Unité d'Enseignement RCP101 : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision

Cours 8 – Processus de Markov

Conservatoire National des Arts et Métiers
E. Soutil – F. Badran

UE RCP101 – Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision – Plan du cours

- Partie 1- Eléments de Théorie des Graphes
  - *Généralités, fermeture transitive et connexité*
  - *Chemins de longueur optimale*
- Partie 2 – Ordonnancement
  - *Méthode PERT*
  - *Méthode MPM*
- Partie 3 – Programmation linéaire
  - *Modélisation*
  - *Méthode du simplexe*
  - *Dualité*
- **Partie 4 : Processus de Markov** et files d'attente
- Partie 5 : Optimisation multicritères

Plan de la partie 4

1. Processus de Markov

2. Files d'attente

Processus stochastiques

- On dit qu'on a affaire à un **problème stochastique** lorsque le **hasard** y intervient : c'est la difficulté principale de ces problèmes
- **Idée** : utiliser la connaissance statistique du passé récent pour se prémunir des conséquences fâcheuses du hasard.
- **Problèmes de files d'attente** : déterminer le nombre de « stations » où les clients viennent chercher un service, de manière à ce que les clients ne perdent qu'un temps limité (compromis à trouver entre le coût de déploiement des serveurs, déterministe, et l'attente des clients, qui dépend de données aléatoire (affluence et durée de service)
- **Problèmes de maintenance** des équipements : l'usure est aléatoire et sa connaissance statistique permet de fixer les taux d'approvisionnement ou de remplacement

Processus stochastiques

- Un **processus stochastique** est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \in T\}$ où t parcourt l'ensemble T qui représente le temps.
- $\boldsymbol{X_t}$ représente **l'état pris par un système à l'instant** $\boldsymbol{t}$. Pour une file d'attente, X_t sera le nombre de clients présents à t.
- Lorsque T est discret, $t_1, t_2, \dots, t_n$ sont des instants donnés (on parle de suite stochastique), lorsque T est continu (on parle de processus stochastique), t désigne un instant quelconque.
- Lorsque X_t peut prendre un ensemble fini ou infini dénombrable de valeurs (ou états), le processus est dit à espaces d'états discrets : c'est très souvent le cas en recherche opérationnelle
- Si au contraire ses valeurs appartiennent à un ensemble continu ($\mathbb{R}^+$ par exemple), on dit qu'il est à espace d'états continus, c'est souvent le cas en physique.

le cnam

Processus de Markov

- Soit un ensemble d'états $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\}$, fini ou infini. On dit qu'un **processus** stochastique $\{X_t, t \in T\}$ **est passé par l'état E_k à l'instant n** si $X_n = k$.

- Un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est un **processus de Markov** s'il est **sans mémoire**, c'est-à-dire :

$$P\left(X_{t+\tau} = E_j \,\middle|\, X_t = E_i \text{ et } X_u = E_k \text{ pour } u < t\right\} = P\left(X_{t+\tau} = E_j \,\middle|\, X_t = E_i\right\} = P_{ij}(t, \tau)$$

- Autrement dit, la probabilité $P_{ij}(t, \tau)$ de passer de l'état i à l'état j entre les instants t et $t + \tau$ ne dépend pas des états antérieurs à l'instant t. Cette probabilité est appelée **probabilité de transition**.

Processus de Markov et homogénéité

- Un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est **homogène** si, pour tout intervalle $[s, t]$, la probabilité $P(X_t = y \mid X_s = x)$ dépend seulement de la longueur $t - s$ de l'intervalle. Alors pour tout τ :

$$P(X_{t+\tau} = y \mid X_{s+\tau} = x) = P(X_t = y \mid X_s = x) = P(X_{t-s} = y \mid X_0 = x).$$

- On fera le plus souvent l'hypothèse que le processus de Markov étudié est **homogène** : la probabilité de transition $P_{ij}(t, \tau)$ ne dépend alors plus de t mais seulement de la durée τ de la transition. Elle s'écrit alors $\boldsymbol{P_{ij}(\tau)}$

