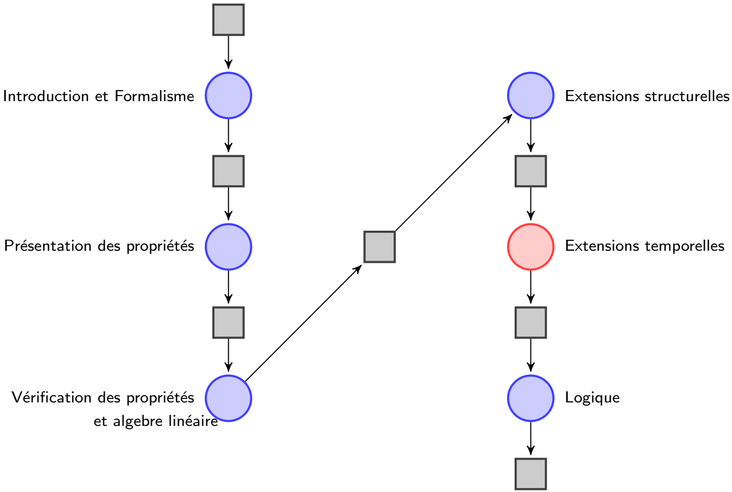
Réseaux de Petri Temporisés

Didier Buchs

Université de Genève

26 novembre 2013


Introduction et Formalisme
Présentation des propriétés
Vérification des propriétés
et algebre linéaire
Extensions structurelles
Extensions temporelles
Logique

Motivations

Utilisation d'abstraction temporelle (notion d'horloge relative ou absolue), indispensable pour des systèmes critiques (temps-réel) devant satisfaire des contraintes d'échéance.

- Introduction d'informations temporelles sur la durée des activités
  - temporisation déterministes (TPN). Temps delta(t) a une taille fixe
  - temporisation déterministe et fréquence de mise à feux (GTPN) avec choix probabilistes. probabilite de transition
  - temporisations stochastiques (SPN).

Chaine de Markov

taille de delta(t) suit une courbe

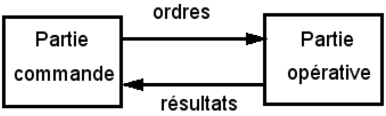
- besoin de résultats quantitatifs sur les performances :
  - analyse de temps de cycle
  - analyse de temps avant terminaison
  - usage des ressources

Caractéristiques des réseaux de Petri temporisés (RdPT)

Temporisations deterministe

- Systèmes dépendants d'un environnement (réseaux non-autonomes)

Avec horloge



- L'environnement fournis la référence unique de temps
- Puissance d'expression supérieure aux réseaux de Petri prédicats transitions
- Deux modèles :
  - duree — durées attachées aux transitions ou aux places — duree = delta(t)
  - delais — intervalle pendant lequel une transition peut-être franchie

RDPT - durée vs délais

- temporisation avec des durées
  les transitions sont franchies dès que possibles
  les transitions ne sont pas instantanées
- temporisation avec des délais
  les transitions sont franchies à des temps donnés compris dans un intervale
  les transitions sont instantanées

RDPT - temps constant vs variable

- Temps de franchissement constants
  les temps de franchissement sont définis de manière statique
- Temps de franchissement variables
  les temps de franchissement sont définis de manière dynamique

RDPT - temps relatif vs absolu

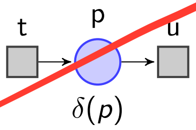
- Temps de franchissement relatif
  les valeurs du temps sont définies par rapport au moment où les transitions deviennent franchissables
- Temps de franchissement absolu
  on se base sur une origine absolue du temps

Réseaux de Petri temporisés (durée)

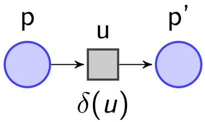
Durée : Deux manières de prendre en compte le temps

sur les places : $\delta : P \to \mathbb{Q}^+$

Identique qu'au transition

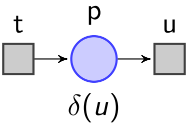


sur les transitions : $\delta : T \to \mathbb{Q}^+$

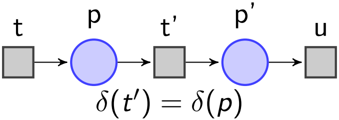


Equivalence des deux approches

L'approche avec le temps sur les places : $\delta : P \to \mathbb{Q}^+$



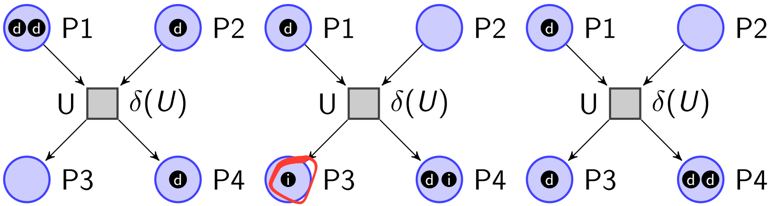
peut-être traduit avec le temps sur les transitions de la manière suivante :$\delta : T \to \mathbb{Q}^+$



Pour la suite nous utiliserons l'approche avec le temps attaché aux transitions

Les marques peuvent- être : disponibles (d) ou indisponibles (i)

d



i

$t = 0$ M_0

$0 < t < \delta(u)$ M_1 indisponible

$t >= \delta(u)$ M_2 disponible

d = disponible
i = indisponible

Types de transitions :

- $\delta(u) > 0$ transitions retardées
- $\delta(u) = 0$ transitions immédiates (instabilités temporelles possibles !, effet de Zenon d'Élée comme l'explique la fable du lièvre (ou d'Achille) et de la tortue)

Nous étudierons premièrement les réseaux : avec *durée*, *temps de franchissement constant* et *temps relatif*.

