1 Rörelsemängd

En av de viktigaste begreppen. Rörelsemängden är bevarad vid alla händelser i isolerade system.

1.1 Kraft mellan två föremål

Låt oss fundera över några frågor kring två händelser:

- En boll studsar mot en vägg, bollen påverkar väggen med en kraft och väggen påverkar bollen med en kraft. Hur förhåller sig dessa krafter till varandra? Hur länge är bollen i kontakt med väggen i förhållande till väggens kontakttid med bollen?
- Föreställ dig två föremål i kontakt med varandra. Mellan föremålen finns en fjäder som trycker isär dem. Hur förhåller sig fjäderns krafter på de två olika föremålen till varandra? Hur länge trycker fjädern på de två föremålen. Kortare för den lätta? Kortare för den tyngre? Lika länge?

I båda fallen är krafterna lika stora men motsatt riktade; lagen om kraft och reaktionskraft. Kontakttiderna är lika för de två objekt som är i kontakt med varandra.

Om alla krafter är lika och alla tider är lika, i en given situation, för de olika kropparna bör också $F \cdot \Delta t$ vara lika(stora) för kropparna, men motsatt riktade om vi betraktar vektoruttrycket $\overline{F} \cdot \Delta t$.

F betyder naturligtvis medelkraften över tiden Δt. Kraften, på en av kropparna, kan skrivas som $F = ma =$ [m.h.a. definitionen av a] $m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$ och vårt uttryck blir

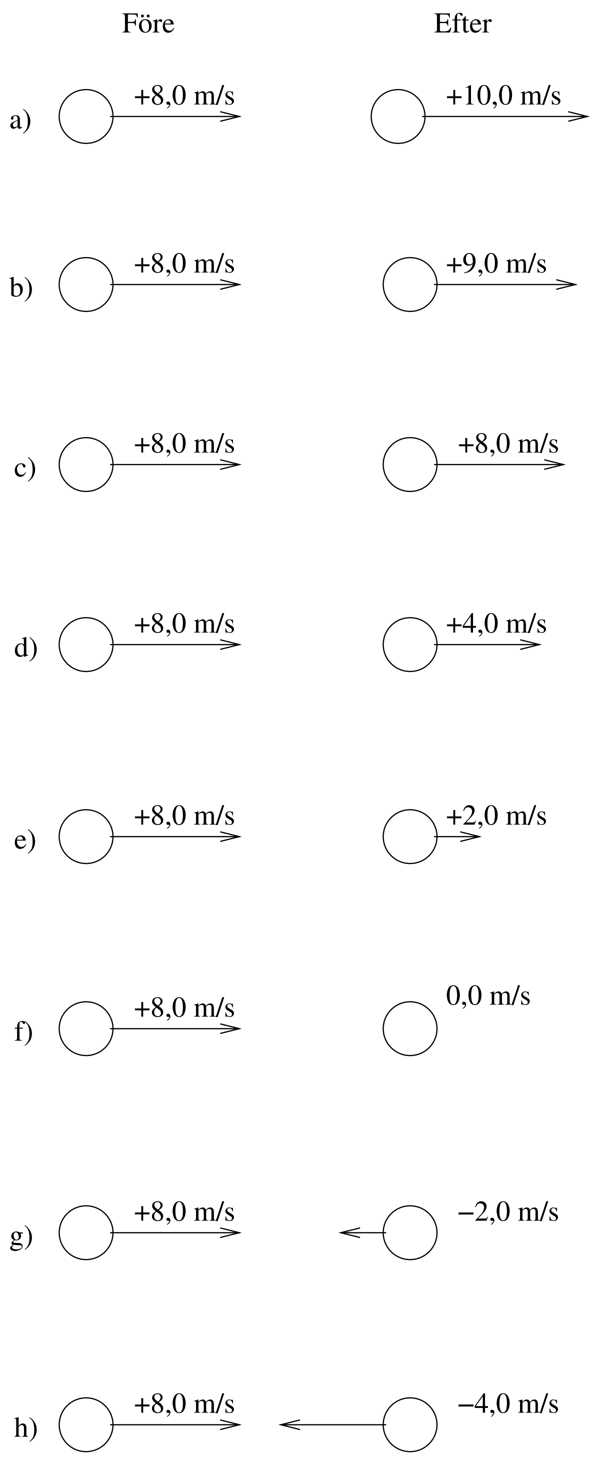
$$\overline{F} \cdot \Delta t = m\overline{a}\Delta t = m \cdot \left(\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}\right) \cdot \Delta t = m\overline{\Delta v} = m(\overline{v}_f - \overline{v}_i) \tag{1.1.1}$$

där $\overline{v}_i$ är hastigheten då kraften börjar verka (initial) och $\overline{v}_f$ hastigheten då den slutar verka (final). Observera att det är hastigheten, riktningen anger tecknet.

Exempel 1. Bestäm i figur 1.1.1hastighetsändringen, för kroppen, i vart och ett av fallen a,b,c,d,e f, g och h. Beräkningarna finns i tabell 1.1.

Övning 1. Bestäm ändringen i hastighet för ett föremål som ändrar sin hastighet från a) -3 m/s till -7 m/s, längs en linje. b) Från -3 m/s till 3 m/s.

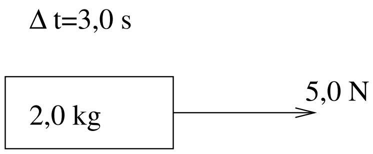
Exempel 2. På en kropp med massan 2,0 kg verkar en kraft på 5,0 N i 3,0 s. Hur mycket ändrar kroppen sin hastighet under denna tid? Se figur 1.1.2.



Figur 1.1.1: Hastigheten före och efter ger hastighetsändringen.

Tabell 1.1: Resultat för hastighetsändring.

uppgift	$\overline{v}_i$	$\overline{v}_f$	$\overline{v}_f - \overline{v}_i$
a)	+8	+10	+10-(+8)=+2
b)	+8	+9	+9-(+8)=+1
c)	+8	+8	+8-(+8)=0
d)	+8	+4	+4-(+8)=-4
e)	+8	+2	+2-(+8)=-6
f)	+8	0	0-(+8)=-8
g)	+8	-2	-2-(+8)=-10
h)	+8	-4	-4-(+8)=-12



Figur 1.1.2: Kraft verkar i 3,0 s.

Kraften multiplicerat med tiden blir $5,0 \cdot 3,0 = 15,0$ Ns. Vi har nu enligt 1.1.1

$$15,0 = 2,0 \cdot (\overline{v}_f - \overline{v}_i)$$

så ändringen blir $7,5$ m/s, oavsett kroppens fart innan kraften appliceras.

Övning 2. På en kropp med massan 3,0 kg verker en kraft på $-3,0$ N i 4,0 s. Hur mycket ändrar kroppen sin hastighet under denna tid?

