APP LIN

Le applicazioni lineari sono funzioni tra spazi vettoriali che ne rispettano la struttura, cioè sono compatibili con le operazioni di somma tra vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Come vedremo le applicazioni lineari si

Definizione 5.1.2 Siano V e W due spazi vettoriali e sia $F : V \longrightarrow W$ una funzione; F si dice *applicazione lineare* se:

1. $F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,
2. $F(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{u} \in V$.

Definizione 5.1.1 Definiamo *funzione* f tra due insiemi A e B una legge che associa a un elemento di A uno e un solo elemento di B e denotiamo questa legge come:

$$f : A \longrightarrow B$$
$$a \mapsto f(a)$$

$\mathrm{Im}\, f = \{ b \in B \mid b = f(a), \text{con } a \in A \}$
$= \{ f(a) \mid a \in A \}$

Osservazione 5.1.3 È facile verificare che, se V e W sono due spazi vettoriali, una funzione $F : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare se e solo se $F(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{u})+\mu F(\mathbf{v})$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Diciamo che f è *invertibile* se esiste una funzione $g : B \longrightarrow A$ detta *inversa* di f, tale che $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$, ove in generale $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ è la funzione identità che associa a ogni elemento se stesso, cioè $\mathrm{id}_X(x) = x$. Molto spesso si indica l'inversa di f con f^{-1}.

Def di funzione iniettiva

se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

o anche $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Def di funzione suriettiva

se per ogni $b \in B$ esiste (almeno un) $a \in A$ tale che $b = f(a)$

Composizione tra funzioni

$f \quad A \longrightarrow B \qquad g \quad B \longrightarrow C$

$g \circ f \quad A \longrightarrow C$

$a \longmapsto g(f(a))$

$Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$

La valutazione della funzione somma $(f+g)(x)$ in un punto x per definizione non è altro che la somma delle valutazioni $f(x)$ e $g(x)$ nel punto $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

dove il simbolo := indica che l'uguaglianza è una definizione.

Esempio $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile} \}$

$\mathcal{T} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ sono due spazi vettoriali

$D : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}$ è lineare

$f \longrightarrow Df = f'$ (ad ogni func f associa la sua derivata)

$D(f+f') = Df + Df'$

$D(\alpha f) = \alpha D f$

Osservazione 5.1.6 A ogni matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

possiamo sempre associare la funzione $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ così definita:

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

In generale data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$L_A(e_i)$ è la i-esima colonna di A

$\forall i = 1, \ldots, n$

ove il prodotto di A per il vettore $(x_1, \ldots, x_n)$ è il *prodotto righe per colonne* definito nel Capitolo 1.

È facile verificare che L_A è un'applicazione lineare. La proprietà 1 della Definizione 5.1.2 vale per la Proposizione 1.2.1 (distributività del prodotto righe per colonne rispetto alla somma) e la proprietà 2 è una semplice verifica.

Più concisamente possiamo scrivere:

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

la linearità segue dalle props del prodotto righe per colonne

Definizione 5.4.1 Siano V e W due spazi vettoriali e sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare. Si dice *nucleo* di L l'insieme dei vettori di V la cui immagine è il vettore nullo di W. Tale insieme si indica con $\mathrm{Ker}\, L$.

$$\mathrm{Ker}\,(L) = \{ \mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W \}$$

Si dice *immagine* di L l'insieme dei vettori di W che sono immagini di qualche vettore nel codominio W, cioè

$$\mathrm{Im}\,(L) = \{ \mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = L(\mathbf{v}) \text{ per qualche } \mathbf{v} \in V \}$$