Chaînes de Markov

- On nomme **chaîne de Markov à espace d'états discrets** une suite stochastique (le temps est donc discret) à espace d'états discrets et vérifiant la propriété « **sans mémoire** » ci-dessus. On supposera de plus que le processus est **homogène**.
- On a donc $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$; le plus souvent on confondra T avec $\mathbb{N}$: on étudiera les états X_t par lesquels passe un système à $t = 0,1,2, \dots$
- **Propriété « sans mémoire »** : par définition une chaîne de Markov vérifie :

$$P(X_n = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{ij}^{(n)}$$

- On dit alors que la chaîne est markovienne **d'ordre 1**. Elle serait d'ordre p si la probabilité de l'état atteint à l'instant n ne dépendait que des p états antérieurs
- Les probabilités conditionnelles $P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ sont appelées probabilités de transition

Processus de Markov – Hypothèse

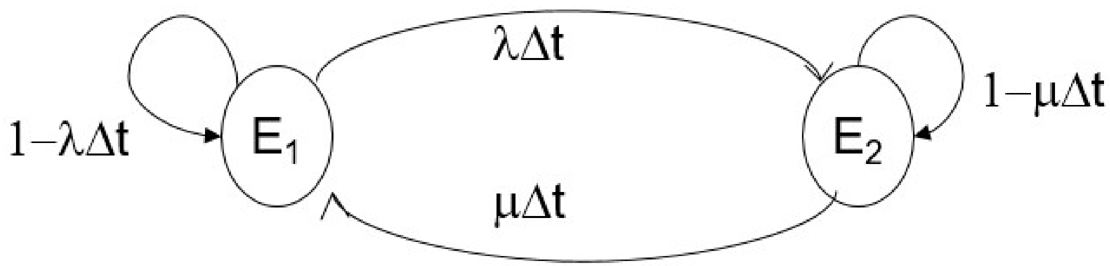
- On fera le plus souvent l'hypothèse suivante :
- On suppose que pour une durée Δt suffisamment petite on a :
  - $\boldsymbol{P_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t)}$ pour $i \neq j$
  - $\boldsymbol{P_{ii}(\Delta t) = 1 - \sum_{i\neq j} \lambda_{ij}\Delta t} + o(\Delta t)$
- $o(\Delta t)$ représente une expression négligeable lorsque Δttend vers 0 :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right) = 0$$

- Le terme λ_{ij} est appelé **taux de transition** de l'état E_i vers l'état E_j.

Graphe des probabilités de transition

- À un processus de Markov on associe le graphe $\boldsymbol{G = (X, U)}$ défini par :
  - $\boldsymbol{X = \{E_1, E_2, \dots, E_i, \dots\}}$: ensemble des **états** du processus
  - $\boldsymbol{U = \{(E_i, E_j) \text{ t.q. } P_{ij}(\Delta t) > 0\}}$: les arcs correspondent à des taux de transitions non nuls
- **Exemple** : X_t représente l'état d'un guichet. E_1est l'état « occupé » et E_2 l'état « libre ». On suppose que $P_{12}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ et $P_{21}(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$. Le graphe associé est alors



le cnam

Probabilité des états

- Dans les applications (modélisations par processus de Markov), les paramètres significatifs du fonctionnement des systèmes modélisés s'évaluent à partir des valeurs des probabilités des états : d'où l'intérêt pratique de cette notion.
- $\Pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), \dots, \pi_n(t), \dots)$ représente la **répartition des probabilités des états** au temps t : $\boldsymbol{\pi_i(t) = P(X_t = E_i)}$.
- Ainsi $\Pi(0)$ représente la répartition des probabilités de la variable X_O (c'est-à-dire du processus au temps $t = 0$).

Probabilité des états

- Le **générateur infinitésimal** du processus de Markov est défini par la matrice carrée $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ avec :

$$a_{ij} = \lambda_{ij} \text{ pour } i \neq j \text{ et } a_{ii} = q_i = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$$

- On démontre que : $\Pi'(t) = \Pi(t)A \qquad (1)$

- La relation (1) correspond à un système d'équations différentielles du premier ordre avec la condition initiale $\Pi(0)$.

