Logique des prédicats II

G. Falquet

Centre universitaire d'informatique

11 décembre 2018

Tester $\phi \models \psi$ (conséquence logiques)

Rappel. $\phi \models \psi$ si tout modèle de ϕ est un modèle de ψ.

Dans une approch sémantique il faut examiner tous les modèles, qui peuvent être en nombre infini.

Mais un raisonnement de longueur infinie n'est pas toujours nécessaire

Exemple

$$F = \{ \begin{array}{rl} \forall x(s(x) \vee t(x)) & , \\ \forall x(s(x) \rightarrow p(x) & , \\ \forall x(q(x) \rightarrow \neg p(x)) & , \\ q(a) & \} \end{array}$$

Montrons que $F \models \exists y\, t(y)$

Exemple

$$F = \{ \quad \begin{array}{rl} \forall x(s(x) \vee t(x)) & , \\ \forall x(s(x) \rightarrow p(x) & , \\ \forall x(q(x) \rightarrow \neg p(x)) & , \\ q(a) & \} \end{array}$$

Montrons que $F \models \exists y\, t(y)$

Dans tout modèles M de F on doit avoir $M(a) \in M(q)$
Pour satisfaire $\forall x(q(x) \rightarrow \neg p(x))$ il faut que $M(a) \notin M(p)$
Pour satisfaire $\forall x(s(x) \rightarrow p(x)$ il faut que $M(a) \notin M(s)$
Pour satisfaire $\forall x(s(x) \vee t(x))$ il faut que $M(a) \in M(t)$
Par conséque $M(\exists y\, t(y)) = \mathbf{v}$ car vrai quand $\nu(y) = a$

Mais ce n'est pas toujours aussi simple ...

Règles d'inférences pour la logique des prédicats

Les systèmes de Hilbert, déduction naturelle et calculs des séquents peuvent être étendus à la logique des prédicats.

Ils restent consistants et complets (toutes les tautologiques peuvent être déduites, théorème de complétude de Gödel)

Les règles pour la logique des propositions s'appliquent sur les formules fermées ou ouvertes

On y ajoute des règles pour les formules quantifiées

Régles pour les quantificateurs sur les séquents

$$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \forall l \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[y/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A}\ \forall r$$

$$\frac{A[y/x], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta}\ \exists l \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A}\ \exists r$$

$A[t/x]$ est la formule A où la variable libre x est remplacée par le terme t. Ce terme ne doit pas contenir de variable libre qui est liée dans A.

Restriction : dans $\forall r$ et $\exists l$ la variable y ne doit être libre dans aucune formule du séquent inférieur.

Exemples

1)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A(x) \vdash A(x)}\,(basic)}{\vdash A(x) \rightarrow A(x)} \rightarrow R}{\vdash \forall x(A(x) \rightarrow A(x))}\,\forall R$$

2)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{pas de preuve}}{A(x) \vdash A(y)}}{A(x) \vdash \forall x A(x)}}{\vdash A(x) \rightarrow \forall x A(x)}\,(\rightarrow r)$$

$\forall x A(x)$ ne peut pas être instancié en $A(x)$ car x est libre à gauche de $\vdash$.

Exemple

L'ordre d'application des règles n'est pas unique ...
... et certains choix ne permettent pas de réaliser la preuve.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(z) \vdash A(z)}(basic)}{A(z), \neg A(z) \vdash}\neg l}{\forall x A(x), \neg A(z) \vdash}\forall l}{\forall x A(x), \exists z \neg A(z) \vdash}\exists l}{\forall x A(x) \vdash \neg \exists z \neg A(z)}\neg r}{\vdash \forall x A(x) \rightarrow \neg \exists z \neg A(z)} \rightarrow r
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(z), \exists z \neg A(z) \vdash}\text{ bloqué !}}{\forall x A(x), \exists z \neg A(z) \vdash}\forall l}{\forall x A(x) \vdash \neg \exists z \neg A(z)}\neg r}{\vdash \forall x A(x) \rightarrow \neg \exists z \neg A(z)}
$$

Résolution pour la logique des prédicats

Pour appliquer la résolution on doit mettre les formules en forme prenex, puis skolemiser, puis mettre en forme normale conjonctive.
La règle de résolution en logique propositionnelle stipule qu'étant donné deux clauses

$$C_1 = p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m$$

et

$$C_2 = \neg p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n$$

Le *résolvant* de C_1 et C_2 sur p (pas forcément en première position) est la clause

$$C_R = L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n$$

Dans le cas de la logique des prédicats, on peut effectuer la résolution sur deux littéraux $P(t_1, \ldots, t_n)$ et $\neg P(u_1, \ldots, u_n)$ non seulement s'ils sont égaux mais également si les t_i et u_i *unifiables*.