1.2 Rörelsemängd och Impuls

Produkten $m \cdot \overline{v}$ har ett eget namn, rörelsemängd och betecknas $\overline{\text{p}}$. Vi kan då omforma 1.1.1 till $\overline{F} \cdot \Delta t = \overline{p}_f - \overline{p}_i$. Vilket kan uttryckas som att ändringen i rörelsemängd är produkten av kraft och tid. $\overline{F} \cdot \Delta t$ benämns impuls och betecknas $\overline{I}$. Impulsen ger upphov till en ändring i rörelsemängden. Impulsen är en vektor precis som rörelsemängd.

En kollision kan betraktas som en överföring av impuls mellan de som "krockar". Lika mycket impuls går från den ena till den andra men i olika riktning. Om vi skriver

$$\overline{I} = \overline{p}_f - \overline{p}_i$$

för ett föremål och formar om till

$$\overline{p}_f = \overline{p}_i + \overline{I}$$

ser vi att den nya rörelsemängden för föremålet är lika med den gamla plus impulsen. Detta uttryck gäller för båda objekten. Impulsen är lika för de två objekten men motsatt riktade (eftersom krafterna har motsatt riktning).

Exempel 3. Bestäm impulsen som en boll erhåller när den studsar mot en vägg. Bollen väger 134 g. Före stöten har den farten 2,3 m/s och efter stöten 1,9 m/s i motsatt riktning.

Bestäm först koordinatsystemet i den meningen att man bestämmer vilken riktning som är positiv. Om vi sätter hastigheten före stöten till $\overline{v}_i = +2,3$ m/s blir hastigheten efter stöten $\overline{v}_f = -1,9$ m/s. Hastighetsändringen är $\overline{v}_f - \overline{v}_i = -1,9 - (+2,3) = -4,2$ m/s. Rörelsemängdsändringen blir

$$\overline{p}_f - \overline{p}_i = m(\overline{v}_f - \overline{v}_i) = 0,134 \cdot (-4,2) = -0,5628 \text{ kgm/s}.$$

Impulsen är alltså $-0,56$ Ns.

Exempel 4. En kropp med rörelsemängden $+2,0$ Ns utsätts för en impuls på $-4,0$ Ns. Vilken rörelsemängd har den efter detta?

Vi adderar, enligt $\overline{p}_f = \overline{p}_i + \overline{I}$, $+2,0 + (-4,0) = -2,0$ Ns.

Övning 3. Bestäm impulsen en bil får då den krockar med en vägg och stannar helt. Bilen väger cirka 1000 kg och har farten 30 km/h.

1.3 Rörelsemängdens bevarande, det viktigaste någonsin

Betrakta två vagnar som rullar mot varandra på en rullbana.

Vagn 1. Massa m_1 och hastighet $\overline{v}_{i1}$. (index i står för 'initial')

Vagn 2. Massa m_2 och hastighet $\overline{v}_{i2}$.

När de kolliderar utövar de krafter på varandra. Dessa krafter är lika stora men motsatt riktade. Vagnarna är i kontakt med varandra under tiden Δt. Produkten $\overline{F} \cdot \Delta t$ (impuls) är lika stor för båda vagnarna men har olika riktning. Vi kan skriva

$$\overline{F}_{12} \cdot \Delta t = -\overline{F}_{21} \cdot \Delta t \tag{1.3.1}$$

Här betyder $\overline{F}_{12}$ kraften som vagn 1 utövar på vagn 2 och $\overline{F}_{21}$ kraften som vagn 2 utövar på vagn 1. För rörelsemängds-ändringen hos vagn 2 kan vi skriva (index f står för 'final')

$$\overline{F}_{12} \cdot \Delta t = \overline{p}_{f2} - \overline{p}_{i2}.$$

Rörelsemängds-ändringen hos vagn 1 får vi genom att byta 2 mot 1

$$\overline{F}_{21} \cdot \Delta t = \overline{p}_{f1} - \overline{p}_{i1}.$$

Dessa två uttryck sättes in i 1.3.1

$$\overline{p}_{f2} - \overline{p}_{i2} = -(\overline{p}_{f1} - \overline{p}_{i1})$$

Vi ändrar så att rörelsemängderna före stöten (index i) är till vänster och rörelsemängderna efter stöten (index f) är till höger.

$$\overline{p}_{i1} + \overline{p}_{i2} = \overline{p}_{f1} + \overline{p}_{f2}. \tag{1.3.2}$$

Här står nu att totala rörelsemängden före stöten är lika med rörelsemängden efter stöten, den har alltså inte ändrats för vagnarna totalt, men den har omfördelats. Impulsen är den mängd som omfördelats. Lika mycket impuls har gått till den ena som den andra vagnen men impulsen har riktning så den totala impulsen är noll för systemet med de två vagnarna.

Formel 1.3.2 kan skrivas med hjälp av hastigheterna och massan som

$$m_1\overline{v}_{i1} + m_2\overline{v}_{i2} = m_1\overline{v}_{f1} + m_2\overline{v}_{f2}. \tag{1.3.3}$$

Det är denna form vi kommer att använda. Helt avgörande är att hastigheterna är vektorer. Formeln säger att det finns lika mycket före som efter av rörelsemängd. Det är frågan om ren bokföring. Du har något som inte kan försvinna och du måste se till att det finns lika mycket före som efter. Den enda komplikationen är att rörelsemängden kan vara både positiv och negativ. Ekvationen 1.3.3 kallas balansekvation.

Låt oss ta några fall med värden som kan räknas i huvudet så att vi förstår principen för detta. Steg för steg.

- Två vagnar med rörelsemängderna +3 Ns (nr. 1) och -4 Ns (nr. 2) kolliderar.
- Efter stöten har nr. 1 rörelsemängden -1 Ns.
- Vilken rörelsemängd har nr. 2 efter stöten?
- Summan av rörelsemängden före är +3+(-4)=-1, detta ska summan bli efter stöten också.
- Nr. 1 har rörelsemängden -1 Ns. -1+x=-1, så x=0. Rörelsemängden för nr. 2 är 0 Ns.
- Ser lite krångligt ut i löpande text ställer man upp det ser det betydligt lättare ut...

$$+3 + (-4) = -1 + x.$$

Övning 4. Fyll i det som saknas i tabell 1.2. Vad är rörelsemängden före, vad är den efter? Beteckna den okända rörelsemängden med $\overline{p}$.

Tabell 1.2: Rörelsemängden angiven i Ns. Räkna i huvudet eller med penna och papper. Balansräkning!

nr. 1 före	nr. 2 före	nr. 1 efter	nr. 2 efter
+4	-2	-2	?
+4	-4	+2	?
-2	+4	-2	?
+4	0	?	-2
?	-2	-4	+5
+3	-3	+1	?

