RCP101 - Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision
Cours 5 - Programmation linéaire :
La méthode du simplexe

E. Soutil

Cnam

2020-2021

Plan du cours

1. Partie 1 : Théorie des graphes
2. Partie 2 : Programmation linéaire
   1. Modelisation
   2. Résolution graphique
   3. La méthode du simplexe
      1. Forme générale, canonique et standard d'un PL
      2. Polyèdre des solutions et illustration graphique
      3. Bases, solutions de base, géométrie des polyèdres
      4. Caractérisation algébrique des sommets
      5. Caractérisation des solutions optimales de base
      6. L'algorithme du simplexe
      7. Un exemple complet
      8. Trouver une base initiale
   4. Dualité en Programmation Linéaire
   5. Analyse de sensibilité

La méthode du simplexe – Plan

- **Forme générale**. La forme générale d'un PL est la suivante :

$$\begin{cases} \text{maximiser } f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \quad \text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i \in M) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i \in \overline{M}) \\ x_j \geq 0 & (j \in N) \\ x_j \text{ réel} & (i \in \overline{N}) \end{array} \right. \end{cases}$$

- $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = cx$ (produit scalaire : c et x sont deux vecteurs colonne). **f** est appelée la **fonction objectif**, souvent notée $z = f(x)$.

Forme générale, canonique et standard d'un PL

- **Forme canonique** :

$$\begin{cases} \max cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

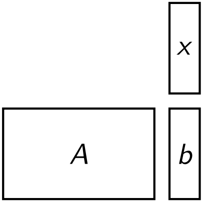
- **Forme standard** :

$$\begin{cases} \max cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- **NB** : A est une matrice $m \times n$-matrix, x et c sont deux vecteurs colonne de n éléments, b est un vecteur colonne de m éléments.

Forme générale, canonique et standard d'un PL

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow$$



$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m \end{cases}$$

- **NB** : A est une matrice $m \times n$-matrix, x et c sont deux vecteurs colonne de n éléments, b est un vecteur colonne de m éléments.

Forme générale, canonique et standard d'un PL

- **À noter** :
  maximiser $z = f(x)$ est équivalent à minimiser $-z = -f(x)$:

$$\boxed{\max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X} \; - f(x)}$$

- Résoudre $\begin{cases} \min cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$ revient donc à résoudre $\begin{cases} \max -cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$

- Les solutions optimales (x) sont les mêmes, les valeurs optimales (z et $-z$) sont opposées.

le cnam

Forme générale, canonique et standard d'un PL

- pour résoudre un PL écrit dans sa **forme canonique**, on commence par le mettre sous **forme standard**. Il s'agit d'une formulation équivalente.
- Considérons une contrainte d'inégalité :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

- La contrainte est remplacée par une contrainte d'égalité en introduisant une nouvelle variable positive ou nulle $x_{\bar{i}}$:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{\bar{i}} = b_i, \text{ avec } x_{\bar{i}} \geq 0}$$

La méthode du simplexe – Plan

Polyèdre des solutions et illustration graphique

- L'ensemble

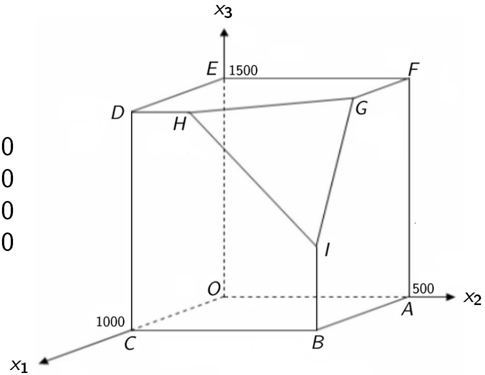
$$\boxed{X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b, x \geq 0\}}$$

est appelé **polytope** des solutions d'un PL. Il s'agit d'un polytope convexe. S'il est borné, ce polytope est un **polyèdre convexe**. Pour les problèmes de deux ou trois variables, il est possible de le tracer.

- Un vecteur $x \in X$ est dit **solution admissible** ou **réalisable** du PL considéré.

- **Exemple** : polyèdre des solutions du PL suivant :

$$(P)\begin{cases} \max z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{llll} x_1 & & & \leq 1000 \\ & x_2 & & \leq 500 \\ & & x_3 & \leq 1500 \\ 3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & \leq 6750 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array} \right. \end{cases}$$



(Le plan GHI a pour équation : $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750$)

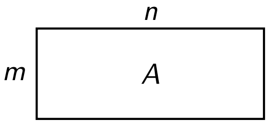
- L'ensemble X des solutions admissibles est l'ensemble des points situés à l'intérieur du polyèdre $(OABCDEFGHI)$.

La méthode du simplexe – Plan

Bases, solutions de base, géométrie des polyèdres

- On considère un PL sous sa forme standard :

$$\begin{cases} \max cx \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$



- On considère que le **rang** de lune matrice A est m.
- **rang(A)** $=$ dimension de la plus grande sous-matrice carrée inversible pouvant être extraite de A.
- **Remarque** : si rang$(A) < m$, au moins une ligne de A peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des autres lignes. Suivant la valeur des coefficients b_i, cette contrainte est **soit redondante** (et on peut l'éliminer), **soit incompatible** avec les autres (alors le système $Ax = b$ n'a pas de solution).

Bases, solutions de base, géométrie des polyèdres

Définition (matrice de base)

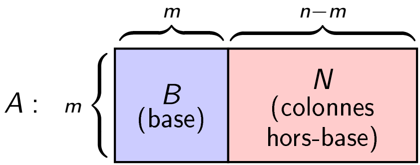
*Une **matrice de base** est une sous-matrice carrée inversible de taille $m \times m$, extraite de A (il en existe au moins une puisque $\text{rang}(A) = m$).*

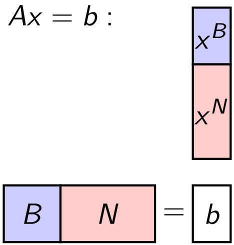
Définition (base)

*Une **base** est l'ensemble des indices des colonnes formant une matrice de base. **L'ensemble des variables** correspondant à ces colonnes est aussi appelé une base, par un léger abus de langage.*

Bases, solutions de base, géométrie des polyèdres

- Soit B une matrice de base. En permutant les colonnes, on peut ré-écrire A sous la forme $A = [B|N]$ où N est la sous-matrice formée des colonnes hors-base. De même, on peut écrire x sous la forme $x = \begin{pmatrix} x^B \\ x^N \end{pmatrix}$ et c sous la forme $c = \begin{pmatrix} c^B \\ c^N \end{pmatrix}$:





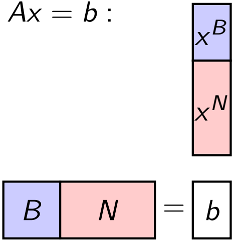
Bases, solutions de base, géométrie des polyèdres

- L'équation $Ax = b$ devient :

$$\boxed{B\,x^B + N\,x^N = b} \qquad (1)$$

- x^B : variables de base
- x^N : variables hors-base

$Ax = b$:



Définition (Basic solution)

*La **solution de base** associée à la base B est la solution particulière de (1) obtenue en posant $x^n = 0$. x^B est alors déterminé de façon unique en résolvant le système (de Cramer) : $Bx^B = b$. Comme B est inversible, x^B est unique : $x^B = B^{-1}b$. On notera $\overline{b}$ le vecteur $B^{-1}b$.*

- La **solution de base** associée à la base B est :

$$\boxed{\begin{cases} x^N &= & 0 \\ x^B &= & B^{-1}b\,(=\overline{b}) \end{cases}}$$

Bases, solutions de base, géométrie des polyèdres

Définition

Une solution de base est dite ***solution de base réalisable*** *si* $x^B \geq 0$, *i.e.* $\overline{b} \geq 0$. *(Rappel : les variables hors-base sont mise à 0).*

Définition

Une base correspondant à une solution de base réalisable est appelée ***base réalisable****.*

Définition

Une solution de base est dite ***dégénérée*** *si le vecteur* $x^B = \overline{b}$ *a une ou plusieurs composantes nulles.*

La dégénérescence est un phénomène fréquent dans certains problèmes (flots, transports, plus courts chemins).

