Eulers metod

Eulers metod är en metod för att lösa ordinära differentialekvationer av första ordningen. Det är i grunden en omskrivning av differenskvoten som används för derivatans definition.

Vi har
$y'=f(t,y(t))$ och $y'(t)=\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$ utan gränsvärde.

Vi gör det hela diskret genom y_{n+1} ersätter $y(t+h)$ och y_n ersätter $y(t)$.

Vi får
$y(t+h)=y(t)+hf(t)$ som diskret är $y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n)$.

Man behöver ett startvärde tex. $y_0=1$, dvs $y(0)=1$.

Vi använder detta på en differentialekvation vi kan lösa för att kontrollera resultatet: $y'=-3ty$ som har lösningen $y=A\mathrm{e}^{-3t^2/2}$. Om vi väljer startvärdet enligt ovan så kan A bestämmas till 1. Vi startar således vid $t=0$ och väljer att gå till $t=1$ med 4 steg. Vi sammanfattar innan beräkningen.

t=0 är	n=0
t=0,25	n=1
t=0,5	n=2
t=0,75	n=3
t=1	n=4

och h=0,25

Vi prövar manuellt.

y0=1, t0=0,

y1=y0+0,25*0=1+0=1 o t1=0,25
(y1=y0+h(-3*t0*y0))

y2=y1+0,25*(-3*0,25*1)=1+-3/8=0,8125 o t2=0,5
(y2=y1+h(-3*t1*y1))

y3=y2+0,25*(-3*0,5*0,8125)=0,5078125 o t3=0,75
(y3=y2+h(-3*t2*y2))

och den sista

y4=y3+0,25*(-3*0,75*0,5078125)=0,222167969
(y4=y3+h(-3*t3*y3))

Så det diskreta förslaget är att $y(1)=0{,}22$. Om vi sätter in och räknar i lösningen får vi $y=e^{-3t^2/2}=e^{-3/2}=0{,}22313016$. Vi förbättrar detta genom att dela in i fler steg mellan 0 och 1 men då är det lämpligt att låta datorn ta över.
För 10 delar får vi med datorn 0.22305911466494655, för 100 får vi 0.22313009271198628.

1) Skriv ett program i python som löser problemet här ovan. Hur många steg, cirka, behövs för 5 korrekta decimaler? Plotta den numeriska lösningskurvan samt den exakta (analytiska).

2) Testa programmet på en annan differentialekvation som har en explicit analytisk lösning: $y'=-y+t\,e^{-t}$ har lösningen $y=\left(\frac{t^2}{2}+C\right)e^{-t}$. Undersök för startvärdet $y(0)=1$. Plotta för 2 olika steglängder.

3) Lös differentialekvationen $y'=\sqrt{t}\cdot\sin(t)$. Rita lösningar som börjar med $t=0$ och slutar med $t=4$ för startvärdena $y(0)=0$, $y(0)=1$, $y(0)=2$, $y(0)=3$. Alla kurvor i samma diagram.