Zenon = infinite de transition dans un temps fini/0

Définitions formelles d'un réseau temporisé

Definition (Réseau temporisé)

R $= < P, T$,Pré, $Post, \delta >$
avec P, T finis
Pré : $PxT \rightarrow \mathbb{N}$
Post : $PxT \rightarrow \mathbb{N}$
$\delta : T \rightarrow \mathbb{Q}^+$

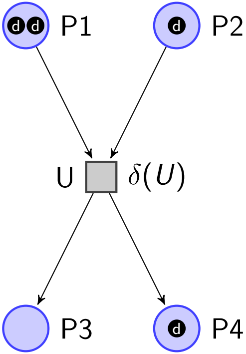
Marquage initial d'un réseau temporisé :
$M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$

Définitions formelles de l'état d'un réseau temporisé

- Marquage d'un réseau temporisé :
  $M^t = < M_d, M_i >$ avec :
  - $M_d \in (P \rightarrow \mathbb{N})x(\mathbb{Q}^+)$ *marquage disponible instantané* au temps $t \in \mathbb{Q}^+$.
  - $M_i \in \wp((P \rightarrow \mathbb{N})x(\mathbb{Q}^+))$ *marquages indisponibles* avec le moment de disponibilité indiqué par $t \in \mathbb{Q}^+$.

Ensemble de couple indisponibilite et duration

Exemple de graphe de marquage :



$$M_1 = << (2,1,0,1), 0 >, \{\}$$

$$\Big\downarrow u$$

$$M_2 = << (1,0,0,1), 0 >, \{< (0,0,1,1), 3 >\} >$$

disponible indisponible

$$\Big\downarrow \epsilon$$

$$M_3 = << (1,0,1,2), 3 >, \{\} >$$

La règle de franchissement indique que les transitions sont tirées dès qu'elle peuvent être tirées (éventuellement en même temps).

Construction du graphe des marquages

Soit $M^t =<< M_d, t >, M_i >$

1. M^t est un marquage franchissable pour une transition u si : $M_d >= Pre(u, .)$ alors M'^t est le marquage successeur de M^t : $M'^t =<< M_d - Pre(u, .), t >, M_i \cup < Post(u, .), t + \delta(u) > >$

$$M^t \xrightarrow{t} M'^t$$

2. Le temps peut evoluer sans modifier le marquage disponible si $t' < Min_t(M_i)$:
$M'^t =<< M_d, t' >, M_i >$

$$M^t \xrightarrow{\epsilon} M'^t$$

3. Les marques indisponibles deviennent disponibles :
Soit $M_i = M_{i'} + < M, t' >$ avec $t' = Min_t(M_i)$
$M'^t =<< M_d + M, t' >, M_{i'} >$

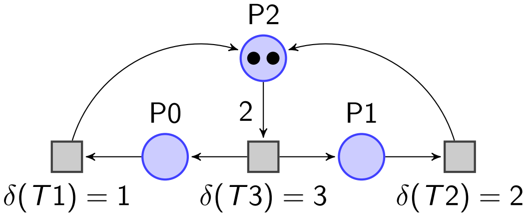
$$M^t \xrightarrow{\epsilon} M'^t$$

Remarques :

- L'usage de la règle 2 introduit la notion de choix de démarrage d'activité.
- Dans les entiers relatifs l'usage de cette règle pose le problème d'une infinité d'états de démarrage d'activités intermédiaires (densité de $\mathbb{Q}$).Pour effectuer des simulations un temps discret est nécessaire.
- Si la règle 2 est inutilisée, le graphe des marquages construits correspond à un système en fonctionnement propre (ou maximal).
- les labels du graphe de marquage sont définis sur $T \cup \{\epsilon\}$.
- Par rapport à un réseau de Petri classique, les ϵ induisent des embranchements suplémentaires, complexifiant considérablement le graphe des marquages.

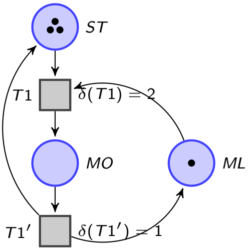
Exercice :

Calculer le graphe des marquages du réseau suivant ($t_{max} = 8\,!\,!$).



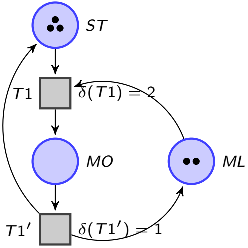
Exercice :

Calculer le graphe des marquages du réseau suivant ($t_{max} = 5$! !).



