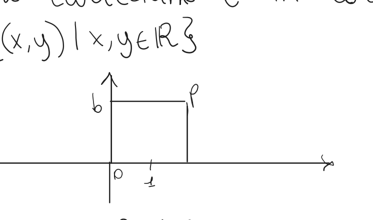
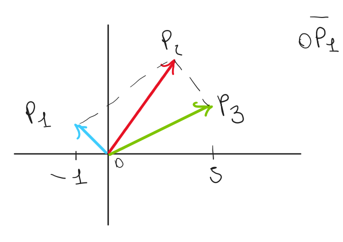
Il piano cartesiano è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$



Ad ogni punto P del piano possiamo associare il vettore $\overrightarrow{OP}$ applicato all'origine.
Dati due vettori applicati in $\underline{0}$ sappiamo fare la loro somma con la regola del parallelogramma



$\overline{OP_1} + \overline{OP_2}$

$P_1(3,2)$
$P_2(-1,1)$
$P_3(7,3)$

sappiamo moltiplicare un vettore per $\lambda \in \mathbb{R}$

vale
- $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_1}$
- $(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}) + \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} + (\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3})$
- $\lambda(\mu(\overrightarrow{OP_1})) = \lambda\mu\overrightarrow{OP_1}$, ecc...

Anche in $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sappiamo sommare due matrici e moltiplicare due matrici e moltiplicare una matrice per $\lambda \in \mathbb{R}$.
vale

$A+B = B+A$
$A+(B+C) = (A+B)+C$
$\lambda(\mu(A)) = \lambda\mu(A)$

In $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \longleftrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R})$
sappiamo sommare due elementi:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$$

e sappiamo $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$
(lamda, un qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^n$ (in particolare $\mathbb{R}^2$), i vettori applicati in $\underline{0}$, $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ sono esempi di spazi vettoriali

In $\mathbb{R}^2$ $\underline{0} = (0,0)$ (vettore nullo nello spazio vettoriale) nei vettori applicati nell'origine l'elemento NEUTRO è $\overline{OO} \longleftrightarrow (0,0)$.
Quindi in $M_{m\times n} \longrightarrow \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ESEMPIO: $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

l'opposto di A è $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che $\underline{0}$ è unico supponiamo di avere $\underline{0}$ e $\tilde{\underline{0}}$ due elementi neutri cioè:

1. $\underline{u} + \underline{0} = u \quad \forall u \in V$
2. $\underline{u} + \tilde{\underline{0}} = u \quad \forall u \in V$

$$\underline{0} = \underline{0} + \tilde{\underline{0}} = \tilde{\underline{0}} + \underline{0} = \tilde{\underline{0}}$$

commutativa

ESEMPIO: $\mathbb{R}[x] = \{$polinomio a coefficiente in $\mathbb{R}\}$

$\underline{u} = \sqrt{5x^3} - x^2 + 2 \qquad \underline{v} = x^8 - 3x^4 + 2x^2 - 3x + 7$

- $\underline{u} + \underline{v} = x^8 - 3x^4 + \sqrt{5x^3} + x^2 - 3x + 9$
- $\sqrt{2}\underline{v} = \sqrt{2}x^8 - 3\sqrt{2}x^4 + 2\sqrt{2}x^2 - 3\sqrt{2}x + 7\sqrt{2}$

SPAZIO VETTORIALE

Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica.
DEFINIZIONE (alternativa) → uno spazio vettoriale è un gruppo commutativo $(\underline{V}, +, \underline{0}, -u)$

L'insieme di tutte le matrici NON è uno spazio vettoriale

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la somma NON è definite

MA le matrici $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con m e n fissati è uno spazio vettoriale
ESEMPIO: $M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sono un'istanza di gruppo commutativa di spazio vettoriale di anello

$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{AB}$ prodotto righe per colonne

Elemento neutro per il prodotto è $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

SOTTOSPAZIO

DEFINIZIONE → Sia V uno spazio vettoriale e sia $U \subseteq V$ (U = sottospazio)
PROPRIETÀ:
1. $U \neq \emptyset$ ($\emptyset$ = insieme vuoto)
2. $\forall u_1, u_2 \in U$ tale che $u_1 + u_2 \in U$
3. Se $u \in U$ $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda u \in U$

OSSERVAZIONE: se U è sottospazio allora $\underline{0} \in U$
infatti se U è sottospazio, per la proprietà 1 esiste $\underline{u} \in U$.
Prendo $0 \in \mathbb{R}$ per la proprietà 3
$0\underline{u} \in U \rightarrow 0\underline{u} = \underline{0} \in U$

