# AUTOVALORI e AUTOVETTORI

**Definizione 9.1.2** Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *diagonalizzabile* se esiste una base ordinata $\mathcal{B}$ per $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice $A_{\mathcal{B}}$ associata a $T$ rispetto a $\mathcal{B}$ (nel dominio e nel codominio) sia una matrice diagonale.

ci interessano le applicazioni lineari tali che, se scegliamo una base opportuna $A_\beta$ è diagonale

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

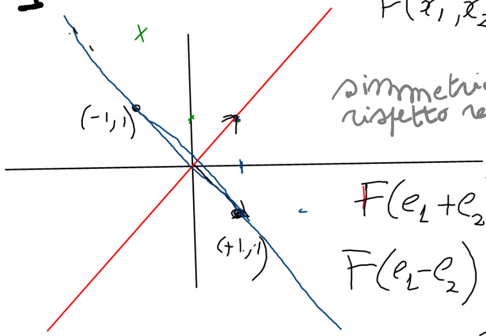
1

In $\mathbb{R}^2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

"i vettori che mantengono le loro direzioni ci hanno permesso di trovare una base bella"

$F(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

simmetria rispetto retta




$F(e_1+e_2) = e_1+e_2$

$F(e_1-e_2) = \cancel{e_2}-e_1+e_2$

$= -(e_1-e_2)$

2

Scegliamo $\beta = \{\underbrace{e_1+e_2}_{= v_1}, \underbrace{e_1-e_2}_{= v_2}\}$

calcoliamo $A_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} F(v_1)_\beta & F(v_2)_\beta \end{pmatrix}$

usando la def

$F(v_1) = v_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \qquad F(v_1)_\beta = (1, 0)$

$F(v_2) = -v_2 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 (v_2) \Rightarrow F(v_2)_\beta = (0, -1)$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3

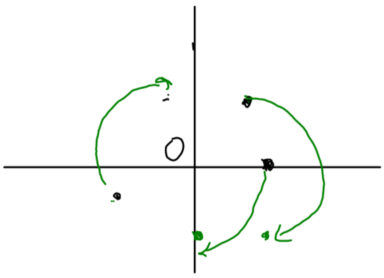
Questa applic lineare è diagonalizzabile

---

non tutte le app. sono diagonalizzabili

consideriamo $G\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$G = L_A \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$




$G(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$

G è la rotazione di 90° gradi rispetto a O

nessun vettore conserva la sua direzione. Vi dimostro che G non è diagonalizzabile

Per assurdo supponiamo che esista $\beta = \{\omega_1, \omega_2\}$ tale che $A_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$G(\omega_1)_\beta \qquad G(\omega_2)_\beta$

---

$G(\omega_1)_\beta = (\lambda_1, 0) \Rightarrow G(\omega_1) = \lambda_1\omega_1 + 0\omega_2$

$\Rightarrow G(\omega_1) = \lambda_1 \omega_1$

$\Rightarrow \omega_1$ conserva la sua direzione $\Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow$ $w_1$ e $w_2$ non possono $\exists \Rightarrow G$ non è diagonalizzabile

$G(\omega_1)$ è un multiplo di $\omega_1$

$G(\omega_2)_\beta = (0, \lambda_2) \Rightarrow G(\omega_2) = \lambda_2 \omega_2$

$\Rightarrow G(\omega_2)$ è un multiplo di $\omega_2$

G è una rotazione $\Rightarrow$ nessun vettore non nullo ha come immagine un suo multiplo

$\Rightarrow \omega_1$ e $\omega_2$ non possono esistere

$\Rightarrow G$ non è diagonalizzabile

---

**Definizione 9.2.1** Data un'applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ diciamo che un vettore non nullo $\mathbf{v} \in V$ è un *autovettore* di $T$ di *autovalore* $\lambda$ se $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si osservi che un autovalore $\lambda$ può essere nullo, mentre un autovettore, per definizione, deve essere diverso dal vettore nullo.

