CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN:

1.1- Introducción:

Un nudo es es un lazo anudado de cuerda, es decir, una curva cerrada en el espacio que se tiene autointersecciones.

El nudo más simple es el nudo trivial (the unknot), viene a ser el círculo desanudado. El siguiente nudo más simple es el nudo trébol (trefoil). La cuestión es…¿cómo verificamos que realmente no son el mismo? Lo resolveremos usando tricoloración de nudos en 1.5

Llamamos un dibujo del nudo, a la proyección del nudo. Como hay muchas formas de representar un mismo nudo, un nudo puede tener muchos dibujos. Los lugares en el que un nudos se corta a sí mismo en su dibujo, se llaman crossings de la proyección. Si un nudo no es el trivial, tendrá como mínimo un crossing.

Una de las cuestiones que nos planteamos es: ¿Si tenemos una proyección de un nudo, podemos saber si se trata del nudo trivial? Wolfgang Haken descubrió un procedimiento infalible para decidir si un nudo era o no equivalente al trivial. Sería cuestión de escribir un programa que implemente el algoritmo y que al pasarle un nudo al ordenador, nos diga si es o no el trivial. A día de hoy, aún no se ha conseguido hacer.

Intereses de la teoría de nudos:

- Química: en los años 80, Lord Kelvin planteó que los diferentes nudos corresponderían a los diferentes elementos de la naturaleza. De este modo, conociendo todos los nudos posibles, crearíamos la tabla de elementos. Varios físicos y matemáticos trabajaron en tabulating knots para verificarlo pero a finales de los 90 apareció un nuevo modelos de estructura atómica que hizo darse cuenta de que Kelvin estaba equivocado.
- Biología: Descubrieron los anudamientos en la moléculas de ADN. Se verá más adelante.
- Topología: la teoría de nudos es un subcampo de la topología.

1.2 Composición de nudos:
Nudo composición (**J#K**): dadas dos proyección de dos nudos J y K, eliminamos un arco de cada una y conectamos los 4 finales de dos en dos mediante otros arcos de modo que no se añadan ni eliminen cruces. J y K se llaman los nudos factores (factor knots).

Si un nudo no es la composición de dos nudos no triviales, llamamos al nudo composición **prime knot**. Por ejemplo, the trefoil knot.

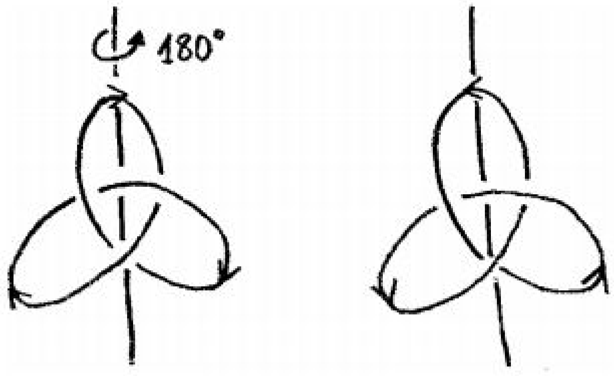
El nudo trivial no es un nudo composición. No podemos hacer la composición de dos nudos no triviales y que nos de el trivial. Para demostrarlo se hará uso de superficies.

La elección que hacemos de los arcos que eliminamos de cada uno de los nudos J y K, afectan al nudo composición. Luego, es posible construir dos nudos composición diferentes a partir del mismo par de nudos J y K.

Antes de nada, tenemos que asignarle una **orientación** a los nudos. Una orientación es definida eligiendo una dirección de viaje sobre el nudo. Si asignamos una orientación, diremos que el nudo está orientado. Se señaliza en la proyección mediante flechas que indican la orientación.

Una vez asignada la orientación a J y K, tenemos dos formas posibles de hacer la composición: conectar con las orientaciones emparejadas o no emparejadas. Todas las composiciones de dos nudos cuyas orientaciones emparejan al componer, darán el mismo nudo composición. Todas las composiciones de dos nudos cuyas orientaciones no emparejan al componer, también darán el mismo nudo composición. Sin embargo, es posible que la composición de dos nudos cuyas orientaciones emparejen no de lugar al mismo nudo que haciendo la composición de dos nudos cuyas orientaciones no emparejen. Serán el mismo si uno de los nudos factores es invertible.

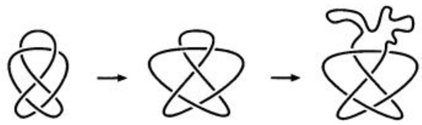
Un nudo orientado es invertible si es equivalente a si mismo con la orientación opuesta. Por ejemplo, el nudo trébol:



Si componemos un nudo invertible consigo en iguales y en contrarias direcciones, darán dos nudos equivalentes.
Hasta ahora no se conoce una técnica general para saber si un nudo cualquiera dado es o no invertible.

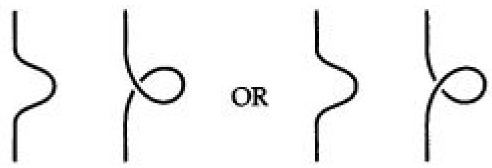
1.3 Movimientos de Reidemeister.
El reorganizamiento de una cuerda, es decir, el movimiento de la cuerda en el espacio tridimensional se llama una isotopía ambiente (ambient isotopy). No se permite encoger una parte del nudo a un punto.

Una deformación de la proyección de un nudo se llama planar isotopy si se deforma el plano de proyección como si estuviese hecho de goma.

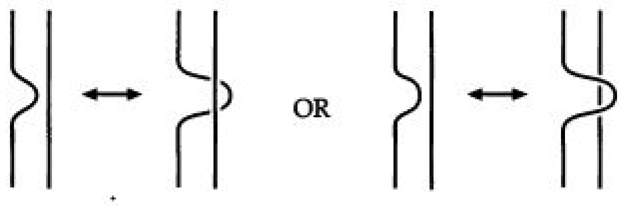


Un movimiento Reidemeister nos permite cambiar la proyección de un nudo de modo que se cambia la relación entre los crossings. Pero los movimientos no cambian al nudo representado por la proyección. Cada uno de los movimientos siguientes es una isotopía.

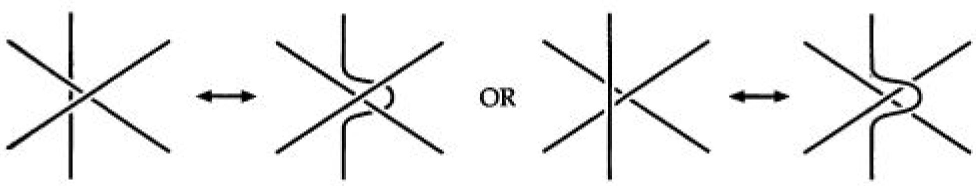
- First Reidemeister move: nos permite añadir o eliminar un twist del nudo.