Exercice :

Calculer le graphe des marquages du réseau suivant ($t_{max} = 5$! !).



Exercice :

Modéliser un système de feux de signalisation, pour un croisement de routes ou les piétons prolongent l'arrêt des véhicules s'ils demandent le passage.

Temporisation avec des délais sur les transitions

Le modèle avec durée modélise bien les problèmes de performance. Du reste nous verrons à la fin de ce chapitre l'usage de probabilité pour l'évaluation de performance.
Néanmoins il semble plus expressif de donner une latitude à l'instant ou un événement se produit.

- Délai pendant lequel un évenement peut se produire
- Deux approches : *franchissabilité possible* ou *indispensable* pendant le délai.

$\Rightarrow$ Weak time semantics (WTS)
$\Rightarrow$ Strong time semantics (STS)

RDPT - jetons estampillés

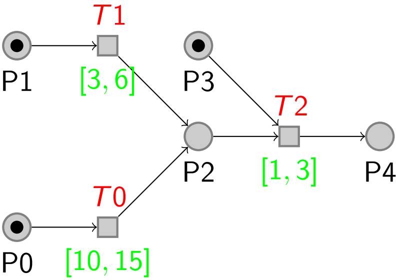
Chaque jeton est estampillé avec le moment de sa création, càd le moment où il est produit par une transition comme dans les RdP à durée.

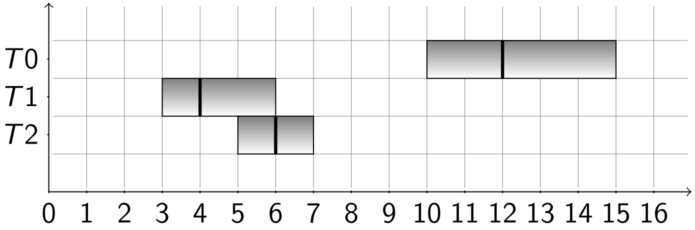
- le moment où une transition devient franchissable est donné par le max des estampillages sur les jetons concernés (dans les places de pré-condition)
- Le mode de fonctionnement implique deux choix quant au tir des transitions :
  - Sémantique de contrainte faible (WTS)
  - Sémantique de contrainte forte : (STS)

RDPT - Weak Time Semantics (WTS)

- pour chaque transition, on a un T_{min} et un T_{max} qui sont relatifs au moment où la transition devient franchissable
- Les franchissements n'ont lieu que pendant les valeurs comprises entre T_{min} et T_{max} y compris.
- Les transitions peuvent ne pas être franchies !

RDPT - WTS Exemple





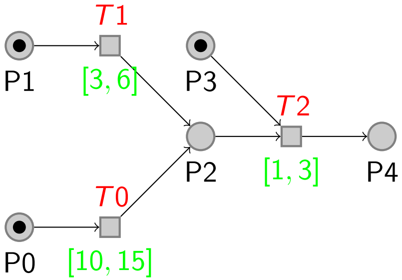
Séquence de franchissement : f(T0) = 12 ; f(T1) = 4 ; f(T2) = 6

RDPT - Strong Time Semantics (STS)

Même contraintes de base que WTS +

- les transitions doivent être franchies, sauf si elles deviennent inactives suite à d'autres franchissements
- il existe une échéance dynamique (égale au min des T_{max} de toutes ces transitions) avant laquelle il y aura de toute façon un franchissement.

RDPT - STS Exemple



Séquence de franchissement : $f(T0) = 12; f(T1) = 4; f(T2) = 6$
Remarque : $T_{min}(T0) = 10$ est supérieure à l'échéance fixée par $T_{min}(T1) = 6$, ce qui rend T0 inactif (non-franchissable) au temps 0, malgré l'existence de la ressource en P0. Il sera pris en compte plus tard.

Modèle de RDPT - Merlin & Farber

- Temporisation sur les transitions.
- Les valeurs temporelles sont relatives au moment où la transition devient franchissable.
- Les valeurs temporelles sont données par des intervalles fermés de bornes constantes (sauf pour la borne infinie).
- Strong Time Semantics

RDPT - Merlin & Farber

Un réseau de Petri temporisé et donné par le tuple :
$RT = <$P,T,Pré,$Post, F, M_0 >$

- P : ensemble fini de places
- T : ensemble fini de transitions
- Pré : $PxT \rightarrow \mathbb{N}$
- Post : $PxT \rightarrow \mathbb{N}$
- F : $T \rightarrow \mathbb{Q}_0^+ x \mathbb{Q}_0^+$, fonction de temps finie sur les transitions

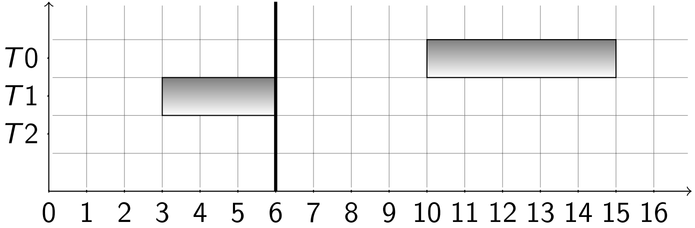
  $\Rightarrow$ $\forall t \in T, T_{min}(t) = \pi_1(F(t))$ étendu vers $T_{min} : \wp(T) \rightarrow \mathbb{Q}^+$

