Econometria Aplicada

Regressão linear múltipla

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Regressão múltipla

Motivação (tudo começa com uma pergunta)

O que explica o comércio bilateral entre os países?

A equação de 33 trilhões de dólares

O modelo gravitacional é muito conhecido nos cursos de Economia Internacional e já figura no Capítulo 2 de Krugman, Obstfeld, and Melitz (2023). Na sua forma mais simples, a equação que sintetiza as trocas comerciais bilaterais entre países pode ser escrita como:

$$T_{o,d} = \frac{Y_o \times Y_d}{D_{o,d}}$$

onde $T_{i,j}$ representa o fluxo comercial bilateral entre o país de origem (o) e o país de destino (d), Y_o é o PIB do país de origem, Y_d é o PIB do país de destino e $D_{o,d}$ a distância entre eles.

A equação de 33 trilhões de dólares

O modelo gravitacional é muito conhecido nos cursos de Economia Internacional e já figura no Capítulo 2 de Krugman, Obstfeld, and Melitz (2023). Na sua forma mais simples, a equação que sintetiza as trocas comerciais bilaterais entre países pode ser escrita como:

$$T_{o,d} = \frac{Y_o \times Y_d}{D_{o,d}}$$

onde $T_{i,j}$ representa o fluxo comercial bilateral entre o país de origem (o) e o país de destino (d), Y_o é o PIB do país de origem, Y_d é o PIB do país de destino e $D_{o,d}$ a distância entre eles. Como podemos estimar essa relação não-linear com uma regressão linear?

O primeiro passo, será escrevê-la de uma maneira um pouco mais genérica:

A equação de 33 trilhões de dólares

O primeiro passo, será escrevê-la de uma maneira um pouco mais genérica:

$$T_{o,d} = \frac{Y_o^{\beta_1} \times Y_d^{\beta_2}}{D_{o,d}^{\beta_3}}$$

Regressão múltipla

Agora, podemos estimar a equação do slide anterior:

Regressão múltipla

Agora, podemos estimar a equação do slide anterior:

$$\ln T_{o,d} = \beta_1 Y_o + \beta_2 Y_d + \beta_3 \ln Dist_{i,j} + \varepsilon_{o,d}.$$

(Coloquei $+\beta_3$ para expressar, genericamente, a regressão).

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.
- Podemos ter (i) a variável explicada,

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.
- Podemos ter (i) a variável explicada, (ii) a(s) variável(is) de interesse

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.
- Podemos ter (i) a variável explicada, (ii) a(s) variável(is) de interesse e (iii) variáveis de controle.

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.
- Podemos ter (i) a variável explicada, (ii) a(s) variável(is) de interesse e (iii) variáveis de controle.
- A diferença é que agora temos diversas dimensões.

Referência

- Como responder a questão que motivou a nossa análise?

Referência

- Como responder a questão que motivou a nossa análise?
    - Utilizemos o capítulo 3 de Wooldridge (2006).

Regressão múltipla

Regressão múltipla

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \cdots + \beta_k X_{k,i} + \varepsilon_i.$$

Regressão múltipla

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \cdots + \beta_k X_{k,i} + \varepsilon_i.$$

Clique aqui para a matemática do estimador

R^2 e R^2 ajustado

R^2 e R^2 ajustado

- Como podemos comparar modelos? A estatística R^2 **não** é uma boa maneira.

R^2 e R^2 ajustado

- Como podemos comparar modelos? A estatística R^2 **não** é uma boa maneira.
- Podemos utilizar o R^2 ajustado, no entanto:

$$R^2_{\text{adj}} = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n-1}{n-k-1} \tag{1}$$

onde n é o número de observações da amostra e k representa o número de variáveis independentes do modelo.

