Entendiendo la Teoría de Nudos mediante la Simulación y la Informática Gráfica.

Autora: Cristina Zuheros Montes - 50616450
Enlace a Github

Fecha: 22 Agosto 2016

Índice

1. Teoría de nudos.

1.1. Motivación y primeras definiciones.

¿Alguna vez has visto una cuerda anudada y te has preguntado si podrías deshacerlos sin necesidad de romper la cuerda? ¿Te has planteado si algo tan usual como los nudos pueden estar presentes en áreas esenciales para la vida? Es más, ¿cuál fue el motivo inicial para estudiar dicha teoría de nudos? Quizás te sorprendan las respuestas pero antes de descubrirlo, veamos que se entiende formalmente por un nudo.

Definición:
Un **nudo** es una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$ que no tiene auto-intersecciones.

Podemos representar un nudo en el plano visualizando su proyección. Como hay muchas formas de representar un mismo nudo, podremos tener diferentes proyecciones que representen al mismo nudo. Algunos ejemplos básicos de nudos son los siguientes:

Figura 1: De izquierda a derecha: nudo trivial, nudo trébol, nudo de ocho.

Podemos ver en ellos una serie de cruces. En concreto en el nudo trébol tenemos 3 cruces y en un nudo de ocho tenemos 4 cruces. El nudo trivial destaca por no tener ningún cruce.

Definición:
Un **enlace** es una o más curvas cerradas disjuntas en $\mathbb{R}^3$. Cada una de sus curvas recibe el nombre de componente.
Por ejemplo, el siguiente enlace tiene dos componentes:

Por tanto, podemos ver un nudo como un caso particular de enlace en el que sólo tenemos una componente.

Una de las cuestiones más interesantes en la teoría de nudos es la siguiente: ¿Dada un nudo, o alguna proyección suya, podremos saber si se trata del nudo trivial?. A lo largo de este proyecto trataremos de dar respuesta, en parte, a dicha cuestión.

Esta rama de la topología de baja dimensión destaca por su gran interés en áreas como:

1. Química: En el siguiente apartado veremos que la teoría de nudos nace en este área.

2. Biología: se descubrieron los anudamientos en las moléculas de ADN.

3. Criptografía: //TENGO QUE COMPLETAR LAS ÁREAS!!!!!!!!!!!!!!

1.2. Sobre su historia.

En el siglo XIX, ciertos físicos escoceses se preguntaban por la estructura de los átomos.
Estos científicos partieron de la base de la teoría de Descartes, que afirmaba que el *éter* era un fluido que ocupaba todo el espacio espacio y transmitía la luz (éter lumínico), para desarrollar su modelo del átomo.
Aunque dichos físicos conocían la existencia de los elementos y que estaban formados por átomos, no conocían la propia estructura de los átomos.

Científicos como Peter Guthrie Tait y Willian Thomson llegaron a la teoría de que los átomos se concebían como vórtices, que podríamos ver como remolinos tubulares, en dicho fluido. Estos vórtices se encontraban anudados y en función del tipo de anudamiento darían lugar a un tipo de elemento u otro.
De este modo se plantearon que los diferentes nudos corresponderían a los diferentes elementos de la naturaleza. De acuerdo con la teoría, si conociésemos todos los nudos posibles, crearíamos la tabla de elementos que reemplazaría la tabla periódica actual.

Para hacernos una idea más clara, para Willian Thomson el nudo trébol podría corresponder con el átomo de helio, el nudo de ocho con el átomo de oxígeno....

Numerosos científicos contribuyeron a dicha teoría intentando crear la tabla de nudos pero a finales de este mismo siglo, Michelson-Morley demostró que el éter lumínico no existía y por tanto la teoría de los átomos de vórtice fue descartada.

Tras este hecho, la teoría de nudos perdió su interés hasta que fue objeto de estudio en Topología a principios del siglo XX.

1.3. Componiendo nudos.

Supongamos que tenemos dos proyecciones J y K de nudos. Podemos definir un nuevo nudo a partir de ellos eliminando un arco de cada una de las proyecciones y conectando los 4 extremos finales de dos en dos mediante otros arcos de modo que no se añadan ni eliminen cruces.
A este nudo resultante le llamaremos **composición** de los dos nudos y se denotará como **J#K**. A los nudos originales J y K les llamaremos **nudos factores**.

Por ejemplo, consideremos como nudos factores el nudo trébol y el nudo de ocho.

(a) J (b) K

Figura 2: Nudo trébol y nudo de ocho.

Haciendo la suma conexa de ambos nudos obtenemos el nudo composición:

(a) Haciendo la composición (b) J#K

Figura 3: Composición de nudo trébol y nudo de ocho.

El nudo trivial es un elemento identidad para la suma conexa: si hacemos la composición de un nudo cualquiera J con el nudo trivial, vamos a obtener el propio nudo J. Por ejemplo, seguimos considerando J como el nudo trébol y el nudo trivial como K.

