Macroeconomia Financeira

International CAPM

João Ricardo Costa Filho

Leia os artigos, não fique só com os slides!!!!

Prêmio pelo risco cambial

O modelo

- Mercado internacional de títulos públicos “a la” Dornbusch (1980).
- Dois tipos de títulos: domésticos e internacionais.
- Investidores escolhem a alocação de portfolio com base na maximização da **utilidade esperada**.
- Investidores gostam de retorno, mas não gostam de risco.
- A função utilidade deve representar essas características.

Preferências

Assuma uma função utilidade Von Neumann–Morgenstern (utilidade esperada) de cada investidor i:

$$\begin{aligned} & U_i(\bar{W}_i; \sigma_W^2) \\ & \frac{\partial U_i}{\partial \bar{W}_i} > 0; \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_W^2} < 0 \end{aligned} \tag{1}$$

na qual $\bar{W}_i$ '{e} o retorno esperado de um portfolio ($E[\tilde{W}] = \bar{W}$) e σ_W^2 a variância desse retorno.

Portfolio

O portfolio do investidor é composto por uma quantidade a de títulos domésticos, cuja remuneração é igual a $\tilde{r}$ e uma fração $(1 - a)$ de títulos internacionais, com taxa de juros $\tilde{r}^*$.

A partir de uma riqueza inicial $W_{0,i}$, o retorno do portfolio pode ser escrito como:

$$\tilde{W}_i = [a \cdot (1 + \tilde{r}) + (1 - a) \cdot (1 + \tilde{r}^*)] \cdot W_{0,i} \qquad (2)$$

Portfolio

Note que

$$E[\tilde{W}_i] = \bar{W}_i = [a \cdot (1+\bar{r}) + (1-a) \cdot (1+\bar{r}^*)] \cdot W_{0,i} \qquad (2)$$

onde $E[1+\tilde{r})] = (1+\bar{r})$ e $E[(1+\tilde{r}^*)] = (1+\bar{r}^*)$.

Variância

Trabalhemos com a definição de variância:

$$\sigma_W^2 = E[(\tilde{W}_i - \bar{W}_i)^2] = E[\tilde{W}_i^2 - 2\tilde{W}_i\bar{W}_i + \bar{W}_i^2] =$$
$$= E[\tilde{W}_i^2] - \bar{W}_i^2$$

Variância

A partir da equação (2), temos:

$$\tilde{W}_i^2 = [a \cdot (1 + \tilde{r}) + (1 - a) \cdot (1 + \tilde{r}^*)]^2 \cdot W_{0,i}^2$$

$$\tilde{W}_i^2 = [a^2 \cdot (1 + \tilde{r})^2 + 2a(1 - a)(1 + \tilde{r})(1 + \tilde{r}^*) +$$
$$(1 - a)^2 \cdot (1 + \tilde{r}^*)^2] \cdot W_{0,i}^2$$

Variância

Substituindo o resultado acima na definição de variância é fácil ver que:

$$= E[a^2 \cdot (1+\tilde{r})^2 + 2a(1-a)(1+\tilde{r})(1+\tilde{r}^*) +$$
$$(1-a)^2 \cdot (1+\tilde{r}^*)^2] \cdot W_{0,i}^2] - \bar{W}_i^2$$
$$\ldots$$
$$= a^2(E[(1+\tilde{r})^2] - (1+\bar{r})^2) + (1-a)^2(E[(1+\tilde{r}^*)^2] - (1+\bar{r}^*)^2)$$
$$+ 2a(1-a)(E[(1+\tilde{r})(1+\tilde{r}^*)] - (1+\bar{r})(1+\bar{r}^*)) \cdot W_{0,i}$$

Variância

Defina $\sigma_r^2 = VAR[(1+r)]$, $\sigma_{r^*}^2 = VAR[(1+r^*)]$ e $\sigma_{r,r^*} = COV[(1+r),[(1+r^*)]$. Podemos reescrever o resultado anterior como:

$$\sigma_W^2 = [a^2\sigma_r^2 + (1-a)^2\sigma_{r^*}^2 + 2a(1-a)\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} \qquad (3)$$

Portfolio de mínima variância

Qual é a alocação que minimiza a variância da minha riqueza?

Problema de minimização

$$\min_{a} \sigma_W^2 = [a^2\sigma_r^2 + (1-a)^2\sigma_{r^*}^2 + 2a(1-a)\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i}$$

F.O.C.:

$$\frac{\partial \sigma_W^2}{\partial a} = 0 \iff [2a\sigma_r^2 - 2(1-a)\sigma_{r^*}^2 + 2\sigma_{r,r^*} - 4a\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} = 0$$

Problema de minimização

Para $W_{0,i} \neq 0$

$$\begin{aligned}
&2a\sigma_r^2 - 2(1-a)\sigma_{r^*}^2 + 2\sigma_{r,r^*} - 4a\sigma_{r,r^*} = 0 \\
&2a\sigma_r^2 - 2\sigma_{r^*}^2 + 2a\sigma_{r^*}^2 + \sigma_{r,r^*} - 4a\sigma_{r,r^*} = 0 \\
&2a(\sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*}) = 2\sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*} \\
&\hat{a}_{min} = \frac{\sigma_{r^*}^2 - \sigma_{r,r^*}}{\sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*}}
\end{aligned} \tag{4}$$

Problema de minimização

E definindo $\Delta = VAR[(1+r) - (1+r^*)] = \sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*}$, temos que

$$\hat{a}_{min} = \frac{\sigma_{r^*}^2 - \sigma_{r,r^*}}{\Delta} \tag{5'}$$

Referências

Dornbusch, Rudiger. 1980. “Exchange Rate Risk and the Macroeconomics of Exchange Rate Determination.” *National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA*.