Bases, solutions de base, géométrie des polyèdres

Définition

Un ***point extrême*** *(ou sommet) est un point* $x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$ *qui* ***ne peut pas*** *être exprimé comme une combinaisaon convexe d'autres points* $y \in X$ $(y \neq x)$*. Autrement dit,* x *ne peut pas s'écrire comme suit :*

$$x = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k y^k, \text{ avec } \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$$

La méthode du simplexe – Plan

Caractérisation algébrique des points extêmes

Théorème (1)

L'ensemble des points extrêmes de X correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables.

Démonstration :

a) x solution de base réalisable $\implies$ x point extrême

- x est une solution de base : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ (toutes les variables hors-base sont nulles).
- Supposons que $x = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$, $(0 < \lambda < 1,\ \alpha \in X,\ \beta \in X,\ \alpha \neq \beta \neq x)$, avec : $\begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n) \end{cases}$
- On a directement : $\lambda\alpha_j + (1-\lambda)\beta_j = 0\ \forall j \in \{m+1, \ldots, n\}$.
- Les m premières composantes de α et β sont déterminées par la solution du système de Cramer $Bx^B = b$, d'où $x = \alpha = \beta \rightarrow$ contradiction.

b) x point extrême $\implies$ x solution de base réalisable (preuve non vue ici).

Caractérisation algébrique des points extêmes

Corollaire (1)

Il y a un nombre fini de points extrêmes $\leq C_n^m$*, puisque* $C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ *est le nombre de possibilités choisir m colonnes de A parmi n et puisque les sous-matrices extraites de A sont pas toutes inversibles et réalisables).*

Corollaire (2)

Tout point de X est une combinaison convexe des points extrêmes de X. (Démonstration non vue ici).

Caractérisation algébrique des points extêmes

Théorème (Optimalité en un point extrême)

La valeur optimale de z sur X est atteinte en au moins un point extrême. S'il est atteint en plusieurs points extrêmes, il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points extrêmes.

<u>Démonstration</u> :

- Soient $y^1, y^2, \ldots, y^K$ les points extrêmes de X. Posons $z^* = \max_{k \in \{1,\ldots,K\}} z\left(y^K\right)$ (avec $z(x) = cx = \sum_{j=1}^n c_j x_j$). Montrons qu'alors $z^* = \max_{x \in X} z(x)$.
- D'après le corollaire 2, tout point $x \in X$ peut s'écrire $x = \sum_{k=1}^K \lambda_k y^k$ avec $\lambda_k \geq 0\ \forall k$ et $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$. On a donc, $forall x \in X$:

$$
\begin{array}{rcl}
z(z) & = & \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^n c_j \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k y_j^k\right) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \sum_{j=1}^n c_j y_j^k \\
& = & \sum_{k=1}^K \lambda_k z\left(y^k\right) \\
& \leq & \sum_{k=1}^K \lambda_k z^* = z^*
\end{array}
$$

La méthode du simplexe – Plan

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

Théorème (3)

Soit B une base réalisable non dégénérée ($\overline{b} = B^{-1}b > 0$). B est une base optimale si et seulement si :

$$\forall j \in N,\ \Delta_j = c_j - \sum_{i \in B} \overline{a}_{ij} c_i \leq 0$$

(Δ_j est appelé le ***coût réduit*** *de la variable hors-base x_j)*

$$\text{avec : } \overline{A} = [\overline{a}_{ij}] = B^{-1}A = \left[\begin{array}{c|c} I & \overline{N} = B^{-1}N \end{array}\right]$$

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

Théorème (3)

B, base non dégénérée, est optimale $\Leftrightarrow \forall j \in N,\ \Delta_j = c_j - \sum_{i \in B} \overline{a}_{ij} c_i \leq 0$

Démonstration :

- Soit x une solution quelconque de X (pas nécessairement de base). On a toujours :

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ Bx^B + Nx^N & = & b \\ B^{-1}Bx^B + B^{-1}Nx^N & = & B^{-1}b \\ x^B + \overline{N}x^N & = & \overline{b} \end{array}$$

- Ainsi, pour $i \in B$ on a : $x_i + \sum_{j \in N} \overline{a}_{ij} x_j = \overline{b}_i$
- On a exprimé les variables de base en fonction des variables hors-base.
- Ré-écrivons maintenant la fonction objectif en ne faisant apparaître que les variables hors-base.

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

Théorème (3)

B, base non dégénérée, est optimale $\Leftrightarrow \forall j \in N,\ \Delta_j = c_j - \sum_{i\in B} \bar{a}_{ij} c_i \leq 0$

Démonstration (suite) : on ré-écrit z en fonction des seules variables hors-base :

$$\begin{aligned} z(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i\in B} c_i x_i + \sum_{j\in N} c_j x_j \\ &= \sum_{i\in B} c_i \left(\bar{b}_i - \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j\right) + \sum_{j\in N} c_j x_j \\ &= \sum_{i\in B} c_i \bar{b}_i + \sum_{j\in N} \left(c_j - \sum_{i\in B} \bar{a}_{ij} c_i\right) x_j \\ &= \sum_{i\in B} c_i \bar{b}_i + \sum_{j\in N} \Delta_j x_j \end{aligned}$$

$$\boxed{z(x) = \bar{z} + \sum_{j\in N} \Delta_j x_j}$$

avec $\bar{z} = \sum_{i\in B} c_i \bar{b}_i$ (constante)

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

Théorème (3)

B, base non dégénérée, est optimale $\Leftrightarrow \forall j \in N,\ \Delta_j = c_j - \sum_{i \in B} \overline{a}_{ij} c_i \leq 0$

Démonstration (suite) :

- **Condition suffisante** : $\forall j\ \Delta_j \leq 0 \implies B$ est une base optimale
  - Soit x_0 la solution de base réalisable : $\begin{cases} x_0^N & = & 0 \\ x_0^B & = & B^{-1}b \end{cases}$
  - $z(x_0) = c^B B^{-1} b = \sum_{i \in B} c_i \overline{b}_i = \overline{z}$
  - $\forall x \in X,\ z(x) = \overline{z} + \sum_{j \in N} \Delta_j x_j \leq \overline{z} = z(x_0)$ (car $\Delta_j \leq 0$ et $x_j \geq 0$)
  - $\Rightarrow x_0$ est une solution optimale.

