

COTAS INFERIORES

$\Theta(g(n))$: $g(n)$ es cota superior
 $\Omega(g(n))$: $g(n)$ es cota inferior
 Θ : $\Theta(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Tco Maestro: Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente $f(n) \leq a \cdot f(n/b) + c \cdot n^d$
 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}, b > 1, d \geq 0$

$$f(n) = \begin{cases} \Theta(n^d) & a < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & a = b^d \\ \Theta(n^{\log_b a}) & a > b^d \end{cases}$$

máx lista: $\rightarrow n-1$ comp.
 máx + mín $\rightarrow \lceil \frac{3}{2}n \rceil - 2$
 máx + 2° máx $\rightarrow n + \lceil \log n \rceil - 2$

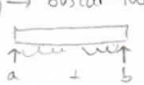
Adversarios:

1) ordenar arreglo de n eltos es $\Omega(n \log n)$ comp
 Adversario mantiene un conjunto de todas las permutaciones ($n!$) posibles, y para cada pregunta divide el conjunto en 2, uno para las respuestas SI y otro para NO. Escoge siempre la respuesta que produce el conjunto más grande.
 $\Rightarrow k = \Omega(\log_2 n!)$ preguntas $\Rightarrow k = \Omega(n \log n)$ preguntas.

2) grafo no dirigido es o no conexo? toma $\binom{n}{2}$ consultas
 tipo "existe arco entre nodo x_i y v ? total n nodos
 Adversario mantiene 2 grafos, un clique de n nodos y nodos sin arcos al comienzo. Para cada pregunta, si al sacar dicho arco el clique queda disconexo, no se saca y se agrega al otro grafo: a menos que pregunte todos los arcos posibles ($\binom{n}{2}$), tengo 2 grafos que cumplen con las preguntas y uno es conexo y el otro no.

3) Arreglo de bits de n eltos. 111's? toma $n \lceil \frac{4}{3} \rceil$
 dar respuestas qto den 0110 o 0011
 Si es primera a medio $\rightarrow 1$
 Si es primera a algún extremo $\rightarrow 0$

4) Reducción: calcular cuadrado de una matriz $A_{n \times n}$ no es más fácil que $B \times C$ de $n \times n$ ambas.
 $B \times C = \frac{(B+C)^2 - (B-C)^2}{4}$, suma y resta orden n^2 , calcular, /4 $\Theta(n)$
 $\Rightarrow (B+C)^2$ es $\Theta(n^3)$

5) 3-SUM $\Theta(n^2 \log n)$, $\Theta(n^2)$, n números x_1, \dots, x_n , ¿a, b, c tq $a+b+c=0$?
 $\Theta(n^2) \rightarrow$ fuerza bruta
 $\Theta(n^2 \log n) \rightarrow$ buscar todos los pares (a,b) $\Theta(n^2)$ y buscar su suma en arreglo $\Theta(\log n)$
 $\Theta(n^2) \rightarrow$  $\Theta(n)$
 $a + b = -x_1 - x_2 - x_3 \dots - x_n \quad \Theta(n)$

6) mediana de arreglo desordenado de n eltos $\rightarrow \Omega(\frac{3}{2}n)$
 podría servir usar las listas $L[x] \leftarrow \{x\}$, $L[x]$ son los eltos $\leq x$
 si $a \in L[b]$ o $b \in L[a]$, respondiendo
 else si $|L[a]| \geq |L[b]|$, $L[a] \leftarrow L[a] \cup L[b]$, o viceversa.

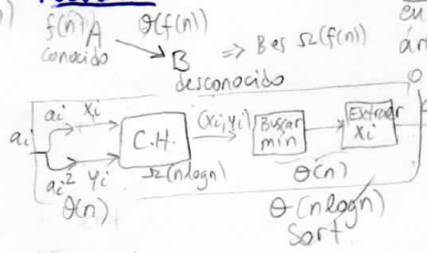
7) Encontrar k menores de arreglo desordenado de n eltos.
 1) Quickselect $\Theta(n)$ para encontrar el k -ésimo elto.
 2) Ordenar los k menores $\rightarrow \Theta(k \log k)$
 Adversario: si no veniso n , adversario elige justo uno que era parte de los k . Por adversario, tampoco puedo ordenar en menos de $n \log n$.

