1 Största gemensamma delare SGD

Instruktionen ger 2 olika uppgifter. Den ena bygger dock på den andra så du behöver bara lämna in slutprodukten. På engelska benämns största gemensamma delare som greatest common divisor GCD.

1.1 Introduktion Delare

Centralt i diskret matematik är begreppet ’delare’. Att ett tal d delar ett annat tal innebär att det går jämnt upp, ingen rest. Detta skrivs $d|m$ och läses som att ” d delar m ”. T.ex. $3|21$, $7|77$. Man kan även skriva $3\nmid 22$, att 3 inte delar 22.

1.2 Sats

Vi behöver genast en sats:

Om $d|m$ och $d|n$ så gäller att $d|(m+n)$. Det gäller också att $d|(m-n)$.

Vi diskuterar denna i det följande.

1.3 Tankegång 1

Om $3|30$ och $3|21$ så $3|(30+21)$ säger satsen. Explicit ser vi vad som händer om vi skriver $30=3\cdot 10$ och $21=3\cdot 7$ och adderar dessa $30+21=3\cdot 10+3\cdot 7=3\cdot(10+7)=3\cdot 17=51$. Talet 3 bibehåller sin egenskap att vara faktor. Samma gäller för subtraktion: $30-21=3\cdot 10-3\cdot 7=3(10-7)=3\cdot 3=9$.

Hur vi kommer att göra i Python

Vi har två tal 30 och 21. Vi bildar skillnaden mellan dem 30-21.
Om 30 och 21 har någon gemensam delare så har differensen det också!
Differensen är 9.
Om 21 och 9 har någon gemensam delare så har differensen det också! Och naturligtvis har 30 också denna delare enligt tidigare eller för att 30 är summan av 21 och 9.
Differensen 21-9=12. Och 9 och 12 har gemensam delare.
12-9=3 som har gemensam delare med 9.
9-3=6. D.v.s. 6 och 3 har gemensam delare.
6-3=3. Hm. 3 och 3 har gemensam delare, måste vara 3 som är delare i 30 och 21.
3-3=0. Ingen rest! Sista icke-försvinnande rest (3:an på föregående rad) är den gemensamma delaren.

Utför själv för talen 15 och 40.

1.4 Tankegång 2

Euklides algoritm i matematikböcker

Finn största gemensamma delare för 1914 och 4734.
Vi dividerar 4734 med 1914 och ser att det går 2 gånger; vi kan subtrahera 1914 2 gånger.
$4734-2\cdot 1914=906$.
Enligt vår tankegång 1 ovan skulle vi gjort $4734-1914=2820$. Så om det finns en delare så finns den i 2820 och 1914. Nästa steg i vår tankegång 1 hade varit $2820-1914=906$. Vi noterar att vi i både tankegång 1 och 2 subtraherar 1914 två gånger.
I nästa steg subtraherar vi 906 från 1914, så många gånger det går: $1914/906\approx 2{,}1$ så det går 2 hela gånger: $1914-2\cdot 906=102$.
I nästa steg subtraherar vi 102 från 906: $906-8\cdot 102=90$.
I nästa steg subtraherar vi 90 från 102: $102-1\cdot 90=12$.
I nästa steg subtraherar vi 12 från 90: $90-7\cdot 12=6$.
$12-2\cdot 6=0$.
Sista icke-försvinnande rest var 6, så 6 är största gemensamma delare.

Datorprogrammet (som ska skrivas) kommer inte att bestämma antalet hela gånger utan endast subtrahera så många gånger det går.

Realisera tankegång 1 i ett datorprogram som tar som input två tal för vilket största gemensamma delare ska bestämmas. Programmet ska skriva ut de 2 inmatade talen samt sgd.

Vi har konstaterat satsen:
Om $d|m$ och $d|n$ så gäller att $d|(m+n)$. Det gäller också att $d|(m-n)$.
Och det räcker för våra beräkningar.

Denna sats kan utvidgas genom att konstatera att vilka heltalskombinationer som helst av m och n också är delbara med d (vi berörde detta i tankegång 2 ovan). Satsen är:

Om $d|m$ och $d|n$, och a och b är heltal, så gäller att $d|(am+bn)$. Det gäller också att $d|(am-bn)$.

Vi troliggör detta påstående genom ett exempel:

$m=30$ och $n=21$. Vi vet att $3|30$ och $3|21$. Vi vet också att $3|(30+21)$ enligt tidigare.
Vi konstaterar först att om $3|30$ så gäller också exempelvis att $3|7\cdot 30$ eftersom faktorn 3 fortfarande finns i 30; talet 7 förändrar ju inte detta. På samma sätt inser vi att om $3|21$ så gäller $3|5\cdot 21$ eftersom faktorn 3 fortfarande finns i 21. Sätter vi samman dessa $7\cdot 30+5\cdot 21$ så finns faktorn 3 i både $7\cdot 30$ och $5\cdot 21$, så summan är också delbar med 3: $3|(7\cdot 30+5\cdot 21)$. Så $d|(am+bn)$!

Vi har inte visat att den gemensamma delaren är största gemensamma delaren, men så är det.

1.5 Diofantiska ekvationer

En diofantisk ekvation är en ekvation på formen $ax+by=c$ med endast heltal. x och y är obekanta heltal och a, b, c är givna heltal. För reella tal har ekvationen oändligt många lösningar (icke-uppräkneligt). Uttrycket innebär att man tar en linjärkombination av talen x och y för att erhålla talet c.

Vi ser på ett exempel.

$69x+48y=5$. Vi studerar ekvationen utifrån att vi vet att:

Om $d|m$ och $d|n$, och a och b är heltal, så gäller att $d|(am+bn)$. Det gäller också att $d|(am-bn)$.

Utifrån vad vi sett tidigare så det tal som delar 69 och 48 måste också dela 5, annars har vi ju inga lösningar.
Största gemensamma delaren till 69 och 48 är 3, d.v.s. både 69 och 48 är delbara med 3.
Varje linjärkombination(heltal) av dem är då också delbar med 3.
Men 5 är inte delbar med 3. Således finns det inga lösningar!
Vilka heltals-kombinationer du än gör med 69 och 48 så kommer de att vara delbara med 3.

Bygg vidare på det tidigare programmet som bestämmer sgd för a och b. Programmet ska, utöver det som redan gjorts, avgöra om en diofantisk ekvation är lösbar, dvs. undersöka om sgd till a och b också är en delare i c. Du får ej använda max().

Observera att:
Om sgd är 1 så går ekvationen att lösa eftersom 1 delar alla högerled.
Om koefficienterna är primtal, sgd=1, så kan ekvationen alltid lösas.

Anledningen till att du inte får använda max() är att du ska lära dig programmera, uppgiften är inte att lösa ett givet problem med minsta möjliga egen arbetsinsats.

Delare och Diofantiska ekvationer att testa på:

sgd(369,252)=9
sgd(163231,135749)=151
1x+1y=12
0x+2y=12
97x+35y=13, sgd(97,35)=1, lösbar
98x+35y=13, sgd(98,35)=7, 7 delar ej 13, inte lösbar
7x+18y=208, sgd(18,7)=1, lösbar