1 Intervallhalvering

1.1 Nollställen

Hur vet vi om en funktion har nollställen i ett intervall? Nollställen innebär lösningar till ekvationen $f(x)=0$.

Om vi betraktar en funktion $f(x)$. Hur vet vi att denna funktion har nollställe?

Jo för ett givet tal $x=a$ gäller att $f(a)=0$. Då är a ett nollställe.

1.2 Numeriska lösningar

Många ekvationer är så att man inte kan direkt lösa dem med de fyra räknesätten eller med hjälp av standardfunktioner. Exempel på ekvationer som kan vara svåra att lösa:

$$0.1x-\sin(x)=0$$

$$e^x-x-5=0$$

$$e^{-x}+\sqrt{x}-2=0$$

$$4\arccos(x)-1-x=0$$

$$x^x-0{,}5-x=0$$

Här följer några idéer för numerisk lösning. Idéerna är olika bra och har olika problem, mer om det senare; de är idéer som kan utvecklas.

Idé 1: Vi beräknar $f(x)$ för en massa tal t och ser om $f(t)=0$!

Liten chans att man ska hitta just det talet som gör att det blir precis 0.

Idé 2: Man kan testa om det är nära 0, t.ex. $-0{,}1<f(t)<0{,}1$!

Jo. Men som framgår lite av olikheterna är att man egentligen söker en *teckenväxling*.

Idé 3: Om vi undersöker ett intervall $[s,t]$ och vi finner att $f(s)>0$ och $f(t)<0$ så har funktionen passerat 0 (minst en gång). Det omvända gäller också $f(s)<0$ och

$f(t)>0$. Medan om $f(s)>0$ och $f(t)>0$ så har inte 0 passerats (eller så har 0 passerats flera gånger); samma gäller för $f(s)<0$ och $f(t)<0$.

1.3 Algoritm

Vi kan sammanfatta idé 3 till:

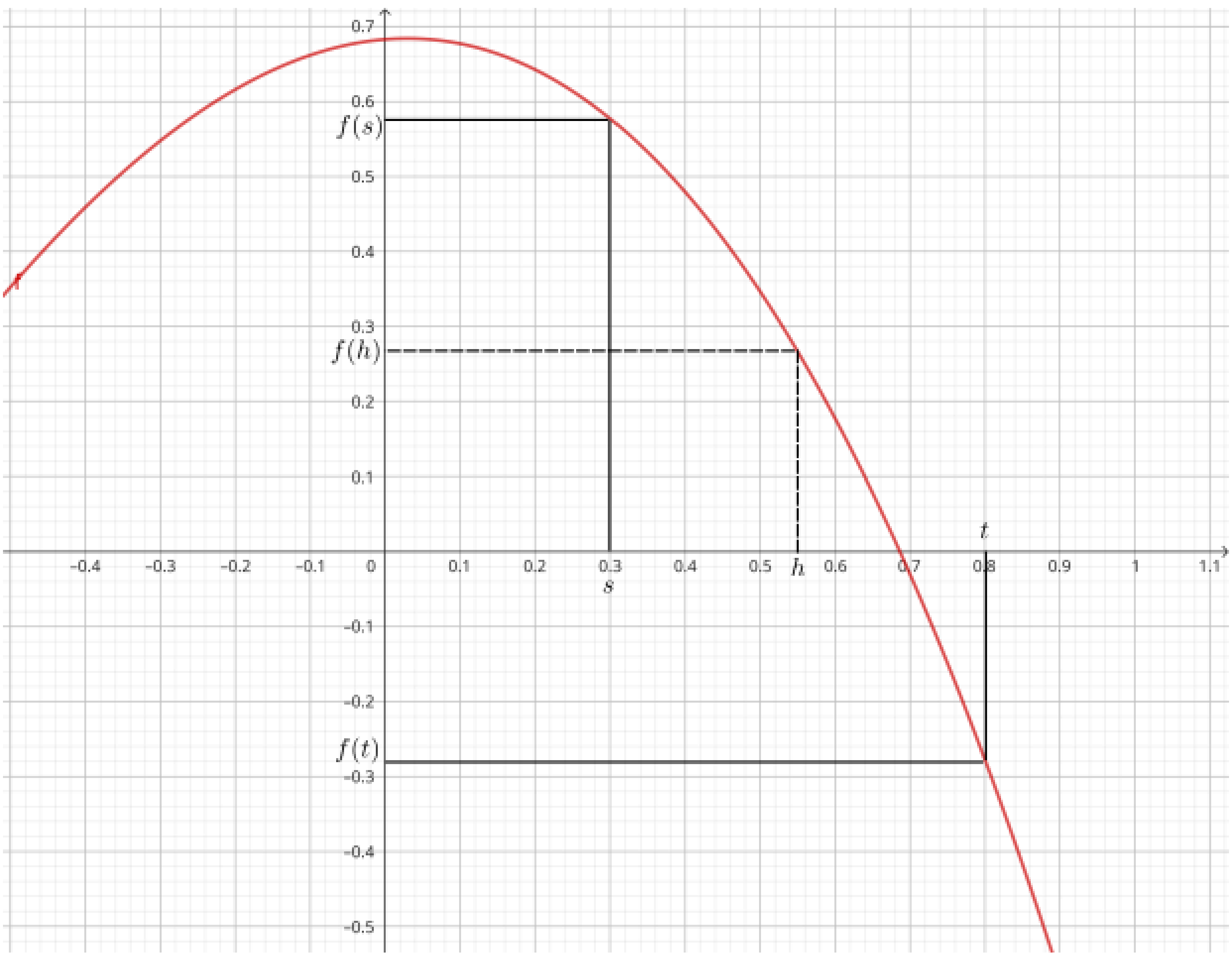
Steg 1: Om $f(s)\cdot f(t)<0$ så minst ett nollställe i intervallet (olika tecken).

