近世代数习题作业 2

1．设 A 是半群 $(S,\circ)$ 的非空子集，(A) 为由 A 生成的子半群，证明：

$$(A)=\{x|\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A使x=a_1a_2\cdots a_n,n\geq 1\}$$

证明：记 $H=\{x|\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A使x=a_1a_2\cdots a_n,n\geq 1\}$，下证 $(A)=H$

1）先证 H 为包含 A 的 S 的子半群。

显然 $A\subseteq H$（令 $n=1$ 即可），且"$\circ$"在 H 上的运算封闭，故 H 为包含 A 的子半群。

2）下证 H 的“最小性”。

设 P 为任意包含 A 的子半群，下证 $H\subseteq P$。

对 $\forall x\in H$，$\exists a_1,a_2,\cdots,a_i\in A$ 使得 $x=a_1a_2\cdots a_i$，又 $A\subseteq P$，所以 $a_1,a_2,\cdots,a_i\in P$，故有 $a_1a_2\cdots a_i\in P$，即 $x\in P$，所以 $H\subseteq P$。

//

2．设 $(M,\circ,e)$ 是一个幺半群，$a\in M$ 称为幂等元，如果 $a\circ a=a$。证明：如果 M 是可交换的幺半群，则 M 的所有幂等元之集是 M 的一个子幺半群。

证明：令 $P=\{a|a\circ a=a,a\in M\}$

① 显然有 $e\in P$，故 $P\neq\phi$，且 $P\subseteq M$；

② 下证封闭性：对 $\forall a,b\in P$，下证 $a\circ b\in P$

因为 $(a\circ b)\circ(a\circ b)=a\circ(b\circ a)\circ b=a\circ(a\circ b)\circ b=(a\circ a)\circ(b\circ b)=a\circ b$，故 $a\circ b\in P$。

//

3．循环幺半群的子幺半群是否还是循环幺半群？请举例说明你的结论。

解：不一定。设 $G=(a)=\{e,a^1,a^2,a^3,\cdots\}$，$\{e,a^2,a^3,\cdots\}$ 为 G 的子幺半群，但不是循环幺半群。//成立的正例请大家自己给出。

//

4．设循环幺半群 $(M,\circ,e)=(a)$，且 $a^6=e$，请分别给出 $(a^i)=?(i=2,3,4,5)$。

解：见 PPT 讲义。

//

5．设 $(M_1,\circ,e_1)$ 与 $(M_2,*,\mathrm{e}_2)$ 是两个幺半群，$\varphi:\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2$ 的同态。证明：$\varphi^{-1}(e_2)$ 是 M_1 的一个子幺半群。$\varphi^{-1}(e_2)$ 是否是 M_1 的理想？

$//\varphi^{-1}(e_2)=\{x|x\in M_1\wedge\varphi(x)=e_2\}$

证明：记$S=\varphi^{-1}(e_2)$，则$S=\{x|\varphi(x)=e_2, x\in M_1\}$，显然有$S\subseteq M_1$

①S非空：由$\varphi(e_1)=e_2$知$e_1\in S$。

②封闭性：对$\forall x,y\in S$有：$\varphi(x)=e_2$，$\varphi(y)=e_2$，

则$\varphi(x\circ y)=\varphi(x)*\varphi(y)=e_2*e_2=e_2$，所以$x\circ y\in S$

故S是M_1的一个子幺半群。

若S是M_1的理想，则有$SM_1\subseteq S$，$M_1S\subseteq S$

对$\forall x\in S$，$\forall y\in M_1$，$\varphi(x\circ y)=\varphi(x)*\varphi(y)=e_2*\varphi(y)=\varphi(y)$

同理$\varphi(y\circ x)=\varphi(y)*\varphi(x)=\varphi(y)*e_2=\varphi(y)$

所以如果$\varphi(y)=e_2$，则$x\circ y(y\circ x)\in S$，此时S是M_1的理想，否则不是。

//

6．根据幺半群同构的 Cayley 定理, 自己举例说明一个幺半群同构于一个变换幺半群。

解：见 PPT 讲义。