Def Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si dice un autovettore di A se è $\neq (0, \ldots, 0)$ ed esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Nota $\underline{x}$ è autovettore di A se e solo se $x$ è autovettore dell'applicazione lineare $L_A$

**Def.** Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ si dicono **simili** se esiste una matrice $P$ invertibile $P \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $B = P^{-1}AP$

Nota: se due matrici si ottengono una dall'altra facendo un cambio di base allora sono simili $B = P^{-1}AP \Rightarrow PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1}$
$\Rightarrow P^{-1} = C \Rightarrow C^{-1}BC = A$

Nota: la relazione "essere simili" è una relazione di equivalenza

① proprietà riflessiva $A \sim A$ $\quad A = I^{-1}AI$

② " simmetrica $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B \Rightarrow A = P^{-1}BP \Rightarrow PAP^{-1} = PP^{-1}BPP^{-1}$

$\Rightarrow PAP^{-1} = IBI = B \Rightarrow B = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$

③ proprietà transitiva

$A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$A = P_1^{-1}BP_1 \qquad B = P_2^{-1}CP_2$

$A = P_1^{-1}(P_2^{-1}CP_2)P_1 = (P_1^{-1}P_2^{-1})CP_2P_1$

$= (P_2P_1)^{-1}CP_2P_1$

**Def.** Una matrice quadrata $A$ si dice diagonalizzabile se $A$ è simile a una matrice diagonale, cioè se esiste $P$ tale che $P^{-1}AP$ **è diagonale**

$B \sim \underbrace{A \sim D}_{\text{diagonalizzabile}} \Rightarrow B \sim D$

**Proposizione 9.1.4** *Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare associata alla matrice $A$ rispetto alla base canonica (in dominio e codominio). Allora $T$ è diagonalizzabile se e solo se $A$ è diagonalizzabile. Inoltre, se $T$ e $A$ sono diagonalizzabili, la base $\mathcal{B}$ che diagonalizza $T$ corrisponde alle colonne della matrice $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.*

Dim $\Rightarrow$)

Supponiamo $T$ diagonalizzabile, cioè esiste una base $\beta$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $A_\beta$ è diagonale.

Sia $I_{\beta e}$ la matrice di cambio di base

La formula di cambio di base dice che

$$\underset{\text{diagonale}}{A_\beta} = I_{\beta e}^{-1}\ \underset{A_{ee}}{A}\ I_{\beta e} \Rightarrow A \text{ è diagonal. con } P = I_{\beta e}$$

$\Leftarrow$ Supponiamo $A$ diagonalizzabile, cioè esiste una matrice invertibile $P$ tale che $\underset{D}{P^{-1}AP}$ è diagonale

Sia $\beta$ la base di $\mathbb{R}^n$ costituita dalle colonne di $P$ (che sono lin. indp per il teorema 7.6.1. invertibile $\Leftrightarrow$ cols ind)

Osserviamo che $I_{\beta e} = P$

$$I_{\beta e} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^a \text{ col di } P & 2^a \text{ col di } P & \cdots \end{pmatrix}$$

Inoltre la formula del cambio di base dice che $A_\beta = I_{\beta e}^{-1} A I_{\beta e} = P^{-1}AP = D$ diagonale (per ipotesi)

$\Rightarrow T$ è diagonalizzabile

**Teorema 9.2.3**

Una appl. lin $T\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ esiste una base $\beta$ di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di $T$.

**Dim**

$\Leftarrow$ Supponiamo che $\beta$ sia una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori

$\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$

$T(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$

$T(v_2) = \lambda_2 v_2 \qquad T(v_i) = \lambda_i v_i = 0v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + 0v_n$

$\vdots$

$T(v_i) = \lambda_i v_i$

$\vdots$

$T(v_n) = \lambda_n v_n \qquad$ costruiamo $A_\beta = \begin{pmatrix} T(v_1)_\beta & \cdots & T(v_n)_\beta \end{pmatrix}$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_\beta$ è diagonale $\Rightarrow T$ è diagonalizzabile

$\Rightarrow$) Suppongo di avere una base $\beta$ tale che $A_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ è diagonale

