近世代数作业 2

cycleke

November 23, 2020

Contents

1 课后习题

1.1 第一题

证明 设 $G=\{x\mid \exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A, x=a_1a_2\cdots a_n, n\geq 1\}$，则只需证明 $(A)=G$。

首先证明 $(A)\subseteq G$

$$\begin{gathered}\forall x,y\in G,\exists a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2\cdots,b_m\in A,n,m\geq 1\\ s.t.x=a_1a_2\cdots a_n, y=b_1b_2\cdots b_m\\ \therefore x\circ y=a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m\\ \therefore x\circ y\in G\end{gathered}$$

所以 $(G,\circ)$ 是 $(S,\circ)$ 的一个子半群。显然 $A\subseteq G$，又因为 (A) 是为由 A 生成的子半群，所以 $(A)\subseteq G$。

再证明 $G\subseteq (A)$

$$\begin{gathered}\forall x\in G,\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A,x=a_1a_2\cdots a_n,n\geq 1\\ \therefore a_i\in A\in (A),1\leq i\leq n\\ \because (A)\text{是一个子半群}\\ \therefore a_1a_2\cdots a_n\in (A)\Rightarrow x\in (A)\end{gathered}$$

所以 $G\subseteq (A)$。

所以 $A=G=\{x\mid \exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A,x=a_1a_2\cdots a_n,n\geq 1\}$。 □

1.2 第二题

证明 设 M 的所有幂等元之集为 M'。显然 $M'\subseteq M, e\in M'$，所以只需证明 M 是一个半群。

$$\begin{gathered}\forall a,b\in M'\\ a\circ b=(a\circ a)\circ(b\circ b)\\ \because M\text{是一个可交换幺半群}\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\therefore a\circ b&=(a\circ a)\circ(b\circ b)\\ &=a\circ a\circ b\circ b\\ &=a\circ b\circ a\circ b\\ &=(a\circ b)\circ(a\circ b)\\ \therefore a\circ b&\in M'\end{aligned}$$

$\therefore \circ$ 是 M' 的一个二元运算。

因为 $M'\subseteq M,(M,\circ,e)$ 是一个可交换幺半群，所以 $\circ$ 符合交换律。M 的所有幂等元之集是 M 的一个子幺半群。 □

1.3 第三题

不一定。

如 $(Z^+, +)$ 是一个循环幺半群，而 $(Z^+ - 1, +)$ 不是。

如 $(Z_4, +)$,(Z_4 是模 4 剩余类) 是一个循环幺半群，且其一个子幺半群 $(\{[0], [2]\}, +)$ 也是。

1.4 第四题

$$
\begin{aligned}
M &= e, a, a^2, a^3, a^4, a^5 \\
(a^2) &= e, a^2, a^4 \\
(a^3) &= e, a^3 \\
(a^4) &= e, a^2, a^4 \\
(a^5) &= M
\end{aligned}
$$

1.5 第五题

首先证明 $\varphi^{-1}(e_2)$ 是 M 的一个子幺半群。

证明 因为 $\varphi(e_1) = e_2$，所以 $e_1 \in \varphi^{-1}(e_2)$，又由于 $(M, \circ, e_1)$ 是一个幺半群，所以只需证明 $\circ$ 是 $\varphi^{-1}(e_2)$ 的一个二元运算。

$$
\begin{aligned}
\forall x, y \in & \varphi^{-1}(e_2) \\
\text{因为}\varphi\text{是}& M_1 \to M_2\text{的同态} \\
\varphi(x \circ y) &= \varphi(x) * \varphi(y) \\
&= e_2 * e_2 \\
&= e_2 \\
\text{所以}x \circ y &\in \varphi^{-1}(e_2)
\end{aligned}
$$

所以 $\varphi^{-1}(e_2)$ 是 M_1 的一个子幺半群。 □

$\varphi^{-1}(e_2)$ 不一定是 M_1 的理想。

若 $\exists x \in M_1$ 且 $x \notin \varphi^{-1}(e_2)$，则 $\forall y \in \varphi^{-1}(e_2), \varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(x) \neq e_2$，所以 $x\varphi^{-1}(e_2) \neq \varphi^{-1}(e_2)$，此时 $\varphi^{-1}(e_2)$ 不是 M_1 的理想。所以 $\varphi^{-1}(e_2)$ 是 M_1 的理想当且仅当 $\varphi^{-1}(e_2) = M_1$。

1.6 第六题

显然 $(Z_3, +, 0)$ 是一个幺半群。

可以得出

$$L(Z_3) = \rho_a : \rho_a(x) = x + a, a, x \in Z_3$$

$$
\begin{aligned}
I &= \rho_0 \\
\varphi(x) &= \rho_x
\end{aligned}
$$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Table 1: $(Z_3, +, 0)$ 乘法表

$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1

Table 2: $(L(Z_3), \circ, I)$ 乘法表

不难发现 $(Z_3, +, 0)$ 与 $(L(Z_3), \circ, I)$ 同构。