ESEMPI DI SOTTOSPAZIO

① $V = \mathbb{R}[x] = \{$polinomio con coefficiente in $\mathbb{R}\}$

Sia $U = \mathbb{R}_n[x] = \{$polinomio di grado $\leq n\} \leq \mathbb{R}[x]$

$U = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_n \in \mathbb{R}\}$

↳ U è sotto spazio di $\mathbb{R}$

$\underline{0}$ elemento neutro : $\underline{0} \in \mathbb{R}[x] = V$ è 0

↳ $0 = 0x^n + \dots + 0x + 0$, $0 \in U$ → valgono anche ② e ③

$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_3\}$

② $f, g \in V$ $\quad f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f+g)x = f(x) + g(x)$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f \; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

$\underline{0} : f(x) = 0 \quad \forall x$

$U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue$\} \subseteq V$

① $\underline{0} \in U$

② vale

③ vale

$W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue$\}$ è sottospazio

③ $V = \mathbb{R}_3[x]$

$U = \{f(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(x)$ ha grado $3\}$

U non è un sottospazio perche $\underline{0} = 0 \notin U$, U è chiuso rispetto alla somma?

No, ad ESEMPIO: $\quad x^2 + 3x - 5, \; -x^3 + 2 \in U$

$(x^2 + 3x - 5) + (-x^3 + 2) = 3x - 3 \notin U$

$W = \{f(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(-2) \geq 0\} \quad x^2 + x + 7 \in W \quad (-2)^2 + (-2)^2 + 7 + 4 \geq 0$

$\underline{0} \in W$? $\quad 0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$?

② $f_1, f_2 \in W \quad f_1(-2) \geq 0 \quad f_2(-2) \geq 0$

$(f_1 + f_2)(-2) = f_1(-2) + f(-2) \geq 0 \quad$ W è chiuso rispetto a +

③ se $\lambda \in \mathbb{R} \quad f_1(x) \in W$

$(\lambda f_1)(-2) = \lambda f_1(-2)$ <u>non è detto</u>

ad esempio: $\quad x + 4 \in W \qquad -2 + 4 \geq 0$

può $\; -5(x+4) \notin W \qquad -5(-2+4) < 0$

---

① $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ b & 2b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \underline{0} \in U$? Si perche $b = 0 \quad a = -1$

② Siano $\quad u_1 = \begin{pmatrix} a_1+1 & 0 \\ b_1 & 2b_1 \end{pmatrix} \in U$

$u_2 = \begin{pmatrix} a_2+1 & 0 \\ b_2 & 2b_2 \end{pmatrix} \in U \qquad u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + 2 & 0 \\ b_1 + b_2 & 2b_1 + 2b_2 \end{pmatrix}$

- $a = a_1 + a_2 + 1$

  $b = b_1 + b_2 \longrightarrow u_1, u_2 \in U$

$\lambda u_2 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda & 0 \\ \lambda b_1 & \lambda 2 b_1 \end{pmatrix} \qquad \bullet \; b = \lambda b_1$

$a = \lambda a_1 + \lambda \to a = \lambda a + \lambda - 1$

$V = \mathbb{R}^3$

$U = \{(x_1, x_2, x_3) \quad 3x_1(x_2 + 2x_3) = 0\}$

$\underline{0} = (0,0,0) \in U$

- Siano $\quad u_1 = (x_1, x_2, x_3) \quad u_2 = (y_1, y_2, y_3) \in U$

$3x_1(x_2 + 2x_3) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$

$u_1 + u_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$3y_1(y_2 + 2y_3) = 0 \quad \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_2 = -2y_3 \end{cases}$

$3(x_1 + y_1)(x^2 + y_2 + 2x_3 + 2y_3) = 0$

Sia $\quad u_1 = (0, 3, -1) \qquad u_2 = (5, -2, 1)$

$u_1 + u_2 = (5, 1, 0) \qquad 35(1 + 2 \cdot 0) \neq 0 \qquad u_1 + u_2 \notin U$

- $U_1 = (x_1, x_2 x_3) \quad 3x_1(x_2 + 2x_3) = 0$

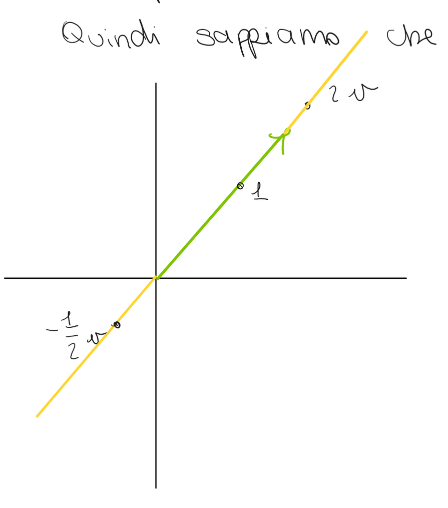
  $\lambda u_1 = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

  $3\lambda x_1(\lambda x_2 + 2\lambda x_3) = 3\lambda^2 x_1(x_2 + 2x_3) = \lambda^2 \cdot 0 = 0$

  W è chiuso rispetto al prodotto per scalari

In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $\underline{v} = (1, 2)$ e ci chiediamo qual è il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene $\underline{v}$.

