Rodrigues旋转公式推导

Feng Jinyuan

June 23, 2018

1 简述

在三维空间中做旋转变换，其旋转矩阵的表达的方式是多样的，例如基于欧拉角的顺序绕轴旋转矩阵，缺点会出现万向节死锁现象。 还有一种三维空间的旋转变换表达是利用Rodrigues旋转公式 [1]，它是一种基于旋转轴，旋转角来表示向量在三维空间的旋转，该变换过程是 连续的。该公式在计算机图形学，工业机器上有广泛的应用。

2 问题描述

已知$\vec{u} = R\vec{v}$,其中$R = (\vec{n}, \theta)$ 表示向量在三维空间的旋转变换,则$\theta, \vec{n}$的关系表达式?

3 公式推导

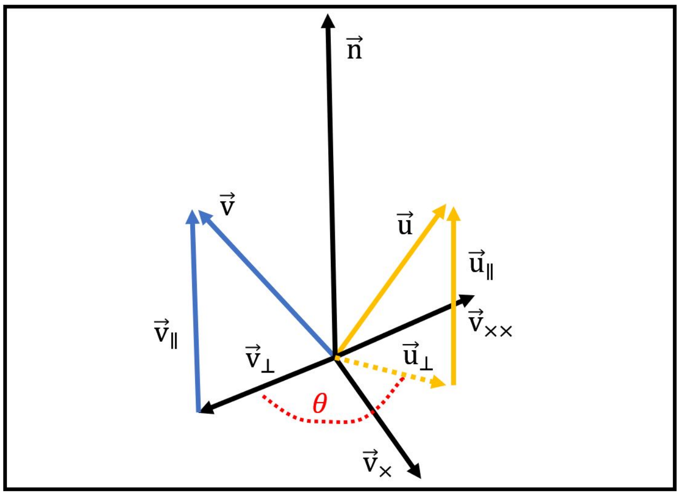

Figure 1: 旋转示意图

1. 计算$\vec{v}$在轴向量$\vec{n}$上的投影:

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=\parallel\vec{n}\parallel*\parallel\vec{v}\parallel*\cos\alpha$$

$$\parallel\vec{v}_{\parallel}\parallel=\parallel\vec{v}\parallel*\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{\parallel\vec{n}\parallel}$$

$$\vec{v}_{\parallel}=\frac{\parallel\vec{v}_{\parallel}\parallel}{\parallel\vec{n}\parallel}*\vec{n}=\frac{(\vec{n}\cdot\vec{v})*\vec{n}}{\parallel\vec{n}\parallel^2}$$

$\cdot$ 全文中表示内积，$*$全文中表示普通乘法,当$\vec{n}$ 为单位向量时,$\vec{v}$在$\vec{n}$上的投影向量为:

$$\vec{v}_{\parallel}=\vec{n}*(\vec{n}\cdot\vec{v})$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}n_iv_i=[\vec{n}]^T[\vec{v}]$$

$$[\vec{v}_{\parallel}]=[\vec{n}][\vec{n}]^T[\vec{v}]$$

$$\vec{v}_{\perp}=\vec{v}-\vec{v}_{\parallel}$$

$$[\vec{v}_{\perp}]=[\vec{v}]-[\vec{v}_{\parallel}]=(\boldsymbol{I}-[\vec{n}][\vec{n}]^T)[\vec{v}]$$

$[\vec{n}]$是向量的矩阵表示，全文默认向量均为列向量。

2. 通过计算$\vec{n}$与$\vec{v}$的叉乘(外积),我们可以得到$\vec{v}_{\perp}$旋转90度后的$\vec{v}_{\times}$同理我们可以得到$\vec{v}_{\times\times}$:

$$\vec{v}_{\times}=\vec{n}\times\vec{v}$$

$$[\vec{v}_{\times}]=[\vec{n}]_{\times}[\vec{v}]$$

$$[\vec{n}]_{\times}=\begin{pmatrix}0 & n_z & -n_y\\ -n_z & 0 & n_x\\ n_y & -n_x & 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{\times\times}=\vec{v}_{\times}\times\vec{n}=-\vec{v}_{\perp}$$

$$[\vec{v}_{\times\times}]=[\vec{n}]_{\times}^2[\vec{v}]$$

3. 计算$\vec{u}_{\perp}$:

$$\vec{u}_{\perp}=\cos\theta\vec{v}_{\perp}+\sin\theta\vec{v}_{\times}=-\cos\theta\vec{v}_{\times\times}+\sin\theta\vec{v}_{\times}$$

$$[\vec{u}_{\perp}]=(-\cos\theta[\vec{n}]_{\times}^2+\sin\theta[\vec{n}]_{\times})[\vec{v}]$$

4. 计算$\vec{u}$:

$$\vec{v}_{\parallel}=\vec{v}-\vec{v}_{\perp}$$

$$\vec{v}_{\times\times}=-\vec{v}_{\perp}$$

$$\vec{u}=\vec{v}_{\parallel}+\vec{u}_{\perp}=\vec{v}+\vec{v}_{\times\times}+\vec{u}_{\perp}$$

$$[\vec{u}]=[\vec{v}]+[\vec{v}_{\times\times}]+[\vec{u}_{\perp}]=[\vec{v}]+[\vec{n}]_{\times}^2[\vec{v}]+(-\cos\theta[\vec{n}]_{\times}^2+\sin\theta[\vec{n}]_{\times})[\vec{v}]$$

$$[\vec{u}]=(\boldsymbol{I}+(1-\cos\theta)[\vec{n}]_{\times}^2+\sin\theta[\vec{n}]_{\times})[\vec{v}]$$

5. R的旋转矩阵表示为:

$$\boldsymbol{R}(\vec{n},\theta)=\boldsymbol{I}+(1-\cos\theta)[\vec{n}]_{\times}^2+\sin\theta[\vec{n}]_{\times}$$

References

[1] wikipedia. Rodrigues-formula[EB/OL]. https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues%27_rotation_formula.