  $\Rightarrow$ $\forall t \in T, T_{max}(t) = \pi_2(F(t))$ étendu vers $T_{max} : \wp(T) \rightarrow \mathbb{Q}^+$

  et $\forall t \in T, \pi_1(F(t)) \leq \pi_2(F(t))$
- $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$

- Soit $Tr(M) = \{t \in T | \ M \ \subseteq \ Pre(.,t)\}$ où M est le marquage courant et $Pre(.,t)$ est l'ensemble des pré-conditions sur la transition t. $Tr(M)$ est l'ensemble des transitions dont les ressources sont disponibles.
- Soit $Tf(M) = \{t \in Tr(M) | min(T_{max}(Tr(M))) \ \geq \ T_{min}(t)\}$. $Tf(M)$ est l'ensemble des transitions franchissables.

Exemple :



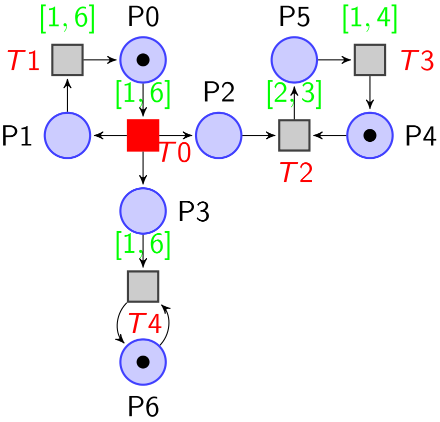
Pour $M = (1,1,0,1,0)$ la limite $min(T_{max}(Tr(M))) = 6$ ce qui implique que $Tf(M) = \{T1\}$.

RDPT - M&F - Sémantique

- STS implique une transition t_i de Tf devra être franchie depuis M : entre $T_{min}(t_i)$ et $min(T_{max}(Tr(M)))$, sauf si t_i devient inactive suite à d'autres franchissements.
- L'échéance $min(T_{max}(Tr(M)))$ est redéfinie chaque fois que la transition fixant cette échéance n'est plus franchissable ou si une nouvelle transition s'ajoute à Tf .

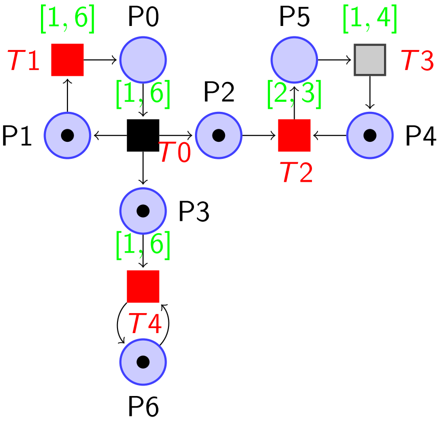
Remarque : les franchissements des $t_i \in Tf$ peuvent se faire simultanément.

Exemple :



temps courant = 0 et le marquage correspondant :
$U(mark) = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ tous les jetons sont marqués par le temps 0.
$\Rightarrow Ets(mark) = \{T0\} \Rightarrow$ temps limite $D = 6$

Exemple (suite)

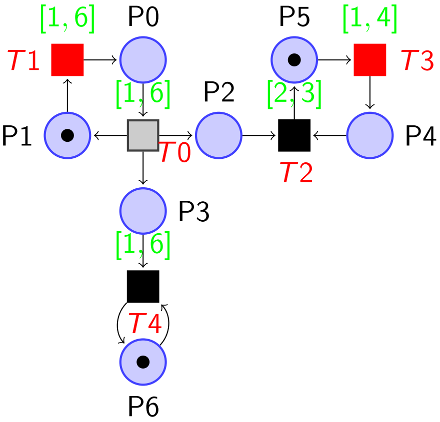


Seulement T0 peut (et doit) tirer entre 1 et 6. Soit 4 est le temps de tir de la transition T0 :

$\Rightarrow t = 4, U(mark) = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$

$\Rightarrow Ets(mark) = \{T1, T2, T4\}, D = 7$

Exemple : (suite)



Nous supposons que T2 et T4 se tirent simultanement au temps 6 : $\Rightarrow t = 6, U(mark) = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$
$\Rightarrow Ets(mark) = \{T1, T3\}, D = 10$

Exercice : Correspondance entre délais et durées

Exercice :

Modéliser un système de feux de signalisation, pour un croisement de routes ou les piétons prolongent l'arrêt des véhicules s'ils demandent le passage.

RDPT - M&F - Marquage, espace d'état

Le marquage d'un réseau de Petri temporisé est donné par le tuple : $M_t =< M_d, H >$ avec :

- $M_d : P \to \mathbb{N}$, marquage disponible instantané au temps courant s .
- $H : T \to \mathbb{Q}_0^+ \cup \{\perp\}$, transition rendue franchissable et le temps depuis lequel elles le sont.

