近世代数习题作业 6

1．设A和B是群G的两个有限子群。证明：$|AB|=\dfrac{|A||B|}{|A\bigcap B|}$

证明：设$H=A\bigcap B$，则由定理知H仍为群G的子群，则由拉格朗日定理得：

$|B|=|H|\cdot[B:H]$，记 $j=[B:H]=\dfrac{|B|}{|H|}$，则 $B=Hb_1\bigcup Hb_2\bigcup\cdots\bigcup Hb_j$，$b_i\in B(i=1,\cdots,j)$ 其中 $Hb_i(i=1,\cdots,j)$ 为互不相同的右陪集。则 $AB=AHb_1\bigcup AHb_2\bigcup\cdots\bigcup AHb_j$，又 $AH=A$，所以 $AB=Ab_1\bigcup Ab_2\bigcup\cdots\bigcup Ab_j$，又$Ab_i\bigcap Ab_l=\phi$，否则，若$Ab_i\bigcap Ab_l\neq\phi$，则由陪集的性质得：$Ab_i=Ab_l$，从而$b_ib_l^{-1}\in A$，又$b_ib_l^{-1}\in B$，所以$b_ib_l^{-1}\in A\bigcap B$，即$b_ib_l^{-1}\in H$，所以$Hb_i=Hb_l$，矛盾。因此根据容斥原理有：$|AB|=|Ab_1|+|Ab_2|+\cdots+|Ab_j|=j\cdot|A|$

即 $|AB|=\dfrac{|B|}{|H|}\cdot|A|=\dfrac{|A||B|}{|A\bigcap B|}$

//

2．设G是一个n^2阶的群，H是G的一个n阶子群。证明：$\forall x\in G, x^{-1}Hx\bigcap H\neq\{e\}$。

证明：假设不成立，则$\exists a\in G$，使得$a^{-1}Ha\bigcap H=\{e\}$，记$P=a^{-1}Ha$，由H为G的子群易知P也为G的子群，且$|P|=|H|=n$（由映射$\varphi(h)=a^{-1}ha$为单射），则由1题的结论：$|PH|=\dfrac{|P||H|}{|P\bigcap H|}=\dfrac{n\cdot n}{1}=n^2$，又$PH\subseteq G$，$|G|=n^2$，所以$PH=G$，则由教材中的例题结论知$P\bigcap H=H\neq\{e\}$，矛盾。

//

3．利用1题的结论证明：六阶群中有唯一的一个三阶子群。

证明：由前面的习题结论知六阶群中一定有三阶子群，假设不唯一，设A,B为六阶群G两个不同的三阶子群。不妨设$A=\{e,a,b\}$，$B=\{e,c,d\}$，则$A\bigcap B=\{e\}$。从而$|AB|=\dfrac{|A||B|}{|A\bigcap B|}=9>6$矛盾。

4．证明：指数为 2 的子群是正规子群。

证明：设 H 为群 G 的子群，且有 $[G:H]=2$，则其左陪集构成的划分为：H, aH $(a \notin H)$，其右陪集构成的划分为：$H, Ha(a \notin H)$，从而 $aH = G \setminus H$ $Ha = G \setminus H$，所以 $aH = Ha$。

//

5．证明：两个正规子群的交还是正规子群。

证明：设 H_1, H_2 为群 G 的两个正规子群，记 $H = H_1 \cap H_2$。则对 $\forall a \in G, h \in H$，由 H_1, H_2 为群 G 的两个正规子群得：$aha^{-1} \in H_1$，$aha^{-1} \in H_2$，所以 $aha^{-1} \in H_1 \cap H_2$，即 $aha^{-1} \in H$，故 H 是 G 的正规子群。

