近世代数习题作业 3

1．设 R 为实数集，$S=\{(a,b)|a\neq 0,a,b\in R\}$。在 S 上利用通常的加法和乘法定义二元运算"$\circ$"如下：$\forall(a,b),(c,d)\in S$，$(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)$

验证：$(S,\circ)$ 是群。

2．设 a 和 b 是群 G 的两个元素。如果 $(ab)^2=a^2b^2$，试证：$ab=ba$

3．设 G 是群。如果 $\forall a\in G$，$a^2=e$，试证：G 是交换群。

4．证明四阶群是交换群。

5. 证明：在任一阶大于 2 的非交换群里必有两个非单位元 a 和 b，使得 $ab=ba$。
6. 有限群里阶大于 2 的元素的个数必为偶数。
7. 证明：偶数阶群里阶为 2 的元素的个数必为奇数。
8. 偶数阶群里至少有一个阶为 2 的元素。

9．设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 阶群 G 中的 n 个元素（它们不一定各不相同）。证明：存在整数 p 和 q（$1\leq p\leq q\leq n$），使得 $a_pa_{p+1}\cdots a_q=e$.

10.设 a 和 b 为群 G 的两个元素，$ab=ba$，a 的阶为 m，b 的阶为 n。试证：ab 的阶为 m 与 n 的最小公倍数的约数。何时 ab 的阶为 mn？

注：大家任选 5 题写完上交即可，其余题大家自己一定也要做一下。因为这块作业加上课堂上提到的“讲解 2-1”“讲解 2-2”的思考题（一定要尝试做一下），稍微多点，所以提交的部分在下周四晚上之前均可，方式同以前。我们下周五上课时讲解习题作业。