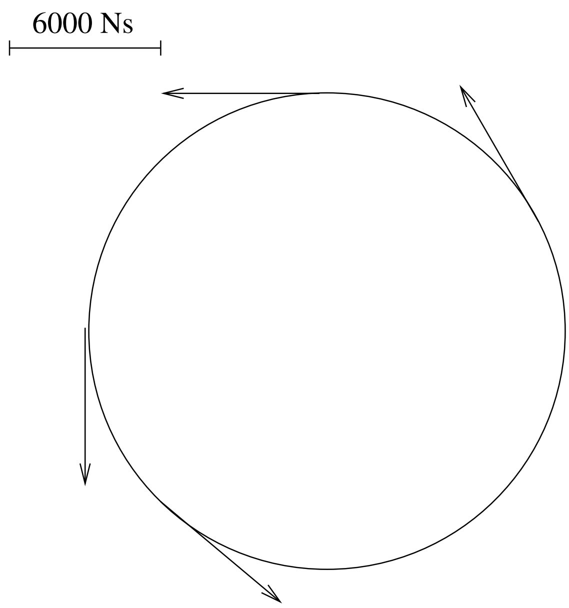
1.4 Några viktiga exempel

Nedan följer några exempel för att visa hur beräkningarna utförs.

1. En bil som väger 1,1 ton kör med farten 20 km/h rakt österut. Rita $\overline{p}$.
   $p = mv$. $m = 1,1 \cdot 10^3$ kg.$v = 20/3,6$ m/s. $p = 1,1 \cdot 10^3 \cdot 20/3,6 \approx 6,1 \cdot 10^3$ Ns. Välj att 1 cm motsvarar 1000 Ns, så blir vektorn 6,1 cm lång. Rita vektorn sidan om en kompassros.

2. En bil kör i en rondell med den konstanta farten 20 km/h. Välj 4 olika ställen i rondellen och rita $\overline{p}$ för dessa 4 platser.
   I uppgiften nämns inget om i vilken riktning rondellen körs runt, vi väljer moturs, se figur 1.4.1.

Figur 1.4.1: Bil i rondell.



3. En vagn på en rullbana, massa 98 g, kolliderar med en stillastående vagn, 122 g. Den inkommande vagnen har farten 65 cm/s. Vagnarna fastnar i varandra. Hur rör sig det sammansatta ekipaget?
   Använd balansräkningen.

   Före: $m_1v_{i1} + m_2v_{i2} = 0,098 \cdot 0,65 + 0 = 0,0637$ allt i positiv riktning.

   Efter: $(m_1 + m_2)v_f = (0,098 + 0,122)v_f = 0,22v_f$ allt i pos. riktning. Uttrycket i parentes är den totala massan då de fastnat i varandra.

   Balans: $0,0637 = 0,22v_f$ ger $v_f = \frac{0,0637}{0,22} \approx 0,29$ m/s.

4. En vagn med massan 100 g och farten 25 cm/s kolliderar med en stillastående vagn på 100 g. Hur rör sig vagnarna efter kollisionen?

   Före: $0,1 \cdot (+0,25) + 0 = +0,025$.

   Efter: $0,1v_1 + 0,1v_2$.

Dessa ska vara lika: $0,1(v_1 + v_2) = 0,025$ vilket ger $v_1 + v_2 = 0,25$. Vi kan inte bestämma vagnarnas fart men summan av deras farter är given.

Om de rör sig tillsammans har de samma fart, $v_1 = v_2 = v$ så $v + v = 0,25$ ger $v = 0,125$ m/s.
Om de kolliderar så att ingen kinetisk energi omvandlas så gäller att kinetisk energi före ska vara samma som kinetisk energi efter, vilket ger oss då $W_k = 0,5mv^2$, med före till vänster och efter till höger

$$0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,25^2 + 0 = 0,5 \cdot 0,1 \cdot v_1^2 + 0,5 \cdot 0,1 \cdot v_2^2$$

$$0,003125 = 0,05(v_1^2 + v_2^2)$$

$$0,0625 = v_1^2 + v_2^2.$$

Vi har nu 2 ekvationer och två obekanta,

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0,25 \\ 0,0625 = v_1^2 + v_2^2 \end{cases}$$

Genom att lösa ut v_1 ur den första och sätt in i den andra kan vi bestämma v_2.

$$v_1 = 0,25 - v_2$$

som sättes in

$$0,0625 = (0,25 - v_2)^2 + v_2^2$$

$$0,0625 = 0,0625 - 2 \cdot 0,25 \cdot v_2 + v_2^2 + v_2^2$$

$$0 = -0,5v_2 + 2v_2^2$$

vars lösningar vi finner genom faktorisering

$$0 = v_2(-0,5 + 2v_2).$$

Den ena lösningen är $v_2 = 0$ och den andra erhålles ur

$$-0,5 + 2v_2 = 0$$

dvs. $v_2 = +0,25$. Hur ska vi välja vilken som är rätt? Ja, om vi väljer $v_2 = 0$ så kan inte den inkommande röra på sig så då blir $v_1 = 0$ och då är inte rörelsemängden bevarad. Vi måste välja $v_2 = +0,25$ m/s. Den andra hastigheten får vi ur

$$v_1 + v_2 = 0,25$$

$$v_1 + 0,25 = 0,25$$

ger att $v_1 = 0$. Den inkommande har stannat helt. Detta stämmer bra med våra vardagliga erfarenheter att om man krockar två lika bollar med varandra så stannar den inkommande och den som var i vila fortsätter med den inkommandes fart.

5. Två vagnar i rörelse kolliderar med varandra och de fastnar i varandra och fortsätter tillsammans. Första vagnen väger 100 g och har farten 30 cm/s. Den andra vagnen väger 120 g och har farten -50 cm/s.

   Före: $0,1 \cdot 0,3 + 0,120 \cdot (-0,5) = -0,02$
   Efter: $0,1v + 0,120 \cdot v$ d.v.s. $0,220v$

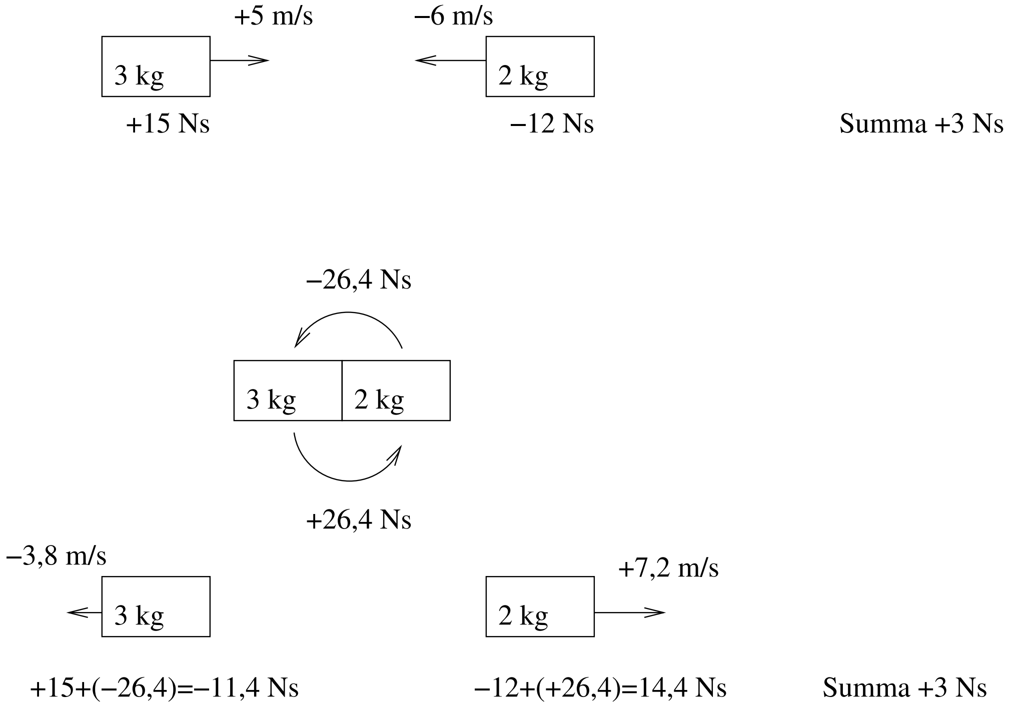
   Dessa två ska vara lika: $-0,02 = 0,220v$