Steg 2: Gör intervallet mindre. Minska s eller t.

Steg 3: Som steg 1 (loop). Kolla teckenväxling igen osv.

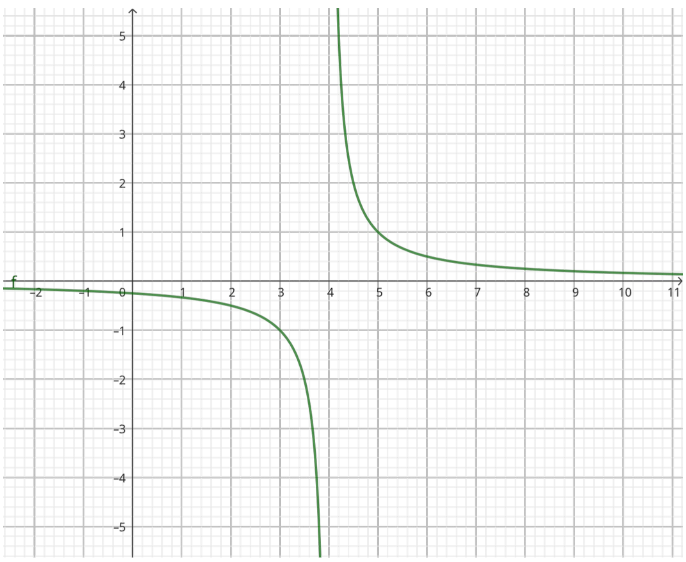
Ofta delar man intervallet på mitten och väljer sedan de två gränser som ger olika tecken. Mitten på intervallet: $h=\dfrac{s+t}{2}$

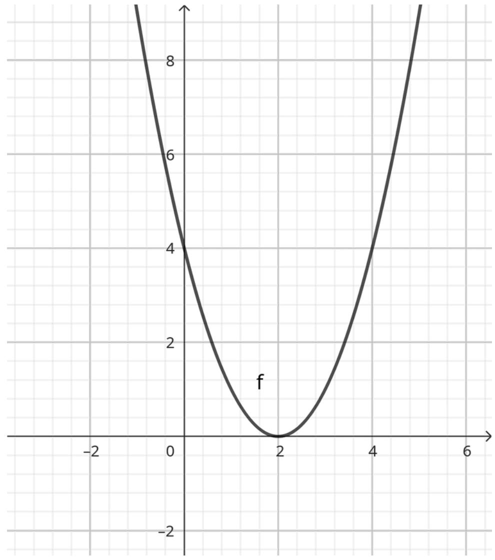
Ska sedan h ersätta s eller t? Svaret på den frågan beror på $f(h)\cdot f(t)$ och $f(s)\cdot f(h)$; vilken av dem har teckenväxling?



I figuren ska h ersätta s, så $f(h) \cdot f(t)$ är negativ (teckenväxling). Från att nollstället ligger mellan 0,3 och 0,8 vet vi nu att det ligger mellan 0,55 och 0,8. Sedan beräknar vi ett nytt h.

Vi ignorerar att funktionen kan ha oändliga asymptoter och vara odefinierad och kanske lite annat… Metoden kommer inte att fungera alltid. Funktionen kan ha teckenväxling utan att vara 0 och kan vara 0 utan att ha teckenväxling. Se figur.





1.4 Uppgift

Skriv en kod som letar rötter enligt metoden. Användaren ska ange en gissning $(guess)$ som starthjälp och ett intervalls storlek $(d$, så att gränserna är $guess \pm d)$. Du måste också ange hur litet beloppet av skillnaden mellan $f(s)$ och $f(t)$ ska vara då programmet slutar. Värden och funktionen är inskriven i programmet, behöver ej matas in. Prova med funktionerna $y = x^2 - 3$ och $y = \sin(x)$ vid $x = \pi$.

Bestäm alla positiva rötter till $0.1x = \sin(x)$ och $x^x = x + 0{,}5$.