Mostriamo che $\beta$ è costituita da autovettori di $T$

Prop. 9.2.3 dice che in pratica $\beta$ è una base di autovettori

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ 0 & & \lambda_i & \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(v_1)_\beta & \cdots & T(v_n)_\beta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T(v_i)_\beta = (0, \dots, \lambda_i, 0 \dots 0)$

$\Rightarrow T(v_i) = 0v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots 0v_n$
$= \lambda_i v_i$

$\Rightarrow v_i$ è autovettore di autovalore $\lambda_i \quad \forall i$

Nota: cosa vuol dire che $v$ è autovettore di $T$ di autovalore $0$?

vuol dire che $v \in \operatorname{Ker} F$

poiché $v \neq \underline{0}$ (per def) abbiamo anche che $\operatorname{Ker} T \neq \{0\} \Rightarrow T$ non è iniettiva

$\Rightarrow$ altro modo per scoprire se $F$ è iniettiva è controllare se $F$ ha un autovettore di autovalore $0$

Viceversa se $T$ non è iniettiva $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$ quindi esiste $v \neq \underline{0}$ tale che $T(v) = \underline{0} = 0v$

$\Rightarrow$ esiste un autovettore di autovalore $0$

Nota $\lambda(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\lambda I}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&\\&&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

Supponiamo che $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sia autovettore di T con autovalore $\lambda$

$T(\underline{x}) = \lambda \underline{x} \Rightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

Portato a sx + applicato equivalenza

$\Rightarrow \underset{\text{matrice}}{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} - \underset{\text{matrice}}{\lambda I}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

proprietà di distrib. del prodotto righe per colonne

$\Rightarrow (A - \lambda I)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Chiamo momentaneamente F l'applic. lineare associata ad $A - \lambda I$. Succede che $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} F \Rightarrow F$ non è invertibile

autovettore è diventato l'elem. del nucleo di un'altra appl. lin.

(perché $\underline{x}$ è un vettore non nullo che appartiene a $\operatorname{Ker} F$) $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

F non è iniettiva perché anche $\underline{0} \in \operatorname{Ker} F$

$\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 2$

$A - 2I = \begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

Controlliamo che $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} F$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ok

$\det(A - 2I) = 0$

**Definizione 9.2.4** Data una matrice quadrata $A$ definiamo *polinomio caratteristico* $p_A$ di $A$ il seguente polinomio in $x$:

$$p_A(x) = \det(A - xI) \text{ di grado } n$$

Il fatto che $p_A(x)$ sia effettivamente un polinomio in $x$ segue per esempio dal calcolo ricorsivo del determinante, sviluppando secondo una riga (o una colonna) di $A - xI$.

~~che~~ $A = \begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$ $\quad A - xI = \begin{pmatrix}3-x&1\\0&2-x\end{pmatrix}$

$xI = \begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}$

$P_A(x) = (3-x)(2-x) - 1 \cdot 0$

$= x^2 - 5x + 6$

Prima abbiamo visto che se $\lambda$ autovalore $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda$ è uno zero del polinomio $\det(A - xI)$

$\Rightarrow \lambda$ è uno zero del polinomio $P_A(x)$

Viceversa se $\lambda$ è uno zero di $P_A(x)$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$ l'applicazione lineare T associata ad $A - \lambda I$ non è iniettiva (teoremone) $\Rightarrow$

Poiché non è iniettiva $\Rightarrow$ per il Teoremone $Ax = 0$ non ha un'unica sol

nel nucleo di $F_\lambda$ c'è un vettore non nullo

$(x_1, \dots, x_n) = \underline{x}$

$F_\lambda(\underline{x}) = \underline{0} \Rightarrow (A - \lambda I)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ è autovettore di $\overset{\text{appl. lin. prec.}}{T}$ con autovalore $\lambda$

o anche $\lambda$ è autovalore di T con $(x_1, \dots, x_n)$ come autovettore

**Teorema 9.2.5** *Uno scalare $\lambda$ è un autovalore di $A$* (associata ad un'appl. lin. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) *se e solo se è uno zero* (radice) *del polinomio caratteristico cioè* $\det(A - \lambda I) = 0$. (sono ecc rispetto a $\forall$ base)

$P_A(x) = \det(A - xI)$

**Dimostrazione** – Se $\lambda$ è autovalore di $A$ allora esiste $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, cioè $A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)$. Quindi, per il Teoremone 7.6.1, il determinante della matrice $A - \lambda I$ è zero.

