近世代数作业 6

cycleke

November 23, 2020

Contents

1 课后习题

1.1 第一题

证明 由于 A，B 为 G 的有限子群，所以 $A \cap B$ 为 A 和 B 的子群。设 $H = A \cap B$，$S_l = \{a_1H, a_2H, \ldots, a_kH\}$ 为 H 的所有不同的左陪集之集，其中 $a_i \in A, i = 1, 2, \ldots, k$。所以 S_l 为 A 的一个划分，所以 $|A| = k|H|$。

因为 $\forall a_i, a_j (i \neq j)$，$a_iH \neq a_jH$，所以 $a_ia_j^{-1} \notin H$，然而 $a_ia_j^{-1} \in A$，所以 $a_ia_j^{-1} \notin B$。

又因为对于 AB，有

$$\begin{aligned} AB &= (\bigcup_{i=1}^{k} a_iH)B \\ &= \bigcup_{i=1}^{k}(a_iHB) \\ &= \bigcup_{i=1}^{k}(a_i(A \cap B)B) \\ &= \bigcup_{i=1}^{k}(a_iB) \end{aligned}$$

所以 $\forall a_i, a_j (i \neq j)$，$a_iB \neq a_jB$（否则有 $a_ia_j^{-1} \in B$，矛盾）。所以 $a_1B, a_2B, \ldots, a_kB$ 为 AB 的一个划分，进而有 $|AB| = k|B|$。

综上有，$|AB| = k|B| = \frac{|A||B|}{|H|} = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$。 □

1.2 第二题

当 $n = 1$ 时，命题并不成立，下面给出 $n \geq 2$ 时的证明。

证明 设 $P = x^{-1}Hx$ 首先证明 $P \leq G$。由于 $e \in H$ 所以 $e = x^{-1}ex \in x^{-1}Hx$。我们只需证明封闭性和逆元存在。

对于封闭性，有 $\forall p_1, p_2 \in P, \exists h_1, h_2 \in H, p_1 = x^{-1}h_1x, p_2 = x^{-1}h_2x, h_1h_2 \in H$，所以 $p_1p_2 = (x^{-1}h_1x)(x^{-1}h_2x) = x^{-1}(h_1h_2)x \in P$。

对于逆元存在，有 $\forall p \in P, \exists h \in H, p = x^{-1}hx$，因为 $x^{-1}h^{-1}x \in P$，而 $p(x^{-1}h^{-1}x) = e$，所以每个元素均有逆元存在。

所以 $P \leq G$，且 P_0 与 H 内自同构，$|P| = |H| = n$。

假设 $\exists x_0 \in G, s.t. x_0^{-1}Hx_0 \cap H = \{e\}$。设 $P_0 = x_0^{-1}Hx_0$，则 P_0 与 H 内自同构，$|P_0| = n$。

$\forall a \in H, b \in P_0$，且 a，b 不同时为 e，则有 $ab \notin H$ 且 $ab \notin P_0$（否则 $a \in P_0$或$b \in H \Rightarrow P \cap H \neq \{e\}$）。所以 $|HP_0| = |H||P_0| = n^2 = |G|$，由于 $ab \in G$，所以 $HP_0 = G$。由例 12.7.1 知 $HP_0 \neq \{e\}$，矛盾。

综上所述，$\forall x \in G, x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$。 □

1.3 第三题

证明 由前面的习题知三阶子群存在。

若三阶子群不唯一，不妨设 A, B 为六阶群 G 两个不同的三阶子群。则 $|AB| = \frac{9}{|A\cap B|}$。由于 A，B 为两个不同的三阶子群，所以 $|A\cap B| = 1 \Rightarrow |AB| = 9 > 6$，产生矛盾。

所以六阶群中有唯一一个三阶子群。 □

1.4 第四题

证明 设有群 G，H 为 G 的一个子群且 $[G : H] = 2$。则在 G 中，H 有且只有两个左陪集 H 和 $G - H$。

$\forall a \in H$，$aH = H = Ha$。

$\forall a \in G - H$，$aH = G - H = Ha$。

所以 H 为 G 的一个正规子群。 □

1.5 第五题

证明 设 A，B 为 G 的两个正规子群，$C = A \cap B$。显然 C 为 G 的一个子群。$\forall g \in G, \forall c \in C,$ 有 $gcg^{-1} \in A, gcg^{-1} \in B,$ 所以 $gcg^{-1} \in C,$ 所以 $gCg^{-1} \in C$。所以 C 为 G 的一个正规子群。 □

1.6 第六题

证明 由于 N 是群 G 的子群，H 是 G 的正规子群，所以 $\forall h \in H, Nh = hN$，即 $\forall x \in NH, \exists y \in HN, x = y$。所以 $NH \subseteq HN$，同理有 $HN \subseteq NH$。所以 $NH \leq G$。 □

1.7 第七题

证明 由于 G 为有限交换群，拉格朗日定理的逆命题成立，所以 G 有一个二阶子群，而 G 对其的划分为一个 n 阶商群。 □

1.8 第八题

证明 $\Rightarrow$. 由于 $H \triangleleft G$，所以 H 的左陪集集族构成商群，所以其任两个左陪集的乘积还是一个左陪集。

$\Leftarrow$. $\forall a, b \in G, \exists c \in G, aHbH = cH$。因为 $e \in H$，所以 $ab = aebe \in cH$。进而有 $abH = cH$，$aHbH = abH$。所以 $\forall a \in G, aHa^{-1}H = H$，所以 $aHa^{-1} = aHa^{-1}e \in H$。所以 $H \triangleleft G$。 □

1.9 第九题

证明 不妨设 $H = e, a, a^2 = e \forall x \in G, xHx^{-1} = H$。因为 $xex^{-1} = e$，所以 $xax^{-1} = a$。所以 $e, a \in C, H \subseteq C$。 □

1.10 第十题

证明 设 G 为群，$\forall H \leq G, G^{(1)} \subseteq H$，显然 $G^{(1)} \leq H$。$\forall x \in G, h \in H, xhx^{-1}h^{-1} \in G^{(1)} \leq H$。进而有 $xhx^{-1} = (xhx^{-1}h^{-1})h \in H$，所以 $xHx^{-1} \leq H$，所以 $H \lhd G$。 □

1.11 第十一题

证明 先证 $AB \subseteq G$，显然。

再证 $G \subseteq AB$。$\forall g \in G, |A^{-1}g| = |A|$，所以 $|A^{-1}g| + |B| = |A| + |B| > |G|$，所以 $A^{-1}g \cap B \neq \emptyset$. 于是 $\exists a \in A, b \in B, s.t. a^{-1}g = b, g = ab \in AB$，所以 $G \subseteq AB$。

综上所述，$AB = G$。 □