

Andra ordningens differentialekvationer

Newtons andra lag, kraftlagen, har formen $F=ma$ vilket är en differentialekvation av andra ordningen, den skrivs som

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Kraften kan i sin tur bero på läget x och hastigheten dx/dt . För en fjäder gäller att den påverkas av en återställande kraft $F=-kx$. Om det finns en friktion av typen luftmotstånd så kan den för ett intervall av hastigheter beskrivas genom

$$F = -b \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

dvs. att friktionen är proportionell mot hastigheten. Det finns dock flera ansatser för olika former av friktion.

Rörelselagarna kan anges som $\Delta x = v \Delta t$ och $\Delta v = a \Delta t = (F/m) \Delta t$ och om de anges på diskret form som

$$x_{k+1} = x_k + v_k \Delta t$$

och

$$v_{k+1} = v_k + \frac{F(x_k, v_k, t)}{m} \cdot \Delta t .$$

En driven oscillator är en fjäder som drivs av en pålagd kraft, vanligt är att det är en periodisk kraft $F = F_0 \cos(\omega t)$. Den totala kraften ges då av

$$F = -kx - b \left(\frac{dx}{dt} \right) + F_0 \cos(\omega t)$$

som ger

$$v_{k+1} = v_k + \frac{\Delta t}{m} (-kx_k - bv_k + F_0 \cos(\omega t_k))$$

Genom att välja tidsintervallen små kan detta fungera bra. Även om detaljerna kanske inte stämmer så kan man ofta lära sig om systemets övergripande dynamik, tex. vad som händer före, efter och under resonans.

Skriv kod som beskriver en driven dämpad fjäder enligt ovan. Undersök sedan följande fenomen:

- 1) Hur amplituden, som intas efter en tid (efter den så kallade transienten), beror på närheten till resonansfrekvensen. Graf med punkter från körningar.
- 2) Hur systemets svängning (x) förhåller sig till den pålagda (drivande) kraften som funktion av vinkelfrekvensen. Hur stor vinkel de är ur takt. Den exakta formen beror även på b men välj ett litet $b \neq 0$. Extra: Hur förhåller sig fasen mellan drivande kraft och hastighet?
- 3) Systemets vinkelfrekvens i förhållande till den drivande vinkelfrekvensen?

Resonans inträffar då den pådrivande frekvensen ω är lika med fjäderns resonansfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ange också någon enkel text/förklaring i plottarna, tex resonansfrekvens och drivande frekvens osv. Se bilder.

Följ mallen för inlämningar. Programmet som lämnas in ska vara i grundutförandet i den meningen att den plottar svängning som funktion av tiden. Vill du lämna in andra varianter går det också bra men en av programmen måste vara i grundutförandet. Illustrera beteenden och svar på uppgifterna med några väl valda bilder.

Tips

- 1) Resultat ska hämtas från tid efter transienten. Man kan då börja bakifrån med adresseringen (index -1 osv).
- 2) Ett maximum definieras i matematiken som $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ för alla h i en omgivning till x_0 . Genom att jämföra funktionsvärdena i en lista stegvis kan man därför avgöra var ett maximum finns.

