonnen från 1:a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-a & a & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$$

som vi utvecklar enligt 1:a kolonnen

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-a & a & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$$

som är samma typ men en grad lägre i dimension så vi kan skriva

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}.$$

Vi sätter samman

$$(x+z)^n (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

där $a = \frac{x-y+z}{x+z}$ och n är determinantens storlek.

9.2 $-(5)x/d + (2)$, därefter $(3)x/d + (2)$. Svar d^5.

KAPITEL 10

De 3 rummen

Vi studerar kolonnrummet, radrummet och nollrummet. Om kolonnerna i en matris ses som vektorer så spänner de upp ett kolonnrum; liknande för raderna. Mängden av lösningar kallas för lösningsmängden: om högerledet är 0 så kallas lösningsmängden för nollrummet.

10.1. Erfarenhetsgrund

För att kunna beskriva de 3 rummen behöver din erfarenhetsgrund organiseras. Exempel och diskussioner utförs i 3 dimensioner. Vi grundar med 3 typfall i 3 dimensioner.

Definiera lösningsmängden som den mängd som innehåller som element alla lösningar till ett ekvationssystem. Om ekvationssystemet är homogent (endast 0:or i höger led) så kallas lösningsmängden för nollrummet.

Innan vi tar itu med teorin kring lösningsmängden för ekvationssystem skapar vi lite systematiska erfarenheter och funderar kring kopplingen mellan kolonnvektorernas linjära oberoende eller beroende och lösningarna. Vi arbetar endast med kvadratiska matriser inledningsvis.

Betrakta en matris som bestående av kolonnmatriser, med en suggestiv beteckning har vi för 3 vektorer i 3 dimensioner

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \overline{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = [\text{blockmatriser}] = (a_1\, a_2\, a_3)$$

där det sista uttrycket avser tre blockmatriser som element i matrisen. Ett inhomogent ekvationssystem innebär att dessa 3 vektorer ska kombineras till den vektor som är högerledet

$$AX = Y \text{ skrivs som } \begin{pmatrix} | & | & | \\ \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \overline{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

eller

$$x_1 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_2 \\ \downarrow \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_3 \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

eller för att betona att även högerledet kan betraktas som en vektor

$$x_1 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_2 \\ \downarrow \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_3 \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \overline{y} \\ \downarrow \end{pmatrix}.$$

Med vektornotation skrivs ovanstående

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3 = \overline{y}.$$

Om A är 3 linjärt oberoende kolonnvektorer kommer det alltid att gå att lösa systemet; 3 linjärt oberoende vektorer kan 'nå' alla punkter i rummet. De tre kolonnvektorerna spänner upp ett rum (en mängd), kallat *kolonnrummet.* Men vad händer om de 3 kolonnvektorerna är linjärkombinationer av varandra?; hur blir kolonnrummet då?

Lösningsmängden ges av möjliga värden på x_1, x_2 och x_3; hur ser den mängden ut?; hur många dimensioner har den? Lösningsmängden då högerledet är 0 kallas nollrummet.

Det finns två fall om kolonnvektorerna är linjärkombinationer: de spänner upp ett plan eller enbart en linje. Vi studerar de totalt 3 olika fallen med tanke på kolonnrum och lösningsmängd; vi ser också på skillnaden mellan inhomogena och homogena system. Kolonnrummet bestäms av matrisen A och nollrummet bestäms av matrisen X.

I de 3 följande avsnitten behandlas i 3 dimensioner

(1) 3 linjärt oberoende kolonnvektorer
(2) 3 kolonnvektorer, linjärt beroende, som spänner upp ett plan
(3) 3 kolonnvektorer, linjärt beroende, som spänner upp en linje

Varje avsnitt behandlar systematiskt utgångsläget, beräkning för lösningen, kolonnrum, radrum, lösningsmängden och nollrummet. Läs texten komparativt, dvs. jämför noga de 3 olika avsnitten med varandra. I övningarna utför du själv samma resonemang på ett annat system.

10.1.1. 3 linjärt oberoende vektorer. Vi väljer 3 linjärt oberoende vektorer, i 3 dimensioner, och noterar att vad vi än anger som högerled (den vektorsumma som ska konstrueras) så finns det lösningar; de 3 vektorerna spänner upp rummet; koordinater (obekanta) (x_1, x_2, x_3) kan *entydigt* bestämmas.

Som exempel väljer vi de 3 linjärt oberoende vektorerna $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$ och $(-1, 2-1)$ (den tredje är vald som vektorprodukten av de andra två). Detta kan skrivas som ett ekvationssystem, med valfritt högerled, och vi vet att det har *en* lösning; inga parametrar finns med i lösningen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Determinanten för koefficientmatrisen är 6.

Vi löser systemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= y_1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= y_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

$-2(1) + (2)$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= y_1 \\ -x_2 + 4x_3 &= -2y_1 + y_2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -3y_1 + y_3 \end{aligned}$$

$-2(2) + (3)$

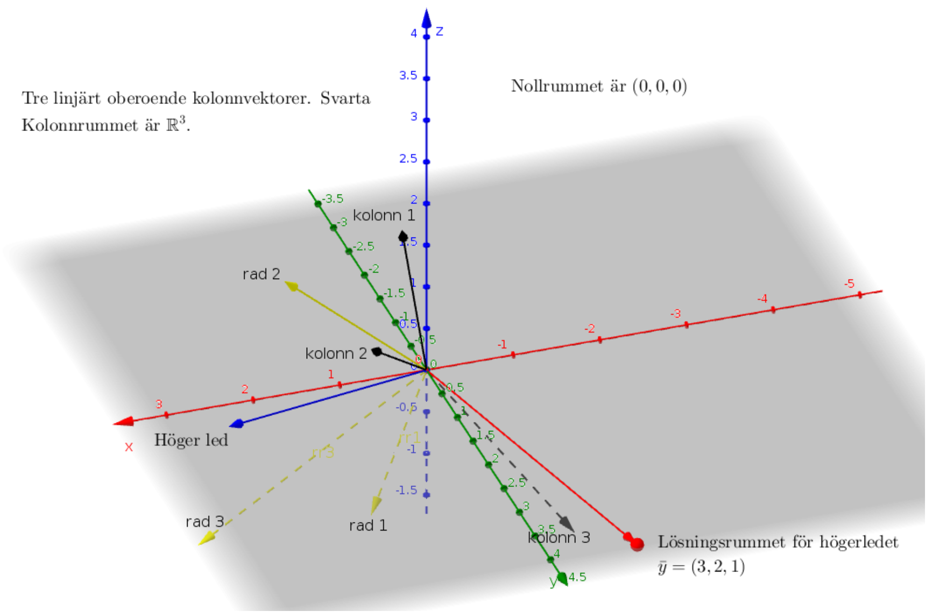
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= y_1 \\
-x_2 + 4x_3 &= -2y_1 + y_2 \\
-6x_3 &= y_1 - 2y_2 + y_3.
\end{aligned}
$$

Det framgår att y_1, y_2 och y_3 är helt fria. I ekvation (1) väljer vi y_1 fritt. Om vi har valt y_1 i (1) så är y_2 helt fri i (2) så vilket som helst högerled kan erhållas. Om vi valt y_1 och y_2 så är y_3 fri i (3) så vilket som helst högerled kan erhållas.

Om vi väljer $(y_1, y_2, y_3) = (3, 2, 1)$ så beskrivs situationen av figur 10.1.1. Lösningen i detta fall är $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 4, 0)$.

Geometriskt innebär det tre plan (exempelvis är planet från första raden $x_1 + x_2 - x_3 = y_1$ där y_1 är en konstant) och de ger i detta fall en skärning i en punkt.

Vi vet också att om högerledet är $(0, 0, 0)$ (en homogen ekvation) så finns bara den triviala lösningen $(0, 0, 0)$; en linjärkombination av linjärt oberoende vektorer når bara $(0, 0, 0)$ om vi tar 0 (koefficienter/koordinater) av alla vektorer. *Lösningsmängden* för $AX = Y$ består av en punkt $(-1, 4, 0)$. Lösningsmängden för $AX = 0$, kallat *nollrummet*, består av den triviala lösningen, också en punkt. *Kolonnrummet* är hela $\mathbb{R}^3$.



FIGUR 10.1.1. Tre linjärt oberoende kolonnvektorer, radvektorer och lösningsmängden.

ANMÄRKNING 10.1. Observera skillnaden mellan vad kolonnvektorerna $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ i ekvationssystemet spänner upp (linjärt hölje), kolonnrummet, som i detta fall är $\mathbb{R}^3$, och mängden av möjliga värden på de obekanta (lösningsmängden) x_1, x_2, x_3 som är en punkt.

$$
x_1 \begin{pmatrix} | \\ \bar{a}_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} | \\ \bar{a}_2 \\ \downarrow \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} | \\ \bar{a}_3 \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \bar{y} \\ \downarrow \end{pmatrix}
$$

10.1 Övning 10.1. Genomför resonemanget i detta avsnitt för matrisen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.2 Övning 10.2. I texten anges en metod för att skapa ekvationssystem genom att välja två vektorer som inte är proportionella mot varandra och sedan välja den tredje som vektorprodukten. Varför utgör dessa 3 vektorer automatiskt en bas?

En annan metod är att välja två vektorer som inte är proportionella mot varandra och sedan välja en tredje så att skalärprodukten med de andra två är 0. Varför utgör dessa 3 vektorer automatiskt en bas?

Konstruera två 3×3 ekvationssystem som har entydig lösning, ett med vardera metod.

10.1.2. 3 vektorer i ett plan. Med 3 vektorer i ett plan, avses att de spänner upp $\mathbb{R}^2$. Vi väljer 2 vektorer som tidigare, $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$ och väljer den 3:e vektorn som en linjärkombination av dessa två: $(1, 2, 3) - (1, 1, 1) = (0, 1, 2)$; de 3 vektorerna spänner upp kolonnrummet. Systemet är linjärt beroende. Om detta ställs upp som ett ekvationssystem har vi

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,0 \\ 2\,1\,1 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Determinanten för koefficientmatrisen är 0.

Vi löser systemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= y_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= y_2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Vi börjar med att eliminera x_3 i (3) med hjälp av (2)

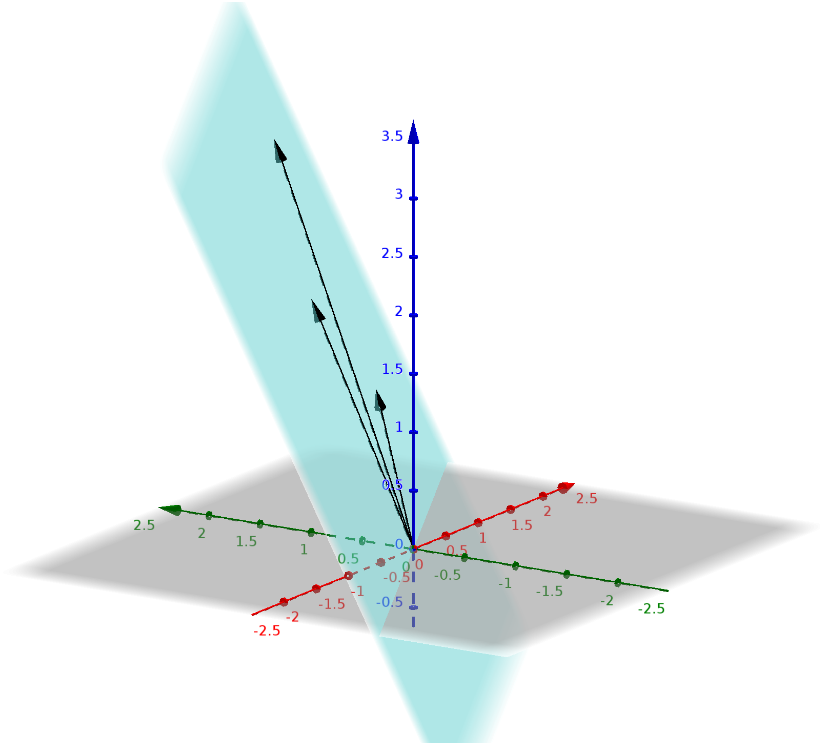
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= \quad y_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad &= \quad y_2 \\ -x_1 - x_2 &= -2y_2 + y_3 \end{aligned}$$

Vi ser att vänster led för (1) och (3) är en multipel av varandra, -1, och är därför linjärt beroende av varandra. Vi uppfattar också att det ställs krav på högerledet för att systemet ska vara lösbart; (1) och (3) ger: $-y_1 = -2y_2 + y_3$. Uttrycket innebär att, vid existens av lösning, högerledets punkter ligger i planet $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$ annars ligger de inte i kolonnrummet. Se figur 10.1.2 där de tre kolonnvektorerna ligger i planet $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$. Är detta inte uppfyllt, högerledet är inte en delmängd av kolonnrummet, saknar ekvationssystemet lösning.

Om vi t.ex. väljer $y_3 = 1$ och $y_2 = 2$ så måste vi välja $y_1 = 2y_2 - y_3 = 4 - 1 = 3$ annars erhålls ingen lösning. Det är klart att högerledets vektor måste ligga i de 3 linjärt beroende vektorernas plan (kolonnrummet) annars kan vi inte 'nå' den.

