Unité d'Enseignement RCP101 : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision

Cours 9 – Files d'attente

Conservatoire National des Arts et Métiers
E. Soutil – F. Badran

UE RCP101 – Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision – Plan du cours

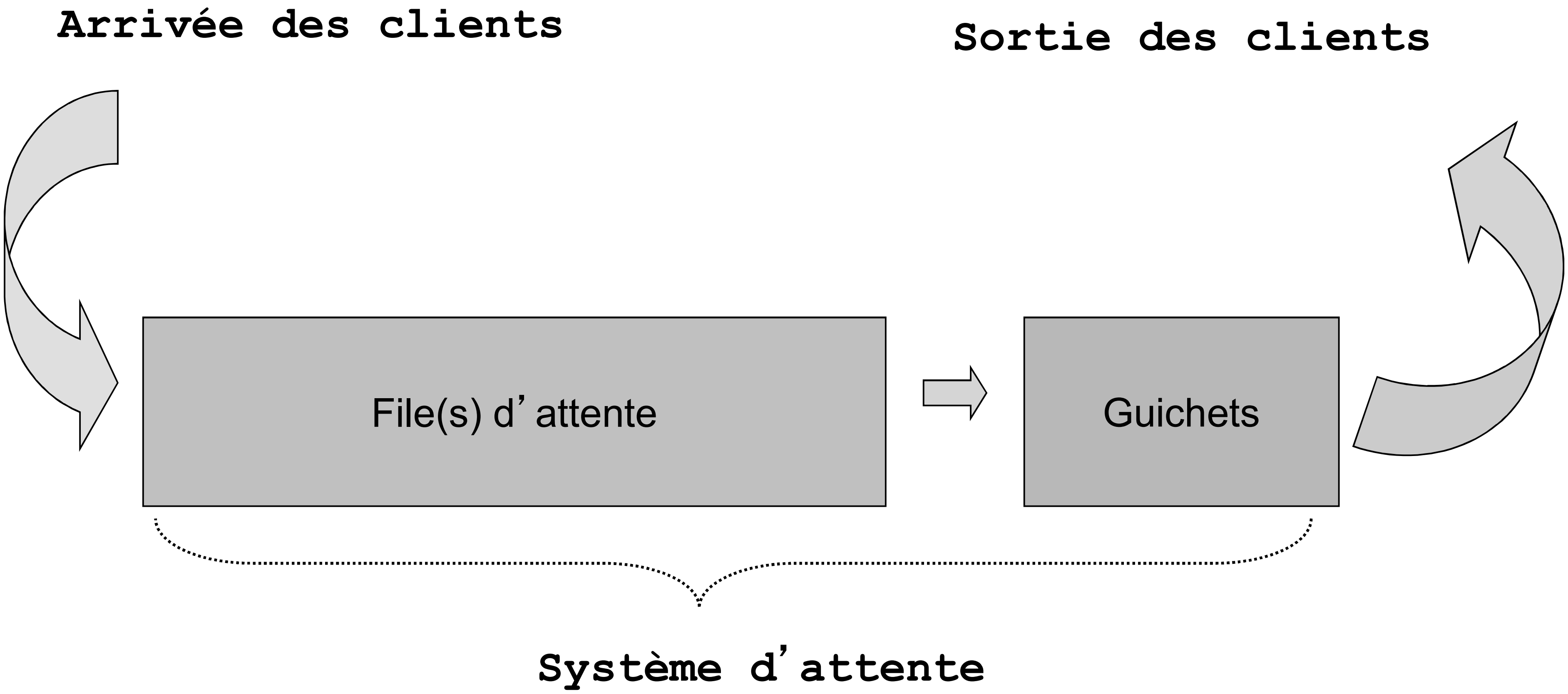
- Partie 1- Eléments de Théorie des Graphes
  - *Généralités, fermeture transitive et connexité*
  - *Chemins de longueur optimale*
- Partie 2 – Ordonnancement
  - *Méthode PERT*
  - *Méthode MPM*
- Partie 3 – Programmation linéaire
  - *Modélisation*
  - *Méthode du simplexe*
  - *Dualité*
- **Partie 4** : Processus de Markov et **files d'attente**
- Partie 5 : Optimisation multicritères