   Vilket omedelbart ger $v = -0,091$. Farten är således cirka 9,1 cm/s. Minustecknet anger riktningen.

1.5 En grafisk illustration

I figur 1.5.1 visas på vad som händer i en kollision med avseende på rörelsemängderna. I kollisionen är den kinetiska energin bevarad, en fullständigt elastisk kollision.

Figur 1.5.1: Kollision med impuls.



På översta bildraden ser man föremålen före kollision. Vänstra objektet har rörelsemängden $+15$ Ns och den högra har rörelsemängden -12 Ns, tillsammans har de $+3$ Ns. Vad som än händer i *systemet* kan inte ändra på detta. Yttre krafter kan ändra på det, krafter utanför systemet.

Under kollisionen, mittersta bilden, överförs impuls mellan de två objekten. Överföringen är netto 0 Ns eftersom de olika riktningarna, $\overline{F} \cdot \Delta t$, har olika tecken och den totala impulsen måste vara +3 Ns alltid!

I nedersta bildraden ser vi situationen efter kollisionen. Impulserna för de enskilda objekten har ändrats men inget är ändrat för systemet som helhet, +3 Ns.

1.6 Vardagslivet

1. En av de vanligaste aktiviteterna är att släppa ett ägg (okokt) från en viss höjd och bygga en anordning kring ägget som gör att det inte går sönder. Många varianter på detta kan man hitta på internet.
2. Det finns en hel del filmer från tester på kolliderande bilar med dockor. Det ger även möjligheter att diskutera Newtons första lag, tröghetslagen. Varför är det viktigt att säkra gods eller föremål på en lastbil eller i en bil?
3. Finns simuleringar bland annat hos Physics Classroom. Vänstra översta hörnet gör bilden större.
4. Mycket utav bilbälte, hjälmar, luftkuddar och annan skyddsutrustning kan förstås utifrån detta avsnitt (transport, bygg).

1.7 Historia

1.7.1 Aristoteles

Aristoteles funderade kring problematiken om påverkan och mot-påverkan: Om föremål A påverkar föremål B hur och i vilken omfattning påverkar då B föremål A? Det sågs som ett allmänt problem inte bara direkt kopplat till rörelse. Om ett 'varmt' föremål påverkar ett 'kallt' hur påverkar då det 'kalla' föremålet det 'varma'?

Av [Russel] beskrivs utvecklingen i 3 steg.

1. Om A påverkar B så påverkar vanligen B föremål A med några undantag. Lagen gäller då föremålen består av samma 'materia'. Alla saker på Jorden (terresta) består av samma 'materia', medan celesta föremål (tex. stjärnor) inte kan påverkas av terresta. Celesta kroppar består av det femte elementet kvintessensen. Helande beskrivs också som ett sådant exempel; det helande påverkar den sjuke men den sjuka påverkar inte det som helar. Alla terresta saker påverkar varandra. Men det är inte sagt något om att det ska vara lika och vad det är som är lika.
2. Om föremål A påverkar föremål B så påverkar föremål B föremål A. Hävdas av Francisco Valles år 1564. En åsikt som var allmän hos fysiker från 1630 och framåt.
3. Till varje 'action' finns det en 'reaction'. Tydligt formulerat av Thomas White 1657.

Aristoteles skriver i sin Physics

> The mover too is moved, as has been said . . . For to act on the movable as such is just to move it. But this it does by contact, so that at the same time it is also acted on.

Det finns samtidigt en föreställning hos honom att om det är stor skillnad mellan föremålen (quantities of power) så har den svagare inte tillräckligt stor förmåga att påverka den starkare.

Det som berör oss mest är ett resonemang som Aristoteles gör och som kan vara en tankegång som i någon liknande form förekommer hos elever. Om A (agent) påverkar B (patient) och B förblir i vila så är krafterna lika stora. Men om B börjar röra sig på grund av påverkan från A så är kraften från A större än motkraften från B. Krafterna är här ömsesidiga men inte lika stora.

Senare grekiska kommentatorer till Aristoteles diskuterade inte dessa problem så mycket. De var upptagna med förhållandet mellan det terresta och det celesta och det var som nämnts ett undantag där krafterna inte var ömsesidiga.

När Aristoteles arbeten blev tillgängliga på 1200-talet i väst-europa tilldrog sig det dock visst intresse. Men det händer inget förrän intresset ökar på mitten på 1300-talet. Även förhållandet mellan 'kalla' och 'varma' föremål diskuterades. De fortsätter med ett asymetriskt tänkande med en agent och en patient. I tysthet övergav man det reciproka tänkandet kring krafter; förhållandet mellan det terresta och celesta var i fokus.

Asymmetrin ligger invävd i språket. Den ena delen av växelverkan tycks prioriteras över den andre. Den starkare eller den som vi upplever som den aktiva A påverkar föremål B, därmed 'stimuleras' B att svara på A. Här finns en klar ordning. Detta syns i termerna 'action' och 'reaction'. 'Reaction' är en reaktion på den inträffade påverkan som A har haft på B. Vi ser detta i vårt vardagsspråk som "Hur reagerade X på ditt förslag"; här finns en tydlig start hos en person och en annan person ska re-agera på detta. Den medeltida debatten innehåller flera förslag och Pomponazzi sammanfattar dem i en skrift 'De reactione'.

1.7.2 Vallés

Den spanska medicinaren Francisco Valles (1524-1592) uttrycker tydligt av varje påverkan innebär en mot-påverkan (action-reaction); med betoning på 'varje' som alla. Han gör trots allt två undantag. Det ena är om oändligt stora objekt det andra är den gud han tror på (vilket i detta fall är den kristna religionens gud). Valles undviker medvetet termen 'reaction' eftersom det är en asymmetrisk beskrivning. Han använder termer som reciprocitet (reciprocity) och ömsesidighet (mutuality). Debatten fortsätter ytterligare 100 år.