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

Théorème (3)

B, base non dégénérée, est optimale $\Leftrightarrow \forall j \in N,\ \Delta_j = c_j - \sum_{i \in B} \bar{a}_{ij} c_i \leq 0$

Démonstration (suite) :

- **Condition nécessaire** : Montrons que s'il existe $s \in N$ tel que $\Delta_s > 0$, alors on peut construire une solution meilleure.
  - Pour $i \in B$: $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i - \sum_{j \in N, j \neq s} \bar{a}_{ij} x_j - \bar{a}_{is} x_s$
  - On va alors augmenter la valeur de x_s qui va passer de la valeur **0** à une valeur θ**>0**. On considère la nouvelle solution $\hat{x}$:

$$\begin{cases} \hat{x}_s = \theta & \\ \hat{x}_j = 0 & \forall j \in N \setminus \{s\} \\ \hat{x}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is}\theta & \forall i \in B \end{cases}$$

  - $\bar{b}_i$ étant positif, on peut toujours trouver $\theta > 0$ suffisamment petit pour que x_i reste ≥ 0, $\forall i \in B$:

$$\boxed{\theta \leq \min_{i \text{ s.t. } \bar{a}_{is} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}}$$

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

Théorème (3)

B, base non dégénérée, est optimale $\Leftrightarrow \forall j \in N,\ \Delta_j = c_j - \sum_{i \in B} \overline{a}_{ij} c_i \leq 0$

Démonstration :

- La valeur de la fonction objectif croît alors strictement :

$$z(\hat{x}) = z(x_0) + \underbrace{\Delta_s}_{>0} \underbrace{\theta}_{>0}$$

- z croît strictement si la base B est non dégénérée, et est inchangée si B est dégénérée. $\square$

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

- **Remarque 1** : si tous les coefficients $\overline{a}_{is}$ sont négatifs ou nuls, θ est non borné et le problème initial est également non borné (valeur optimale infinie).
- **Remarque 2** : une base dégénérée peut être optimale même si le critère d'optimalité ($\Delta \leq 0$) n'est pas vérifié (on peut exhiber un exemple). Le critère d'optimalité ($\Delta \leq 0$) est donc un critère suffisant d'optimalité mais ce n'est pas un critère nécessaire.

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

Propriété

Soit B une base réalisable et x_0 la solution de base associée. S'il existe une variable hors-base x_s telle que $\Delta_s > 0$, alors :

1. *Ou bien on peut augmenter indéfiniment la valeur de x_s sans sortir de l'ensemble des solutions réalisables et l'optimum du problème est $z = +\infty$ (c'est le cas si $\forall i, \overline{a}_{is} \leq 0$)*
2. *Ou bien on met en évidence une autre base $\hat{B}$ et une autre solution de base réalisable $\hat{x}$ telle que :*
   - *$z(\hat{x}) > z(x_0)$ si B était non-dégénérée*
   - *$z(\hat{x}) = z(x_0)$ si B était dégénérée*

(On calcule $\theta = \min_{i \mid \overline{a}_{is}>0} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$. θ peut être nul si B était dégénérée, et $\hat{x}$ est défini comme dans la démonstration précédente : $\hat{x}_s \geq 0$ et $\hat{x}_r = \overline{b}_r - \theta\overline{a}_{rs} = 0$: $\hat{x}$ est une solution de base.)

Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

- **Remarques** :
  - On passe de la base B à la base $\hat{B}$ en "échangeant" les colonnes r et s.
  - En cas de dégénérescence, un phénomène appelé **cyclage** peut se produire : on passe de bases en bases sans faire augmenter strictement la valeur de la solution de base courante. Il est alors possible, au bout d'un certain nombre de changements de base, de retomber sur une base précédemment visitées. Toutefois, même si la dégénérescence est fréquente, le cyclage, lui, est un phénomène rarissime et dont il est possible de se prémunir (utilisation des **règles de Bland**, non vues ici).

La méthode du simplexe – Plan

Algorithme

a) Déterminer une solution de base initiale. Soit B la base correspondante.

b) Calculer $\overline{N} = B^{-1}N = [\overline{a}_{ij}]$ et les coûts réduits : $\Delta_j = c_j - \sum_{i \in B} \overline{a}_{ij} c_i$ $(j \in N)$.

c) **si** $\forall j \in N,\ \Delta_j \leq 0$,
   alors la solution de base considérée est optimale ($\rightarrow$FIN)
   sinon soit $J = \{j \text{ t.q. } \Delta_j > 0\}$.
   finsi

d) **si** $\overline{A}_j \leq 0$ (j**ème** colonne) pour au moins un indice $j \in J$
   alors $z^* = +\infty$ ($\rightarrow$FIN)
   sinon soit s tel que $\Delta_s = \max\limits_{j \in J} \Delta_j$ (1**er** critère de Dantzig : critère d'entrée).
   soit r tel que $\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = \min\limits_{i \mid \overline{a}_{is} > 0} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}}$ (2**ème** critère de Dantzig : critère de sortie).
   finsi
   Remarque : seul le deuxième critère est obligatoire (pour rester à l'intérieur de X).

e) Considérer la nouvelle base $\hat{B} = B \setminus \{r\} + \{s\}$ et retour en b)

Quelques remarques

- En pratique, on n'a jamais à calculer explicitement les matrices inverses B^{-1} (voir l'exemple complet à la section prochaine).
- **Geométriquement**, cet algorithme revient à cheminer en passant d'un point extrême à un point extrême adjacent le long de la frontière de X.
- **D'un point de vue algébrique**, il correspond à déterminer une suite de bases adjacentes $B^{(0)}, B^{(1)}, \ldots, B^{(q)}$ et donc une suite de solutions de base $x^{(0)}, x^{(1)} \ldots, x^{(q)}$ telles que :

$$\boxed{z\left(x^{(0)}\right) \leq z\left(x^{(1)}\right) \leq \ldots \leq z\left(x^{(q)}\right)}$$

Théorème (4)

L'algorithme du simplexe converge.

(Ce théorème n'est pas démontré ici, sa preuve repose sur la finitude du nombre de bases et sur la possibilité de se prémunir du cyclage).

La méthode du simplexe – Plan

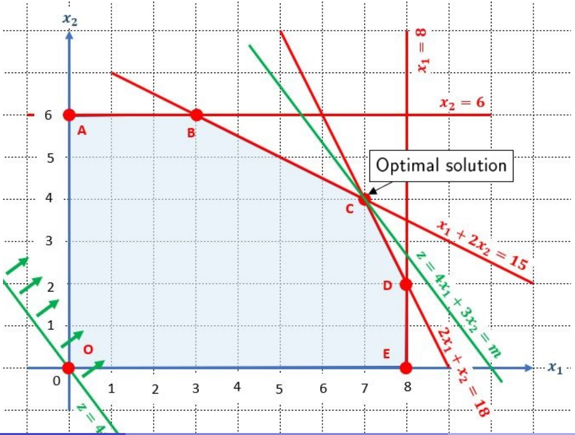
Algorithme du simplexe : un exemple complet

Le problème à résoudre

Soit le programme linéaire :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} \max Z = 4x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.c.} & \left|\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 8 \\ & & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

- La résolution graphique de ce problème à 2 variables initiales nous permet de trouver la solution optimale : il s'agit du point **C** de coordonnées $x_1 = 7$, $x_2 = 4$. Nous allons retrouver ce résultat par la méthode du simplexe (applicable à des problèmes de très grande taille).