Forte ergodicité et régime permanent

- On s'intéresse ici à la stabilisation de la répartition des probabilités de chaque état au bout d'un temps suffisamment long (régime permanent).

- D'une manière générale, nous dirons d'un processus de Markov (homogène) qu'il est **fortement ergodique** si toute probabilité de transition $p_{ij}(\tau)$ admet, quand τ tend vers l'infini, une limite **strictement positive** p_j, indépendante de l'état initial E_i.

- Plus exactement, le processus de Markov sera dit fortement ergodique si :

$$\forall j, \lim_{\tau \to \infty} p_{ij}(\tau) = p_j > 0$$

Forte ergodicité et régime permanent

- On démontre alors que : $\lim_{\tau \to \infty} \Pi(t) = (p_1, p_2, \dots, p_n) = \Pi$
- Π sera dite répartition des probabilités des états en **régime permanent (RP)**.
- **Condition suffisante** : si le graphe des probabilités de transition est **fini et fortement connexe**, alors le processus de Markov est fortement ergodique.
- **Remarque** : un processus de Markov est **ergodique** (ou simplement ergodique) si toute probabilité de transition $p_{ij}(\tau)$ admet, quand τ tend vers l'infini, une limite **positive ou nulle** p_j, indépendante de l'état initial E_i. Les états E_j tels que $p_j = 0$ sont des **états transitoires**.

le cnam

Calcul des probabilités des états en RP – Théorème des coupes

- On se place en régime permanent (RP) : on suppose qu'au bout d'un temps τ suffisamment grand, les probabilités des états aient atteint leur limite. Alors, $\pi_i(\tau) = p_i$
- On se propose de calculer ces probabilités en RP. On pourrait pour cela utiliser la relation $\Pi'(t) = \Pi(t)A$. Nous allons plutôt utiliser le **théorème des coupes** : calcul plus aisé si le graphe des transitions associé présente une structure régulière.
- En régime permanent, on définit la **fréquence de transition** de l'état E_i vers l'état E_j par : $p_i\lambda_{ij}$
- Une **coupe** dans un graphe $G = (X, U)$ est définie pour un sous ensemble A de X par :

$$\left\{(E_i, E_j) \in U \ \text{ t. q. } E_i \in A \text{ et } E_j \in X - A \text{ ou bien } E_i \in X - A \ et\ E_j \in A\right\}$$

Théorème des coupes

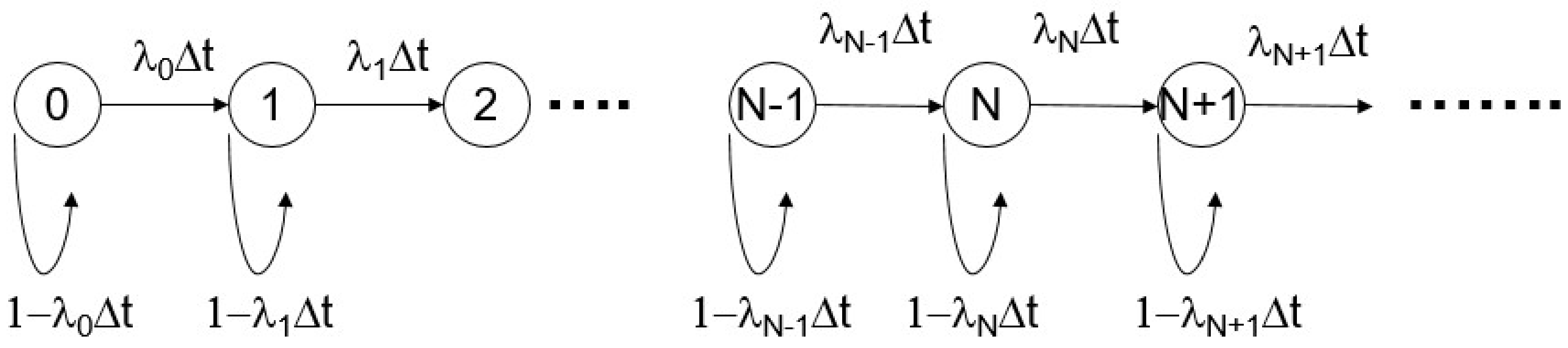
- Pour tout processus de Markov, homogène, fortement ergodique, en régime permanent, la somme des fréquences des transitions vers l'extérieur de toute coupe A est égale à la somme des fréquence des transitions vers l'intérieur de A :

