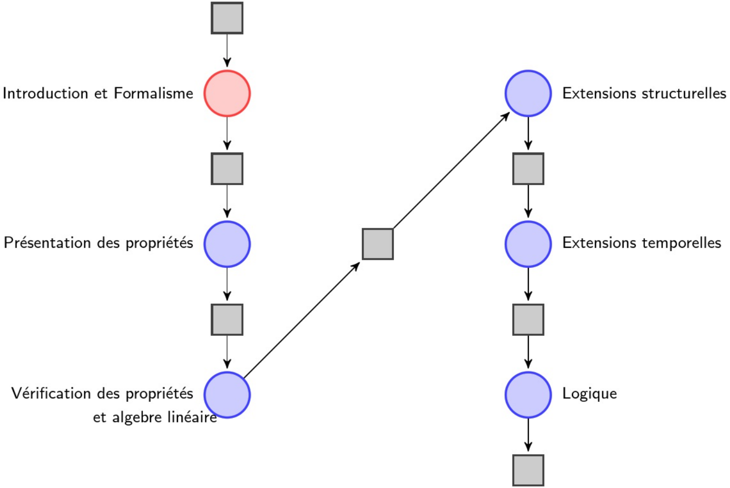
Réseaux de Petri: Formalisme

Pascal Racloz, Didier Buchs

Université de Genève

25 septembre 2017

Le formalisme



Les concepts introduits

- Définitions
- Représentation matricielle
- Fonctionnement
- Séquence de transitions
- Graphes de marquages

informel textuel

syntaxe

Langage

Sémantique

Computer

formel

Syntaxe

math simple

"set theory"

"logique"

Sémantique

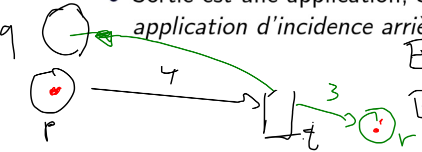
Définitions

Un réseau Place/Transition ou simplement réseau, est un quadruplet
R = (P, T, Entrée, Sortie)
où

- P est un ensemble fini de *places*
- T est un ensemble fini de *transitions*
- Entrée est une application, Entrée : $PxT \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *application d'incidence avant*
- Sortie est une application, Sortie : $PxT \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *application d'incidence arrière*

$M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$

ex:
$P = \{p_1, p_2, p_3\}$
$T = \{t_1, t_2\}$



Entree(q, t) = 0
Entree(p, t) = 4

$P = \{p, q, r\}$
$T = \{t\}$
Sortie(p, t) = 0
Sortie(q, t) = 1
Sortie(r, t) = 3

Rappel sur les notations formelles :

- Ensembles : ensembles, produit cartesien, power-set, → ensemble des parties
- Fonctions : domaine, co-domaine, fonctions partielles vs totales.
- Logique : prédicats, formules, quantificateurs.

$A, B \Rightarrow A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

domaine

$F: A \longrightarrow B = \{a \mapsto b \mid a \in A, b \in B\}$

co-domaine

$\{ \forall a, \exists$ unique $b \}$ définition en intension

$A = \{a, b, c\}$ def en extension

écriture alternative 2^A

$A = \{1, 2\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$

Fonction

$F : A \to B \subseteq A \times B$ et une condition de

A peut être un produit déterminism !
cartésien

$F : A_1 \times A_2 \times A_3 \cdots \longrightarrow A_{n+1}$

fonction à n paramètres

- totale ou partielle

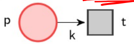
totale défini sur tous les éléments

$F : A \to B$, $\forall a \in A$ $\exists$ $F(a) \in B$

partielle, $\exists a \in A$, $F(a)$ n'est pas défini !

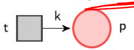
Logique : $\forall$, $\exists$

- Vocabulaire : Soit p une place($p \in P$) et t une transition ($t \in T$),
  - p est une *place d'entrée* de t si k=Entrée$(p, t) > 0$:



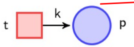
$^\bullet t = \{p \mid \text{entrée}(p,t) > 0\}$ $t^\bullet = \{p \mid \text{sortie}(p,t) > 0\}$

  - p est une *place de sortie* de t si k=Sortie$(p, t) > 0$:

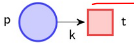


TRANSITIONS :

  - t est une *transition d'entrée* de p si k=Sortie$(p, t) > 0$:



