近世代数作业 3

cycleke

November 23, 2020

Contents

1 课后习题

1.1 第一题

证明 首先证明 $(S,\circ)$ 是一个代数系，即 $\circ$ 在 S 上封闭。

$$\begin{gathered}\forall(a,b),(c,d)\in S\\(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)\\\because a,c\neq 0,a,b,c,d\in R\\\therefore ac\neq 0,ac,ad+b\in R\\\therefore (ac,ad+b)\in S\end{gathered}$$

再证明 $(S,\circ)$ 是一个半群。

$$\begin{aligned}\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in S&\\((a,b)\circ(c,d))\circ(e,f)&=(ac,ad+b)\circ(e,f)\\&=(ace,acf+ad+b)\\(a,b)\circ((c,d)\circ(e,f))&=(a,b)\circ(ce,cf+d)\\&=(ace,acf+ad+b)\\\therefore ((a,b)\circ(c,d))\circ(e,f)&=(a,b)\circ((c,d)\circ(e,f))\end{aligned}$$

又有

$$\forall(a,b)\in S,(1,0)\circ(a,b)=(a,b),(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\circ(a,b)=(1,0)$$

所以 $(S,\circ)$ 是群。 □

1.2 第二题

证明

$$\begin{gathered}\because (ab)^2=a^2b^2\\\therefore abab=aabb\\\Rightarrow a^{-1}abab=a^{-1}aabb\Rightarrow bab=abb\\\Rightarrow babb^{-1}=abbb^{-1}\Rightarrow ba=ab\\\therefore ab=ba\end{gathered}$$ □

1.3 第三题

证明 因为 $\forall a\in G,a^2=e$，又因为 G 是群，所以 $a^{-1}=a$。

$$\begin{aligned}\forall a,b\in G,ab&=(ab)^{-1}\\&=b^{-1}a^{-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1} \\
&= ba
\end{aligned}
$$

所以 G 是交换群。 □

1.4 第四题

证明 设 G 是四阶群，则设 $G = \{e, a, b, c\}$。若 G 不是交换群，不妨 $ab \neq ba$。显然 $ab \neq a, ab \neq b, ba \neq a, ba \neq b$，所以可以设 $ab = c, ba = e$。因为 G 是一个群，进而有 $b = a^{-1} \Rightarrow ab = e$，这与 $ab = c$ 矛盾，所以 $ab = ba$。同理可以推出其它的交换成立，所以 G 是一个交换群。 □

1.5 第五题

证明 设该群为 G，若 $\exists a \in G, |a| \geq 3$，则 $a \neq a^{-1}$(否则$a^2 = e \Rightarrow |a| = 2$)。所以 $aa^{-1} = a^{-1}a = e$。

若 $\nexists a \in G, |a| \geq 3$，即 $\forall a \in G, |a| \leq 2 \Rightarrow \forall a \in G, a^2 = e$。由第三题的证明可知，可以证明 G 是一个交换群，这与题设矛盾。

综上所述，命题得证。 □

1.6 第六题

证明 设 G 是一个有限群，对于所有的 $\forall a \in G, s.t. |a| = 2$ 有 $a^2 = e \iff a = a^{-1}$。

由于 a 与 a^{-1} 同阶，所以 $\forall a \in G, s.t. |2| > a$ 有 $|a| \neq |a^{-1}|, |a^{-1}| = |a| > 2$，所以有限群里阶大于 2 的元素的个数必为偶数。 □

1.7 第七题

证明 由第六题知，可以知在偶数阶群中，阶大于 2 的元素为偶数个，所以阶小于等于 2 的元素为偶数个。又有 $|e| = 1$，所以偶数阶群里阶为 2 的元素的个数必为奇数。 □

1.8 第八题

证明 由第七题知，可以知在偶数阶群中，偶数阶群里阶为 2 的元素的个数必为奇数。有因为偶数阶群里阶为 2 的元素的个数非负，所以偶数阶群里至少有一个阶为 2 的元素。 □

1.9 第九题

证明 设 $b_0 = e, b_i = \prod_{j=1}^{i} a_j, i = 1, 2, \ldots, n$，由抽屉原理有 $\exists i, j \in 0, 1, \ldots, n, i < j, b_i = b_j$。

$$
\begin{gathered}
e \circ a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_i = e \circ a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_j \\
a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_i = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_j
\end{gathered}
$$

$$a_2 \circ \ldots \circ a_i = a_2 \circ \ldots \circ a_j$$
$$\cdots$$
$$e = a_{i+1} \circ a_{i+2} \circ \ldots \circ a_j$$

所以 $\begin{cases} p = i+1 \\ q = j \end{cases}$ 。 □

1.10 第十题

证明 设 $l = [m,n], |ab| = k$，则因为 $ab = ba$

$$\begin{aligned}(ab)^l &= a^l b^l \\ &= a^{m\frac{l}{m}} b^{n\frac{l}{n}} \\ &= e\end{aligned}$$

有因为 $|ab| = k$，所以 $k \le l$，若 $k \nmid l$，则 $l = pk + q, p, q \in \mathcal{N}^+, 1 \le q < k$。

$$\begin{aligned}(ab)^l &= a^l b^l \\ &= a^{pk} a^q b^{pk} b^q \\ &= a^q b^q \\ &= (ab)^q \ne e\end{aligned}$$

发生矛盾，所以 $k \mid l$。 □

当 $(n,m) = 1$ 时，ab 的阶为 mn。