# 近世代数（2020 春）
# 课程报告

班级：xxxxxx

学号：xxxxxxxxxxx

姓名：cyclek

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

# 1 阐述一下半群和群的关系，并举例说明如何由半群和群来构造一个有限环。（20 分）

## 1.1 半群和群

半群和群都是用于表示两类具有特别性质的代数系。半群的定义如下：

**定义** 1.1 （半群）设“$\circ$”是非空集合 $S$ 上的一个二元代数运算，称为乘法。如果 $\forall a, b, c \in S$，有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$，则称集合 $S$ 对乘法 $\circ$ 形成一个半群（semigroup），并记为 $(S, \circ)$。

而在半群中有一种特别的半群：幺半群。

**定义** 1.2 （幺半群）有单位元素的半群 $(S, \circ)$ 称为独异点（monoid）或称为幺半群。

即如果 $(S, \circ)$ 是一个幺半群，那么 $\exists e \in S$，使得 $\forall a \in S, a \circ e = e \circ a = a$。

此时我们定义一个概念：逆元素。

**定义** 1.3 （逆元素）设 $(S, \circ, e)$ 是一个幺半群。元素 $a \in S$ 称为有逆元素，如果存在 $b \in S$ 使 $a \circ b = b \circ a = e$，此时 $b$ 叫做 $a$ 的逆元素。

而群就是一种更加特别的幺半群：

**定义** 1.4 （群）对于幺半群 $(S, \circ, e)$，如果其中中的每个元素 $a \in S$，都存在一个逆元素 $b \in S$，那么我们称它为一个群。

总的来说，半群就是一个代数系 $(S, \circ)$，乘法“$\circ$”在集合 $S$ 上满足封闭性和结合律。群则是一类特殊的半群，它的乘法“$\circ$”在集合 $S$ 上不仅满足封闭性和结合律，而且存在单位元素 $e$，每个元素都存在一个逆元素。

## 1.2 构造有限环

环是一种更复杂的代数系。

**定义** 1.5 （环）设 $R$ 是一个非空集合，$R$ 中有两个代数远算，一个叫做加法并用加号“+”表示，另一个叫做乘法并用“$\circ$”表示。如果

（1） $(R,+)$ 是一个 Abel 群；

（2） $(R,\circ)$ 是一个半群；

（3） 乘法对加法满足左、右分配律：$\forall a,b,c\in R$ 有

$$a\circ(b+c)=(a\circ b)+(a\circ c)$$
$$(b+c)\circ a=(b\circ a)+(c\circ a)$$

则称代数系 $(R,+,\circ)$ 为一个环。

所以我们可以考虑群 $G$，其集合为模 5 剩余类 $Z_5$，“乘法”为模意义下的加法 $\oplus, [i]\oplus[j]=[i+j]$；半群 $S$，其集合同为模 5 剩余类 $Z_5$，“乘法”为模意义下的乘法 $\otimes, [i]\otimes[j]=[i\times j]$。

容易证明（事实上在课本中已经证明了），$G$ 为一个 Abel 群，$S$ 为一个半群，且模意义下的乘法 $\otimes$ 对模意义下的加法 $\oplus$ 满足分配律。又因为 $|Z_5|=5$，所以 $(Z_5,\oplus,\otimes)$ 是一个有限环。

# 2 举例说明群的同构 Cayley 定理的意义。你认为在研究两个代数系统之间的关系时候，该定理有什么局限性没有？如果有，你有什么解决方案？（20 分）

## 2.1 Cayley 定理的意义

我们首先介绍变换群的概念。

**定义 2.1** （对称群）设 $S$ 是一个非空集合。从 $S$ 到 $S$ 的所有一一对应之集记为 $Sym(S)$，则 $Sym(S)$ 对映射的合成构成一个群，称为 $S$ 上的对称群。n

**定义 2.2** （变换群） $Sym(S)$ 的任一子群称为 $S$ 上的一个变换群。

**定理 2.1** （群的 Cayley 同构定理）任何一个群都同构于某个变换群。

更为具体地，每一个群 $G$ 都同构于变换群 $L(G)=\{f_a\mid f_a:G\to G,\forall x\in G, f_a(x)=a\circ x, a\in G\}$。特别地，对于有限群，$L(G)$ 是一个置换群，即

$$L(G)=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_ia_1 & a_ia_2 & \dots & a_ia_n\end{pmatrix}\middle| a_i\in G\right\}$$

利用 Cayley 定理，我们可以为任何一个抽象的群找到一个对应的变换群模型。相比与原本的抽象群，我们找到的变换群比较具体，其元素是一一对应的，代数运算是一一对应的合成，不但具体而且容易计算。因此，用变换群给出抽象群的

例子是方便和合理的。经验告诉我们，相比与抽象，具体的例子总是更容易理解和分析的。

### 2.2 Cayley 定理的局限性

Cayley 定理要求我们研究的对象必须是一个群。对于一个抽象的代数系统，如果它不是一个群，那么我们就无法应用 Cayley 定理，那么就不得不又去研究那个抽象的代数系统。