Viceversa, se $\det(A - \lambda I) = 0$, per il Teorema 7.6.1 esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)$. Allora $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e quindi $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}$ è autovettore di autovalore $\lambda$.

Side note (anziché) separare params

ponendo $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$ otteniamo una base di V

$x_2 = 0$ e $x_3 = 1$

ricetta per trovarci gli autovalori/vettori

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e sia $T = L_A$

per vedere se T è diagonalizzabile dobbiamo cercare una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori (9.2.3) conviene che cerchiamo prima gli autovalori, trovando gli zeri del polinomio $p_A(x)$ (9.2.5)

Quando abbiamo un autovalore $\lambda$ gli autovettori di autovalore $\lambda$ sono gli elementi non nulli di $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$

Nel seguito, se $A$ è una matrice, per brevità indicheremo con $\ker A$ il nucleo dell'applicazione lineare $L_A$ associata ad $A$ rispetto alle basi canoniche (nel dominio e nel codominio). Equivalentemente, $\ker A$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**Def 9.2.11** Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ applic. lineare e sia $A$ la matrice ad essa associata

Sia $\lambda$ un autovalore di $T$

$$V_\lambda = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\}$$

si dice l'autospazio di $T$ relativo all'autovalore $\lambda$

$$V_\lambda = \{\text{autovettori di } T \text{ di autov } \lambda\} \cup \{\underline{0}\}$$

**Prop 9.2.12** $V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$

Dim (è quella di prima) $\underline{x}$ è autovettore di autovalore $\lambda$

$$\iff T(\underline{x}) = \lambda \underline{x} \iff A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$\iff A\underline{x} - \lambda I \underline{x} = \underline{0}$$

$$\iff (A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0} \iff \underline{x} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$$

2

Poiché $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ sono linearmente indipendenti e $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, k-1$ (ricordiamo che gli autovalori sono tutti distinti), segue che $\beta_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k-1$. A questo punto l'uguaglianza (9.3) diventa:

$$\beta_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

quindi anche $\beta_k = 0$, essendo $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$. Quindi i $\beta_i$ sono tutti nulli e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti, come volevasi dimostrare.

Dopo $n$ passi si ottiene quanto voluto, e cioè che $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti. □

Una conseguenza immediata del teorema precedente è il seguente corollario.

**Corollario 9.2.15** *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ con $n$ autovalori distinti è diagonalizzabile.*

ogni $\lambda$ ha $m_a = 1$

**Dimostrazione** – Gli $n$ autovettori distinti relativi agli $n$ autovalori distinti di $A$, per il Teorema 9.2.14 sono linearmente indipendenti, quindi formano una base di $\mathbb{R}^n$. □

e.g. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = \det(A - xI)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix} = (3-x)(2-x)$$

gli autovalori sono $\lambda = 3$ $\lambda = 2$

Cerchiamo gli autovettori di autovalore 3

cioè cerchiamo $\mathrm{Ker}(A - 3I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\mathrm{Ker}(A - 3I) = \{(s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0) \rangle$$

$(1,0)$ è autovettore di autov. 3

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cerchiamo ora un autovettore di autovalore $\lambda = 2$

Dobbiamo cercare $\mathrm{Ker}(A - 2I)$

$$= \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad x_1 = -x_2 \quad \mathrm{Ker}(A - 2I) = \{(-s, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1) \rangle$$

**Osserv. 9.2.$\cancel{1}$2** $V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}\, B_\lambda =$

$$= \{\text{soluz di } \underbrace{(A - \lambda I)}_{B_\lambda} \underline{x} = \underline{0}\}$$

1

**Teorema 9.2.14** *Sia $T$ una trasformazione lineare e siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ autovettori di $T$ relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rispettivamente. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti distinti tra loro, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.*