Prop $\mathrm{Ker}\, L$ è un sottospazio di V

Dim: $\mathrm{Ker}\, L = \{ v \in V \mid L(v) = \underline{0}_W \}$

1. $\underline{0}_V \in \mathrm{Ker}\, L$ perché $L(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ sì (per la prop. precedente)
2. Siano $\underline{u}, \underline{v} \in \mathrm{Ker}\, L \Rightarrow L(\underline{u}) = \underline{0}_W$, $L(v) = \underline{0}_W$. $\underline{u}+\underline{v} \in \mathrm{Ker}\, L$?
   $L(\underline{u}+\underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v}) = \underline{0}_W + \underline{0}_W = \underline{0}_W$
   ↳ L è lineare
   $\Rightarrow \underline{u}+\underline{v} \in \mathrm{Ker}\, L$
3. Sia $v \in \mathrm{Ker}\, L$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   $L(v) = \underline{0}_W$ $\quad \alpha v \in \mathrm{Ker}\, L$
   $L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha \cdot \underline{0}_W = \underline{0}_W$ sì
   ↑ L è lineare

Proposizione 5.1.4 *Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare; allora $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$*

Dimostrazione – Sia $\mathbf{v}$ un qualsiasi vettore di V. Si ha:

$$F(\mathbf{0}_V) = F(\underbrace{0\mathbf{v}}_{0 \cdot \mathbf{0}_V}) = 0\underbrace{F(\mathbf{v})}_{\in W} = \mathbf{0}_W$$

poiché app. lineare

in virtù delle proprietà in 5.1.2 e in 2.3.5 $\forall w \in W$, $0 \cdot w = 0_W$

Prop: Im(L) è un sottosp di W

2) Vediamo ora le stesse due proprietà per Im (L). Abbiamo che $0_W \in$ Im (L) per la Proposizione 5.1.4. Siano ora $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in$ ImL. Allora esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ tali che $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Dunque $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) = \underbrace{L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}_{\text{somma è chiusa in } V} \in$ Im L e $\alpha\mathbf{w}_1 = \alpha L(\mathbf{v}_1) = L(\underbrace{\alpha\mathbf{v}_1}_{\text{chiuso}}) \in$ Im(L) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposizione 5.4.8 *Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare.*

1) *L è iniettiva se e solo se* Ker $(L) = \{0_V\}$*, cioè il suo nucleo è il sottospazio nullo del dominio V.*

2) *L è suriettiva se e solo se* Im $(L) = W$*, cioè l'immagine coincide con il codominio.*

$1 \Rightarrow$ assumo L iniettivo, ovvero $\forall a,b \in V$. $L(a)=L(b) \Rightarrow a=b$
devo dim $\mathrm{Ker}(L) = \{0_V\}$.
Procedo per assurdo e assumo che oltre a 0_V ci sia anche un altro vettore u distinto che appartenga al kernel.
Per def di kernel, $L(u) = 0_V = L(0_V)$.
Quindi per def iniettività $u = 0_V$. Quindi assurdo

$1 \Leftarrow$ assumo $\mathrm{Ker}(L) = \{0_V\}$. Devo dim $\forall a,b \in V$ $L(a)=L(b) \Rightarrow a=b$
Siano a e b fissati. assumo $L(a)=L(b)$. Quindi $L(a)-L(b)=0_W$
Quindi per linearità $L(a-b)=0_W$. Quindi $a-b \in \mathrm{Ker}(L)$
Quindi $a-b=0_V$ per assioma singoletto.
Quindi $a=b$.

$2 \Leftrightarrow$ vero per def di suriettività

Teorema 5.1.7 *Siano V e W due spazi vettoriali. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V e consideriamo n vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$, non necessariamente distinti, allora esiste ed è unica un'applicazione lineare $L : V \to W$ tale che $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, L(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.* (già individuamo un'app lineare)

(mostriamo l'esistenza)

$\boxed{\text{Dim}}$: Definiamo $L \quad V \longrightarrow W$ nel modo seguente

Sia $v \in V$ allora $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$
($(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ sono le coord di v rispetto a β)

Definiamo $L(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$

Mostriamo che L è lineare

siano $u, v \in V$ mostriamo che $L(u+v) = L(u) + L(v)$

$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

$u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$

$L(u+v) = L(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)$

$= L((\alpha_1+\beta_1)v_1 + (\alpha_2+\beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n+\beta_n)v_n)$

$= (\alpha_1+\beta_1)w_1 + (\alpha_2+\beta_2)w_2 + \cdots + (\alpha_n+\beta_n)w_n$