- Second Reidemeister move: nos permite añadir o eliminar dos cruces del nudo.



- Third Reidemeister move: nos permite deslizar una hebra del nudo de un lado de un cruce al otro lado del cruce.



Kurt Reidemeister probó que si tenemos dos proyecciones distintas de un mismo nudo, podemos pasar de una a otra mediante los movimientos de Reidemeister y planar isotopies.

Un nudo que es equivalente a su nudo espejo se llama amphicheiral. (¿interesa?)

Haciendo uso de estos movimientos podremos estudiar si dos proyecciones representan el mismo nudo. Sólo hay que ver si hay una secuencia de movimientos de Reidemeister que nos lleve del uno al otro. El problema es que el número de movimientos intermedios no está limitado.
Problema sin resolver: ¿Podremos encontrar una constante c, de modo que dado un nudo K y sus proyecciones P1 y P2, cada una con no más de n crossings, que nos permita pasar de una proyección a otra con movimientos Reidemeister llegando a no más de n+c crossings en cualquier proyección intermedia? ¿Podríamos acotar el número de crossings por alguna función?

1.4 Enlaces.

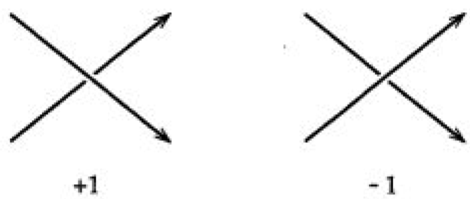
Un enlace es un conjunto de bucles anudados todos enredados entre ellos. Dos enlaces son equivalentes si podemos deformar uno en el otro.

Two projections of the Whitehead link.

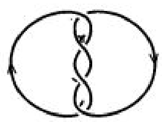
Un enlace se llama divisible (splittable) si sus componentes se pueden deformar de modo que queden separadas en el espacio tridimensional.

Todo lo visto para nudos (links de una componente) se puede aplicar a cualquier enlace. Nos gustaría saber si dos proyecciones de links son equivalentes o no. Si no tienen el mismo número de componentes, no lo podrán ser (el número de componentes es un invariante de links).

Sean M y N dos componentes de un link. Tomamos una orientación para cada uno de ellos. Para cado de los cruces entre las componentes le asignaremos un valor dependiendo de cómo se crucen:



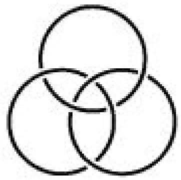
A cada enlace le asignaremos un linking number, que vendrá dado como la suma de los valores que hemos asignado a cada crossing y dividiendo este valor total por 2. Este linking number será invariante con respecto a la proyección del link que se considere. Se puede probar viendo que los movimientos de Reidemeister no cambian el linking number (es un invariante del enlace orientado).



Linking number 2.

Podemos usar el linking number para distinguir links. Para enlaces sin orientación, usaremos el valor absoluto del linking number. Cualquiera dos links con dos componentes que tengan valores absolutos distintos de los linking numbers, han de ser diferentes links.

Un link se llama Brunnian si el link es sí mismo no es el trivial, pero al eliminar una de las componentes del link, nos quedamos con un conjunto de nudos triviales. Por ejemplo, the Borromean rings.



The Borromean rings.

1.5 Tricolorability.

Hebra de una proyección de un link: trozo del enlace que va desde un undercrossing a otro con sólo overcrossings en su recorrido.
Un proyección de un nudo o link es tricolorable si cada una de las hebras de la proyección pueden ser coloreadas con uno de tres colores diferentes de modo que en cada crossing o los 3 colores se junten o se junte un sólo color. La tricolorabilidad se perserva por Reidemeister moves.

Como the trefoil knot es tricolorable y el nudo trivial no lo es, se tiene que son distintos, luego existe al menos un nudo distinto del nudo trivial. Todo nudo que sea tricolorable será distinto del nudo trivial. El link trivial de dos componentes sí es tricolorable.

La composición de un nudo cualquiera con uno tricolorable, nos da un nudo nudo tricolorable.

1.6 Nudos y sticks.

CAPÍTULO 2. TABULATING KNOTS:

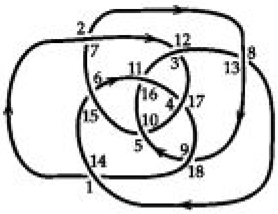
2.1 Historia de la tabulación de nudos.

Se pretendía ver si los nudos de n crossings que se representaban en ciertas tablas como diferentes, eran de verdad diferentes. Para n hasta 9 lo probaron Alexander y Briggs haciendo uso del polinomio de Alexander.

Se estudió el número de nudos primos que se podían encontrar en los conjuntos de nudos de n-crossings. Se llegó hasta n=13.

2.2 The Dowker Notation para nudos.

Es una notación fácil para describir la poryección de un nudo. Sea un alternating knot. Elegimos una orientación, asignamos un 1 a algún crossing. Salimos del crossing a través del understrand en la orientación que hemos puesto y al llegar al siguiente crossing ponemos un 2. Sigue por el nudo y pon un 3 en el siguiente crossing. Vamos así por todo el nudo hasta que cada crossing tenga dos números asignados (una par y uno impar).



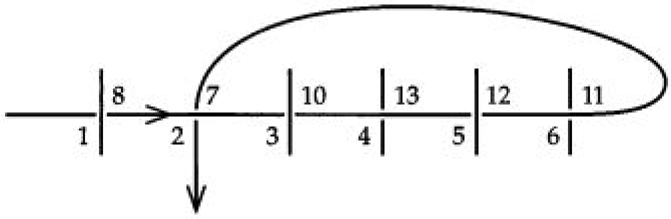
1	3	5	7	9	11	13	15	17
14	12	10	2	18	16	8	6	4

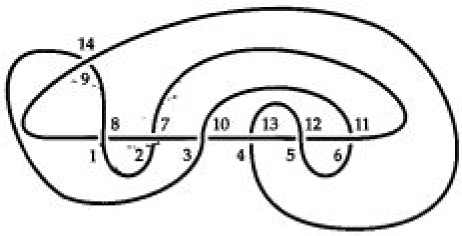
Podemos simplemente notar la proyección como 14 12 10 2 18 16 8 6 4

Veamos el camino contrario. Dada una secuencia que representa una proyección, ¿cómo pintamos la proyección? Sea 8 10 12 2 14 6 4

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	6	4

Lo vemos con imágenes directamente:





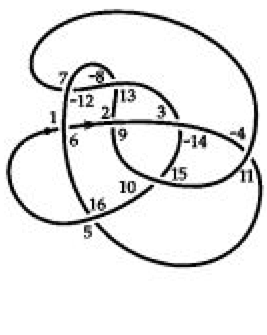
El proceso se ve claro en las imágenes pero…¿cómo elegimos cómo los círculos se van anudando alrededor? La elección puede modificar el nudo resultante. En el caso de que la permutación sea “separable”, la notación de Dowker no nos determina por completo el nudo específico del que se trata, por ejemplo en:

