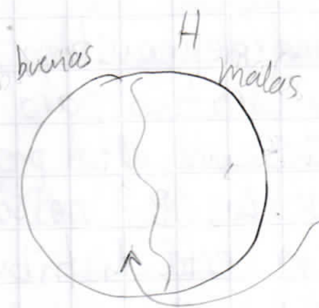
Puede ser que haya una función que tire todos los eltos a una misma celda i, luego $B_i^2 = N^2$ y $B_j^2 = \emptyset$ $\forall j \neq i$.

Pero si es un conjunto 2 universal, la esperanza de la suma de B_i^2 es lineal. Pero no es suficiente% fuerte

Puede que hay una función muy muy buena y el resto son relativamente malas.



todas las buenas deben producir $\sum B_i^2 < 4N$.
porque si $\exists$ buena $\geq 4N \Rightarrow$ todas las malas $\not\geq 4N$
$\Rightarrow E(\ ) \geq 2N$

Si hay una buena que es mala, luego todas las malas son peores.
(y a lo más hay $\frac{1}{2}$ buenas, $\frac{1}{2}$ malas.

Entonces debo usar Las Vegas para encontrar distribuidora que produzca $\sum B_i^2 < 4N$

(Recordar que en Las Vegas estoy escogiendo h al azar con repetición, por eso puede demorar ∞)

Encontrar h distribuidora toma $\theta(|S|)$ y pasar celda por celda asignando las otras h es $\theta(\underbrace{\sum B_i^2}_{<4N}) = \theta(|S|)$ (pues $N = |S|$)

Una vez que la estructura se construyó, es determinista.

ALGORITMOS APROXIMADOS

2015年11月26日(木)

sí? NO?

Problemas de decisión NP-completos (clique tamaño k)

$\equiv$ Problemas de optimización también difíciles. (máx clique?)

(minimizar/maximizar)

Todo probl. de opt, tiene un prob. de decisión asociado. Podría usar uno para responder el otro

Def: Un algoritmo es un $\rho(n)$-aproximación a un problema de optimización si,

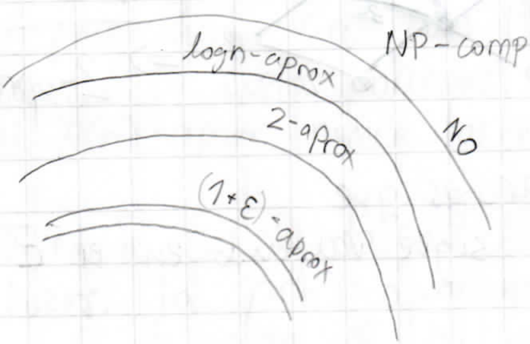
$\forall$ input de tamaño n,

$$\text{máx}\left(\underbrace{\frac{C}{C^*}}_{\substack{\text{alg de}\\ \text{minimizar}\\ \geq 1}}, \underbrace{\frac{C^*}{C}}_{\substack{\text{alg de}\\ \text{máx}}}\right) \leq \rho(n)$$

donde C = valor que encuentra el algoritmo

C^* = valor óptimo.

probl. de decisión NP-compl, se dejan aproximar con un prob de opt 2-aprox, logn-aprox, $1+\varepsilon$ aprox



Def: Un esquema de aproximación polinomial es un algoritmo de aproximación que recibe un parámetro extra ε y produce una $(1+\varepsilon)$-aproximación.

Su costo es una función de n y de ε, polinomial en n para todo ε fijo

$$\underbrace{\text{más deseable}}$$

$O(n^{2/\varepsilon})$, $O\left(\frac{1}{\varepsilon^2} n^3\right)$ ← (el costo crece polinomicalmente cuando ε disminuye)

Si la función también es un polinomio en $1/\varepsilon$, se llama esquema de aproximación completamente polinomial.

Nota: los problemas de decisión se dejan "trasladar" de uno NP a otro NP. Pero los prob. de optimización quizás no.

VERTEX COVER: (prob. de decisión asociado: existe vertex cover de tamaño k?)

Dado un grafo $G(V, E)$ elegir un subconjunto mínimo $V' \subseteq V$ que cubra todas las aristas.

puedo usar esta aproximació para resolver (de manera aprox también) el problema de decisión.

Vamos a hacer una 2-aprox. muy simple.

VC:

$V' \leftarrow \emptyset$

mientras $E \neq \emptyset$

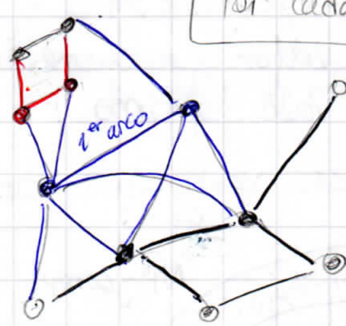
elegir $(u, v) \in E$

$V' \leftarrow V' \cup \{u, v\}$ → incluyo ambos nodos, en vez de elegir uno solo.

sacar de E toda arista incidente en u o v.

Por cada par de nodos que meto, el conjunto óptimo tiene al menos 1 de esos 2.

