近世代数习题作业 5

1. 证明：n次单位根之集对复数的乘法构成一个循环群。

证明：记$U_n=\{x \mid x^n=1\}$，对$\forall x_k\in U_n$，$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，$k=0,1,\cdots,n-1$。

由前面的习题作业知其为群，且有$U_n=(x_1)$， 其中$x_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^k=(x_1)^k\text{。}$$

//

2. 找出模 12 的同余类加群的所有真子群。

解：$(Z_{12},\oplus)$为模 12 的同余类加群，$Z_{12}=(a)=([1])$，其非平凡真子群如下：

1）$S_1=(2a)=\{[0],[2],[4],[6],[8],[10]\}$

2）$S_2=(3a)=\{[0],[3],[6],[9]\}$

3）$S_3=(4a)=\{[0],[4],[8]\}$

4）$S_4=(6a)=\{[0],[6]\}$

//

3. 设$G=(a)$是一个n阶循环群。证明：如果$(r,n)=1$，则$(a^r)=G$。

证明：由$(n,r)=1\Rightarrow\exists k_1,k_2\in Z$，$k_1\cdot n+k_2\cdot r=1$，则有：

$a^1=a^{k_1\cdot n+k_2\cdot r}=a^{k_1\cdot n}a^{k_2\cdot r}=ea^{k_2\cdot r}=(a^r)^{k_2}$，即$a=(a^r)^{k_2}$，则$G$的生成元$a$可由$a^r$生成，故有：$(a^r)=G$。

//

4．假定群G的元素a的阶为n，$(r,n)=d$，证明：a^r的阶为n/d。

证明：设a^r的阶为k，则$(a^r)^k=e$，即$a^{rk}=e$。又$a^n=e$，所以$n|rk$，又$(r,n)=d$，

则有：$\frac{n}{d}|\frac{r}{d}k$，而$(\frac{n}{d},\frac{r}{d})=1$，所以$\frac{n}{d}|k$。

又由$(a^r)^{\frac{n}{d}}=a^{\frac{nr}{d}}=(a^n)^{\frac{r}{d}}=e^{\frac{r}{d}}=e$得：$k|\frac{n}{d}$，从而$k=\frac{n}{d}$

5．证明：六阶群里必有一个三阶子群。

证明：设$(G,\circ)$为六阶群。则对$\forall x \in G(x \neq e)$，其阶只能为 2，3，6。

1）若$\exists a \in G$，且a的阶为 6 ，即$a^6 = e$，则$G = (a)$，则由循环群的子群知存在

三阶子群为：$S = \{e, a^2, a^4\}$

2）若$\exists a \in G$，且a的阶为 3 ，即$a^3 = e$，此时显然有三阶子群为：$S = \{e, a^1, a^2\}$

3）若不存在$a \in G$，使得a的阶为 3 或 6，则对$\forall a \in G$有$a^2 = e$，从而此时群$(G,\circ)$为交换群。令$A = \{a, b\}$，其中$a, b \in G$且均不为单位元。则$(A) = \{e, a, b, ab\}$，$|(A)| = 4 \nmid 6$。

//

6. 设p是一个素数。证明：在阶为p^m的群里一定含有一个p阶子群，其中$m \geq 1$。

证明：设$(G,\circ)$为群，$|G| = p^m$。取$a \in G(a \neq e)$，设其阶为r，则$r \mid p^m$，

由p为素数得：$r = p^k$，$k \geq 1$。

1）若$k = 1$，则群G的一个p阶子群为$H = (a)$；

2）若$k > 1$，取$b = a^{p^{k-1}} \in G$，设b的阶为q，即$b^q = e$。由$b^p = (a^{p^{k-1}})^p = a^{p^k} = e \Rightarrow$ $q \mid p$，又$b^q = (a^{p^{k-1}})^q = a^{qp^{k-1}} = e$，则有$r \mid qp^{k-1}$，即：$p^k \mid qp^{k-1}$，从而$p \mid q$，所以$q = p$。

此时群G的一个p阶子群为$H = (b)$。

//

7．在三次对称群S_3中，找一个子群H，使得H的左陪集不等于H的右陪集。

见 PPT。

//

8．设H是G的一个子群，如果左陪集aH等于右陪集Ha，即$aH = Ha$，则$\forall h \in H, ah = ha$一定成立吗？

见 PPT。

//

9．证明讲义文件“讲解 2-6”中的定理 6。//证明双射时不允许直接说显然。

证明：只需在S_l与S_r之间找到一个双射即可。

定义$\varphi: S_l \to S_r$，且对$\forall aH \in S_l$，有$\varphi(aH) = Ha^{-1}$，下证φ为双射。

1）φ为映射：若$aH = bH$，下证$Ha^{-1} = Hb^{-1}$

由 $aH = bH \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow Ha^{-1}b = H \Rightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1}$

2）满射：显然。

3）单射：对 $\forall aH, bH \in S_l$，若 $aH \neq bH$，则 $a^{-1}b \notin H$，则有：$Ha^{-1}b \neq H$，

从而 $Ha^{-1} \neq Hb^{-1}$，即 $\varphi(aH) \neq \varphi(bH)$，故为单射。

//////////////////////////////////////

10. 在讲义文件“讲解 2-6”最后一页的思考题中，就群 G 为有限群或无限群分别举例说明该思考题结论的正确性。//要求先证明，再举例。

题：设 G 为群，H 是 G 的子群，且有 $[G:H]=2$，

1）证明：对 $\forall x \in G$，均有 $x^2 \in H$。

2）分别就 G 为有限和无限举例说明。

证明：

1）

I．$x \in H$:显然。

II．$x \notin H$: $x^{-1} \notin H, xH = G - H,\quad x^{-1}H = G - H,$ 从而 $xH = x^{-1}H$，则 $x^2 \in H$。

2）

G 无限：G 为整数加法群，H 为偶数加法子群。

G 有限：G 为 S3，H 为其唯一的 3 阶子群。