1	3	5	7	9	11
4	6	2	10	12	8

Cuando el nudo es amphicheiral, sólo puede resultar un nudo, por ejemplo en:

1	3	5	7	9
8	6	10	2	4

Otro punto a tratar es, ¿cómo denotar cuando el nudo no es alternating? Añadimos + o - a los números impares. Lo mejor es ver un ejemplo:



2.3 Notación de Conway

A tangle de una proyección de link es una región de la proyección rodeada por un círculo de modo que el link cruza el círculo exactamente 4 veces (NW, NE, SW, SE)

Diremos que dos tangles son equivalentes si podemos pasar de uno al otro en una secuencia de movimientos de Reidemeister de modo que los finales de las cadenas queden fijos y las cadenas de los tangles no salgan fuera del círculo. Ejemplo:

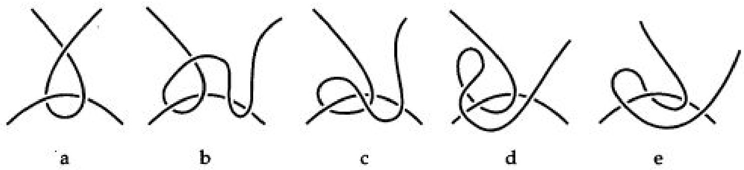


Figure 2.16 These tangles are equivalent.

Algunos de los tangle más sencillos son, a partir de los cuales podremos construir más tangles:

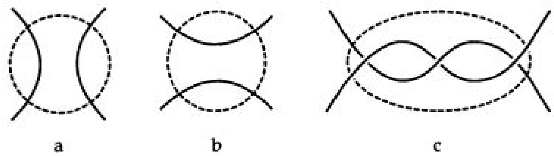
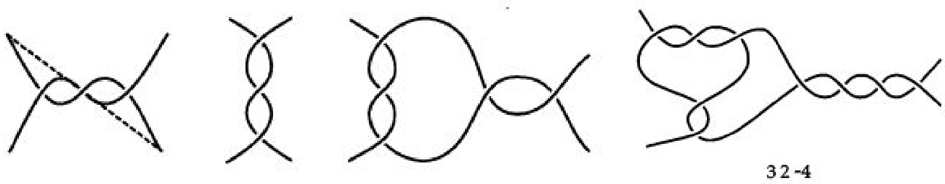


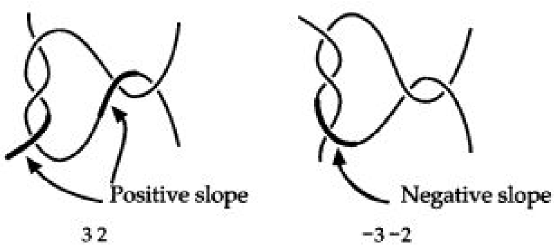
Figure 2.17 (a) The ∞ tangle. (b) The 0 tangle. (c) The 3 tangle.

Técnica de construcción:



A cualquier tangle que pueda ser construido de esta manera se le llama **rational tangle**.

Es importante los signos como se ve en la siguiente imagen:

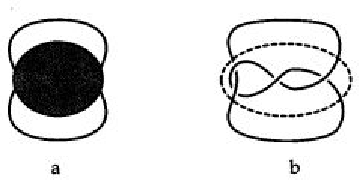


Hay un método para ver si dos rational tangles son equivalentes. Sean los tangles dados por las secuencias -2 3 2 y 3 -2 3. Calculamos las continued fractions asociadas a estos enteros:

-2 3 2 → $2 + \frac{1}{3 + (1/-2)}$ 3 -2 3 → $3 + \frac{1}{-2 + (1/3)}$

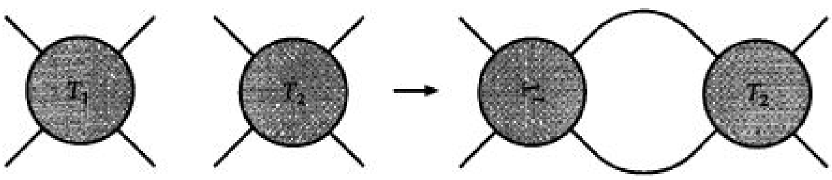
Como sus continued fractions son iguales, se tiene que los tangles son equivalentes. Si fuesen distintos, entonces no serían equivalentes. Es decir, dos tangles son equivalentes si y sólo si los dos rational numbers son iguales.

Si unimos los finales del rational tangle como en la siguiente imagen, obtenemos un **rational link**. Por ejemplo, el nudo figure-eight es un nudo rational, con rational tangle 2 2. Podemos usar la notación de rational tangles para denotar los rational knot. A esta notación le llamamos notación de Conway.

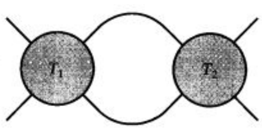


(a) A rational link. (b) The figure-eight knot.

La multiplicación de rational tangles nos da otro rational tangle. Multiplicación de dos tangles:

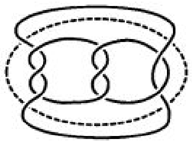


La suma de rational tangles nos da otro rational tangle. Suma de dos tangles:



$T_1 + T_2$

Un nudo obtenido de un tangle representado por un número finito de enteros separados por comas, se llama **pretzel knot**. Por ejemplo:

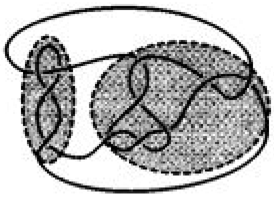


The knot 8_5 has Conway notation 3, 3, 2.

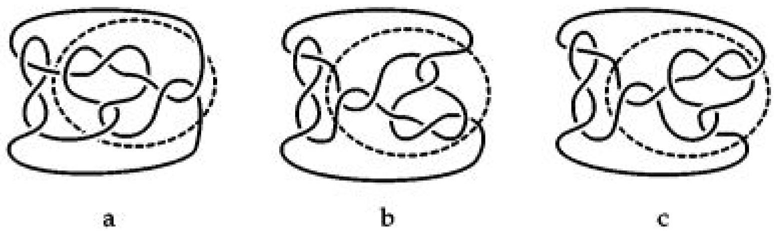
A cualquier tangle obtenido mediante productos y sumas de rational tangles, le llamaremos **algebraic tangle**. Un **algebraic link** es un link formado al conectar NW con NE y SW con SE en un algebraic tangle. Denotamos al algebraic link igual que denotamos a su algebraic tangle. Hay algunos tangles que no son algebraic tangle.

La multiplicación no es conmutativa ni asociativa. Tampoco tiene inversa (ningún tangle que sumemos a otro tangle nos va a dar el tangle 0).