1.7.3 Galileo, Descartes, Marci

Galileo var inte så intresserad av denna problematik eftersom han huvudsakligen studerade statiska situationer och enskilda kroppars rörelse. Runt 1630 tar intresset ny fart. Det finns 2 perspektiv. Det kinetiska perspektivet (hastighet och rörelsemängd före och efter kollisioner) uttrycktes av Descartes. Hans mål var bland annat att få bort 'aktivitets'-begreppet och i stället använda partiklar med storlek, form och rörelse som grund för förklaring; inte inre krafter i objekt. Han hade dock svårt att undvika att använda 'kraft' som hade och har konnotationer som svarar mot aktivitet. Men eftersom han arbetade med kinetik var det inte en central del av hans arbete. Se nedan för några exempel på Descartes regler för hur man tänker kring före och efter kollisioner om hastighet och rörelsemängd.

Det dynamiska perspektivet involverade begreppet kraft. En av pionjärerna var den tjeckiska medicinaren Marcus Marci. Begreppen som anänds krävs detaljstudier för att förstå: impulsus, impetus och motus. Men så småningom trasslar man ut de olika begreppen. Fortfarande når man inte ända fram även om begreppet impulsus är en vektorstorhet. Den som har minst impulsus utövar en mindre re-aktion; fortfarande inte symmetriskt.

1.7.4 White

I Euclides physicus (1657) av Thomas White finns äntligen formuleringen såsom vi ser den idag.

> Whenever one body impinges on another, then the latter, whether it is visibly set in motion or not, repels the former with an equal force, according to its own circumstances. ... Hence it is clear that the body acted upon is set in motion against the agent with the same degree of force as the agent exerts upon it; that is to say, it repels the agent with an equal force.

Man tror att detta fortfarande inte var självklart utan tankegången som nämnts tidigare var förhärskande: att krafterna var lika om B inte rör sig, men om B rör sig så var A:s kraft större än B. Whites bok gjorde inte något större intryck på hans samtida. Det finns också fel i Whites framställning eftersom han tillskriver det omgivande mediet en roll i denna situation.

1.7.5 Newton

Newton skapade uppenbarligen inte NIII ur inget, i princip hade White redan formulerat den (även om det fanns fel i argumenteringen). Det Newton framförallt gjorde var en otrolig syntes av 3 element, och korrekta definitioner av dem. Han kombinerade också det kinetiska perspektivet med det dynamiska: $Ft = \Delta p$ där F tillhör det dynamiska perspektivet och Δp är det kinetiska perspektivet. Den saknade länken är tiden. Paketet består av de 3 Newtonska lagarna tillsammans med en förståelse för rörelsemängdens bevarande och dess relation till kraft.

Anledningen till att historien fram till Newton berättas enligt ovan är för att skapa någon förståelse för att detta inte var lätt, det har krävt mycket tid och mycket tänkande och många debatter att ta fram dessa lagar; från Aristoteles (384-322 fvt.) till Newton (1642-1727).

1.7.6 Descartes försök

För att få en liten inblick i resonemangen ser vi på hur Descartes använde begreppet rörelsemängd. Descartes anger år 1644 7 stycken regler för vad som händer vid kollisioner. Han använder då begreppet rörelsemängd definierat som massa multiplicerat med fart: mv. Hans rörelsemängd är inte en vektor. Han skriver om rörelsemängdens bevarande men utan att rörelsemängden behandlas som vektorer, i linjerörelse behandlar han rörelsemängd utan tecken. Detta leder naturligtvis fel. Några exempel på Descartes 7 regler och jämförelse med dagens rörelsemängdsbegrepp. Alla rörelser sker på en linje och kollisionerna är *elastiska.* En artikel som analyserar Descartes [Clarke].

Regel 1 *Om föremålen har lika stora massor och lika stora farter och kolliderar rakt mot varandra så ändras inte deras farter men de färdas i motsatt riktning efter kollisionen.* Vi använder den nutida beskrivningen av rörelsemängdens bevarande (vektorer) $m\overline{v}_1 + m\overline{v}_2 = m\overline{u}_1 + m\overline{u}_2$ där m är massan, $\overline{v}_1$ respektive $\overline{v}_2$ är hastigheterna före kollisionen och $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_2$ är hastigheterna efter för föremålen 1 respektive 2. Eftersom de rör sig mot varandra med lika stora farter före kollisionen gäller att $\overline{v}_2 = -\overline{v}_1$ så vi har $m\overline{v}_1 - m\overline{v}_1 = \overline{0} = m\overline{u}_1 + m\overline{u}_2$. Vi kan dividera med m och erhålla efter sidbyte $\overline{u}_2 = -\overline{u}_1$ dvs. de har olika riktningar på sina hastigheter, de rör sig från varandra (de kan inte gå igenom varandra). Hur vet vi att hastigheterna efter är lika stora som före? Det beror på hur elastisk stöten är. Är den fullständigt elastisk så har de samma storlek efter som före på hastigheten.

Regel 2 *Om $m_1 > m_2$ i övrigt som Regel 1, så färdas båda föremålen i $1:s$ riktning efter kollisionen, ingen ändring i fart.*

- I denna kurs tappning motsvarar detta $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2$ och $\overline{v}_1 = -\overline{v}_2$. Enligt avsnitt 1.11 gäller

$$\overline{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\overline{v}_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\overline{v}_1$$

och

$$\overline{u}_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\overline{v}_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\overline{v}_2.$$

Om vi låter $m_1 > m_2$ kan vi approximativt sätta för $\overline{u}_1$

$$\frac{2m_2}{m_1+m_2} \approx 0 \text{ och } \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = 1$$

och för $\overline{u}_2$

$$\frac{2m_1}{m_1+m_2} \approx 2 \text{ och } \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} = -1.$$

Vi får

$$\overline{u}_1 \approx \overline{v}_1$$

som innebär att föremål 1, det tyngre, fortsätter med sin hastighet. Och vidare

$$\overline{u}_2 = 2\overline{v}_1 + (-1)\overline{v}_2 = 2\overline{v}_1 - \overline{v}_2$$

men vår situation är att $\overline{v}_1 = -\overline{v}_2$ så

$$\overline{u}_2 = 2\overline{v}_1 + \overline{v}_1 = 3\overline{v}_1.$$

Detta kanske är lite häpnadsväckande, att föremål 2 med den mindre massan nu rör sig med (max) 3 gånger ursprungsfarten i föremål 1:s riktning. Detta ser vi inte ofta i vardagslivet men det finns enkla experiment som visar på att detta är rimligt. Just denna situation kan användas didaktiskt för att visa att vardagskunskaperna inte räcker till. Descartes åsikt att de båda ska färdas i det tyngre föremålets riktning, i vårt fall nr 1, med bibehållna farter, stämmer inte alls. Youtube har flera filmer om detta Physics Girl (samtidigt lär man sig något om supernovor). En genomgång finns på Harvey.

