四元数表达空间旋转的正确性论证

Feng Jinyuan

June 28, 2018

1 简述

四元数是由爱尔兰数学家William Rowan Hamilton在1843年创立出的数学概念。四元数可以看做是复数的一种扩展，也可以称为超复数。四元数在多维空间下也可看做是四维向量。四元数在姿态表示，空间旋转上有广泛的运用[1]。

2 问题描述

已知利用Rodrigues旋转公式可以计算向量$\vec{v}$绕轴向量$\vec{n}$旋转θ度后的向量，Rodrigues公式是一种基于用轴/角表达旋转的空间旋转公式。 已知利用四元数可以使得$\vec{v}$绕轴向量$\vec{n}$旋转θ度，整个操作可以用该公式$\vec{u} = q\vec{v}q^{-1}$完成 [2]。其中四元数 $q = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\vec{n})$, 为什么该公式$\vec{u} = q\vec{v}q^{-1}$的计算结果是一次旋转操作，我们可以证$\vec{u} = q\vec{v}q^{-1}$等价于$\vec{u} = R(\vec{n},\theta)\vec{v}$, 其中$R(\vec{n},\theta) = \boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)[\vec{n}]_\times^2 + \sin\theta[\vec{n}]_\times$

3 四元数相关基本概念

1. 四元数定义:
$$q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} = a + \vec{v}$$
其中$\vec{v} = (b\boldsymbol{i}, c\boldsymbol{j}, d\boldsymbol{k})$,$a, b, c, d$是实数，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$是单位虚数。 其中a为四元数的尺度部分，$\vec{v}$为四元数的向量部分，当$\vec{v} = (0\boldsymbol{i}, 0\boldsymbol{j}, 0\boldsymbol{k})$是q为实数，当$a = 0$时q为纯四元数。

2. 四元数性质:
$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$
$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{kj} = -\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{ik} = -\boldsymbol{j}$$
四元数共轭表示为:
$$q^* = a - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}$$

四元数的逆表示为:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\| q \|}$$

3. 四元运算:
   四元数乘积运算(哈密顿积):

$$q_1 = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} = a + \vec{v}$$

$$q_2 = e + f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k} = e + \vec{w}$$

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = &(ae + af\boldsymbol{i} + ag\boldsymbol{j} + ah\boldsymbol{k}) \\ &+ (be\boldsymbol{i} + bf\boldsymbol{ii} + bg\boldsymbol{ij} + bh\boldsymbol{ik}) \\ &+ (ce\boldsymbol{j} + cf\boldsymbol{ji} + cg\boldsymbol{jj} + ch\boldsymbol{jk}) \\ &+ (de\boldsymbol{k} + df\boldsymbol{ki} + dg\boldsymbol{kj} + dh\boldsymbol{kk}) \end{aligned}$$

   利用四元数性质化简后得:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= ae - (bf + cg + dh) \\ &+ (be + af + ch - dg)\boldsymbol{i} \\ &+ (ce + ag + df - bh)\boldsymbol{j} \\ &+ (de + ah + bg - cf)\boldsymbol{k} \\ &= ae - (bf + cg + dh) + \begin{bmatrix} be + af + ch - dg \\ ce + ag + df - bh \\ de + ah + bg - cf \end{bmatrix} \\ &= ae - (bf + cg + dh) + e\begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ch - dg \\ df - bh \\ bg - cf \end{bmatrix} \\ &= (ae - \vec{v}\cdot\vec{w}) + (e\vec{v} + a\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}) \end{aligned}$$

$$q_1 q_2 = (a + \vec{v})(e + \vec{w}) = (ae - \vec{v}\cdot\vec{w}) + (e\vec{v} + a\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w})$$

   $(ae - \vec{v}\cdot\vec{w})$是四元数的尺度部分，$(e\vec{v} + a\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w})$是四元数的向量部分。

4 证明四元数可表达空间旋转

设$q = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\vec{n}) = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{n}$且q为单位四元数即$\| q \| = 1$ 所以有$q^{-1} = \frac{q_*}{\|q\|} = q_* = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\vec{n}$

$$q\vec{v}q^{-1} = (\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{n})(0 + \vec{v})(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\vec{n})$$