Vi låter detta vara uppfyllt, så att det existerar lösningar, och fortsätter med endast 2 ekvationer men 3 obekanta. Vi eliminerar x_2 i (2) och erhåller

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= \quad y_1 \\ x_1 + x_3 &= -y_1 + y_2 \end{aligned}$$



FIGUR 10.1.2. Tre linjärt beroende vektorer som spänner upp ett plan. Systemets högerled måste ligga i planet för att det ska finnas lösningar.

Vi behöver nu införa en parameter, kalla den s och erhåller med $x_3 = s$

$$x_1 = -s - y_1 + y_2 \text{ och } x_2 = -x_1 + y_1 = -(-s - y_1 + y_2) + y_1 = s + 2y_1 - y_2.$$

Vi kan skriva lösningarna som:

$$\begin{aligned} x_1 &= -s + (-y_1 + y_2) \\ x_2 &= s + (2y_1 - y_2) \\ x_3 &= s \end{aligned}$$

En rät linje utgör lösningsmängden, det är inte längre en punkt (som vid 3 linjärt oberoende). Lösningarna ges av en vektor (fix för ett visst högerled) adderad med en riktningsvektor multiplicerad med en parameter; vi har en vektor till en fix punkt och en vektor som kan ändras i sin längd, men har en given riktning (riktningsvektor).

Riktningsvektorn är $\overline{v} = (-1, 1, 1)$, den andra vektorn är $\overline{m} = (-y_1 + y_2, 2y_1 - y_2, 0)$ så med vektorbeteckningar kan vi skriva $\overline{x} = s\overline{v} + \overline{m}$ där $s\overline{v}$ även är lösningar till det homogena systemet ($\overline{m}$ är då $\overline{0}$). För att få lösningen till det inhomogena systemet adderar vi således en vektor $\overline{m}$ till lösningen av det homogena, $s\overline{v}$.

Med tidigare exempel på värden för högerledet ($y_1 = 3$, $y_2 = 2$ och $y_3 = 1$)

$$\begin{aligned} x_1 &= -s - 1 \\ x_2 &= s + 4 \\ x_3 &= s \end{aligned} \tag{10.1.1}$$

erhålls lösningarna för just det högerledet.

När 1 vektor 'försvann' (enbart 2 vektorer var linjärt oberoende) fick vi en linje (1 parameter) i stället för en punkt (3 linjärt oberoende vektorer, 0 parametrar) som lösningsmängd. Alla lösningar ligger på en linje och linjens *riktning* är bestämd av det homogena systemet. Linjen läggs sedan fast genom kraven från högerledet. Om vi hade löst den homogena ekvationen hade vi erhållit samma riktningsvektor men $\overline{m}$ hade varit $(0,0,0)$. Kontrollerar detta för högerledet 0.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

och här är (1) och (3) samma ekvation, vi förlorar en ekvation. Vi inför då på samma sätt som tidigare en parameter $s = x_3$. Vidare eliminerar vi x_2 i (2)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

och får igen $x_3 = s$, $x_1 = -s$ och $x_2 = s$, samma riktningsvektor som vid den inhomogena ekvationen. Det rum som spänns upp av *lösningarna* till det homogena systemet kallas för *nollrummet.*

Lösningsmängden för det inhomogena systemet består av en riktningsvektor med parameter samt en vektor till en fix punkt. Vilket också kan uttryckas som att lösningen för det inhomogena systemet består av lösningen för det homogena plus en fix förskjutning av den homogena lösningen. (Kanske känner du igen detta från lösningar till differentialekvationer.)

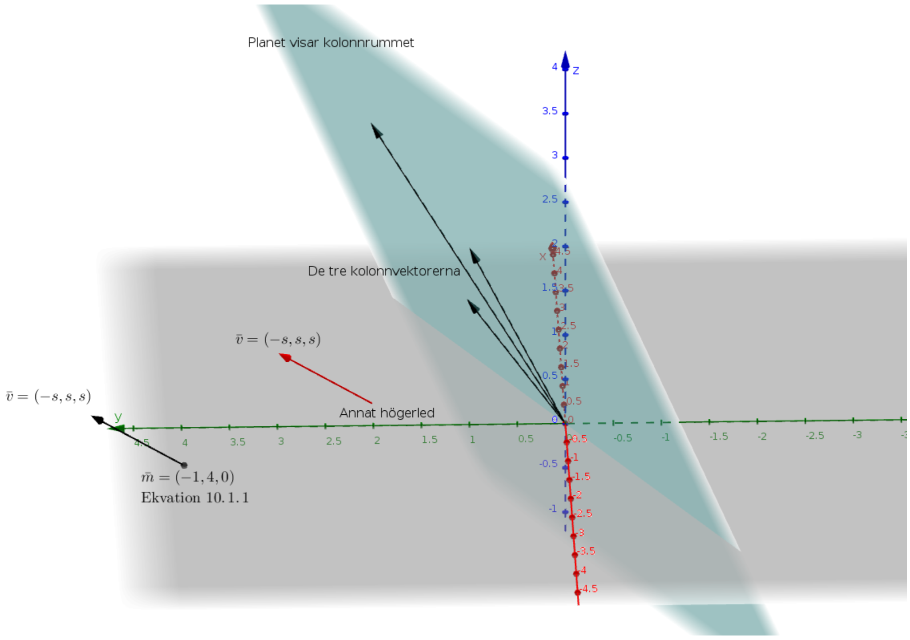
I figur 10.1.3 ser vi som tidigare de tre linjärt beroende kolonnvektorerna i sitt plan (möjliga högerled om lösning önskas).

Vi ser också i figur 10.1.3 en vektor för lösningsmängden för ett inhomogent system, exemplet med högerledet $(y_1, y_2, y_3) = (3, 2, 1)$, vars lösningar ges av $x_1 = -s - 1$, $x_2 = s + 4$, $x_3 = s$ som kan skrivas $\overline{x} = \overline{v}s + \overline{m} = (-1, 1, 1)\, s + (-1, 4, 0)$. I figuren finns punkten $(-1, 4, 0)$ och vektorn $(-s, s, s)$ med $s = 1$. Linjen som är lösningsmängden ligger på denna (bundna)vektor .

I rött, i figur 10.1.3, syns ytterligare en vektor med riktningen $(-s, s, s)$ men nu med ett annat högerled. Lösningarna består alltid av $(-s, s, s)$ plus en vektor $\overline{m}$ beroende av högerledet.

Nu har vi sett kolonnvektorerna och det rum de spänner upp samt lösningsmängden för ett visst högerled. Vad gäller för radvektorerna? Om vi studerar det homogena systemet och dess lösningsmängd, nollrummet, ser vi att radvektorerna är ortogonala mot nollrummet; skalärprodukten av en radvektor och en lösning $(x_1\, x_2\, x_3)^T$ är 0. Systemet är

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,0 \\ 2\,1\,1 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

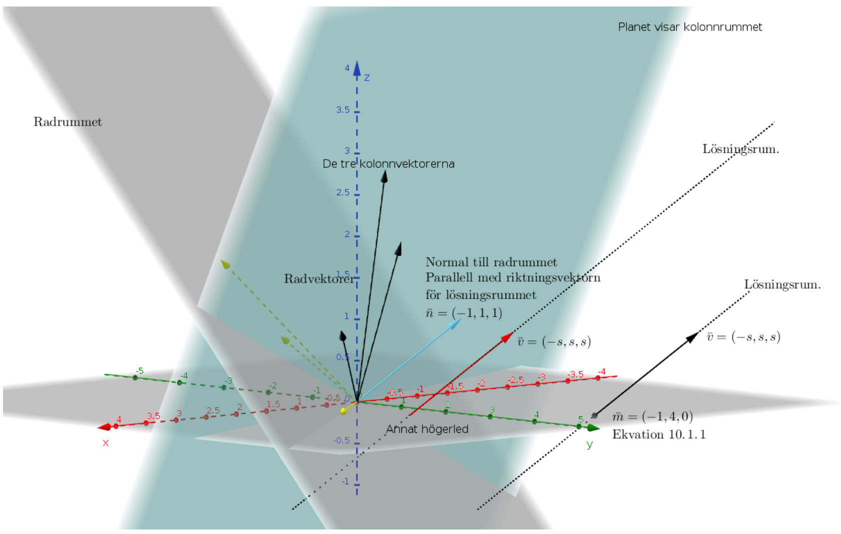


FIGUR 10.1.3. Kolonnrummet och lösningsmängden.

som med matrismultiplikation innebär: $(1, 1, 0) \bullet (x_1, x_2, x_3) = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$ och $(2, 1, 1) \bullet (x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$ o.s.v.

Det innebär att de tre radvektorerna är ortogonala mot riktningsvektorn för nollrummet (som anger lösningarna tillsammans med en parameter) och därmed mot lösningsmängden.

Vektorprodukter parvis mellan radvektorer ger multiplar av riktningsvektorn för lösningsmängden. I figuren 10.1.4 syns de tre radvektorerna, gula, i sitt plan.



FIGUR 10.1.4. Alla deltagare. Radvektorer i gult.

I vårt tidigare fall med 3 linjärt oberoende vektorer är också radvektorerna vinkelräta mot nollrummet, men nollrummet är nollvektorn $(0,0,0)$ som är vinkelrät mot alla vektorer.

Frågan blir nu vad som händer om vi förlorar ännu en vektor; dvs. vektorerna är alla multiplar av varandra och vi har egentligen bara en ekvation?

Anmärkning 10.2. Observera skillnaden mellan vad vektorerna $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ i ekvationssystemet spänner upp, kolonnrummet, som i detta fall är ett plan, och mängden av möjliga värden, lösningsrummet, på de obekanta x_1, x_2, x_3 som ligger längs en rät linje.

$$x_1 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_2 \\ \downarrow \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} | \\ \overline{a}_3 \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \overline{y} \\ \downarrow \end{pmatrix}$$

10.3 Övning 10.3. Genomför resonemanget i detta avsnitt för matrisen

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.1.3. 3 Vektorer på en linje. Med 3 vektorer på en linje avses att de alla är proportionella mot varandra. Vi studerar $(1,2,3)$, $(-1,-2,-3)$ och $(2,4,6)$. Ekvationssystemet är

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= y_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= y_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Vi börjar med att eliminera x_1 i (2) och (3) och ser vad som händer

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= y_1 \\ 0 &= -2y_1 + y_2 \\ 0 &= -3y_1 + y_3 \end{aligned} \tag{10.1.2}$$

Som tidigare får vi krav på högerledet. Om vi ser (2) och (3) som ett ekvationssystem med krav så kan vi sätta $y_1 = r$ och erhåller $y_2 = 2r$ och $y_3 = 3r$, där r är en parameter. Högerledets element måste ligga på linjen $(y_1, y_2, y_3) = (1,2,3)\,r$ för att ekvationssystemet ska ha en lösning. Detta är samma linje som kolonnvektorerna spänner upp.

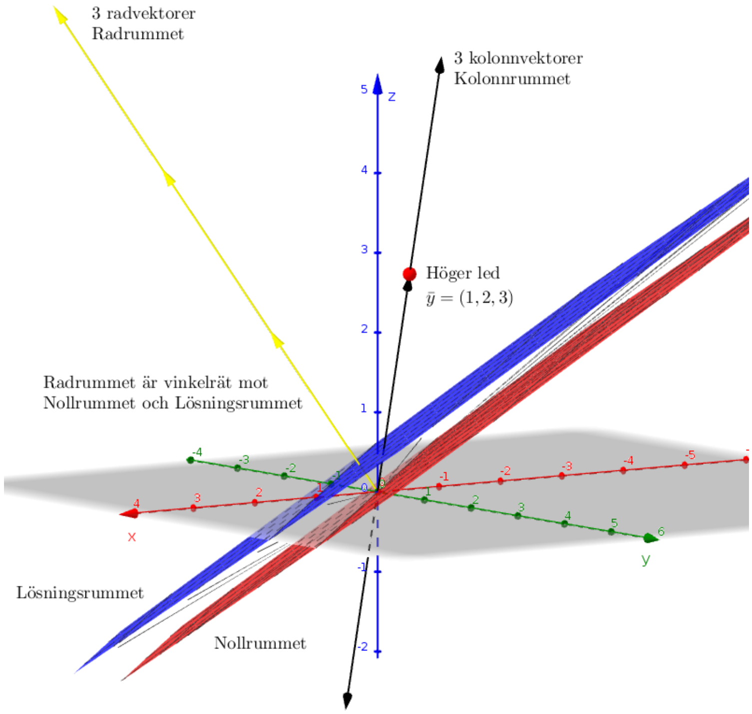
Vi fortsätter med lösningen av systemet, ekvation (1). Nu behövs 2 parametrar $x_3 = s$ och $x_2 = t$

$$\begin{aligned} x_1 &= t - 2s + y_1 \\ x_2 &= t \\ x_3 &= s \end{aligned} \tag{10.1.3}$$

Rummet som kolonnvektorerna spänner upp är $\overline{l} = r\overline{v}$ där t.ex. $\overline{v} = (1,2,3)$ och r är en parameter. Om y_1 väljs fritt i ekvation (1) i 10.1.2 så är y_2 helt bestämd av rad (2) och y_3 av (3) om lösning ska existera. I figur 10.1.5 syns de tre kolonnvektorerna spänna upp en linje; högerledet är satt till $(y_1, y_2, y_3) = (1,2,3)$.

