RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

Sappiamo risolvere i sistemi lineari con $A|b$ è a scala
Per risolvere un sistema lineare con l'algoritmo di Gauss, lo "trasformiamo" in un sistema a scala ad esso equivalente (quindi con la stessa soluzione).

RIDURRE A SCALA: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ qui è meglio che ci si trovi 1!

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2-\frac{3}{2}R_1= \\ R_3-2R_1= \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} \\ \\ R_3+\frac{3}{2}R_2= \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{23}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=3 \\ 3x_1+x_3=2 \\ 4x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases} \longrightarrow \text{che ridotta a scala diventa} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{23}{2} \end{array}\right) \qquad rr(A|b)=rr(A)=3$$

$4x_3=-\frac{23}{2} \longrightarrow x_3=-\frac{23}{8}$

$x_2+2x_3=-6 \longrightarrow x_2=-6-2x_3 \longrightarrow x_2=-6+\frac{23}{4}=-\frac{1}{4}$

$2x_1+x_2=3 \longrightarrow 2x_1=3-x_2= x_1=\frac{13}{8}$

SOLUZIONE: $\left(\frac{13}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{23}{8}\right)$

SISTEMI PARAMETRICI

Sono sistemi lineari le cui matrici dipendono da 1 o più parametri, vogliamo capire per quali valori del parametro ci sono soluzioni ed eventualmente determinarle.

Discutere e, se possibile, risolvere il sistema associato alla matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2k+1 & 3 & 2k-1 \\ 3 & 4 & 3k+2 & k+5 & 3k-1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{trasformiamo in scala}} \begin{array}{l} \\ R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2k & 2 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 3k-1 & k+2 & 3k-1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3+R_2 \\ R_4+R_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \overset{2(k-1)}{2k-2} & 0 & \overset{2(k-1)}{2k-2} \\ 0 & 0 & \overset{3(k-1)}{3k-3} & k & 3k-2 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{2}R_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & k & 3k-2 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ (-1)R_2 \\ \\ R_4-3R_3 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & +2 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{array}\right)$$

- Se $k\neq 1$ & $k\neq 0 \rightarrow$ 4 PIVOT
  $rr(A|b)=rr(A)=4=n$ (num incognite)
  1 sola soluzione

$kx_4=1 \longrightarrow x_4=\frac{1}{k}$

$(k-1)x_3=(k-1) \longrightarrow x_3=1$

$x_2=2x_3-2x_4+1=-2-\frac{2}{k}+1=$

$=2-\frac{2}{k}+1 \longrightarrow x_2=-\frac{2}{k}-1$

$x_1=-x_2-x_3-x_4=\frac{2}{k}+1-1-\frac{1}{k} \longrightarrow x_1=\frac{1}{k}$

SOLUZIONE $\left(\frac{1}{k}, -\frac{2}{k}-1, 1, \frac{1}{k}\right)$ Una sola soluzione!

- Se $k=1$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad rr(A|b)=rr(A)=3$$

scambio ed è a scala

infinite soluzioni! che dipendono da $4-3=1$ parametro

$x_4=1$

$x_2=-2x_3-2x_4+1 \longrightarrow x_2=-2x_3-1$

$x_1=-x_2-x_3-x_4=2x_3+1-x_3-1=x_3$

$\{(x_3, -2x_3-1, x_3, 1) \mid x_3\in\mathbb{R}\}$

$\downarrow$

$\{(s, -2s-1, s, 1) \mid s\in\mathbb{R}\}$ infinite soluzioni!

- Se $k=0$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad rr(A|b)=4\neq 3=rr(A)$$

NON ha soluzione

CONCLUSIONE:

Se $k\neq 0$ e $k\neq 1 \longrightarrow$ 1 soluzione

Se $k=0 \longrightarrow$ nessuna soluzione

Se $k=1 \longrightarrow$ infinite soluzioni che dipendono da 1 parametro

---

DEFINIZIONE

Un sistema lineare si dice omogeneo se $\underline{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Un sistema lineare omogeneo ha sempre la soluzione nulla $(0,0,0,0)$, il problema è capire se ce ne sono altre.

Discutere (dire se ci sono o no soluzioni) del sistema associato alla matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 3\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha+1 & 3\alpha-2 & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 4\alpha & \alpha+1 & 0 \end{array}\right)$$

I METODO $\longrightarrow$ Se $\alpha\neq 0$ faccio $\frac{1}{\alpha}R_2$

Se $\alpha=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

II METODO $\longrightarrow$ $\begin{array}{l} \\ R_2-R_1 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 3\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 4\alpha & \alpha+1 & 0 \end{array}\right)$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ \alpha & 3\alpha & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 4\alpha & \alpha+1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2-\alpha R_1 \\ R_3-2\alpha R_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 8\alpha & \alpha+1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}R_2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \frac{1}{5}\alpha & 0 \\ 0 & 8\alpha & \alpha+1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3-8R_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \frac{1}{5}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5}\alpha+1 & 0 \end{array}\right)$$

- Se $\alpha\neq 0$ e $\alpha\neq\frac{5}{3}$
  $rr(A|b)=rr(A)=3=n$ inc
  1 sola soluzione $(0,0,0)$

- Se $\alpha=0$ otteniamo
  $rr(A|b)=rr(A)=2$
  infinite soluzioni che dipendono da $3-2=1$ parametro

- Se $\alpha=\frac{5}{3}$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rr(A|b)=rr(A)=2$
infinite soluzioni che dipendono da 1 parametro