近世代数课后习题作业 1

1．找一个半群，它有限个左（右）单位元素。
2．找一个半群，它无限个左（右）单位元素。
3．设$(S,\circ)$是一个半群，$a \in S$称为左消去元素，如果$\forall x, y \in S$，有$a \circ x = a \circ y$，

则一定有$x = y$。试证：如果a和b均为左消去元，则$a \circ b$也是左消去元。

4．设Z为整数集合，$M = Z \times Z$。在M上定义二元运算"$\circ$"如下：

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M,\ (x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + 2x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

试证：

1）M对上述定义的代数运算构成一个幺半群。

2）若$(x_1, x_2) \neq (0,0)$，则(x_1, x_2)是左消去元。

3）运算"$\circ$"满足交换律。

5．在半群$(S,\circ)$中：若有$x^n = x^k$ $(n > k, x \in S)$，则有：$x^{n-k} x^k = x^k$

$\Rightarrow x^{2(n-k)} x^k = x^{n-k} x^k = x^n$

$\Rightarrow x^{2(n-k)} = x^{n-k} \Rightarrow x^{(n-k)} x^{(n-k)} = x^{n-k}$

请问上述推理有无错误之处?

6．证明：有限半群中一定有一个元素a使得$a \circ a = a$

7．设$(M, \circ, e)$是一个幺半群，$m \in M$是M的一个特定元素。在M上定义一个新

的乘法运算"$*$"如下：$\forall a, b \in M$，$a * b = a \circ m \circ b$。试证：$(M, *)$是一个半群，

问m满足什么条件时半群$(M, *)$是一个幺半群？

8．设$(S,\circ)$是一个半群，$u \notin S,\ M = S \cup \{u\}$。把$S$中的乘法"$\circ$"扩充到上，仍记为"$\circ$"：

$\forall a \in M$，$u \circ u = u$，$u \circ a = a \circ u = a$，试证：$M$对"$\circ$"构成一个幺半群。

9．设S是一个非空集合。试证S的幂集2^S对集合的对称差运算"Δ"构成一个群。

10.设S是一个非空集合。在S上定义乘法"$\circ$"如下：$\forall x, y \in S$，$x \circ y = y$。

证明：S对乘法"$\circ$"构成一个半群。

11．设$(S, \circ, *)$是一个具有两个二元代数运算"$\circ$"和"$*$"的代数系。如果对"$\circ$"和"$*$"分

别有单位元素e_1和e_2，并且"$\circ$"对"$*$"以及"$*$"对"$\circ$"分别都满足左及右分配律，

证明：$\forall x \in S$都有$x \circ x = x$，$x * x = x$

12．习题 10 中的半群称为左零半群。类似地可定义右零半群。如果$(S,\circ)$是一个半群且$a,b,c,d \in S$，只要$a \circ b = c \circ d$，则就有$a = c$或$b = d$。试证：$(S,\circ)$或为左零半群，或为右零半群。