Quindi sappiamo che $\lambda \underline{v} \in U \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$



U contiene tutta la retta e ha equazione $y = 2x$

La retta $y = 2x^2$ è un sottospazio (verificarlo a casa)

→ U = retta di equazione $y = 2x$

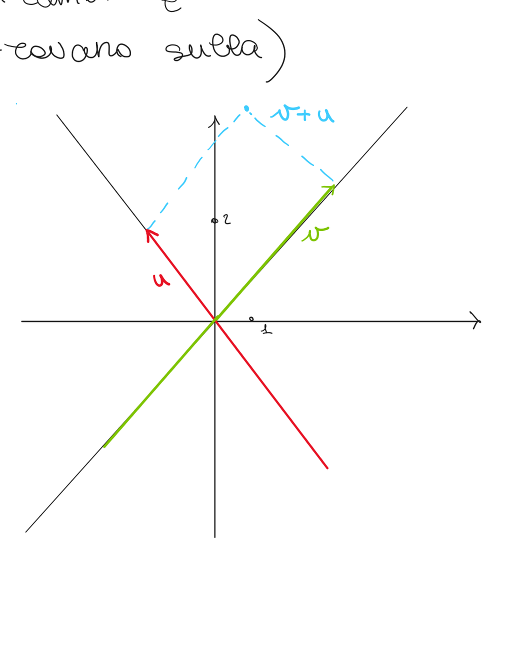
In generale x $v = (a, b)$ il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene v è la retta per l'origine che contiene v di equazione $bx - ay = 0$

Ora prendiamo $\quad v = (1, 2) \quad u = (-3, -6)$

il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene entrambi è sempre la retta $\quad y = -2x$ (entrambi i punti si trovano sulla stessa retta)

Ora prendiamo $\quad v = (1, 2)$

$u = (-1, 3)$



è cerchiamo il più piccolo sottospazio U di $\mathbb{R}^2$ che contiene u e v

U contiene tutti i vettori del tipo λv cioè la retta $y = 2x$ e tutti i vettori del tipo λu, $\lambda \in \mathbb{R}$ cioè la retta $y = -3x$.

U contiene anche $u + v$, $u - v$

→ U contiene tutti i punti di $\mathbb{R}^2$

DIMOSTRAZIONE

cerco λ, μ tale che $(4, 3) = \lambda(1, 2) + \mu(-1, 3)$

$\begin{cases} \lambda - \mu = 4 \\ 2\lambda + 3\mu = 3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \quad R_2 - 2R_1$

$\mu = -1 \qquad \lambda - \mu = 4 \qquad \lambda + 1 = 4 \qquad \lambda = 3$

$(4, 3) = 3(1, 2) - (-1, 3)$

In generale mostro che ogni punto $(a, b) \in U$ cerco λ, μ tale che $(a, b) = \lambda(1, 2) + \mu(-1, 3)$

$\begin{cases} \lambda - \mu = a \\ 2\lambda + 3\mu + b \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & 5 & b - 2a \end{array}\right) \quad R_2 - 2R_1$

$rr(A) = rr(A|b) = 2$ ha sempre 3 soluzioni quindi riesco sempre a scrivere (a, b) come $\lambda \mu + \mu v \in U$

ORA POSSIAMO DIRE che un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ è :

① $V = \{(0, 0)\}$

② Una retta per $(0, 0)$

③ $U \subseteq \mathbb{R}^2$

In generale dato V spazio vettoriale $\underline{v} \to \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ cerchiamo qual è il "più piccolo" sottospazio di V che contiene $\{v_1, \dots, v_n\}$

ESERCIZIO → Se U_1, U_2 sono sottospazi allora $U_1 \cap U_2$ è sottospazio

---

DEFINIZIONE → Una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è un vettore $v \in V$ del tipo $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$(-1, 0, 12) = 5 \quad (1, 0, 3) - 3(2, 0, 1)$

$v = 5v_1 - 3v_2$

$(2, 1, 0)$ NON è combinazione lineare di v_1, v_2

DEFINIZIONE → se $v_1, v_n \in V$

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

insieme di combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$

$\langle v_1, \dots v_n \rangle$ è un SOTTOSPAZIO nV e Z è un SOTTOSPAZIO nV che contiene $v_1, \dots, v_n$ allora $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq Z$

DIMOSTRAZIONE →