En los tangles podemos hablar de nudos mutantes:



.30 A knot formed from two tangles.

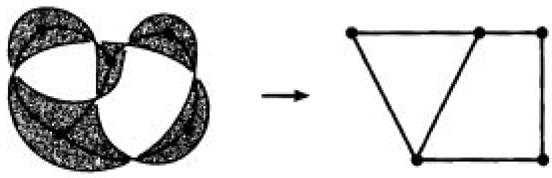


.31 Mutant knots.

Estos nudos mutantes pueden convertir un nudo en otro, aunque no puede convertir un nudo no trivial en el nudo trivial. Se usan en teoría del DNA.

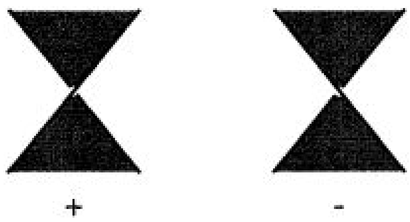
2.4 Nudos y grafos planos.

A partir de un nudo podemos construir su grafo plano. Lo que hacemos es sombrear el enlace y añadir los vértices y aristas como vemos en el siguiente ejemplo

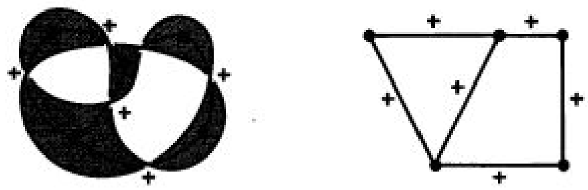


A graph from a knot projection.

Problema: no hemos tenido en cuenta los overcrossing y los undercrossing. Usaríamos + y – dependiendo de cómo sea el crossing.



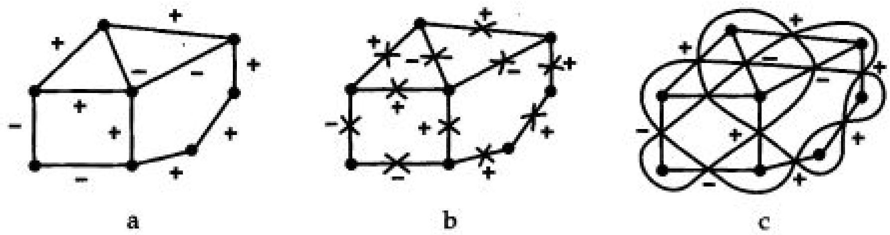
Signs on crossings.



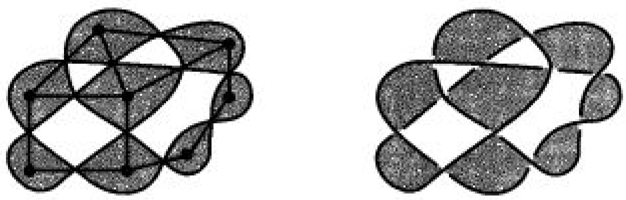
A signed planar graph from a knot projection.

¿Y si queremos pasar del grafo plano con signos a la proyección del nudo?

Sea un grafo plano, marco con una x todas las aristas y los conectamos como se ve en la imagen. Sombreamos las áreas que contengan un vértice. Para cada x, ponemos bien el cruce según fuese + o -:



ure 2.41 Turning a signed planar graph into a link.



ure 2.42 A link generated from a signed planar graph.

Ahora podemos plantear los problemas sobre nudos como problemas de grafos.

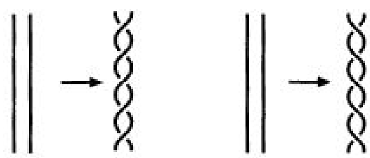
CAPÍTULO 3. Invariantes de nudos:

<u>3.1 Unkotting number.</u>

Un nudo K tiene número de desanudamiento n si existe una proyección suya de modo que al cambiar n crossings, el nudo sea equivalente al nudo trivial y no haya una proyección que pueda tener menos cambios y dar el trivial. Se denota como u(K). Cada nudo tiene un número de desanudamiento finito.
Este problema es complicado porque hay que asegurarse de que no exista otra proyección del nudo que no de un menor número de desanudamiento.

Un nudo compuesto no puede tener un unkotting number de 1. Un nudo con unknotting number 1, es un nudo primo. Puede ser que el unknotting number de un nudo no se obtenga en la proyección con menor número de crossings.

Dada una proyección, definimos el k-move como un movimiento local en la proyección que reemplaza dos cadenas desencadenadas por dos cadenas que son enrevesadas right-handed con k crossings. Si fuesen left-handed twist, sería -k-move.



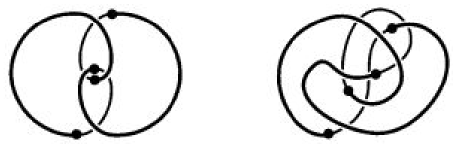
a b

(a) A 5-move. (b) A −5-move.

Diremos que dos nudos o links son k-equivalentes si podemos podemos llegar de la proyección de uno a la proyección del otro en k-moves o -k-moves.

3.2 Bridge number.

Dada la proyección de un nudo. Defino un overpass como un subarco del nudo que pasa por al menos un overcrossing pero no por debajo de ningún undercrossing. Un maximal overpass es un overpass que no puede ser mayor. El **brigde number** es el menor número de maximal overpass que nos podemos encontrar en cualquier proyección de un mismo nudo K. Se denota b(K).



a　　　b

a y b tiene bridge number 2.

Los nudos que tienen número de puentes 2, se llaman two-bridge knots.

3.3 Crossing number.

Es el menor número de crossings que se encuentra en cualquier proyección de un nudo. Es un invariante difícil de determinar. A veces sí que se puede determinar, como para nudos alternativos.

Diremos que una proyección de un nudo es reducida si no hay crossings que se puedan eliminar con facilidad.

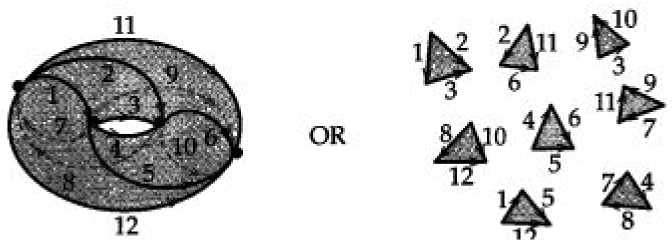
¿Es c(K1#K2)=c(K1) + c(K2) para nudos compuestos?

CAPÍTULO 4. Superficies y nudos:

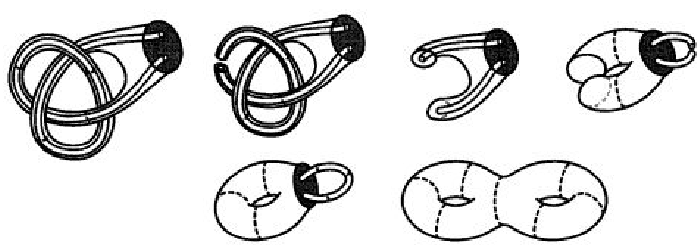
4.1 Superficies sin frontera.