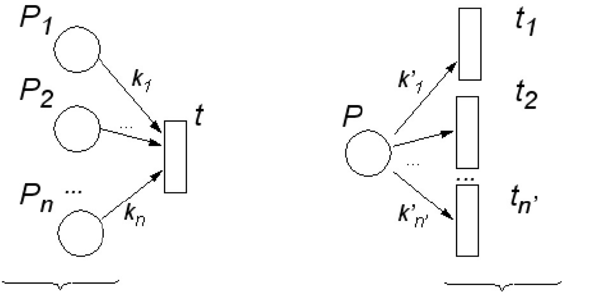
  - t est une *transition de sortie* de p si k=Entrée$(p, t) > 0$:



k ,k',l,l' sont les valuations des arcs

Entrée

Application d'incidence avant

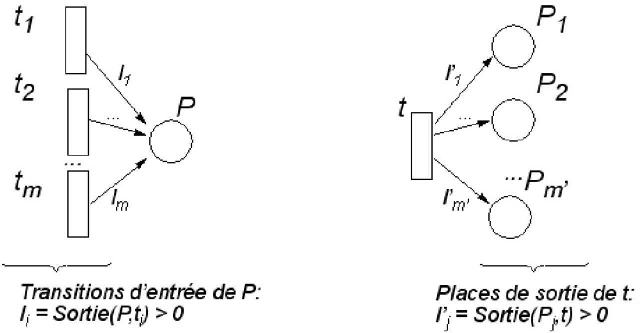


Places d'entrée de t:
$k_i = Entrée(P_i,t) > 0$

Transitions de sortie de P:
$k'_{j'} = Entrée(P,t_{j'}) > 0$

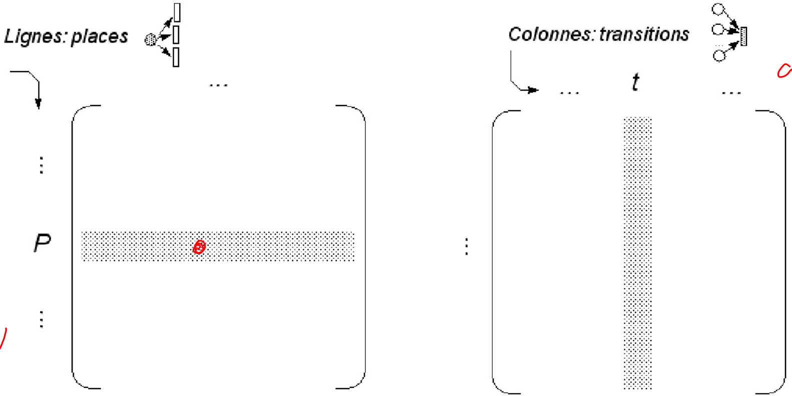
Sortie

Application d'incidence arrière



- Vers une représentation matricielle

Entrée

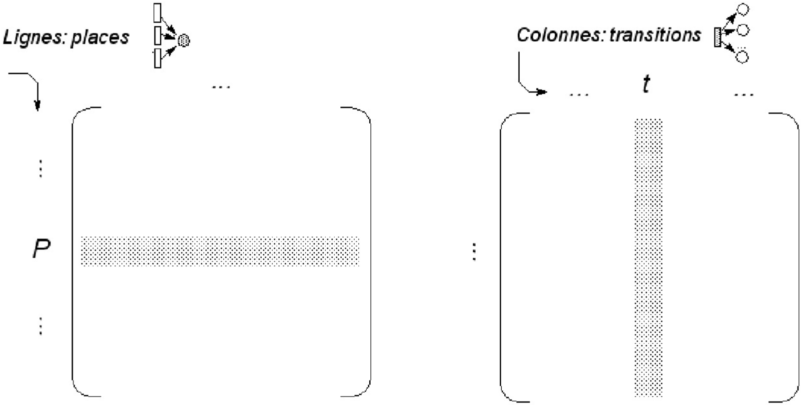


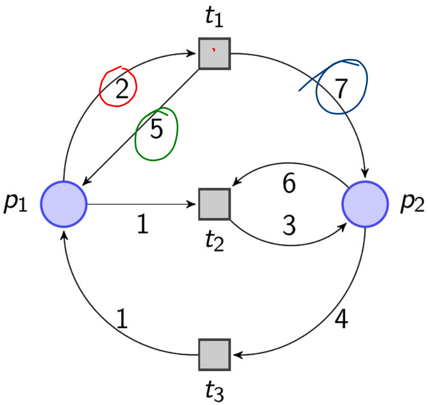
ordonnés

ordre des places

- Vers une représentation matricielle

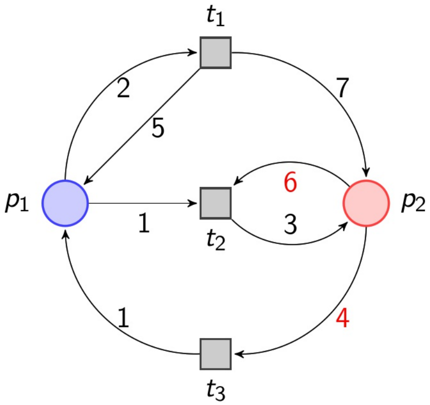
Sortie

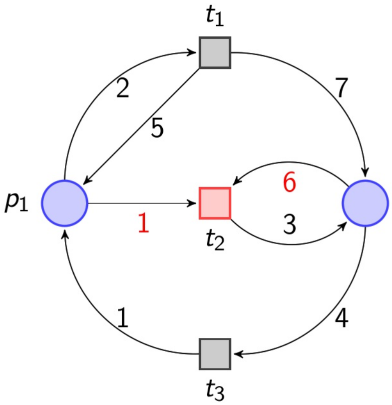




$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ & \textit{Entree} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} & \\ \textit{Sortie} & \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \end{array}$$

Représentation matricielle





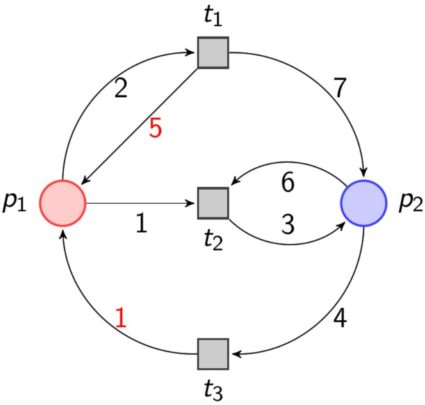
Entree

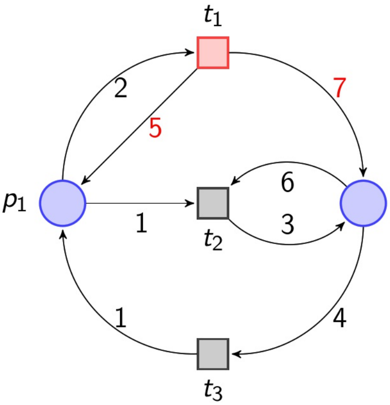
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Entree

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Représentation matricielle





Sortie

$$\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sortie

$$\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice

- Représentation graphique d'un réseau

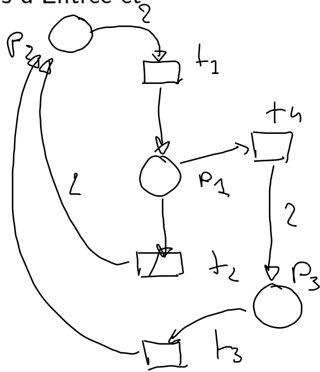
Construire le graphe du réseau décrit par les fonctions d'Entrée et de Sortie suivantes :

