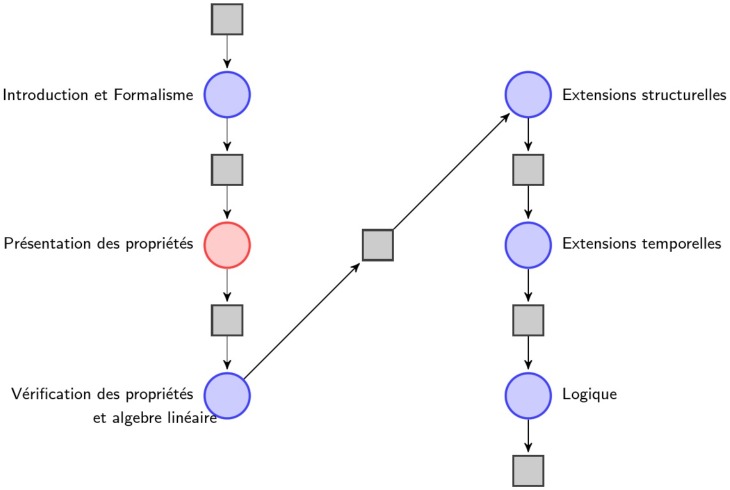
Réseaux de Petri: Présentation des propriétés

Pascal Racloz, Didier Buchs

Université de Genève

13 octobre 2014


Introduction et Formalisme
Présentation des propriétés
Vérification des propriétés
et algebre linéaire
Extensions structurelles
Extensions temporelles
Logique

Les concepts introduits

- Séquences de franchissements
- Monotonie
- Caractère borné
- Activité : vivacité, quasi-vivacité

Propriétés

Propriétés relatives à l'état, caractère borné

Le nombre de jetons circulant dans le réseau reste-t-il borné ?

Propriétés relatives à l'activité

Est-ce-qu'une partie ou l'ensemble d'un réseau peut toujours évoluer ?

Propriétés des séquences de franchissement

- Existence d'un marquage permettant le tir d'une séquence
- Monotonie
- Séquence répétitive

(Cont'd)

- Existence d'un marquage permettant le franchissement de toute séquence.
- Pour toute séquence de transitions *s*, il existe un marquage M tel que cette sequence est franchissable :

$m = |P|$

Resultat general des RdP

$\forall$ Reseau $\forall s \in T^*, \exists M \in \mathbb{N}^m tel\ que$

$$M \xrightarrow{s}$$

- Monotonie

L'augmentation du nombre de jetons dans les places d'un marquage préserve la possibilité de franchissement d'une séquence de transitions :

Si

$\forall s \in T^*$,

$$M1 \xrightarrow{s} M \text{ et } M1 \subseteq M2$$

$\forall p \in P, M_1(p) \leq M_2(p)$

Preuve : - matrice incidence
- induction sur S

alors

$$M2 \xrightarrow{s} M + (M2 - M1)$$

(Rq : $M_a \subseteq M_b$ si et seulement si $\forall p \in P \;\; M_a(p) \leq M_b(p)$)

$a < b$

$a + c < b + c$

- Séquence répétitive

Une séquence de transitions est dite *répétitive* si pour tout marquage M tel que

$$M \xrightarrow{s}$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, M \xrightarrow{s^n}$$

(Cont'd)

- La notion de séquence répétitive va nous permettre de définir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau marqué ait la possibilité d'être infiniment actif.
- On peut déjà citer le résultat suivant $\forall M, M' \in \mathbb{N}^m$

Thm

$$M \xrightarrow{s} M' \text{ et } M \subseteq M'$$

$$\Leftrightarrow$$

$$s \text{ est répétitive}$$

Preuve

monotonie

+ induction

+ $\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Exercice

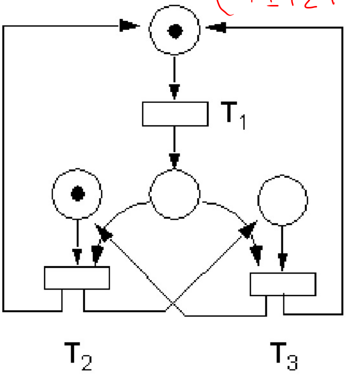
- Quelles sont les séquences répétitives ?

