II Espaces Euclidiens

1) Définitions :

Espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive ou **produit scalaire**

Forme bilinéaire

$$E \times E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$(\underline{x} , \underline{y}) \longrightarrow f(\underline{x} ; \underline{y})$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(\lambda \underline{x} ; \underline{y}) &= \lambda f(\underline{x} ; \underline{y}) = f(\underline{x} ; \lambda \underline{y}) \\ f(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 ; \underline{y}) &= f(\underline{x}_1 ; \underline{y}) + f(\underline{x}_2 ; \underline{y}) \\ f(\underline{x} ; \underline{y}_1 + \underline{y}_2) &= f(\underline{x} ; \underline{y}_1) + f(\underline{x} ; \underline{y}_2) \end{aligned}}$$

Symétrique $\quad f(\underline{x} ; \underline{y}) = f(\underline{y} ; \underline{x})$

Définie $\quad f(\underline{x} ; \underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

Positive $\quad f(\underline{x} , \underline{x}) > 0$ si $\underline{x} \neq \underline{0}$

Autre Notation

$$f(\underline{x} ; \underline{y}) = \langle \underline{x} ; \underline{y} \rangle$$

Norme Euclidienne $\quad \|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x} ; \underline{x} \rangle}$

Distance Euclidienne $\quad \|\underline{x} - \underline{y}\| = d(\underline{x}, \underline{y})$

Orthogonalité $\quad \underline{x} \perp \underline{y} \iff \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0$

Inégalité de Schwarz $\quad |\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leqslant \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|$

Cosinus d'angle $\quad \cos(\widehat{\underline{x}, \underline{y}}) = \dfrac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|}$

Expression matricielle du produit scalaire

$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots \underline{e}_p)$ base de l'espace E

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i \underline{e}_i \qquad \underline{y} = \sum_{j=1}^{p} y_j \underline{e}_j$$

$$\langle \underline{x} ; \underline{y} \rangle = \langle \Sigma x_i \underline{e}_i ; \Sigma y_j \underline{e}_j \rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle$$

D' où :

$$\langle \underline{x} ; \underline{y} \rangle = (x_1, x_2 \dots x_p) \begin{array}{cc} & j \\ i & \underbrace{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle & \\ & & \end{pmatrix}}_{M_{p \times p}} \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\langle \underline{x} ; \underline{y} \rangle_M = \underline{x}' M \, \underline{y}}$$

M s'appelle la métrique de l'espace et permet le calcul de distances.

Propriétés.

- M symétrique $\langle e_i ; e_j \rangle = \langle e_j ; e_i \rangle$
- M régulière $\langle \underline{x} ; \underline{x} \rangle = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$
- M positive $\langle \underline{x} ; \underline{x} \rangle \geq 0$
- Si $M = I$ métrique euclidienne classique $\| \underline{x} \| = (\Sigma\, x_i^{\,2})^{1/2}$

Théorème Toute matrice symétrique positive $\underset{(p \times p)}{M}$ peut s'écrire sous la forme $M = T'T$ où T est une matrice carrée $p \times p$

Conséquence : La transformation T permet de ramener une métrique quelconque M à la métrique I

$$\underline{x}' M \underline{y} = \underline{x}' T' T \underline{y} = (T \underline{x})' I (T \underline{y})$$

$$\boxed{\langle \underline{x} , \underline{y} \rangle_M = \langle T \underline{x} ; T \underline{y} \rangle_I}$$

2) Métriques usuelles en A.C.P.

(Analyse en composantes principales)

a - Dans l'espace des individus : $\mathbb{R}^p$

Disposant d'un ensemble de n individus observés sur p variables, on peut considérer chaque individu comme un élément de $\mathbb{R}^p$

La quantification des ressemblances entre individus passe par le calcul de distances, donc l'utilisation d'une métrique.

En A.C.P les deux métriques les plus usuelles sont :

- $M = I$
- $M = D_{1/s^2}$ = métrique de l'inverse des variances

$$D_{1/s^2} = \begin{pmatrix} s_1^2 & & & \\ & s_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_p^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Prop : Utiliser D_{1/s^2} revient à diviser chaque variable ~~centrée~~ par son écart-type et utiliser $M = I$

$$M = T'T = D_{1/s} \cdot D_{1/s}$$

L'individu $\underline{e}_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^p \end{pmatrix}$

est transformé en $T\underline{e}_i = \begin{pmatrix} x_i^1 / s_1 \\ x_i^2 / s_2 \\ \vdots \\ x_i^p / s_p \end{pmatrix}$

" **réduction** "

- La réduction rend les distances entre individus indépendantes des unités de mesure. On parle d'" unités d'écart-type "

Ex : € — $

•• Elle donne à chaque variable la même importance dans le calcul des distances entre individus.