**Dimostrazione** – La dimostrazione si articola in $n$ passi, tutti simili tra loro.

*Passo* 1. Abbiamo che $\mathbf{v}_1$ è un vettore linearmente indipendente, perché $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

*Passo* 2. Mostriamo che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Siano $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{9.1}$$

Applicando $T$ ad entrambi i membri e tenendo conto che $T(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_2$, si ottiene:

$-\lambda_2\, 9.1 - 0$

$$\beta_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{9.2}$$

Ora sottraiamo dalla seconda uguaglianza la prima moltiplicata per $\lambda_2$ e otteniamo:

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

Poiché $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ si ottiene che $\beta_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, quindi $\beta_1 = 0$, essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sostituendo $\beta_1 = 0$ nella (9.1), si ottiene che $\beta_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Ma $\mathbf{v}_2$ è un autovettore, quindi $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. Segue che $\beta_2 = 0$, come volevasi dimostrare.

Dopo il *passo* $k-1$ avremo dimostrato che i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ sono linearmente indipendenti.

*Passo* $k$. Mostriamo che anche $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti. Siano $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + \beta_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{9.3}$$

Applicando $T$ ad entrambi i membri e tenendo conto che $T(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$ si ottiene:

$$\beta_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_{k-1} \lambda_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + \beta_k \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{9.4}$$

Ora sottraiamo dall'uguaglianza (9.4) l'uguaglianza (9.3) moltiplicata per $\lambda_k$ e otteniamo:

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{v}_1 + \dots + \beta_k(\lambda_k - \lambda_k)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} -7-x & -3 \\ 9 & 5-x \end{pmatrix} =$

$-(x+7)(5-x) + 27 = +x^2 + 7x - 5x - 35 + 27 =$

$= x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$

gli autovalori sono $\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 2$

$\Rightarrow$ A ha 2 autovalori distinti $\Rightarrow$ A è diagon.

perché se $v_1$ è autovettore di autov. $-4$ e $v_2$ è autovettore di autovalore 2 allora per 9.2.13 $v_1$ e $v_2$ sono lin indip $\Rightarrow \{v_1, v_2\} = \beta$ è una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

---

**Definizione 9.2.17** Sia $A$ una matrice quadrata. Uno scalare $\lambda$ si dice autovalore di $A$ di *molteplicità algebrica* $m$ se $p_A(x) = (x-\lambda)^m f(x)$, dove $f(x)$ è un polinomio tale che $f(\lambda) \neq 0$. In pratica $(x-\lambda)^m$ è la massima potenza di $x - \lambda$ che divide $p_A(x)$.

esempio $P_A(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{\text{non ha zeri reali!}}(x - \sqrt{2})^2 (x+3)^5$

$m_a(\sqrt{2}) = 2 \qquad m_a(-3) = 5 \qquad A \in M_9(\mathbb{R})$

$m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_r) \leq n =$ grado di $P_A(x)$

---

**Def.** Se $\lambda$ è autovalore di A (o di T) la molteplicità geometrica di $\lambda$ cioè $m_g(\lambda)$ è $\dim(V_\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$

nota: $\lambda$ autovalore $\Rightarrow m_g(\lambda) \geq 1$

♦ **Osservazione 9.2.18** Osserviamo che, se $\lambda$ è un autovalore di $A$, per definizione c'è almeno un autovettore non nullo, quindi $\ker(A - \lambda I)$ ha dimensione almeno 1. Questo ci dice che la molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale a 1.

**Proposizione 9.2.19** *Se $A$ è una matrice quadrata e $\lambda$ è un autovalore di $A$, allora la molteplicità geometrica di $\lambda$ è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica.*

Vado a cercare gli autovettori negli autospazi lin indip.

