近世代数作业 3

cycleke

November 23, 2020

Contents

1 课后习题

1.1 第一题

证明 若 $G_1 \not\subseteq G_2$ 且 $G_2 \not\subseteq G_1$，则 $\exists a, b \in G, a \notin G_1, b \notin G_2$。

于是 $a, a^{-1} \in G_2, b, b^{-1} \in G_1$。设 $g = ab$，显然 $g \in G$。因为 $G = G_1 \cup G_2$，所以 $g \in G_1$ 或 G_2。

若 $g \in G_1$，则 $ab = g \Rightarrow a = gb^{-1} \in G_1$，这与 $a \notin G_1$ 矛盾，所以 $g \notin G_1$。同理有 $g \notin G_2$，这与 $g \in G_1$ 或 G_2 矛盾，所以 $G_1 \subseteq G_2$ 或 $G_2 \subseteq G_1$。 □

1.2 第二题

证明 显然 $\varphi^{-1}(e_2) \subseteq G_1$，所以只需证明 $(\varphi^{-1}, \circ)$ 是一个群。

因为 $(G_1, \circ)$ 是一个群，所以 $\circ$ 满足结合律。

因为 φ 是满射，所以 $\forall a \in G_2, \exists b \in G_1, \varphi(b) = a$，进而有 $\varphi(e_1) * a = \varphi(e_1) * \varphi(b) = \varphi(e_1 \circ b) = \varphi(b) = a$，所以 $\varphi(e_1) = e_2$，即 $e_1 \in \varphi^{-1}(e_2)$。

$\forall a \in \varphi^{-1}(e_2)$，有 $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}) * e_2 = \varphi(a^{-1}) * \varphi(a) = \varphi(a^{-1} \circ a) = \varphi(e_1) = e_2$，所以 $a^{-1} \in \varphi^{-1}(e_2)$，所以 $(\varphi^{-1}, \circ)$ 是一个群。

综上所述，命题得证。 □

1.3 第三题

由例 12.3.3 有

$$(S_1) = \{3n + 5m | n, m \in Z\}$$

$$(S_2) = \{8n + 12m | n, m \in Z\}$$

1.4 第四题

证明 显然 $G \subseteq Sym(R)$，所以只需证明 G 是一个群。

由于映射的合成具有结合律，所以 G 对于映射的合成 $\circ$ 也符合交换律。

设 $id(x) = x, \forall x \in R$，则 $\forall f \in G, (id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x) \Rightarrow id \circ f = f$。所以 id 是 G 的左幺元。

$\forall f \in G, f(x) = ax + b, \forall x \in R, a \neq 0, b \in R$。设 $g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{c}{a}$，有

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(ax + b) \\ &= \frac{1}{a}(ax + b) - \frac{c}{a} \\ &= x \\ \therefore g \circ f &= id\end{aligned}$$

所以 $(G, \circ)$ 是一个群，所以 G 是一个变换群。 □

1.5 第五题

证明 由基本的代数知识可知 φ，是是个双射，而 $\forall a, b \in R^+$

$$
\begin{aligned}
\varphi(a \times b) &= \log_p(a \times b) \\
&= \log_p(a) + \log_p(b) \\
&= \varphi(a) + \varphi(b)
\end{aligned}
$$

所以 φ 是同构。 $\square$