1. **Mise du PL sous forme standard** : on introduit 4 variables d'écart

$$
(P)\left\{\begin{array}{lll}
\max Z = & 4x_1 + 3x_2 & \\
\text{s.c.} & \left|\begin{array}{lllllllll}
x_1 & & & +\mathbf{u_1} & & & & = & 8 \quad (1)\\
 & & x_2 & & +\mathbf{u_2} & & & = & 6 \quad (2)\\
x_1 & + & 2x_2 & & & +\mathbf{u_3} & & = & 15 \quad (3)\\
2x_1 & + & x_2 & & & & +\mathbf{u_4} & = & 18 \quad (4)\\
\multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

2 Choix d'une base de départ

- Une base comporte autant de variables que le problème comporte de contraintes $\rightarrow$ Ici, $m = 4$ contraintes, donc toute base comportera 4 variables.
- Les m variables qui composent la base sont appelées **variables de base**.
- Les autres variable sont appelées **variables hors-base**. Il y en a $n - m$, n désignant le nombre de variables du problème ($\rightarrow$ Ici, $n = 6$ variables, d'où $6 - 4 = 2$ variables hors-base.)
- Lors de l'initialisation, on choisit comme base de départ la base formée des variables d'écart. (Cela est toujours possible si les seconds membres sont ≥ 0 et toutes les contraintes du type $\leq$).
- Notre base de départ est donc $\mathbf{B}^{(0)} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$

Algorithme du simplexe – Initialisation (suite)

Choix d'une base de départ – Solution de base associée

2. **Choix d'une base de départ : $\mathbf{B^{(0)} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}}$**
   - À toute base correspond une solution particulière du système $Ax = b$, **qui correspond à un sommet du polyèdre des solutions admissibles**, et donc candidate à l'optimalité car l'on sait que lorsqu'un PL admet une ou plusieurs solutions optimales, l'une d'elles au moins est un sommet du polyèdre.
   - Cette solution particulière est appelée **solution de base** associée à la base courante (ici $B^{(0)}$) et sera notée $x^{(0)}$.
   - Elle s'obtient simplement en mettant à 0 les variables hors-base et en déduisant des équations (contraintes) les valeurs des variables de base.
   - L'idée principale ici est qu'en mettant $2 = n - m$ variables à 0, on sera à l'intersection des frontières de 2 contraintes, c'est-à-dire en un sommet du polyèdre.

2. **Choix d'une base de départ : $\mathbf{B^{(0)}} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$**
   - Ici, la solution de base est donc obtenue en posant $x_1 = x_2 = 0$ (variables hors-base).
   - Les équations imposent alors la valeur des variables de base et on obtient : $u_1 = 8, u_2 = 6, u_3 = 15, u_4 = 18$, soit :

     $$\mathbf{x^{(0)}} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{6}, \mathbf{15}, \mathbf{18}),$$

     de valeur $\mathbf{z^{(0)}} = \mathbf{0}$.

   - *Remarque* : cette solution de base correspond au sommet **O** du polyèdre.

3 Écriture du PL dans la base courante

- À chaque étape (itération) de l'algorithme, on ré-écrit le PL **dans la base courante**, ici $B^{(0)}$. Cela signifie :
  - ⋆ Exprimer chaque variable de base en fonction des variables hors-base ;
  - ⋆ Exprimer la fonction objectif (z) également en fonction des variables hors-base.
- Lorsque la fonction objectif est ré-écrite en fonction des variables hors-base uniquement, on appelle **coûts réduits** les nouveaux coefficients des variables dans la fonction objectif.
- Lors de l'initialisation, la fonction objectif ne comporte que les variables x_1 et x_2, qui sont hors-base, il n'y a donc rien à faire concernant la fonction objectif qui restera inchangée.
- Il suffit donc ici d'isoler dans chaque équation les variables de base.

3. Écriture du PL dans la base courante

- À chaque étape (itération) de l'algorithme, on ré-écrit le PL **dans la base courante**, ici $B^{(0)}$. On obtient donc ici :

$$
(P)\left\{\begin{array}{ll}
\max Z = & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.c.} & \left|\begin{array}{lcrcrcrr}
\mathbf{u_1} & = & 8 & - & x_1 & & & (1)\\
\mathbf{u_2} & = & 6 & & & - & x_2 & (2)\\
\mathbf{u_3} & = & 15 & - & x_1 & - & 2x_2 & (3)\\
\mathbf{u_4} & = & 18 & - & 2x_1 & - & x_2 & (4)\\
\\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

5 Vérification du critère d'optimalité

- À chaque étape (itération) de l'algorithme, on teste si le critère d'optimalité est ou non vérifié : **On a trouvé une solution optimale de (P) si et seulement si tous les coûts réduits sont ≤ 0** (pour un problème de maximisation).

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max Z = \mathbf{4}x_1 + \mathbf{3}x_2 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{rcrcrcr} u_1 & = & 8 & - & x_1 & & \\ u_2 & = & 6 & & & - & x_2 \\ u_3 & = & 15 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ u_4 & = & 18 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Ici, les coûts réduits (4 et 3) ne sont pas tous négatifs ou nuls : la solution de base $x^{(0)}$ n'est pas optimale.

1. **Choix d'une nouvelle base**
   - La précédente base n'était pas optimale. On doit donc en changer. Pour cela on va faire entrer en base une variable qui ne l'était pas et faire sortir de la base une variable qui y figurait, pour garder le nombre de variables hors-base (nulles) à $n - m$, et donc trouver un nouveau sommet du polyèdre.
   - **Choix de la variable entrante** : on choisira de faire entrer en base la variable de plus grand coût réduit > 0 : ici x_1, dont le coefficient est 4 (alors que x_2 a un coefficient > 0 plus petit).
   - **Choix de la variable sortante**
     - ★ On essaie de donner à la variable entrante (x_1) la plus grande valeur possible
     - ★ Mais les contraintes vont limiter l'augmention de cette variable car les toutes les variables doivent rester ≥ 0...
     - ★ ... en particulier, l'une d'entre elles va, plus que les autres, limiter l'augmentation de la variable entrante : elle déterminera la variable sortant de la base.