利用公式$q_1q_2=(a+\vec{v})(e+\vec{w})=(ae-\vec{v}\cdot\vec{w})+(e\vec{v}+a\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w})$计算$q\vec{v}q^{-1}$

$$\begin{aligned}
q\vec{v}q^{-1} &= ((-\sin\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{v})+\cos\frac{\theta}{2}\vec{v}+\sin\frac{\theta}{2}(\vec{n}\times\vec{v}))(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\vec{n}) \\
&= -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{v}+(\cos\frac{\theta}{2}\vec{v}+\sin\frac{\theta}{2}(\vec{n}\times\vec{v}))\cdot(\sin\frac{\theta}{2}\vec{n}) \\
&\quad +(-\sin\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{v})(-\sin\frac{\theta}{2}\vec{n}) \\
&\quad +\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}\vec{v}+\sin\frac{\theta}{2}(\vec{n}\times\vec{v})) \\
&\quad +(\cos\frac{\theta}{2}\vec{v}+\sin\frac{\theta}{2}(\vec{n}\times\vec{v}))\times(-\sin\frac{\theta}{2}\vec{n})
\end{aligned}$$

利用以下公式化简上述式子:

$$\begin{aligned}
&(\vec{n}\times\vec{v})\cdot\vec{n}=0 \\
&\vec{n}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{n} \\
&(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \\
&\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&1-\cos\theta=2(\sin\frac{\theta}{2})^2 \\
&\vec{v}_{\times}=\vec{n}\times\vec{v} \\
&[\vec{v}_{\times}]=[\vec{n}]_{\times}[\vec{v}] \\
&\vec{v}_{\times\times}=\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{v} \\
&[\vec{v}_{\times\times}]=[\vec{n}]_{\times}^{2}[\vec{v}]
\end{aligned}$$

化简后的公式如下:

$$\begin{aligned}
q\vec{v}q^{-1} &= (\sin\frac{\theta}{2})^2(\vec{n}\cdot\vec{v})\vec{n}+(\cos\frac{\theta}{2})^2\vec{v}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(\vec{n}\times\vec{v})-(\sin\frac{\theta}{2})^2(\vec{n}\times\vec{v})\times\vec{n} \\
&= (\sin\frac{\theta}{2})^2(\vec{n}\cdot\vec{v})\vec{n}+(\cos\frac{\theta}{2})^2\vec{v}+\sin\theta(\vec{n}\times\vec{v})+(\sin\frac{\theta}{2})^2\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v})
\end{aligned}$$

根据Figure1继续化简:

$$
\begin{aligned}
q\vec{v}q^{-1} &= (\sin\frac{\theta}{2})^2(\vec{n}\cdot\vec{v})\vec{n} + (\cos\frac{\theta}{2})^2\vec{v} + \sin\theta(\vec{n}\times\vec{v}) + (\sin\frac{\theta}{2})^2\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v}) \\
&= (\sin\frac{\theta}{2})^2\vec{v}_{\parallel} + (\cos\frac{\theta}{2})^2\vec{v} + \sin\theta(\vec{n}\times\vec{v}) + (\sin\frac{\theta}{2})^2\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v}) \\
&= (\sin\frac{\theta}{2})^2(\vec{v}-\vec{v}_{\perp}) + (\cos\frac{\theta}{2})^2\vec{v} + \sin\theta(\vec{n}\times\vec{v}) + (\sin\frac{\theta}{2})^2\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v}) \\
&= (\sin\frac{\theta}{2})^2(\vec{v}+\vec{v}_{\times\times}) + (\cos\frac{\theta}{2})^2\vec{v} + \sin\theta(\vec{n}\times\vec{v}) + (\sin\frac{\theta}{2})^2\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{v}) \\
&= \vec{v} + (\sin\frac{\theta}{2})^2\vec{v}_{\times\times} + \sin\theta(\vec{v}_{\times}) + (\sin\frac{\theta}{2})^2\vec{v}_{\times\times} \\
&= [\vec{v}] + \sin\theta[\vec{v}_{\times}] + (1-\cos\theta)[\vec{v}_{\times\times}] \\
&= (\boldsymbol{I} + \sin\theta[\vec{n}]_{\times} + (1-\cos\theta)[\vec{n}]_{\times}^2)[\vec{v}] \\
&= R(\vec{n},\theta)_{Rodrigues}[\vec{v}]
\end{aligned}
$$