$= \alpha_1 w_1 + \beta_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n + \beta_n w_n$

$= \underline{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n} + \underline{\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n}$

$= L(v) + L(u)$

Sia $a \in \mathbb{R}$

Mostriamo che $L(av) = aL(v)$

$L(av) = L(a(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)) =$

$= L(a\alpha_1 v_1 + \cdots + a\alpha_n v_n) =$

$= a\alpha_1 w_1 + \cdots + a\alpha_n w_n =$

$= a(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) = aL(v)$

$\Rightarrow L$ è lineare,

$\Rightarrow L(v_i) = L(0 \cdot v_0 + \ldots 1 + v_i + \ldots 0 v_n) = w_i$

Mostriamo l'unicità

Mostriamo che se $G \quad V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare tale che

$G(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \ldots n$

allora $G = L$, cioè $G(v) = L(v)$ $\forall v \in V$.

Sia $v \in V \quad v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

$G(v) = G(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 G(v_1) + \cdots + \alpha_n G(v_n)$
per def di L — G è lineare

$= \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = L(v)$

Corollario 5.1.8 *Siano V e W due spazi vettoriali. Se due applicazioni lineari $T, S : V \to W$ coincidono su di una base di V, allora coincidono su tutto V.*
(una volta che abbiamo fissato le immagini dei vettori della base allora sono la stessa app lin. ed è unica)

Proposizione 5.4.4 *Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora il sottospazio vettoriale* Im (L) *è generato dall'immagine di una qualsiasi base di V cioè, se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora:*

$$\mathrm{Im}\,(L) = \langle L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_n) \rangle$$

Dim $\mathrm{Im}\, L = \{ w \in W \mid w = L(v) \text{ con } v \in V \}$

Per mostrare che $\langle L(v_1), \ldots, L(v_n) \rangle = \mathrm{Im}\, L$

mostriamo la doppia inclusione

1 $\mathrm{Im}\, L \subseteq \langle L(v_1), \ldots, L(v_n) \rangle$

Sia $w \in \mathrm{Im}\, L \Rightarrow w = L(v)$ con $v \in V$

$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \Rightarrow$

$\hookrightarrow v_1, \ldots, v_n$ generano V per ip

$w = L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \overset{L \text{ lineare}}{=}$

$\alpha_1 L(v_1) + \cdots + \alpha_n L(v_n)$

$\Rightarrow w \in \langle L(v_1), \ldots, L(v_n) \rangle$

2 $\supseteq$) $L(v_1) \ldots, L(v_n) \in \mathrm{Im}\, L$

$\mathrm{Im}\, L$ è un sottospazio. Per la prop 3.15 con $Z = \mathrm{Im}\, L$ (sottospazio di W che contiene quei vettori)

$\Rightarrow \langle L(v_1), \ldots, L(v_n) \rangle \subseteq \mathrm{Im}\, L$

oppure ripercorrere all'indietro la dim 1
Sia $V \in \langle \ldots \rangle \Rightarrow V = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \ldots$. poiché L è lineare $\Rightarrow$
$V = L(\underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots}_{\text{comb lin base}}) \Rightarrow V \in \mathrm{Im}\, L$

Teorema 5.2.2 *Data un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, fissiamo in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ le rispettive basi canoniche. Allora possiamo equivalentemente rappresentare F in uno dei seguenti tre modi:*

non tra due spazi vettoriali qualsiasi

1. $\underbrace{\boxed{F(\mathbf{e}_1)}}_{\in \mathbb{R}^m} = a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{m1}\mathbf{e}_m$ è comb lineare dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^m$
   $\vdots$
   $F(\mathbf{e}_n) = a_{1n}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{e}_m$

   (sostituisci con e_i)

   consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ che ha nella colonna i-esima le coordinate di $F(e_i)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^m$

2. $F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$

3. $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, *ove*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Corollario

(F è una qualche L_A)

Il teorema 5.1.7 ci garantisce che OGNI APPLICAZIONE lineare $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è del tipo $F = L_A$ $(F(e_i) = L_A(e_i))$ (prodotto righe per colonne con una certa matrix)

Corollario 5.2.3 *Esiste una corrispondenza biunivoca tra le matrici $m \times n$ e le applicazioni lineari tra gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, ove si siano fissate in entrambi gli spazi le basi canoniche per rappresentare i vettori. Più precisamente all'applicazione lineare $F(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$ è associata la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e viceversa.

