

形式语言与自动机 作业五

cycleke

1 第一题

Let x and y are positive numbers. Please design a Turing Machine (diagram) to compute $x - y$ of x and y . You should explain the notation of x and y . Hint: you may get the notation as simple as you can.

解 我们使用字符 0 来表示 x 和 y , 利用 0^n 来表示数 n , 用 1 来间隔。具体的说, 纸带上开始是 $\cdots 0^x 10^y \cdots$ 。如果 $x > y$, 那么纸带上结果是 0^{x-y} ; 如果 $x \leq y$, 那么纸带上结果是 10^{y-x} , 值得注意的是, 此处如果答案为 $x - y = 0$, 那么我们实际使用的是 -0 。

所以我们只用将 1 前后成对的 0 消除, 如果答案为正, 最后清除 1。其转移图如下, 初始时带头在 x 的开头。

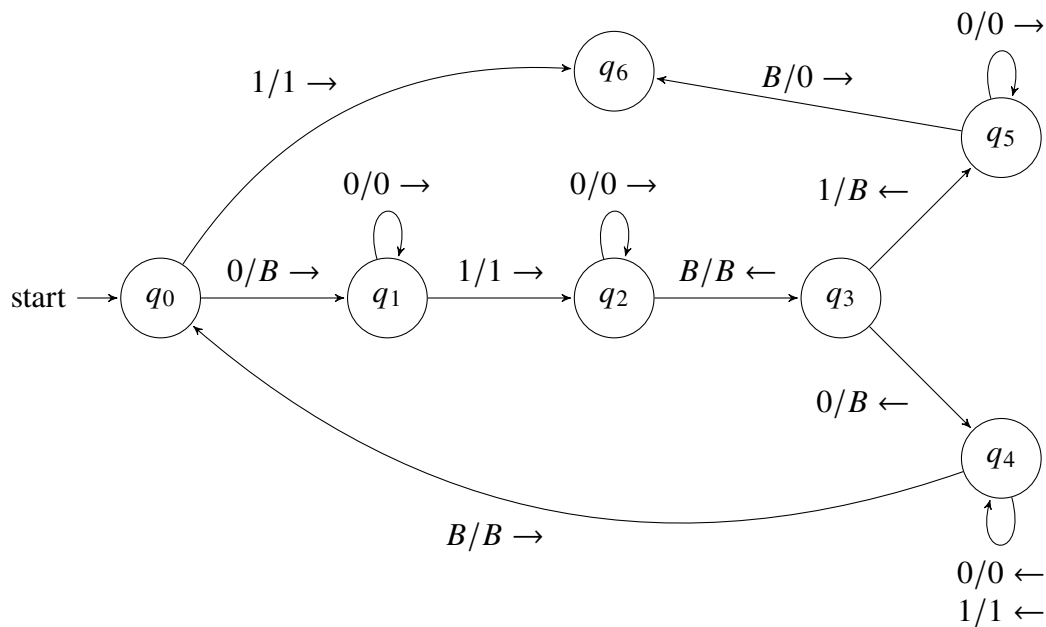


图 1: 第一题

2 第二题

Let x and y are positive numbers. Please design a Turing Machine (diagram) to compute $x \div y$ (x divisible by y). You should explain the notation of x and y . Hint: you may get the notation as simple as you can.

解 我们使用字符 0 来表示 x 和 y ，利用 0^n 来表示数 n ，用 B 来间隔。具体的说，纸带上开始是 $\cdots 0^x B 0^y \cdots$ 。最终纸带上的字符是 $\cdots 0^{x+y} \cdots$ ，由于图太大，此处给处转移表，其中 q_{40} 为接收状态。