$P = \{p_1, p_2, p_3\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$

$$\text{Entrée} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Sortie} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$



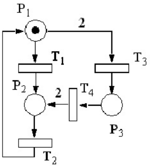
Exercice

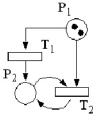
- Représentation graphique d'un réseau

Donner les matrices d'incidence pour les réseaux ci-dessous

$$E \quad \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$S \quad \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$





$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T_1 & T_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad E$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad S$$

Posent-ils des problèmes ?

$$M_0 : P \to \mathbb{N}$$

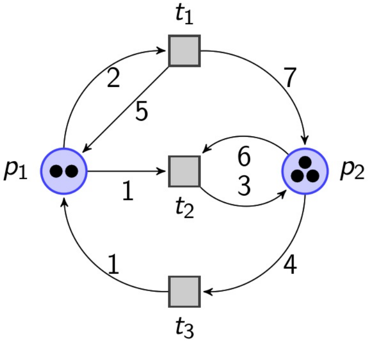
$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Marquage

Le marquage d'un réseau est son état. Formellement, un marquage est une application

$$M : P \to \mathbb{N}$$

donnant pour chaque place le nombre de jetons qu'elle contient. Le marquage initial est généralement noté M_0.



$$\begin{array}{cc} p_1 & \\ p_2 & \end{array} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fonctionnement d'un réseau (sémantique)

1 ≥ 0   2≥0

- $\boxed{\text{Une transition t est tirable}}$ pour un marquage M si et seulement si

prédicat sur $\mathbb{N}$

$$\forall p \in P, \ \ M(p) \geq \text{Entrée(p,t)}$$

Il s'agit de la condition de franchissement de t depuis M.