**Proposizione 9.2.21** *Sia $A$ una matrice quadrata di ordine $n$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ i suoi autovalori distinti, con molteplicità geometriche rispettivamente $n_1, \dots n_r$. Allora $A$ è diagonalizzabile se e solo se $n_1 + \dots + n_r = n$.*

Nell'esempio di prima A non è diagonalizzabile

$1 \leq m_g(\sqrt{2}) \leq m_a(\sqrt{2}) = 2 \qquad \dim V_{\sqrt{2}} \leq 2$

$1 \leq m_g(-3) \leq m_a(-3) = 5 \qquad \dim V_{-3} \leq 5$

---

**Esercizio 9.3.2**

*Sia $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $L(e_1) = 8e_1 + 3e_2$, $L(e_2) = -18e_1 - 7e_2$, $L(e_3) = 9e_1 + 3e_2 - e_3$. Si stabilisca se $A$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una matrice $D$ simile ad $A$, dove $A$ è la matrice associata ad $L$ rispetto alla base canonica. Si determinino inoltre, se possibile, due matrici distinte $P_1$ e $P_2$ tali che $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = D$.*

**Svolgimento**

La matrice $A$ associata a $L$ rispetto alla base canonica è:

primo punto 9.2.21
secondo " " 9.1.4 $\Leftarrow$
(sapendo che A è diagonalizzabile, trovare base

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -18 & 9 \\ 3 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora il polinomio caratteristico di $A$:

$$\det \begin{pmatrix} 8-x & -18 & 9 \\ 3 & -7-x & 3 \\ 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo con laplace 3ª riga

$P_A(x) = 0\Gamma_{31} + 0\Gamma_{32} + (-1-x)(-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 8-x & -18 \\ 3 & -7-x \end{pmatrix}$

$= -(x+1)\left[(8-x)(-7-x) + 18 \cdot 3\right]$

$= -(x+1)\left[-56 - 8x + 7x + x^2 + 54\right] = -(x+1)(x^2 - x - 2)$

$-(x+1)(x-2)(x+1) = -(x+1)^2(x-2)$

2 autovalori distinti $\quad \lambda_1 = -1 \quad m_a(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = 2 \quad m_a(\lambda_2) = 1$

$1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 \qquad 1 \leq m_g(\lambda_1) \leq m_a(\lambda_1)$

$1 \leq \dim V_2 = 1 \qquad 1 \leq m_g(\lambda_2) \leq m_a(\lambda_2)$

$\Downarrow$

$\dim V_2 = 1$

Cerchiamo $V_{-1}$ in particolare vogliamo capire se $\dim V_{-1} = 2$ cioè se $m_a(-1) = m_g(-1)$

$V_{-1} = \mathrm{Ker}(A - (-1)I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -18 & 9 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1/9 \\ R_2/3 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

n° inc − n° piv
" "

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ infinite sol che dipendono da $3 - 1 = 2$ parametri $\Rightarrow \dim V_{-1} = 2$

Possiamo già dire che A è diagonalizzabile perché $m_g(2) = 1 \quad m_g(-1) = 2$

$n_1 + n_2 = n$ in 9.2.20

$1 + 2 = 3$

calcoliamo ~~base~~ di $V_{-1}$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \qquad x_1 = 2x_2 - x_3$

$V_{-1} = \{(2x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$\tilde{\beta} = \{(2,1,0), (-1,0,1)\}$

next pg

$V_{12} = \operatorname{Ker}(A-2I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 6 & -18 & 9 \\ 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Vedere libro

$= \langle (3,1,0) \rangle$

Una base ordinata di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori

è $\beta = \{(2,1,0), (-1,0,1), (3,1,0)\}$ 9.2.3 + 9.1.4 =>

$A_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ autovalori

quindi due matrici simili non hanno gli stessi autovettori bensì autovalori

cerchiamo $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale

non sto a usare la formula del cambio di base $A_\beta = A_{\beta\beta} \Rightarrow (F(v_1)_\beta)$

Le matrici $P_i$ richieste sono matrici le cui colonne devono essere costituite dalle coordinate di una base di autovettori (rispetto alla base canonica), perciò