(a) J (b) K

Figura 4: Nudo trébol y nudo trivial.

Su suma conexa nos seguiría dando el nudo factor J, es decir, el nudo trébol.

(a) Haciendo la composición (b) J#K

Figura 5: Composición de nudo trébol y nudo trivial.

Definición:
Diremos que un **nudo es primo** si no puede ser expresado como la suma conexa de dos nudos, a menos que uno de ellos sea el nudo trivial.

Definición:
Diremos que un **nudo es compuesto** si no es el nudo trivial ni es un nudo primo.

Por ejemplo, los nudos trébol y nudo de ocho de la figura 2 son nudos primos mientras que el nudo de la figura 3 es un nudo compuesto.

Hay una gran variedad de nudos primos. Cualquier nudo puede ser expresado singularmente como suma conexa de nudos primos. En la siguiente tabla podemos ver los diferentes nudos primos que tienen menos de 8 cruces.

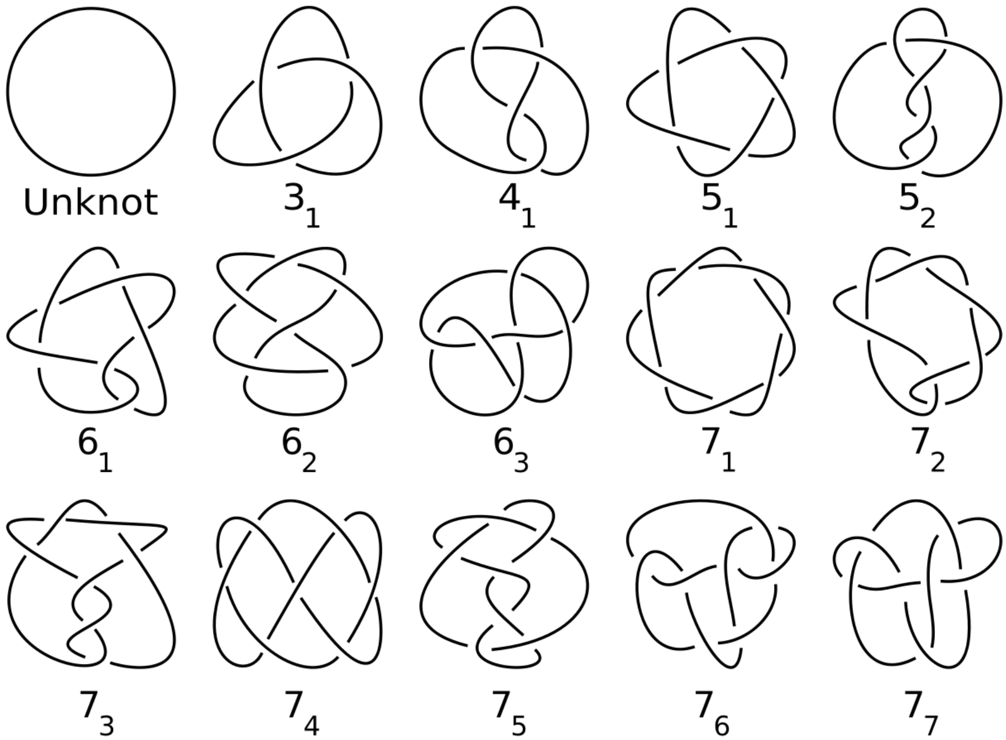

Figura 6: Composición de nudo trébol y nudo trivial.

Finalmente, es importante destacar el hecho de que la elección que hacemos de los arcos que eliminamos de cada uno de los nudos factores afecta al nudo composición. Por tanto, es posible construir dos nudos composición diferentes a partir del mismo par de nudos factores. Veamos esta idea con más detalle, para ello necesitamos:

Definición:
Un nudo orientado es un nudo al que se le ha asignado una orientación, es decir, es un nudo que dispone de una dirección de viaje sobre él mismo. Esta orientación se indica mediante flechas en la proyección.

Definición:
Un nudo es invertible si es equivalente a sí mismo con la orientación opuesta.

El problema de determinar si un nudo cualquiera es o no invertible no es para nada trivial.

Como ejemplo de nuevo invertible nos podemos encontrar el nudo trébol.

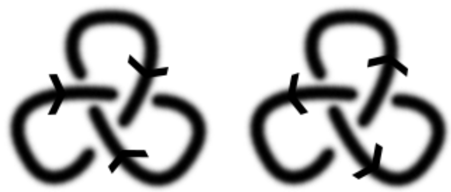

Figura 7: Ambas orientaciones del nudo trébol.