$(t_1 t_2 t_1 t_3)^*$

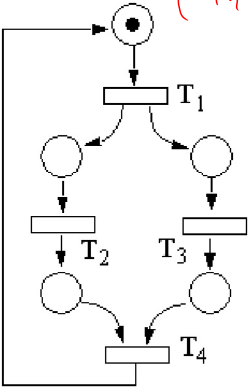
$(t_1 t_2 t_3 t_4)^*$

$(t_1 t_3 t_2 t_4)^*$

2



- a -



- b -

Réseau borné

Cette partie définit et caractérise la possibilité pour une place d'accumuler une quantité bornée ou pas de jetons au cours de l'évolution d'un réseau.

- Place k-bornée, non-bornée

Pour un réseau R et un marquage M_0 une place p du réseau marqué (R,M_0) est k-bornée si pour tout marquage M accessible depuis M_0, $M(p) \leq k$.
Dans le cas contraire la place p est dite non-bornée.
Autrement dit :

$$p \text{ k-bornée} \Leftrightarrow \forall M \in \boxed{A(R, M_0)}, \; M(p) \leq k$$

(Cont'd)

- Un réseau (marqué) est borné si toutes ses places sont bornées
- Les réseaux 1-bornés sont appelés réseaux saufs

Exemple :

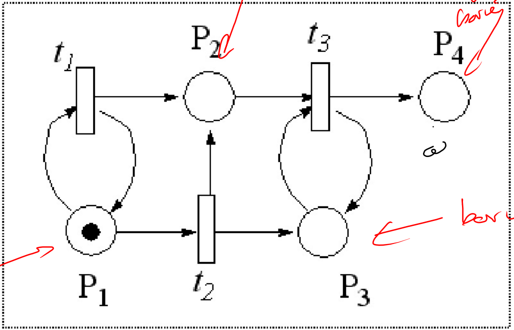
non borné

$M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_1}$

$M_1 \geq M_0 + 1$ sequence répétée

$M_1(p_2) > M_0(p$

non borné



$\forall n$

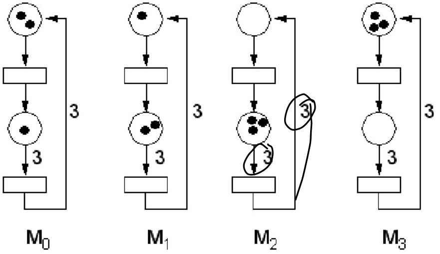
$(t_1)^n \, t_2 \, (t_3)^n$

bornée

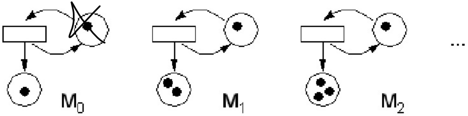
borné

$K = 1$

Exemples



structurellement borné



non borné

- Propriété dépendant du marquage initial
- **Structurellement borné** : rdP borné pour tout marquage initial fini

Séquence répétitive croissante

- Une séquence répétitive est dite croissante pour une place p si pour tout couple de marquages M, M' (i.e. $M \subseteq M'$) tel que

$$M \xrightarrow{s} M'$$

$$M \xrightarrow{s} M' \xrightarrow{s} M'' \text{---}$$

alors

$\exists p \in P$, $\quad M'(p) > M(p)$

$M(p) = n \quad M'(p) = n'$

$n \leq n' < n'' < \text{---}$

- Résultat :
  Un réseau marqué (R, M_0) est non-borné $\boxed{\text{si et seulement si}}$ il existe une séquence répétitive s croissante pour une place p, un marquage M accessible depuis M_0 tels que

donc p est non borné

1000   1000

$$M \xrightarrow{s}$$

Activité d'un réseau

La notion d'activité d'un réseau recouvre deux classes de définitions. La première concerne *l'activité individuelle* des transitions, la seconde concerne *l'activité globale* d'un réseau (indépendamment de transitions particulières).

Quasi-vivacité

- La quasi-vivacité d'une transition signifie que depuis le marquage initial cette transition peut être franchie au moins une fois.
  Autrement dit, pour un réseau marqué (R, M_0)

$$t \in T\ quasi-vivante \Leftrightarrow \exists M \in A(R, M_0), M \xrightarrow{t}$$

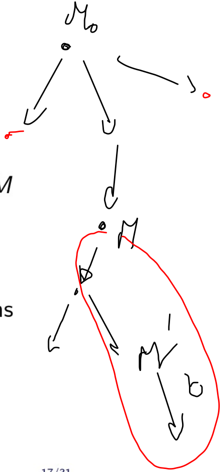
  Une transition qui nest pas quasi-vivante est inutile !
- Un réseau est *quasi-vivant* si toutes ses transitions le sont.
- La propriété de monotonie implique qu'une transition quasi-vivante pour (R,M) le reste pour (R,M') où $M' \supseteq M$.