Per gli esercizi, al posto di 1 conviene controllare se $\underline{0} \in U$
ESEMPIO: $U = \{(s, 2s, 3) \mid s \in \mathbb{R}\}$ NON è sottospazio di $\mathbb{R}^3$ $(0,0,0) \notin U$

3. Se $u \in U$ $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda u \in U$

- Sia $W = \{(s, 2s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$
  1. $(0,0,0) \in W$ se pu $s = 0$
  2. $u_1 = (s_1, 2s, 0) \quad u_2 = (s_2, 2s_2, 0)$

$$u_1 + u_2 = (s_1, 2s_1, 0) + (s_2, 2s_2, 0) = (s_1 + s_2, 2s_1 + 2s_2 + 0) =$$
$$= (s_1 + s_2, 2(s_1 + s_2), 0) \in W \quad \text{con } s = s_1 + s_2$$

- $w_1 = (s_1, 2s_1, 0) \quad \lambda u_1 = (\lambda s_1, 2(\lambda s_1), 0) \in W$ con $s = \lambda s_1$

W è Sottospazio

OSSERVAZIONE: $U = \{\underline{0}\}$ è sempre sottoinsieme di V detto sottospazio nullo
1. $U \neq \emptyset \quad \underline{0} \in U$
2. $\underline{0}, \underline{0} \in U \rightarrow \underline{0} + 0 = \underline{0} \in U$
3. $\underline{0}, \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda\underline{0} = \underline{0} \in U$

Sia V spazio vettoriale e sia U un sottospazio di V.
Se $U \neq \{\underline{0}\}$ allora U contiene infiniti vettori
Infatti sia $u \in U$ $u \neq \underline{0}$

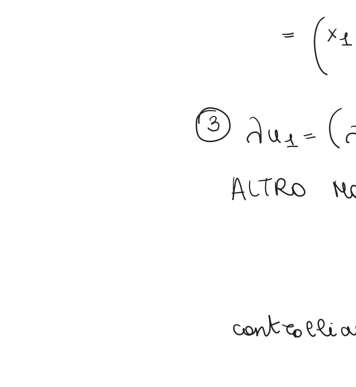
Prendiamo $\lambda \in \mathbb{R}$ per la proprietà 3 $\lambda\underline{u} \in U$
mostriamo che se $\lambda \neq \mu$ allora $\lambda\underline{u} \neq \mu\underline{u}$
(abbiamo quindi infiniti vettori di U diversi tra loro)

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo $\lambda\underline{u} = \mu\underline{u}$ aggiungiamo a entrambi i membri l'opposto di $\mu\underline{u}$:

$\lambda\underline{u} - \mu\underline{u} = \mu u - \mu u$

$(\lambda - \mu)u = \underline{0} \xrightarrow[\underline{u} \neq 0]{} \lambda - \mu = 0 \rightarrow \lambda = \mu$

ESEMPIO:
1. in $\mathbb{R}^2$ la retta di equazione r: $3x - 2y + 5 = 0$



r NON è un sottospazio perchè $(0,0) \notin r$

2. Sia r la retta di equazione $r \Rightarrow 3x - 2y = 0$

$r \rightarrow y = \frac{3}{2}x$

$r = \{(x, \frac{3}{2}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Controlliamo se x è un sottospazio

1. $(0,0) \in \mathbb{R}$ ✓ $x \in 0$
2. $u_1 = (x_1, \frac{3}{2}x_1) \quad u_2 = (x_2, \frac{3}{2}x_2)$

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2) =$$
$$= (x_1 + x_2, \frac{3}{2}(x_1 + x_2)) \quad x = x_1 + x_2 \in r$$

3. $\lambda u_1 = (\lambda x_1, \frac{3}{2}\lambda x_1) \in r \qquad x = \lambda x_1$

ALTRO MODO: siano $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2) \in r$
abbiamo che $3x_1 - 2y_1 = 0 \quad 3x_2 - 2y_2 = 0$
$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

controlliamo
- $3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = 0$

$3(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = 3x_1 + 3x_2 - 2y_1 - 2y_2 =$
$= (3x_1 - 2y_1) + (3x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0 \rightarrow u_1 + u_2 \in \mathbb{R}$

- $\lambda u_2 = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

$3\lambda x_1 - 2\lambda y_1 = \lambda(3x_1, -2y_1) = \lambda 0 = \underline{0} \rightarrow \lambda u_1 \in \mathbb{R}$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 3s & 0 \\ r & s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 3x_2(x_2 + x_3) = 0\} \in \mathbb{R}^3$