Planet för lösningsmängden, blått i figuren, bestäms av $x_1 - x_2 + 2x_3 = y_1$ som också kan uttryckas enligt ekvation 10.1.3. För olika y_1 erhålls olika plan, i figuren har använts $y_1 = 1$. Planet för nollrummet har $y_1 = 0$ och är rött.

Radrummet är de 3 gula vektorerna. Radvektorerna är vinkelräta mot lösningsmängden och nollrummet, vilket framgår av figuren.



FIGUR 10.1.5. Tre kolonn-vektorer spänner upp ett kolonnrum, i detta fall en rät linje.

När två kolonnvektorer försvinner och vi har endast en kvar ökar antalet parametrar till 2; lösningsmängden beskrivs av ett plan. Det finns ett komplementärt förhållande mellan antalet linjärt oberoende vektorer och antalet parametrar eller dimensioner hos lösningsmängden.

ÖVNING 10.4. Genomför resonemanget i detta avsnitt för matrisen 10.4

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Följande tabell summerar vår erfarenhet så här långt.

TABELL 1. Samband mellan rang och nolldim.

	av kolonnvektorer uppspända dimensioner	antal parametrar eller dimensioner i lösningsmängden	summa
3 linj. ob.	3 ($\mathbb{R}^3$)	0 (en punkt)	3
3 i ett plan	2	1 (linje)	3
3 på en linje	1	2 (plan)	3

Detta är inte en tillfällighet utan ett mönster som är allmänt giltigt.

Vi definierar rangen för en matris rang (A) som antalet linjärt oberoende kolonnvektorer. Vi har arbetat mest med inhomogena ekvationer $AX = Y$ och om man studerar motsvarande homogena ekvation $AX = 0$ så framgår det att det införs lika många parametrar i lösningen, det är samma antal dimensioner i lösningsmängden. Lösningsmängden till $AX = 0$ är nollrummet och man talar om dimensionen hos nollrummet som 'nolldim', vilket är ett tal. Tabellen kan för en matris med storleken $m \times n$, inte enbart $n \times n$ som vi undersökt, sammanfattas i

$$\text{rang}\,(A) + \text{nolldim} = n$$

dvs. summan är lika med antalet kolonner i matrisen. Sambandet kan också uttryckas som att antalet linjärt oberoende kolonnvektorer plus antalet parametrar, i lösningsmängden eller nollrummet, ger antalet kolonnvektorer.

10.5 Övning 10.5. Ange rang och nolldim för övningarna 10.1, 10.3 och 10.4.

Anmärkning 10.3.

(1) Antalet linjärt oberoende kolonnvektorer är lika många som antalet linjärt oberoende radvektorer.
(2) Det minsta av talen i $m \times n$ anger maximalt möjliga linjärt oberoende vektorer. Rangen är mindre än eller lika med det minsta av talen m och n.

10.2. Rang och pivotelement

Exempel klargör hur matriser avläses för bestämning av rang.

Exempel 10.1. Antalet linjärt oberoende vektorer framträder om en matris är skriven på trappform eller reducerad trappform; antal ekvationer framgår tydligt. Vi använder exempel enligt tidigare och börjar med 3 linjärt oberoende vektorer och anger inte högerled:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ger på reducerad trappform (högerled visas ej) } \begin{matrix} \to \\ \to \\ \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har 3 ledande 1:or (pivotelement) vilket innebär 3 linjärt oberoende ekvationer. Rangen är 3. Nolldim är 0.

Om vi tar de 3 vektorerna i ett plan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ger på trappform } \begin{matrix} \to \\ \to \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrisen på trappform (och homogent system) innebär

$$x_1 + x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

som för att lösas behöver en parameter, t.ex. $x_3 = s$ som i sin tur ger x_2 och x_3. Antalet ledande 1:or, 2 stycken, ger antalet linjärt oberoende vektorer. Rangen är 2. Nolldim, antalet parametrar i lösningsmängden, är 1.

För 3 vektorer på en linje

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ ger på trappform } \begin{matrix} \to \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har en ledande 1:a så det är 1 linjärt oberoende vektor. Rangen är 1. Nolldim är 2. Den översta raden innebär $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ (för homogent högerled). För att uttrycka lösningarna till den ekvationen behövs 2 parametrar: tex. $x_3 = s$ och $x_2 = t$ så $x_1 = -2s + t$.

Övning 10.6. Matriserna för övningarna 10.1, 10.3 och 10.4 är 10.6

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

överför dem på trappform. Bestäm antalet ledande 1:or (pivotelement) och därmed värdet på rangen.

Exempel 10.2. En icke-kvadratisk koefficient matris, 4×6

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 6 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som ger på reducerad trappstegsform

$$\begin{array}{c} \to \\ \to \\ \to \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

där vi har 3 ledande 1:or, dvs. 3 linjärt oberoende vektorer (både för kolonn och rad). Rangen är 3 och antalet kolonner 6 (antalet obekanta), så nolldim är $6-3=3$, och det innebär att vi behöver 3 parametrar.

Nu följer exemplet ovan, 10.2, men mer detaljer och en undersökning kring skillnaden mellan homogena och inhomogena system.

10.3. Homogena och inhomogena system

Förhållandet mellan lösningarna till homogena och inhomogena system.

Låt oss studera lösningar till några ekvationssystem. Vi fokuserar inte på hur man löser dem utan enbart på vektorerna och vilka rum de spänner upp, speciellt om förhållandet mellan lösningarna för homogena och inhomogena system.

Ekvationssystemet (samma som vi studerat ovan i exempel 10.2)

$$\begin{array}{rrrrrrl} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +4x_5 & & =0 \\ x_1 & & & -x_4 & +2x_5 & +x_6 & =0 \\ 4x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +8x_5 & & =0 \\ & x_2 & -2x_3 & -2x_4 & & & =0 \end{array},$$

har den sammansatta matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

som på trappform är

$$\begin{matrix}\to\\ \to\\ \to\\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&2&0&0\\0&1&-2&-2&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Rad 4 är alltid uppfylld. Rad 3 innebär $x_6 = 0$; vidare ger oss rad 2 $x_2-2x_3-2x_4 = 0$ där vi sätter $x_4 = r$ och $x_3 = s$ så att $x_2 = 2s + 2r$.

Rad 1 är $x_1 - x_4 + 2x_5 = 0$ som med $x_5 = t$ ger $x_1 = r - 2t$. Vektorn (kolonnvektor) som löser systemet är således $\overline{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6) = (r - 2t,\, 2s + 2r,\, s,\, r,\, t,\, 0)$. Dessa vektorer, beroende på r, s och t, är alla vinkelräta mot radvektorerna i matrisen. Vi sätter som exempel $r = 1$, $s = 2$ och $t = 3$ och erhåller $\overline{x} = (-5,\, 6,\, 2,\, 1,\, 3,\, 0)$. Skalärprodukten mellan vektorn bildad från rad 1 och $\overline{x}$ är $(-5,\, 6,\, 2,\, 1,\, 3,\, 0) \bullet (2,\, -1,\, 2,\, 0,\, 4,\, 0) = -10 - 6 + 4 + 12 = 0$.

Vi löser nu ett *korresponderande* system med höger led skilt från 0, ett inhomogent system;

$$\begin{array}{rrrrrrcr} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +4x_5 & & = & 0\\ x_1 & & & -x_4 & +2x_5 & +x_6 & = & 2\\ 4x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +8x_5 & & = & -1\\ & x_2 & -2x_3 & -2x_4 & & & = & 1 \end{array}$$

som på reducerad trappform är

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&2&0&\frac{1}{2}\\0&1&-2&-2&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Rad 4 är alltid uppfylld. Rad 3 innebär $x_6 = \frac{3}{2}$; från rad 2 får vi $x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1$ där vi sätter $x_4 = r$ och $x_3 = s$, precis som tidigare och vi får $x_2 = 2s+2r+1$. Rad 1 innebär $x_1-x_4+2x_5 = \frac{1}{2}$ som med $x_5 = t$ ger $x_1 = r-2t+\frac{1}{2}$. Vi skriver lösningen som $\overline{x} = \left(r - 2t + \frac{1}{2},\, 2s + 2r + 1,\, s,\, r,\, t,\, \frac{3}{2}\right)$. För att göra jämförelsen tydlig mellan den homogena och inhomogena lösningen delar vi upp i r, s och t.

(10.3.1)

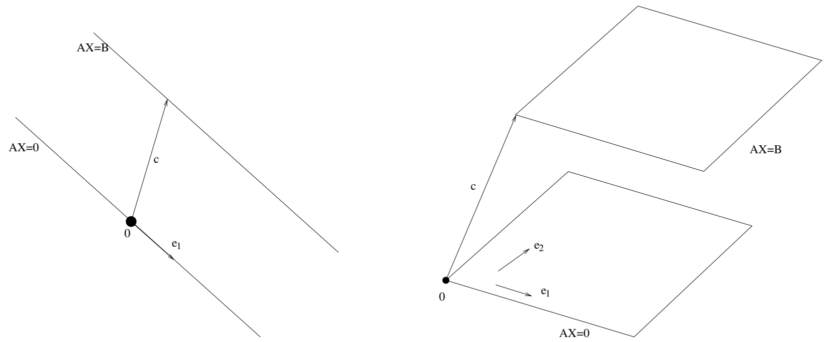
$$\begin{cases}\text{homogen} & \overline{x}_h = r\,(1,\,2,\,0,\,1,\,0,\,0) + s\,(0,\,2,\,1,\,0,\,0,\,0) + t\,(-2,\,0,\,0,\,0,\,1,\,0)\\ \text{inhomogen} & \overline{x}_i = r\,(1,\,2,\,0,\,1,\,0,\,0) + s\,(0,\,2,\,1,\,0,\,0,\,0) + t\,(-2,\,0,\,0,\,0,\,1,\,0) + \left(\frac{1}{2},\,1,\,0,\,0,\,0,\,\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

som komprimerat kan skrivas

$$\begin{cases}\text{homogen} & \overline{x}_h = r\overline{e}_1 + s\overline{e}_2 + t\overline{e}_3\\ \text{inhomogen} & \overline{x}_i = r\overline{e}_1 + s\overline{e}_2 + t\overline{e}_3 + \overline{c}\end{cases}$$

Vi ser att lösningarna till den inhomogena är samma som till den homogena plus en konstant $\overline{c} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$. Detta gäller allmänt. Vektorerna för den homogena lösningen — $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ — spänner upp ett vektorrum; för att få den inhomogena translateras detta rum med en konstant $\overline{c}$. Det rum som spänns upp av de tre vektorerna för det homogena ekvationssystemet är lösningsmängden och är i detta fall ett nollrum. Mängden av lösningar till den inhomogena erhålls genom att denna mängd translateras med en konstant, se figur 10.3.1. Observera att lösningsmängden till den inhomogena inte är ett vektorrum.

Notera också att vi har 6 okända, 4 ekvationer inledningsvis, och i slutet 3 linjärt oberoende vektorer att uttrycka den homogena lösningen med.



FIGUR 10.3.1. Geometrisk illustration av lösningarna till $AX = B$.

ÖVNING 10.7. Visa att vektorerna $\overline{e}_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)\overline{e}_2 = (0,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ och $\overline{e}_3 = (-2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$ är linjärt oberoende och således spänner upp ett lösningsrum med 3 dimensioner. 10.7

10.4. Kolonnrum och radrum

Vi använder symboler från två olika perspektiv.

EXEMPEL 10.3. Vi visar att för det linjära systemet $AX = B$ med linjärt oberoende kolonnvektorer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

så befinner sig vektorn $(1, 3, -1)$ i det rum som spänns upp av de 3 vektorerna $\overline{k}_1 = (1, -1, 1)$, $\overline{k}_2 = (2, 1, 3)$ och $\overline{k}_3 = (2, -3, -3)$. Systemet har lösningen $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{7}(-25, 11, 5)$ så att linjärkombinationen för att skapa $\overline{b} = (1, 3, -1)$ eller 'nå' punkten $b : (1, 3, -1)$ är i en representation:

$$x_1\overline{k}_1 + x_2\overline{k}_2 + x_3\overline{k}_3 = \overline{b}$$

där vänster led kan skrivas och summan beräknas

$$\begin{aligned} \frac{-25}{7}(1, -1, 1) + \frac{11}{7}(2, 1, 3) + \frac{5}{7}(2, -3, -3) &= \frac{1}{7}(7, 21, -7) \\ &= (1, 3, -1) \end{aligned}$$

vilket överensstämmer med höger led.

Och i en annan representation (med a_i som blockmatriser)

$$AX = B$$

$$(a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

där vänster led kan skrivas och summan beräknas

$$
\begin{aligned}
\frac{-25}{7}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{11}{7}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{5}{7}\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix} &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-25+22+10\\25+11-15\\-25+33-15\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}7\\21\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

vilket överensstämmer med höger led.