Usaremos las superficies para entender y distinguir nudos. En una superficie, para cualquier punto hay una pequeña región de superficie (disco) que lo contiene. Algunas superficies son equivalentes, se van viendo mediante isotopías. Serán **superficies isotópicas**. (p.e. cubo y esfera)

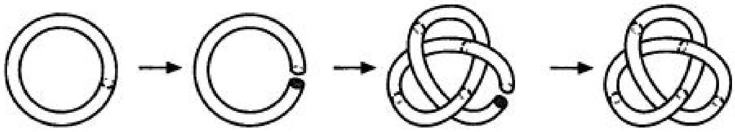
Para trabajar mejor con las superficies, hacemos la triangulación de la superficie. Los triángulos no tienen porqué tener los lados rectos y no se pueden intersecar. Dada una superficie triangulada, podemos obtener los triángulos, etiquetarlos y estudiar la superficie a partir de los triángulos:



Dos superficies son **homeomorfas** si podemos triangular una de ellas, cortar por un conjunto de bordes y luego pegar de nuevo por los bordes de acuerdo a las orientaciones dadas para obtener la otra superficie. La esfera y el toro no son homeomorfas. Hay superficies que no son isotópicas pero sí homeomorfas, por ejemplo:



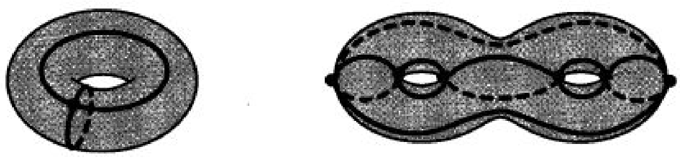
Llamamos género de una superficie al número de agujeros que tiene. La esfera tienen género 0, el toro género 1… A cada elección de cómo representar una superficie en el espacio se le llama un **embebimiento** de la superficie. En la siguiente imagen se ven dos embebimientos del toro en el espacio tridimensional:



Dada una superficie cualquiera, ¿cómo sabemos que superfice es?La técnica de cortar y pegar no es demasiado técnica. Necesitamos otro método.
Sea una triangulación con V vértices, E bordes y F triángulos. Defino la **característica de Euler** como: X= V-E+F. La característica de Euler depende de la superficie, no de la triangulación de la misma. La esfera tiene característica de Euler 2, y el toro 0.

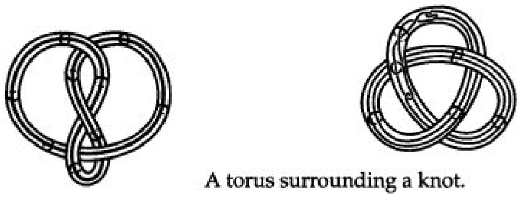
La suma conexa de dos toros T1 y T2, nos da una superficie S de género 2. Entonces X(S) = X(T1) + X(T2) - 2. Se usa esta fórmula para las sumas conexas. La característica de Euler de una superficie de género g es 2-2g

Vamos a seguir trabajando con la característica de Euler pero ahora no vamos a hacer que las caras tengan que ser triángulos. Podemos subdividir la superficie en vértices, bordes y caras, siendo las caras un disco con borde sin agujeros. Por ejemplo:



Aunque todas las superficies tienen una triangulación, no todas tienen un número finito de triángulos. Diremos que una superficie es **compacta** si su triangulación se hace con un número finito de triángulos. Por ejemplo, la esfera y el toro son compactos, pero el plano o el toro menos un disco no lo son. (el plano es obvio, para el toro menos un disco, tendríamos que ir cogiendo infinitos triángulos cada vez más pequeños…). Nos interesan las superficies compactas ya que podemos obtener la característica de Euler.

¿Donde aparecen las superficies en la teoría de nudos? En el espacio alrededor de un nudo. El **complemento de un nudo** es el espacio tridimensional menos el propio nudo. Cualquier nudo está contenido en un toro:



A torus surrounding a knot.

Sea L un enlace tridimensional y F una superficie en el complemento del enlace. F es **compressible** si hay un disco D en R3-L de modo que D interseca F exactamente en su frontera y no interseca a L. Por ejemplo:

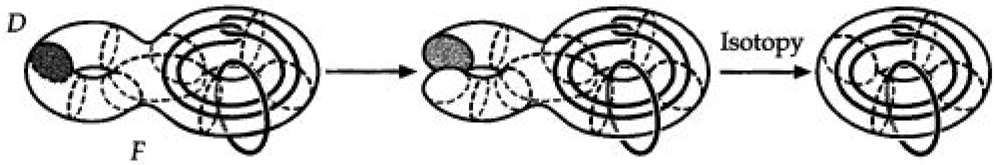
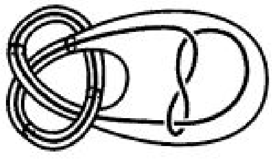


Figure 4.31 A compressible surface in $R^3 - L$ and the simpler surface we can construct from it.

Si una superficie no es compressible, diremos que es incompressible. Por ejemplo, la siguiente:



4.2. Superficies con frontera.
Para obtener superficies con frontera consideramos las superficies y quitamos discos dejando sus fronteras. A estas fronteras de los discos le llamamos boundary components. Las superficies con frontera pueden ser las mismas pero parecer muy distintas:

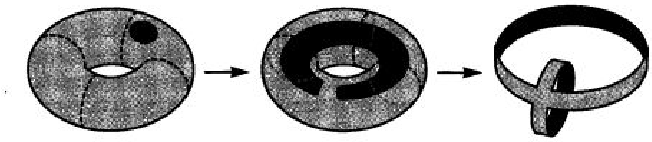


Figure 4.34 Pictures of a torus with one boundary.

La característica de Euler baja 1 por cada una de las boundary components. Rellenar los boundary components adjuntando discos se llama coronando (capping off) una superficie con frontera.

Al contrario que ocurría con las superficies sin fronteras en el espacio tridimensional, en las superficies con fronteras no podemos distinguir unas de otras usando la característica de Euler.

Una superficie en un espacio tridimensional es **orientable** si tiene dos caras que pueden ser pintadas de diferentes colores de modo que sólo se toquen en los bordes de la superficie. Por ejemplo, un disco y un toro con un boundary component son orientable. La banda de Möbius no es orientable. Una superficie es no orientable si y sólo si contiene una banda de Möbius. Luego una botella de Klein sin un boundary component es una superficie no orientable.

Sea una superficie desordenada cualquiera con frontera. Para ser que superfice es calcularemos:

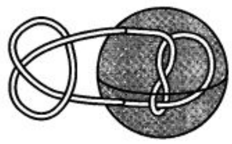
- Orientabilidad.
- Cuántos boundary components tienen.
- Su característica de Euler.

