Macroeconomia Financeira

International CAPM

João Ricardo Costa Filho

Leia os artigos, não fique só com os slides!!!!

Alocação de portfólio e o prêmio pelo risco

Contexto

- Em economia aberta, o investidor opera em um mercado internacional de títulos públicos, "a la" Dornbusch (1980), e escolhe entre **títulos domésticos** e **títulos internacionais**.
    - Problema: como escolher a composição do portfólio quando os retornos são incertos?

Dois ativos e uma escolha simples

Dois ativos e uma escolha simples

- O retorno bruto de cada ativo é aleatório e dado por:

Dois ativos e uma escolha simples

- O retorno bruto de cada ativo é aleatório e dado por:
    - Ativo doméstico: $1 + \tilde{r}$.

Dois ativos e uma escolha simples

- O retorno bruto de cada ativo é aleatório e dado por:
  - Ativo doméstico: $1 + \tilde{r}$.
  - Ativo Internacional: $1 + \tilde{r}^*$.

Dois ativos e uma escolha simples

- O retorno bruto de cada ativo é aleatório e dado por:
    - Ativo doméstico: $1 + \tilde{r}$.
    - Ativo Internacional: $1 + \tilde{r}^*$.
- Escolha do investidor:

Dois ativos e uma escolha simples

- O retorno bruto de cada ativo é aleatório e dado por:
  - Ativo doméstico: $1 + \tilde{r}$.
  - Ativo Internacional: $1 + \tilde{r}^*$.
- Escolha do investidor:
  - $a \in [0, 1]$: fração do portfólio em títulos domésticos.

Dois ativos e uma escolha simples

- O retorno bruto de cada ativo é aleatório e dado por:
  - Ativo doméstico: $1 + \tilde{r}$.
  - Ativo Internacional: $1 + \tilde{r}^*$.
- Escolha do investidor:
  - $a \in [0, 1]$: fração do portfólio em títulos domésticos.
  - $1 - a$: fração em títulos internacionais.

Retorno do portfólio

Se W_0 for o capital inicial a ser alocado nos títulos, temos que:

$$\tilde{W} = \left[a(1+\tilde{r}) + (1-a)(1+\tilde{r}^*)\right] W_0.$$

Não é só sobre retorno

- O retorno médio importa, mas e o risco?

Não é só sobre retorno

- O retorno médio importa, mas e o risco?
  - Ele depende de:

Não é só sobre retorno

- O retorno médio importa, mas e o risco?
  - Ele depende de:
  1) quão volátil é cada ativo.

Não é só sobre retorno

- O retorno médio importa, mas e o risco?
  - Ele depende de:
  1) quão volátil é cada ativo.
  2) como eles “co-movem” (covariância).

O risco do portfólio

Componentes

$$\sigma_r^2 = Var(1+\tilde{r}), \qquad \sigma_{r^*}^2 = Var(1+\tilde{r}^*), \qquad \sigma_{r,r^*} = Cov(1+\tilde{r}, 1+\tilde{r}^*).$$

onde: - σ_r^2: variância do retorno do título doméstico - $\sigma_{r^*}^2$: variância do retorno do título internacional. - σ_{r,r^*}: covariância dos retornos dos títulos.

Variância do portfólio

A variância do portfólio do investidor internacional é dada por:

$$Var(\tilde{W}) = \left[a^2\sigma_r^2 + (1-a)^2\sigma_{r^*}^2 + 2a(1-a)\sigma_{r,r^*}\right]W_0^2.$$

- Os dois primeiros termos são risco de **concentração** em cada ativo.
- O termo de covariância mede se como a **diversificação** impacta o risco da carteira.

Portfólio de mínima variância

Qual é a alocação que minimiza a variância da minha riqueza?

Por que não é $a = 0$?

