Chủ đề 2: Ma trận, hệ phương trình đại số tuyến tính, trị riêng

Mục đích

– Thực hành về ma trân:
 + Phép toán trên ma trận trong Matlab
 + Tính định thức của ma trận bằng khử Gauss
 + Tính hạng của ma trận bằng khử Gauss (có tráo hàng*)
 + Tính ma trận nghịch đảo bằng khử Gauss-Jordan
– Thực hành về các phương pháp giải hệ phương trình ĐSTT:
 ▶ Các phương pháp trực tiếp:
 + Sử dụng định lý Cramer
 + Phương pháp khử Gauss (Gauss Elimination)
 + Phương pháp khử Gauss-Jordan (Gauss-Jordan Elimination)
 + Phương pháp khử Gauss có tráo hàng (Gauss Elimination with partial pivoting)*
 ▶ Các phương pháp lặp:
 + Phương pháp lặp Jacobi (Jacobi Iteration)
 + Phương pháp lặp Gauss-Seidel (Gauss-Seidel Iteration)
– Thực hành giải bài toán Trị riêng, Véc tơ riêng:
 + Thương Rayleigh (Rayleigh quotient)
 + Phương pháp lũy thừa (Power method)
 + Phương pháp lũy thừa nghịch đảo (Inverse power method)
 + Phương pháp lũy thừa nghịch đảo có dịch trị riêng (Inverse power method with shift)*
 + Phương pháp phân tích QR (QR factorization)*
– Thực hành các lệnh tương ứng của Matlab và so sánh

Ví dụ thực hành

1. Mảng số và ma trận trong Matlab

```
% Mang so va ma tran trong Matlab
clc; close all; clear all;

% Tao mang a, b, c, d, E:
a = []
b = [1]
c = [1, 3, 5]
d = [2; 4; 6]
E = [1, 2, 3; 4, 5, 6]

% Kich thuoc cua mang:
s_c =size(c), s1_c =size(c,1), s2_c =size(c,2)
s_d =size(d), s1_d =size(d,1), s2_d =size(d,2)
s_E =size(E), s1_E =size(E,1), s2_E =size(E,2)

% Chieu dai cua mang:
l_c = length(c), l_d = length(d)

% Xac dinh cac phan tu cua mang E:
x1 = E(2,3), x2 = E(end,2), x3 = E(1,end)
```

2. Các lệnh liên quan đến ma trận trong Matlab

```
% Cac lenh lien quan den ma tran
clc; clear all; close all;

% Tao ma tran 3x3 ngau nhien
A = fix(1 + 8 * rand(3))

% Tinh toan
Ainv = inv(A)      % Ma tran ngich dao
At   = A'          % Ma tran chuyen vi
detA = det(A)      % Tinh dinh thuc
rankA = rank(A)    % Tinh hang
diagA = diag(A)    % Lay duong cheo chinh
```

3. Giải hệ PT ĐSTT bằng phương pháp khử Gauss

```
% Phuong phap khu Gauss de giai he p/t: Ax=b
clc; close all; clear all;

A = [2 4 3 4; 3 1 -2 -2; 4 11 7 7] % A = [A|b]
n = size(A, 1); % So hang cua ma tran

% Khu Gauss de tim ma tran bac thang rut gon:
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        p = A(i,k) / A(k,k);
        % Lay hang i tru di p lan hang k:
        for j = k:n+1
            A(i,j) = A(i,j) - p * A(k,j);
        end
    end
end
A

% Thay the nguoc de tim x:
for i = n:-1:1
    Sum = 0;
    for j = i+1:n
        Sum = Sum + A(i,j) * x(j);
    end
    x(i,1) = (A(i,n+1) - Sum) / A(i,i);
end
A, x
```

4. Giải hệ PT ĐSTT bằng phương pháp lặp Jacobi

```
% Phuong phap lap Jacobi de giai he p/t: Ax=b
clc; clear all; close all;

A = [5 -2 3; -3 9 1; 2 -1 -7];
b = [-1; 2; 3];
n = length(b);  % So hang cua ma tran
X0 = [0 0 0];   % X0 : Gia tri bat dau

N = 20; % N la so vong lap
for k = 1:N
    for i = 1:n
        Sum = 0;
        for j = 1:n
            if j ~= i
                Sum = Sum + A(i,j) * X0(j);
            end
        end
        X1(i) = (b(i) - Sum) / A(i,i);
    end
    % error1 = norm(X0 - X1)
    X0 = X1
end

A*X0'
b
% error2 = norm(A*X0' - b)
```