Un marquage va évoluer selon deux modes :

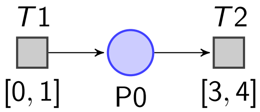
- $\forall \Delta t \in \mathbb{Q}_0^+, M_k \xrightarrow{\sigma(\Delta t)} M_l$
- $\forall t \in T, M_i \xrightarrow{t} M_j$

- séquence de transitions : $\sigma = t_1 ... t_n$
- exécution (run) : $\sigma(\tau) = \tau_0 t_1 \tau_1 ... \tau_{n-1} t_n \tau_n, \forall \tau_i \in \mathbb{Q}_0^+$
- exécution faisable : $z_0 \xrightarrow{\sigma(\tau_0)} z_0^* \xrightarrow{t_1} z_1 \xrightarrow{\sigma(\tau_1)} z_1^* ... \xrightarrow{t_n} z_n \xrightarrow{\sigma(\tau_n)} z_0^*$
- séquence de transitions faisables : σ est faisable si il existe une exécution faisable $\sigma(\tau)$

Espace d'état :

$$StSp(Z) = \{z | \text{ il existe une exécution faisable } \sigma(\tau) \text{ in } Z \wedge m_0 \xrightarrow{\sigma(\tau)} z\}$$

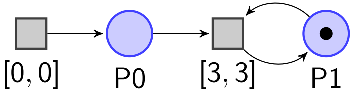
Exemple :



$M_0 =< (0), (0, \perp) >$, le temps avance en 1 : $M_1 =< (0), (1, \perp) >$ et tir de $T1$ (en 1), $M_2 =< (1), (0, 0) >$ le temps avance en 2, alors $M_3 =< (1), (1, 1) >$ $T1$ doit être tirée $M_4 =< (2), (0, 1) >$ on avance en 3, $M_5 =< (2), (1, 2) >$ $T1$ doit être tirée, $M_6 =< (3), (0, 2) >$ on peut avancer en 4 et donc $M_7 =< (2), (1, 3) >$ et donc $T2$ peut être tirée, $M_8 =< (3), (1, 0) >$

$M_0 \xrightarrow{\sigma(1)} M_1 \xrightarrow{T1} M_2 \xrightarrow{\sigma(2)} M_3 \xrightarrow{T1} M_4 \xrightarrow{\sigma(3)} M_5 \xrightarrow{T1} M_6 \xrightarrow{\sigma(4)} M_7 \xrightarrow{T2} M_8$
Les temps d'avancement sont variable et la même séquence est valable si on utilise d'autres valeurs.
$M_0 \xrightarrow{\sigma(0.5)} M_1' \xrightarrow{T1} M_2 \xrightarrow{\sigma(1.5)} M_3 \xrightarrow{T1} M_4 \xrightarrow{\sigma(2.5)} M_5 \xrightarrow{T1} M_6 \xrightarrow{\sigma(3.5)} M_7 \xrightarrow{T2} M_8$

- Temps de recharge, c'est le temps que la transition (la borne inférieure) met pour pouvoir être franchie à nouveau.



- Un marquage est *entier* si $\forall t \in T, h(t) \in \mathbb{N}$.
- z est un état atteignable dans Z si il existe un run faisable $\sigma(\tau)$ et $z_0 \xrightarrow{\sigma(\tau)} z$
- m est un p-marquage atteignable dans Z si il existe un état atteignable z dans Z avec $z =< m, h >$
- L'ensemble des états atteignables dans Z est l'espace des états de Z (notés $StSp(Z)$).

Propriétés quantitatives

Chaque proposition temporelle telle que :

- (min/max) longueur de temps d'un chemin
- chemin entre deux états avec un minimum/maximum de longueur de temps, etc.

Sont décidables si au moins nous avons une connaissance (implicite/explicite) de l'espace d'état.

Exécution paramétrique, Etat paramétrique

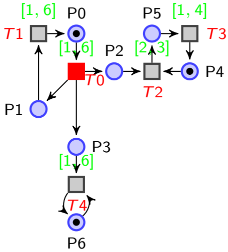
Soit $Z = <$P,T,Pré,$Post$, F, $M_0 >$ un TPN et $\sigma = t_1 ... t_n$ une séquence de transition dans Z .
$(\sigma(x), B_\sigma)$ est une exécution paramétrique de σ et (z_σ, B_σ) est un état paramétrique dans Z avec $z_\sigma = (m_\sigma, h_\sigma)$, si

- $m_0 \xrightarrow{\sigma} m_\sigma$
- $h_\sigma(t)$ est une somme de variables, (h_σ est un t -marking paramétrique)
- B_σ est un ensemble de conditions (un système d'inégalités)

Naturellement :

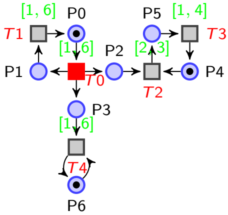
- $z_0 \xrightarrow{\sigma(x)} (z_\sigma, B_\sigma)$,
- $StSp(Z) = \cup_{\sigma(x)} \{z_{\sigma(x)} |$ x satisfait B_σ $\}$