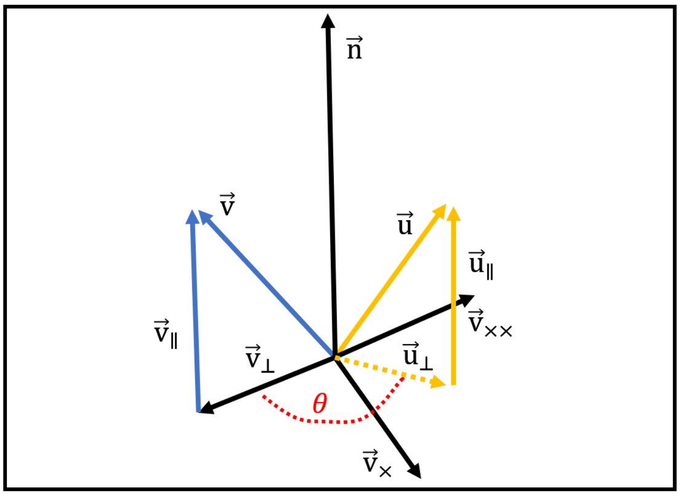

Figure 1: 旋转示意图

总结 经上述论证形如$q=(\sin\frac{\theta}{2}\vec{n},\cos\frac{\theta}{2})$的四元数可表达固定轴/固定角的旋转，这也是一种轴/角表达。利用该形式的四元数可以计算绕轴向量$\vec{n}$旋转θ度后的向量，$\vec{u}=q\vec{v}q^{-1}$。下面推导基于四元数的Rodrigues的旋转公式.

5 基于四元数的Rodrigues的旋转公式推导

已知Rodrigues旋转公式如下:

$$R(\vec{n},\theta)_{Rodrigues} = (\boldsymbol{I} + \sin\theta[\vec{n}]_\times + (1-\cos\theta)[\vec{n}]_\times^2)$$

对上述公式进行如下变换:

$$\begin{aligned} R(\vec{n},\theta)_{Rodrigues} &= \boldsymbol{I} + \sin\theta[\vec{n}]_\times + (1-\cos\theta)[\vec{n}]_\times^2 \\ &= \boldsymbol{I} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}[\vec{n}]_\times + 2(\sin\frac{\theta}{2})^2[\vec{n}]_\times^2 \end{aligned}$$

已知形如$q = (\sin\frac{\theta}{2}\vec{n}, \cos\frac{\theta}{2}) = (\vec{a}, w)$的四元数可以表达基于轴角的旋转，代入上述公式则:

$$\begin{aligned} R(\vec{n},\theta)_{Rodrigues} &= \boldsymbol{I} + \sin\theta[\vec{n}]_\times + (1-\cos\theta)[\vec{n}]_\times^2 \\ &= \boldsymbol{I} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}[\vec{n}]_\times + 2(\sin\frac{\theta}{2})^2[\vec{n}]_\times^2 \\ &= \boldsymbol{I} + 2w[\vec{a}]_\times + 2[\vec{a}]_\times^2 \\ R(q)_{Rodrigues} &= \boldsymbol{I} + 2w[\vec{a}]_\times + 2[\vec{a}]_\times^2 \end{aligned}$$

所以基于四元数的Rodrigues公式为:

$$\boldsymbol{R(q)_{Rodrigues}} = \boldsymbol{I} + 2w[\vec{a}]_\times + 2[\vec{a}]_\times^2$$

$$[\vec{a}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R(q)_{Rodrigues}} = \begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-zw) & 2(xz+yw) \\ 2(xy+zw) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-xw) \\ 2(xz-yw) & 2(yz+xw) & 1-2(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

References

[1] wikipedia. Quaternions[EB/OL]. https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions.

[2] wikipedia. Quaternions_and_spatial_rotation[EB/OL]. https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation.