Macroeconomia Financeira

International CAPM

João Ricardo Costa Filho

Leia os artigos, não fique só com os slides!!!!

Problema do investidor

Relembrando

- Mercado internacional de títulos públicos “a la” Dornbusch (1980).
- Dois tipos de títulos: domésticos e internacionais.
- Investidores escolhem a alocação de portfolio com base na maximização da **utilidade esperada**.
- Investidores gostam de retorno, mas não gostam de risco.
- A função utilidade deve representar essas características.

Problema de maximização

O investidor irá maximizar a sua utilidade esperada:

$$\max_{a} U_i(\bar{W}_i; \sigma_W^2)$$

s.a.

$$E[\tilde{W}_i] = \bar{W}_i = [a \cdot (1+\bar{r}) + (1-a) \cdot (1+\bar{r}^*)] \cdot W_{0,i} \qquad (3)$$

$$\sigma_W^2 = [a^2\sigma_r^2 + (1-a)^2\sigma_{r^*}^2 + 2a(1-a)\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} \qquad (4)$$

Problema de maximização

F.O.C.:

$$\frac{\partial U_i}{\partial \bar{W}_i} \cdot \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial a} + \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_W^2} \cdot \frac{\partial \sigma_W^2}{\partial a} = 0$$

(O custo marginal em termos de volatilidade deve ser igual ao retorno marginal).

Problema de maximização

Defina $\frac{\partial U_i}{\partial \bar{W}_i} = U'_1$ e $\frac{\partial U_i}{\partial \sigma^2_W} = U'_2$. Podemos reescrever a condição de primeira ordem como:

$$
\begin{aligned}
&U'_1[(1+\bar{r}) - (1+\bar{r}^*)] + U'_2[2a\sigma^2_r - 2(1-a)\sigma^2_{r^*} + 2\sigma_{r,r^*} - 4a\sigma_{r,r^*}] \cdot W_0 \\
&U'_1[\bar{r} - \bar{r}^*] + 2U'_2[a(\sigma^2_r + \sigma^2_{r^*} + 2\sigma_{r,r^*}) - \sigma^2_{r^*} + \sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} = 0 \\
&[\bar{r} - \bar{r}^*] = -2\frac{U'_2}{U'_1}[a\Delta - \sigma^2_{r^*} + \sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} \\
&[\bar{r} - \bar{r}^*] = -2\frac{U'_2}{U'_1}\Delta[a - \frac{\sigma^2_{r^*} + \sigma_{r,r^*}}{\Delta}] \cdot W_{0,i} \\
&[\bar{r} - \bar{r}^*] = -2\frac{U'_2}{U'_1}\Delta[a - \hat{a}_{min}] \cdot W_{0,i}
\end{aligned}
$$

Problema de maximização

$$a^* = \hat{a}_{min} + (\frac{U'_1}{2U'_2} W_{0,i}) \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta}$$

$$a^* = \hat{a}_{min} + \frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \iff [\bar{r} - \bar{r}^*] = \theta_i \Delta (a^* - \hat{a}_{min})$$

onde $\frac{1}{\theta_i} = (\frac{U'_1}{2U'_2} W_{0,i})$.

Equilíbrio internacional

Oferta e demanda de títulos

Defina V^S como a oferta de ativos domésticos, V^{*S} como a oferta de ativos estrangeiros e a riqueza global é dada por $W = V^S + V^{*S}$. O equilíbrio no mercado de ativos é dado por

$$V^S = V^D$$

onde $V^D = \sum_{i=1}^{n} a_i^* W_i$.

Oferta e demanda de títulos

Portanto, temos que

$$V^S = \sum_{i=1}^{n} a_i^* W_i$$

$$V^S = \sum_{i=1}^{n} (\hat{a}_{min} + \frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta}) W_i$$

$$V^S = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{min} W_i + \frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} W_i$$

$$V^S = \hat{a}_{min} W + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} W_i$$

$$V^S = \hat{a}_{min} W + \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{\theta_i}$$

Preferências agregadas

Defina $1/\theta = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{W\theta_i}$ como o grau de aversão de risco do mercado.

