

# Macroeconomia Financeira

## International CAPM

---

João Ricardo Costa Filho

Leia os artigos, não fique só com os slides!!!!

## **Alocação de portfólio e o prêmio pelo risco**

---

## Relembrando o contexto

- Em economia aberta, o investidor opera em um mercado internacional de títulos públicos, “a la” Dornbusch (1980), e escolhe entre **títulos domésticos** e **títulos internacionais**.
  - Problema: como escolher a composição do portfólio quando os retornos são incertos?

- O investidor escolhe  $a \in [0, 1]$ :

## Portfólio e risco

- O investidor escolhe  $a \in [0, 1]$ :
  - $a$ : fração da carteira em ativos domésticos
  - $1 - a$ : fração da carteira em ativos internacionais
- Retorno esperado do portfólio:
  - $E[\tilde{W}] = \bar{W} = [a(1 + \bar{r}) + (1 - a)(1 + \bar{r}^*)] W_0$
- Variância do retorno do portfólio:
  - $\sigma_W^2 = [a^2 \sigma_r^2 + (1 - a)^2 \sigma_{r^*}^2 + 2a(1 - a)\sigma_{r,r^*}] W_0$

## Problema de maximização: o que determina a demanda por títulos domésticos?

A solução do problema '(forma reduzida) pode ser escrita como é dada por:

$$a^* = \hat{a}_{\min} + \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\bar{r} - \bar{r}^*}{\Delta}$$

onde: -  $\hat{a}_{\min}$ : parcela doméstica no **potfólio de minimiza variância**. -  $\theta$ : aversão ao risco agregada. -  $\Delta$ : medida de risco (ligada a variâncias/covariâncias)

Note que:

- Quanto maior o retorno relativo do doméstico ( $\bar{r} - \bar{r}^*$ ), maior o incentivo para aumentar  $a$ .
- Quanto maior o risco marginal do portfólio ao elevar  $a$ , menor o incentivo.

# Equilíbrio internacional

---



## Oferta e demanda

- Oferta de títulos domésticos:  $V^S$ .
- Oferta de títulos estrangeiros:  $V^{*S}$ .
- Riqueza global:  $W = V^S + V^{*S}$ .

Equilíbrio no mercado de ativos:

$$V^S = V^D = a^* W \quad \Rightarrow \quad \frac{V^S}{V^S + V^{*S}} = a^*$$

Onde  $\frac{V^S}{V^S + V^{*S}}$  é a **parcela doméstica da oferta mundial**.

## O prêmio de risco

Substituindo  $a^* = \frac{V^S}{V^S + V^{*S}}$  em  $a^* = \hat{a}_{\min} + \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\bar{r} - \bar{r}^*}{\Delta}$  obtemos:

$$\bar{r} - \bar{r}^* = \theta \Delta \left( \frac{V^S}{V^S + V^{*S}} - \hat{a}_{\min} \right).$$

- O prêmio  $(\bar{r} - \bar{r}^*)$  aparece para recompensar uma parcela  $s$  de ativos domésticos diferente daquela que minimiza risco ( $\hat{a}_{\min}$ ).

## O prêmio de risco cambial

$$\bar{r} - \bar{r}^* = \theta \sigma_d^2 \left( \frac{V^S}{V^S + V^{*S}} - \hat{a}_{\min} \right).$$

onde  $\sigma_d^2$  representa a variância dos retornos da taxa de câmbio.

## Impactos em $\bar{r} - \bar{r}^*$

- **Aversão ao risco** ( $\theta$ ): quando o mercado fica mais avesso a risco, exige mais prêmio para manter os títulos domésticos nos seu portfólio.
- **Volatilidade cambial** ( $\sigma_d^2$ ): quanto mais incerto o câmbio, maior o risco e, portanto, maior o prêmio exigido.
- **Oferta relativa** ( $\frac{V^S}{V^S + V^{*S}}$ ): aumento da oferta (relativa) do ativo doméstico deve ser acompanhado de maior diferencial de juros.
- Parcela no portfólio de mínima variância ( $\hat{a}_{\min}$ ): quanto maior, menos risco ao portfólio o ativo doméstico oferece e, portanto, exige-se menores retorno.

## **Cenários para o diferencial de juros**

---

## Choque A: $\uparrow \sigma_d^2$ (câmbio mais volátil)

- Contexto econômico:
  - Crise política doméstica que aumenta incerteza cambial;
  - Piora de termos de troca (commodity) elevando volatilidade do câmbio;
  - Mudança no regime de política monetária/credibilidade gerando dispersão maior de cenários.

