

(121) Puede ser que haya una función que tire todos los elos a una misma celda i , luego $B_i^2 = N^2$ y $B_j^2 = 0$ $\forall j \neq i$.

Pero si es un conjunto Z universal, la esperanza de la suma de B_i^2 es lineal. Pero no es suficiente % fuerte. Puede que hay una función muy muy buena y el resto son relativamente malas.



todas las buenas deben producir $\sum B_i^2 < 4N$.
 porque si \exists buena $\geq 4N \Rightarrow$ todas las malas $\geq 4N$
 $\Rightarrow E(\cdot) \geq 2N$

Si hay una buena que es mala, luego todas las malas son peores.
 (y a lo más hay $\frac{1}{2}$ buenas, $\frac{1}{2}$ malas).

Entonces debo usar las Vegas para encontrar distribuidora que produzca $\sum B_i^2 < 4N$

(Recordar que en las Vegas estoy escogiendo h al azar con repetición, por eso puede demorar ∞)

Encontrar h distribuidora toma $\Theta(|S|)$ y pasar celda por celda asignando las otras h es $\Theta(\sum_{\substack{B_i^2 \\ < 4N}} B_i^2) = \Theta(|S|)$ (pues $N = |S|$)

Una vez que la estructura se construyó, es determinista.

2015年11月26日(木)

ALGORITMOS APROXIMADOS

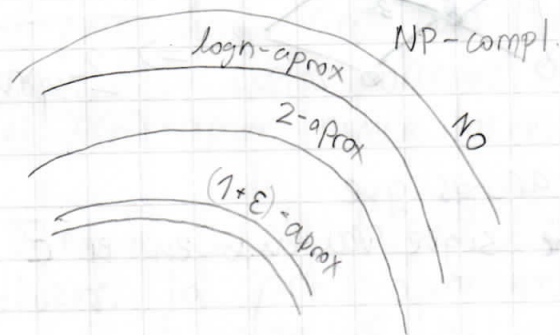
Problemas de decisión NP-completos (clique tamaño K)
 \equiv Problemas de optimización también difíciles. (máx clique?)
 (minimizar/maximizar)

Todo probl. de opt, tiene un probl. de decisión asociado. Podría usar uno para responder el otro

Def: Un algoritmo es un $p(n)$ -aproximación a un problema de optimización si,

$$\forall \text{ input de tamaño } n, \quad \max \left(\underbrace{\frac{C}{C^*}}_{\substack{\text{alg de} \\ \text{minimizaci} \\ \geq 1}}, \underbrace{\frac{C^*}{C}}_{\substack{\text{alg de} \\ \text{máx}}} \right) \leq p(n)$$

donde C = valor que encuentra el algoritmo
 C^* = valor óptimo.



probl. de decisión NP-compl,
 Se dejan aproximar con
 un probl. de opt 2-aprox,
 logn-aprox, $1+\epsilon$ aprox

Def: Un esquema de aproximación polinomial es un algoritmo de aproximación que recibe un parámetro extra ϵ y produce una $(1+\epsilon)$ -aproximación.

Su costo es una función de n y de ϵ , polinomial en n para todo ϵ fijo

más deseable

$$O(n^{2/\epsilon}), O\left(\frac{1}{\epsilon^2} n^3\right) \leftarrow \text{el costo crece polinomialmente cuando } \epsilon \text{ disminuye}$$

Si la función también es un polinomio en $1/\epsilon$, se llama esquema de aproximación completamente polinomial.

Nota: los problemas de decisión se dejan "trasladar" de uno NP a otro NP.
Pero los prob. de optimización quizás no.

VERTEX COVER: (prob. de decisión: existe vertex cover de tamaño k ?)
Dado un grafo $G(V, E)$ elegir un subconjunto mínimo
 $V' \subseteq V$ que cubra todas las aristas.

Vamos a hacer una 2-aprox. muy simple.
VC:

$V' \leftarrow \emptyset$

mientras $E \neq \emptyset$

elegir $(u, v) \in E$

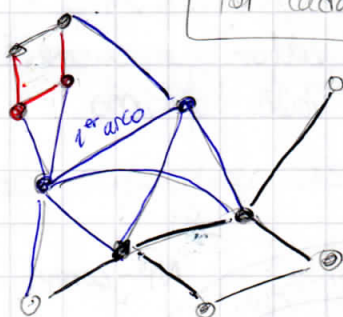
$V' \leftarrow V' \cup \{u, v\}$

sacar de E toda arista
incidente en u o v .

puedo usar esta
aproximación para resolver
(de manera aprox también)
el problema de decisión.

→ incluyo ambos nodos, en vez
de elegir uno solo.

Por cada par de nodos
que meto, el
conjunto óptimo
tiene al menos
1 de esos 2.



\Rightarrow 2-aprox

Es una 2 aprox pues cada
vez que meto los nodos
 u y v en V' , un VC

óptimo debe contener u o v

(o ambos). Al eliminar las aristas que

u o v cubren, el invariante sigue valiendo en el E
resultante.

Recordemos que: VC $k \iff$ clique de $n-k$ en \bar{G}

ej: 100 nodos (n)

clique de tam 10 $\rightarrow \bar{G}$ VC de tam 90

clique de \emptyset

\leftarrow la aprox encuentra ≤ 180 100

X

No puedo reducir algoritmos de opt. aproximados.

Caminio Hamiltoniano

Dado $G(V, E)$, existe un circuito que pase por cada nodo exactamente una vez? Sí?, NO?

Problema del viajante de comercio (prob. de opt) ("vendedor viajero")

Además las aristas tienen un costo, y quiero un circuito que minimice la suma de los costos.

(Supondremos que existe camino Hamiltoniano)

Probaremos que este problema NO se deja aproximar

Supongamos que existe una $p(n)$ -aproximación. La uso para resolver un problema de circ. Hamiltoniano en $G(V, E)$

Creo un grafo completo $G'(V, V \times V)$

con costo
$$C(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u, v) \in E \\ |V|p(|V|) + 1 & \text{si } (u, v) \notin E. \end{cases}$$

La idea es que si tengo una $p(n)$ -aprox cualquiera, puedo responder el problema de circ. Hamiltoniano SIEMPRE en tiempo polinomial, eligiendo costos correctos. (Aristas muy costosas, de manera que el $p(n)$ -aprox nunca los escoge) \rightarrow que no están en G , y si en G'

Si existe un circuito en G , el costo del mejor camino en G' es $|V|$
 \therefore la $p(n)$ -aproximación me encontrará un camino de costo $\leq |V|p(|V|)$

Si no existe un circuito Hamiltoniano en G , entonces toda solución en G' necesita usar al menos una arista que NO está en G , la cual tiene costo $|V|p(|V|) + 1$

\therefore el costo total es siempre, usando cualquier solución aprox o no, $> |V|p(|V|)$.

Ahora ejecuto solup aprox, veo si es $> 0 \leq a |V|p(|V|)$ y siempre puedo resolver prob. de camino Hamiltoniano.



Perno

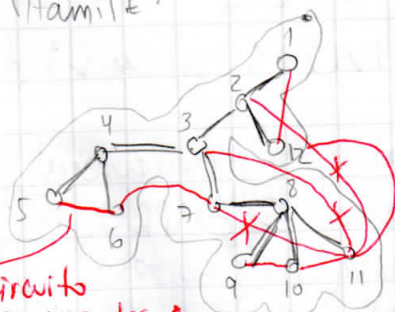
Desigualdad Triangular

$$C(u, v) \leq C(u, w) + C(w, v)$$

Si los costos del problema del viajante de comercio satisfacen la desigualdad triangular, con $E = V \times V$, entonces existe una **2-aprox.** (y una $\frac{3}{2}$, Christofides)

Un circuito es un camino + 1 arista.

$$C(\text{circ. Hamilt.}) \geq C(\text{camino Hamilt.}) \geq C(\text{MST})$$



este nuevo circuito
no es más caro, por des. Δ

1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13

→ no hay problema pues existen todas las aristas.

$$C'(\text{Euler}) \leq C(\text{Euler}) = 2C(\text{MST}) \leq 2C(\text{circ. H.})$$

↳ paso 2 veces por cada arista de MST

2-aprox:

- 1) Construir un MST de G
- 2) Hago un circuito Euleriano del MST.

Vertex cover con costos

Cada nodo pesa $w(v)$. Quiero minimizar la suma de los pesos.

$$\text{Sea } x(v) = \begin{cases} 1 & \text{si elijo } v \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Quiero encontrar $x(\cdot)$ tal que

$$\forall v \quad x(v) \geq 0$$

$$x(v) \leq 1$$

$$\forall u, v \in E, \quad x(u) + x(v) \geq 1$$

$$\text{Minimizar } \sum_{v \in V} x(v) w(v)$$

Es un problema de programación lineal que se resuelve en tiempo polinomial. El óptimo lineal, C_L , es $C_L \leq C^*$

De esa solución $x(v) \in [0, 1]$, obtenemos la de VC como:

elegir v si $x(v) \geq 0.5$.

1) es m VC? sí, pues $(u, v) \in E \Rightarrow x(u) + x(v) \geq 1$
 $\Rightarrow x(u) \geq 0.5$ ó $x(v) \geq 0.5$
 \Rightarrow elijo u o v .

2) qué aproximación resulta?

$$\sum_{v \in V'} w(v) = \sum_{v \in V} y(v) w(v)$$

$$y(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in V' \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$\text{si } v \in V', \quad y(v) = 0 \leq x(v)$$

$$\text{si } v \notin V', \quad y(v) = 1 \leq 2 \cdot x(v) \quad x(v) \geq 0.5 \text{ porque lo elegí.}$$

∴ La suma de los pesos es

$$\sum_{v \in V'} w(v) \leq 2 \cdot C_L \leq 2 \cdot C^*$$

2015年11月30日 (A)

Aux # 11

PI



1) Usando $O(D \log D)$ bits adicionales

Ingredientes

* Un arreglo $U[1, D]$

* Un stack $S[1, D]$ (en forma de arreglo) } estamos en un
+ un puntero al tope, t . ← modelo de muy bajo
nivel, donde puede haber
slots con basura

* El valor de inicialización

Init(V, D, v): # inicializar de forma "lazy"

$t \leftarrow 0$

$I \leftarrow v$

Write(V, i, v)

si $V[i]$ no está