ESERCIZIO 1

$P_1 = x^2+x+2 \qquad P_2 = x+1 \qquad P_3 = x^2+2x+3 \qquad P_4 = -x^2+Kx \qquad P_5 = x^2-K$

Passiamo alle coordinate rispetto alla base canonica

$v_1 = (P_1)_e = (1,1,2) \qquad v_2 = (P_2)_e = (0,1,1) \qquad v_3 = (P_3)_e = (1,2,3)$

$v_4 = (P_4)_e = (-1,K,0) \qquad v_5 = (P_5)_e = (1,0,-K)$

a) Usiamo l'algoritmo di Gauss in modo diretto per una trovare una base di $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & K & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ R_3-R_1 \\ R_4+R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & K+1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ R_3-R_2 \\ R_4-(K+1)R_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-(K+1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -K+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \\ \\ \end{matrix}$$

4.3.1

$U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3 \rangle$

Se $K \neq 1$ $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ sono indip per 4.3.2

$\Rightarrow \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$ sono una base di U

Se $K \neq 1$ U ha dimensione 3, quindi p_1, p_2, p_3, p_4 generano un sottospazio di $\mathbb{R}_2[x]$ di dimensione 3.

Poiché $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3, p_1, p_2, p_3, p_4 generano $\mathbb{R}_2[x]$.

Se $K = 1$ Una base di U è $\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle$ quindi U ha dimensione 2, quindi $\dim \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle = 2 \neq \dim \mathbb{R}_2[x]$ quindi p_1, p_2, p_3, p_4 non generano U.

b) Usiamo l'algoritmo di Gauss in modo diretto per trovare una base di $\langle v_1, v_2, v_5 \rangle = W$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -K \end{matrix} \quad R_3 - R_1 \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -K-2 \end{matrix} \quad R_3 + R_2 \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -K-1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} = \tilde{v}_1 \\ = \tilde{v}_2 \\ = \tilde{v}_3 \end{matrix}$$

Se $K \neq -1$ $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ sono lin indip e generano W,
$\Rightarrow$ sono una base di W $\Rightarrow$ W ha dim 3
quindi p_1, p_2, p_5 generano un sottospazio di $\mathbb{R}_2[x]$ di dim 3,

$\Rightarrow \mathbb{R}_2[x] = \langle p_1, p_2, p_5 \rangle$ Per GEL p_1, p_2, p_5 sono una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

Se $k = -1$ $\dim \langle p_1, p_2, p_5 \rangle = 2$ quindi p_1, p_2, p_5 non sono una base di $\mathbb{R}_2[x]$

ESERCIZIO 2

La matrice A_k associata all'applicazione lineare F_k rispetto alle basi canoniche è

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ k & 2k & 3k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

osserviamo che $F_k(\underline{x}) = A_k(\underline{x})$

a) $\operatorname{Ker} A_k = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid F_k(\underline{x}) = \underline{0} \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid A_k \underline{x} = \underline{0} \}$

Risolviamo quindi il sistema lineare omogeneo associato ad A_k

La matrice non è a scala ma possiamo distinguere 2 casi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ k & 2k & 3k & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ R_2 - kR_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -k & 2k & 0 \\ 0 & k-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

① $k \neq 0$ $\quad R_2 \longrightarrow \frac{1}{k} R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & k-3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad R_3 + (k-3) R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(k-3) & 0 \end{array}\right)$$

se $K \neq 0$ e $K \neq 3$ ci sono 3 incognite, 3 pivot, una sola soluzione, che è sicuramente $\underline{x} = \underline{0}$, quindi $\ker F_K = \{\underline{0}\}$ che ha dimensione 0

se $K = 3$ otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ le soluzioni dipendono da $3-2=1$ parametro

quindi $\ker F_3$ ha dim 1

(2) $K = 0$ otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$ di nuovo, le soluzioni dipendono da $3-2=1$ parametro

$\ker F_0$ ha dim 1

Quindi $\dim(\ker F_K) = 0$ se $K \neq 0, 3$ e $\dim \ker F_K = 1$ se $K=0$ o $K=3$

b) se $K = 0$ in base ai conti fatti sopra dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\ker F_0 = \{(-2x_3, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 0, 1) \rangle$ Una base β di $\ker F_0$ è

$\beta = \{(-2, 0, 1)\}$ e per completarla ad una base di $\mathbb{R}^3$ basta aggiungere dei vettori con i pivot mancanti, ottenendo ad esempio

$\{(-2,0,1),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

c) Ci sono vari modi per rispondere a questa domanda. Visto che poi si chiede di calcolare la controimmagine, conviene usare il fatto che $v \in \operatorname{Im} F_K \Leftrightarrow F_K^{-1}(v) \neq \emptyset$, poiché $F_K^{-1}(v) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F_K(\underline{x}) = \underline{v}\}$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ K & 2K & 3K & 0 \\ 1 & K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 & K-2 \end{array}\right)$$

cerchiamo per quali valori di K tale sistema ha soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -K & 2K & -K \\ 0 & K-3 & 0 & 0 \\ 0 & K-3 & 0 & K-3 \end{array}\right)$$

Il sistema non è a scala ma come prima possiamo distinguere 2 casi

(1) $K \neq 0$ $\quad R_2 \to \frac{1}{K} R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & K-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K-3 \end{array}\right) \quad R_4 - R_3$$

$$R_3 + (K-3)R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2(K-3) & -(K-3) \\ 0 & 0 & 0 & K-3 \end{array}\right)$$

se $K \neq 3$ $\quad rr(A') = 3 \neq 4 = rr(A'|b)$ nessuna soluz

$\Rightarrow F_K^{-1}(v) = \emptyset \Rightarrow v \notin \operatorname{Im} F_K$

se $K = 3$ $\quad rr(A') = 2 = rr(A'|b) \Rightarrow$ il sistema ha soluzione

$\Rightarrow v \in \operatorname{Im} F_K$

② $K = 0$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

il sistema non ha soluzione $\Rightarrow v \notin \operatorname{Im} F_K$

quindi $v \in \operatorname{Im} F_K$ solo per $K = 3$ e in tal caso per trovare $F_3^{-1}(v)$ riprendiamo i conti di prima e risolviamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

le soluz. dipendono da $3 - 2 = 1$ parametro

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$

$-2x_2 + x_3 = -1$

Ricaviamo x_3 (per non avere denominatori, ma va bene anche ricavare x_2) $\quad x_3 = 2x_2 - 1$ $\quad x_1 = -3x_2 - x_3 + 1 = -5x_2 + 2$

$$F_3^{-1}(v) = \{(-5x_2+2,\ x_2,\ 2x_2-1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$$

d) $B = \{(-2,0,1),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

Cerchiamo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che $(1,-2,-1) = \alpha_1(-2,0,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$. Deve essere

$$\begin{cases} -2\alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2} \\ \alpha_2 &= -2 \\ \alpha_3 &= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

le coordinate sono $\left(-\frac{1}{2},\ -2,\ -\frac{1}{2}\right)$