Aux # 10

2015年11月23日 (月)

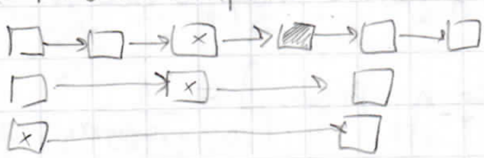
Algoritmos aleatorizados → tira monedas
y probabilíticos → hay $\mathbb{P}$ asociado al tiempo / correctitud.

Algoritmos tipo:

- MonteCarlo: se detienen siempre pero pueden equivocarse → si el algoritmo tiene 2 respuestas (sí / no)
  - one-sided error
  - two-sided error.
- Las Vegas: siempre es correcto pero pueden no detenerse

$\boxed{P1}$ SKIPLISTS: "aplicar búsqueda binaria a lista enlazada"

- idea 0: ordenar
- Queremos los "saltos" de BB
- idea: metro expreso



L_1 , $|L_1| = l_1 = n$

L_2

L_3 $\quad |L_i| = l_i$

$\vdots$

Si hay 2 niveles, buscar cuesta:

$$\leq l_2 + \frac{l_1}{l_2} = l_2 + \frac{n}{l_2} \Rightarrow \text{minimizo c/r a } l_2$$

("¿Cuántos eltos. pongo en l_2?")

$\Rightarrow C_{min} = 2\sqrt{n}$

Si tenemos cualquier cantidad de niveles, lo ideal sería simular un árbol binario $\Rightarrow$ links de largo 1, 2, 4, ...

¿Cómo logro que se vea así si hay inserciones?
Idea desde árboles balanceados: cada piso tiene $1/2$ de los nodos del piso de abajo

$\Rightarrow$ insertar(x)

- Buscar en L_1 la posición que le corresponde a x
- Tiro una moneda hasta que salga sello
- Si tiré la moneda K veces, x estará en las listas $L_1, L_2, \dots L_k$

$\mathbb{P}$[un elem. esté en la lista K] $= \dfrac{1}{2^{(K-1)}}$ → siempre tiro la moneda 1 vez.

Hay que analizar:

- Tamaño de la estructura
- Tiempo de ejecución

1) Con alta probabilidad, si hay n elementos hay $\Theta(\log n)$ pisos. ¿Por qué?

$\mathbb{P}$[x esté en más de $c \cdot \log_2 n$ pisos] $= \dfrac{1}{2^{c \cdot \log_2 n}}$

$= \dfrac{1}{n^c}$, pero esto es para 1 x!

Queremos acotar la $\mathbb{P}$. de que cualquiera sea más alto que $c\log_2 m$

$\mathbb{P}[\text{cualquier } x, \dots] = \mathbb{P}[p(x_1) \cup p(x_2) \cup \dots p(x_n)]$
$$\leq \sum_i \mathbb{P}[p(x_i)] = \frac{n}{n^c} = \frac{1}{n^{c-1}}$$

el número de pisos es $> c \cdot \log_2 n$ con prob $\leq \frac{1}{n^{c-1}}$

Otra forma es ver la esperanza.

2) ¿cuántos nodos tiene la estructura? (en promedio)

- Nos gustaría saber $\mathbb{E}(l_i)$

$$E(l_i) = \sum_{x=0}^{\infty} x \, \mathbb{P}[l_i = x] = ?$$

VARS INDICADORAS: v.a con valor 0 ó 1

Definimos X_{ij} = "el elemento $x_i \in L_j$"

$$\Rightarrow \mathbb{E}(l_j) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\right)$$
$$= E\left(\sum_i^n \frac{1}{2^{j-1}}\right) = \frac{n}{2^{j-1}}$$

$$\mathbb{E}(n^\circ \text{ nodos}) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty} l_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n}{2^{j-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{2^i} = 2n$$

$\mathbb{E}(n^\circ \text{ de pisos}) = ?$ $\quad H_i = \begin{cases} 0 & \text{si } L_i \text{ vacía} \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(n^\circ \text{ de pisos}) = \mathbb{E}\left(\sum_i H_i\right)$$

- $H_i \leq l_i \Rightarrow \mathbb{E}(H_i) \leq \frac{n}{2^{i-1}}, \quad H_i \leq 1$

$$\mathbb{E}\left(\sum H_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i = \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} H_i + \sum_{i=\lfloor \log n \rfloor + 1}^{\infty} H_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} 1 + \sum_{i=\lfloor \log n \rfloor + 1}^{\infty} \frac{n}{2^{i-1}} \leq \log n + \sum_{i=\lfloor \log n \rfloor + 1}^{\infty} \frac{n}{2^k} \cdot \frac{1}{2^i} = \log n + \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{2^k}\right)}_{k \geq \lfloor \log n \rfloor + 1} \cdot \frac{1}{2^i}$$