Exemple de séquence paramétrique



$$z_0 \xrightarrow{\sigma(\tau_0)} z_0^* \xrightarrow{t_1} z_1 \xrightarrow{\sigma(\tau_1)} z_1^* \dots \xrightarrow{t_n} z_n \xrightarrow{\sigma(\tau_n)} z_0^*$$

Exemple de séquence paramétrique



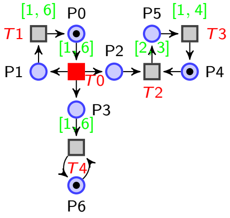
$$z_0 \xrightarrow{\sigma(\tau_0)} z_0^* \xrightarrow{t_1} z_1 \xrightarrow{\sigma(\tau_1)} z_1^* \ldots \xrightarrow{t_n} z_n \xrightarrow{\sigma(\tau_n)} z_0^*$$

$$\left(\; 0 \leq x_0 \leq 6 \; \right) \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \perp \\ \perp \\ \perp \\ \perp \end{pmatrix} > \xrightarrow{\sigma(x_0)} < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \perp \\ \perp \\ \perp \\ \perp \end{pmatrix} > \xrightarrow{t_0} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ 0 \\ 0 \\ \perp \\ 0 \end{pmatrix} >$$

---

1. $min(1, 1, 2) \leq x_1 \leq min(6, 4, 3)$

Exemple de séquence paramétrique



$$z_0 \xrightarrow{\sigma(\tau_0)} z_0^* \xrightarrow{t_1} z_1 \xrightarrow{\sigma(\tau_1)} z_1^* \dots \xrightarrow{t_n} z_n \xrightarrow{\sigma(\tau_n)} z_0^*$$

$$\left(\ 0 \leq x_0 \leq 6\ \right) \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \perp \\ \perp \\ \perp \\ \perp \end{pmatrix} > \xrightarrow{\sigma(x_0)} < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \perp \\ \perp \\ \perp \\ \perp \end{pmatrix} > \xrightarrow{t_0} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ 0 \\ 0 \\ \perp \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$\begin{pmatrix} 0 \leq x_0 \leq 6 \\ 1 \leq x_1 \leq 3\ \text{[1]} \end{pmatrix} \Rightarrow < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ 0 \\ 0 \\ \perp \\ 0 \end{pmatrix} > \xrightarrow{\sigma(x_1)} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ x_1 \\ x_1 \\ \perp \\ x_1 \end{pmatrix} > \xrightarrow{t_2} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ x_1 \\ \perp \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} >$$

1. $min(1,1,2) \leq x_1 \leq min(6,4,3)$

Exemple de séquence paramétrique

$$\left(\begin{array}{c} 0 \leq x_0 \leq 6 \\ 1 \leq x_1 \leq 3 \\ 1 \leq x_1 + x_2 \leq 6 \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \end{array}\right) \Rightarrow < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ x_1 \\ \perp \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} > \xrightarrow{\sigma(x_2)} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ x_1 + x_2 \\ \perp \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} > \xrightarrow{t_3} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ x_1 + x_2 \\ \perp \\ \perp \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

exécution faisable :

$$\left(\begin{array}{c} 0 \leq x_0 \leq 6 \\ 1 \leq x_1 \leq 3 \\ 1 \leq x_1 + x_2 \leq 6 \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \end{array}\right) \Rightarrow z_0 \xrightarrow{\sigma(x_0), t_0, \sigma(x_1), t_2, \sigma(x_2), t_3} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \perp \\ x_1 + x_2 \\ \perp \\ \perp \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} >$$

Propriétés des exécutions

- Chaque transition faisable σ dans Z peut être réalisée avec une exécution entière.
- Chaque p-marquage atteignable dans Z peut être atteignable avec des exécutions entières.
- Si z atteignables dans Z , alors $[z]^-$ and $[z]^+$ est aussi atteignable dans Z.
- La longueur du plus court chemin et du plus long chemin (s'il est fini) entre deux p-marquages sont des entiers naturels.

Règles de franchissement

Definition (Sémantique)

R-time

$$\frac{m_0 \xrightarrow{\sigma(x_0),t_0,\sigma(x_1),\ldots,t_n} <m,h>,B}{m_0 \xrightarrow{\sigma(x_0),t_0,\sigma(x_1),\ldots,t_n,\sigma(x)} <m,h+x>,B \wedge \{min(\{t_{min}|t \in T,h(t)\neq\perp\}) \leq h(t)+x \leq min(\{t_{max}|t \in T,h(t)\neq\perp\})}$$

R-trans

$$\frac{m_0 \xrightarrow{\sigma(x_0),t_0,\sigma(x_1),\ldots,t_n,\sigma(x_{n+1})} <m,h>,B}{m_0 \xrightarrow{\sigma(x_0),t_0,\sigma(x_1),\ldots,t_n,\sigma(x_{n+1}),t_{n+1}} <m-Pre(t_{n+1})+Post(t_{n+1}),g(h,m-Pre(t_{n+1})+Post(t_{n+1})>,B}$$

Where :