⇒ 2-aprox



Es una 2 aprox pues cada vez que mete los nodos u y v en V', un VC óptimo debe contener u o v (o ambos). Al eliminar las aristas que u o v cubren, el invariante sigue valiendo en el E resultante

Recordemos que: VC k ⇔ clique de $n-k$ en $\overline{G}$

ej: 100 nodos (n)

clique de tam 10 → $\overline{G}$ VC de tam 90

clique de $\emptyset$ ← la aprox encuentra ≤ ~~180~~ 100

No puedo reducir algoritmos de opt. aproximados.

Camino Hamiltoniano

Dado $G(V, E)$, ¿existe un circuito que pase por cada nodo exactamente una vez? ¿Sí?, ¿NO?

Problema del viajante de comercio (prob. de opt) ("vendedor viajero")

Además las aristas tienen un costo, y quiero un circuito que minimice la suma de los costos.
(Supondremos que existe camino Hamiltoniano)
Probaremos que este problema NO se deja aproximar
Supongamos que existe una $\rho(n)$-aproximación. La uso para resolver un problema de circ. Hamiltoniano en $G(V, E)$
Creo un grafo completo $G'(V, V \times V)$
con costo
$$C(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) \in E \\ |V|\rho(|V|)+1 & \text{si } (u,v) \notin E. \end{cases}$$

La idea es que si tengo una $\rho(n)$-aprox cualquiera, puedo responder el problema de circ. hamiltoniano SIEMPRE en tiempo polinomial escogiendo costos correctos. (Aristas muy costosas, de manera que el $\rho(n)$-aprox nunca las escoge) → que no están en G, y sí en G'

Si existe un circuito en G, el costo del mejor camino en G' es $|V|$
∴ la $\rho(n)$-aproximación me encontrará un camino de costo $\leq |V|\rho(|V|)$
Si no existe un circuito Hamiltoniano en G, entonces toda solución en G' necesita usar al menos una arista que NO está en G, lo cual tiene costo $|V|\rho(|V|)+1$
∴ el costo total es siempre, usando cualquier solución aprox o no, $> |V|\rho(|V|)$

Ahora ejecuto soluc aprox, veo si es $>$ o $\leq$ a $|V|\rho(|V|)$ y siempre puedo resolver prob. de camino Hamiltoniano.

Perno

Desigualdad Triangular

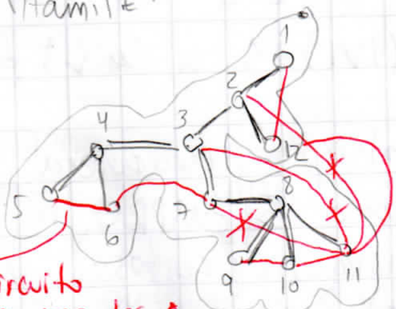
$$C(u,v) \leq C(u,w) + C(w,v)$$

Si los costos del problema del viajante de comercio satisfacen la desigualdad triangular, con $E = V \times V$, entonces existe una 2-aprox. (y una $\frac{3}{2}$; Christofides)

Un circuito es un camino + 1 arista.

min spanning tree

$$C\begin{pmatrix}\text{circ}\\ \text{Hamilt}\end{pmatrix} \geq C(\text{camino Hamilt}) \geq C(\text{MST})$$



1 2 3 4 5 ~~4~~ 6 ~~4~~ ~~3~~ 7
8 9 ~~8~~ 10 ~~8~~ 11 ~~8~~ ~~7~~ ~~3~~
~~2~~ 12 ~~2~~ 1

→ no hay problema pues existen todas las aristas

este nuevo circuito no es MÁS caro, por des Δ

mejor árbol

$$C'(\text{Euler}) \leq C(\text{Euler}) = 2\,C(\text{MST}) \leq 2\,C(\text{circ H.})$$

↳ paso 2 veces por cada arista de MST

2-aprox:

1) Construir un MST de G
2) Hago un circuito Euleriano del MST.

19

Vertex Cover con costos

Cada nodo pesa $w(v)$. Quiero minimizar la suma de los pesos.

Sea $x(v) = \begin{cases} 1 & \text{si elijo } v \\ 0 & \sim \end{cases}$

Quiero encontrar $x(\cdot)$ tal que

$\forall v \quad x(v) \geq 0$

$\quad\quad x(v) \leq 1$

$\forall u, v \in E, \quad x(u) + x(v) \geq 1$

Minimizar $\sum_{v \in V} x(v) w(v)$

Es un problema de programación lineal que se resuelve en tiempo polinomial. El óptimo lineal, C_L, es $C_L \leq C^*$

De esa solución $x(v) \in [0, 1]$, obtenemos la de VC como:

elegir v sii $x(v) \geq 0.5$.

1) es un VC? sí, pues $(u,v) \in E \Rightarrow x(u) + x(v) \geq 1$

$\Rightarrow x(u) \geq 0.5$ ó $x(v) \geq 0.5$

$\Rightarrow$ elijo u o v.

2) qué aproximación resulta?

$$\sum_{v \in V'} w(v) = \sum_{v \in V} y(v) w(v)$$

$$y(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in V' \\ 0 & \sim \end{cases}$$

si $v \in V'$, $y(v) = 0 \leq x(v)$

si $v \notin V'$, $y(v) = 1 \leq 2 \cdot x(v)$ $\quad$ $x(v) \geq 0,5$ porque lo elegí

$\therefore$ La suma de los pesos es

$$\sum_{v \in V'} w(v) \leq 2 \cdot C_L \leq 2 \cdot C^*$$