(2) se ho $F(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots , \;)$

Allora possiamo calcolare $F(e_1) = F(1, 0 \ldots 0)$ $F(e_2) = F(0, 1 \ldots 0)$ e così via sostituendo in (2) $x_1 = 1 \; x_2 = 0$

Proposizione 5.3.4

Siano $F \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^t$ $G \; \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^m$ applic lineari e siano A e B rispettiv le matrici ad esse associate rispetto alle basi canoniche cioè

$F = L_A$ con $A \in M_{t,n}(\mathbb{R})$

$G = L_B$ con $B \in M_{m,t}(\mathbb{R})$

Allora a $\overbrace{G \circ F}^{\text{app. lin.}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^m$ è associata la matrice BA

Dimostrazione – La dimostrazione è una semplice verifica:

$$(L_B \circ L_A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L_B\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = B\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= (BA)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L_{BA}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

In questa verifica abbiamo utilizzato la proprietà associativa del prodotto righe per colonne tra matrici.

Esempio $F \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $G \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$F = L_A$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$F(e_1)$ $F(e_2)$ $G(e_1)$ $G(e_2)$ $G(e_3)$

$G \circ F(e_1) = G(F(1,0)) = G(1,0,2) =$

$G(e_1 + 2e_3) = G(e_1) + 2G(e_3) =$

$= (2,2) + 2(0,1) = (2,4) =$

$G \circ F \sim \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 19 \end{pmatrix}$

$G \circ F(e_2) = G(F(e_2)) = G(-1,5,1) = G(-e_1 + 5e_2 + e_3) =$

$= -G(e_1) + 5G(e_2) + G(e_3) = (-2,-2) + (-5,20) + (0,1)$

$= (-7, 19)$

$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

Calcolo di nucleo e immagine di una applicazione lineare $F \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Supponiamo di avere un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e di voler determinare una base per il nucleo. Fissiamo in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ le basi canoniche, allora per la Proposizione 5.2.2 si ha che $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per un'opportuna matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Per definizione di nucleo abbiamo:

$$\operatorname{Ker} F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overbrace{A\mathbf{x} = \mathbf{0}}^{F(x) = 0_m}\}$$

cioè *il nucleo di F è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad A.* => per trovare il nucleo di un'app lin dobbiamo risolvere un sys lineare omogeneo

$\operatorname{Ker} F = \{(-3x_2 + x_4 - 3x_5, x_2, x_5 - x_4, x_4, x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$

Per trovare una base del nucleo "separiamo i parametri"

se risolviamo un sys lin. omogeneo con matrice a scala e separiamo i parametri, i vettori ottenuti sono sempre lin ind (altrimenti bisognerebbe verificarlo per dire che sono una base)

$= \{(-3x_2, x_2, 0, 0, 0) + (x_4, 0, -x_4, x_4, 0) + (-3x_5, 0, x_5, 0, x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$

$= \{x_2 \underbrace{(-3, 1, 0, 0, 0)}_{=v_1} + x_4 \underbrace{(1, 0, -1, 1, 0)}_{=v_2} + x_5 \underbrace{(-3, 0, 1, 0, 1)}_{=v_3} \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$

Vogliamo ora procedere con il *calcolo di una base dell'immagine* di un'applicazione lineare.

Supponiamo di avere un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e di voler determinare una base per l'immagine. Fissiamo in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ le basi canoniche, allora per la Proposizione 5.2.2 si ha che $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per un'opportuna matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Per la Proposizione 5.4.4 abbiamo:

$$\operatorname{Im}(F) = \langle F(\mathbf{e}_1), \ldots, F(\mathbf{e}_n) \rangle = \langle A_1, \ldots, A_n \rangle$$

ove $A_1, \ldots, A_n$ sono le colonne di A. A questo punto è sufficiente applicare l'algoritmo di Gauss (in modo diretto) ai vettori che formano le colonne di A. Ricordiamo che, per eseguire l'algoritmo di Gauss, è necessario scrivere (prendere) i vettori come righe. (eventuali righe nulle non si prendono)

Nota: Se ho una matrice A l'insieme delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$ è sempre un sottospazio, perché è proprio il nucleo dell'applicazione lineare L_A associata ad A

Teorema della dimensione 5.5.1 *Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker}(L)) + \dim(\operatorname{Im}(L)) \tag{5.1}$$

Dimostrazione – Sia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ una base per il sottospazio vettoriale Ker L. Per il Teorema del completamento (4.2.1) possiamo completare tale insieme di vettori linearmente indipendenti a una base $\mathcal{B}$ di V. Sia

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{z}_{r+1}, \dots, \mathbf{z}_n\}$$

Se proviamo che $\mathcal{B}_1 = \{L(\mathbf{z}_{r+1}), \dots, L(\mathbf{z}_n)\}$ è una base per Im (L) il teorema è dimostrato, in quanto $\dim(\operatorname{Ker}(L)) = r$, $\dim(V) = n$ e $\dim(\operatorname{Im}(L)) = n - r$ (la dimensione di Im (L) è il numero di vettori in una base e $\mathcal{B}_1$ contiene $n - r$ vettori). per 5.4.4 $\operatorname{Im} F \overset{L}{=} \langle \overbrace{F(u_1), \dots F(u_r), F(z_{r+1}), \dots F(z_n)}^{\text{vettori base}} \rangle$ ma $u_1 \dots u_r$ appartengono al nucleo $\Rightarrow$ loro immagini $= 0 \Rightarrow$ tolte

Utilizzando la Proposizione 5.4.4 e il fatto che $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ appartengono al nucleo di L possiamo subito dedurre che $\mathcal{B}_1$ è un sistema di generatori per $\operatorname{Im}(L)$. Ora mostriamo che i vettori di $\mathcal{B}_1$ sono linearmente indipendenti. Sia

$$\overbrace{\alpha_{r+1}L(\mathbf{z}_{r+1}) + \dots + \alpha_n L(\mathbf{z}_n)}^{L(\dots) = 0,\ \dots \in \operatorname{Ker} F} = 0$$

con $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Vogliamo dimostrare che $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$.

Abbiamo:

notazione giusto per agevolarci

poiché L è lineare

$$0 = \alpha_{r+1}L(\mathbf{z}_{r+1}) + \dots + \alpha_n L(\mathbf{z}_n) = L(\overbrace{\alpha_{r+1}\mathbf{z}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{z}_n}^{\Rightarrow \text{vettore la cui immagine è } 0 \Rightarrow \in \operatorname{Ker} L})$$

e dunque $\mathbf{z} = \alpha_{r+1}\mathbf{z}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{z}_n$ appartiene al nucleo di L. Poiché $\operatorname{Ker}(L) = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$, possiamo scrivere $\mathbf{z}$ nella forma $\mathbf{z} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{u}_r$, con $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\alpha_{r+1}\mathbf{z}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{z}_n = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{u}_r$$

da cui segue che

elem base di $V \Rightarrow$ ind $\Rightarrow \lambda_i = 0$

$$\alpha_{r+1}\mathbf{z}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{z}_n - (\alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{u}_r) = 0$$

e, essendo $\mathcal{B}$ una base per V, questo implica che $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, concludendo la dimostrazione del teorema. □

La formula (5.1) pone delle restrizioni sulla tipologia e sull'esistenza di applicazioni lineari tra due spazi vettoriali dati.

esempio $\dim V = 5$ $\dim W = 3$

$\dim \operatorname{Im} F \le \dim W \le 3$ $\dim \operatorname{Im} F \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} F = \dim V - \dim \operatorname{Im} F \in \{5-0, 5-1, 5-2, 5-3\} = \{5, 4, 3, 2\}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} F \neq 0$ F non è iniettiva

Proposizione 5.5.2 *Siano V e W due spazi vettoriali.*

1) *Se $\dim V > \dim W$, non esistono applicazioni lineari iniettive da V in W.* $\forall F$: app. lin. $\neg$(iniettività)

2) *Se $\dim V < \dim W$, non esistono applicazioni lineari suriettive da V in W.*

Dim ① Sia $\dim V \overset{(H1)}{>} \dim W$ e sia $F: V \to W$ lineare

assumo per dim $\neg$ che

Ricordiamo che F è iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} F = \{\underline{0}\}$ ($\underline{0}$ è lin dip.)

(anche Im F può assumere dim = 0)

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} F = 0$ (una base di $\operatorname{Ker} F$ è $\emptyset$)

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(F) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} F = \dim V$

Teorema dimensione

ma questo non è possibile perché

$\dim \overbrace{\operatorname{Im}(F)}^{\text{sottospazio di } W} \le \underbrace{\dim W < \dim V}_{H1}$

$\overset{\perp}{\Rightarrow} F$ non può essere iniettiva

b) Sia $\dim V < \dim W$

e sia $F: V \to W$ lineare. $\forall F. \neg$(suriettiva) $\Rightarrow$ assumo suriettività per dim $\perp$. da suriettività dim ImF = dim W

$\dim \operatorname{Im} F = \dim V - \dim \operatorname{Ker} F \le \dim V$

Teor della dim

$< \dim W \Rightarrow \operatorname{Im} F \subsetneq W$

$\Rightarrow F$ non può essere suriettiva

Sia $F_k: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e.g. verificare iniettività e suriettività

$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + kx_3 + kx_4,\ 2x_1 + kx_2 + kx_3,\ kx_1 + kx_2 + 6x_3 + (6-k)x_4)$

$\Rightarrow$

Svolgimento

Per la Proposizione 5.5.2 o th dimensione F non è mai iniettiva. $\dim \operatorname{Im} F \le 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} F \ge 1 \Rightarrow F$ mai iniettiva

Studiamo ora la suriettività. La matrice associata a F rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & k \\ 2 & k & k & 0 \\ k & k & 6 & 6-k \end{pmatrix}$$

(mat associata a F rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio)

$\operatorname{Im} F = \langle \dots F(e_i) \rangle$; (5.4.8) F suriettiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} F = \dim W$

$\Rightarrow$ trasposta A^T di A) e applichiamo l'algoritmo di Gauss. Si ha che: in modo diretto

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & k & k \\ k & k & 6 \\ k & 0 & 6-k \end{pmatrix}$$

e riducendo a scala si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k^2 - k - 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 0, k \neq -2$ e $k \neq 3$ tale matrice ha 3 righe non nulle, quindi Im F ha dimensione 3 e F è suriettiva.

Se $k = 0$, dopo aver scambiato la seconda e la terza riga otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi Im F ha dimensione 2 e F non è suriettiva.

Se $k = -2$ o $k = 3$ si ottiene in entrambi i casi una matrice a scala con 2 righe non nulle, quindi Im F ha dimensione 2 e F non è suriettiva.

Scelto $k = 0$, si ha che Im $F = \langle (1, 2, 0), (0, 0, 6) \rangle$ e $\mathbf{v} = (0, -1, 3) \notin$ Im F, in quanto i 3 vettori $(1, 2, 0), (0, -1, 3), (0, 0, 6)$ sono linearmente indipendenti perché sono le righe non nulle di una matrice a scala. ■

Esercizio: determinare se possibile una applic. lineare $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{Ker} F = \langle (1, 1, 0) \rangle$ e $\operatorname{Im} F = \langle (0, 5) \rangle$

controlliamo la compatibilità con il teorema della dim

$3 = \underset{1}{\dim \operatorname{Ker} F} + \underset{1}{\dim \operatorname{Im} F}$

F non esiste!

Es. Determinare se possibile una applic lin $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $F(e_1) = 5e_1 + 2e_2$

$3e_1 - e_2 \in \operatorname{Im} F$

Nota: Sappiamo che $3e_1 - e_2, 5e_1 + 2e_2 \in \operatorname{Im} F \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ deve essere $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^2$

$3 = \dim \operatorname{Im} F + \dim \operatorname{Ker} F$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} F = 1$

Va' bene anche $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ Perché? le prime due col già generano...

Non rileviamo contraddizioni con il teorema della dim.

Per costruire un applicazione è sufficiente assegnare $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$ e poi usare il teorema 5.1.7

Una F con le proprietà richieste è ad esempio data da

$F(e_1) = 5e_1 + 2e_2$ fissato

$F(e_2) = 3e_1 - e_2$

$F(e_3) = \underline{0}$

basta che esattamente due siano lin ind in modo tale che possano generare tutta l'Im = $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Determinare se possibile una appl. lin $F: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Ker} F = \langle \underset{v_1}{(1,1,0,2)}, \underset{v_2}{(0,0,1,1)} \rangle$ e $\operatorname{Im} F = \langle (2,1,1), (3,1,-5) \rangle$

Controlliamo la compatibilità con il teorema della dimensione

$$\underset{4}{\dim \mathbb{R}^4} = \underset{2}{\dim \operatorname{Ker} F} + \underset{2}{\dim \operatorname{Im} F} \quad \text{OK}$$

$\operatorname{Ker} F = \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} F$

$\Rightarrow F(v_1) = \underline{0}$ $\quad F(v_2) = \underline{0}$

Se voglio la matrice mi servirebbero $F(e_1)$ $F(e_2)$ $F(e_3)$ e $F(e_4)$

Conviene scegliere una base opportuna che contenga v_1, v_2. Completiamo v_1 e v_2 ad una base di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

aggiungendo i pivot mancanti

Abbiamo la base $\beta = \{v_1, v_2, e_2, e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$

Usiamo 5.1.7

$F(v_1) = \underline{0} = (0,0,0)$

$F(v_2) = \underline{0} = (0,0,0)$

$F(e_2) = 2e_1 + e_2 + e_3 = (2,1,1)$

$F(e_4) = 3e_1 + e_2 - 5e_3 = (3,1,-5)$

esistono infinite funzioni con le proprietà richieste

$F(v_1) = \underline{0}$ $F(v_2) = \underline{0}$

$F(e_2) = 3e_1 + e_2 - 5e_3$

$F(e_4) = -2e_1 - e_2 - e_3$

Definizione 5.6.1 Un'applicazione lineare $L: V \longrightarrow W$ si dice *isomorfismo* se è invertibile, o equivalentemente se è iniettiva e suriettiva.

Analogamente due spazi vettoriali V e W si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo $L: V \longrightarrow W$; in tal caso e si scrive $V \cong W$.

Nota Dato uno spazio vettoriale V (di dim finita) con base $\beta = \{v_1, \dots v_n\}$ la funzione

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longrightarrow (v)_\beta = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$$

con $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

è iniettiva e suriettiva, quindi è un isomorfismo, quindi V è isomorfo a $\mathbb{R}^n$

(giustificazione di "anzichè lavorare con V, ci conviene passare a coords e lavorare con R^n")

Prop 5.6.3 Due spazi vettoriali V e W sono isomorfi $\Longleftrightarrow$ hanno la stessa dimensione

Dim: $\Rightarrow$) Ip V, W isomorfi quindi esiste un isomorfismo $F: V \longrightarrow W$

F è in e su. Per il teorema della dim

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F$$

F è in $\longrightarrow \dim \operatorname{Ker} F = 0$; $\dim \operatorname{Im} F = \dim W$ ($\leftarrow F$ è su)

$\Rightarrow \dim V = \dim W$

$\Leftarrow$) $\dim V = \dim W$ costruiamo un isomorfismo tra V e W

sia $\dim V = \dim W = n$

e siano $\beta = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V

$\tilde{\beta} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W

per 5.1.7 esiste un'unica $F: V \longrightarrow W$ tale che $F(v_1) = w_1, \dots, F(v_n) = w_n$

Mostriamo che F è isomorfismo.

Notiamo che $\operatorname{Im} F = \langle F(v_1), \dots, F(v_n) \rangle = \langle w_1, \dots, w_n \rangle = W \Rightarrow F$ è su

per il teor della dim

$$\underset{n}{\dim V} = \dim \operatorname{Ker} F + \underset{n}{\dim \operatorname{Im} F}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} F = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{Ker} F = \{\underline{0}\} \Rightarrow F$ è iniettiva

Esercizio 2. (9 punti)

Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+2x_2-x_3-x_4, x_1+(k+2)x_2+kx_4, 3x_1+6x_2+kx_3+kx_4)$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $-2\mathbf{e}_1 \in \mathrm{Im}\,(F)$.

1

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & k+2 & 0 & k \\ 3 & 6 & k & k \end{pmatrix}$$

$F_k \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Per quali valori di k è suriettiva

$\mathrm{Im}\, F_k = \langle F_k(e_1), F_k(e_2), F_k(e_3), F_k(e_4) \rangle$
$= \langle$colonne di $A_k\rangle$

Vogliamo capire quando $\dim \mathrm{Im}\, F_k = 3$

Cerchiamo una base dell'immagine usando Gauss in modo diretto

2

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & k+2 & 6 \\ -1 & 0 & k \\ -1 & k & k \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ R_2-2R_1 \\ R_3+R_1 \\ R_4+R_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & k+3 \\ 0 & k+1 & k+3 \end{matrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_3 \ ☆$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & k+3 \ ☆ \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ R_3-kR_2 \\ R_4-(k+1)R_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & k+3 \\ 0 & 0 & -k(k+3) \\ 0 & 0 & (k+3)-(k+1)(k+3) \end{matrix}$$

$\cancel{(k+3)(1-k-1)}$ raccolto $= -k(k+3)$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & k+3 \\ 0 & 0 & -k(k+3) \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad R_4-R_3$$

$\mathrm{Im}\, F_k = \langle (1,1,3), (0,1,k+3), (0,0,k(k+3)) \rangle$

se $k \neq 0$ e $k \neq -3$ $\mathrm{Im}\, F_k$ ha dim 3 e F_k è suriettiva (una base di $\mathrm{Im}\, F_k$ (perché è suriettiva) è $\{e_1, e_2, e_3\}$, oppure $\{e_1+e_2+3e_3, e_2+(k+3)e_3, e_3\}$

se $k=0$ o $k=-3$ $\mathrm{Im}\, F_k$ ha dim 2

Per casa: Discutere la dim di $\mathrm{Ker}\, F_k$ al variare di k 3

non dobbiamo cercare il nucleo ma qui sfruttiamo th dim

Per quali k si ha che $-2e_1 \in \mathrm{Im}\, F_k$

$-2e_1 = (-2,0,0) \in \mathrm{Im}\, F_k$ se esiste (x_1, x_2, x_3, x_4) tale che $F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2,0,0)$ cioè se esiste $\underline{x}$ tale che

$A_k \underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ il sistema $A_k \underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha soluzione. Dobbiamo discutere il sistema

~~2° mod~~

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & k+2 & 0 & k \\ & & & \end{matrix} \left| \begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.\right)$$

A_k

Altro modo (visto che abbiamo già fatto i conti) se $k \neq 0$ e $k \neq -3$ F_k è suriettiva $\Rightarrow -2e_1 \in \mathrm{Im}\, F_k$. Restano da studiare i casi $k=0$ e $k=-3$ risolvendo il sistema con A_k

oppure $\mathrm{Im}\, F_k = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ k+2 \\ 6 \end{pmatrix}, \ldots \right\rangle$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, F_k \iff$ esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tali che $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ k+2 \\ 6 \end{pmatrix} + \ldots$

cioè $\cancel{-2} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots = -2$

$\alpha_1 + (k+2)\alpha_2 + \ldots = 0$

OTTENIAMO di nuovo il sistema con matrice $A \left| \begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$