

## 近世代数习题作业 2

1. 设  $A$  是半群  $(S, \circ)$  的非空子集,  $\langle A \rangle$  为由  $A$  生成的子半群, 证明:

$$\langle A \rangle = \{x \mid \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in A \text{ 使 } x = a_1 a_2 \cdots a_n, n \geq 1\}$$

2. 设  $(M, \circ, e)$  是一个幺半群,  $a \in M$  称为幂等元, 如果  $a \circ a = a$ 。证明: 如果  $M$  是可交换的幺半群, 则  $M$  的所有幂等元之集是  $M$  的一个子幺半群。

3. 循环幺半群的子幺半群是否还是循环幺半群? 请举例说明你的结论。

4. 设循环幺半群  $(M, \circ, e) = \langle a \rangle$ , 且  $a^6 = e$ , 请分别给出  $\langle a^i \rangle = ? (i = 2, 3, 4, 5)$ 。

5. 设  $(M_1, \circ, e_1)$  与  $(M_2, *, e_2)$  是两个幺半群,  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  的同态。证明:  $\varphi^{-1}(e_2)$

是  $M_1$  的一个子幺半群。  $\varphi^{-1}(e_2)$  是否是  $M_1$  的理想?

$$\varphi^{-1}(e_2) = \{x \mid x \in M_1 \wedge \varphi(x) = e_2\}$$

6. 根据幺半群同构的 Cayley 定理, 自己举例说明一个幺半群同构于一个变换幺半群。

**//注: 大家自己任选其中 4 道题作为第 2 次的上交习题作业。**

**//提交时间: 下周 4 晚之前, 周五上课时讲解习题。**

**//提交方式: 同第 1 次作业, 大家必须提交到各班级的文件夹中。**