## Choque B: $\uparrow \theta$ (mercado mais avesso a risco)

- Contexto econômico:
  - Episódio global de *risk-off* (aversão ao risco generalizada);
  - Stress financeiro internacional (reprecificação de risco em carteiras globais);
  - Choque geopolítico que eleva incerteza e demanda por proteção.

## Choque C: $\uparrow V^S$ (maior oferta relativa de títulos domésticos)

- Contexto econômico:
  - Aumento do déficit e maior emissão de dívida doméstica;
  - Rolagem mais intensa de dívida em moeda local.



Estática comparativa com o portfólio internacional:

- O prêmio ( $\bar{r} - \bar{r}^*$ ) é resultado de um equilíbrio:
  - Ele se ajusta para compatibilizar a **oferta mundial** de títulos com **demanda total sob risco da carteira**.
  - O risco cambial entra como amplificador ( $\sigma_d^2$ ).
  - Aversão ao risco ( $\theta$ ) “precifica” o desequilíbrio ( $\frac{V^S}{V^S + V^{*S}} - \hat{a}_{\min}$ ).

## **Apêndice – Derivação detalhada os resultados**

---

## Problema do investidor

---

## Relembrando

- Mercado internacional de títulos públicos “a la” Dornbusch (1980).
- Dois tipos de títulos: domésticos e internacionais.
- Investidores escolhem a alocação de portfolio com base na maximização da **utilidade esperada**.
- Investidores gostam de retorno, mas não gostam de risco.
- A função utilidade deve representar essas características.

## Problema de maximização

O investidor irá maximizar a sua utilidade esperada:

$$\max_a U_i(\bar{W}_i; \sigma_W^2)$$

s.a.

$$E[\tilde{W}_i] = \bar{W}_i = [a \cdot (1 + \bar{r}) + (1 - a) \cdot (1 + \bar{r}^*)] \cdot W_{0,i} \quad (3)$$

$$\sigma_W^2 = [a^2 \sigma_r^2 + (1 - a)^2 \sigma_{r^*}^2 + 2a(1 - a)\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} \quad (4)$$

## Problema de maximização

F.O.C.:

$$\frac{\partial U_i}{\partial \bar{W}_i} \cdot \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial a} + \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_W^2} \cdot \frac{\partial \sigma_W^2}{\partial a} = 0$$

(O custo marginal em termos de volatilidade deve ser igual ao retorno marginal).

## Problema de maximização

Defina  $\frac{\partial U_i}{\partial \bar{W}_i} = U'_1$  e  $\frac{\partial U_i}{\partial \sigma_w^2} = U'_2$ . Podemos reescrever a condição de primeira ordem como:

$$U'_1[(1 + \bar{r}) - (1 + \bar{r}^*)] + U'_2[2a\sigma_r^2 - 2(1 - a)\sigma_{r^*}^2 + 2\sigma_{r,r^*} - 4a\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i}$$

$$U'_1[\bar{r} - \bar{r}^*] + 2U'_2[a(\sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 + 2\sigma_{r,r^*}) - \sigma_{r^*}^2 + \sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} = 0$$

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = -2\frac{U'_2}{U'_1}[a\Delta - \sigma_{r^*}^2 + \sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i}$$

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = -2\frac{U'_2}{U'_1}\Delta[a - \frac{\sigma_{r^*}^2 + \sigma_{r,r^*}}{\Delta}] \cdot W_{0,i}$$

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = -2\frac{U'_2}{U'_1}\Delta[a - \hat{a}_{min}] \cdot W_{0,i}$$

## Problema de maximização

$$a^* = \hat{a}_{min} + \left( \frac{U'_1}{2U'_2} W_{0,i} \right) \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta}$$

$$a^* = \hat{a}_{min} + \frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \iff [\bar{r} - \bar{r}^*] = \theta_i \Delta (a^* - \hat{a}_{min})$$

onde  $\frac{1}{\theta_i} = \left( \frac{U'_1}{2U'_2} W_{0,i} \right)$ .



# Equilíbrio internacional

---

## Oferta e demanda de títulos

Defina  $V^S$  como a oferta de ativos domésticos,  $V^{*S}$  como a oferta de ativos estrangeiros e a riqueza global é dada por  $W = V^S + V^{*S}$ . O equilíbrio no mercado de ativos é dado por

$$V^S = V^D$$

onde  $V^D = \sum_{i=1}^n a_i^* W_i$ .