Problema de minização da variância

$$\min_{a} \; Var(\tilde{W}).$$

A parcela de ativos domésticos no portfólio de mínima variância é:

$$a_{\min} = \frac{\sigma_{r^*}^2 - \sigma_{r,r^*}}{\sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*}}.$$

Cenários para o portfólio de mínima variância

Cenário base

- $\sigma_r^2 = 3$, $\sigma_{r^*}^2 = 2$, $\sigma_{r,r^*} = 1$
- $a_{\text{min}} \approx 0{,}33$
    - O doméstico é mais arriscado do que o ativo internacional.
    - A covariância é positiva: quando um vai mal, o outro tende a ir mal também.

Cenário 2: aumento no risco do ativo doméstico

- σ_r^2 sobe de 3 para 4 (tudo mais constante).
- a_{min} cai de 0,33 para 0,25.
  - **Choques domésticos que poderiam aumentam a volatilidade dos retornos locais:**
  - Aumento de incerteza fiscal / prêmio de risco soberano.
  - Episódios de política monetária mais incerta e volátil.
  - Risco político/regulatório elevando volatilidade de preços e juros.

Cenário 3: internacional mais arriscado

- $\sigma^2_{r^*}$ sobe de 2 para 3 (tudo mais constante).
- a_{min} sobe de 0,33 para 0,50.
  - **Choques externos que tornam o ativo internacional mais volátil:**
  - *Risk-off* global (volatilidade de Treasuries / spreads / mercados internacionais).
  - Incerteza sobre inflação e juros no exterior (mudança no ciclo do Fed).
  - Episódios de stress financeiro global (aumentando volatilidade de ativos externos).

Cenário 4: proteção do portfólio (*hedge*)

Cenário 4: proteção do portfólio (*hedge*)

- A covariância se torna negativa: $\sigma_{r,r^*} = -1$ (variâncias como no Cenário 1).
- $a_{\min}$ sobe para 0,4286.
  - **Quando os retornos passam a se mover em direções opostas:**
  - O ativo externo "ganha" exatamente quando o doméstico "perde" (e vice-versa).
  - Mudança de regime em que choques externos e domésticos afetam retornos de forma oposta.

O risco do portfólio cai ao combinar ativos. Isso permite **maior participação de ativos domésticos** no portfólio de mínima variância.

Resumo

Estática comparativa com o portfólio de mínima variância:

- $\uparrow \sigma_r^2 \Rightarrow \downarrow a_{\text{min}}$.
- $\uparrow \sigma_{r^*}^2 \Rightarrow \uparrow a_{\text{min}}$.
- $\downarrow \sigma_{r,r^*} \Rightarrow \uparrow a_{\text{min}}$.

Apêndice – Derivação detalhada os resultados

O modelo

- Mercado internacional de títulos públicos “a la” Dornbusch (1980).
- Dois tipos de títulos: domésticos e internacionais.
- Investidores escolhem a alocação de portfolio com base na maximização da **utilidade esperada**.
- Investidores gostam de retorno, mas não gostam de risco.
- A função utilidade deve representar essas características.

Preferências

Assuma uma função utilidade Von Neumann–Morgenstern (utilidade esperada) de cada investidor i:

$$\begin{aligned} &U_i(\bar{W}_i; \sigma_W^2) \\ &\frac{\partial U_i}{\partial \bar{W}_i} > 0; \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \sigma_W^2} < 0 \end{aligned} \tag{1}$$

na qual $\bar{W}_i$ '{e} o retorno esperado de um portfolio ($E[\tilde{W}] = \bar{W}$) e σ_W^2 a variância desse retorno.

Portfolio

O portfolio do investidor é composto por uma quantidade a de títulos domésticos, cuja remuneração é igual a $\tilde{r}$ e uma fração $(1 - a)$ de títulos internacionais, com taxa de juros $\tilde{r}^*$.

A partir de uma riqueza inicial $W_{0,i}$, o retorno do portfolio pode ser escrito como:

$$\tilde{W}_i = [a \cdot (1 + \tilde{r}) + (1 - a) \cdot (1 + \tilde{r}^*)] \cdot W_{0,i} \tag{2}$$

Note que

$$E[\tilde{W}_i] = \bar{W}_i = [a \cdot (1 + \bar{r}) + (1 - a) \cdot (1 + \bar{r}^*)] \cdot W_{0,i} \qquad (2)$$

onde $E[1 + \tilde{r})] = (1 + \bar{r})$ e $E[(1 + \tilde{r}^*)] = (1 + \bar{r}^*)$.