b - Métrique usuelle dans l'espace des variables : $\mathbb{R}^n$

La "ressemblance" entre deux variables peut être mesurée par le calcul du coefficient de corrélation linéaire, ce qui nécessite le calcul de la covariance.

$$\mathrm{Cov}\,(\underline{x}^i\,;\underline{x}^j) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^i\, x_k^j\right) - \bar{x}^i\,\bar{x}^j$$

Si les variables sont centrées :

$$s_{ij} = \mathrm{Cov}\,(\underline{x}^i\,;\underline{x}^j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\, x_k^i\, x_k^j$$

$$= (\underline{x}^i)'\, D\, (\underline{x}^j)$$

$$\text{où} \quad D = \begin{pmatrix} 1/n & & 0 \\ & 1/n & \\ 0 & & \ddots\; 1/n \end{pmatrix}$$

D = métrique des poids.

Propriété : L'orthogonalité de deux variables au sens de cette métrique exprime la non-corrélation

<u>Remarque.</u> Il arrive parfois que l'on affecte des poids différents à chaque individu.

On utilise alors une métrique diagonale :

$$\underset{n\times n}{D} = \begin{pmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

3) Expression de la matrice de variances-covariances ; de la matrice des corrélations.

Soit $$\underset{n\times p}{X} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & x_i^j & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \\ j \end{array} i$$

la matrice des <u>données centrées</u>.

D = métrique des poids

Alors :

$$\boxed{\begin{aligned} V &= X'DX \\ \text{matrice de var-cov.} &= \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & & s_{1p} \\ s_{21} & s_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ s_{p1} & & & s_p^2 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

$s_{ij} = \text{cov}(\underline{X}^i ; \underline{X}^j)$

$s_i^2 = \text{var}(\underline{X}^i)$

matrice des corrélations : Elle regroupe les coefficients de corrélation linéaire entre les p variables prises deux à deux.

$$\underset{p \times p}{R} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & & r_{1p} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ r_{p1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R = D_{1/s} \, V \, D_{1/s}}$$

Remarque : Si X désigne la matrice des données centrées $Z = X D_{1/s}$ est la matrice des données centrées-réduites.

$$R = Z' D Z$$

$$\left(R = D_{1/s} X' \underbrace{D \, X} D_{1/s} = D_{1/s} V D_{1/s} \right)$$

3 - Les métriques utilisées en A.C.P.

Le calcul des distances entre individus et des liaisons entre variables nécessite le choix de deux métriques.

la métrique M : calcul des distances entre individus.

la métrique D : matrice diagonale des poids affectés aux individus

Nous parlerons par la suite de l' A.C.P. du triplet (X, M, D)

III L' étude des matrices symétriques.

1 Propriétés.

— • Si A est une matrice symétrique, toutes ses valeurs propres sont réelles.

Deux vecteurs propres quelconques correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

— •• Si $\underline{u}^1, \underline{u}^2 \ldots \underline{u}^p$ = base de vecteurs propres orthonormés alors : $\lambda_1 \; \lambda_2 \; \ldots \; \lambda_p$ (valeurs propres)

$$A = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, \underline{u}^j (\underline{u}^j)'$$

Dém : $\forall \; u^i \quad i = 1 \ldots p$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (\underline{u}^j)(\underline{u}^j)' \, \underline{u}^i} = \lambda_i \, \underline{u}^i$$

••• En d' autres termes :

$$A = X \Lambda X'$$

où X est orthogonale

Λ est diagonale

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_p \end{pmatrix}$$

2 – Matrices M – symétriques.

E espace vectoriel de dimension p muni d'une métrique M (matrice symétrique définie positive)

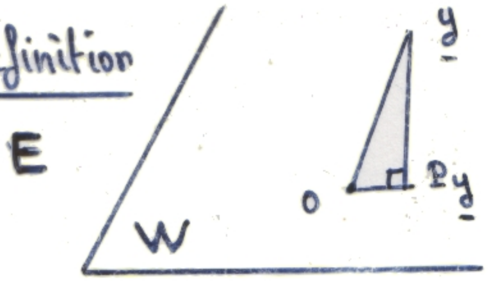
$\underset{p \times p}{A}$ est dite M-symétrique si et ssi

$$\boxed{MA = A'M}$$

Si A est M symétrique : A est diagonalisable ses valeurs propres sont réelles, 2 vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux, (au sens de la métrique M)

IV Projecteurs M -orthogonaux

1 Définition



W sous-espace de E

P est la matrice de projection M-orthogonale sur W si $P\underline{y} \in W$ et si $\langle P\underline{y} ; \underline{y} - P\underline{y} \rangle_M = 0$

Ceci implique : $P^2 = P$

$P'M = MP$ M-symétrie

les valeurs propres de P sont alors 1 ou 0

$\dim W = \text{Trace } P = \text{rang } P$.