Si una superficie tiene frontera, definimos su género como el género de la superficie sin fronte correspondiente obtenida tapando cada boundary component con un disco.

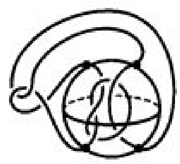
Ahora queremos aplicar las superficies con frontera a la teoría de nudos. El nudo trivial es el único nudo que forma la frontera de un disco. En algunas proyecciones del nudo trivial, el disco no es tan obvio, aunque está ahí.

The unknot always bounds a disk.

Si tenemos un nudo compuesto, hay una esfera con dos boundary components que permiten que el nudo continúe hacia fuera. A esta superficie también se le llama annulus.



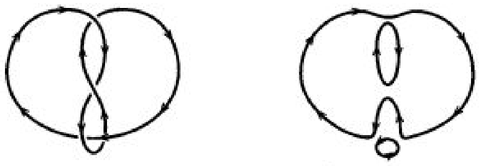
Antes hablábamos de tangles como regiones circulares de una proyección con 4 puntos externos. Ahora pensamos lo mismo pero con esferas (Conway sphere). Si engrosamos el nudo, los puntos se vuelven boundary components.



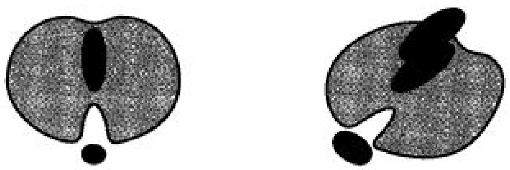
A Conway sphere.

4.3 Genus and Seifert Surfaces.

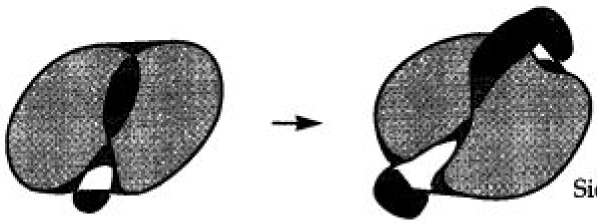
Nudos particulares tienen superficies particulares en sus complementos. Seifert descubrió un algoritmo para que, dado un nudo cualquiera, se pueda crear una superficie orientable con un boundary component de modo que el boundary circle sea ese nudo. Supongamos que queremos crear una superficie de ese tipo para un nudo cualquiera. Tomo la proyección del nudo y le asigno una orientación. Elimino los crossings y los uno como en la imagen. Obtenemos un conjunto de círculos (Seifert circles). Como no queremos que se intersequen, les damos diferentes alturas. Ahora conectamos los discos.



.53 Eliminate all crossings.



.54 The circles bound disks at different heights.



!.55 Connect the disks by twisted bands.

El algoritmo de Seifert puede generar muchas superficies distintas de un mismo nudo, cambiando la proyección del nudo.

Definimos el **género de un nudo** como el menor género de cualquier Seifert surface de un nudo. Por ejemplo el nudo trivial tiene género 0 (es el único que tiene género 0):

Figure 4.60 The unknot has genus 0.

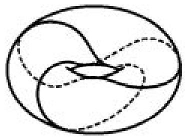
Aplicar el algoritmo de Seifert a una proyección alternativa de un nudo aternativo o link, nos genera la superficie Seifert de mínimo género.

Se g(K) el género de un nudo K. Entonces g(J#K)=g(J) + g(K)

CAPÍTULO 5. Tipos de nudos:

5.1 Nudos toroidales.

Nudos toroidales: nudos que se encuentran en un toro sin cruzar sobre o debajo de sí mismo. Por ejemplo, the trefoil knot en un toro:



Una curva por la parte corta del toro se llama curva meridiana y si es por la parte larga del toro se llama curva longitud. Cualquier nudo en un toro se llama **(p,q)-torus knot**. p es el número de veces que genera el nudo toroidal al cortar con longitude. q es el número de veces que genera el nudo toroidal al cortar con meridian. p y q son primos relativos. Por ejemplo:

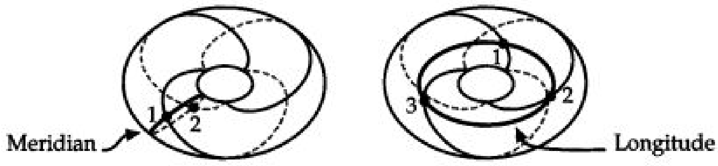
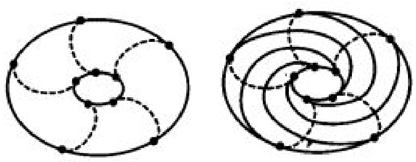


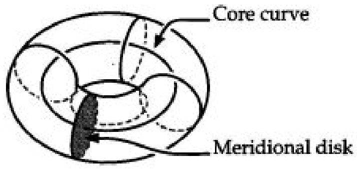
Figure 5.3 The trefoil is a (3, 2)-torus knot.

¿Cómo dibujamos un (p,q)-torus knot? Por ejemplo para pintar el (5,3)-torus knot. Marcamos 5 puntos en el interior y exterior del nudo y los unimos. A continuación tomo un punto exterior. Me voy a su interior correspondiente, adelanto 3 puntos en sentido horario y uno este punto con el punto exterior. Hago esto último para todos los puntos del exterior



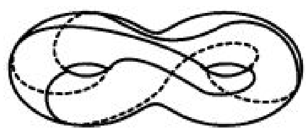
Cada (p,q)-torus knot es también un (q,p)-torus knot. Un (q,p)-torus knot tiene una proyección con p(q-1) crossings y una proyección con q(p-1) crossings. El menor número entre q(p-1) y p(q-1) es exactamente el número de crossings de un (p,q)-torus knot.

Un toro sólido es un toro con su interior. The core curve de un toro sólido es el nudo trivial que rodea el centro del toro. A Meridional disk es un disco en el toro sólido que formado por una curva meridiana y su relleno:



Podemos generalizar la noción de nudo toroidal. Hemos visto que un nudo toroidal es un nudo no trivial que puede ser situado en la superficie of a standardly embedded torus sin cruzarse a sí mismo en la superficie. por standardly embedded, nos referimos a que el toro es trivial en el espacio. Pero habrá nudos que no puedan ser situados en a standardly embedded tours pero que sí puedan ser situados en a standardly embedded genus two surface.

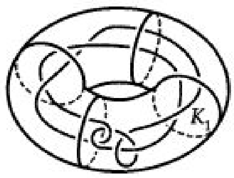
Diremos que un nudo K es un n-embeddable knot si K puede situarse en un genus n standardly embedded surface con crossings y no puede situarse en uno de menor género, por ejemplo:



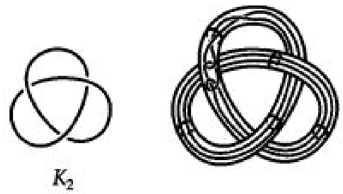
The figure-eight knot is a two-embeddable knot

5.2.Satellite knots.