Variância

Trabalhemos com a definição de variância:

$$\sigma_W^2 = E[(\tilde{W}_i - \bar{W}_i)^2] = E[\tilde{W}_i^2 - 2\tilde{W}_i\bar{W}_i + \bar{W}_i^2] =$$
$$= E[\tilde{W}_i^2] - \bar{W}_i^2$$

Variância

A partir da equação (2), temos:

$$\tilde{W}_i^2 = [a \cdot (1 + \tilde{r}) + (1 - a) \cdot (1 + \tilde{r}^*)]^2 \cdot W_{0,i}^2$$

$$\tilde{W}_i^2 = [a^2 \cdot (1 + \tilde{r})^2 + 2a(1 - a)(1 + \tilde{r})(1 + \tilde{r}^*) +$$
$$(1 - a)^2 \cdot (1 + \tilde{r}^*)^2] \cdot W_{0,i}^2$$

Variância

Substituindo o resultado acima na definição de variância é fácil ver que:

$$= E[a^2 \cdot (1+\tilde{r})^2 + 2a(1-a)(1+\tilde{r})(1+\tilde{r}^*) +$$
$$(1-a)^2 \cdot (1+\tilde{r}^*)^2] \cdot W_{0,i}^2] - \bar{W}_i^2$$
$$\ldots$$
$$= a^2(E[(1+\tilde{r})^2] - (1+\bar{r})^2) + (1-a)^2(E[(1+\tilde{r}^*)^2] - (1+\bar{r}^*)^2)$$
$$+ 2a(1-a)(E[(1+\tilde{r})(1+\tilde{r}^*)] - (1+\bar{r})(1+\bar{r}^*)) \cdot W_{0,i}$$

Variância

Defina $\sigma_r^2 = VAR[(1+r)]$, $\sigma_{r^*}^2 = VAR[(1+r^*)]$ e $\sigma_{r,r^*} = COV[(1+r), [(1+r^*)]$. Podemos reescrever o resultado anterior como:

$$\sigma_W^2 = [a^2\sigma_r^2 + (1-a)^2\sigma_{r^*}^2 + 2a(1-a)\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} \qquad (3)$$

Portfolio de mínima variância

Qual é a alocação que minimiza a variância da minha riqueza?

Problema de minimização

$$\min_{a} \sigma_W^2 = [a^2\sigma_r^2 + (1-a)^2\sigma_{r^*}^2 + 2a(1-a)\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i}$$

F.O.C.:

$$\frac{\partial \sigma_W^2}{\partial a} = 0 \iff [2a\sigma_r^2 - 2(1-a)\sigma_{r^*}^2 + 2\sigma_{r,r^*} - 4a\sigma_{r,r^*}] \cdot W_{0,i} = 0$$

Problema de minimização

Para $W_{0,i} \neq 0$

$$\begin{aligned}
&2a\sigma_r^2 - 2(1-a)\sigma_{r^*}^2 + 2\sigma_{r,r^*} - 4a\sigma_{r,r^*} = 0 \\
&2a\sigma_r^2 - 2\sigma_{r^*}^2 + 2a\sigma_{r^*}^2 + \sigma_{r,r^*} - 4a\sigma_{r,r^*} = 0 \\
&2a(\sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*}) = 2\sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*} \\
&\hat{a}_{min} = \frac{\sigma_{r^*}^2 - \sigma_{r,r^*}}{\sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*}}
\end{aligned} \tag{4}$$

Problema de minimização

E definindo $\Delta = VAR[(1+r)-(1+r^*)] = \sigma_r^2 + \sigma_{r^*}^2 - 2\sigma_{r,r^*}$, temos que

$$\hat{a}_{min} = \frac{\sigma_{r^*}^2 - \sigma_{r,r^*}}{\Delta} \tag{5'}$$

Referências

Dornbusch, Rudiger. 1980. "Exchange Rate Risk and the Macroeconomics of Exchange Rate Determination." *National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA*.