Detta system har endast en konstant som lösning (vi har inga parametrar med). De tre kolonnvektorerna spänner upp kolonnrummet. På samma sätt spänner de tre radvektorerna $\overline{r}_1 = (1, 2, 2)$, $\overline{r}_2 = (-1, 1, -3)$ och $\overline{r}_3 = (1, 3, -3)$ upp ett radrum. Den mängd som utgör lösningarna till ekvationssystemet $AX = 0$ eller med vektorbeteckningar

$$x_1\overline{k}_1 + x_2\overline{k}_2 + x_3\overline{k}_3 = \overline{0}$$

är nollrummet; nollrummet består i detta fall endast av nollvektorn, jämför med definitionen av linjärt oberoende vektorer $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ som är $\lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3 = \overline{0}$ med endast den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

De tre radvektorerna är ortogonala mot nollrummet eftersom i det fallet har vi (med beteckningar: r_1 är en blockmatris medan $\overline{r}_1$ är en vektor:

$$AX = 0$$

$$\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{r}_1 \bullet \overline{x}\\\overline{r}_2 \bullet \overline{x}\\\overline{r}_3 \bullet \overline{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

så $\overline{r}_1 \bullet \overline{x} = 0$ innebär att radvektor 1 är vinkelrät mot nollrummet, vilket är lösningarna i kolonnmatrisen x. Samma gäller för $\overline{r}_2$ och $\overline{r}_3$.

10.5. Baser för rummen

Bas för rad-, kolonn och nollrummet.

Tidigare läste vi av rang i en matris genom att räkna pivotelementen, de ledande ettorna. Vi söker nu efter en bas för kolonnrummet och en bas för radrummet: hur erhålls de från matrisen? Vi följer upp exempel 10.2.

En *bas* för det rum som kolonnvektorerna i en given matris spänner upp ges av de kolonner med ledande 1:or man har i trappform. I exempel 10.2 var koefficientmatrisen

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 0 & 4 & 0\\1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1\\4 & -3 & 6 & 2 & 8 & 0\\0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

som på trappform är

$$T = \begin{array}{c}\rightarrow\\\rightarrow\\ \\ \\\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & -2 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Om vi i matrisen T använder kolonner med ledande 1:or ser vi att en bas för kolonnrummet i T skulle kunna vara kolonnvektorerna $(1\,0\,0\,0)^T$ och $(0\,1\,0\,0)^T$. Men dessa fungerar inte som bas för matrisen A; bl. a. ser man att basvektorerna för T inte kan skapa vektorn $(2\,1\,4\,0)$ eftersom 4:an i vektorn inte kan skapas som en linjärkombination av de två basvektorerna i T. Men däremot kan kolonnvektorerna i A på *samma plats* som kolonnvektorerna i T fungera som en bas: $(2\,1\,4\,0)^T$ och $(-1\,0\,-3\,1)^T$, mer om detta senare.

En bas för lösningsmängden får vi genom att använda riktningsvektorerna i lösningen,se 10.3.1, som var $(1\,2\,0\,1\,0\,0)^T$, $(0\,2\,1\,0\,0\,0)^T$ och $(-2\,0\,0\,0\,1\,0)^T$.

Basen för radrummet ges däremot av radvektorerna i T $(1\,0\,0\,-1\,2)$ och $(0\,1\,-2\,-2\,0)$.

Eftersom radoperationer inte förändrar lösningar till ekvationssystem kan vi påstå att de inte förändrar nollrummet till en matris.

Vi kan också påstå att radoperationerna inte ändrar radrummet. Basvektorer till radrummet kan hämtas från vilken matris som helst under lösningen av systemet.

Problemet är att kolonnrummet ändras vid de radoperationer som görs för att lösa ekvationssystemet. Det visar sig dock att det inte blir svårt att finna kolonnrummet. Följande gäller nämligen:

- Om en matris skrivs i reducerad trappstegsform så är raderna med inledande etta en bas för radrummet.
- För kolonnvektorerna (med en etta som inledande på raden) gäller att de, basvektorerna, är på samma *plats* i den reducerade matrisen som i koefficientmatrisen för ekvationssystemet.

Exempel 10.4. Vi visar på problemen med kolonnrummet. Utgå från matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

och utför $-2\,(1) + (2)$, tillåten radoperation vid lösning av ekvationssystem, så erhålls

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kolonnvektorerna i B är proportionella mot varandra, likaså i A. Eftersom kolonnvektorerna är linjärt beroende har vi bara en vektor i planet i båda fallen. Denna vektor anger en riktning. För A är riktningen $(1,2)$ men för B är den $(1,0)$, vilket inte är samma riktning. Kolonnvektorena från A respektive B spänner inte upp samma rum, efter vår radoperation. Radoperationer ändrar således kolonnrummet.

Exempel 10.5. Med matriser från exempel 10.1 och avsnitt 10.1 tittar vi på bestämning av kolonnvektorer i 3 fall.

(1) Matrisen för 3 linjärt oberoende vektorer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

har ett radrum som spänns upp av $(1,1,-1)$, $(2,1,2)$ och $(3,1,-1)$, och kolonnrummet spänns upp av $(1,2,3)$, $(1,1,1)$ och $(-1,2,-1)$.

(2) Matrisen för 3 vektorer som spänner upp ett plan gavs av

$$A = \begin{pmatrix} 1\,1\,0 \\ 2\,1\,1 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}$$

som på trappform är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Radrummet spänns upp av $(1,1,0)$ och $(0,1,-1)$ i T och även av $(1,1,0)$ och $(2,1,1)$ i A. Däremot spänns inte kolonnrummet för A upp av $(1,0,0)$ och $(1,1,0)$ i T. Om högerledet i ekvationssystemet hade varit $(3,2,1)$ (som vi hade som högerled i 10.1) så kan det inte skapas av en linjärkombination av $(1,0,0)$ och $(1,1,0)$; den 3:e komponenten kan inte konstrueras. Däremot om vi avläser kolonnerna i A så ger kolonnerna på samma plats, $(1,2,3)$ och $(1,1,1)$, oss möjlighet att skapa $(3,2,1)$ genom t.ex. $-(1,2,3) + 4(1,1,1) = (3,2,1)$.

(3) Matrisen för 3 vektorer på en linje gavs av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

som på reducerad form är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Radrummet spänns upp av $(1,-1,2)$, samma i både A och T, men kolonnrummet för A spänns inte upp av $(1,0,0)$ i T, ty t.ex. högerledet $(1,2,3)$ (som vi hade som högerled i 10.1) kan inte nås av $(1,0,0)$ men däremot av kolonnvektorn i A $(1,2,3)$, så kolonnen på samma plats i A spänner upp kolonnrummet för A.

10.8 Övning 10.8. Utför resonemangen i exempel 10.5 på matriserna A_1, A_2 och A_3 från övningarna 10.1, 10.3 och 10.4.

10.6. Sammanfattning

Att ta reda på allt om rummen.

Om vi vill finna radrummet och kolonnrummet för en matris A kan vi med hjälp av radoperationer skriva den på reducerad trappform T. Radvektorerna vid pivotelementen anger en bas för T och samtidigt A. Radvektorerna i A på samma plats kan också användas som bas.

Tyvärr är inte kolonnrummet för matrisen T samma som för A eftersom radoperationerna ändrar kolonnrummet. Men basvektorerna för kolonnrummet för A

befinner sig på samma plats så de kan avläsas direkt i A. I exemplet

$$\begin{array}{llllllr} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +4x_5 & & =0 \\ x_1 & & & -x_4 & +2x_5 & +x_6 & =0 \\ 4x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +8x_5 & & =0 \\ & x_2 & -2x_3 & -2x_4 & & & =0 \end{array}$$

som har koefficientmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 6 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.6.1}$$

som på reducerad trappform är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.6.2}$$

bestämmer vi en bas för radrummet respektive kolonnrummet. Som bas för radrummet avläser vi vektorerna $\overline{r}_1 = (1, 0, 0, -1, 2, 0)$, $\overline{r}_2 = (0, 1, -2, -2, 0, 0)$ och $\overline{r}_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ i T. Som bas för kolonnrummet för matris T i 10.6.2 har vi vektorerna $\overline{k}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\overline{k}_2 = (0, 1, 0, 0)$ och $\overline{k}_3 = (0, 0, 1, 0)$. Radvektorerna i T är basvektorer för A, 10.6.1, och T, 10.6.2. Bas för kolonnvektorerna för A står på samma kolonn som pivotelementen i T så de är $(2, 1, 4, 0)$, $(-1, 0, -3, 1)$ och $(0, 1, 0, 0)$.

Här följer ett litet slarvigt uttryckt resonemang, finns vissa dolda antaganden. Se om du kan följa det.

I ett ekvationssystem, matris A, med m rader och n kolonner gäller att $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$. Detta ger eventuellt ett antal parametrar. Har vi tre rader och 6 kolonner finns det 3 obekanta för många, vi får 3 parametrar inledningsvis.

Sedan kan vi 'förlora' (linjärt beroende) ekvationer, för varje förlorad ekvation måste vi skapa ytterligare parametrar: lösningsmängden växer. Förlorar vi en ekvation till måste vi införa ytterligare en parameter, 3+1=4.

Antalet kolonner var 6. Hade vi haft 6 rader (linj. ob.) hade vi inte fått några parametrar. Men nu saknade vi redan 3 rader så 6-3. Men vi hade ett linjärt beroende i de återståenden ekvationerna så vi förlorade ytterligare en, återstår 6-3-1=2 linjärt oberoende kolonnvektorer. Radrummet har samma antal dimensioner.

Lösningsmängden har parametrarna vi införde först 3, sedan 1 till, således 4 dimensioner i nollrummet.

Övning 10.9. Bestäm för ekvationssystemet A följande, och använd datorstöd för att överföra matriserna på reducerad trappstegsform: 10.9

(1) koefficientmatrisen
(2) utvidgad matris (augmented) på reducerad trappform
(3) radrummet
(4) kolonnrummet
(5) lösningsmängden
(6) nollrummet
(7) rang

(8) en bas för radrummet
(9) en bas för kolonnrummet

$$\begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +4x_5 & = & -2 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & +4x_4 & +8x_5 & = & -7 \\ 3x_1 & +x_2 & +5x_3 & +4x_4 & & = & 3 \\ & 2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & +6x_5 & = & -6 \end{array}$$

10.10 Övning 10.10. Konstruera ett eget exempel med 3 ekvationer, 5 obekanta och med rang 2. Det viktiga är själva förfarandet som du ska skriva ner på ett algoritmliknande sätt.

10.7. Facit Övningar

10.1Kontrollera determinanten, $|A_1| = 12$ så vektorerna är linjärt oberoende. Ekvationssystemet är

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= y_2 \\ x_2 + x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

(tyvärr är denna avskriven fel, ska vara $2x_2 + x_3$ i nedersta raden) $-3\,(1) + (2)$ eliminerar x_1

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ 4x_2 - 4x_3 &= -3y_1 + y_2 \\ x_2 + x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

och $-4\,(3) + (2)$ eliminerar x_2

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ -8x_3 &= -3y_1 + y_2 - 4y_3. \\ x_2 + x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Skriver i ordning

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_2 + x_3 &= y_3. \\ -8x_3 &= -3y_1 + y_2 - 4y_3 \end{aligned}$$

I ekvation (1) väljer vi y_1 fritt. Om vi har valt y_1 i (1) så är y_3 helt fri i (2) så vilket som helst högerled kan erhållas. Om vi valt y_1 och y_3 så är y_2 fri i (3) så vilket som helst högerled kan erhållas. Om vi väljer, som tidigare, $(y_1, y_2, y_3) = (3, 2, 1)$ är ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1. \\ -8x_3 &= -11 \end{aligned}$$

och lösningarna ges av

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{11}{8} \\ x_2 &= 1 - \frac{11}{8} = -\frac{3}{8} \\ x_1 &= 3 - \frac{3}{8} - \frac{11}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Lösningsmängden är en punkt med dimensionen 0. Lösningsmängden för motsvarande homogena system är den triviala lösningen $(0, 0, 0)$. Kolonnrummet är hela $\mathbb{R}^3$.