$P = I_{\beta e} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ multipli autovettori hanno stesso autovalore

va bene anche $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

o anche $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

o anche $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ci sono infinite matrici $P$ tali che $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Se vogliamo un'altra matrice $P_2$ tale che $P_2^{-1}AP_2 = D$, dobbiamo scegliere un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori, facendo in modo che ai primi due posti ci siano sempre due autovettori di autovalore $-1$ e al terzo posto ci sia un autovettore di autovalore 2, per esempio $\mathcal{B}_1 = \{(-3,0,3), (2,1,0), (-3,-1,0)\}$. In tal caso la matrice di cambio di base $P_2 = I_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}}$ è:

$$P_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il risultato D deve essere lo stesso (9.2.3 =>)

Applic. lin e matrici diagonalizzabili

esempio di matrice diagonalizzabile

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad I^{-1}AI = A$

esempio di matrice non diagonalizz.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ o in generale $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ con $d \in \mathbb{R}$

$P_A(x) = \det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} 5-x & 0 \\ 1 & 5-x \end{pmatrix}$

che venga un polinomio con grado pari all'ordine della matrice

$= (5-x)^2$ 1 solo autovalore $d = 5$

$m_a(5) = 2 \quad m_g(5) = \dim V_5$

calcoliamo $V_5 = \operatorname{Ker}(A - 5I)$

risolviamo il sist. lin omogeneo

$\left\{\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$ $\quad x_1 = 0$

$V_5 = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{x_2(0,1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1) \rangle$

$\rightarrow m_g(5) = 1 \neq m_a(5) \Rightarrow A$ non diag.

in generale non valiche sempre ...

$A$ diagonalizz. $\not\Rightarrow A$ invertibile

esempio $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonale e quindi diagonaliz. ma non invertibile

$A$ invertibile $\not\Rightarrow A$ diagonalizz.

Esempio $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 25$ $A$ è invertibile

visto prima che non è diagonalizzabile

Prop 9.2.8: Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico (Dim sul libro)

Nota: non vale il viceversa stessi autovalori ma non sono simili

ad esempio $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

hanno lo stesso polinomio caratteristico $(5-x)^2$ ma non sono simili perché una è diagonalizzabile e l'altra no => non c'è transitività

Side note

Quindi se una matrice B è simile ad una matrice diagonalizzabile (o rispettivamente non diagonalizzabile) allora anche B è diagonalizzabile (risp. non diagonalizzabile)

per "scrivere una matrice che (non) è simile a quella di partenza" se ci dobbiamo inventare una matrice che ha gli stessi autovalori ma non è simile => ce la inventiamo

Se A ha 0 come autovalore diagonalizzabile (o è diagonale) allora A non è invertibile

perché $\exists v \neq V_0 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0v\}$

$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \underline{0}\} = \operatorname{Ker} A$

Esercizio $T\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(e_1) = -7e_1 + 9e_2 + 3e_3$

$T(e_2) = -3e_1 + 5e_2 + 3e_3$

$T(e_3) = -4e_3$

a) per quali $k \in \mathbb{R}$ $(3,k,3)$ è autovettore

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

$(3,k,3)$ è autovettore se e solo se $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(3,k,3) = \lambda(3,k,3)$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -21-3k \\ 27+5k \\ 9+3k-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ k\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

questo non è un sys lin

$-21-3k = 3\lambda$

$27+5k = k\lambda$

$-3+3k = 3\lambda$

$\Downarrow$

$-1+k = \lambda$

$\Rightarrow$ ricavo $\lambda$ da un'eq e lo sostituisco nelle altre

$$\begin{cases} \lambda = -7-k \\ 27+5k = k(-7-k) \\ -1+k = -7-k \end{cases}$$

sostituisco

$\rightarrow 2k = -6 \Rightarrow k = -3$

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ 27-15 = -3(-4) \text{ ok} \\ k = -3 \end{cases}$$

per $k=-3$ è autovettore di autovalore $-4$

b) Stabilire se $T$ è diagonalizzabile

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} -7-x & -3 & 0 \\ 9 & 5-x & 0 \\ 3 & 3 & -4-x \end{pmatrix} \begin{matrix} -7-x & -3 \\ 9 & 5-x \\ 3 & 3 \end{matrix}$$