Teste-F

Podemos testar a significância conjunta dos estimadores:

$$\mathcal{H}_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$$
$$\mathcal{H}_a : \beta_j \neq 0, \text{ para menos um valor de } j$$

$$F = \frac{\sum_i \epsilon_i^2 - \sum_i e_i^2}{\sum_i e_i^2} \frac{n - k_2}{k_2 - k_1} \sim F_{k_2 - k_1, n - k_2} \tag{2}$$

onde k_2 é o número de parâmetros do modelos irrestrito e k_1 o número de parâmetros do modelo restrito.

Voltemos à questão dos fluxos comerciais.

Regressão múltipla (modelo gravitacional)

	Variável dependente:
	Log do Comércio
Ln PIB (Origem)	0.944***
	(0.006)
Ln PIB (Destino)	0.622***
	(0.006)
Ln Distância	−2.344***
	(0.015)
Observations	28,159
R^2	0.907
Adjusted R^2	0.907
Nota:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Regressão múltipla (modelo gravitacional)

	Variável dependente:
	Log do Comércio
Ln PIB (Origem)	0.901***
	(0.006)
Ln PIB (Destino)	0.612***
	(0.006)
Ln Distância	−2.373***
	(0.015)
Membro da OMC (Origem)	0.971***
	(0.049)
Membro da OMC (Destino)	0.420***
	(0.050)
Observations	28,159
R^2	0.909
Adjusted R^2	0.909
Nota:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Inferência

A relação entre o PIB do país de origem e o fluxo de comércio bilateral é estatísticamente significativa?

Inferência

A relação entre o PIB do país de origem e o fluxo de comércio bilateral é estatísticamente significativa?

Com a estatística $\hat{\beta}_1$, podemos realizar o seguinte teste:

Inferência

A relação entre o PIB do país de origem e o fluxo de comércio bilateral é estatísticamente significativa?

Com a estatística $\hat{\beta}_1$, podemos realizar o seguinte teste:

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \mu$$
$$\mathcal{H}_a : \beta_1 \neq \mu$$

Inferência

E a significância conjunta?

E a significância conjunta? Com a estatística F, podemos realizar o seguinte teste:

Inferência

E a significância conjunta? Com a estatística F, podemos realizar o seguinte teste:

$$\mathcal{H}_0 : \beta_0 = \beta_1 = 0$$
$$\mathcal{H}_a : \beta_j \neq 0, \text{ para j } = [0, 1]$$

Vamos olhar para os resíduos.

Viés de variável omitida

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Quão eficiente é o mercado futuro de câmbio?

- Paridade descoberta da taxas de juros (log): $i_t - E_t[d] = i_t^*$

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Quão eficiente é o mercado futuro de câmbio?

- Paridade descoberta da taxas de juros (log): $i_t - E_t[d] = i_t^*$
- Paridade coberta da taxas de juros: $e_t(1+i_t)\frac{1}{F_{t,t+1}} = (1+i_t^*)$

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Quão eficiente é o mercado futuro de câmbio?

- Paridade descoberta da taxas de juros (log): $i_t - E_t[d] = i_t^*$
- Paridade coberta da taxas de juros: $e_t(1 + i_t)\frac{1}{F_{t,t+1}} = (1 + i_t^*)$
  - $\ln e_t + \ln(1 + i_t) + \ln 1 - \ln F_{t,t+1} = \ln(1 + i_t^*)$

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Quão eficiente é o mercado futuro de câmbio?

- Paridade descoberta da taxas de juros (log): $i_t - E_t[d] = i_t^*$
- Paridade coberta da taxas de juros: $e_t(1 + i_t)\frac{1}{F_{t,t+1}} = (1 + i_t^*)$
  - $\ln e_t + \ln(1 + i_t) + \ln 1 - \ln F_{t,t+1} = \ln(1 + i_t^*)$
  - $\ln e_t + i_t - \ln F_{t,t+1} = i_t^*$

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Quão eficiente é o mercado futuro de câmbio?