10.3 Determinanten för matrisen A_2 är 0. De 3 vektorerna spänner upp kolonnrummet. Ekvationssystemet är

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 &= y_2 \\ 2x_2 + 2x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Till exempel kan man börja med att eliminera x_1 i (2) genom $-3\,(1)+(2)$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ 4x_2 + 4x_3 &= -3y_1 + y_2 \\ 2x_2 + 2x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Vi ser att vänster led för (2) och (3)är en multipel av varandra och är därför linjärt beroende av varandra. Krav för lösningar ges av (2) och (3): $2y_3 = -3y_1 + y_2$. Kravet är att punkten (y_1, y_2, y_3) ligger i planet $-3y_1 + y_2 - 2y_3 = 0$. Kolonnvektorerna måste ligga i detta plan för att det ska finnas lösningar. Om högerledet inte är en delmängd av kolonnrummet saknar systemet lösning. Om vi väljer $y_3 = 1$ och $y_2 = 2$ så måste vi välja $y_1 = y_2/3 - 2y_3/3 = 2/3 - 2/3 = 0$. Ekvationssystemet är

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Utför $-3\,(1)+(2)$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Tar bort en rad

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Inför parameter $x_3 = t$ och erhåller $2x_2 + 2t = 1$ eller $x_2 = -t + 1/2$ samt $x_1 = -t + 1/2 - t = -2t + 1/2$.

$$\begin{aligned} x_1 &= -2t + 1/2 \\ x_2 &= -t + 1/2 \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

En rät linje utgör lösningsmängden. Nollrummet är också en rät linje och ges av $(x_1, x_2, x_3) = t\,(-2, -1, 1)$. Vi konstaterar också att radrummet är ortogonalt mot nollrummet

$$\begin{aligned} (1,-1,1) \bullet (-2,-1,1) &= -2 + 1 + 1 = 0 \\ (3,1,7) \bullet (-2,-1,1) &= -6 - 1 + 7 = 0 \\ (0,2,2) \bullet (-2,-1,1) &= -2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

10.4 Determinanten för A_3 är 0. Ekvationssystemet är

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= y_1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= y_2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Vi utför $-3\,(1)+(2)$ och $-\,(1)+(3)$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= y_1 \\ 0 &= -3y_1 + y_2 \\ 0 &= -y_1 + y_3 \end{aligned}$$

Vi behöver 2 parametrar $x_3 = s$ och $x_2 = t$

$$\begin{aligned} x_1 &= t - 2s + y_1 \\ x_2 &= t \\ x_3 &= s \end{aligned}$$

Lösningsmängden är ett plan. Nollrummet är också ett plan, men genom origo.

10.5 Övning 10.1 har rang 3 och nolldim 0. Övning 10.3 har rang 2 och nolldim 1. Övning 10.4 har rang 1 och nolldim 2.

10.6 Ingen kommentar.

10.7 $\overline{e}_1$ har en 1:a i 4:e komponenten och det har inte de andra 2, således kan den inte vara linjärt beroende av dem. Liknande för de andra komponenerna.

10.8 Ingen kommentar.

10.9 Koefficientmatrisen är

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Den utvidgade matrisen är

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 8 & -7 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Koefficientmatrisen på reducerad trappstegsform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och den utvidgade på reducerad trappstegsform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 ekvationer och 5 obekanta ger oss omedelbart minst 1 parameter. Vi ser av matrisen på reducerad trappstegsform att vi förlorat 2 ekvationer: vi behöver 3 parametrar. $x_5 = s$, $x_4 = t$. De 2 ekvationer vi har är

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + t + 3s &= -3 \\ x_1 + 2x_3 + t - s &= 0 \end{aligned}$$

och om vi sätter $x_3 = r$ erhåller vi

$$\begin{aligned} x_1 &= -2r - t + s \\ x_2 &= r - t - 3s - 3 \\ x_3 &= r \\ x_4 &= t \\ x_5 &= s \end{aligned}$$

Radrummet spänns upp av $(1, 0, 2, 1, -1)$ och $(0, 1, -1, 1, 3)$.

Kolonnrummet spänns upp av $(2,1,3,0)$ och $(2,3,1,2)$. I detta rum ligger högerledet. Högerledet ges av $2\,(2,1,3,0) - 3\,(2,3,1,2) = (-2,-7,3,-6)$.

Lösningsmängden ges av $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \overline{x} = (-2,1,1,0,0)\,r + (-1,-1,0,1,0)\,t + (1,-3,0,0,1)\,s + (0,3,0,0,0)$. Nollrummet ges av $\overline{x} = (-2,1,1,0,0)\,r + (-1,-1,0,1,0)\,t + (1,-3,0,0,1)\,s$, dvs. ett rum som spänns upp av de 3 vektorerna$(-2,1,1,0,0)$, $(-1,-1,0,1,0)$ och $(1,-3,0,0,1)$.

Rangen ges av

$$\text{rang}\,(A) + \text{nolldim} = n.$$

Antalet kolonner är 5, nolldim bestär av 3 basvektorer så det återstår 2 till rangen som är just antalet linjärt oberoende kolonnvektorer, vilket vi tidigare konstaterat är 2.

10.10 3 ekvationer, 5 obekanta och med rang 2. Välj 2 linjärt oberoende kolonnvektorer med 3 komponenter. Konstruera de 3 andra kolonnerna som linjärkombinationer av dessa 2. Välj en linjärkombination av de två linjärt oberoende kolonnvektorerna som höger led.

10.8. Kapitelproblem

10.1

10.9. Facit Kapitelproblem

10.1

KAPITEL 11

Egenvärden

11.1. Grunderna

Vektorer (representerat som kolonnmatris) v som vid en linjär avbildning, matris A, uppfyller vilkoret att $Av = \lambda v$ där λ är en reell konstant, kallas för egenvektorer; egenvektorer till avbildningen A. Det innebär att en vektor v vid avbildningen avbildas på en multipel av sig själv, både v och Av kan läggas på samma linje. Att Av ska vara just λv är ett krav som kan användas för att bestämma v och λ då A är given.

11.1.1. En grafisk introduktion. Begreppen egenvärden och egenvektorer används för att beskriva vektorer som vid en avbildning avbildas på den linje som vektorn ligger på; längden och tecken får ändras. Tex. om en vektor $\overline{v}$ avbildas på vektorn $2,3\overline{v}$ eller $-1,2\overline{v}$ så ligger de nya vektorerna på den linje som $\overline{v}$ ligger på. En vektor som under en avbildning avbildas på en multipel av sig själv kallas för egenvektor, för den avbildningen. Talet framför vektorn, $2,3$ respektive $-1,2$ i vårt exempel, kallas för egenvärdet.

Vilka vektorer är egenvektorer till en given avbildning? Rakt fram lösningen är att testa med alla vektorer. Om man tänker en liten stund inser man att man endast behöver pröva alla riktningar, och egentligen endast med enhetsvektorer i alla riktningar. Vi diskuterar detta utifrån avbildningen som ges av matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

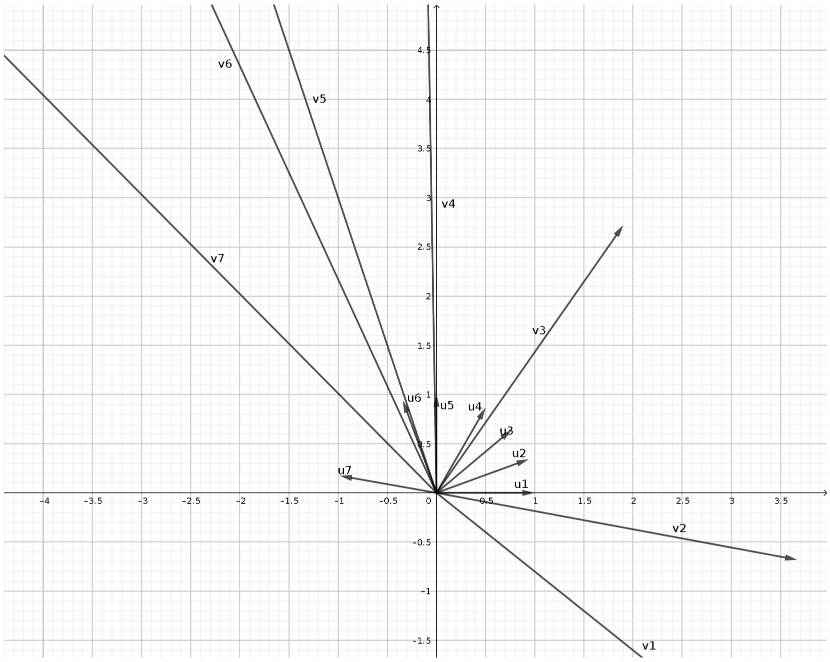
I figur 11.1.1 finns ett antal vektorer ui som avbildas med matrisen M på vi. Ser man att någon vektor avbildas på en multipel av sig själv? Är $v1$ en multipel av $u1$? Ligger $v1$ på samma linje som $u1$? Nej de verkar har stor skillnad i riktning. Däremot verkar $v3$ ligga inte så långt ifrån $u3$? Det framgår också att $v1$ och $v2$ ligger medurs från $u1$ respektive $u2$, medan $v3$ ligger moturs om $u3$.

Om vi väljer vektorn, och här föregår vi resultatet, $V = (3\,2)^T$ så erhålls vid avbildning med M,

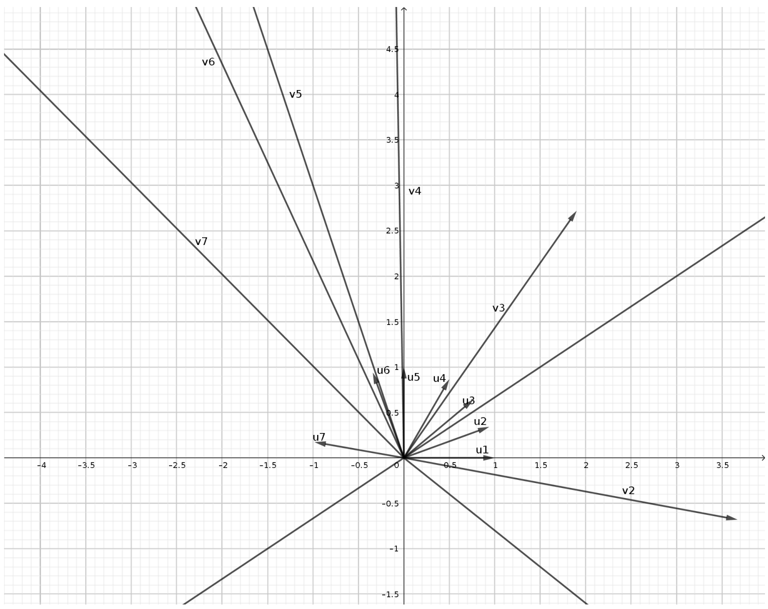
$$MV = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-6 \\ -12+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vektorn V avbildas på en vektor på samma linje men med en 3 gånger större längd, vektorn V är en egenvektor till avbildningen M; egenvärdet är 3. I figur 11.1.2 finns linjen som vektorn V ligger på inlagd; notera att linjen går igenom punkten (3, 2). Alla vektorer på den linjen avbildas på den linjen, med eventuellt förändrad längd. Notera också att linjen ligger nära $u3$ som vi såg som en eventuell kandidat.

Finns det fler egenvektorer? Om vi fortsätter leta ser vi att $u6$ och $v6$ ligger nära varandra. Det visar sig vid en algebraisk beräkning, som vi ska göra i nästa kapitel, att $V = (-1\,2)^T$ är en egenvektor med multipeln, eller egenvärdet, 11.



FIGUR 11.1.1. Vektorerna ui avbildas på vi. Syns det en egenvektor?



FIGUR 11.1.2. Egenvektorer ligger på linjen. Bland annat ligger vektorn $(3, 2)$ på denna linje.

ÖVNING 11.1. Varför är det inte nödvändigt att rita några vektorer på nedre halvan av koordinatsystemet när jag ritat på övre halvan?

Geometrin gör egenvektorer och egenvärden åskådliga men det är också uppenbart svårt att gissa egenvektorer grafiskt. Vi övergår nu till en algebraisk representation för att kunna bestämma egenvärden och egenvektorer. Vi startar om men med algebra.

11.1.2. En algebraisk introduktion. En vanlig fråga utifrån tillämpningar är om det för en viss linjär avbildning finns en vektor som avbildas på en multipel av sig själv, dvs. ligger på samma linje. Denna typ av frågor uppkommer t.ex. vid studiet av rotationer, speglingar, lösningar till ekvationer och val av koordinatsystem. Detta kan formuleras som: När sker en avbildning F för vilket det gäller att $FX = \lambda X$, där $\lambda \in \mathbb{R}$. Exempelvis är F en kvadratisk matris och X en kolonnvektor. Vektorer för vilka detta gäller kallas *egenvektorer* för avbildningen F. Talen λ kallas för egenvärden.

Anmärkning 11.1. Vektorn cX där c är en konstant skalär är också en egenvektor då X är det, ty $F(cX) = FXc = \lambda Xc = \lambda(cX)$.