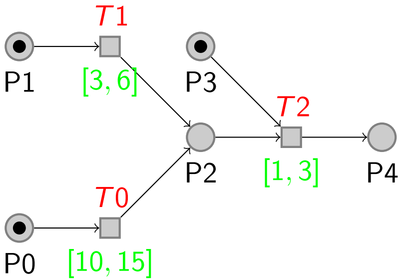
$$\forall t \in T, g(h(t),m) = \begin{cases} h(t) = \perp & \begin{cases} Pre(t) \leq m & 0 \\ Pre(t) \not\leq m & \perp \end{cases} \\ h(t) \neq \perp & \quad h(t) \end{cases}$$

Marquages essentiels

- le graphe de marquage essentiel est celui ou l'on considère que les marquages entiers.
- L'ateignabilité est la même quelque soit le graphe de marquage conventionnel ou essentiel.
- Un réseau est borné si l'ensemble des marquages essentiels est fini.

Exercice :

Construire le graphe des marquage essentiels pour :



Réseau borné : TPN et squelette

Un TPN est borné si son ensemble de p-marquages est fini.

Theorem

Soit Z un TPN et $S(Z)$ son squelette, Si $S(Z)$ est borné alors Z est borné.

Remarques :

- L'inverse n'est pas vrai.
- Il n'y a aucune correllation pour la vivacité.

Réseaux Temporisés généralisés (GTPN)

- Durée assigné aux transitions
- Fréquence de mise à feux pour chaque transition
- Temps et fréquence dépendent du marquage

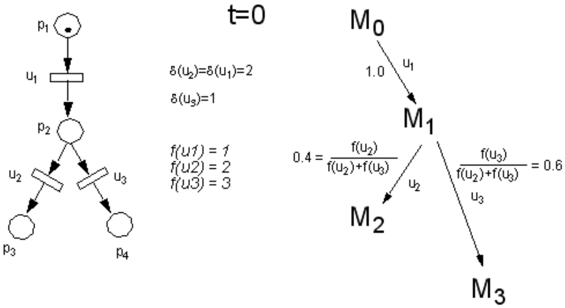
$$f : T \to \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ *processus stochastique*

Principes du modèle temporisé généralisé

Construction d'un graphe de marquage similaire aux réseaux de Petri temporisés avec en plus une probabilité de franchissement lors des conflits.

Exemple de calcul des probabilités de franchissements .



Processus Stochastiques

Définitions :

- Un *processus stochastique* est une famille de variable aléatoire $\{X_k\}$. (*discret* si la famille contient un ensemble d'élément dénombrable,*continu* autrement)
- L'ensemble des valeurs distinctes que peut prendre un processus stochastique est appelé *l'espace des états*. (si cet espace est fini ou dénombrable on l'appelle une *chaine*).
- Un processus stochastique est dit de *Markov* si pour tout $k_0 < k_1 < k_2 ... < k_n < k, \forall n \in \mathbb{N}$, et tel que $i_1, i_1, ..., i_n$ appartiennent à l'espace des états, il est vrai que :

$$P(X_k = j | X_{k_0} = i_0, X_{k_1} = i_1, ..., X_{k_n} = i_n) = P(X_k = j | X_{k_n} = i_n)$$

Liens avec les réseaux de Petri temporisés

- Un réseau de Petri est considéré comme un processus stochastique fini, sur des domaines continus (les fréquences et les temps peuvent avoir n'importe quelle valeur réelle) et indicé par le temps.
- Le graphe de marquage est une chaine de Markov.
- L'analyse de performance par GTPN reviens à faire correspondre un réseau à une chaine de Markov et à en extraire les estimations probabilistes de l'utilisation des ressources et des temps pour atteindre certains etats.

Définitions :

- Probabilité de passer d'un état à l'autre en un seul pas : $P_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$
- Probabilité de passer d'un état à l'autre en k pas : $f_{i,j}(k) = P(X_{m+k} = j | X_m = i)$
- Probabilité de visite pour un temps > 0 : $f_{i,j} = \sum_{k>0} f_{i,j}(k)$
- Un état est i *récurrent* ssi $f_{i,i} = 1$ (reste dans cet état)
- Un état est *transitoire* s'il n'est pas récurrent $f_{i,i} < 1$
- Un état j est dit *accessible* d'un état i ssi $f_{i,j}(m) <> 0$
- Deux états qui sont accessibles réciproquement sont dits communiquants.

Remarques

- La relation être communiquant est une relation d'équivalence.
- Si deux états sont communiquants ils possèdent la même propriété (récurrents ou transitoires).
- L'espace des états est donc séparé en deux classes d'équivalence disjointes.

Définitions

- Dans une chaine de Markov finie, si l'on part d'un état transitoire il y a une probabilité 1 d'atteindre un état récurrent puis de rester dans la classe correspondante.
- Un *coefficient d'absorbtion* pour chacune des classes récurrente et chacun des états transitoire peut être défini.
- Dans chaque classe récurrente, il existe un *comportement asymptotique* définit pas une distribution stationnaire de probabilité.