$$\underbrace{\sum_{E_i \in A, E_j \in X-A} p_i \lambda_{ij}}_{\text{Fréquences de transition vers l'extérieur de la coupe}} = \underbrace{\sum_{E_i \in A, E_j \in X-A} p_j \lambda_{ji}}_{\text{Fréquences de transition vers l'intérieur de la coupe}}$$

Processus de Markov particuliers : 1) Les processus de naissance

- Utilisés dès 1940 pour des statistiques d'accidents, puis vers1943 par Arley à propos du rayonnement cosmique, en 1950 par Kendall, Bartlett et Feller en biologie. Nous les utiliserons en RO pour représenter par exemple des **arrivées aléatoires de clients** dans les files d'attente ou encore des **occurrences de pannes** d'équipements
- $\{X_t\}$ processus de Markov. X_t représente le **nombre des individus** d'une population (au temps t).
- Des individus apparaissent dans cette population. On suppose que :
  - $\boldsymbol{p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)}$. λ_i est appelé **taux de naissance** à partir de l'état E_i
  - $\boldsymbol{p_{i,i}(\Delta t) = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)}$
  - $\boldsymbol{p_{i,j}(\Delta t) = o(\Delta t)}$ sinon (la probabilité d'apparitions de plusieurs individus entre t et $t + \Delta t$ est négligeable)
  - Aucune disparition (ou mort) ne peut se produire

Processus de naissance : graphe des transitions



- Le processus est dit **ouvert** si $\lambda_i > 0$ pour toute taille (état) i de la population. Alors cette taille tend vers l'infini quand t tend vers l'infini : le processus n'est pas ergodique
- Le processus est dit **fermé** s'il existe une taille N telle que $\lambda_N = 0$: la population devient stérile dès qu'elle a atteint la taille N. En pratique, c'est le cas des systèmes à capacité limitées à Nunités (ex : saturation d'un standard téléphonique). Le processus est alors ergodique.

Processus de Markov particuliers : 2) Les processus de Poisson

- Par définition, un **processus de Poisson** est un processus de naissance ouvert pour lequel le taux de naissance ne dépend pas de la taille de la population :

$$\lambda_i = \lambda \text{ (constante) pour } i = 0, 1, 2, \ldots$$

- On démontre alors les résultats suivants :
- **Résultat 1**
  - Pour tout t et n on a : $\boldsymbol{p_n = P(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$
  - $E(X_t) = \lambda t$
- **Résultat 2**

  Si T est la variable aléatoire qui représente le temps entre deux naissances consécutives, alors on a l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
  - Le processus est de Poisson de paramètre λ
  - La variable T suit une loi exponentielle (dont la fonction densité est définie par $\boldsymbol{f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)}$) (voir annexe).

Processus de Markov particuliers : 3) Processus de naissance et de mort

- $\{X_t\}$ processus de Markov, X_t représente le nombre des individus d'une population (au temps t).
- Des individus apparaissent et disparaissent dans cette population. On suppose que :