5. Tìm trị riêng bằng phương pháp lũy thừa

```
%Phuong phap luy thua (Power method)
clc; clear all; close all;

A = [2 -12; 1 -5];
X = [0; 1]; % Gia tri bat dau

N = 8;       % So vong lap
for k = 1:N
    w = A * X;
    X = w / norm(w);
end

X            % Vector rieng
lambda = (X'*A*X)/(X'*X) % Rayleigh quotient
```

6. Tìm trị riêng bằng cách chéo hóa

```
%Tim Tri rieng-Vector rieng bang cheo hoa
clc; clear all; close all;

A = [2 -12; 1 -5];

[P, D] = eig(A) % A = P * D * P^-1
```

Bài tập

1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

   (a) Dựa trên ví dụ 3, hãy khử Gauss ma trận A. Viết chương trình khử Gauss cho ma trận bất kỳ dưới dạng *function file*.

   (b) Dựa trên kết quả câu a, khử Gauss-Jordan ma trận A. Viết chương trình khử Gauss-Jordan cho ma trận bất kỳ dưới dạng *function file*.

   (c) Tính định thức của ma trận A sử dụng khử Gauss.

   (d) Tính hạng của ma trận A sử dụng khử Gauss (có tráo hàng*)

   (e) Tính ma trận nghịch đảo của A sử dụng khử Gauss-Jordan.

   (f) So sánh kết quả tính định thức, hạng và ma trận nghịch đảo của A ở trên với kết quả tính bằng các lệnh tương ứng của Matlab từ ví dụ 2.

2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 3 \\ 3x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 7 \\ \ \ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Dựa trên ví dụ 3, hãy giải hệ (1) bằng phương pháp khử Gauss. Viết chương trình giải hệ PT ĐSTT (số phương trình bằng số ẩn) bất kỳ bằng khử Gauss dưới dạng *function file*.

(b) Viết chương trình giải (1) bằng phương pháp khử Gauss-Jordan dưới dạng *function file*.

(c) So sánh kết quả bằng lệnh chia ma trận hoặc nhận với ma trận nghịch đảo trong Matlab.

3. Cho hệ phương trình

$$Ax = b \quad \text{với} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(a) Giải hệ (2) bằng phương pháp khử Gauss.

(b) So sánh với kết quả bằng lệnh nhân với ma trận nghịch đảo trong Matlab.

(c*) Trong quá trình khử Gauss các phần tử trên đường chéo chính có thể bằng 0 sẽ không khử tiếp được. Do đó, ta cần tráo hàng trong quá trình khử. Hãy viết chương trình giải (2) bằng phương pháp khử Gauss có tráo hàng.

(d*) Viết chương trình tìm nghiệm của hệ PT ĐSTT tổng quát sử dụng khử Gauss có tráo cả hàng và cột.

4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -3x_1 + 9x_2 + \ \ x_3 = \ \ 2 \\ 2x_1 - \ \ x_2 - 7x_3 = \ \ 3 \end{cases} \tag{3}$$

(a) Ví dụ 4 đã giải hệ (3) bằng phương pháp lặp Jacobi với 8 bước lặp. Hãy viết chương trình giải (3) đạt sai số 10^{-9}.

(b) So sánh với kết quả bằng lệnh nhân với ma trận nghịch đảo trong Matlab.

(c*) Viết chương trình giải (3) bằng phương pháp lặp Gauss-Seidel với sai số 10^{-9}. So sánh tốc độ hội tụ với phương pháp Jacobi.

(d*) Phương pháp Jacobi và Gauss-Seidel có giải được các hệ (1) và (2) không? Tại sao?

5. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

(a) Ví dụ 5 đã tìm được trị riêng lớn nhất và vector riêng tương ứng của A bằng phương pháp lũy thừa. Hãy viết chương trình tìm trị riêng nhỏ nhất và vector riêng tương ứng của A bằng phương pháp lũy thừa nghịch đảo.

(b) So sánh kết quả với chương trình tìm trị riêng-vector riêng bằng chéo hóa ma trận ở ví dụ 6.

6. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 16 & -9 & 6 \\ 8 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

(a) Sử dụng phương pháp lũy thừa nghịch đảo có dịch trị riêng để tìm tất cả các trị riêng của A.

(b) Sử dụng phương pháp phân tích QR để tìm tất cả các trị riêng của A.

(c) So sánh với kết quả từ Matlab.

7. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 - 10^{-20} \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 + 10^{-20} \end{bmatrix}$

(a) Áp dụng phương pháp khử Gauss lên ma trận A và B. Giải thích sự khác nhau của các kết quả thu được.

(b) Tính các trị riêng của ma trận A và B. Giải thích sự khác nhau của các kết quả thu được.