RIEPILOGO LEZIONE PRECEDENTE (V)

① Sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono:
- $\{(0,0)\}$
- le rette per l'origine
- $\mathbb{R}^2$

② Sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono:
- $\{(0,0,0)\}$
- le rette per l'origine
- i piani per l'origine
- $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{COMBINAZIONI LINEARI}}$

Dati $v_1, \dots, v_n \in V$ $\quad \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_2) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

PROPOSIZIONE ① $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è un sottospazio di V. Inoltre se Z è sottospazio di V che contiene $v_1, \dots, v_n$ allora $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \in Z$.

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ si dice sottospazio generato da $v_1, \dots, v_n$.
Si dice che $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ generano un sottospazio vettoriale V se $V = \langle v_1, \dots, v_2 \rangle$

DIMOSTRAZIONE → (*)

Sia Z un sottospazio di V che contiene $v_1, \dots, v_n$.
Sia $v \in \langle v_1, \dots, v_2 \rangle$, $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
osserviamo che $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n \in Z$ perchè Z è chiuso rispetto al prodotto per scalari, poi abbiamo che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in Z$ perchè Z è chiuso rispetto a +.

(*) $\underline{0} \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
perchè $\underline{0} = 0v_1 + \dots + 0v_n$

siano $u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
$w = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$$u + w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n =$$
$$= \underbrace{(a_1 + b_1)}_{\lambda_1} v_1 + \dots + \underbrace{(a_n + b_n)}_{\lambda_n} v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

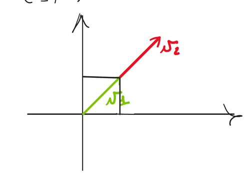
$$\lambda u = \lambda a_1 v_1 + \lambda a_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$
↓
Sottospazio

ESEMPIO: Determiniamo $\langle v_1, v_2 \rangle$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ con $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,k)$

RISOLUZIONE GRAFICA

Se $k=2$ allora v_1 e v_2 si trovano sulla stessa retta per $\underline{0}$.

$\langle v_1, v_2 \rangle$ = retta $y=x$ se $k \neq 2$



RISOLUZIONE ALGEBRICA

prendiamo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e ci chiediamo quando $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e ci chiediamo quando $(a,b) \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ $(a,b) \in \langle v_1, v_2 \rangle$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $(a,b) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,k) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + k\lambda_2)$

cioè se $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ \lambda_1 + k\lambda_2 = b \end{cases}$ cioè se il sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & k & b \end{array}\right)$ ha soluzione

$$\begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & k-2 & b-a \end{array}\right)$$

Se $k \neq 2$ $rr(A) = rr(A|b)$ il sistema ha sempre soluzione (qualsiasi siano a, b).
Se $k \neq 2$ prendo un punto qualsiasi (a,b) e ho che $(a,b) \in \langle v_1, v_2 \rangle$ se $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$

- STUDIAMO QUANDO $k=2$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b-a \end{array}\right) \qquad rr(A) = 1 \text{ il sistema ha soluzione } \Longleftrightarrow rr(A|b) = 1 \Longleftrightarrow b - a = 0 \Longleftrightarrow b = a$$

quindi se $k=2$ $(a,b) \in \langle v_1, v_2 \rangle \Longleftrightarrow b = a$
punti $\langle v_1, v_2 \rangle$ sono quelli del tipo (a,a) con $a \in \mathbb{R}$
cioè sono punti della retta $y=x$.