Plan de la partie 4

1. Processus de Markov

2. Files d'attente

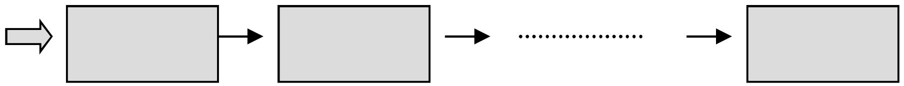
Phénomène d'attente



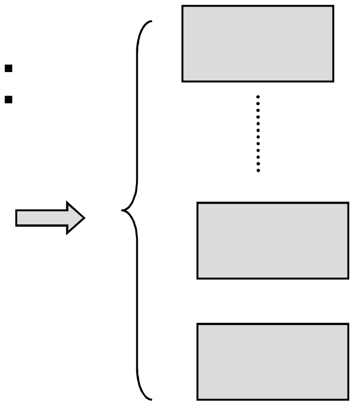
Guichet

1 ou plusieurs guichets

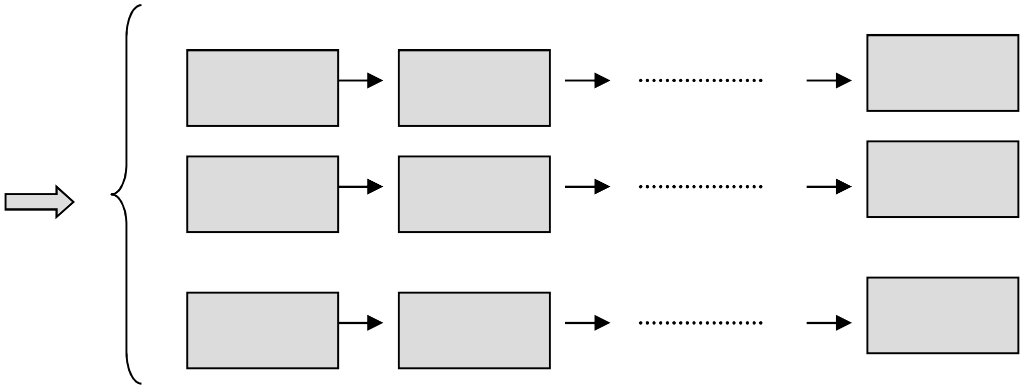
En série :



En parallèle :



Mixte



Caractéristiques du système d'attente

- **Discipline** de(s) file(s) d'attente :
  - FIFO : Premier arrivé premier servi.
  - LIFO : Premier arrivée dernier servi.
  - ALEATOIRE
- **Capacité** du système
  - Infini : système ouvert
  - Fini : Système Fermé
- **Processus des arrivées des clients** : Poissonien ……
- **Loi du temps de service** : exponentielle, Erlang …..

Classification de KENDALL

A / B / m / n / Discipline

FIFO, LIFO, …..
Par défaut : FIFO

Capacité du système (fini ou ouvert)
Par défaut : Ouvert

Nombre de guichets (en parallèles)

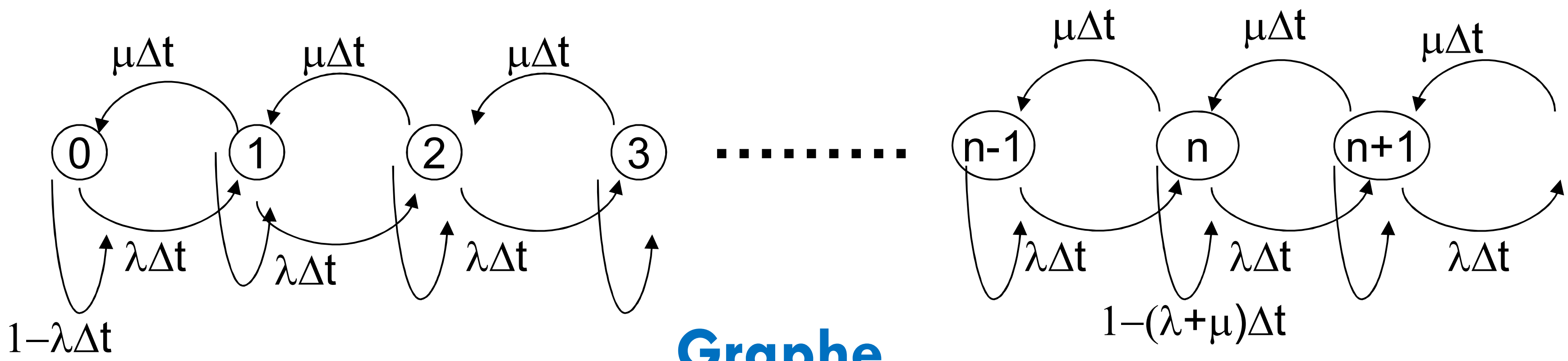
Loi du temps de service. M si c'est exponentiel

Loi des arrivées, M si c'est poissonien

File M/M/1

- Processus des arrivées : de Poisson (taux λ)
- Temps de service exponentiel (de paramètre μ)
- 1 guichet
- Processus ouvert (par défaut)
- Discipline de la file : FIFO (par défaut)

- X_t : **Nombre de clients** présents au temps t.
- **Les arrivées** : Processus de naissance.
- **Les Départs** : Processus de mort.