### 2.3 对于局限性的解决方案

为了解决 Cayley 定理的局限性，我们需要对 Cayley 定理进行一定程度的拓展。

**定理** 2.2 任何一个半群都同构于某个对称群的子集。

**证明** 设 $(S, \circ)$ 为一个半群。构造 $L = \{f_a \mid f_a : S \to S, \forall x \in S, f_a(x) = a \circ x, a \in G\}$。

首先证明 $L$ 对于映射的合成构成一个半群。事实上，$\forall f_a, f_b \in L$，$f_a \bullet f_b(x) = f_a(f_b(x)) = a \circ b \circ x = f_{a \circ b}(x)$，所以 $f_{a \circ b} = f_a \bullet f_b$，$\bullet$ 在 $L$ 上封闭。又因为映射的合成满足结合律，所以 $(L, \bullet)$ 构成一个半群。

令映射 $\varphi : S \to L, \varphi(a) = f_a, \forall a \in G$，不难发现 $\varphi$ 是一一对应且 $\forall a, b \in G, \varphi(a \circ b) = f_{a \circ b} = f_a \bullet f_b = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$。因此，$\varphi$ 是一个 $S$ 到 $L$ 的同构。 □

这样我们就可以将一个抽象的半群具体化为具体的半群。而对于其他的代数系统，我们可以亦根据其性质来构造对应的具体的代数系。

## 3 结合实例给出判定一个子群是否为正规子群的方法，并说明在代数系统研究中正规子群有什么重要应用？（20 分）

### 3.1 判定正规子群

**定义** 3.1 设 $H$ 是群 $G$ 的子群。如果 $\forall a \in G$，有 $aH = Ha$，则称 $H$ 是 $G$ 的正规子群，记为 $H \triangleleft G$。

正规子群是左右陪集相等的子群，我们可以直接使用定义来判定一个子群是否为正规子群。如对于群 $(Z_5, \oplus)$，其子群 $H_1 = (\{[0]\}, \oplus)$ 和 $H_2 = (\{[0], [1]\}, \oplus)$，容易证明 $\forall a \in Z_5,$ 设$a = [x], aH_1 = \{a\} = H_1 a$，$aH_2 = \{[x], [x+1]\} = H_2 a$。所以 $H_1, H_2$ 均为群 $(Z_5, \oplus)$ 的正规子群。

使用定义判定很直接，但是使用时不够灵活，证明较繁琐。我们平时还可以使用正规子群的充要条件（定理3.1）来判定正规子群。

**定理** 3.1 设 $H$ 是群 $G$ 的一个子群，则下面三个命题等价：

（1） $H$ 是 $G$ 的正规子群

（2） $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$

（3） $\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$

容易看出，第三个命题是较弱的，故我们一般采用命题三来判定正规子群。一个例子是我们可以使用命题三来证明换位子群是正规子群。

**定理** 3.2 群 $G$ 的换位子群 $H$ 是 $G$ 的正规子群。

**证明** 因为 $H$ 是 $G$ 的换位子群，所以 $\forall h \in H, g \in G$，有 $ghg^{-1}h^{-1} \in H$，于是 $ghg^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})h \in H$。所以 $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$，$H$ 是 $G$ 的正规子群。 □

而使用命题二我们亦可以判定一个正规子群。在群 $(S_3, \circ)$ 的子群中，$H = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ 就构成了一个正规子群，判定如下：

$$
\begin{gathered}
IHI = H \\
(1\ 2)H(1\ 2) = H \\
(1\ 3)H(1\ 3) = H \\
(2\ 3)H(2\ 3) = H \\
(1\ 2\ 3)H(1\ 3\ 2) = H \\
(1\ 3\ 2)H(1\ 2\ 3) = H
\end{gathered}
$$

除此以外，我们还可以使用其他的定理来判定一个子群是否为正规子群。

**定理** 3.3 群 $G$ 的子群 $H$ 是 $G$ 的正规子群当且仅当对 $G$ 的任一内自同构 $\varphi$ 有 $\varphi(H) = H$。

不难发现，该定理的判定条件与定理3.1中的命题二是等价的。

## 3.2 正规子群的应用

正规子群在群论中占有重要的地位。正规子群之所以重要是它的陪集构成的集群对群子集形成群。

**定理** 3.4 设 $H$ 是 $G$ 的正规子群，$H$ 的所有左陪集构成的集族 $S_l$ 对群子集乘法形成一个群。

**定义** 3.2 群 $G$ 的正规子群 $H$ 的所有左陪集构成的集族，对群子集乘法构成的群称为 $G$ 对 $H$ 的商群，记为 $G/H$。

我们可以看到，每个正规子群，对应了一个商群。商群的乘法是借助与 $G$ 的乘法定义的，而商群 $G/H$ 与群 $G$ 有密切的联系。因此，对 $G/H$ 的研究将有助于对 $G$ 的性质的深刻认识。因此，正规子群在群论中占有重要的地位。