Preferências agregadas

$$V^S = \hat{a}_{min} W + \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \frac{1}{\theta} W$$

$$\frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \frac{1}{\theta} W = (V^S - \hat{a}_{min} W)$$

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = (V^S - \hat{a}_{min} W) \frac{\Delta\theta}{W}$$

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = (\frac{V^S}{V^S + V^{S*}} - \hat{a}_{min}) \Delta\theta$$

Risco cambial

Taxas reais

As taxas de juros reais (doméstica e internacional) em termos de consumo são dadas por:

$$r = i - \pi^C$$
$$r^* = i^* - {\pi^*}^C$$

Taxas reais

A estrutura de consumo (e, portanto, de preços) é tal que combina uma quantidade λ do bem de consumo doméstico (para uma economia estrangeira, essa participação seria λ^*), de tal forma que

$$\pi^C = \lambda\pi + (1-\lambda)(\pi^* + d)$$
$$\pi^{*C} = \lambda^*(\pi + d) + (1-\lambda^*)(\pi^*)$$

onde π^C é a inflação de consumo e d a desvalorização cambial esperada. Assuma que $\lambda = \lambda^*$.

Taxas reais

As taxas de juros reais podem ser reescritas como

$$r = i - \lambda\pi - (1-\lambda)(\pi^* + d)$$
$$r^* = i^* - \lambda^*\pi - (1-\lambda^*)(\pi^*)$$

Taxas reais

O diferencial de juros é dado por

$$r - r^* = (i - i^*) - d$$

Taxas reais

Assumindo que i, i^*, π^C e π^{*C} sejam determinísticos ($\therefore VAR[i - i^*] = 0; COV((i - i^*, d) = 0)$ e que d é a única variável estocástica:

$$VAR[r - r^*] = VAR[i - i^*] + VAR[d] - 2COV((i - i^*, d))$$
$$VAR[r - r^*] = VAR[d] = \sigma_d^2$$

Note também que

$$\sigma_r^2 = (1-\lambda)^2\sigma_d^2$$
$$\sigma_{r^*}^2 = \lambda^2\sigma_d^2$$

Podemos assim derivar uma expressão para σ_{r,r^*}:

$$
\begin{aligned}
&VAR[r - r^*] = \sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*} \\
&\sigma_d^2 = (1-\lambda)^2\sigma_d^2 + \lambda^2\sigma_d^2 - 2\sigma_{r,r^*} \\
&\sigma_d^2 = \sigma_d^2 - 2\lambda\sigma_d^2 + \lambda^2\sigma_d^2 + \lambda^2\sigma_d^2 - 2\sigma_{r,r^*} \\
&\sigma_{r,r^*} = -\lambda(1-\lambda)\sigma_d^2
\end{aligned}
$$

Substituindo esses resultados no portfolio de mínima variância, temos:

$$\hat{a}_{min} = \frac{\sigma^2_{r^*} - \sigma_{r,r^*}}{\Delta}$$
$$\hat{a}_{min} = \frac{\lambda^2 - \sigma^2_d + \lambda(1-\lambda)\sigma^2_d}{\sigma^2_d}$$
$$\hat{a}_{min} = \lambda$$

Quando $\lambda \neq \lambda^*$ o portfolio de de mínima variância é dado pela seguinte relação:

$$\hat{a}_{min} = \frac{\lambda^{*2} + (1-\lambda)\lambda^*}{(1-\lambda+\lambda^*)^2}$$

Finalmente:

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = \sigma_d^2\theta(\frac{V^S}{V^S + V^{S*}} - \hat{a}_{min}) \tag{1}$$

Conclusões

Se o investidor otimizar seu portfolio com base no valor esperado e na variância dos retornos, o prêmio de risco depender:

- Da oferta relativa de ativos denominados em diversas moedas.
- Da matrix de variância e covariância das taxas de retorno.
- Do coeficiente de aversão ao risco do agentes do mercado.

Referências

Dornbusch, Rudiger. 1980. "Exchange Rate Risk and the Macroeconomics of Exchange Rate Determination." *National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA*.