TABLA ADVERSARIO (BUSCAR MIN)

c		
$a(a-2, b+1, c+1)$	$(a-1, b, c+1)$ para los 2 casos	$(a-1, b+1, c)$ $(a-1, b, c+1)$
b	$(a, b-1, c+1)$	(a, b, c) $(a, b-1, c+1)$
c		(a, b, c) NO SIRVE

$a = \#$ eltos nunca comp.
 $b = \#$ eltos comp ≥ 1 vez y siempre menores
 $c = \#$ eltos comp ≥ 1 vez y siempre mayores
 ALG: $(n, 0, 0) \rightarrow (0, 1, n-1)$
 masito $c+1$

Reduccion



• Convex hull: dado input de puntos encuentra mínimo polígono (en área) que los contiene, retorna puntos ordenado (anti-horario)

Reduce Sort a Convex hull

3-SUM

• 3 colinear: Dados n puntos, existen 3 colineales? no verticales
 \Rightarrow Se puede reducir 3SUM a 3 colinear?
 \Rightarrow Si resolviera 3 colinear resolviera 3SUM
 $b = \frac{a+c}{2}$ (Thales) $\Rightarrow -x_j = \frac{x_i + x_k}{2} \Rightarrow x_i + x_j + x_k = 0$

8) fusionar listas enlazadas de tamaño n . Se necesitan $2n-1$ comp.
 \rightarrow Existen $2n-1$ pares para comparar (pensar en intervalos)
 Si hace $2n-2$ comp, puede invertir un par y sigue consistente.
 9) Grafo ciclico? toma $\binom{n}{2}$ consultas "hay arco (u,v) " y hay n nodos.
 Adv: 2 grafos A y C . A no tiene ciclos. C tiene 1 ciclo
 Inicia con $A \leftarrow \emptyset$, $C \leftarrow K_n$ clique. Para pregunta (u,v) , si $A \cup C$ es aciclico, $A \leftarrow A \cup (u,v)$ return sí. Sino $C \leftarrow C - (u,v)$ return no.

10) Reduccion 3 rectas pasan por un punto es 3SUM-hard $\Theta(n)$
 $y_1 = ax_1 + b$
 $y_2 = ax_2 + b$
 $y_3 = ax_3 + b$
 $\Rightarrow y_1 = x_1 x^* + y_1^*$
 $y_2 = x_2 x^* + y_2^*$
 $y_3 = x_3 x^* + y_3^*$
 $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = x^* \cdot x_1 + y_1^* \\ y_2 = x^* \cdot x_2 + y_2^* \\ y_3 = x^* \cdot x_3 + y_3^* \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix}$ son colineales

11) grilla discreta $n \times n$ $\Theta(n)$ elementos. Para determinar un rango vacío es $\Omega(\log \log n)$ en $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$

1) cota inferior por contar cantidad de puntos en rango $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$
 $a = \text{contar}(x_1, y_1)$
 $b = \text{contar}(x_1, y_2)$
 $c = \text{contar}(x_2, y_1)$
 $d = \text{contar}(x_2, y_2)$
 cuidado al restar áreas

• encontrar punto $(x,y) \in [x_1, x_2]$
 si encontramos (x,y) con $y \leq y_1$ resolvimos el problema del rango vacío



12) árbol ternario bits
 valor padre es mayoría hijo. Saber valor de raíz hay que revisar todos los nodos.
 Adv: mantener 2 árboles, A_0 y A_1 . A_0 con solo 0's y A_1 con solo 1's

13) tamaño máximo clique reducir a ¿hay clique de cierto tamaño?
 Búsqueda binaria

14) Asignar fórmula a verdad reducir a ¿satisfacible? fuerza bruta asignar 1 valor y preguntar satisfacibilidad para los que quedan.