Vivacité

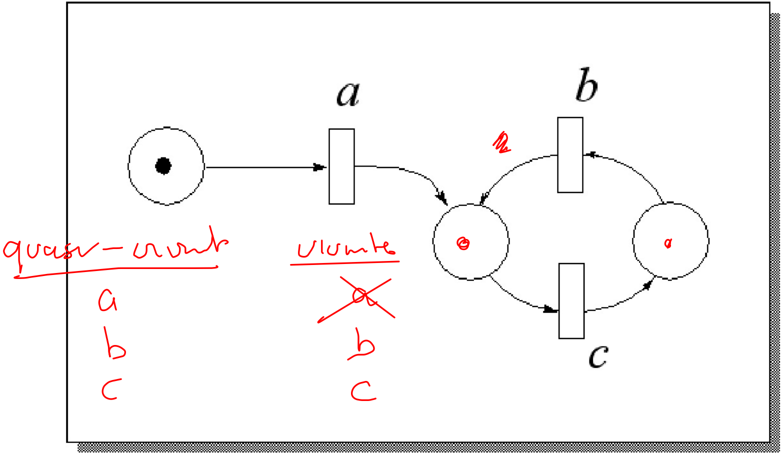
- La vivacité d'une transition exprime le fait que quelque soit l'évolution du réseau à partir du marquage initial, le franchissement à terme de cette transition est toujours possible. Autrement dit, pour un réseau marqué (R, M_0)

$$t \in T \ vivante \Leftrightarrow \forall M \in A(R, M_0), t \ est \ quasi-vivante \ pour \ M$$

- Un réseau est *vivant* si toutes ses transitions le sont.
- Contrairement à la quasi-vivacité, la vivacité d'une transition n'est pas forcément conservée par une augmentation de jetons dans les places. La vivacité n'est pas monotone.



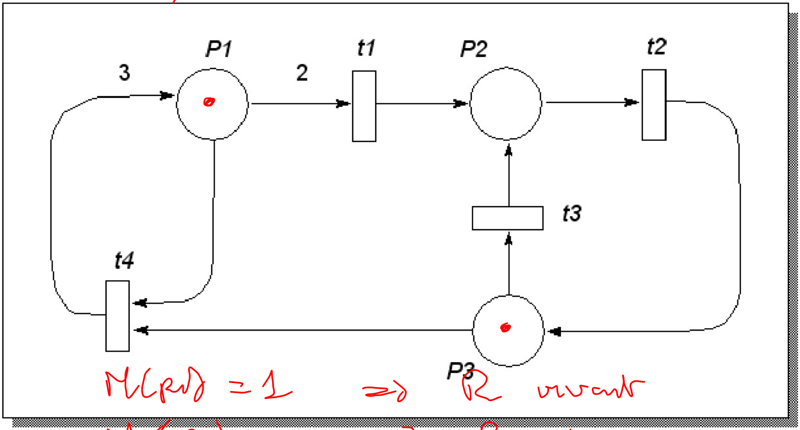
Vivacité, quasi-vivacité



Qui est vivant, quasi-vivant ?

Vivacité et monotonie

monotonie $\not\Rightarrow$ vivacité préservée



$M(P_1) = 1 \Rightarrow R$ vivant

$M(P_1) = 2 \Rightarrow R$ n'est pas vivant (du pas un t1)

$M(P_1) = 3 \Rightarrow R$ vivant

Pour quels marquages, respectivement classes de marquages le rśeau est vivant et non-vivant ?

- Une séquence répétitive est dite complète si elle contient au moins une occurrence de chaque transition.