- Paridade descoberta da taxas de juros (log): $i_t - E_t[d] = i_t^*$
- Paridade coberta da taxas de juros: $e_t(1 + i_t)\frac{1}{F_{t,t+1}} = (1 + i_t^*)$
  - $\ln e_t + \ln(1 + i_t) + \ln 1 - \ln F_{t,t+1} = \ln(1 + i_t^*)$
  - $\ln e_t + i_t - \ln F_{t,t+1} = i_t^*$
  - $i_t = i_t^* + f_{t,t+1}$, onde $f_{t,t+1} = \ln F_{t,t+1} - \ln e_t$.

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Os mercados serão eficientes:

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Os mercados serão eficientes: sem oportunidades de arbitragem

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Os mercados serão eficientes: sem oportunidades de arbitragem (retorno da paridade descoberta em i_t^* deve ser igual ao retorno da paridade coberta em também medido em i_t^*):

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Os mercados serão eficientes: sem oportunidades de arbitragem (retorno da paridade descoberta em i_t^* deve ser igual ao retorno da paridade coberta em também medido em i_t^*):

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1}$
- $E_t[d_t] = f_{t,t+1}$

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Os mercados serão eficientes: sem oportunidades de arbitragem (retorno da paridade descoberta em i_t^* deve ser igual ao retorno da paridade coberta em também medido em i_t^*):

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1}$
- $E_t[d_t] = f_{t,t+1}$

Assumindo expectativas racionais:

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Os mercados serão eficientes: sem oportunidades de arbitragem (retorno da paridade descoberta em i_t^* deve ser igual ao retorno da paridade coberta em também medido em i_t^*):

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1}$
- $E_t[d_t] = f_{t,t+1}$

Assumindo expectativas racionais:
$E_t[d_t] = d_t + \epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+1} \sim D(0, \sigma^2)$.

Eficiência no mercado de câmbio futuro

Os mercados serão eficientes: sem oportunidades de arbitragem (retorno da paridade descoberta em i_t^* deve ser igual ao retorno da paridade coberta em também medido em i_t^*):

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1}$
- $E_t[d_t] = f_{t,t+1}$

Assumindo expectativas racionais: $E_t[d_t] = d_t + \epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+1} \sim D(0, \sigma^2)$. Portanto,

$$f_{t,t+1} = d_t + \epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+1} \sim D(0, \sigma^2) \iff$$
$$d_t = f_{t,t+1} + u_{t+1}, u_{t+1} \sim D'(0, \sigma^2)$$

Testando a eficiência do mercado de câmbio

Partindo da relação teórica, $d_t = f_{t,t+1} + u_{t+1}$, podemos testar eficiência do mercado de câmbio com base na seguinte regressão:

Testando a eficiência do mercado de câmbio

Partindo da relação teórica, $d_t = f_{t,t+1} + u_{t+1}$, podemos testar eficiência do mercado de câmbio com base na seguinte regressão:

$$d_t = \beta_0 + \beta_1 f_{t,t+1} + u_{t+1}$$

Testando a eficiência do mercado de câmbio

Partindo da relação teórica, $d_t = f_{t,t+1} + u_{t+1}$, podemos testar eficiência do mercado de câmbio com base na seguinte regressão:

$$d_t = \beta_0 + \beta_1 f_{t,t+1} + u_{t+1}$$

Se o mercado for eficiente, sabemos que:

$$\mathcal{H}_0 : \begin{array}{l} \beta_0 = 0 \\ \\ \beta_1 = 1 \end{array}$$

Testando a eficiência do mercado de câmbio

Partindo da relação teórica, $d_t = f_{t,t+1} + u_{t+1}$, podemos testar eficiência do mercado de câmbio com base na seguinte regressão:

$$d_t = \beta_0 + \beta_1 f_{t,t+1} + u_{t+1}$$

Se o mercado for eficiente, sabemos que:

$$\mathcal{H}_0 : \begin{array}{l} \beta_0 = 0 \\ \\ \beta_1 = 1 \end{array}$$

Resultados encontrados: $\beta_0 \neq 0$

Testando a eficiência do mercado de câmbio

Partindo da relação teórica, $d_t = f_{t,t+1} + u_{t+1}$, podemos testar eficiência do mercado de câmbio com base na seguinte regressão:

$$d_t = \beta_0 + \beta_1 f_{t,t+1} + u_{t+1}$$

Se o mercado for eficiente, sabemos que:

$$\mathcal{H}_0 : \begin{array}{c} \beta_0 = 0 \\ \\ \beta_1 = 1 \end{array}$$

Resultados encontrados: $\beta_0 \neq 0$ e $\beta_1 < 0$.

Prêmio pelo risco cambial

Trabalhemos com a seguinte especificação:

Prêmio pelo risco cambial

Trabalhemos com a seguinte especificação:

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1} - RP_t$

Prêmio pelo risco cambial

Trabalhemos com a seguinte especificação:

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1} - RP_t$
- $E_t[d_t] = f_{t,t+1} + RP_t$

Prêmio pelo risco cambial

Trabalhemos com a seguinte especificação:

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1} - RP_t$
- $E_t[d_t] = f_{t,t+1} + RP_t$

Assumindo expectativas racionais, temos:

Prêmio pelo risco cambial

Trabalhemos com a seguinte especificação:

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1} - RP_t$
- $E_t[d_t] = f_{t,t+1} + RP_t$

Assumindo expectativas racionais, temos:

$$E_t[d_t] = d_t + \epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+1} \sim D(0, \sigma^2)$$

Prêmio pelo risco cambial

Trabalhemos com a seguinte especificação:

- $i_t - E_t[d_t] = i_t - f_{t,t+1} - RP_t$
- $E_t[d_t] = f_{t,t+1} + RP_t$

Assumindo expectativas racionais, temos:

$$E_t[d_t] = d_t + \epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+1} \sim D(0, \sigma^2)$$

Portanto

$$f_{t,t+1} + RP_t = d_t + \epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+1} \sim D(0, \sigma^2) \iff$$
$$d_t = f_{t,t+1} + RP_t + u_{t+1}, u_{t+1} \sim D'(0, \sigma^2).$$

Decomposição de Fama (1984)

Tomando como base o estimador de mínimos quadrados, sabemos que:

Tomando como base o estimador de mínimos quadrados, sabemos que:

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n} (f_{i;t,t+1})^2}$$

Decomposição de Fama (1984)

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1} + RP_i + u_{i;t+1}\right) \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}$$

Decomposição de Fama (1984)

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1} + RP_i + u_{i;t+1}\right) \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} u_{i;t+1} \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}$$

Decomposição de Fama (1984)

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1} + RP_i + u_{i;t+1}\right) \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} u_{i;t+1} \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2} + 0$$

Decomposição de Fama (1984)

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1} + RP_i + u_{i;t+1}\right) \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} u_{i;t+1} \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i;t,t+1}\right)^2} + 0$$

$$plim\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{COV\left[RP, f_{t,t+1}\right]}{VAR\left[f_{t,t+1}\right]}$$

Decomposição de Fama (1984)

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1} + RP_i + u_{i;t+1}) \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} u_{i;t+1} \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2} + 0$$

$$plim\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{COV[RP, f_{t,t+1}]}{VAR[f_{t,t+1}]}$$

$$plim\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{COV[RP, f_{t,t+1}]}{\sigma_{f_{t,t+1}} \cdot \sigma_{f_{t,t+1}}} \frac{\sigma_{RP}}{\sigma_{RP}}$$

Decomposição de Fama (1984)