//

6．设 H 是群 G 的子群，N 是 G 的正规子群。试证：NH 是 G 的子群。

证明：对 $\forall a, b \in NH$，则 $\exists n_1, n_2, h_1, h_2 \in NH$，使得 $a = n_1 h_1, b = n_2 h_2$，则 $ab^{-1} = n_1 h_1 h_2^{-1} n_2^{-1}$。又由 N 是 G 的正规子群，则对 $\forall x \in G$，$xN = Nx$。故 $\exists n_3 \in N$ 使得 $h_2^{-1} n_2^{-1} = n_3 h_2^{-1}$，则 $ab^{-1} = n_1 h_1 n_3 h_2^{-1}$，同理 $\exists n_4 \in N$，使得 $h_1 n_3 = n_4 h_1$，从而 $ab^{-1} = n_1 n_4 h_1 h_2^{-1} = (n_1 n_4)(h_1 h_2^{-1}) \in NH$，则由子群的判定定理知 NH 是 G 的子群。**//或由定理直接证 $NH = HN$**

//或直接用子群的定义证

//

7．设 G 是一个阶为 $2n$ 的交换群，试证 G 必有一个 n 阶商群。

证明：设 G 为群且 $|G| = 2n$，则由前面习题作业结论知偶数阶群 G 中一定存在一个阶为 2 元素，即 $\exists a \in G$，$a^2 = e$，从而 $H = (a) = \{e, a\}$。由 G 为交换群，则对 $\forall x \in G$，$xH = Hx = \{x, ax\} = \{x, xa\}$，故 H 为群 G 的一个 2 阶正规子群，根据拉格朗日定理以及正规子群和商群的关系知 G 必有一个 n 阶商群。

//

8．设 H 是群 G 的子群。证明：H 是 G 的正规子群的充分必要条件是 H 的任两个左陪集的乘积还是 H 的一个左陪集。

证明：

必要性 $\Rightarrow$：对 $\forall a, b \in G$，由 H 为 G 的正规子群可得：$aH \cdot bH = a(Hb)H = a(bH)H = abHH = abH$，仍为 H 的左陪集。

充分性$\Leftarrow$：由已知可得：对 $\forall a\in G$，$aH\cdot a^{-1}H=cH$，因为 $e\in aH\cdot a^{-1}H$，从而 $e\in cH$，；又 $e\in H$，即 $e\in cH\bigcap H$，则由左陪集的性质得：$cH=H$，所以 $aH\cdot a^{-1}H=H$，则对 $\forall h\in H$，$\exists h_1,h_2\in H$，使得 $aha^{-1}h_1=h_2$ $\Rightarrow$ $aha^{-1}=h_2h_1^{-1}\in H$

//

9．设 H 是群 G 的 2 阶正规子群，试证 G 的中心 C 包含 H。

证明：由 H 是群 G 的 2 阶正规子群可设 $H=\{e,a\}$，且对 $\forall x\in G$，$xH=Hx$，即 $\{x,xa\}=\{x,ax\}$，所以 $xa=ax$，故 $a\in C$，从而 $H\subseteq C$

//

10. 证明:包含换位子群的子群是正规子群。

证明:设 $P\subseteq N\subseteq G$,其中 N 是群 G 的子群,P 是 G 的换位子群。对 $\forall a\in G,h\in N$,

$aha^{-1}=(aha^{-1}h^{-1})h$，而 $aha^{-1}h^{-1}\in P$，所以 $aha^{-1}h^{-1}\in N$，从而 $(aha^{-1}h^{-1})h\in N$，即 $aha^{-1}\in N$，即 $aNa^{-1}\subseteq N$，所以 N 是群 G 的正规子群。

//

11. 令 $(G,\circ)$ 是一个有限群，A 与 B 为 G 的两个非空子集。试证：如果 $|A|+|B|>|G|$，则 $G=AB$。

证明：假设不成立，则有 $AB\subset G$，从而 $\exists y\in G\wedge y\notin AB$。令 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$，$|B|=k$。则下列关于未知数 x 的方程在 A 中无解：$x\circ b_i=y$，$i=1,\cdots,k$

由于 $b_i,y\in G$，显然该方程在 G 中有解，解集记为 $S=\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$，则 $A\bigcap S=\phi$，又 $S\subseteq G$，则 $|A|+|S|\le|\mathrm{G}|$，即 $|A|+k\le|G|$，从而 $|A|+|B|\le|G|$，矛盾。