Cours RCP101 - Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision
Cours 4 - Introduction à la Programmation Linéaire

E. Soutil

Cnam

2020-2021

Plan du cours

Introduction à la Programmation Linéaire

- Un problème central en **Recherche Opérationnelle**
- Problème classique de planification : affecter des ressources limitées à plusieurs activités concurrentes
- Programme = Plan (solution de ce problème)
- Programmation RO $\neq$ Programmation informatique
- **Fonction linéaire** : fonction dans laquelle chaque variable évolue linéairement

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n}$$

- **Programme linéaire** = Programme mathématique où toutes les fonctions sont linéaires

Premier exemple de modèle

Un problème de production

- **Données du problème**
  - Une entreprise de produits chimiques a deux produits phares (produits 1 et 2)
  - Elle dispose de 3 usines utilisées pour la fabrication des deux produits selon le tableau ci-dessous
  - Chaque usine a un temps limité de production (par semaine)
  - On connaît le profit tiré de la production d'une tonne de chaque produit
  - On désire savoir combien de tonnes de chaque produit il convient de fabriquer chaque semaine afin de maximiser le profit

	Temps de production nécessaire pour une tonne		Durée maximale d'utilisation (en h)
	Produit 1	Produit 2	
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit (€/tonne)	3000	5000	

Premier exemple de modèle

Un problème de production – Suite

- Chaque tonne de produit 1 (resp. 2) est le résultat combiné de la production aux usines 1 et 3 (resp. 2 et 3)
- **Énoncé du problème** : déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre de tonnes produites par semaine) de façon à maximiser le profit total
- **Variables de décision** :
  - x_1 : nombre de tonnes de produit 1
  - x_2 : nombre de tonnes de produit 2
- **Fonction objectif** :
  - $Z =$ profit total
  - $Z = 3x_1 + 5x_2$ (profit total en k€
  - **maximiser** Z

le cnam

Premier exemple de modèle

Un problème de production – Suite

- **Contraintes** de capacité de production :
  - $x_1 \leq 4$ (usine 1)
  - $2x_2 \leq 12$ (usine 2)
  - $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (usine 3)

- **Contraintes** de non-négativité :
  - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (nombre de tonnes produites ≥ 0)

Premier exemple de modèle

Un problème de production – Fin

- **Le programme linéaire associé :**

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \max z = & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Terminologie de base en PL

- **Solution réalisable (admissible)** : solution pour laquelle toutes les contraintes sont satisfaites (appartient au domaine réalisable)
- **Solution non réalisable** : solution pour laquelle au moins une contrainte n'est pas satisfaite (la solution n'appartient pas au domaine réalisable)
- **Solution optimale** : solution ayant la meilleure valeur possible de l'objectif
- Modèle n'ayant aucune solution optimale :
  - Domaine réalisable vide
  - Objectif non borné
- Modèle ayant une infinité de solutions optimales

Terminologie de base en PL

Suite

Pas de solution

$$\begin{cases} \max z = & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{l} x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Objectif non borné

$$\begin{cases} \max z = & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{l} x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Une infinité de solutions optimales

$$\begin{cases} \max z = & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Second exemple de modélisation

Horaires des personnels

- Chaque jour est divisé en **périodes**
- On a pu estimer un nombre minimum d'employés (MinEmp) devant être affectés durant chaque période
- Chaque jour est divisé en **quarts de travail** de 8 heures
- Plusieurs quarts partagent une même période
- Chaque quart de travail exige un salaire particulier
- Combien d'employés doit-on affecter à chaque quart de travail de façon à minimiser le total des salaires versés, en respectant le nombre minimum d'employés pour chaque période ?

Second exemple de modélisation

Horaires des personnels – Données du problème

Période	Quart 1	Quart 2	Quart 3	Quart 4	Quart 5	MinEmp
6-8						48
8-10						79
10-12						65
12-14						87
14-16						64
16-18						73
18-20						82
20-22						43
22-24						52
0-6						15
Salaire	170	160	175	180	195	

Horaires des personnels

Modèle

- x_j : nombre d'employés affectés au quart j
- **Objectif** :

$$\max z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$$

- Pour chaque période, le nombre d'employés affectés aux différents quarts doit couvrir le nombre minimum d'employés requis pour cette période
- **Exemple : période de 14h à 16h** :

$$x_2 + x_3 \geq 64$$

Horaires des personnels

Modèle détaillé

$$
\begin{cases}
\min z = & 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5 \\
\text{s.c.} & \left|\begin{array}{l}
x_1 \geq 48 \\
x_1 + x_2 \geq 79 \\
x_1 + x_2 \geq 65 \\
x_1 + x_2 + x_3 \geq 87 \\
x_2 + x_3 \geq 64 \\
x_3 + x_4 \geq 73 \\
x_3 + x_4 \geq 43 \\
x_4 \geq 82 \\
x_4 + x_5 \geq 52 \\
x_5 \geq 15 \\
x_j \geq 0, \; j = 1, 2, 3, 4, 5
\end{array}\right.
\end{cases}
$$