- $\boxed{\text{Si t est franchissable}}$ (tirable) depuis M, le tir (ou le franchissement) de t produit un nouveau marquage M' donné par

$$\forall p \in P, \ \ M'(p) = M(p) - \text{Entrée(p,t)} + Sortie(p,t)$$

(Cont'd)

- Notations
  - t tirable depuis M : $\boxed{M \xrightarrow{t}}$
  - tir de t depuis M donnant M' :

    $$M \xrightarrow{t} M'$$

  - M' = M $\boxed{- \text{Entree}(.,t) + \text{Sortie}(.,t)}$

Entree(.,t) = colonne t de la matrice Entree

E =

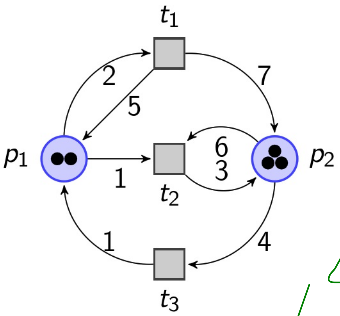
- Définition La *matrice d'incidence* d'un réseau, notée C, est définie par

$$\forall p \in P,\ \forall t \in T\ \ C(p,t) = Sortie(p,t) - Entree(p,t) \in \mathbb{Z}$$

Si $M \xrightarrow{t} M'$ alors M' = M + C(.,t)

C : P x T -> $\mathbb{Z}$

Exemple



comparaison sur les vecteurs

$$\text{Entrée}(., t_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \leq M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M_0 \xrightarrow{t_1} M$$

vecteur caractéristique

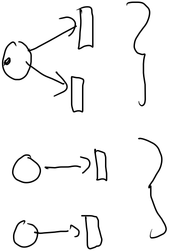
$$M = M_0 - \text{Entrée}(., t_1) + Sortie(., t_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$M = M_0 + C(., t_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}}_{\text{incidence}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \end{array}$$

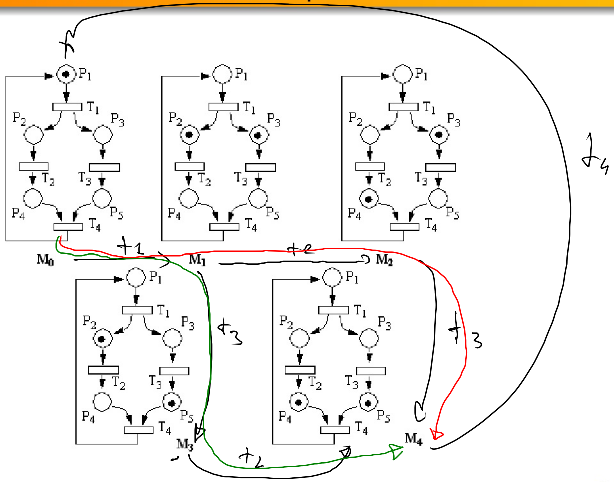


conflit

//

$$M_0 \xrightarrow{t_1\, t_2\, t_3} M_4$$

$$M_0 \xrightarrow{t_1 t_3 t_2} M_4$$



La séquence $T_1 T_2$ est une séquence de franchissements. On peut écrire

$$s = T_1 T_2$$
$$et \; M_0 \xrightarrow{s} M_2$$

- La séquence est définie à partir d'un marquage donné.
- C'est une suite de transitions franchissables successivement.