1. **Choix d'une nouvelle base**
   - **Choix de la variable sortante** (suite)
     - ★ On essaie d'augmenter au maximum x_1, les autres variables hors-base (ici x_2) restant hors-base, donc nulles. Lorsque x_2, qui reste hors-base, est fixée à 0, les contraintes imposent :
     - ★ **(1)** : $u_1 = 8 - x_1$ et u_1 doit rester $\geq 0 \implies 8 - x_1 \geq 0 \implies \mathbf{x_1 \leq 8}$
     - ★ **(2)** : $u_2 = 6\,(-0) \implies$ cette contrainte ne limite en rien x_1.
     - ★ **(3)** : $u_3 = 15 - x_1 \geq 0 \implies \mathbf{x_1 \leq 15}$
     - ★ **(4)** : $u_4 = 18 - 2x_1 \geq 0 \implies \mathbf{x_1 \leq \frac{18}{2} = 9}$
     - ★ En conclusion, x_1 peut augmenter jusqu'à 8 lorsque u_1 s'annule : u_1 **sort de la base**.
     - ★ Donc x_1 entre, u_1 sort : la nouvelle base est : $\mathbf{B}^{(1)} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$

Algorithme du simplexe – Itération 1

Écriture de (P) dans la nouvelle base

2. **On écrit (P) dans la nouvelle base $\mathbf{B}^{(1)} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$**
    - Exprimer chaque variable de base en fonction des variables hors-base (u_1 et x_2) ;
    - Exprimer la fonction objectif (z) également en fonction des variables hors-base (u_1 et x_2).
    - Pour cela, on isole x_1 (variable entrante) dans la contrainte qui a limité son augmentation, et on remplace x_1 par sa nouvelle expression dans toutes les autres contraintes et la fonction objectif :

$$
(P)\begin{cases}
\max\ Z = & 4(\mathbf{8} - \mathbf{u_1}) + 3x_2 = 32 - 4u_1 + 3x_2 \\
\text{s.c.} & \left|\begin{array}{lll}
\mathbf{x_1} = \mathbf{8} - \mathbf{u_1} & & (1) \\
u_2 = 6 - x_2 & & (2) \\
u_3 = 15 - (\mathbf{8} - \mathbf{u_1}) - 2x_2 & = 7 + u_1 - 2x_2 & (3) \\
u_4 = 18 - 2(\mathbf{8} - \mathbf{u_1}) - x_2 & = 2 + 2u_1 - x_2 & (4) \\
x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 & &
\end{array}\right.
\end{cases}
$$

le cnam

2. **On écrit (P) dans la nouvelle base $\mathbf{B}^{(1)} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$**

$$
(P) \left\{ \begin{array}{ll}
\max Z = & 32 - 4u_1 + 3x_2 \\
\text{s.c.} & \left| \begin{array}{lr}
x_1 = 8 - u_1 & (1) \\
u_2 = 6 - x_2 & (2) \\
u_3 = 7 + u_1 - 2x_2 & (3) \\
u_4 = 2 + 2u_1 - x_2 & (4) \\
x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 &
\end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

- Solution de base correspondante (obtenue en mettant à 0 les variables hors-base u_1 et x_2) :

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}) = (\mathbf{8}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{2})$$

de valeur $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{32}$.

- *Remarque* : cette solution de base correspond au sommet **E** du polyèdre.

le cnam

3. **On teste l'optimalité de la solution de base $\mathbf{x}^{(1)}$**
   - Les coûts réduits des variables hors-base u_1 et x_2 sont $\Delta_{u_1} = -4$ (coût réduit de u_1) et $\Delta_{x_2} = +3$ (coût réduit de x_2).
   - Les coûts réduits ne sont pas tous ≤ 0 : $\mathbf{x}^{(1)}$ **n'est pas optimale**.
   - On doit donc effectuer une nouvelle itération.

1. Choix d'une nouvelle base

- **Choix de la variable entrante** : on fait entrer en base la variable de plus grand coût réduit > 0 : ici x_2 (seule variable de coût réduit > 0).
- **Choix de la variable sortante**
  - ⋆ On essaie d'augmenter au maximum x_2, les autres variables hors-base (ici u_1) restant hors-base, donc nulles. Lorsque u_1, qui reste hors-base, est fixée à 0, les contraintes imposent :
  - ⋆ **(1)** : $x_1 = 8$: cette contrainte ne limite en rien l'augmentation de x_2.
  - ⋆ **(2)** : $u_2 = 6 - x_2 \geq 0 \implies \mathbf{x_2 \leq 6}$.
  - ⋆ **(3)** : $u_3 = 7 - 2x_2 \geq 0 \implies \mathbf{x_2 \leq \frac{7}{2} = 3,5}$
  - ⋆ **(4)** : $u_4 = 2 - x_2 \geq 0 \implies \mathbf{x_2 \leq 2}$
  - ⋆ En conclusion, x_2 peut augmenter jusqu'à 2 lorsque u_4 s'annule : u_4 **sort de la base**.
  - ⋆ Donc x_2 entre, u_4 sort : la nouvelle base est : $\mathbf{B}^{(2)} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{x_2}\}$

Algorithme du simplexe – Itération 2

Écriture de (P) dans la nouvelle base

2. **On écrit (P) dans la nouvelle base $\mathbf{B^{(2)}} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{x_2}\}$**
   - Exprimer chaque variable de base en fonction des variables hors-base (u_1 et u_4) ;
   - Exprimer la fonction objectif (z) également en fonction des variables hors-base (u_1 et u_4).
   - Pour cela, on isole x_2 (variable entrante) dans la contrainte qui a limité son augmentation, et on remplace x_2 par sa nouvelle expression dans toutes les autres contraintes et la fonction objectif :

$$
(P) \left\{
\begin{array}{ll}
\max Z = & 32 - 4u_1 + 3(\mathbf{2 + 2u_1 - u_4}) = 38 + 2u_1 - 3u_4 \\
\text{s.c.} & \left| \begin{array}{llr}
x_1 = 8 - u_1 & & (1) \\
u_2 = 6 - (\mathbf{2 + 2u_1 - u_4}) & = 4 - 2u_1 + u_4 & (2) \\
u_3 = 7 + u_1 - 2(\mathbf{2 + 2u_1 - u_4}) & = 3 - 3u_1 + 2u_4 & (3) \\
\mathbf{x_2 = 2 + 2u_1 - u_4} & & (4) \\
x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 & &
\end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

le cnam

Algorithme du simplexe – Itération 2

Écriture de (P) dans la nouvelle base

2. **On écrit (P) dans la nouvelle base $\mathbf{B}^{(2)} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{x_2}\}$**

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \max Z = & 38 + 2u_1 - 3u_4 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{lr} x_1 = 8 - u_1 & (1) \\ u_2 = 4 - 2u_1 + u_4 & (2) \\ u_3 = 3 - 3u_1 + 2u_4 & (3) \\ x_2 = 2 + 2u_1 - u_4 & (4) \\ x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Solution de base correspondante (obtenue en mettant à 0 les variables hors-base u_1 et u_4) :

$$\mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}) = (\mathbf{8}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{0})$$
de valeur $\mathbf{z}^{(2)} = \mathbf{38}$.

- *Remarque* : cette solution de base correspond au sommet **D** du polyèdre.

3. **On teste l'optimalité de la solution de base $\mathbf{x}^{(2)}$**

   - Les coûts réduits des variables hors-base u_1 et u_4 sont $\Delta_{u_1} = 2$ (coût réduit de u_1) et $\Delta_{u_4} = -3$ (coût réduit de u_4).
   - Les coûts réduits ne sont pas tous ≤ 0 : $\mathbf{x}^{(2)}$ **n'est pas optimale**.
   - On doit donc effectuer une nouvelle itération.