- Situationen kan också förstås mer direkt ur påståendet att de relativa hastigheterna mellan föremålen, före och efter, ändras inte. Enligt 1.11.2:

$$\overline{v}_1 - \overline{v}_2 = -\left(\overline{u}_1 - \overline{u}_2\right).$$

byter relativa hastigheten bara riktning. Före kollisionen har vi i detta fall också att $\overline{v}_2 = -\overline{v}_1$ så relativa hastigheten är $\overline{v}_1 - \overline{v}_2 = \overline{v}_1 - (-\overline{v}_1) = 2\overline{v}_1$. Efter kollisionen har föremål 1 bibehållen riktning och bibehållen fart (approximativt då $m_1 >> m_2$): $\overline{u}_1 = \overline{v}_1$. Men det lättare föremålet måste ha ändrat riktning, och den relativa farten ska behållas:

$$\overline{v}_1 - \overline{v}_2 \overset{1.11.2}{=} -\left(\overline{u}_1 - \overline{u}_2\right) \overset{\overline{u}_1 = \overline{v}_1}{=} -\left(\overline{v}_1 - \overline{u}_2\right) = 2\overline{v}_1,$$

vilket skrivs om till $-\overline{v}_1 + \overline{u}_2 = 2\overline{v}_1$ så $\overline{u}_2 = 3\overline{v}_1$.

- Vi tar det också med ord. Den relativa hastigheten från början är $2\overline{v}_1$ eftersom de rör sig mot varandra båda med hastigheten $\overline{v}_1$. Efter kollisionen rör sig båda i samma riktning. Föremål 1 har fortfarande (approximativt) $\overline{v}_1$. Den relativa hastigheten måste fortfarande vara $2\overline{v}_1$ vilket innebär att föremål 2 måste röra sig med $\overline{v}_1 + 2\overline{v}_1$ så den rör sig fortare än föremål 1 med $2\overline{v}_1$.

- Lägg också märke till att regel 2 är diskontinuerlig i förhållande till 1. Om massorna är lika så byter de bara riktning och har samma fart som tidigare, men om den ena har lite lite mer massa så går de båda i riktning av föremål 1. Detta är inte rimligt, vår intuition säger oss att ändringarna som sker böra vara kontinuerliga i någon enkel mening.

Regel 4 Detta är den regel som mest uppenbart inte stämmer med erfarenheten. *$m_1 < m_2$ och $\overline{v}_2 = 0$. Föremålet med den mindre massan kolliderar med det tyngre som är i vila. Enligt Descartes är resultatet av detta att $u_1 = v_1$, dvs. att det lättare föremålet reflekteras med bibehållen fart.* Om m_1 bara är lite mindre än m_2 är det uppenbart orimligt.

Regel 6 *Lika massor, föremål 2 i vila. Farterna efter kollisionen är enligt Descartes $u_1 = 0,75v_1$ och $u_2 = 0,25v_1$ och föremål 1 har ändrat sin riktning.* Denna kontrolleras enkelt i experiment och vi vet att föremål 1 stannar helt och föremål 2 rör sig efter kollisionen med föremål 1:s hastighet.

Varför blev det fel?

- Descartes hade ett annat kraftbegrepp. Newton tog de sista stegen för att få det bättre.
- Behandlade inte rörelsemängd som vektor. För kollision längs en linje måste man använda olika tecken för olika riktningar.
- Descartes ansåg till en del att det var skillnader mellan idealiserade experiment och verkliga. Luftmotstånd, elasticitet.
- Det gick fortfarande inte att enkelt studera kollisioner empiriskt.

Som sagt finns det 7 regler, en del stämmer en del inte. Det är bland andra Huygens som reder ut situationen för rörelsemängden (se även White ovan). Aristoteles 384-322 fvt, Galileo 1564-1642, Descartes 1596-1650, Huygens 1629-1695, Newton 1642-1727.

Övning 5. Konstruera några situationer där det är stor skillnad om man använder rörelsemängd som vektor (med plus- eller minustecken) eller inte (elastisk, oelastisk). Denna typ av kontraster kan användas för att övertyga om att vektortänkandet behövs.

Ofta när man ska förklara varför det måste vara symmetriskt och att det inte kan vara tex. den som rör sig som utövar en kraft och den andra kroppen svarar på detta så kan det vara till hjälp att se kollisionen från ett annat system. Man får då 2 olika resonemang, vilket inte går ihop; och det finns bara ett rimligt symmetriskt resonemang.

Om kropp A rör sig med farten 4 m/s åt höger mot ett föremål B som är i vila kan det förefalla att A är den aktiva som utövar en kraft på B som sedan svarar med en motkraft. Men låt oss, vi som tittar på kollisionen, i stället röra oss med den konstanta farten 4 m/s åt höger (precis som A). Kropp A är då den kropp som är i vila sett från vårt system. I stället är det nu kropp B som rör sig med farten 4 m/s åt vänster, mot oss. Då är det kropp B som är den aktiva och påverkar A som svarar med en motkraft. Vad som händer skulle således bero på hur iakttagaren rör sig. Men vi räknar bara med en verklighet och anlägger en symmetrisk syn på kollisionen. Det är inte den ena som är aktiv och den andra som svarar, utan vi måste se det helt symmetriskt som en växelverkan som är en kraft som är lika stor i båda riktningarna. Att fysikens lagar ska vara oberoende av vilken konstant hastighet iakttagaren har kallas för att lagarna är Galilei-invarianta; oföränderliga vid skifte till ett annat system med en annan konstant hastighet.

1.8 Kommentarer till övningar

1 a) $\overline{v}_f - \overline{v}_i = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4$ m/s. b) $\overline{v}_f - \overline{v}_i = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$ m/s.

2 $-3,0 \cdot 4,0 = -12$ m/s.

3 Kraften är inte känd och inte heller kollisionstiden så $I = F \cdot \Delta t$ kan inte beräknas. I stället beräknar vi ändringen i rörelsemängd. Rörelsemängden efter kollisionen upphört är 0 kgm/s. Rörelsemängden före är $p = mv = 1000 \cdot 30/3,6 \approx 8300$ kgm/s. Impulsen är ungefär $I = -8300$ Ns.

4

Tabell 1.3: Rörelsemängden angiven i Ns. Räkna i huvudet eller med penna och papper. Balansräkning!

nr. 1 före	nr. 2 före	nr. 1 efter	nr. 2 efter
+4	-2	-2	**+4**
+4	-4	+2	**-2**
-2	+4	-2	**+4**
+4	0	**+6**	-2
+3	-2	-4	+5
+3	-3	+1	**-1**

5 En kollision mellan två föremål med samma fart men olika riktningar och som fastnar i varandra. De står stilla efter kollisionen (fullständigt inelastisk stöt, all kinetisk energi blir

upphettning och ljud). Descartes rörelsemängd före är $mv + mv = 2mv$. Efter är rörelsemängden 0 då de står stilla.