$M_0 \xrightarrow{s^*}$ $\forall t$, t appartient à s

- Résultat :
Un réseau marqué (R, M_0) est vivant si et seulement si pour tout marquage accessible M, $M \in A(R, M_0)$, il existe un marquage M' accessible depuis M et une séquence complète s tels que

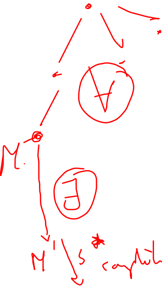
$$M' \xrightarrow{t}$$

i.e.

$$(R, M_0) \ \textit{est vivant}$$

$$\Leftrightarrow$$

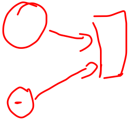
$$\forall M \in A(R, M_0), \exists M' \in A(R, M) \ \exists s \in T^* \text{complète } \textit{tels que } M' \xrightarrow{s}$$



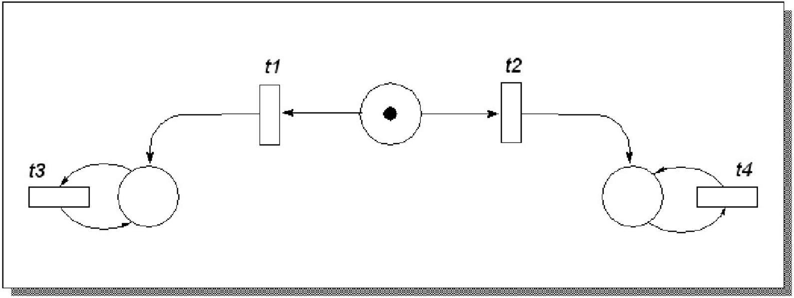
Absence de blocage

Cette propriété est plus faible que celle de vivacité, elle implique seulement que le réseau a toujours la possibilité d'évoluer.

- Marquage puits
  Un marquage puits est un marquage à partir duquel aucune transition n'est tirable.
- Un réseau marqué est sans blocage si aucun de ses marquages accessibles n'est un marquage puits.
- Vivacité et sans blocage sont deux notions bien distinctes. Un réseau peut être sans blocage bien qu'aucune de ses transitions soient vivantes.



Vivacité et marquage puits



Ce rseau est-il vivant ? a-t-il un marquage puits ?

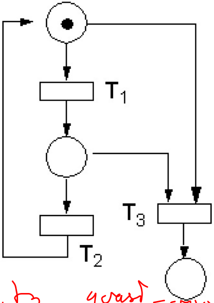
· quasi-vivant

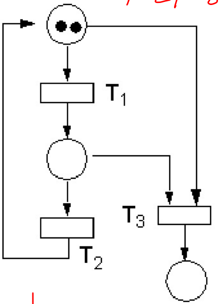
· ∄ t vivante

pas de marquage

Exemples

t_1, t_2, t_3 quasi-vivants





t_1, t_2 quasi-vivants

- a -

t_1, t_2 vivants

t_3 pas quasi-vivants

$M_0 \xrightarrow{t_1 t_3} M$

- b -

M marquage puits

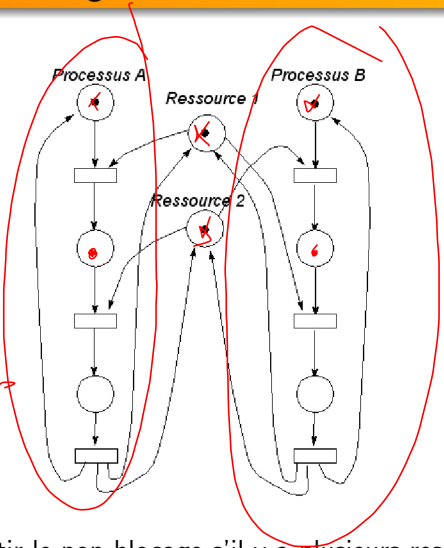
$\Rightarrow$ pas vivant réseau bloqué

- Vivacité, blocage : dépendant du marquage initial
- **Structurellement vivant** : il existe un marquage initial tel que le réseau est vivant

Exemple d'Interblocage

Solution !

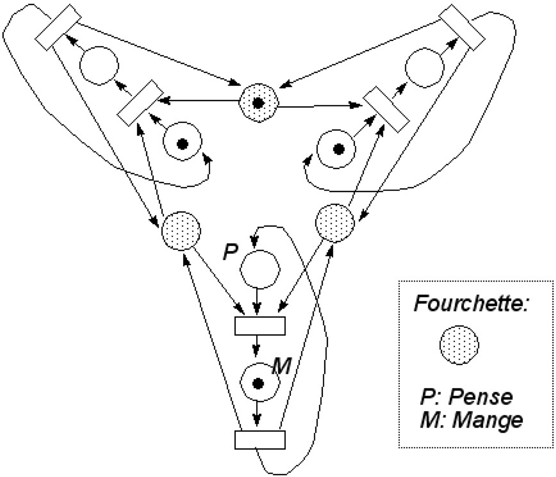
- prendre toute les ressources en même temps (verrou)
- ordonnancement des accès



Comment garantir le non-blocage s'il y a plusieurs ressources à acquérir par plusieurs processus ?

