Def Se $A \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$ a matrice trasposta da A, A^T e la matrice ottenuta da scambiando le righe con le colonne

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-5&7\\2&4\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}1&-5&2\\0&7&4\end{pmatrix}$$

$$A^T \in M(\mathbb{R})$$

1. $A(BC)=(AB)C$ associativa
2. $A(B+C)=AB+AC$ distributiva
   $(A+B)C=AC+BC$
3. $(AB)^T=B^TA^T$

Dato il sistema lineare

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

possiamo scriverlo in forma compatta

$A\underline{x}=\underline{b}$ con $A=$ matrice $=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{1n}\\a_{21}&a_{2n}\\a_{m1}&a_{mn}\end{pmatrix} \to \underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \\x_n\end{pmatrix}$ $\underline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \\b_m\end{pmatrix}$

ESEMPIO:

$$\begin{cases}\sqrt{3}x_1-4x_2+\pi x_3-x_4=5\\5x_1+3x_2+6x_4=-3\\x_2-7x_3+\sqrt{2}x_4=0\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\sqrt{3}&-4&\pi&-1\\5&3&0&6\\0&1&-7&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}$$

MATRICI A SCALA $\to$ una matrice si dice in forma a scala (per righe) o semplicemente, a scala se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

a) eventuali righe nulle si trovano in fondo la matrice
b) il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente

ESEMPIO:

$$A=\begin{pmatrix}1&5&4&0\\0&0&1&3\\0&0&0&7\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}3&5&6&7\\0&1&4&6\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1&5&4&0\\0&0&1&3\\0&0&3&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

PIVOT

matrice a scala — matrice a scala — matrice NON a scala

NOTA:
Se $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a scala con k pivot allora $k\le m$ ma anche $k=m$ (perche in una colonna non possono essere più pivot)

SISTEMI ASSOCIATI A MATRICI A SCALA (PER RIGHE)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&5&7\\0&7&-1&8&-1\\0&0&0&5&4\\0&0&0&0&5\end{array}\right)$$

No SOLUZIONI per l'ultima riga!

Come mai? $rr(A|B)\neq rr(A)$

Altro esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&0&0&5&2\\0&5&2&1&-7\\0&0&1&2&3\\0&0&0&1&-8\end{array}\right) \to \text{qui invece } rr(A|B)=rr(A)$$

Il sistema ha soluzione e si risolve per sostituzione dal basso

$$\begin{cases}3x_1+5x_4=2\\5x_2+2x_3+x_4=-7\\x_3+2x_4=3\\x_4=-8\end{cases}$$

dal basso (prima trovo x_4)

$x_4=5$
$5x_2=-2x_3-x_4-7=37$
$x_3=-2x_4+3=19$
$x_2=\frac{27}{5}$
$3x_1=2-5x_4=42$
$x_1=14$

$(14,-\frac{37}{5},19,-8)$

ALTRO ES:

(1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&1&3\\0&1&0&2&1\\0&0&2&4&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

TERZA RIGA: $2x_3-4x_4=6$
$x_3=2x_4+3$

$x_2+2x_4=1 \to x_2=1-2x_4$
$x_1+3x_3+x_4=3 \to x_1=7x_4-6$
$x_4=s$

Abbiamo infinite soluzioni
$[(7s,1-2s,2s+3,s)\ s\in\mathbb{R}]$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&7&1&4\\0&0&5&5&10&20\\0&0&0&1&-1&2\end{array}\right)$$

- Sia $A\underline{x}=\underline{b}$ un sistema lineare con matrice $A|b$ a scala.
  Il sistema ha soluzione $\Longleftrightarrow rr(A|b)=rr(A)$

- Se $rr(A|b)=rr(A)=n=$ numero delle incognite, allora c'è una sola soluzione
- Se $rr(A|b)=rr(A)=r<n$ ci sono infinite soluzioni che dipendono da $n-r$ parametri.

SUGGERIMENTO: si ricavano le incognite dei pivot, le altre sono arbitrarie

$n=5$ incognite
$r=3$ pivot
Infinite k soluzioni che dipendono da $5-3=2$ parametri

$x^4-x_5=2 \to x_4=2+x_5$
$5x_3+5x_4+10x_5=20$
$x_3+x_4+2x_5=4 \to x_3=4-2x_5-x_4=4-2x_5-2-x_5 \to x_3=-2-3x_5$
$x_1=-2x_2-x_3-7x_4-x_5+4=-2x_2-2+3x_5-14-7x_5-x_5+4=$
$=x_1=-2x_2-5x_5-12$

SOLUZIONI:

$\{(-2x_2-5x_5-12,\ x_2)\ 2-3x_5,\ 2+x_5,\ x_5)\mid x_2,x_5\in\mathbb{R}\}$ soluzioni infinite

DEFINIZIONE:
Due sistemi lineari sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=7\\x_1-x_2=5\end{cases} \qquad \begin{cases}6x_1+4x_2=14\\x_1-x_2=5\end{cases}$$

Le seguenti operazioni trasformano un sistema in un sistema ad esso equivalente:

1. scambio di due equazioni
2. moltiplicazione di una equazione a $\alpha\neq0$
3. Al posto della i-esima equazione scrive la somma della i-esima equazione con la j-esima moltiplicata per $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}A=B\\C=D\end{cases} \to \text{lo riscrivo uguale} \to \begin{cases}A+\alpha C=B+\alpha D\\C=D\end{cases}$$

Alle operazioni operazioni scritte sopra corrispondono le seguenti operazioni "elementari" sulle righe della matrice $A|b$ associata al sistema

1. $R_i \longleftrightarrow R_j$
2. $R_i \to R_j$
3. $R_i \to R_i+aR_j$

ALGORITMO DI GAUSS

Per passare da matrice a matrice scala faccio

$$\begin{pmatrix}a\\0\\b\end{pmatrix} \to R_3 \to R_3-\frac{b}{a}R_1$$

PIVOT

QUI CI VA UNO 0