状态	符号	
	B	0
q_0	(q_0, B, R)	$(q_1, 0, L)$
q_1	(q_2, B, L)	(q_2, B, L)
q_2	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 0, L)$
q_3	(q_4, B, R)	(q_4, B, R)
q_4	$(q_5, 0, R)$	$(q_5, 0, R)$
q_5	(q_6, B, R)	$(q_{40}, 0, L)$
q_6	(q_7, B, R)	$(q_6, 0, R)$
q_7	(q_7, B, R)	(q_8, B, R)
q_8	(q_{23}, B, L)	$(q_9, 0, L)$
q_9	(q_9, B, L)	$(q_{10}, 0, L)$
q_{10}	(q_{11}, B, R)	$(q_{37}, 0, L)$
q_{11}	(q_{40}, B, L)	$(q_{12}, 0, R)$
q_{12}	(q_{12}, B, R)	$(q_{13}, 0, L)$
q_{13}	$(q_{14}, 0, L)$	$(q_{40}, 0, L)$
q_{14}	(q_{15}, B, L)	$(q_{40}, 0, L)$
q_{15}	(q_{16}, B, L)	$(q_{19}, 0, L)$
q_{16}	(q_{16}, B, L)	$(q_{17}, 0, L)$
q_{17}	$(q_{18}, 0, R)$	$(q_{17}, 0, L)$
q_{18}	(q_{12}, B, R)	$(q_{18}, 0, R)$
q_{19}	(q_{20}, B, L)	$(q_{19}, 0, L)$
q_{20}	(q_{20}, B, L)	$(q_{21}, 0, L)$
q_{21}	(q_{22}, B, R)	$(q_{21}, 0, L)$
q_{22}	(q_{40}, B, L)	(q_{40}, B, L)
q_{23}	$(q_{23}, 0, L)$	$(q_{24}, 0, R)$
q_{24}	(q_{40}, B, L)	(q_{25}, B, L)
q_{25}	(q_{40}, B, L)	$(q_{26}, 0, L)$
q_{26}	(q_{32}, B, R)	$(q_{27}, 0, L)$
q_{27}	(q_{39}, B, L)	$(q_{27}, 0, L)$
q_{28}	$(q_{29}, 0, L)$	$(q_{28}, 0, L)$
q_{29}	(q_{30}, B, R)	(q_{30}, B, R)
q_{30}	(q_{31}, B, R)	$(q_{30}, 0, R)$
q_{31}	(q_{31}, B, R)	(q_6, B, R)
q_{32}	(q_{40}, B, L)	(q_{33}, B, R)
q_{33}	(q_{34}, B, R)	$(q_{40}, 0, L)$
q_{34}	(q_{35}, B, L)	(q_{34}, B, R)
q_{35}	(q_{35}, B, L)	$(q_{36}, 0, L)$
q_{36}	(q_{40}, B, L)	$(q_{36}, 0, L)$
q_{37}	(q_{38}, B, R)	$(q_{37}, 0, L)$
q_{38}	(q_{40}, B, L)	(q_6, B, R)
q_{39}	(q_{39}, B, L)	$(q_{28}, 0, L)$
q_{40}	—	—

3 第三题

Show that the regular languages are closed under the following operations:

$$\min(L) = \{w | w \text{ is in } L, \text{ but no proper prefix of } w \text{ is in } L\}$$

证明 所有不合法的语言为 $L\Sigma^+$, 所以 $\min(L) = L - L\Sigma^+$ 。由于正则语言对于连接和差运算满足封闭性, 所以 $L\Sigma^+$ 是正则语言, $\min(L) = L - L\Sigma^+$ 是正则语言。□

4 第四题

Use the CFL pumping lemma to show that the following language is not context free:

$$\{a^i b^j c^k | i < j < k\}$$

证明 假设 L 是一个 CFL, 根据泵引理, 存在一个对应的常正整数 n 。

考虑字符串 $s = a^n b^{n+1} c^{n+2}$ 。根据泵引理, 我们将 s 分割为 $s = uvwxy$, 其中 $|vwx| \leq n, vx \neq \varepsilon$ 。考虑下面两种情况

(1) vwx 不包含字符 a , 那么 uv^0wx^0y 中的长度 $\leq 2n+3$, 又由于 $n \geq 1$, 所以不可能存在 j, k , 满足 $n < j < k, j+k \leq 2n+3$ 。

(2) vwx 包含字符 a , 那么 uv^9wx^9y 中 a 或 b 的个数必定大于 c 的, 所以 $uv^9wx^9y \notin L$ 。

综上所述, L 不是一个 CFL。□

5 第五题

Give a context-free grammar for the following language over the alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L = \{a^i b^j | i \neq j \text{ and } i \neq 2j\}$$

解 我们定义一个 CFG $G = (\{S, A, B, C, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P, S)$, 其中 P 为

$$S \rightarrow A|B|C$$

$$A \rightarrow Xb$$

$$X \rightarrow Xb|aXb|\varepsilon$$

$$B \rightarrow aaYbbbb$$

$$Y \rightarrow aYb|aaYb$$

$$C \rightarrow aZ$$

$$Z \rightarrow aZ|aaZb|\varepsilon$$