Sea k1 un nudo dentro de un toro sólido trivial (atravesando todos los meridianos). Anudamos este toro sólido en el cuerpo de un segundo nudo k2 (se llamará the companion knot del nudo satélite) . A este nudo resultante le llamamos a satellite knot.

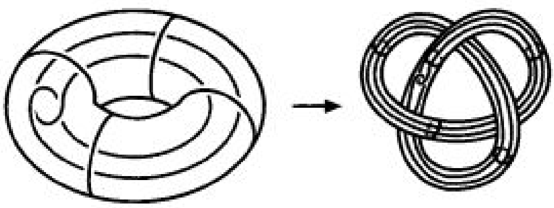


A knot K_1 inside a solid torus.

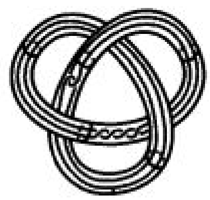


Knot the solid torus like K_2.

Un whitehead double no es único. Podemos cortar el toro por un meridiano, girar algún final, volver a pegar los discos por el meridiano obteniendo un homeomorfismo del toro sólido.

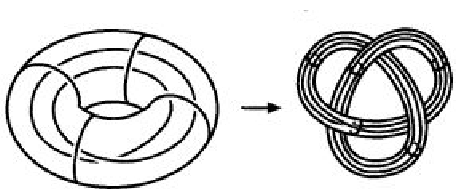


A Whitehead double of the trefoil.



A second Whitehead double of the trefoil.

Si ahora considero el nudo trivial pero puesto como en la siguiente imagen, el nudo satélite resultante se llamaría two-strand cable of the companion knot. Del mismo modo que el anterior, puede no ser único.



The two-strand cable of a knot.

5.3 Hyperbolic knots.

Willian Thurston probó que los únicos nudo que no son hiperbólicos son los nudos toroidales y satélites. Luego cualquier nudo se engloba en uno de estos 3 tipos. Se dió cuenta de que la mayoría de los nudos eran de este tipo en concreto.

Robert Riley demostró que the figure-eight knot es hiperbólica.

Pero….¿qué es un nudo hiperbólico?

Un nudo hiperbólico es un nudo que tiene un complemento que puede ser dado una métrica de curvatura constante -1. Podemos medir distancias en el espacio tridimensional menos el nudo. Dados dos puntos en el complemento P0(x0,y0,z0) y P1(x1,y1,z1), podemos determinar su distancia (métrica Euclidea):

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

Pero nosotros mediremos distancias de otro modo, usando a medida de distancia que tenga curvatura -1.(Fijarse en las parábolas que salen al cortar con dos planos por un punto)

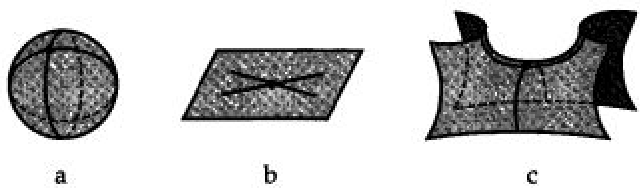
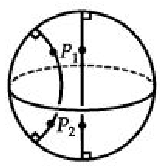


Figure 5.24 (a) Positive curvature. (b) Zero curvature. (c) Negative curvature.

La curvatura de los tres casos anteriores acaba siendo 0. Nos interesa curvatura -1. La geometría que resulta se llama hyperbolic geometry y su métrica se llama hyperbolic metric. Describimos el ejemplo más simple de un espacio tridimensional que tienen una métrica hiperbólica. Se denota el espacio tridimensional hiperbólico (H3). Los puntos en este modelos son puntos dentro de la esfera tridimensional:

H3={(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 <1}

Las geodésicas en H3 juegan el papel que las líneas rectas juegan en el espacio euclídeo.

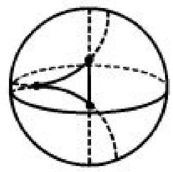


Paths between points in H^3.

La distancia oficial entre P1 y P2 es:

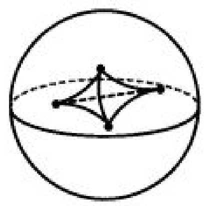
$$d(P_1, P_2) = \int_w \frac{2\,ds}{1 - r^2}$$

Propiedad curiosa del espacio hiperbólico:



The angles of a hyperbolic triangle add up to less than 180°.

Vamos a describir cómo conseguir piezas del espacio tridimensional hiperbólico para obtener los llamados hyperbolic manifolds. Las piezas que vamos a usar son tetraedros.



Geodesic planes and tetrahedra in H^3.

Como hacíamos con las triangulaciones, ahora podemos pegar juntos parejas de tetraedros hiperbólicos hasta que cada cara esté junto a otra, obteniendo un nudo hiperbólico complementario. Podemos usar el método hiperbólico para medir distancias dentro de tetraedros individuales con el fin de obtener un método hiperbólico para medir distancias en todo el nudo complemento. Entonces decimos que el nudo es un nudo hiperbólico.

Todo hyperbolic knot tiene un hyperbolic volume. Es la suma de los volúmenes de los tetraedros hiperbólicos individuales que hacen el nudo complemento. El volumen es finito pues estamos midiendo usando el método hiperbólico para medir volúmenes. El volumen hiperbólico es un invariante de los nudos hiperbólicos.

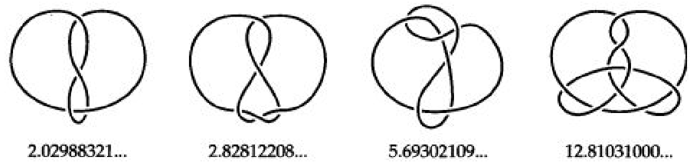
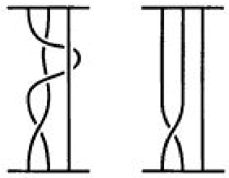


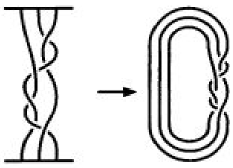
Figure 5.28 Volumes of hyperbolic knots.

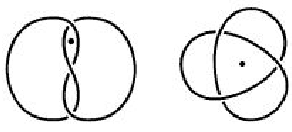
5.4 Braids.
Cualquier nudo puede ser descrito por una trenza. Una trenza es un conjunto de n cadenas que son atadas horizontalmente a una barra arriba y abajo.
Dos trenzas son equivalentes si podemos reordenar las cadenas en las dos trenzas para que se vean iguales, dejando las barras fijadas y manteniendo las cadenas fijas a la barra.



These two braids are equivalent.