La séquence $T_1 T_2$ n'est pas une séquence de franchissement à partir de $M_0 \xrightarrow{s} M_3$

$$M_0 \xrightarrow{T_1} M_1 \xrightarrow{T_2} M_2$$

où $\overline{s}$ est le *vecteur caractéristique* de la séquence de transitions

$\overline{\ } : T^* \to \mathbb{N}^{|T|}$

$$s = t_1 t_2 \ldots t_n$$

$t_i \in T$

tel que $\overline{s}(t)$ donne le nombre d'occurrences de la transition t dans s

$$\boxed{\overline{s} : T \to \mathbb{N}}$$

$(aba) . (dd) = abadd \in T^*$

Etant donné la séquence $t_1 t_2 t_2 t_3 t_1$

le vecteur caractéristique est : $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Propriétés : $\overline{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ concatenat $s = s_1 . s_2$

$\cdot : T^* \times T^* \to T^*$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$$\Rightarrow \overline{s} = \overline{s_1} + \overline{s_2}$$

$+ : \mathbb{N}^{|T|} \times \mathbb{N}^{|T|} \to \mathbb{N}^{|T|}$ somme de vect

$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, c, aa, bb, cc, ab, ac, \ldots\}$

Vecteur

$$\overline{} : T^* \longrightarrow \mathbb{N}^{|T|}$$

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow t \quad \text{position } t$$

$$\overline{(t.s)} = \bar{t} + \bar{s}$$

Fonctions

$$\bar{t} : T \to \mathbb{N}$$

$x =$

$$\bar{t} \quad \begin{cases} \bar{t}(x) = 0 & \text{si } x \neq t \\ \bar{t}(x) = 1 & \text{si } x = t \end{cases} \quad x \in T$$

$$? \quad + : (T \to \mathbb{N}) \times (T \to \mathbb{N}) \to (T \to \mathbb{N})$$

$$f + g = h$$

$$\forall x \in T,\ h(x) = f(x) + g(x)$$

Séquence de transitions

- Etant donnée la situation où

$$M \xrightarrow{t_1} M_1,\ M_1 \xrightarrow{t_2} M_2\ \dots\ M_n \xrightarrow{t_n} M'$$

alors

$$\boxed{M' = M + C.\overline{s}}$$

$$M' = M + C\,\overline{t_1} + C\cdot\overline{t_2} + \dots C\cdot\overline{t_n}$$

$$M + C\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{t_i}\right)}_{\overline{s}}$$

où $\overline{s}$ est le *vecteur caractéristique* de la séquence de transitions

$$s = t_1 t_2 \dots t_n$$

tel que $\overline{s}(t)$ donne le nombre d'occurrences de la transition t dans s

$$\overline{s} : T \to \mathbb{N}$$

On note

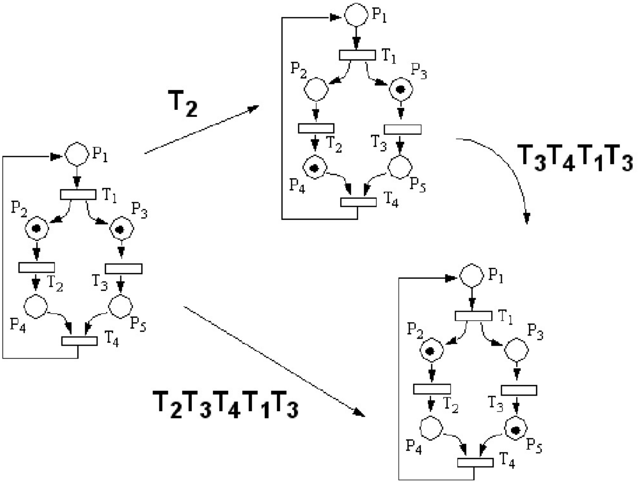
$$\boxed{M \xrightarrow{s} M'}$$

Equation Fondamentale

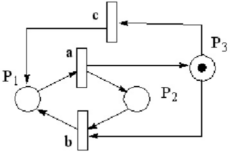
$$M' = M + C \,.\, \overline{s}$$

- $Rqs : s = s1.s2 \quad \Rightarrow \quad \overline{s} = \overline{s1} + \overline{s2}$
  $\overline{s1} = \overline{s2} \quad \Rightarrow \quad M + C.\overline{s1} = M + C.\overline{s2}$

Exemple

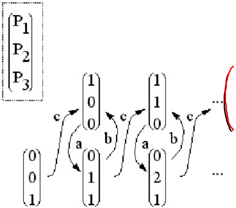


Exercice :Séquence de transitions



Matrice d'incidence:

$$\begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



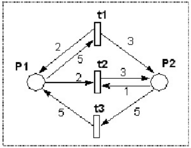
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que la séquence de transitions 'cabacacab' est franchissable
- Donner le marquage résultat en utilisant son vecteur caractéristique

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice (...)

$$C = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$



$M_0 \xrightarrow{t_2 t_3} M'$

$M_0 \xrightarrow{t_3 t_2} M''$

$M' = M_0 + C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_0 + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$M'' = M_0 + C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M_0 + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$M''' = M_0 + C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_0 + \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

