UNA EQUAZIONE LINEARE

in n incognite è del tipo:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ con $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

- $a_1, a_2, \ldots, a_n \to$ coefficienti delle incognite
- $b \to$ termine noto
- $x_1, x_2, \ldots, x_n \to$ incognite

Una soluzione dell'equazione è una n-upla ordinata $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ di numeri reali che sostituiti a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendono vera l'uguaglianza.

Un sistema di m equazioni in n incognite è un insieme di equazioni che devono essere vere contemporaneamente

ESEMPIO SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$ una soluzione è $(3,4)$

PROPRIETÀ DELLE UGUAGLIANZE

1. aggiungendo ad entrambi i membri di una uguaglianza uno stesso numero si ottiene un'altra uguaglianza

   ES: $a = b \to a+5 = b+5$

2. moltiplicando entrambi i membri per uno stesso numero ottengo un'altra uguaglianza.

   ES: $a = b \to 3a = 3b$

ESEMPIO

$$3x_1 - 2x_2 = 5$$
$$3x_1 - \cancel{2x_2} + \cancel{2x_2} = 5 + 2x_2$$
$$\frac{1}{3}3x_1 = \frac{1}{3}(5 + 2x_2)$$
$$x_1 = 5/3 + 2/3\, x_2$$

I sistemi lineari possono avere soluzioni o no!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_1 + 5x_2 = -7 \end{cases} \longrightarrow \text{NON HA SOLUZIONE}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \longrightarrow \text{HA UNA SOLUZIONE}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \longrightarrow \text{HA INFINITE SOLUZIONE}$$

ci sono infinite soluzioni
$\{(t, 3-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ $t=0$
$\{(x_1, 3-x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ $x=0$
$\{(3-s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ $s=3$
$\{(1-s, s+2) \mid s \in \mathbb{R}\}$ $s=2$

insiemi diversi ma rappresentano la stessa soluzione

(Se è vera la prima operazione, anche la seconda sarà vera, diciamo che la seconda è superflua)

Un modo compatto per scrivere e lavorare con i sistemi lineari è usare le MATRICI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$m \to$ equazione
$n \to$ incognita
$a_{ij} \to$ coefficiente incognita $x_j \to$ nella i-esima equazione

Al sistema associo la matrice incompleta o matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

insieme delle MATRICI $m \times n$

La colonna dei termini noti è

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matrice completa è $A|\underline{b}$

Una matrice $m \times n$ è una tabella di $m \times n$ numeri (reali) distribuiti in m righe e n colonne.
Una riga può essere vista come una matrice $1 \times n$
Una colonna di lunghezza m è una matrice $m \times 1$

- Possiamo sommare due matrici $m \times n$ (deve avere stesse righe e colonne)

$A = (a_{ij})\ {}^{i=1\,m}_{j=1\,n}$ $B = (b_{ij})\ {}^{i=1\,m}_{j=1\,n}$

$C = A + B = (c_{ij})$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & \pi \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ \sqrt{3} & 0 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \sqrt{3} & \pi \\ \sqrt{2}+4 & 8 \end{pmatrix}$$

Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$ → LAMDA

λA è la matrice C con $c_{ij} = \lambda a_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \sqrt{2}A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA: La matrice $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha la proprietà che $A + \underline{0} = A$

- Se abbiamo una riga e una colonna della stessa lunghezza possiamo fare il suo prodotto

$A = (a_1 \quad a_n)$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{pmatrix}$ $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_nb_n$

$$(3,1,7)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 0 + 4 - 56 = -52$$

- Prodotto righe per colonne tra matrici

Sia $A \in M_{m \times r}(\mathbb{R})$ $B \in M_{s \times n}(\mathbb{R})$ il prodotto righe per colonne $A \cdot B$ è definito solo se $r = s$ ed è la matrice $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ dove c_{ij} è il prodotto della riga di A per la colonna j di B

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{M_{3\times 2}} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{M_{2\times 4}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 7 & 1\cdot 1 + 0 & -3+0 & 0+0 \\ -45 & 2 & -13 & -35 \\ -1 & 3 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$M_{3\times 4}(\mathbb{R})$

Nota: BA NON è definito

Oppure se AB e BA sono definiti può succedere che $AB \neq BA$ quindi il prodotto tra matrici NON gode della proprietà commutativa