Ekvationen $FX = \lambda X$ kan skrivas om som

$$FX - \lambda X = 0.$$

Vad innebär ekvationen explicit? Vi vet att λX innebär att varje element i X multipliceras med λ,

$$\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Om vi försöker faktorisera utan att notera att algebran avser matriser erhåller vi

$$(F - \lambda)\, X = 0$$

men det är inte möjligt i allmänhet att utföra $F - \lambda$ då F är en matris och λ är ett tal. Observera att $\lambda I X$ däremot är samma som λX, men λI kan brytas ut till $(\lambda I)\, X$, så

$$(F - \lambda I)\, X = 0$$

är ekvivalent med

$$FX - \lambda X = 0.$$

Exempel 11.1. Vi löser ekvationen $(F - \lambda I)\, X = 0$ för

$$F = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix},$$

vilket innebär

$$F - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -4 & 9-\lambda \end{pmatrix}.$$

Vi får för ekvationssystemet $(F - \lambda I)\, X = 0$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -4 & 9-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vilket innebär } \begin{array}{rr} (5-\lambda)\, x_1 & -3x_2 = 0 \\ -4x_1 & +(9-\lambda)\, x_2 = 0 \end{array}$$

Vi löser detta ekvationssystem rakt fram, vi ska se andra sätt senare. Dividera översta ekvationen med $5 - \lambda$ och eliminera x_1 i den nedersta; förutsätter $\lambda \neq 5$. Vi får vid division med $5 - \lambda$

$$\begin{array}{rr} x_1 & -\frac{3x_2}{(5-\lambda)} = 0 \\ -4x_1 + & (9-\lambda)\, x_2 = 0 \end{array},$$

och vid eliminering av x_1 i den nedre ekvationen, 4(1) + (2):

$$\begin{array}{rr} x_1 & -\frac{3x_2}{(5-\lambda)} = 0 \\ 0+ & \left((9-\lambda) - \frac{12}{(5-\lambda)}\right) x_2 = 0 \end{array},$$

så att (det är λ vi ska bestämma, inte x_1 eller x_2)

$$(9-\lambda) - \frac{12}{(5-\lambda)} = 0$$

eller

$$(9-\lambda)(5-\lambda) - 12 = 0$$

vilket vi känner igen som kravet att determinanten

$$|F - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(5-\lambda) - 12$$

ska vara lika med 0 (linjärt *beroende*) för att få icke-triviala lösningar. I fortsättningen går vi direkt på att beräkna determinanten vilket då ger oss polynomekvationer för att bestämma λ. Vår ekvation ger oss den så kallade *karaktäristiska* ekvationen

$$45 - 9\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 12 = 0$$

på standardform

$$\lambda^2 - 14\lambda + 33 = 0$$

som vi löser och erhåller $\lambda = 11$ och $\lambda = 3$. Vi vet nu att det finns två λ sådana att $FX = \lambda X$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

men vi vet inte för vilka kolonnmatriser detta gäller. Vi måste för $\lambda = 3$ lösa ekvationssystemet

$$\begin{array}{rr} 5x_1 & -3x_2 = 3x_1 \\ -4x_1 & +9x_2 = 3x_2 \end{array}$$

för att kunna bestämma x_1 och x_2. Subtraherar högerledet

$$\begin{array}{rr} (5-3)\,x_1 & -3x_2 = 0 \\ -4x_1 & +(9-3)\,x_2 = 0 \end{array},$$

förenkla

$$\begin{array}{rr} 2x_1 & -3x_2 = 0 \\ -4x_1 & +6x_2 = 0 \end{array};$$

där ekvationerna är linjärt beroende (en multipel av varandra) vilket inte är en överraskning. För att lösa $2x_1 - 3x_2 = 0$ inför vi en parameter t och skriver $x_2 = t$ och erhåller $x_1 = 3/2t$, så kolonnmatriserna är $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t$ eller helt enkelt $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ eftersom det är underförstått att denna typ av ekvationer ger parameterlösningar (linjärt beroende) och inte en vektor med fix längd. Vilken som helst av vektorerna duger att arbeta med, t.ex. kan vi även skriva att egenvektorn är $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. I regel skrivs egenvektorer så här, alla vet vad som avses.

För $\lambda = 11$ får vi

$$\begin{pmatrix} 5-11 & -3 \\ -4 & 9-11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så $-6x_1 - 3x_2 = 0$ och $x_2 = t$ och $x_1 = -\frac{1}{2}t$ dvs.

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t$$

eller

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi kontrollerar

$$VL = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilket är samma som HL.

Anmärkning 11.2. Observera att $t \neq 0$ alltid. Om $t = 0$ får vi nollvektorn, $X = 0$, och den är parallell med alla vektorer, alltså är den alltid en egenvektor. Har vi nollvektorn som egenvektor kan egenvärdet λ anta alla värden. I regel inte intressant.

Vi får alltid minst en parameter i lösningen eftersom, enligt tidigare, om X är en lösning så är cX en lösning, det ligger i själva begreppet. Detta leder också till linjärt beroende.

Proceduren blir: Vi löser egenvärdesproblem genom att beräkna determinanten för $F - \lambda I$, F med $-\lambda$ på diagonalen, och sätter den till 0 och erhåller ett polynom i λ. När egenvärdena är bestämda (löst polynomekvationen), sätter vi upp en ekvation för varje egenvärde λ_i och bestämmer egenvektorerna.

Exempel 11.2. Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sätt determinanten för $H - \lambda I$ lika med 0,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

vilket ger karaktäristiska ekvationen

$$\begin{aligned} -\lambda(2-\lambda) - 3 &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \end{aligned}$$

som har lösningarna $\lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$. Vi har egenvärdena $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = -1$. Egenvektorerna för egenvärdet 3 ges av

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ -3 & 0-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så $-x_1 - x_2 = 0$ dvs. $x_1 = -x_2$ och sätter $x_2 = t$. Egenvektorerna för egenvärdet 3 ges av

$$X = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eller underförstått, egenvektorn är $(-1\,1)^T$.

För egenvärdet -1 erhålls

$$\begin{pmatrix} 2+1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så $3x_1 - x_2 = 0$. Sätt $x_2 = t$ vilket ger $x_1 = t/3$. Egenvektorerna för egenvärdet -1 ges av

$$X = \begin{pmatrix} t/3 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eller egenvektorn är $(1\,3)^T$.

Anmärkning 11.3. Parametern t vid egenvektorerna för $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$ är inte samma. Om man t.ex. vill använda dessa egenvektorer som en bas för att skapa en annan vektor skriver man

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

även andra val av egenvektorer utifrån olika värden på t är möjliga; de ligger alla på samma linje, det är bara längden som ändras och för val av basvektorer är endast parallellitet viktig. Därefter kan de normeras om så behövs.

11.2 Övning 11.2. Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,2 \\ 2\,7\,1 \\ 2\,1\,7 \end{pmatrix}.$$

Lemma 11.1. *Om A har egenvektorn X med egenvärdet λ så gäller att:*

(1) kA har egenvektorn X med egenvärdet $k\lambda$,
(2) $A + kI$ har egenvektorn X med egenvärdet $\lambda + k$,
(3) A^n har egenvektorn X med egenvärdet λ^n.

Bevis. Om $AX = \lambda X$ så:

(1) $(kA)\,X = kAX = k\lambda X = (k\lambda)\,X$.
(2) $(A + kI)\,X = AX + kIX = \lambda X + kX = (\lambda + k)\,X$.
(3) Vi visar att det gäller för $n = 2$, sedan följer påståendet från induktion. Om $n = 2$,

$$A^2X = A\,(AX) = A\,(\lambda X) = A\lambda X = \lambda AX = \lambda\lambda X = \lambda^2 X.$$

Och induktion:

$$A^nX = A^{n-1}\,(AX) = \lambda A^{n-1}X.$$

dvs. det gäller för A^n om det gällde för A^{n-1}.

□

Vi gör begreppet karaktäristisk ekvation allmänt.

DEFINITION 11.1. För A, en kvadratisk matris, definieras det karaktäristiska polynomet som

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|\,.$$

Vi definierar den karaktäristiska ekvationen, även kallad sekularekvationen, som $p(\lambda) = 0$.

ANMÄRKNING 11.4. Ekvationen kallas för sekulär i kontrast till periodisk. Termen används i flera vetenskaper för att skilja periodiska trender från sekulära trender. Från latinets sæcularis, "som hör till seklet". I fysiken användes termen vid studier av långtidsstörningar av planetbanor. Lämplig terminologi är karaktäristiskt polynom och karaktäristisk ekvation.

TEOREM 11.1. *Egenvärdena till en kvadratisk matris A ges av lösningarna till $p(\lambda) = 0$.*

Vi ger inget bevis för detta.

ANMÄRKNING 11.5. Ett polynom av gradtal n har i allmänhet n lösningar. Dessa kan vara komplexa och de kan ha annan multiplicitet än 1.

EXEMPEL 11.3. Vad händer vid multipliciteter som inte är 1? Vi bestämmer egenvärdena för matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

genom att beräkna determinanten (utefter första kolonnen)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda) + 0\right] + \left[-(3-\lambda) + 0\right] \\
&= (2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (3-\lambda) \\
&= \left(4 - 4\lambda + \lambda^2\right)(3-\lambda) - 3 + \lambda \\
&= 12 - 12\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + \lambda \\
&= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9
\end{aligned}$$

Och determinanten ska vara 0 för icke-triviala lösningar,

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = 0$$

som har lösningen $\lambda = 1$ med multiplicitet 1, och $\lambda = 3$ med multiplicitet 2. Egenvärdena sägs vara degenererade. Polynomekvationen kan skrivas $(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0$. Egenvektorerna för $\lambda = 1$ bestäms ur

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 2 \\ -1 & 2-1 & 2 \\ 0 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger de 3 ekvationerna $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ och $2x_3 = 0$. Den sista har lösningen $x_3 = 0$. Om vi sätter $x_3 = 0$ ser vi att de två kvarvarande ekvationern är ekvivalenta. Vi har $x_1 - x_2 = 0$. Om $x_2 = s$ så är $x_1 = s$. Egenvektorerna för $\lambda = 1$ är

$$X = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 2 \\ -1 & 2-3 & 2 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger den *enda* ekvationen $-x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Det innebär att alla vektorer i detta *plan* är möjliga egenvektorer. Sätt $x_3 = s$ och $x_2 = t$

$$\begin{aligned} x_1 &= -t + 2s \\ x_2 &= t \\ x_3 &= s \end{aligned}$$

så

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s.$$

Ett enkelt val är att välja kolonnvektorerna som egenvektorer. I så fall säger man att egenvektorerna är $(-1\,1\,0)^T$ och $(2\,0\,1)^T$. Men ofta väljs egenvektorerna ortogonala mot varandra. Ett godtyckligt val erhålls av $s = t = 1$: $(1,\, 1\,1)$. Som vektor nummer två väljs en vektor i planet som är ortogonal med det första valet: $(1,\, 1,\, 1) \bullet (-t + 2s,\, t,\, s) = -t + 2s + t + s = 3s = 0$ så $s = 0$, vilket med t.ex. $t = 2$ ger vektorn $(-2,\, 2,\, 0)$ och naturligtvis har vi då $(1,\, 1,\, 1) \bullet (-2,\, 2,\, 0) = 0$. Så det gäller även att

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} s \tag{11.1.1}$$

11.3 ÖVNING 11.3. Se exempel 11.3. Sätt in 11.1.1, med parametrar s och t, i $MX = 3X$ för att se att vårt val av ortogonala vektorer är egenvektorer.

11.4 ÖVNING 11.4. Bestäm egenvärden och egenvektorer för den linjära avbildningen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.5 ÖVNING 11.5. Bestäm egenvärden och egenvektorer för den linjära avbildningen

$$A = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -7,5 & 3 & 3,5 \end{pmatrix}.$$

11.2. Egenvektorer för basbyte

Hur förändras en avbildningsmatris om vi byter till en bas bestående av egenvektorerna för avbildningen?

Inledningsvis studerade vi avbildningen

$$F = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix},$$

och visade att den hade egenvektorerna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Om vi konstruerar en basbytesmatris

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{och dess invers } S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

hur ser avbildningsmatrisen ut i denna nya bas? Den nya avbildningsmatrisen D ges av, enligt tidigare,

$$S^{-1}FS = D.$$

Vi sätter in

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Vi erhåller en avbildningsmatris med egenvärden på diagonalen och 0 på övriga platser. Matriser för vilket detta kan göras kallas *diagonaliserbara*. Att arbeta i en bas bestående av egenvektorer ger en enkel avbildningsmatris. Vi nöjer oss med exempel på att det är så.

Anmärkning 11.6. Att en matris är diagonaliserbar innebär *inte* att den blir diagonal om den multipliceras med en(1) matris utan det innebär just förfarandet $S^{-1}FS = D$.

11.3. Exponentiering av matriser

Med utgångspunkt från föregående avsnitt antar vi att om man bildar en basbytes matris S med *egenvektorerna* som kolonner så gäller att

$$S^{-1}AS = D$$

där A är avbildningen och D är den nya avbildningsmatrisen; med egenvärdena på diagonalen.

För att studera $A^2 = AA$ löser vi ut A ur $S^{-1}AS = D$ och erhåller

$$A = SDS^{-1}.$$

I denna situation gäller att

$$A^2 = \left(SDS^{-1}\right)\left(SDS^{-1}\right) = SDDS^{-1} = SD^2S^{-1}$$

och vi generaliserar

$$A^n = SD^nS^{-1}$$

där D^n är enkel att beräkna eftersom den är diagonal; diagonalelementen upphöjs till exponenten n.

Exempel 11.4. Vi beräknar vår tidigare matris upphöjd till 10, dvs.