1 Choix d'une nouvelle base

- **Choix de la variable entrante** : on fait entrer en base la variable de plus grand coût réduit > 0 : ici u_1 (seule variable de coût réduit > 0). Au passage, on remarque que u_1, qui était sortie de la base, y entre à nouveau, ce qui est possible.
- **Choix de la variable sortante**
  - ★ On essaie d'augmenter au maximum u_1. Lorsque u_4, qui reste hors-base, est fixée à 0, les contraintes imposent :
  - ★ **(1)** : $x_1 = 8 - u_1 \geq 0 \implies \mathbf{u_1 \leq 8}$.
  - ★ **(2)** : $u_2 = 4 - 2u_1 \geq 0 \implies \mathbf{u_1 \leq \frac{4}{2} = 2}$.
  - ★ **(3)** : $u_3 = 3 - 3u_1 \geq 0 \implies \mathbf{u_1 \leq \frac{3}{3} = 1}$.
  - ★ **(4)** : $x_2 = 2 + 2u_1 \geq 0 \implies \mathbf{u_1 \geq \frac{-2}{2} = -1}$: cette contrainte ne limite en rien l'augmentation de u_1.
  - ★ En conclusion, u_1 peut augmenter jusqu'à 1 lorsque u_3 s'annule : u_3 **sort de la base**.
  - ★ Donc u_1 entre, u_3 sort : la nouvelle base est : $\mathbf{B^{(3)}} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_1}, \mathbf{x_2}\}$

le cnam

2. **On écrit (P) dans la nouvelle base $\mathbf{B}^{(3)} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_1}, \mathbf{x_2}\}$**
   - Exprimer chaque variable de base en fonction des variables hors-base (u_3 et u_4) ;
   - Exprimer la fonction objectif (z) également en fonction des variables hors-base (u_3 et u_4).
   - Pour cela, on isole u_1 (variable entrante) dans la contrainte qui a limité son augmentation, et on remplace u_1 par sa nouvelle expression dans toutes les autres contraintes et la fonction objectif :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll}\max Z = & 38 + 2\left(\mathbf{1} - \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_3} + \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_4}\right) - 3u_4 = 40 - \tfrac{2}{3}u_3 - \tfrac{5}{3}u_4 \\ \text{s.c.} & \left|\begin{array}{lll} x_1 = 8 - \left(\mathbf{1} - \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_3} + \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_4}\right) & = 7 + \tfrac{1}{3}u_3 - \tfrac{2}{3}u_4 & (1) \\ u_2 = 4 - 2\left(\mathbf{1} - \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_3} + \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_4}\right) + u_4 & = 2 + \tfrac{2}{3}u_3 - \tfrac{1}{3}u_4 & (2) \\ \mathbf{u_1} = \mathbf{1} - \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_3} + \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_4} & & (3) \\ x_2 = 2 + 2\left(\mathbf{1} - \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_3} + \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{u_4}\right) - u_4 & = 4 - \tfrac{2}{3}u_3 + \tfrac{1}{3}u_4 & (4) \\ x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 & & \end{array}\right.\end{array}\right.$$

Algorithme du simplexe – Itération 3

Écriture de (P) dans la nouvelle base

2. **On écrit (P) dans la nouvelle base $\mathbf{B^{(3)}} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_1}, \mathbf{x_2}\}$**

$$
(P) \begin{cases} \max Z = & 40 - \frac{2}{3}u_3 - \frac{5}{3}u_4 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{ll} x_1 = 7 + \frac{1}{3}u_3 - \frac{2}{3}u_4 & (1) \\ u_2 = 2 + \frac{2}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4 & (2) \\ u_1 = 1 - \frac{1}{3}u_3 + \frac{2}{3}u_4 & (3) \\ x_2 = 4 - \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4 & (4) \\ \\ x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}
$$

- Solution de base correspondante (obtenue en mettant à 0 les variables hors-base u_3 et u_4) :

$$\mathbf{x^{(3)}} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}) = (\mathbf{7}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

de valeur $\mathbf{z^{(3)}} = \mathbf{40}$.

- *Remarque* : cette solution de base correspond au sommet **C** du polyèdre.

Algorithme du simplexe – Itération 3

Application du critère d'optimalité

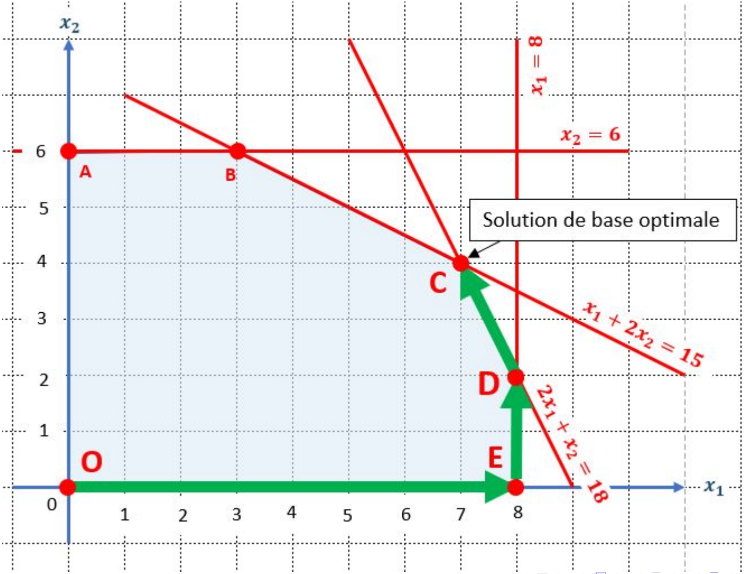
3. **On teste l'optimalité de la solution de base $\mathbf{x}^{(3)}$**
   - Les coûts réduits des variables hors-base u_3 et u_4 sont $\Delta_{u_3} = -\frac{2}{3}$ (coût réduit de u_3) et $\Delta_{u_4} = -\frac{5}{3}$ (coût réduit de u_4).
   - Les coûts réduits sont tous ≤ 0 : $\mathbf{x}^{(3)}$ **est optimale, de valeur 40**.
   - En effet, toute autre solution admissible est de valeur ≤ 40.
   - L'algorithme s'arrête.

Algorithme du simplexe
Conclusion

- La méthode a consisté à partir d'une solution de base initiale, qui correspond à un sommet du polyèdre (le point O),
- puis, à cheminer, d'itération en itération, d'une solution de base vers une nouvelle, en augmentant (au sens large), la valeur de la solution à chaque itération, jusqu'à tomber sur une solution de base (c'est-à-dire un sommet du polyèdre) optimale.
- Le chemin parcouru ici est $O \to E \to D \to C$:

Algorithme du simplexe

Conclusion



La méthode du simplexe – Plan

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

- Nous avons déjà vu comment trouver une base de départ réalisable lorsque toutes les contraintes sont de **type $\leq$** : les **variables d'écart** forment une base initiale naturelle, puisque leurs colonnes (éventuellement permutées) forment une matrice identité.
- Cependant, un PL inclut souvent des contraintes de type $\geq$ ou $=$. Dans ce cas, on ne dispose pas d'une base initiale évidente, et on doit en trouver une. Cette recherche d'une base initiale constitue la première phase de la méthode du simplexe.
- La méthode du simplexe consiste donc en deux phases :
  - **Phase 1** : on cherche une base initiale en résolvant un **programme auxiliaire** avec l'**algorithme du simplexe** ou on prouve que le problème initial n'admet pas de solution admissible.
  - **Phase 2** : on applique l'**algorithme du simplexe** au problème initial, en partant de la base trouvée en phase 1.