MEMORIA SECUNDARIA

M: tamaño mem $m = \frac{M}{B}$ = cant. bloques que caben en mem
 B: tamaño bloque $n = \frac{N}{B}$ = cant. bloques que usa la entrada
 N: número eltos

Ordenar es $\Theta\left(\frac{N}{B} \log_{\frac{M}{B}} \frac{N}{B}\right) = \Theta(n \log m)$

1) grafo dirigido $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = e$, $n, e \gg M$. Se tiene archivo secuencial de pares (u, v) en disco. Grado máx y mín? ordenar arch por el primero $\frac{e}{B} \log_{\frac{M}{B}} \frac{e}{B}$, copiar es $\frac{e}{B}$ y ordenar por el segundo $\frac{e}{B} \log_{\frac{M}{B}} \frac{e}{B}$, contar $\frac{e}{B}$.

Cuadrado del grafo? copiar. Ordenar por el segundo, luego por el primero y mirar los del medio

G^k ? solución que este $< k-1$ veces lo anterior.
 $\Rightarrow G^{2^k}$ logk veces y después multiplicar por G las suficientes veces

2) Arreglos $A[1..N]$, $B[1..N]$ (no caben en m.p) construir $C[i] = A[B[i]]$
 \rightarrow copio A a $A'[i] = (i, A[i])$ $\Theta\left(\frac{N}{B}\right) = \Theta(n)$
 \rightarrow orden A' por segundo arg (ϕ_A, id) $\Theta(n \log m)$
 \rightarrow copiar B en segundo arg $\Rightarrow (\phi_A^{-1}, \phi_B)$ $\Theta(n)$
 \rightarrow orden A' por primer arg $\Rightarrow (id, \phi_A \cdot \phi_B)$ $\Theta(n \log m)$
 \Rightarrow copio 2° arg en $C \Rightarrow \phi_A \circ \phi_B$ $\Theta(n) + \Theta(n \log m) \ll \Theta(N)$

3) Multiplicar matrices $N \times N$ archivos ordenados por filas.

1°) transponer $\Theta(N^2/B)$ o $\Theta(N^2)$? nueva matriz A^T

2°) leer secuencialmente A y A^T y calcular. Por cada par i, j se lee $2N$ eltos, y son N^2 pares. $= 2 \cdot \frac{N}{B} \cdot N^2 = \Theta\left(\frac{N^3}{B}\right)$

• Luego, $\Theta\left(\frac{N^3}{B \sqrt{M}}\right)$? (multiplicar submatrices de \sqrt{M} ?)

$\begin{bmatrix} \text{filas} \\ \text{filas} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{filas} \\ \text{filas} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{filas} \\ \text{filas} \end{bmatrix}$

1°) transponer $\Theta\left(\frac{N^2}{B}\right)$
 2°) Multiplicar. $\left(2 \cdot \frac{N}{B \sqrt{M}} \cdot \frac{M \cdot \sqrt{M}}{M \text{ pares}}\right) \cdot \frac{N^2}{M} = 2 \cdot \frac{N^3}{B \sqrt{M}} = \Theta\left(\frac{N^3}{B \sqrt{M}}\right)$
 cuadrados de tamaño M en matriz final
 elementos de ambas matrices

4) Relaf binaria dado $[(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots]$ es simétrica?

\rightarrow copia de R
 \rightarrow ordenar R por primer arg y luego por 2° arg
 \rightarrow ordenar R por segundo arg y luego por 1° arg
 \rightarrow comparar secuencialmente (invirtiendo poder de R)
 \rightarrow si una comp falla \rightarrow no es simétrica.

5) Buffer S largo B . push pop $\Theta(N)$ peor caso cuando se llena guardado B y se vacía trajo B
 defo 1

\rightarrow Buffer S largo $2B$ pusho pop es $\Theta\left(\frac{N}{B}\right)$ $\left(\frac{N}{B-1}\right)$