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^{10},$$

att beräkna detta direkt är ett stort arbete. Vi vet S och S^{-1} enligt tidigare

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

där vi valt $t = 2$. Vi kan enligt $A^n = SD^nS^{-1}$skriva

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 11^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot 3^{10} & \frac{1}{8} \cdot 3^{10} \\ -\frac{1}{4} \cdot 11^{10} & \frac{3}{8} \cdot 11^{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \cdot 3^{10} + \frac{1}{4} \cdot 11^{10} & \frac{3}{8} \cdot 3^{10} - \frac{3}{8} \cdot 11^{10} \\ \frac{1}{2} \cdot 3^{10} - \frac{1}{2} 11^{10} & \frac{1}{4} \cdot 3^{10} + \frac{3}{4} \cdot 11^{10} \end{pmatrix}.$$

11.4. Diagonalisera

Vi sammanfattar. Om det för en avbildningsmatris A finns en bas så att avbildningsmatrisen endast har element på diagonalen kallas den för diagonaliserbar. Vi säger också att A är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris S och en diagonalmatris så att

$$D = S^{-1}AS.$$

Ur detta uttryck erhålls också att $A = SDS^{-1}$. Följande sats gäller

> TEOREM 11.2. *Att en $n \times n$ matris A är diagonaliserbar är ekvivalent med att det finns n stycken linjärt oberoende egenvektorer till A.*

Vilket vi lämnar utan bevis.

Proceduren för att genomföra en diagonalisering av en matris A är:

(1) Bestäm egenvärdena för A.
(2) Bestäm egenvektorerna.
(3) Om det finns n stycken linjärt oberoende egenvektorer så är de kolonner i S.
(4) Bestäm S^{-1}.
(5) D ges av egenvärdena på diagonalen. Basen som ger D ges av egenvektorerna.
(6) Kontrollera att $D = S^{-1}AS$. Observera också att egenvektorer och motsvarande egenvärden måste stå på samma kolonn.

EXEMPEL 11.5. Vi använder den angivna proceduren. Diagonalisera matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Börjar med att bestämma egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

ger $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = 4$. Observera att för en triangulär matris, vilket vi hade, så ges egenvärdena direkt av diagonalelementen. Den diagonaliserade matrisen är således

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Avbildningen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

skrivs om egenvektorerna används som bas

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Men vilka är egenvektorerna? De erhålls genom att lösa följande ekvationssystem

$$\lambda_1 = 2 \quad \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 1 & 3-2 & 0 \\ 2 & -1 & 4-2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ger egenvektorn } X = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad \begin{pmatrix} 2-3 & 0 & 0 \\ 1 & 3-3 & 0 \\ 2 & -1 & 4-3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ger egenvektorn } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4 \quad \begin{pmatrix} 2-4 & 0 & 0 \\ 1 & 3-4 & 0 \\ 2 & -1 & 4-4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ger egenvektorn } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S är

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0,5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och en kontrollräkning visar att $D = S^{-1}AS$:

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0,5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ÖVNING 11.6. Diagonalisera matrisen 11.6

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

genom att följa proceduren given ovan. *Att klargöra för dig själv varje steg som ska göras hjälper dig att minnas och förstå proceduren.*

Vi ser tillbaka på saker som behandlats tidigare men i lite nytt perspektiv. Basbytesmatrisen S betyder att om vi byter från basen $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ till $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n$ så ges sambandet mellan koordinaterna av $X = SX'$ där basbytesmatrisen S har kolonnvektorerna $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n$. I vår situation är $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_n$ de framtagna linjärt oberoende egenvektorerna. Vi har

$$X = SX' \text{ eller explicit } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

och

$$X' = S^{-1}X \text{ vilket är } \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0,5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

samt

$$\begin{aligned} \overline{e}_1' &= -2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 3\overline{e}_3 \\ \overline{e}_2' &= \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \\ \overline{e}_3' &= \overline{e}_3 \end{aligned}$$

enligt minnesregeln att byta primat mot oprimat och rader mot kolonner.

11.7 Övning 11.7. En avbildning ges av matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

vilket basbyte ska göras för att erhålla en diagonaliserad matris?

Anmärkning 11.7. Egenvärden och egenvektorer och även determinanter ändras inte vid basbyte. De kallas för invarianter. Det så kallade spåret, summan av diagonalelementen, (eng. trace) är också invariant.

Egenvektorer är ofta ett bra förslag på bas. I tillämpningar används egenvektorerna som en bas som ger speciellt enkla uttryck och som dessutom i regel kan förstås geometriskt. Nästa exempel pekar på detta.

Exempel 11.6. $\overline{u} = (1,\, 2)$ ska projiceras på linjen L: $3x + 2y = 1$; enligt tidigare ges matrisen av

$$\overline{u}_{\overline{v}} = \frac{(1,\, 2) \bullet (2,\, -3)}{2^2 + (-3)^2}\,(2,\, -3) = \frac{-4}{13}(2,\, -3).$$

Vi sätter in en godtycklig vektor $\overline{u} = (x,\, y)$ i stället,

$$\frac{(x,\, y) \bullet (2,\, -3)}{2^2 + (-3)^2}\,(2,\, -3) = \frac{1}{13}\,(2x - 3y)\,(2, -3),$$

på matrisform

$$\begin{pmatrix} u_{x\overline{v}} \\ u_{y\overline{v}} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vad kan denna avbildning ha för egenvärden och egenvektorer?; vilka vektorer avbildas på multiplar av sig själv? En beräkning ger att $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 1$, och att egenvektorer är

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dessa egenvektorer, se figur 11.4.1, kan användas som en bas, ty de är ortogonala (det räcker med att de är linjärt oberoende): $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}^T = 0$. Dessa definierar basbytesmatrisen S,

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

med basvektorerna som kolonner, och enligt tidigare gäller $D = S^{-1}AS$. Om de två egenvektorerna sätts som bas så innebär det att

$$\begin{aligned} \overline{e}_1' &= 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 \\ \overline{e}_2' &= -2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 \end{aligned}$$

(raderna här ska vara kolonner i S). Vilket med S skrivs

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } S^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

så att

$$S^{-1}AS = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Och om vi vill skriva den räta linjen i de nya koordinaterna, primade, så använder vi $X = SX'$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$x = 3x' - 2y'$$

$$y = 2x' + 3y'$$

som ger för linjens ekvation

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 3\left(3x' - 2y'\right) + 2\left(2x' + 3y'\right) &= 1 \\ 9x' - 6y' + 4x' + 6y' &= 1 \\ 13x' &= 1 \end{aligned}$$

dvs. vi har en linje

$$x' = 1/13$$

$$y' = t$$

vilket är en lodrät linje i det nya koordinatsystemet. x' anger hur stor del av $\overline{e}'_1$ vi ska ta; y' anger hur stor del av $\overline{e}'_2$. En godtycklig punkt/vektor ges av $\overline{u}' = x'\overline{e}'_1 + y'\overline{e}'_2$. I det oprimade hade vi t.ex. punkten $(1, 3)$, den har nu koordinater enligt

$$S^{-1}X = X'$$

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,69 \\ 0,54 \end{pmatrix}.$$

Se figur 11.4.2. I figuren är ritad de två egenvektorerna som basvektorer (skrivna som kolonnmatriser), $\overline{e}'_1$ och $\overline{e}'_2$. Koordinaterna för punkten $(1, 3)$ kan avläsas ur figuren med hjälp av de prickade linjerna och avståndsmätningen mellan punkterna B och C samt B och D, men avståndet är givet i det oprimade koordinatsystemet. Avståndet från B till C är $2,45$ men vektorn $(3, 2)$ har längden $\sqrt{13}$ så längden i det primade systemet är $2,45/\sqrt{13} \approx 0,68$ vilket stämmer bra med $9/13 \approx 0,69$. På samma sätt för den andra koordinaten $1,92/\sqrt{13} \approx 0,53$ i förhållande till $7/13 \approx 0,54$.

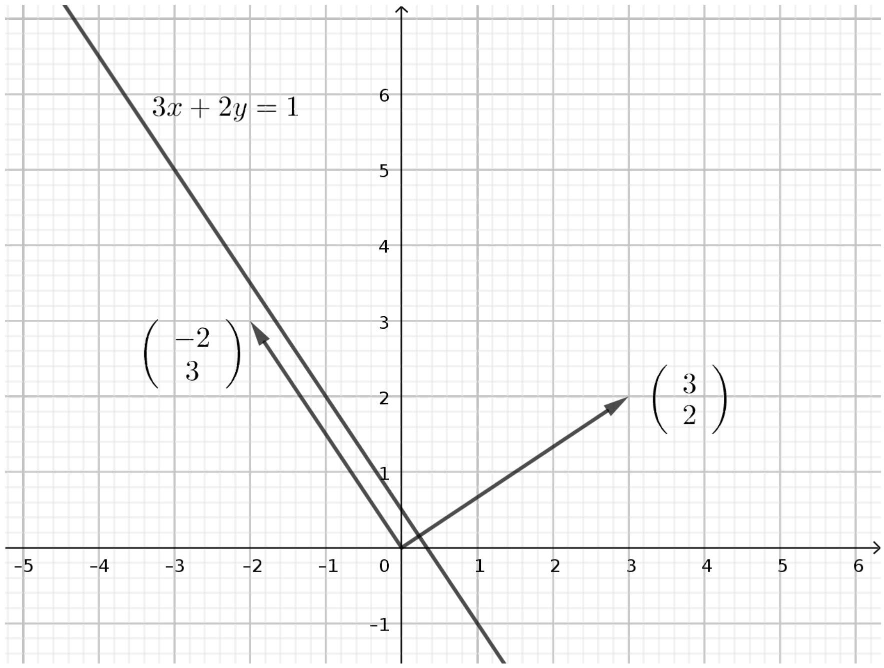
Anmärkning 11.8. I triangulära matriser kan man direkt avläsa egenvärdena. Om vi ska beräkna den karaktäristiska ekvationen för matrisen

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ a & y & 0 \\ b & c & z \end{pmatrix}$$

erhålls

$$\begin{vmatrix} \lambda - x & 0 & 0 \\ a & \lambda - y & 0 \\ b & c & \lambda - z \end{vmatrix} = (\lambda - x) \begin{vmatrix} \lambda - y & 0 \\ c & \lambda - z \end{vmatrix} = (\lambda - x)(\lambda - y)(\lambda - z) = 0.$$

Sett som ett polynom i λ inträffar nollställena vid diagonalelementen. Lösningarna till ekvationen ges av diagonalelementen vilka därmed är egenvärden. Det kan



FIGUR 11.4.1. De två egenvektorerna till avbildningen 'projektion på linjen $3x + 2y = 1$'. $(3\,2)$ avbildas på $0\,(3\,2)$ och $(2\,3)$ avbildas på $1\,(2\,3)$.

vara arbetsbesparande att först arbeta med de vanliga matrisoperationerna för att konstruera en triangulär matris innan determinanten beräknas.

11.5. Egenvektorer för olika avbildningar

Vilka egenvektorer har de tidigare studerade avbildningarna och vilka avbildningar har inte egenvektorer? De avbildningar vi studerat tidigare har varit: projektioner, speglingar, translationer, skjuvningar och reflektioner.

11.5.1. Kompression eller expansion längs en axel. Matrisen

$$D_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ändrar koordinaten i x_1-led med en faktor k. Vilka egenvektorer har den? Vi observerar att den redan är på diagonal form så egenvärdena är k och 1. Egenvektorerna för$\lambda = k$ ges av

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

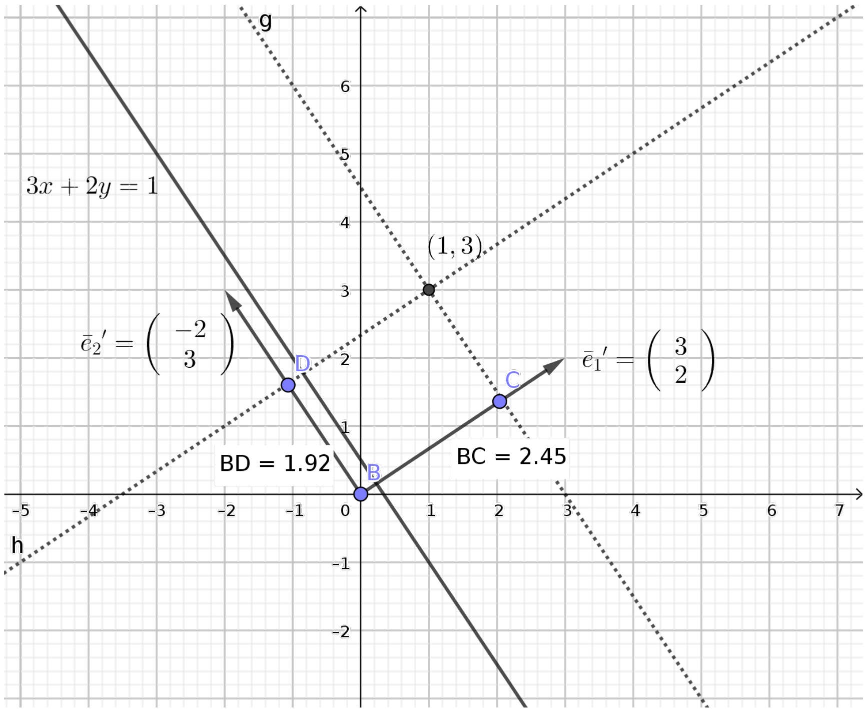
vilken ger ekvationerna

$$kx_1 = kx_1 \text{ och } x_2 = kx_2.$$

Den första ger att x_1 kan var vilket värde som helst, $x_1 = t$. Den andra innebär att $x_2 = 0$. Egenvektorerna ges av $(1\,0)^T$.