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1

- On commence par écrire le **programme auxiliaire** (PA) associé au problème de départ (P) (1/2) :
  - On s'assure que le membre de droite b_i est **positif ou nul** dans chaque contrainte, quitte à multiplier la contrainte par -1 si b_i est négatif (sinon on aboutirait à des solutions de base non réalisables) ;
  - On introduit une **variable d'écart** $x_{\bar{i}}$ pour chaque contrainte i de type $\leq$. (Cela ajoute le terme $+x_{\bar{i}}$ au membre de gauche de la contrainte qui devient une égalité) ;
  - On introduit aussi une **variable d'écart** $x_{\bar{i}}$ pour chaque contrainte i de type $\geq$, **en ajoutant le terme** $-x_{\bar{i}}$ au membre de gauche de la contrainte (qui devient une égalité) : l'écart est négatif ou nul, mais la variable d'écart doit être positive ou nulle ;

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1

- On commence par écrire le **programme auxiliaire** (PA) associé au problème de départ (P) (2/2) :
  - Le problem ne comporte maintenant plus que des contraintes d'égalité. Les variables d'écart associées aux contraintes initialement de type $\leq$ forment des colonnes de la matrice identité. Chacune des autres contraintes (correspondant à contraintes initialement de type $\geq$ et $=$), est alors modifiée en ajoutant une **variable artificielle** a_i positive ou nulle, exactement comme on introduisait les variables d'écart.
  - La **fonction objectif** de (PA) est alors la **somme des variables artificielles**. On cherche maintenant à la minimiser (en fait, à l'annuler).

- **En résumé** :

$$\begin{array}{lcr}
\text{Contrainte} \leq & \rightarrow & +x_{\bar{i}} \quad\quad = \\
\text{Contrainte} \geq & \rightarrow & -x_{\bar{i}} + a_i = \\
\text{Contrainte} = & \rightarrow & +a_i =
\end{array}$$

le cnam

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1 : Un exemple

- **Exemple** :

$$(P)\begin{cases}\max\ z = 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right.\end{cases} \xrightarrow{\text{Var. d'écart}} \begin{cases}\max\ z = 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_{\bar{1}} = 12 \\ x_1 - x_{\bar{2}} = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}} \geq 0 \end{array}\right.\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Var. artif. \& nouv. obj.}} (PA)\begin{cases}\min \psi = a_2 + a_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_{\bar{1}} = 12 \\ x_1 - x_{\bar{2}} + a_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + a_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, a_2, a_3 \geq 0 \end{array}\right.\end{cases}$$

- En pratique, on résout le **problème de maximisation** (PA')

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1 : Un exemple (suite)

- Le problème auxiliaire (version min) est :

$$(PA)\left\{\begin{array}{l} \min\ \psi = a_2 + a_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_{\bar{1}} \hspace{6em} = 12 \\ x_1 \hspace{5em} - x_{\bar{2}} + a_2 \hspace{3em} = 3 \\ x_1 + 2x_2 \hspace{9em} + a_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, a_2, a_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}\right.$$

- Sa version maximisation est :

$$(PA')\left\{\begin{array}{l} \max\ \psi' = -a_2 - a_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_{\bar{1}} \hspace{6em} = 12 \\ x_1 \hspace{5em} - x_{\bar{2}} + a_2 \hspace{3em} = 3 \\ x_1 + 2x_2 \hspace{9em} + a_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, a_2, a_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}\right.$$

- Avec : $\min(PA) = -\max(PA')$: (PA) et (PA') ont la même solution optimale (variables x et a) et leurs valeurs optimales sont opposées.

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1 : Un exemple (suite) – Résolution de (PA')

- Résolvons (PA'). La première étape consiste à exprimer la fonction objectif avec les variables hors-base (a_2 et a_3 sont en base), en utilisant les contraintes 2 et 3 :

$$(PA')\begin{cases}\max\ \psi' = -a_2 - a_3 = -7 + 2x_1 + 2x_2 - x_{\bar{2}} \\ \text{s.c.}\ \left|\begin{array}{lllll} 3x_1 + 2x_2 + x_{\bar{1}} & & & & = 12 \\ x_1 & - x_{\bar{2}} + & a_2 & & = 3 \\ x_1 + 2x_2 & & & + a_3 & = 4 \\ x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, a_2, a_3 \geq 0 & & & & \end{array}\right.\end{cases}$$

- La base initiale est $B^{(0)} = \{x_{\bar{1}}, a_2, a_3\}$. On écrit (PA') dans cette base :

$$(PA')\begin{cases}\max & \psi' = -7 + 2x_1 + 2x_2 - x_{\bar{2}} \\ \text{s.c.} & \left|\begin{array}{lcrrrr} x_{\bar{1}} & = & 12 & -3x_1 & -2x_2 & \\ a_2 & = & 3 & -x_1 & & +x_{\bar{2}} \\ a_3 & = & 4 & -x_1 & -2x_2 & \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, a_2, a_3 \geq 0} \end{array}\right.\end{cases}$$

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1 : Un exemple (suite) – Résolution de (PA')

- La base $B^{(0)}$ n'est pas optimale puisqu'il existe des coûts réduits positifs : une iteration de l'algorithme du simplexe est nécessaire :
  - x_1 entre en base (coût réduit >0 le plus élevé)
  - Quand x_2 et $x_{\bar{2}}$ sont fixés à 0 (restent hors-base), la première contrainte limite x_1 à $\frac{12}{3} = 4$, la seconde à 3 quand a_2 s'annulle, et la troisième à 4. L'augmentation de x_1 est donc limitée par la deuxième contrainte : a_2 sort de la base.
- La nouvelle base est $B^{(1)} = \{x_{\bar{1}}, x_1, a_3\}$. On écrit (PA') dans cette base :

$$
(PA') \left\{ \begin{array}{ll|lcrrrr}
\max & & \psi' & = & -1 & +2x_2 & +x_{\bar{2}} & -2a_2 \\
 & & x_{\bar{1}} & = & 3 & -2x_2 & -3x_{\bar{2}} & +3a_2 \\
\text{s.c.} & & x_1 & = & 3 & & +x_{\bar{2}} & -a_2 \\
 & & a_3 & = & 1 & -2x_2 & -x_{\bar{2}} & +a_2 \\
 & & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, a_2, a_3 \geq 0}
\end{array} \right.
$$

- La base $B^{(1)}$ n'est pas optimale puisqu'il existe des coûts réduits positifs : une nouvelle itération est nécessaire.