Horaires des personnels

Modèle

- $x_1 + x_2 \geq 79 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 65$
  Cette dernière contrainte est donc **redondante** et peut être enlevée
- $x_3 + x_4 \geq 82 \Rightarrow x_3 + x_4 \geq 73$
  Même observation avec cette contrainte
- $x_1 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ sont aussi redondantes mais il n'y a aucun intérêt à les éliminer : elles sont **prises en compte implicitement dans le processus de résolution**
- **Solution optimale** (obtenue à l'aide d'un solveur) :

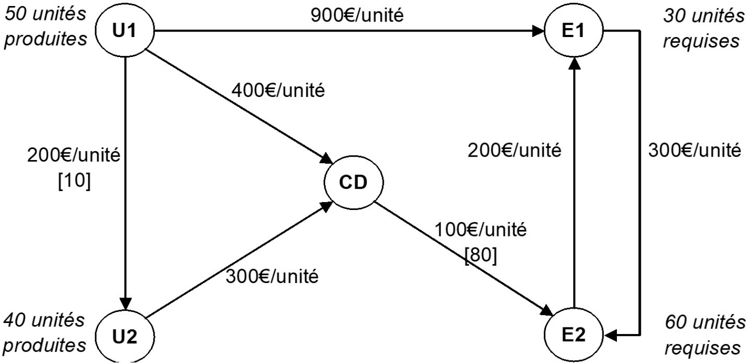
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (48, 31, 39, 43, 15)$$

- **Problème** : le nombre d'employés doit toujours être entier, donc l'hypothèse de non-divisibilité n'est pas prise en compte dans le modèle (bien que la solution optimale dans ce cas particulier soit entière) (cf. PLNE)

Exemple 3 : un réseau de distribution

- Deux usines (U_1, U_2)
- Un centre de distribution (CD)
- Deux entrepôts (E_1, E_2)
- Chaque usine confectionne un certain nombre d'unités d'un même produit (offre)
- Chaque entrepôt requiert un certain nombre d'unités de ce même produit (demande)
- Sur chaque lien (arc) du réseau, il y a un coût de transport par unité de produit (coût unitaire)
- Sur certains arcs, il y a une capacité sur le nombre d'unités transportées
- **Objectif** : minimiser le coût de transport total

Exemple 3 : un réseau de distribution
Données du problème



- x_{ij} = nombre d'unités du produit transportées sur l'arc (i, j) (entre les sommets i et j)
- **Objectif** (en centaines d'€) : minimiser z

$$z = 2x_{U_1,U_2} + 4x_{U_1,CD} + 9x_{U_1,E_1} + 3x_{U_2,CD} + x_{CD,E_2} + 3x_{E_1,E_2} + 2x_{E_2,E_1}$$

- **Conservation du flot** : en chaque sommet du réseau,
  - flot sortant = flot entrant
  - Nombre d'unités produites (usines) = Nombre d'unités requises (entrepôts)
- **Capacité** (sur certains arcs)
  - Exemple, pour l'arc (U_1, U_2) : $x_{U_1,U_2} \leq 10$
- **Contraintes de non-négativité**

Exemple 3 : un réseau de distribution

Modèle détaillé

$$
\begin{cases}
\text{minimiser } Z = 2x_{\text{U1,U2}} + 4x_{\text{U1,CD}} + 9x_{\text{U1,E1}} + 3x_{\text{U2,CD}} + x_{\text{CD,E2}} + 3x_{\text{E1,E2}} + 2x_{\text{E2,E1}} \\
\text{s.c.} \left|
\begin{array}{rrrrrrrcr}
x_{\text{U1,U2}} & +x_{\text{U1,CD}} & +x_{\text{U1,E1}} & & & & & = & 50 \\
-x_{\text{U1,U2}} & & & +x_{\text{U2,CD}} & & & & = & 40 \\
& -x_{\text{U1,CD}} & & -x_{\text{U2,CD}} & +x_{\text{CD,E2}} & & & = & 0 \\
& & -x_{\text{U1,E1}} & & & +x_{\text{E1,E2}} & -x_{\text{E2,E1}} & = & -30 \\
& & & & -x_{\text{CD,E2}} & -x_{\text{E1,E2}} & +x_{\text{E2,E1}} & = & -60 \\
x_{\text{U1,U2}} & & & & & & & \leq & 10 \\
& & & & x_{\text{CD,E2}} & & & \leq & 80 \\
\multicolumn{9}{l}{x_{\text{U1,U2}} \geq 0, x_{\text{U1,CD}} \geq 0, x_{\text{U1,E1}} \geq 0, x_{\text{U2,CD}} \geq 0, x_{\text{CD,E2}} \geq 0, x_{\text{E1,E2}} \geq 0, x_{\text{E2,E1}} \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{cases}
$$