ESERCIZIO: $V = \mathbb{R}_2[x]$

① Si stabilisca per quali valori di k
$v = k^2x^2 + x + 1$ appartiene a $\langle \underbrace{2x^2 - x}_{v_1}, \underbrace{x^2 - 3x - 1}_{v_2} \rangle$

$v \in \langle v_1, v_2 \rangle$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$
cioè
$$k^2x^2 + x + 1 = \lambda_1(2x^2 - x) + \lambda_2(x^2 - 3x - 1)$$
PARAMETRO → k; INCOGNITE → λ_1, λ_2

Due polinomi sono uguali se hanno gli stessi coefficienti
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_i x + a_0 = b_n x^n + \dots + b_i x + b_0 \Longleftrightarrow a_i = b_i \ \forall i = 0, \dots, n$$

$$k^2x^2 + x + 1 = (2\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + (-\lambda_1 - 3\lambda_2)x - \lambda_2$$
↓
$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = k^2 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 = 1 \quad R_2(-1) \\ -\lambda_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & k^2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k^2 \end{array}\right)$$
↓
$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & k^2+2 \end{array}\right)$$
↓
$$\begin{array}{l} \\ R_2(-1) \\ R_3 - 5R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & k^2-3 \end{array}\right)$$

quindi:
$v \in \langle v_1, v_2 \rangle \Longleftrightarrow$ il sistema ha soluzioni
$\Updownarrow$
$k^2 - 3 = 0 \longrightarrow k = \pm\sqrt{3}$

ESERCIZIO X CASA
$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$
$v = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$ per quali K $v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

---

② Sia W l'insieme delle soluzioni di:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

① Sapendo che W è un sottospazio, trovare dei generatori di W.
② dimostrare che W è sottospazio

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

infinite soluzioni che dipendono da $4 - 2$ parametri
n incognite ↙ ↘ numero di pivot

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 = x_3 - 3x_4 + x_4 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$W = \{(s - 2t, -s + 3t, s, t) \mid s,t \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{\text{(trucco: separo i parametri)}} \{(s, -s, s, 0) + (-2t, 3t, 0, t) \mid s,t \in \mathbb{R}\} \longrightarrow$

$\longrightarrow \{s\underbrace{(-1,-1,1,0)}_{v_1} + t\underbrace{(-2,3,0,1)}_{v_2} \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

$\langle (1,-1,1,0), (-2,3,0,1) \rangle$

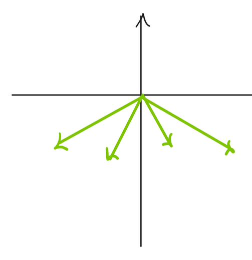
CONCLUSIONE
① i generici di W sono $(1,-1,1,0)$ e $(-2,3,0,1)$
② W è l'insieme delle combinazioni lineari di v_1, v_2 quindi è sottospazio.

PROPOSIZIONE: Sia V spazio vettoriale $v_1, \dots, v_n, w \in V$
allora $\langle v_1, \dots, v_n, w \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ (ipotesi)
$\Longleftrightarrow$
w è combinazione lineare di $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

DIMOSTRAZIONE → $\langle v_1, \dots, v_n, w \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
ovviamente $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_n, w \rangle$
perchè se $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + 0w$

Sia $Z = \langle v_1, \dots, v_2 \rangle$ $w \in Z$ perchè per l'ipotesi, w è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$
Osservandolo $v_1, \dots, v_n, w \in Z$ Z è sottospazio
↓
$\langle v_1, \dots, v_n, w \rangle \subseteq Z$ per la PROPOSIZIONE
cioè $\langle v_1, \dots, v_n, w) = Z$.

ESEMPIO:
$$W = \langle (1,2,0), (3,1,0), (5,7,0) \rangle = \langle (1,2,0), (3,1,0) \rangle$$



INDIPENDENZA LINEARE

DEFINIZIONE: $v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono linearmente indipendenti se
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0}$ → vettore nullo nello spazio vettoriale $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ → zero
cioè se l'unica combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ uguale al vettore nullo è quella con tutti i coefficienti uguali a 0.
I vettori si dicono DIPENDENTI in caso contrario.

ESEMPIO:
$v_1 = (3,1)$ $v_2 = (5,2)$ sono indipendenti
facciamo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underline{0}$ vedremo se è vero che deve essere $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
$\lambda_1(3,1) + \lambda_2(5,2) = (0,0)$
$(3\lambda_1 + 5\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0)$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$
↓
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

la soluzione deve essere
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
v_1, v_2 indipendenti