A cada trenza le corresponde un nudo o enlace particular, que se obtiene uniendo los topes superiores con los inferiores (la cláusula de la trenza- the closure of a braid). Tendremos **a closed braid representation** del nudo si hay una orientación del nudo de modo que a medida que atravesamos el nudo en esa dirección, siempre viajamos en el sentido horario:



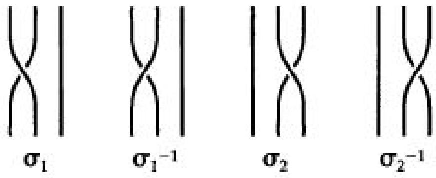


(a) *Not* a closed braid. (b) A closed braid.

Cualquier nudo o link puede ser representado como un closed braid!.
Ahora nos interesa representar cualquier link con el menor número posible de cadenas en la trenza.

Se define el índice de trenza (**braid index**) de un link como el menor número de cadenas de una trenza correspondiente a una representación closed-braid del link. Es un invariante difícil de computar.
Shuji Yamada probó que the braid index de un nudo es igual al menor número de Seifert circles de alguna proyección de un nudo. Si L es un nonsplitablle link, c(L) es el número de crossing y b(L) es the braid index, se tiene c(L) >= 2(b(L)-1).

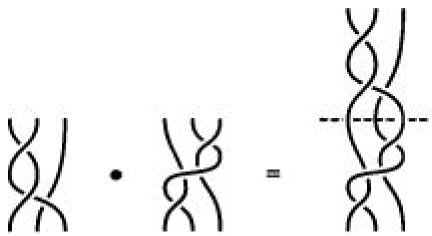
Notación:



Crossings.

This braid is described by the word $\sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_1$.

Podemos hacer el producto de dos trenzas y obtener una trenza.La multiplicación de trenzas es asociativa, tiene elemento identidad y cada elemento tiene inverso. Por tanto, tiene estructura de grupo. A este grupo de denoto como Bn (grupo de trenzas de n cadenas)



Un elemento de Bn tienen muchas diferentes proyecciones y muchas diferentes palabras que lo representan. Nos gustaría saber cuando dos diferentes palabras representan la misma trenza. Usaremos:

- Primera regla (similar a movimiento 2 Reidemeinster):

Podemos añadir o borrar sigma(i) sigma-1(i) o simga-1(i)simga(i)

- Segunda regla (similar a movimiento 3 Reidemeinster):

Las trenzas sigma(i) sigma(i+1) sigma(i) y sigma(i+1) sigma(i) sigma(i+1) son equivalentes.

- Tercera regla (no viene de ningún Reidemeinster move):

Si una trenza contiene sigma(i) sigma(j) siendo |i-j| > 1, entonces podemos cambiar el orden de sigma(i) y sigma(j) reemplazando sigma(i)sigma(j) por sigma(j)sigma(i). Ver imagen.

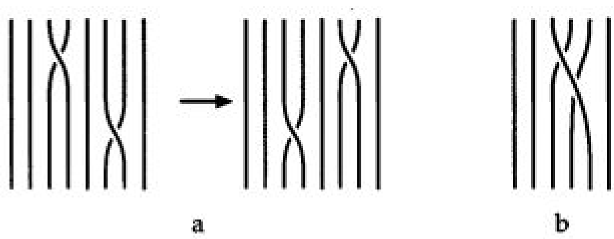
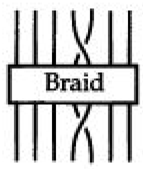


Figure 5.45 (a) Switching σ_i and σ_j when $|i-j|>1$. (b) No such switch when $|i-j|=1$.

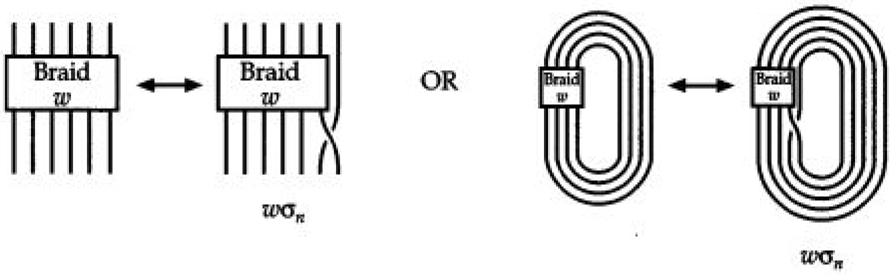
Dos palabras representarán la misma trenza si y sólo si podemos pasar de una palabra a otra por una secuencia de esas 3 operaciones.

Vamos un poco más lejos y nos interesa ver cuando dos cierres de trenzas representan el mismo oriented link. Diremos que dos trenzas son **Markov equivalent** si sus cierres producen el mismo link orientado. Al igual que los 3 Reidemeister moves nos daban todas las equivalencias entre las diferentes proyecciones de un mismo link, nos gustaría tener un conjunto de movimientos en trenzas que diesen todas las equivalencias en los correspondientes closed braids.

Teorema de Markov: dos trenzas son Markov equivalent si y sólo si son relacionadas por una secuencia de las 3 operaciones que hemos visto anteriormente y dos operaciones nuevas.
Primera operación extra es la conjugación: multiplica la palabra al principio por simga-1(j) y al final por simga(j):



Alguna operación más es necesaria ya que ninguna de las que tenemos cambia el número de cadenas de la trenza. La siguiente operación se llama estabilización. Permite añadir o borrar a loop en la trenza cerrada. Esta operación considera la palabra w correspondiente a una trenza de n cadenas y la reemplaza por la palabra wsigma(n) o wsigma-1(n). Lo cual añade una cadena. También permite la operación inversa: si tenemos wsigma(n) o wsigma-1(n) nos lleva a la palabra w, asumiendo que w no contiene las letras sigma(n) o sigma-1(n) en más posiciones.



Ejemplo:

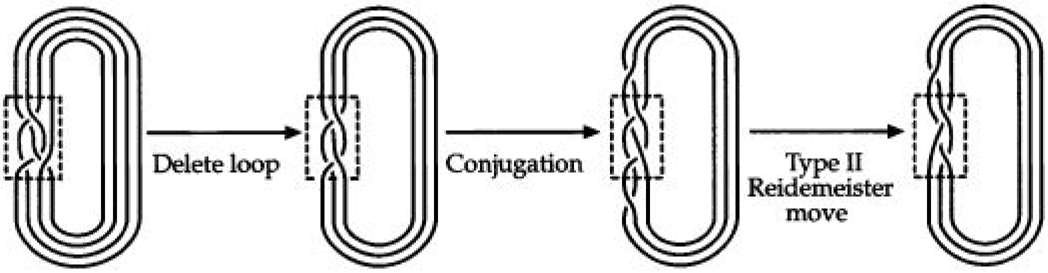


Figure 5.50 A sequence of Markov moves to get from one braid to the other.

5.5 Almost alternating knots.