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1 : Un exemple (suite) – Résolution de (PA')

- La base $B^{(1)}$ n'est pas optimale :
  - $\underline{x_2 \text{ entre}}$ en base (coût réduit >0 le $+$ élevé)
  - $\underline{a_3 \text{ sort}}$ de la base.
- La nouvelle base est $B^{(2)} = \{x_{\overline{1}}, x_1, x_2\}$. On écrit (PA') dans cette base :

$$(PA')\left\{\begin{array}{ll|lclllll}
\max & & \psi' & = & 0 & & -a_2 & -a_3 \\
 & & x_{\overline{1}} & = & 2 & -2x_{\overline{2}} & +2a_2 & +a_3 \\
\text{s.c.} & & x_1 & = & 3 & +x_{\overline{2}} & -a_2 & \\
 & & x_2 & = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_{\overline{2}} & +\frac{1}{2}a_2 & -\frac{1}{2}a_3 \\
 & & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_{\overline{1}}, x_{\overline{2}}, a_2, a_3 \geq 0}
\end{array}\right.$$

- Les coûts réduits sont négatifs ou nuls $(\Delta \leq 0)$: la base $B^{(2)}$ est optimale et $\max(PA') = \min(PA) = 0$.

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1 : Conclusions (1/3)

- (PA) admet toujours une base initiale réalisable formée par les variables d'écart des contraintes de type $\leq$ et des variables artificielles associées aux autres contraintes. Le minimum de (PA) est borné inférieurement par 0. Donc (PA) **admet toujours une solution optimale** (qui peut être trouvée par l'algorithme du simplexe).
- **Si** $\min(PA) = -\max(PA') = 0$**, alors (P) admet au moins une solution admissible** : celle obtenue à partir de la solution optimale de valeur nulle de (PA), dans laquelle toutes les variables artificielles sont nécessairement nulles (somme nulle de termes positifs ou nuls), en ne gardant que les variables x de départ à leur valeur dans la solution de (PA).

le cnam

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1 : Conclusions (2/3)

- **À l'inverse, si** $min(PA) > 0$**,** (P) **n'admet aucune solution admissible** : si tel était le cas, la solution de (PA) construite à partir de l'hypothétique solution admissible de (P) en gardant les mêmes valeurs pour les variables x (et les éventuelles variables d'écart) et en mettant à 0 les variables artificielles serait admissible et de valeur nulle pour (PA).

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 1 : Conclusions (3/3)

- On a donc la propriété suivante :

Propriété

(P) *admet une solution admissible si et seulement si* $\min(PA) = 0$.

- Enfin, remarquons que si lors de la résolution de (PA) ou (PA') une ligne (contrainte) voit tous ses coefficients des variables x (x_i et $x_{\bar{i}}$) s'annuler, cela signifie que la ligne en question était, dans le problème initial obtenu après introduction des variables d'écart, combinaison linéaire d'autres lignes : elle peut être éliminée.

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 2

- À l'issue de la phase 1, on a soit prouvé que le problème de départ (P) **n'admettait aucune solution admissible** (il n'y a donc rien à faire dans ce cas), soit mis en évidence la **solution optimale réalisable de** (PA). Dans la suite, on suppose que (P) admet une solution admissible ($min(PA) = -max(PA') = 0$).
- Bien sûr, la solution optimale de (PA) n'est pas nécessairement optimale pour (P), pour deux raisons : (P) a moins de variables que (PA) et les fonctions objectif dans les deux problèmes sont différentes.
- On va maintenant construire une base réalisable pour (P), calculer ses coûts réduits et la valeur de la solution de base, à partir de la solution optimale de (PA).

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 2

- On se sert de la solution de base réalisable optimale de (PA') pour **construire une solution de base réalisable pour** (P) :
  - Si une variable artificielle a_i appartient à la base optimale de (PA), on l'en fait sortir en effectuant une itération du simplexe en faisant entrer en base une variable hors-base ayant un coefficient non nul dans la ligne de a_i (s'il n'y en a pas, c'est que la contrainte correspondante était redondante car combinaison linéaire des autres lignes). La valeur de la fonction objectif reste alors 0 car la variable artificielle valait 0 et la solution correspondante était dégénérée ;
  - Les **variables de la base optimale de** (PA') deviennent **les variables de la base initiale de** (P).
  - Dans (PA'), écrit dans sa base optimale, **on supprime purement et simplement les variables artificielles** (ces variables sont nulles, on aboutit bien à une solution admissible de (P)) ;
  - On exprime la fonction objectif de (P) avec les variables hors-base de la base optimale de (PA'), en utilisant les contraintes.
- On applique alors l'**algorithme du simplexe à** (P) **cette fois**, en partant de la solution de base ainsi construite.

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 2 – Exemple (suite)

- À la fin de la phase 1, on a :

$$(PA')\left\{\begin{array}{ll} \max & \psi' = 0 \qquad\qquad\qquad -a_2 \quad -a_3 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{lllll} x_{\bar{1}} = & 2 & -2x_{\bar{2}} & +\cancel{2a_2} & +\cancel{a_3} \\ x_1 = & 3 & +x_{\bar{2}} & -\cancel{a_2} & \\ x_2 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_{\bar{2}} & +\cancel{\frac{1}{2}a_2} & -\cancel{\frac{1}{2}a_3} \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, a_2, a_3 \geq 0} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

- Plus aucune variable artificielle n'appartient à la base, on conserve donc la base $B^{(2)} = \{x_{\bar{1}}, x_1, x_2\}$ pour (P) (le problème initial). On supprime a_2 et a_3 et on calcule les coûts réduits de (P) en remplaçant dans z chaque variable de base par son expression trouvée dans les contraintes. Les variables hors-base ne sont pas remplacées. On obtient alors l'écriture de z dans la base $B^{(2)}$:

$$z = 4x_1 + 2x_2 = 4\underbrace{(3 + x_{\bar{2}})}_{x_1} + 2\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_{\bar{2}}\right)}_{x_2} = 13 + 3x_{\bar{2}}$$

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 2 – Exemple (suite)

$$z = x_1 + 4x_2 = 13 + 3x_{\bar{2}}$$

- (P), écrit dans la base $B^{(2)} = \{x_{\bar{1}}, x_1, x_2\}$:

$$(P)\begin{cases} \max & z = 13 + 3x_{\bar{2}} \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{rcl} x_{\bar{1}} & = & 2 - 2x_{\bar{2}} \\ x_1 & = & 3 + x_{\bar{2}} \\ x_2 & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_{\bar{2}} \\ & & x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}} \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

- On voit que la base $B^{(2)}$ **n'est pas optimale** pour (P) : le coût réduit $\Delta_{\bar{2}} = 3 > 0$ et le critère d'optimalité n'est pas vérifié.
- Nous devons effectuer une (dernière) itération du simplexe sur (P).

Recherche d'une base initiale : méthode des deux phases

Phase 2 – Exemple (fin)

- La base $B^{(2)}$ n'est pas optimale pour (P) :
  - $x_{\bar{2}}$ entre en base (coût réduit > 0 le $+$ élevé).
  - $x_{\bar{1}}$ sort de la base.
- La nouvelle base est $B^{(3)} = \{x_{\bar{2}}, x_1, x_2\}$. On écrit (P) dans cette nouvelle base :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \max & z = 16 - \frac{3}{2}x_{\bar{1}} \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{l} x_{\bar{2}} = 1 - \frac{1}{2}x_{\bar{1}} \\ x_1 = 4 - \frac{1}{2}x_{\bar{1}} \\ x_2 = 0 + \frac{1}{4}x_{\bar{1}} \\ x_1, x_2, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}} \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- La base $B^{(3)}$ est optimale. La solution optimale de (P) est donc :

$$x^* = (4, 0, 0, 1) \text{et la valeur optimale est } z^* = 16$$