Chaînes de Markov

Matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \dots & p_{m,m} \end{bmatrix}$$

Probabilité de transition d'ordre supérieur, f(k) matrice de transition d'ordre n :

$$f(k) = P^k$$

$$f = f(0) + f(1) + \dots + f(l) + \dots.$$

Exercice :

Trois personnes A,B,C jouent au ballon. A lance toujours le ballon à B et B lance toujours le ballon à C. Mais C peut tout aussi bien lancer le ballon à B ou à A.

- Construire l'espace des états
- Construire la matrice de la chaine de Markov
- Construire la matrice de probabilité après 2,3,..., 10 lancer.

Distribution de probabilité

Soit p un vecteur de probabilité indiquant la probabilité du système à un instant arbitraire.
La distribution de probabilité après k transitions est :

$$p^k = p \ P^k$$

Une distribution stationnaire est une distribution d t.q. :

$$d = d \ P$$

Exemple :

Soit la matrice stochastique : $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$,
la distribution stationnaire correspond à la solution de l'équation .
$tP = t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = t$
avec $t = (x, 1 - x)$
ce qui donne t $= (1/3,\ 2/3)$, unique solution.

Exercice :

Calculer la distribution stationnaire pour l'exercice du lancer de ballon.

Matrices stochastiques régulières :

Définition : Une matrice P est régulière si tous les éléments d'une puissance P^m sont positifs.

Propriété :

Une matrice stochastique régulière P à les propriétés suivantes :

- la suite $P, P^2, P^3, ...$ converge vers T, dont les lignes sont le point fixe t
- Si p est un vecteur de probabilité quelconque, la suite $pP, pP^2, pP^3, ...$ converge vers t

Si t est une distribution stationnaire :

$t = tP <=> tP^n = tP^{n-1} = ... = t$

Analyse de performance

L'analyse se fait sur le comportement asymptotique, cela permet de mesurer la fraction de temps relative passée dans chaque état.
Exemple du lancer des ballons :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce problème , la question suivante se pose :
Quel est la fraction de temps utilisée par A pour garder la balle sachant que lors de chaque tours, A garde la balle 1 s, B la garde 2 s et C 7s.

$$t_{stat} = (0.2, 0.4, 0.4) => ft = 0.2/(0.2 + 2 * 0.4 + 7 * 0.4) = 5.3\%$$

Situation cumulative

Autre type de question basée sur un principe cumulatif : Quel est la fraction d'énergie moyenne utilisée par A pour garder la balle sachant que lors de chaque tours, A utilise 10 J pour garder la balle, B utilise 20 J et C utilise 70J.

Solution :

Après 1 lancer : I + P :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = V^1.$$

En admettant partir de l'état A, nous avons : total $= 1 * 10 + 1 * 20 = 30$ donc A utilise $1/3$ de l'énergie.

Solution :

Après 2 lancer : $I + P + P^2 = V^1 + P^2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}$$

En admettant partir de l'état A, nous avons : total $= 1 * 10 + 1 * 20 + 1 * 70 = 100$ donc A utilise $1/10$ de l'énergie.

Après 3 lancer : $I + P + P^2 + P^3 = V^2 + P^3 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 2 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En admettant partir de l'état A, nous avons : total $= 1.5 * 10 + 1.5 * 20 + 1 * 70 = 11.5$ donc A utilise 13.0 de l'énergie.

Asymptotiquement :

$W^n = I + P + P^2 + P^3.... = I + P(I + P + P^2 + P^3....) = I + PW^{n-1}$

Si $lim_{n \to infini} W^n$ existe $=$ W alors nous avons une mesure de performance, mais en général W croit linéairement, donc ne converge pas. Si le système comporte des états transitoire et récurrents il peut être nécessaire de selectionner les états 'transitoires' des états non transitoires.

Exemple :

$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^k = \begin{bmatrix} 1/2^k & 1 - 1/2^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$W^k = \begin{bmatrix} 2 & k-1 \\ 0 & k+1 \end{bmatrix}$

temps moyen passé dans 1 depuis 1 $=$
$2/((k-1) * t2 + 2 * t1) * t1 \to 0$

temps moyen passé dans 2 depuis 1 $\to 100$

Mesure de performance : traitement asymptotique :

Nous distinguerons (pour simplifier) un état récurant et des états transitoires, la matrice de transition devient donc :

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec : Q est une matrice (k-1,k-1) et R est un vecteur k-1

$$P^k = \begin{bmatrix} Q^k & V \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W^n = I + Q + Q^2 + Q^3 .... = I + Q(I + Q + Q^2 + Q^3 ....) = I + QW^{n-1}$$

Si $lim_{n \to infini} W_n existe = W$

(I - Q) W = I

Exemple

$$W = (I - Q)^{-1}$$

Nous nous intéressons à la première ligne de W, ce qui implique que : $(I - Q)^t x = e_1$ ou e_1 est le vecteur colonne nul sauf le premier élément qui vaut 1.

Exemple :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^t x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemple (cnt'd)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 1$ et

$x_2 - 0.5 * x_1 = 0$

$x_2 = 0.5$

Conclusion

- Modèles incluant des temporisations ou des délais.
- Chaînes de Markov pour évaluations quantitatives.
- Modèles strictement plus puissants.