$$P_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$$

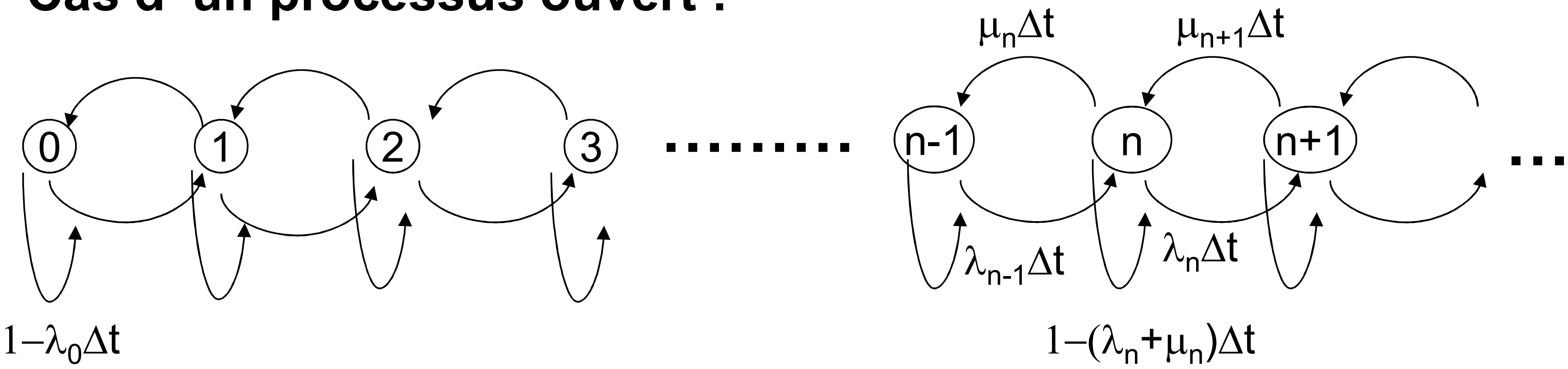
$$P_{i,i}(\Delta t) = 1-(\lambda_i+\mu_i)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_{i,j}(\Delta t) = o(\Delta t) \text{ sinon}$$

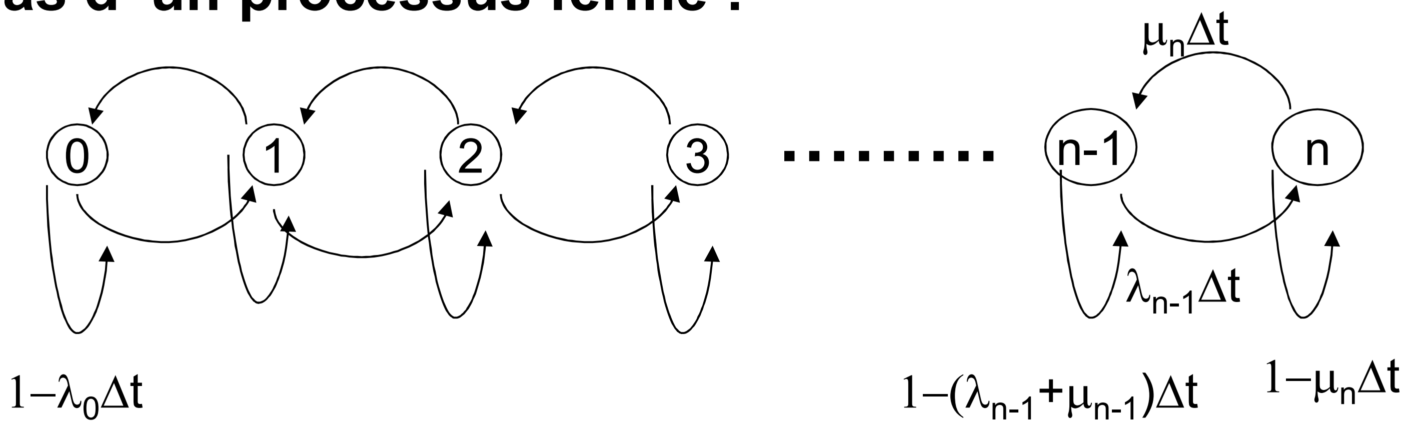
- **Processus ouvert** : Si l'ensemble des états est infini (ensemble des entiers naturels).
- **Processus fermé** : Si l'ensemble des états est finie ({0,1,…,N}), dans ce cas $\lambda_i=0$ pour tout i >=N.