Famine

Les philosophes (3)



Définitions connexes

Un rdP a un **état d'accueil** M_a pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible M_i il existe une séquence s telle que

$\leftarrow A(R, M_0)$

$$M_i \xrightarrow{s} M_a$$

Un rdP est **réinitialisable** (ou **réversible**) pour un marquage initial M_0 si M_0 est un état d'accueil.

etat d'accueil

Définitions connexes (cont'd)

Un rdP est **répétitif** s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence s franchissable telle que chaque transition apparaît un nombre illimité de fois.

Un rdP est **consistant** s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence franchissable s qui contient au moins une fois chaque transition telle que

$$M_0 \xrightarrow{s} M_0$$

$M_0 \; \exists \xrightarrow{s}$

$\forall t \in s$ et t apparaît une infinité de fois

$M_0 \xrightarrow{s} M_0$

Exercices : validité des équivalences ?

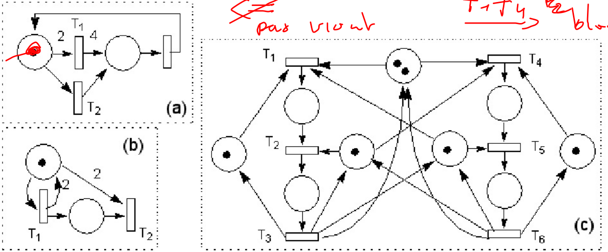
	Structurellement borné	$\Leftrightarrow$	Borné	(a)
?	Vivant	$\Leftrightarrow$	Structurellement vivant	
	Structurellement vivant	$\Leftrightarrow$	Répétitif	(b)
	Vivant et réversible	$\Leftrightarrow$	Consistant	(c)

$t_4 t_5 t_6 t_1 t_2 t_3$

consistants

pas vivant

$t_1 t_4$ bloqué



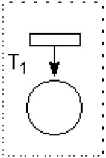
$(t_1 t_2)^n \to M$

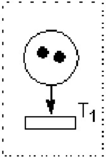
Exercices : validité des propriétés ?

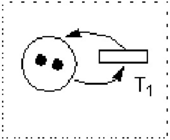
- Borné ? Vivant ? Sans blocage ?
- Répétitifs ? Répétitifs croissants ?

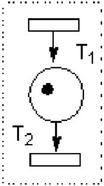
non borné
vivant
sans blocage
répétitif croissant

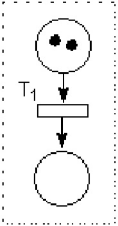
borné
non - vivant
blocage
non - répétitif











non borné
vivant
sans - blocage
répétitif croissant

borné
vivant sans blocage
répétitif non croissant

borné
non vivant
blocage
pas répétitif

(Contd)

- Borné ? Vivant ? Sans blocage ?

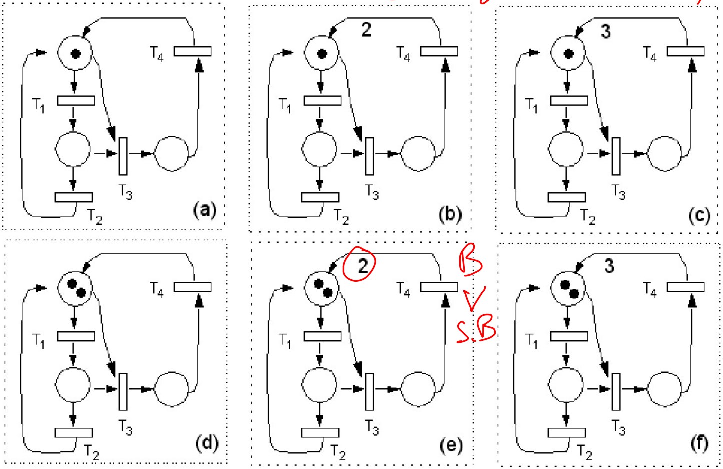
idem (a) idem a)

B
N-V
SB

B
N-V
S-B

B
V
S.B

N B
V
S.B



Résumé

- Propriétés étudiées dans un rdP : son caractère borné et son activité
- Séquence de franchissements : répétitive, croissante
- Notions d'activité : quasi-vivacité, vivacité
- Relations entre les propriétés avec la monotonie et les séquences de transitions
- Notions complémentaires : marquage puits, interblocage et famine