För $\lambda = 1$ erhålls

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



FIGUR 11.4.2. Punkten $(1,3)$ i det gamla och det nya koordinatsystemet.

vilken ger ekvationerna

$$kx_1 = x_1 \text{ och } x_2 = x_2.$$

Vi får $x_1 = 0$ och $x_2 = t$. Egenvektorerna ges av $(0\,1)^T$. Detta innebär att egenvektorn $(1\,0)^T$ som ligger längs x_1-axeln avbildas på sig själv med en faktor k. Egenvektorn $(0\,1)^T$ längs x_2-axeln avbildas på sig själv, egenvärdet är just 1. Avbildningen ska ändra x_1 koordinaten med en faktor k vilket naturligtvis ger att en vektor längs denna axel ändrar sin längd med k men ligger kvar längs axeln. Avbildningen ändrar inte x_2-koordinaten och det stämmer bra med att vektorn ligger kvar på axeln.

11.5.2. Reflektion i x_1-axeln. Reflektion av en punkt i x_1-axeln görs med matrisen $M_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Egenvärdena avläses som 1 och -1. Om vi nu föreställer oss ortsvektorer som genomgår en spegling i x_1-axeln inser man att en vektor längs med axeln avbildas på sig själv, så det måste vara egenvärdet 1. En ortsvektor vinkelrät mot x_1, dvs. i x_2-axelnsriktning kommer att vid reflektion ändra riktning och inte ändra storlek, det måste vara egenvärdet -1. Egenvektorerna måste vara vektorer parallella med dessa axlar så de bör vara $(1\,0)^T$ med egenvärdet 1, samt vektorn $(0\,1)^T$ med egenvärdet -1.

ÖVNING 11.8. Lös egenvärdesproblemet, genom att räkna och inte resonera, för reflektion i x_1-axeln. 11.8

11.5.3. Skjuvning. En skjuvning (eng. shear) av en punkt i x_1-riktningen ges av $S_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Av matrisen, triangulär, framgår direkt att egenvärden är 1 och

1. I denna skjuvning ändras x_1 koordinaten i proportion till x_2-värdet. Exempelvis,

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + kx_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vi undersöker egenvärdesproblemet från början,

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & k \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & k \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ger $(1-\lambda)^2 = 0$. Vi har en dubbelrot, egenvärdet är degenererat. Vi söker egenvektorerna,

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & k \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ger oss ekvationerna $kx_2 = 0$ och $0x_1 + 0x_2 = 0$. Den första innebär att $x_2 = 0$. Den andra är då $0x_1 = 0$ vilket ger att x_1 kan vara vilket tal som helst, $x_1 = t$. Egenvektorerna är $(1\,0)^T$. Två egenvärden men bara en egenvektor. Egenvektorn är parallell med x_1-axeln. Eftersom den har x_2 komponenten 0 och x_1 ändras med en multipel av x_2 värdet så ändras inte x_1.

11.5.4. Rotation. En rotation ges av

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

För enkelhetsskull betecknar vi den

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Vi löser egenvärdesproblemet.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinanten är

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

som ger ekvationen $(a-\lambda)^2 + b^2 = 0$ vilket är ekvivalent med $(a-\lambda)^2 = -b^2$. Eftersom b^2 är positiv så är $\sqrt{-b^2}$ roten ur ett negativt tal. Vi har egenvärden som är komplexa. Vi fördjupar oss inte i detta.

11.6. Facit Övningar

11.1 Eftersom vektorerna ligger på en linje; linjen som ligger på en vektor på övre halvan fortsätter på undre halvan.

11.2 Egenvärde med tillhörande egenvektor är: 9, $(1\,2\,2)^T$; 6, $(0\ -1\,1)^T$; 0, $(-4\,1\,1)^T$.

11.3 Ingen kommentar.

11.4 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Egenvektorer är $v_1 = (1\,0\,2)^T$, $v_2 = (-3\ -2\,4)^T$ och $v_3 = (-1\,0\,1)^T$. Determinanten är

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0 =$$
$$(1-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda)-2\right) = 0.$$

Vilket ger att $\lambda = 1$. Därefter har vi $(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$ som ger $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ som har lösningarna $\lambda = 0$ och $\lambda = 3$. För $\lambda = 1$ får vi egenvektorerna genom

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 2 & -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

som insatt i uttrycket för avbildningen är

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket innebär $2y+z = 0$ och $2x-y+z = 0$. Om vi sätter $z = 2t$ så är $y = -z/2 = -t$. Och $x = (y-z)/2 = (-t-2t)/2 = -3t/2$. Vilken kan skrivas som $(-3\ -2\,4)$. De andra beräknas på samma sätt.

11.5

$$\begin{pmatrix} -0,5-\lambda & 1 & 0,5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -7,5 & 3 & 3,5-\lambda \end{pmatrix}$$

ger

$$-(0,5+\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & 3,5-\lambda \end{vmatrix} + 0 - 7,5\begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$
$$-(0,5+\lambda)(2-\lambda)(3,5-\lambda) + 7,5\cdot 0,5\,(2-\lambda) = 0$$

som ger $\lambda = 2$ och därefter

$$\begin{aligned} -(0,5+\lambda)(3,5-\lambda) + 7,5\cdot 0,5 &= 0 \\ -1,75 + 0,5\lambda - 3,5\lambda + \lambda^2 + 3,75 &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \end{aligned}$$

som har lösningarna $\lambda = 2$ och $\lambda = 1$. Vi bestämmer egenvektorerna och börjar med $\lambda = 2$. Multiplicerar rad 1 o rad 3 med -2 för att få enkla tal

$$\begin{pmatrix} -0,5-2 & 1 & 0,5 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -7,5 & 3 & 3,5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7,5 & 3 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att vi har en ekvation $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ som gör att vi kan t.ex. sätta $x_3 = s$. Vi ser också att rad 1 och rad 3 är samma ekvation, de har en faktor 3 mellan sig. Vi har endast en ekvation: $5x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, där vi redan satt $x_3 = s$; vi sätter nu $x_2 = t$ och erhåller $5x_1 - 2t - s = 0$. Så att

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{5}s + \tfrac{2}{5}t \\ x_2 &= \qquad\quad t\,. \\ x_3 &= \ \ s \end{aligned}$$

Egenvektorerna kan skrivas för $\lambda = 2$ som

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s \; E_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Återstår egenvektorn för $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} -0,5-1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ -7,5 & 3 & 3,5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7,5 & 3 & 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & -6 & -5 \end{pmatrix},$$

där rad 1 och 3 multiplicerats med -2. Reducerar (3) genom $-5\,(1) + (3)$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att rad 2 och rad 3 är lika. Rad 2 är $x_2 + 0x_3 = 0$ och vi sätter $x_3 = t$ och får $x_2 = 0$. Rad 1 är $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3x_1 - t = 0$ som är $x_1 = t/3$. Egenvektorn är

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

11.6 Ekvationen

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ger

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$-5 + \lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

Denna har lösningarna $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ och $\lambda_3 = 1$. Egenvektorerna beräknas ur

$$\lambda_1 = 5 \quad \begin{pmatrix} 4-5 & 1 & 3 \\ 2 & -1-5 & 2 \\ 1 & -1 & 2-5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att rad 1 och rad 3 är samma. Vi har ekvationerna $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ och $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$. Vi adderar dessa och erhåller $-2x_2 + 4x_3 = 0$. Sätt $x_3 = t$. $x_2 = 2t$ och $x_1 = 5t$. Egenvektorn ges av

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Vi erhåller vidare för $\lambda_2 = -1$ egenvektorn (släpper t)

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och slutligen för $\lambda_3 = 1$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11.7 Egenvärdena ges av $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ och $\lambda_3 = 5$. Egenvektorerna är $(0, 0, 1)$, $(0, -2, 1)$ och $(-4, -4, 5)$. S har dessa som kolonnvektorer

$$S = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basbytet som ska göras är

$$\begin{aligned} \bar{e}_1' &= -4\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3 \\ \bar{e}_2' &= -2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{e}_3' &= \bar{e}_3 \end{aligned}$$

Vi kontrollerar att $D = S^{-1}MS$

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

11.7. Kapitelproblem

11.1

11.8. Facit Kapitelproblem

11.1

KAPITEL 12

Bevisföring

KAPITEL 13

Frågeställningar

13.1. Blandade frågor och uppgifter

ÖVNING 13.1. Föreslå hur man skulle kunna definiera att en avbildning K är kvadratisk.

ÖVNING 13.2. Förklara Gauss eliminationsmetod.

ÖVNING 13.3. Hur definieras att två trianglar är ekvivalenta (kongruenta)?; likformiga? Diskutera vad dessa definitioner för trianglar motsvarar i vektorbegreppet. Problematisera 'lika med' utifrån terminologin kring geometriska figurer respektive vektorer. *'Lika med' begreppet rymmer flera olika betydelser.*

ÖVNING 13.4. Med avståndet mellan en punkt och en linje avses det kortaste avståndet. I avsnitt 4.3 studeras avstånd ganska allmänt och linjära algebrans metoder för beräkning av dem. *I uppgiften löser du ett avståndsproblem genom att minimera en funktion, att jämföra med senare metoder.*

(1) En lösning till ekvationen $y = 2x - 3$ ligger närmast origo, bestäm den lösningen. (Minimera avståndet mellan en punkt på linjen och origo.)
(2) En lösning till ekvationen $y = kx + b$ ligger närmast origo, bestäm den uttryckt i k och b.
(3) En lösning till ekvationen $Ax + By + C = 0$ ligger närmast origo, bestäm den uttryckt i A, B och C.

ÖVNING 13.5. *Begreppet linjärkombination är både enkelt och svårt, i den meningen att det finns fällor. Tänk efter noga.*

(1) Ekvationssystem B består endast av linjärkombinationer av ekvationer från ekvationssystem A, ändå är systemen inte ekvivalenta. Varför? Är ekvationerna i A linjärkombinationer av de i B?

$$A : \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad B : \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

(2) Ekvationssystem B' består endast av ekvationer konstruerade genom användning av teorem 1.1 på system A, de är ekvivalenta. Varför? Är alla ekvationer i B' linjärkombinationer av ekvationerna i A? Är ekvationerna i A linjärkombinationer av de i B'?

$$B' : \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

ÖVNING 13.6. Gör en begreppskarta över linjärt beroende, linjärt oberoende och bas.

13.2. Kommentarer

13.1 För linjär gällde att $L(kx) = kL(x)$. För en kvadratisk avbildning skulle ett förslag vara $K(kx) = k^2K(x)$.

13.2 Ingen kommentar.

13.3 Om två trianglar ska undersökas för kongruens så kan de flyttas i planet 'hur som helst': t.ex. translation och rotation i planet. För att undersöka likformighet bestäms kvoter mellan sidor i de olika trianglarna, för likformighet ska kvoterna mellan alla sidor vara lika. Trianglar är två-dimensionella. Vektorer kan endast förflyttas med hjälp av translationer, riktningen får ej ändras vilket den gör vid t.ex. rotationer. Vektorer är en-dimensionella. Likformiga vektorer skulle kunna vara vektorer med samma riktning men olika längder (införs en terminologi för detta senare). Kongruenta vektorer är delvis innehållslöst eftersom vektorer inte har ett läge. För riktade sträckor innebär det dock att de ska exakt kunna täcka varandra om de är kongruenta, dvs. representerar samma vektor.

13.4

(1) Löser problemet allmänt. $l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (kx + b)^2}$. Minimera avståndet: $\mathrm{d}l/\mathrm{d}x = 0$ ger att $2x + 2k^2x + 2kb = 0$. Vi erhåller

$$x = \frac{-kb}{1 + k^2}$$

och

$$y = \frac{b}{1 + k^2}.$$

Avståndet är

$$l_{min} = \left| \frac{b}{\sqrt{1 + k^2}} \right|.$$

Om vi byter enligt tidigare erhålls

$$x = \frac{-AC}{A^2 + B^2} \text{ och } y = \frac{-BC}{A^2 + B^2}.$$

Avståndet ges av

$$l_{min} = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Observera att avståndet ges av konstanten C normerad med koefficienterna framför x och y. Avståndet mellan $y = 2x - 3$ och origo är med $k = 2$ och $b = -3$:

$$\begin{aligned} l_{min} &= \left| \frac{b}{\sqrt{1 + k^2}} \right| \\ &= \frac{3}{\sqrt{1 + 4}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1,3. \end{aligned}$$

(2) Se (a)

(3) Se (a)

13.5

(1) A har lösningarna $x_1 = 1,5$ $x_2 = -1,5$ och $x_3 = 0,5$. I B erhålls $x_1 + x_3 = 2$ och $x_2 - 3x_3 = -3$ och således en parameterlösning. B är bildad ur $(1)+(2)$ och $3(1)+(2) = (3)$. Ekvationerna i A är inte linjärkombinationer av B. Vi har brutit mot regeln "en multipel av en ekvation adderas till en annan." Lite enkelt kan man säga att vi förlorat (3):an. En ny ekvation (3) kan skapas genom en linjärkombination av (1) och (3) eller (2) och (3).

(2) B' består av $(1) + (2)$ och $4(1) + (3)$. B' är linjärkombinationer av A och A är linjärkombinationer av B'. B' är bildad enligt reglerna i teorem 1.1.

13.6v