Graphe

le cnam

Calcul des probabilités en régime permanent

- Processus de naissance et de mort ouvert tel que pour tout n :

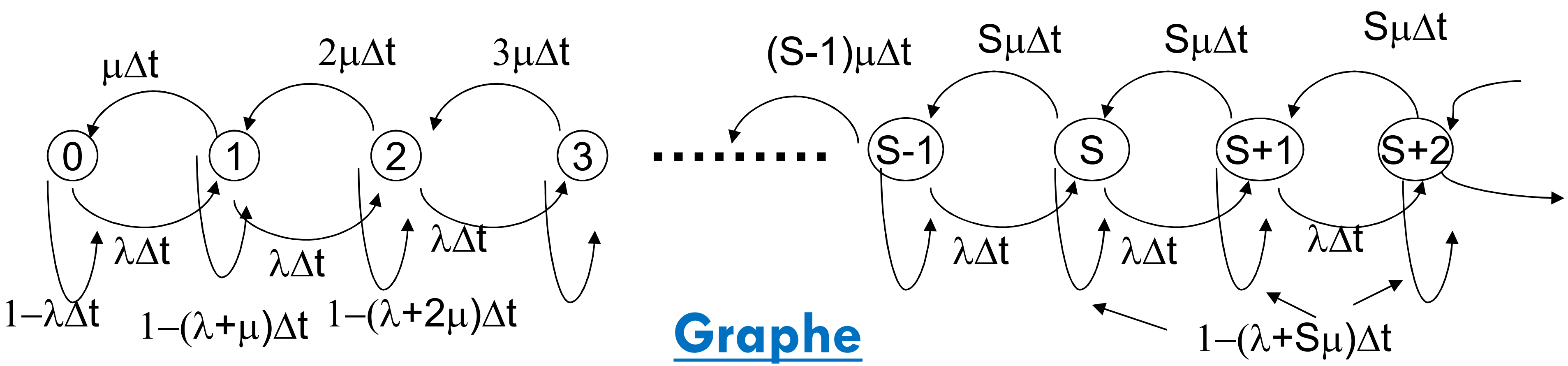
$$\lambda_n = \lambda \text{ (constant) et } \mu_n = \mu \text{ (constant)}$$

- La condition de convergence devient : $\boldsymbol{\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1}$
- La série géométrique (ρ^n) est convergente et $\sum_{n\geq 0} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$
- On a alors : $\boldsymbol{p_0 = 1 - \rho}$ et $\boldsymbol{p_n = \rho^n(1-\rho)}$ pour tout n.
- Nombre moyen de clients dans le système d'attente : $\bar{n} = \sum_{n\geq 0} n p_n = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$
- Nombre moyen de clients dans la file d'attente : $\bar{\nu} = \sum_{n\geq 1} n p_{n+1} = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

File M/M/S

- Processus des arrivées : de Poisson (Taux λ)
- Temps de service exponentiel (de paramètre μ)
- S guichets
- Processus ouvert (par défaut)
- Discipline de la file : FIFO (par défaut)

- X_t : Nombre de clients présents au temps t.
- Les arrivées : Processus de naissance.
- Les Départs : Processus de mort.



Graphe

le cnam

Calcul des probabilités

- Processus de naissance et de mort ouvert et tel que pour tout n :
  - $\lambda_n = \lambda$ (constant)
  - et $\mu_n = \begin{cases} n\mu \text{ si } n \leq S \\ S\mu \text{ si } n > S \end{cases}$
- La condition de convergence devient : $\frac{\lambda}{S\mu} < 1$
- On a :

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\frac{\lambda^n}{\mu^n} p_0 & \text{si } n \leq S \\ \frac{1}{S!S^{n-S}}\frac{\lambda^n}{\mu^n} p_0 & \text{si } n > S \end{cases}$$

Formules de Little (en régime permanent)

- $\bar{t}$: temps moyen passé dans le système d'attente.
- $\bar{t}_f$: temps moyen passé dans la file d'attente.
- $\bar{n}$: nombre moyen de clients dans le système d'attente.
- $\bar{\nu}$: nombre moyen de clients dans la file d'attente.

$$\boxed{\lambda\bar{t} = \bar{n} \quad \text{et} \quad \lambda\bar{t}_f = \bar{\nu}}$$

- Or $\bar{t} - \bar{t}_f = \text{durée moyenne de service} = \frac{1}{\mu}$, d'où $\bar{n} - \bar{\nu} = \lambda\left(\bar{t} - \bar{t}_f\right) = \frac{\lambda}{\mu}$ et $\bar{\nu} = \bar{n} - \frac{\lambda}{\mu}$
- **Cas particulier pour M/M/1** : $\bar{t} = \frac{1}{\mu-\lambda}$ et $\bar{t}_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.

Annexe – Lois d'Erlang

- Le processus de service est composé d'une suite de k serveurs élémentaires exponentiels, identiques (de même paramètre μ), et 2 à 2 indépendants.
- Le temps de service T est alors la somme des temps passés dans chaque serveur.
- **Exemple pour $\boldsymbol{k = 2}$:** $T = T_1 + T_2$

$$P(T \leq t) = P(X_1 + X_2 \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t} - \mu t \mathrm{e}^{-\mu t}$$

- Moyenne : $E(T) = \frac{2}{\mu}$
- Variance : $\frac{2}{\mu^2}$