Auxiliar 9 - Algoritmos Online

CC4102 - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Gonzalo Navarro   Auxiliar: Jorge Bahamonde

16 de Noviembre del 2015

1 Online Set Covering

En el problema online de set covering, se nos entrega (U, S), donde U contiene n elementos y S contiene m subconjuntos de U. Luego se entrega de forma online una secuencia de elementos e_1, e_2, ..., e_t. El algoritmo que resuelve el problema debe construir un subconjunto R de S. Cuando llega un nuevo elemento, si no está cubierto por los subconjuntos de R, debe escogerse un conjunto de S que lo contenga y agregarlo a R (se permite agregar más conjuntos, si se desea).

1. Demuestre que no se puede obtener (usando un algoritmo determinístico) un radio competitivo mejor que $\log_2 n$. **Hint:** Considere $n = 2^d$, $U = \{0,1\}^d$, $S = \{S_i\}_{i=0}^{d}$, siendo $S_0 = \{0^d\}$ y para $1 \leq i \leq d$, considerando S_i como el conjunto de las cadenas con 1 en la i-ésima posición.
2. Demuestre que no se puede obtener un radio competitivo mejor que $\Omega(\frac{\log m}{\log n})$ con un algoritmo determinístico. **Hint:** Considere $U = [n]$ y S los subconjuntos de U con $\sqrt{n}$ elementos (luego $m = |S| = \binom{n}{\sqrt{n}}$).

2 El problema de los k servidores

Considere el escenario donde tiene k puntos (*servidores*) en un *espacio métrico* (donde está definida una función de distancia d simétrica, no negativa y que cumple la desigualdad triangular) y una secuencia de puntos (*peticiones*) que debe atender. Cada vez que llega una petición, un servidor debe moverse hacia esa posición.

El problema *online* consiste en minimizar la distancia recorrida por todos los servidores luego de n peticiones, sin saber la secuencia de puntos a atender.

1. Sea $\mathcal{A}$ un algoritmo online para el problema de los k servidores bajo un espacio métrico arbitrario con al menos $k+1$ puntos. Pruebe que el radio competitivo de $\mathcal{A}$ es al menos k.
2. Utilizaremos una función potencial para esta parte. Una función de potencial Φ demuestra un radio competitivo r de un algoritmo $\mathcal{A}$ si satisface las siguientes condiciones:

   - Φ es no negativa.
   - Cada respuesta a una petición del algoritmo óptimo incrementa Φ no más de r veces el costo cargado al algoritmo por esa respuesta.
   - Cada respuesta de $\mathcal{A}$ disminuye el potencial por al menos el costo cargado a $\mathcal{A}$ por esa respuesta.

   Un algoritmo es r-competitivo si existe una función de potencial que cumpla estas propiedades (Propuesto: ¿Puede demostrarlo?)

   Considere el problema de k servidores en una línea y el siguiente algoritmo:

- Si todos los servidores están al mismo lado de la petición, se envía el servidor más cercano.
- Si una petición está entre dos servidores, envía los dos a velocidad constante, deteniéndose cuando uno de ellos llega al objetivo.

Utilice una función de potencial Φ que demuestre un radio competitivo k para este algoritmo.

3 Tareas y Procesadores

Tenemos m procesadores idénticos. Como entrada recibimos una lista t_1, t_2,...,t_n de tareas con tiempos de procesamiento p_1, p_2,...,$p_n > 0$, respectivamente. Las tareas son recibidas secuencialmente, y sólo cuando una tarea llega conocemos su tiempo de procesamiento. Cada tarea debe ser asignada a una máquina inmediatamente, y la decisión no puede ser cambiada. La *carga* de un procesador es la suma de los tiempos de procesamiento de todas las tareas que le son asignadas. El costo de un algoritmo que resuelve el problema de asignacion es la máxima carga entre sus procesadores.

Considere el siguiente algoritmo para el problema anterior. Cada tarea es asignada al procesador con menor carga (en caso de empate, se elige cualquiera).

1. Demuestre que este algoritmo es $(2 - \frac{1}{m})$-competitivo.
2. Demuestre que esta cota es óptima para el algoritmo.