Ecriture explicite du projecteur P

W engendré par p vecteurs linéairement indépendants $\underline{x}^1 \; \underline{x}^2 \ldots \underline{x}^p$ et soit X la matrice (n,p) ayant les $\underline{x}^i$ pour vecteurs colonnes

- $\underline{y} - P\underline{y}$ orthogonal à tout vecteur de W

Or $P\underline{y}$ est de la forme $X\underline{b}$ (combinaison linéaire des colonnes de X)

- • $\langle \underline{x}^i , \underline{y} - P\underline{y} \rangle_M = 0 \quad \forall \underline{x}^i$

$\Rightarrow (x^i)' M (\underline{y} - P\underline{y}) = 0 \quad \forall \underline{x}^i$

$\Rightarrow X' M (\underline{y} - X\underline{b}) = \underline{0} \quad \Rightarrow X' M \underline{y} = X' M X \underline{b}$

$\Rightarrow \underline{b} = (X' M X)^{-1} X' M \underline{y}$

$\Rightarrow P\underline{y} = X\underline{b} = X (X' M X)^{-1} X' M \underline{y}$

On en déduit : $\boxed{P = X (X' M X)^{-1} X' M}$

Cas particulier : Le projecteur M-orthogonal sur un vecteur $\underline{x}$ s'écrit :

$$P = \underline{x} (\underline{x}' M \underline{x})^{-1} \underline{x}' M$$

$$\boxed{P = \frac{\underline{x}\,\underline{x}' M}{\underline{x}' M \underline{x}}}$$

car $\underline{x}' M \underline{x}$ est un scalaire

INERTIE

Inertie totale : Somme pondérée des carrés des distances des individus au centre de gravité $\underline{g}$

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} p_i \, d^2(\underline{e}_i, \underline{g})$$

$$= \sum_{i<j}\sum p_i p_j \, d^2(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$$

Remarque :

Quand $\underline{g} = \underline{0}$ (les variables sont centrées)

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} p_i \, d^2(\underline{e}_i, \underline{0}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \|\underline{e}_i\|_M^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \, \underline{e}_i' M \underline{e}_i$$

Théorème

$$\boxed{I_g = \text{Trace}\,(MV)}$$

Démonstration :

$p_i \, \underline{e}_i' M \underline{e}_i$ étant un scalaire

$$I_g = \text{Trace}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, \underline{e}_i' M \underline{e}_i\right) = \text{Trace}\left(\sum_{i=1}^{n} M \underline{e}_i \, p_i \, \underline{e}_i'\right)$$

$$= \text{Trace}\,(M X' D X) = \text{Trace}\,(MV)$$

Expression de l'inertie du nuage projeté.

La matrice de variance-covariance de la projection du nuage sur F vaut

PVP'

où P = opérateur de projection orthogonale sur F

Les points $\underline{f}_i$ sont les lignes du tableau XP'

(En effet $\underline{e}_i'$ ligne de X $\rightarrow$ $\underline{e}_i$ colonne de X'

$\underline{f}_i = P\underline{e}_i$ = colonne de PX'

= ligne de XP')

La matrice de var-cov de la projection du nuage sur F vaut :

$$(XP')'D(XP') = PX'DXP' = PVP'$$

Inertie de la projection du nuage = Trace(VMP)

Inertie = Trace $(PVP'M)$ = Trace $(VP'MP)$

P étant M symétrique : $MP = P'M$

d'où Trace $(VP'MP)$ = Trace $(VMPP)$

et puisque $P^2 = P$

Inertie = Trace (VMP)

Maximisation du quotient de deux formes quadratiques.

Soient A et B deux matrices symétriques de même taille.

B sera supposée inversible.

Alors le rapport $\dfrac{\underline{u}' A \underline{u}}{\underline{u}' B \underline{u}}$ est maximal pour $\underline{u}$ vecteur propre de $B^{-1}A$ associé à sa plus grande valeur propre λ_1 ; λ_1 étant alors la valeur du maximum.

Démonstration

Un extrémum de $\dfrac{\underline{u}' A \underline{u}}{\underline{u}' B \underline{u}}$ s'obtient en annulant sa dérivée qui vaut :

$$\frac{(\underline{u}' B \underline{u})(2 A \underline{u}) - (\underline{u}' A \underline{u}) 2 B \underline{u}}{(\underline{u}' B \underline{u})^2}$$

soit $(\underline{u}' B \underline{u}) A \underline{u} = (\underline{u}' A \underline{u}) B \underline{u}$

$$B^{-1} A \underline{u} = \frac{\underline{u}' A \underline{u}}{\underline{u}' B \underline{u}} \underline{u}$$

$\underline{u}$ est donc vecteur propre de $B^{-1}A$ associé à la valeur propre $\dfrac{\underline{u}' A \underline{u}}{\underline{u}' B \underline{u}}$

Le maximum est donc atteint si cette valeur propre est maximale.