Unification

Définition

Deux formules atomiques sont unifiables s'il existe une substitution des *variables* par des termes qui rend les deux formules identiques.

Par exemple, les formules atomiques $P(x, a, y)$ et $P(c, a, z)$, où a et c sont des constantes, sont unifiables par la substitution $x \rightarrow c, y \rightarrow z$.

Par contre $P(x, a, y)$ et $P(c, b, z)$ ne sont pas unifiables car les constantes a et b ne peuvent être unifiées (on ne peut remplacer une constante par une autre).

L'unification s'étend aux formules contenant des fonctions

Exemple

On veut prouver le théorème $\forall x A(x) \rightarrow \neg\exists z \neg A(z)$
Revient à monter que $\neg\left(\forall x A(x) \rightarrow \neg\exists z \neg A(z)\right)$ est inconsistant
En forme prenex :

$$\equiv \neg\left(\neg\forall x A(x) \vee \neg\exists z \neg A(z)\right) \equiv \left(\forall x A(x) \wedge \exists z \neg A(z)\right)$$
$$\equiv \exists z \left(\forall x A(x) \wedge \neg A(z)\right) \equiv \exists z \forall x \left(A(x) \wedge \neg A(z)\right)$$

skolemisation

$$\equiv \forall x \left(A(x) \wedge \neg A(k)\right)$$

on obtient deux clauses

1. $A(x)$
2. $\neg A(k)$

résolution avec $x = k$
$\square$

Exemple

$$F = \left\{ \begin{array}{rl} \forall x(s(x) \vee t(x)) & , \\ \forall x(s(x) \rightarrow p(x)) & , \\ \forall x(q(x) \rightarrow \neg p(x)) & , \\ q(a) & \end{array} \right\} \models \exists y\, t(y)$$

1. $s(x) \vee t(x)$
2. $\neg s(x) \vee p(x)$
3. $\neg q(x) \vee \neg p(x)$
4. $q(a)$
5. $\neg t(y)$ $[\neg \exists y\, t(y)]$
6. $s(a)$ [1-5 avec $y \rightarrow x$]
7. $p(a)$ [2-6 avec $x \rightarrow a$]
8. $\neg q(a)$ [3-7 avec $x \rightarrow a$]
9. $\Box$

Théorie logique

Une théorie est un ensemble de formules.

On dit qu'une théorie est **fermée** si elle contient toutes ses conséquences logiques.

Exemple

La théorie

$$T_1 = \{p(a), q(a), p(b), \forall x(p(x) \rightarrow q(x))\}$$

n'est pas fermée car la conséquence $q(b)$ n'est pas dans T_1

Théorie axiomatisable

Une théorie T est **axiomatisable** si on peut trouver un ensemble de formules G tel que T soit formé de toutes les conséquences logiques de G,

$$T = \{g \mid G \models g\}$$

Exemple

On peut axiomatiser la théorie

$$\begin{aligned} T \quad = \quad & \{r(a), r(b), s(c), s(d), \\ & t(a, c), t(a, d), t(b, c), t(b, d), \\ & t(c, a), t(d, a), t(c, b), t(d, b,)\} \end{aligned}$$

à l'aide des axiomes
$r(a)$; $r(b)$; $s(c)$; $s(d)$;
$\forall x \forall y((r(x) \wedge s(y)) \rightarrow (t(x, y) \wedge t(y, x)))$

Théorie égalitaire

On dit qu'une théorie est égalitaire si son vocabulaire comprend le prédicat binaire $=$ et si elle contient les axiomes

1. réflexivité : $\forall x(x = x)$
2. symétrie : $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$
3. transitivité : $\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \rightarrow x = z)$
4. un axiome de congruence (substitution) pour chaque prédicat