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1} + RP_i + u_{i;t+1}) \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} u_{i;t+1} \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2}$$

$$\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} RP_i \cdot f_{i;t,t+1}}{\sum_{i=1}^{n}(f_{i;t,t+1})^2} + 0$$

$$plim\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{COV[RP, f_{t,t+1}]}{VAR[f_{t,t+1}]}$$

$$plim\widehat{\beta}_1 = 1 + \frac{COV[RP, f_{t,t+1}]}{\sigma_{f_{t,t+1}} \cdot \sigma_{f_{t,t+1}}} \frac{\sigma_{RP}}{\sigma_{RP}}$$

$$plim\hat{\beta}_1 = 1 + \rho_{f_{t,t+1},RP} \cdot \frac{\sigma_{RP}}{\sigma_{f_{t,t+1}}}$$

Se $\hat{\beta}_1 < 0$, então $\rho_{f_{t,t+1},RP} < 0$ e $\sigma_{RP} > \sigma_{f_{t,t+1}}$.

Viés de variável omitida [Wooldridge (2006); p. 87-88]

Se

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i,$$

e como

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2},$$

Temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i) = \beta_1 \sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2} + \sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)u_i.$$

Viés de variável omitida [Wooldridge (2006); p. 87-88]

Ao dividirmos o último resultado por $\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$, caso consideremos a esperança condicionada aos valores das variáveis independentes e usemos $E(u_i) = 0$, temos que:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}.$$

Portanto, $E(\hat{\beta}_1) \neq \beta_1$.

Viés de variável omitida [Wooldridge (2006); p. 87-88]

	$\text{Corr}(x_1, x_2) > 0$	$\text{Corr}(x_1, x_2) < 0$
$\beta_2 > 0$	viés positivo	viés negativo
$\beta_2 < 0$	viés negativo	viés positivo

Apêndice

Regressão múltipla – estimador de MQO

- $\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\epsilon_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1,i} - \hat{\beta}_2 X_{2,i}\right)^2$

Regressão múltipla – estimador de MQO

- $\min_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\epsilon_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1,i} - \hat{\beta}_2 X_{2,i}\right)^2$
  - $\hat{\beta}_1 = \frac{\rho_{X_1,Y} - \rho_{X_1,X_2} \times \rho_{X_2,Y}}{1-\rho^2_{X_1,X_2}}$
  - $\hat{\beta}_2 = \frac{\rho_{X_2,X_1} - \rho_{X_1,X_2} \times \rho_{X_1,Y}}{1-\rho^2_{X_1,Y}}$
  - $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X_1} - \hat{\beta}_2 \overline{X_2}$

◂ Retornar

Regressão múltipla – estimador de MQO

E com mais variáveis?

Regressão múltipla – estimador de MQO

E com mais variáveis? Vamos utilizar álgebra matricial! Podemos escrever o modelo da seguinte forma:

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix}_{n\times k} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{k\times 1} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}_{n\times 1}
$$

Ou, simplesmente

$$
\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.
$$

Retornar

Regressão múltipla – estimador de MQO

O resíduo (não o erro) pode ser definido como

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \tag{3}$$

A soma dos quadrados dos resíduos pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}_{1\times n} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = [e_1 \times e_1 + e_2 \times e_2 + \ldots + e_n \times e_n]_{1\times 1}$$

Retornar

Regressão múltipla – estimador de MQO

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta}) \\ &= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \hat{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}\hat{\beta} + \hat{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\beta} \\ &= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - 2\hat{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \hat{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\beta} \end{aligned} \tag{4}$$

Assim, temos

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\partial \hat{\beta}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\beta} = 0 \tag{5}$$

é igual a

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}\right).$$

◂ Retornar

Referências i

Fama, Eugene F. 1984. "Forward and Spot Exchange Rates." *Journal of Monetary Economics* 14 (3): 319–38.

Krugman, Paul, Maurice Obstfeld, and Marc J Melitz. 2023. *Economia Internacional: Teoria e Política*. 12ª edição. Pearson.

Wooldridge, Jeffrey M. 2006. *Introdução à Econometria: Uma Abordagem Moderna*. Cengage Learning.