1.9 Kapiteluppgifter

1. En bil, 1 ton, kolliderar med en lastbil, 2 ton. De har båda farten 50 km/h när de krockar rakt mot varandra. De fastnar i varandra. Hur kommer det sammansatta ekipaget att röra sig? Se bilen och lastbilen som ett isolerat system.

2. En pistolkula kolliderar med en människa. Människan väger 70 kg, kulan väger 8 g. Kulans fart vid kollision med människan sätter vi till 400 m/s. En kula har i regel en fart runt eller under 1500 m/s då den lämnar vapnet (pistol, gevär och liknande). Människan är i vila. Kulan fastnar i människan. Se människan och kulan som ett isolerat system.

3. Utgå från att $\overline{F}\Delta t = m\Delta\overline{v}$. Problematisera det diffusa påståendet: Man behöver en större kraft för att accelerera en bil än en cykel.

4. Hjälmar och krockkuddar verkar genom att förlänga inbromsningstiden och därmed också den kraft som påverkar det som ska stoppas. Man kan konstruera olika *modeller* av hur en krock går till. En enkel *modell* är enligt följande. Kroppen som ska bromsas har farten v. När den stannat har den farten 0. Medelfarten sätts till $v/2$, vilket är korrekt om hastigheten minskar linjärt. Tiden för inbromsning om du bromsas på sträckan s är då $t = s/(v/2) = 2s/v$. Kraften som behövs för att stoppa en kropp med massan m är då
$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{mv}{2s/v} = mv \cdot \frac{v}{2s} = \frac{mv^2}{2}/s.$$

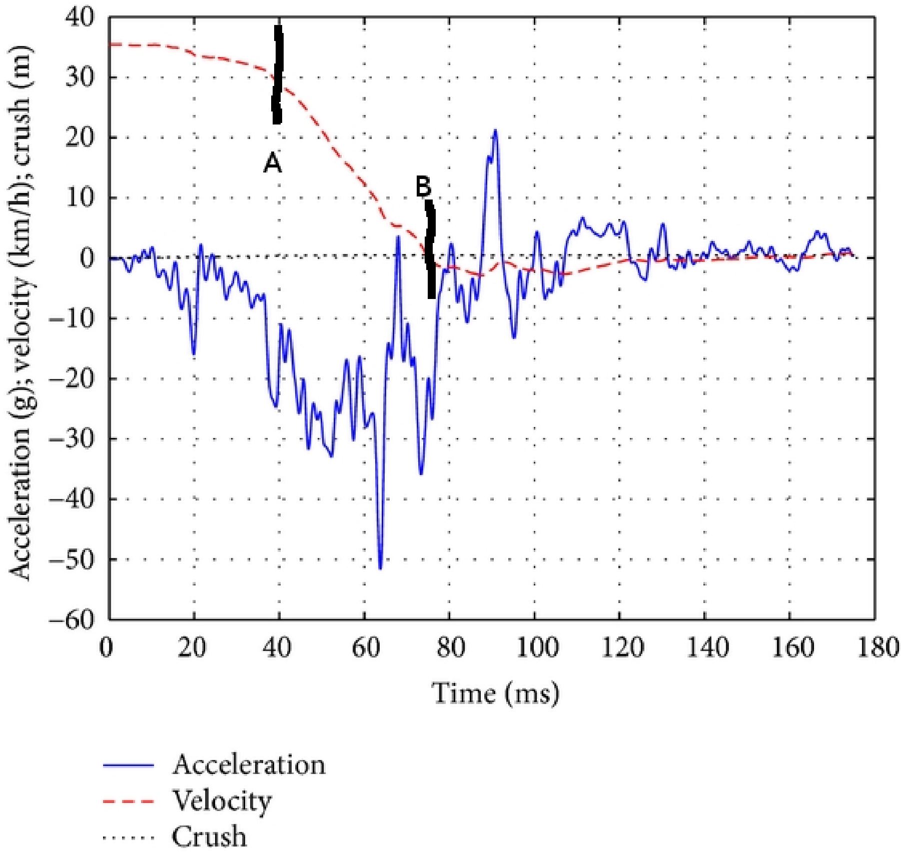
   a) Säg att en människokropp på 70 kg i en bil, 1 ton, med farten 50 km/h ($50/3,6 \approx 14$ m/s) frontalkrockar med ett träd. Stoppsträckan s är då kanske halva motorrummet. Vilken kraft stoppar bilen?

   b) Människan fortsätter framåt och stoppas av ratten och instrumentpanelen på cirka 20 cm. Vilken kraft uppkommer?

   c) Om människan i stället får 40 cm på sig med hjälp av luftkudden? Hur många g motsvarar detta?

5. Två gaser av samma molekyler är i kontakt med varandra. Dock har den ena gasen en hög temperatur och den andra en låg temperatur. En hög temperatur innebär att molekylerna har en stor kinetisk energi, vilket i sin tur innebär att de har en stor fart (de båda gasernas molekyler har samma massa). Säg att i den ena gasen har molekylerna farten 500 m/s och i den andra 250 m/s. Molekylerna kolliderar helt elastiskt. För enkelhets skull räknar vi på att de kolliderar rakt mot varandra. Vilken av molekylerna har högst fart efter kollisionen? Vilken molekyl har avgett kinetisk energi och vilken har fått kinetisk energi? Denna *modell* kan förklara varför en 'varm' kropp avger 'värme' till en 'kall' kropp.

6. Från mätningar av verkliga kollisioner har man erhållit data i figur 1.9.1. Uppskatta från grafen accelerationen genom att beräkna ändringen i hastighet (inte avläsa den blå



Figur 1.9.1: Data från verklig kollision.

kurvan), rimligen mellan markeringarna A och B. Beräkna sedan den kraft som behövs för att ge ett huvud, ca 4,5 kg, denna acceleration.

7. Två föremål av samma material och beskaffenhet men med olika massor har samma fart. Deras friktionskraft mot underlaget ges av $f = kN$ där k är en konstant som är lika för båda och N är normalkraften från underlaget. Vilket av föremålen rör sig längst innan det stannar?