$$\underbrace{(-7-x)}_{-(7+x)}(5-x)\underbrace{(-4-x)}_{-(4+x)} + 0 + 0$$

tenere raccolto

$$-[0 + 0 + \underbrace{(-4-x)}_{-(4+x)}(-27)] =$$

$$= +(7+x)(4+x)(5-x) - (4+x)\cdot 27$$

$$(4+x)[(7+x)(5-x) - 27]$$

$$= (4+x)(35 - 7x + 5x - x^2 - 27)$$

$$= (4+x)(-x^2 - 2x + 8)$$

$$= -(4+x)(x^2 + 2x - 8)$$

$$= -(4+x)(x+4)(x-2) = -(x+4)^2(x-2)$$

$\lambda_1 = -4 \qquad m_a(-4) = 2$

$\lambda_2 = 2 \qquad m_a(2) = 1$

$1 \le m_g(-4) \le m_a(-4) = 2$

$1 \le m_g(2) \le m_a(2) = 1$

$\Rightarrow m_g(2) = 1$

$T$ è diagonalizz $\iff m_g(-4) = 2$

Calcoliamo $V_{-4} = \mathrm{Ker}(A+4I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7+4 & -3 & 0 & 0 \\ 9 & 5+4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4+4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_1/3 \\ R_2/9 \\ R_3/3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3 inc 1 pivot infinite sol che dipendono da $3-1=2$ parametri

$\Rightarrow V_{-4}$ ha dim 2 $\Rightarrow T$ è diagonalizzabile

$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 = -x_2$, $x_3$ è arbitrario

e sol sono $V_{-4} = \{(-x_2, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(-1,1,0)}_{x_2=1\ x_3=0}, \underbrace{(0,0,1)}_{x_2=0\ x_3=1} \rangle$

ed è simile a $A_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dove $\beta$ è una base di autovettori

$\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$

$T(v_1) = -4v_1$

$T(v_2) = -4v_2$

$T(v_3) = 2v_3$

tutte le matrici diagonali simili ad A sono

altre basi (ordinate) di autovettori

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

1

se A è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale D simile ad $A = A_{ee}$ e due matrici distinte $P_1, P_2$ tali che

$$P_1^{-1} A P_1 = P_2^{-1} A P_2 = D \qquad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$P_1$ è ~~la~~ matrice $I_{\beta e}$ dove $\beta$ è una base di autovettori

$\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$\left.\begin{array}{l} T(v_1) = -4v_1 \\ T(v_2) = -4v_2 \\ T(v_3) = 2v_3 \end{array}\right\} \text{deve succedere che ...}$$

$$I_{\beta e} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$v_1$ e $v_2$ li abbiamo, cerchiamo $v_3 \in V_2 = Ker(A - 2I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & -3 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{9}R_1 \\ \frac{1}{9}R_2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

infinite sol. dip. da $3-2=1$ parametro

$V_2$ ha dim 1

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

$V_2 = \langle (-1, 3, 1) \rangle$

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

TRACCIA esercizio d'esame

Per quali K

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ K-5 & K & K-1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

$$P_{A_k}(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ K-5 & K-x & K-1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} =$$

Laplace 2ª colonna

$$= 0 + \underbrace{(-1)^{2+2}}_{(K-x)} \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} + 0 = (K-x)\left[(2-x)^2 - 1\right] = (K-x)\left[x^2 - 4x + 3\right]$$

$= (K-x)(x-3)(x-1)$

3 autovalori $\lambda_1 = K$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$

Se abbiamo 3 autovalori distinti $A_K$ è diagonalizzabile

se $K \neq 3$ e $K \neq 1$ $A_K$ è diagonalizz.

se $K = 3$ $m_a(3) = 2$ → dobbiamo calcolare $m_g(3) = \dim V_3$

$m_a(1) = 1 = m_g(1)$

se $\dim V_3 = 2$ A è diagonalizz.

se $\dim V_3 = 1$ A non è diag

se $K = 1$ $m_a(1) = 2$ → dobbiamo studiare $V_1$

$m_a(3) = 1 = m_g(3)$