## Oferta e demanda de títulos

Portanto, temos que

$$V^S = \sum_{i=1}^n a_i^* W_i$$

$$V^S = \sum_{i=1}^n \left( \hat{a}_{min} + \frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \right) W_i$$

$$V^S = \sum_{i=1}^n \hat{a}_{min} W_i + \frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} W_i$$

$$V^S = \hat{a}_{min} W + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} W_i$$

$$V^S = \hat{a}_{min} W + \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{\theta_i}$$

Defina  $1/\theta = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{W\theta_i}$  como o grau de aversão de risco do mercado.

## Preferências agregadas

$$V^S = \hat{a}_{min} W + \frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \frac{1}{\theta} W$$

$$\frac{[\bar{r} - \bar{r}^*]}{\Delta} \frac{1}{\theta} W = (V^S - \hat{a}_{min} W)$$

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = (V^S - \hat{a}_{min} W) \frac{\Delta \theta}{W}$$

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = \left( \frac{V^S}{V^S + V^{S*}} - \hat{a}_{min} \right) \Delta \theta$$

## Risco cambial

---

As taxas de juros reais (doméstica e internacional) em termos de consumo são dadas por:

$$r = i - \pi^C$$

$$r^* = i^* - \pi^{*C}$$

A estrutura de consumo (e, portanto, de preços) é tal que combina uma quantidade  $\lambda$  do bem de consumo doméstico (para uma economia estrangeira, essa participação seria  $\lambda^*$ ), de tal forma que

$$\pi^C = \lambda\pi + (1 - \lambda)(\pi^* + d)$$

$$\pi^{*C} = \lambda^*(\pi + d) + (1 - \lambda^*)(\pi^*)$$

onde  $\pi^C$  é a inflação de consumo e  $d$  a desvalorização cambial esperada. Assuma que  $\lambda = \lambda^*$ .



As taxas de juros reais podem ser reescritas como

$$r = i - \lambda\pi - (1 - \lambda)(\pi^* + d)$$

$$r^* = i^* - \lambda^*\pi - (1 - \lambda^*)(\pi^*)$$

O diferencial de juros é dado por

$$r - r^* = (i - i^*) - d$$

Assumindo que  $i$ ,  $i^*$ ,  $\pi^C$  e  $\pi^{*C}$  sejam determinísticos  
( $\therefore \text{VAR}[i - i^*] = 0$ ;  $\text{COV}((i - i^*), d) = 0$ ) e que  $d$  é a única variável estocástica:

$$\text{VAR}[r - r^*] = \text{VAR}[i - i^*] + \text{VAR}[d] - 2\text{COV}((i - i^*), d)$$

$$\text{VAR}[r - r^*] = \text{VAR}[d] = \sigma_d^2$$

Note também que

$$\sigma_r^2 = (1 - \lambda)^2 \sigma_d^2$$

$$\sigma_{r^*}^2 = \lambda^2 \sigma_d^2$$

Podemos assim derivar uma expressão para  $\sigma_{r,r^*}$ :

$$VAR[r - r^*] = \sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*}$$

$$\sigma_d^2 = (1 - \lambda)^2 \sigma_d^2 + \lambda^2 \sigma_d^2 - 2\sigma_{r,r^*}$$

$$\sigma_d^2 = \sigma_d^2 - 2\lambda \sigma_d^2 + \lambda^2 \sigma_d^2 + \lambda^2 \sigma_d^2 - 2\sigma_{r,r^*}$$

$$\sigma_{r,r^*} = -\lambda(1 - \lambda)\sigma_d^2$$

Substituindo esses resultados no portfolio de mínima variância, temos:

$$\hat{a}_{min} = \frac{\sigma_{r^*}^2 - \sigma_{r,r^*}}{\Delta}$$
$$\hat{a}_{min} = \frac{\lambda^2 - \sigma_d^2 + \lambda(1 - \lambda)\sigma_d^2}{\sigma_d^2}$$
$$\hat{a}_{min} = \lambda$$

Quando  $\lambda \neq \lambda^*$  o portfolio de de mínima variância é dado pela seguinte relação:

$$\hat{a}_{min} = \frac{\lambda^{*2} + (1 - \lambda)\lambda^*}{(1 - \lambda + \lambda^*)^2}$$

Finalmente:

$$[\bar{r} - \bar{r}^*] = \sigma_d^2 \theta \left( \frac{V^S}{V^S + V^{S*}} - \hat{a}_{min} \right) \quad (1)$$



Se o investidor otimizar seu portfolio com base no valor esperado e na variância dos retornos, o prêmio de risco depender:

- Da oferta relativa de ativos denominados em diversas moedas.
- Da matrix de variância e covariância das taxas de retorno.
- Do coeficiente de aversão ao risco do agentes do mercado.

Dornbusch, Rudiger. 1980. "Exchange Rate Risk and the Macroeconomics of Exchange Rate Determination." *National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA.*