- Quels sont les marquages minimums de ce réseau tels que respectivement les séquences suivantes soient franchissables ?
  - $s_1 = t_2 t_3$
  - $s_2 = t_3 t_2$

$\exists M_0$? t.q ses sont franchissables

$M', M'', M''' \geq 0$

- Pouvez-vous 'généraliser' ?
  Vérifier avec la séquence $s = t_2 t_2 t_3 t_1$. Que dire de $M_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$M' + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = M_0$ $M'' + \begin{pmatrix} +2 \\ -2 \end{pmatrix} = M_0$ $M''' + \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} =$

Corrections :

$s_{i+1} = s_i t_i$

Supposons M_i solution du problème pour S_i

$M_i + C.\overline{s_i} + C.\overline{t_i} = M_i + C.\overline{s_{i+1}}$

M_i est une solution ssi

$Entree(., ti) \leq M_i + C.\overline{s_i}$

$\Rightarrow \exists$ toujours un marquage tel que S est franchissable

$\forall s \in S^*$

Encore quelques définitions...

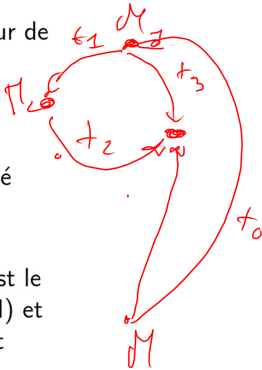
- Marquages accessibles (ou successeurs)
  Un marquage M' est un *marquage accessible* (successeur de M) s'il existe une suite de transitions $s \in T*$ tel que

$$M \xrightarrow{s} M'$$

  L'ensemble des marquages accessibles depuis M est noté A(R,M)

- Graphe des marquages accessibles
  Le *graphe des marquages accessibles*, noté $\boxed{\text{GA(R,M)}}$, est le graphe ayant comme sommets les marquages de A(R,M) et tel qu'il existe un arc entre deux sommets $M_1 et M_2$ si et seulement si

$$M_1 \xrightarrow{t} M_2 \ ou \ t \in T$$

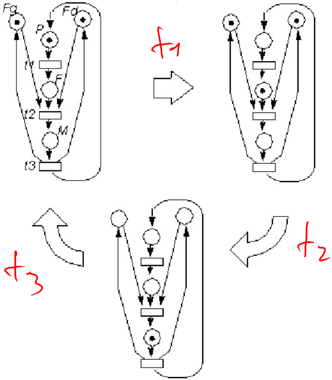


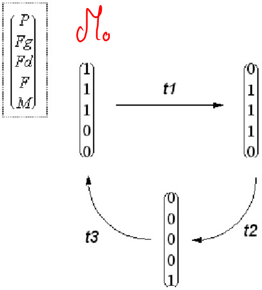
Graphe des marquages accessibles et fonctionnement

R

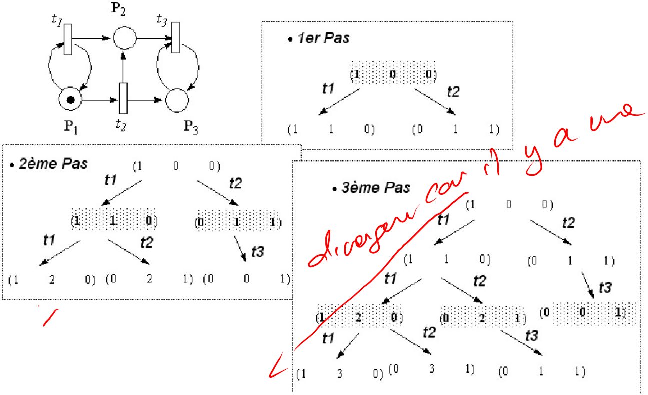
$GA(R; M_0)$

$M_0 =$





Marquages accessibles : exemple



il y a une répétition

divergence car

monotonie

($M \xrightarrow{t_1} M'$ et $M' \geq M$ chemin $\Rightarrow$ $M' \xrightarrow{t_1}$

pas borné !

Résumé

- Définition des fonctions Entrée, Sortie et Marquage
- Représentation sous forme de matrices et vecteurs
- Tirabilité et tir d'une transition
- Séquence de transitions et son utilisation dans l'équation fondamentale
- Marquages accessibles et graphe de ces marquages