此外，利用正规子群 $H$ 对应的商群 $G/H$，我们可以定义 $G$ 上的一个等价关系。这个等价关系是这样的：$\forall a, b \in G$，$a \cong b$ 当且仅当 $ab^{-1} \in H$。而且这个等价关系是同余关系，即若 $a \cong b, a' \cong b'$，则 $a \circ a' \cong b \circ b'$。此外正规子群在群的同态基本定理（定理4.1）中也有应用。

**定理** 3.5 设 $H$ 是群 $G$ 的子群，则 $H$ 是正规子群的充分必要条件是 $G$ 上的由 $H$ 确定的等价关系“$\cong$”：

$$a \cong b \text{当且仅当} ab^{-1} \in H$$

# 4 通过实例来简述群的同态基本定理及其意义，并结合你的例子指出其中同态核的意义。（30 分）

## 4.1 群的同态基本定理及其意义

**定义** 4.1 设 $\varphi$ 是群 $(G, \circ)$ 到群 $(\bar{G}, \bullet)$ 的满同态，$\bar{e}$ 是 $\bar{G}$ 的单位元，则 $G$ 的正规子群 $\varphi^{-1}(\bar{e})$ 称为同态 $\varphi$ 的核，记为 $Ker\ \varphi$。$\varphi(G)$ 称为在 $\varphi$ 下 $G$ 的同态象。

**定理** 4.1 （群的同态基本定理） 设 $\varphi$ 是群 $SG$ 到群 $\bar{G}$ 的满同态，$E = Ker\ \varphi$，则

$$G/E \cong \bar{G}$$

群的同态基本定理的意义在于，设 $G$ 的性质已经比较清楚，而群 $\bar{G}$ 的性质的尚不太清楚，那么基于定理4.1，如果能建立一个从 $G$ 到 $\bar{G}$ 的满同态 $\varphi$，则 $\bar{G} \cong G/Ker\ \varphi$，从而 $\bar{G}$ 与 $G/Ker\ \varphi$ 的性质完全一样。而群 $G/Ker\ \varphi$ 是 $G$ 的正规子群 $Ker\ \varphi$ 的陪集，是 $G$ 的一个特殊的等价类划分，其乘法是借由 $G$ 的乘法定义的。因此，$G/Ker\ \varphi$ 的性质容易从 $G$ 的一些性质得到。也就是说，定理4.1为我们提供了一种从已知群推导另一个群的性质的方法。

例如，我们已知群 $G = (Z_6, \oplus)$ 这个群的性质，如果我们要研究群 $\bar{G} = (\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}, \circ)$，$\bar{G}$ 表示的三个用弧度表示的角，其的乘法为逆时针旋转。

不难得出，$G$ 的单位元为 $[0]$，$\bar{G}$ 的单位元为 0。$G$ 到 $\bar{G}$ 的满同态 $\varphi : G \to \bar{G}, \varphi([x]) = \frac{2\pi(x \mod 3)}{3}$。所以 $Ker\ \varphi = \{[0], [3]\}$，根据定理4.1有

$$\bar{G} \cong G/Ker\ \varphi = \{\{[0], [3]\}, \{[1], [4]\}, \{[2], [5]\}\}$$

故有结论 $\bar{G}$ 是一个三阶循环群。

### 4.2 同态核的意义

$Ker\ \varphi$ 不仅是 $G$ 的一个子群，而且是一个正规子群。因此，商群 $G/Ker\ G$ 变得具有意义。在上面的例子中，我们是依据同态核 $Ker\ \varphi$ 来将群 $G$ 来进行划分为 $\{\{[0],[3]\},\{[1],[4]\},\{[2],[5]\}\}$。我们将模 6 意义下差（或者说 $G$ 中的商）在 $Ker\ \varphi$ 中的元素划分到同一个集合。

## 5 谈一下抽象代数系统的学习给你带来的体会，以及你对此门课程今后的建议。（10 分）

在以前，我学习的都是具体的代数系统，如实数 $\mathbb{R}$ 上对四则运算法构成的算数系统和包含了集合论运算（如并集、交集、补集）的集合代数。而抽象代数系统是对于一类代数系统的抽象，而不是某一个特定的代数系统。它不关注某个特定代数系统本身的性质，而是关注一类具有相似点的代数系统共有的性质。相比与原本具体的代数系统，抽象代数系统的抽象层次提升了许多，对应地，学习和理解的难度也提升了许多。

抽象代数系统的学习提高了我的抽象能力和理解能力。在计算机理论和应用中，抽象是一项十分重要的能力，如计算建模就是将实际问题抽象为一个模型来研究。抽象代数系统的定理更加抽象，同时也更加一般，可以拓展到更多的代数系统中。利用抽象代数系统，我们可以实现代数系统的公理化，严谨地研究更为一般的代数系统，得到更为一般的理论。例如，各类置换群的结论可被视为“抽象群”的一般概念有关之一般性定理的特例。

由于本学期是在线上授课，我感觉上课过程中关于证明过程和证明思路的教学不足，个人感觉有点遗憾，希望在日后的教学中可以强化这一方面。