Processus de naissance et de mort : graphe des transitions

Cas d'un processus ouvert :

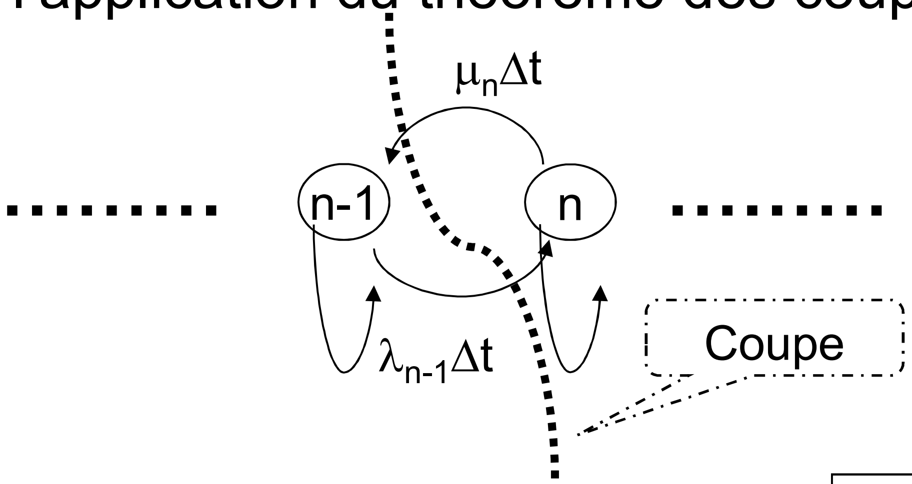


Cas d'un processus fermé :



Processus de naissance et de mort : calcul des probabilités en régime permanent

Si le processus de naissance et de mort est fortement ergodique, alors il est possible de calculer la probabilité p_n en régime permanent en fonction de p_0 (p_n : probabilité d'avoir n individus). En effet, l'application du théorème des coupes donne :



$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n$$

Par récurrence on obtient :

$$\boxed{p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} p_0 = \Gamma_n p_0}$$

Processus de naissance et de mort : calcul des probabilités en régime permanent

- On doit avoir :

$$\sum_n p_n = p_0 \left(1 + \sum_{n \geq 1} \Gamma_n \right) = 1$$

- Si le processus est fermé, p_0 est calculable. Si le processus est ouvert la série (Γ_n) doit être convergente.

- Condition de convergence :

$$\boxed{\exists k \text{ tel que } \forall n \geq k \text{ on a } \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \leq \alpha < 1}$$

- Dans les deux cas on a : $p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n\geq 1} \Gamma_n}$

Processus de naissance et de mort : un cas particulier

- On suppose que le processus est ouvert et que $\forall n$:

$$\lambda_n = \lambda \text{ (constant) et } \mu_n = \mu \text{ (constant)}$$

- La condition de convergence devient : $\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1$

- La série géométrique (ρ^n) est convergente et

$$\sum_{n \geq 0} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$$

- On a alors : $\boldsymbol{p_0 = 1 - \rho}$ et $\boldsymbol{p_n = \rho^n(1-\rho)}$ $\forall n$.

Annexe : loi exponentielle

- T variable continue positive : $\boldsymbol{T \in [0, \infty]}$
- Sa fonction de densité : $\boldsymbol{f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}$

  λ est un paramètre à déterminer
- Fonction de répartition : $\boldsymbol{P(T > t) = \int_0^t f(t)dt = \mathrm{e}^{-\lambda t}}$
- Moyenne (espérance) : $\boldsymbol{E[T] = \int_0^\infty tf(t)dt = \frac{1}{\lambda}}$
- Variance : $\boldsymbol{V(T) = \int_0^\infty (t - E[T])^2 f(t)dt = \frac{1}{\lambda^2}}$
- On a :

$$\frac{P(T < t + \Delta t)}{P(t < T)} = \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{P(t < T)} = \frac{f(t)\Delta t + o(\Delta t)}{P(t < T)} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$