Sean los dos nudos factores J y K a los que se asignamos una orientación. Tendremos dos formas posibles de hacer la composición: conectar con las orientaciones emparejadas o no emparejadas.
Todas las composiciones de los nudos cuyas orientaciones emparejan al componer, darán el mismo nudo composición. Todas las composiciones de los nudos cuyas orientaciones no emparejan al componer, también darán el mismo nudo composición. Sin embargo, es posible que la composición de los nudos cuyas orientaciones emparejen no de lugar al mismo nudo que haciendo la composición de los nudos cuyas orientaciones no emparejen. Serán el mismo si uno de los nudos factores es invertible.

Veamos un caso en el que la composición de dos mismos factores, genera nudos diferentes. Consideramos el siguiente nudo: Si componemos el nudo consigo mismo

Figura 8: Nudo factor J y K.

conectando las orientaciones emparejadas y desemparejadas obtenemos nudos que no son equivalentes. Lo podemos comprobar visualmente con la Figura 9.

Figura 9: Las composiciones no son equivalentes.

1.4. Equivalencia de nudos: movimientos de Reidemeister.

Dos nudos K1 y K2 serán equivalentes (K1 $\sim$ K2) si podemos distorsionar uno de ellos en el otro sin hacer ningún corte. A esta distorsión se le conoce como isotopía ambiente.

Una deformación de la proyección de un nudo se llama isotopía plana si se deforma el plano de proyección como si estuviese hecho de goma.
Con más precisión definimos una **isotopía plana** de las proyecciones P1 y P2 de nudos como la aplicación continua $F : \mathbb{R}^2$ x $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ tal que $F_0 = identidad$, $F_1(P1) = P2$ y F_t es un homeomorfismo $\forall t$.

Los movimientos de Reidemeister que vamos a ver a continuación nos permiten cambiar la proyección de un nudo de modo que se cambie la relación entre los cruces pero que no cambie el nudo al que representa la proyección. Cada uno de estos movimientos es una isotopía:

Primer movimiento de Reidemeister.
En cualquier zona de la proyección nos permite añadir o eliminar un giro tal y como vemos en la figura 10.

Segundo movimiento de Reidemeister.
Nos permite añadir o eliminar dos cruces del nudo como se ve en la figura 11.

Tercer movimiento de Reidemeister.
Nos permite deslizar una hebra del nudo de un lado de un cruce al otro lado del cruce. Veamos la figura 12 para aclarar la idea.

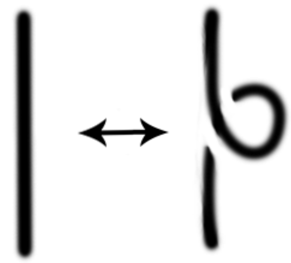

Figura 10: Primer movimiento Reidemeister.

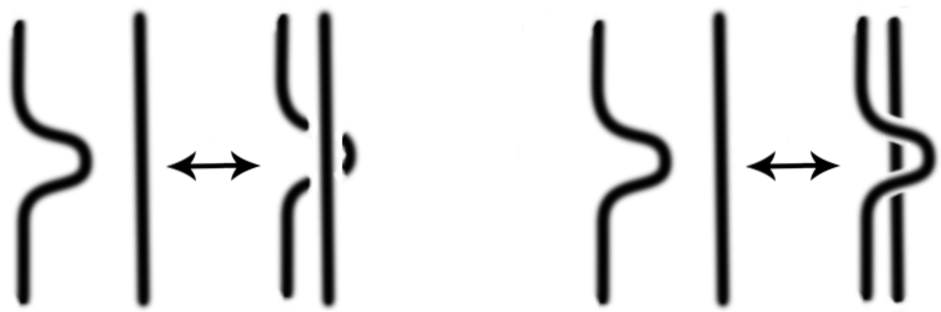

Figura 11: Segundo movimiento de Reidemeister.

Figura 12: Tercer movimiento de Reidemeister.

Teorema 1.1 ***Teorema de Reidemeister.*** *Sean P1 y P2 las proyecciones que representan a dos nudos K1 y K2, respectivamente. Entonces, K1 $\sim$ K2 si, y solo si, P1 y P2 están conectados por una secuencia finita de movimientos de Reidemeister e isotopías planas.*

//PENDIENTE DEMOSTRACIÓN. NO ESTÁN EN LOS LIBROS.
//PONER EJEMPLO VISUAL DE UNA SECUENCIA DE MOVIMIENTOS.

Gracias a dicho teorema podremos estudiar si dos proyecciones representan el mismo nudo. Para ello tendremos que encontrar una secuencia de movimientos de Reidemeister que nos lleve de una proyección a la otra. Sin embargo, este proceso puede no tener el número de movimientos intermedios limitado por lo que no tiene mucho sentido implementarlo.

//PENDIENTE DE LEER KNOTS, MOLECULES AND THE UNIVERSE PARA COMPLETAR LOS MOVIMIENTOS.

1.5. Notación de nudos.

1.6. Algunos invariantes.

1.7. Tipos y ejemplos de nudos.