1.10 Kommentarer till kapiteluppgifter

1. Rörelsemängdens bevarande ger $1000 \cdot 50/3,6 + (-2000 \cdot 50/3,6) = 3000 \cdot v$. Ekvationen löses $v = -4,6$ m/s. Cirka 17 km/h i lastbilens färdriktning.
2. Rörelsemängdens bevarande ger $70 \cdot 0 + 0,008 \cdot 400 = 70,008 \cdot v$. Ekvationen löses $v = 0,05$ m/s. Cirka 5 cm/s.
3. Det som inte sägs är vilken tid man har på sig. Har man samma tid så är det sant. Men med en liten kraft kan man få en hög fart bara kraften får verka länge.
4.
   a) $1000 \cdot 14^2/2/0,5 = 196\,\mathrm{kN}$.
   b) $70 \cdot 14^2/2/0,20 = 34\,\mathrm{kN}$
   c) Hälften av den tidigare kraften, 17 kN. $F = ma$ så $a = 17000/70 = 245\,\mathrm{m}/s^2$. Uttryckt i enheter av $g = 9,82\,\mathrm{m}/s^2$ är det $245/9,82 = 25$ g.
5. Vi följer exemplet i texten och ställer upp två ekvationer: en för rörelsemängd och en för kinetisk energi.
$$500m + (-250m) = mv_1 + mv_2$$
som är
$$250 = v_1 + v_2.$$
För kinetiska energin får vi
$$0,5m \cdot 500^2 + 0,5m \cdot 250^2 = 0,5mv_1^2 + 0,5mv_2^2$$
som förenklas
$$500^2 + 250^2 = v_1^2 + v_2^2$$
och
$$312500 = v_1^2 + v_2^2.$$
Vi löser ut $v_1 = 250 - v_2$ och sätter in i uttrycket för kinetisk energi
$$\begin{aligned}312500 &= (250 - v_2)^2 + v_2^2 \\ &= 62500 + v_2^2 - 500v_2 + v_2^2 \\ &= 2v_2^2 - 500v_2 + 62500\end{aligned}$$
Andragradsekvationen är
$$2v_2^2 - 500v_2 - 250000 = 0$$

vagn	före	efter alt. 1	efter alt. 2
1	500 m/s $\rightarrow$	-250	500
2	-250 m/s $\leftarrow$	500	-250

Tabell 1.4: Möjliga lösningar.

$$v_2^2 - 250v_2 - 125000 = 0$$

som har lösningarna

$$v_2 = 125 \pm \sqrt{125^2 + 125000} = 125 \pm 375$$

så $v_2 = 500$ m/s och $v_2 = -250$ m/s. För respektive värde erhåller vi $v_1 = 250 - v_2 = 250 - 500 = -250$ m/s. och $v_1 = 250 - (-250) = 500$ m/s. Vi sammanfattar i tabell 1.4:

Vi tolkar detta som att i alternativ 2 fortsätter molekyl 1 med farten 500 m/s och molekyl 2 fortsätter med sina -250 m/s. Detta är inte rimligt, de kan ju inte gå rakt igenom varandra (här finns kopplingar till problematik kring kollision av identiska partiklar men vi lämnar det för tillfället). Den rimliga lösningen är att molekyl 1 byter från 500 till -250 och molekyl 2 byter från -250 till 500 m/s. Den långsammare molekylen har fått större fart, den har fått större kinetisk energi; den har i någon mening blivit upphettad.

6. Vid 40 ms är farten cirka 30 km/h och vid 80 ms är den 0 km/h. Fartändringen är 30/3,6=8,3 m/s. Fartändringen sker på 40 ms. Vi får $\Delta v/\Delta t = 8,3/0,04 = 208\,\mathrm{m}/s^2$(cirka 20g). För att ge en kropp på 4,5 kg denna acceleration krävs en kraft på $F = ma = 4,5 \cdot 208 = 937\,\mathrm{N}$. Ungefär den kraft som behövs för att hålla 96 kg med händerna. Vi ser också att det stämmer hyfsat med den blå kurvan som visar mer detaljerade variationer.

7. De påverkas av en bromsande kraft $f = kN = ma$ vilket ger att $kmg = ma$ som i sin tur innebär att $a = kg$ dvs. inbromsningen är lika stor för båda. Eftersom de har samma fart och samma inbromsning stananr de efter samma sträcka. Massan spelar ingen roll. Impuls ger oss $f \cdot \Delta t = \Delta p = m\Delta v$ men med $f = kN = kmg$ får vi $kmg\Delta t = m\Delta v$ så $\Delta t = \Delta v/(k \cdot g)$. De stoppar på samma tid och eftersom de har samma fart och en konstant kraft (och konstant acceleration) så stoppar de på samma sträcka (den bromsande accelerationen är lika fastän att krafterna inte är det).

1.11 Fullständig lösning för elastisk kollision på linje

Betrakta 2 partiklar som kolliderar elastiskt på en linje. De har massorna m_1 och m_2. Hastigheterna före är $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$. Hastigheterna efter är $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_2$. Rörelsemängdens bevarande

$$m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2.$$

Kinetiska energins bevarande

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2.$$

Flytta om i rörelsemängdens bevarande och kinetiska energins bevarande

$$m_1\left(\overline{v}_1-\overline{u}_1\right)=m_2\left(\overline{u}_2-\overline{v}_2\right) \tag{1.11.1}$$

och

$$m_1\left(\overline{v}_1^2-\overline{u}_1^2)\right)=m_2\left(\overline{u}_2^2-\overline{v}_2^2\right).$$

Dividera de båda ekvationerna med varandra och observera konjugatregeln $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

$$\overline{v}_1+\overline{u}_1=\overline{u}_2+\overline{v}_2$$

som också kan skrivas

$$\overline{v}_1-\overline{v}_2=-\left(\overline{u}_1-\overline{u}_2\right). \tag{1.11.2}$$

Vi löser ut hastigheterna efter och sätter in dem i den urpsrungliga ekvationen för rörelsemängdens bevarande:

$$\overline{u}_1=\overline{u}_2+\overline{v}_2-\overline{v}_1 \text{ samt } \overline{u}_2=\overline{u}_1+\overline{v}_1-\overline{v}_2.$$

Vi sätter in uttrycket för $\overline{u}_1$ i 1.11.1

$$\begin{gathered}
m_1\left(\overline{v}_1-\overline{u}_1\right)=m_2\left(\overline{u}_2-\overline{v}_2\right)\\
\Leftrightarrow\\
m_1\left(\overline{v}_1-\overline{u}_2-\overline{v}_2+\overline{v}_1\right)=m_2\left(\overline{u}_2-\overline{v}_2\right)\\
\Leftrightarrow\\
m_1\overline{v}_1-m_1\overline{u}_2-m_1\overline{v}_2+m_1\overline{v}_1=m_2\overline{u}_2-m_2\overline{v}_2\\
\Leftrightarrow\\
2m_1\overline{v}_1+\left(m_2-m_1\right)\overline{v}_2=\left(m_2+m_1\right)\overline{u}_2\\
\Leftrightarrow\\
\overline{u}_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\overline{v}_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\overline{v}_2.
\end{gathered} \tag{1.11.3}$$

Och på motsvarande sätt använder vi $\overline{u}_2=\overline{u}_1+\overline{v}_1-\overline{v}_2$ i 1.11.1 igen.

$$\overline{u}_1=\frac{2m_2}{m_1+m_2}\overline{v}_2+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\overline{v}_1. \tag{1.11.4}$$

Vi kan nu direkt beräkna hastigheterna efter kollisionen med hjälp av hastigheterna före.

Litteraturförteckning

Desmond M. Clarke. The impact rules of descartes' physics. 68:55–66.

John L. Russel. Action and reaction before newton. 9(1):25–38.