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 = y_1 \land \cdots \land x_n = y_n \land p(x_1, \dots, x_n) \\ \rightarrow p(y_1, \dots y_n))$$

5. et pour chaque fonction

$$\forall x_1 \dots \forall x_k \forall y_1 \dots \forall y_k (x_1 = y_1 \land \cdots \land x_k = y_k \\ \rightarrow f(x_1, \dots, x_k) = f(y_1, \dots, y_k))$$

Exemples d'utilisation

Unicité. Une personne n'a qu'une seule adresse (relation fonctionnelle) :

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 (adresse(x, y_1) \wedge adresse(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$$

Fermeture du domaine. Un habit ne peut être que de taille S, M, L, XL :

$$\forall h \forall x ((habit(h) \wedge taille(h, x)) \rightarrow (x = \mathsf{S} \vee x = \mathsf{M} \vee x = \mathsf{L} \vee x = \mathsf{XL}))$$

Nom unique. Les tailles sont différentes :

$$\neg(\mathsf{S} = \mathsf{M}) \wedge \neg(\mathsf{S} = \mathsf{L}) \wedge \neg(\mathsf{S} = \mathsf{XL}) \wedge \neg(\mathsf{M} = \mathsf{L}) \wedge \neg(\mathsf{M} = \mathsf{XL}) \wedge \neg(\mathsf{L} = \mathsf{XL})$$

Égalité et comptage

L'égalité permet de compter

Exemple

Il y a au plus 3 lauréats

$$\forall x \forall y \forall z \forall u (lauréat(x) \wedge lauréat(y) \wedge lauréat(z) \wedge lauréat(u)$$
$$\rightarrow x = y \vee x = z \vee x = u \vee y = z \vee y = u \vee z = u$$

Mais c'est très fastidieux. En particulier quand les nombres sont grands et qu'il faut faire des preuves.

Égalité dans le calcul des séquents

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{basic}{Ax_=, P(x), x = y \vdash (x = y \wedge P(x)), \Delta} \qquad \dfrac{etc.}{Ax_=, P(y), P(x), x = y \vdash \Delta}}{Ax_=, (x = y \wedge P(x)) \rightarrow P(y), P(x), x = y \vdash \Delta}}{Ax_=, \forall x \forall y((x = y \wedge P(x)) \rightarrow P(y), P(x), x = y \vdash \Delta}}{Ax_=, P(x), x = y \vdash \Delta}$$

Permet la substitution de termes égaux dans les preuves

Théorie des nombres de Peano

C'est une théorie égalitaire dont le vocabulaire est composé des fonctions S (successeur), +, × ; de la constante 0 et du prédicat =

1. $\forall x \neg(0 = S(x))$
2. $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
3. $\forall x (x + 0 = x)$
4. $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$
5. $\forall x (x \times 0 = 0)$
6. $\forall x \forall y (x \times S(y) = x \times y + x)$
7. un axiome d'induction par formule $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$:

$$\forall y_1 \cdots y_k \, (\phi(0, \vec{y}) \wedge \forall x (\phi(x, \vec{y}) \rightarrow \phi(S(x), \vec{y})) \\ \rightarrow \forall x (\phi(x, \vec{y})$$

où $\vec{y} = y_1, \ldots, y_k$

1+1=2

$\mathfrak{P}, S0 + S0 = SS0 \vdash S0 + S0 = SS0$

... par substitution

$\mathfrak{P}, S0 + S0 = S(S0 + 0), S(S0 + 0) = SS0) \vdash S0 + S0 = SS0$

$(\forall I)$

$\mathfrak{P}, \forall x \forall y (x + Sy) = S(x + y), S(S0 + 0) = SS0) \vdash S0 + S0 = SS0$

$\mathfrak{P}, S(S0 + 0) = S(S0) \vdash S0 + S0 = SS0$

... par substitution

$\mathfrak{P}, S0 + 0 = S0 \vdash S0 + S0 = SS0$

$(\forall I)$

$\mathfrak{P}, \forall x (x + 0 = x) \vdash S0 + S0 = SS0$

$\mathfrak{P} \vdash S0 + S0 = SS0$

Principes de modélisation logique

1. Définir les vocabulaire (prédicats, fonctions, constantes)
2. Définir les axiomes