Komplexa tal och funktioner

Som uppvärmning läs 1.8 om komplexa tal.

1) Komplexa tal kan skrivas på olika former.
För växelström med fasförskjutning ϕ gäller att spänningen ges av

$$V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Med den så kallade hjälpvinkel-metoden kan $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ relateras till $C\sin(\omega t + \phi)$ genom att använda additionsformeln:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \ .$$

Vi får

$$C\sin(\omega t + \phi) = C(\sin(\omega t)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\omega t))$$

så att $C\cos(\phi) = A$ och $C\sin(\phi) = B$.

$$C\sin(\omega t + \phi) = C(\sin(\omega t)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\omega t)) =$$

$$(Ccos(\phi))\sin(\omega t) + (Csin(\phi))\cos(\omega t) =$$

$$Asin(\omega t) + Bcos(\omega t).$$

Vi ser då också att $A^2 + B^2 = C^2\cos^2(\phi) + C^2\sin^2(\phi) = C^2$.
Vinkeln fås sedan från $\cos(\phi) = A/C$ och $\sin(\phi) = B/C$.
Observera att man måste med hjälp av båda uttrycken avgöra vilken kvadrant man är i. A/C positiv och B/C positiv innebär första kvadranten. Men A/C positiv och B/C negativ innebär fjärde kvadranten.

Skriv ett program som beräknar fasförskjutningen ϕ för en spänning som ges av $V = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ för godtyckliga värden på A och B som input från användaren. Fasförskjutningen ska ges som en vinkel mellan 0 och 2π (testa så det verkligen fungerar för alla kvadranter). A ska vara koefficienten framför sinus och B koefficienten framför cosinus.

2) En av Eulers formler är

$$\sin(\phi)=\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i} .$$

Testa python genom att undersöka för några värden (ca 10), gör en tabell, på vinklar om höger led och vänster led ger samma resultat. I python använder du j i stället för i! Observera att vinklar är förinställt på radianer så 0,2 (eller 0.2) är 0,2 radianer.

3) Trigonometriska funktioner skrivs ofta i fysiken på formen $z=r\,e^{j\omega t}$.
Avsikten med denna uppgift är att du ska studera hur realdel och imaginärdel, absolutbelopp och vinkel beror på tiden.

Exempel:

$$\mathrm{Re}(r\,e^{j\omega t})=rcos(\omega t)$$
$$\mathrm{Im}(r\,e^{j\omega t})=rsin(\omega t)$$
$$|r\,e^{j\omega t}|=r$$
$$\phi=\omega t$$

En komplexvärd funktion ges av $z(t)=2\,e^{0.3\,jt}$. Där $r=2$ och $\omega=0{,}3$.
Plotta realdelen som en funktion av t.
Plotta imaginärdelen som en funktion av t.
Plotta absolutbeloppet som funktion av t (reellt tal).
Plotta fasvinkeln (det komplexa talets vinkel $\phi=\omega t$) som en funktion av t.
https://docs.python.org/3/library/cmath.html

4) Två komplexvärda funktioner ges av a) $z_1(t)=2\,e^{0{,}3\,jt}+e^{0{,}5\,jt}$ och b) $z_2(t)=1/(3+jt)$.
Plotta som i föregående uppgift och observera att realdel, imaginärdel, absolutbelopp samt vinkel inte är direkt avläsbara i uttrycken.

Tex.

$$z_2(t)=1/(3+0{,}2\,jt)=\frac{3-0{,}2\,jt}{(3+0{,}2\,jt)(3-0{,}2\,jt)}=$$

$$\frac{3-0{,}2\,jt}{9+0{,}04\,t^2}=\frac{3}{9+0{,}04\,t^2}-\frac{0{,}2\,t}{9+0{,}04\,t^2}\,j$$

varur realdel, imaginärdel osv. kan beräknas.

Observera att detta inte är det allmänna problemet $u+jv=f(x+jy)$. Detta kan studeras genom tex att x och y bildar $\mathbb{R}^2$ och sedan studeras $\mathrm{Re}\,f=u$ som den tredje dimensionen; eller $\mathrm{Im}\,f$ ger v som den tredje osv..

5) Läs 3.9 (på Jupyter) ”Lösningar till polynomekvationer” och **ange lösningarna** till det komplexa polynomet $z^3+2z^2-(1-j)z=0$ och de **kod-rader i python** som genererar lösningarna.