Exemple 3 : un réseau de distribution

Conclusions

- C'est un problème de flot à coût minimum (ou problème de transport)
- Solution optimale :

$$(x_{U_1,U_2}, x_{U_1,CD}, x_{U_1,E_2}, x_{U_2,CD}, x_{CD,E_2}, x_{E_1,E_2}, x_{E_2,E_1})$$

$$= (0, 40, 10, 40, 80, 0, 20)$$

- Le nombre d'unités transportées doit toujours être une valeur entière, donc l'hypothèse de non-divisibilité semble ne pas être prise en compte dans ce modèle mais :
  - Pour un problème de flot à coût minimum (dont les paramètres sont entiers), il existe toujours une solution optimale entière (on peut le prouver)
  - Confirmation de ce résultat dans ce cas particulier

Modèle général de PL

- m resources (3 usines)
- n activités (2 produits)
- x_j : niveau de l'activité j (taux de production du produit j)
- Mesure de performance globale (profit total) : z
- Accroissement de z résultant de l'augmentation d'une unité du niveau de l'activité j : c_j
- Quantité disponible de la ressource i : b_i
- Quantité de ressource i consommée par l'activité j : a_{ij}

Modèle général de PL
Suite

- Objectif

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

- Contraintes fonctionnelles

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \leq & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

- Contraintes de non-négativité

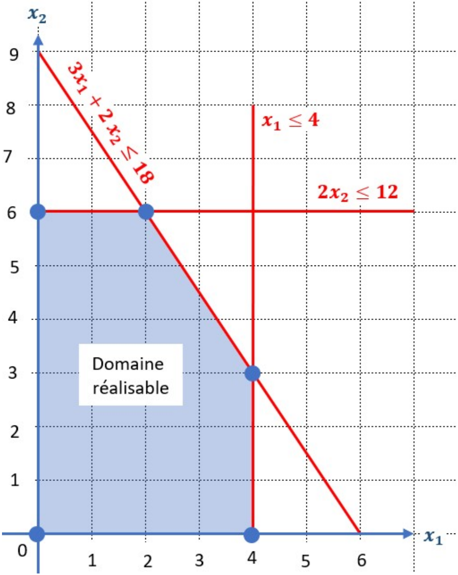
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Utilisation d'un premier solveur

- Résoudre le PL servant d'exemple à l'aide du solveur d'Excel
- Fichier, Options, Compléments, Gérer : complément excel (Atteindre), cocher Complément Solveur, enfin le solveur se trouve dans le menu général Données

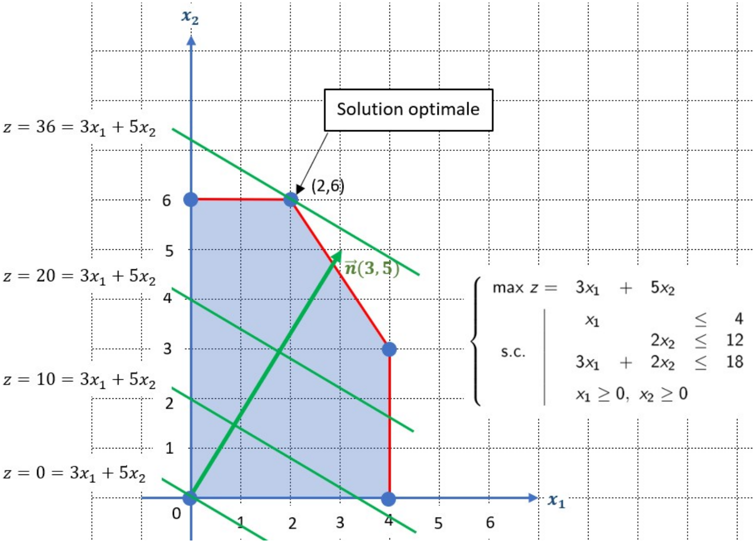
$$
(P) \left\{ \begin{array}{ll} \max\ z = & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} & \left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0} \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

Résolution graphique : un problème à deux variables



$$
\left\{
\begin{array}{rl}
\max z = & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.c.} & \left|
\begin{array}{rcrcr}
x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & 2x_2 & \leq & 12 \\
3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Résolution graphique
Suite



$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{rcrcl} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0} \end{array} \right. \end{cases}$$

Résolution graphique

Résumé

- Tracer les droites correspondant aux **contraintes**
- Déterminer le **domaine réalisable** en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte
- Tracer les droites correspondant à la variation de l'objectif
  - Dans l'exemple : $z = 3x_1 + 5x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}z$
  - **Ordonnée à l'origine** (dépend de la valeur de z) : $\frac{1}{5}z$
  - **Pente** (coeff. directeur) : $-\frac{3}{5}$
  - **Maximiser** correspond donc à **augmenter** z
- On **scanne** le domaine réalisable (région admissible) à l'aide de la famille de droites parallèles, toutes de pente $-3/5$, de sorte à maximiser (ou minimiser selon le cas) l'ordonnée à l'origine. On s'arrête au dernier point extrême du domaine réalisable ayant une intersection non vide avec l'une des droites de la famille, il s'agit de **l'optimum du problème**.
- le vecteur $\vec{n}(c_1, c_2)$ donne la **direction d'optimisation** (pour un problème de minimisation, prendre $-\vec{n}$

Résolution graphique

Résumé

- Mais : uniquement pour les modèles à **deux variables**
- Plus de deux variables : **méthode du simplexe**