近世代数课后习题作业 4

1. 设G_1和G_2是群G的两个真子群。证明：$G_1 \cup G_2$是G的子群的充分必要条件是$G_1 \subseteq G_2$或$G_2 \subseteq G_1$。

证明：

充分性$\Leftarrow$：由$G_1 \subseteq G_2$或$G_2 \subseteq G_1 \Rightarrow G_1 \cup G_2 = G_1$或$G_1 \cup G_2 = G_2$是$G$的子群。

必要性$\Rightarrow$：假设不成立，则由$e \in G_1 \cap G_2$知：

至少$\exists a \in G_1 \wedge a \notin G_2$，$\exists b \in G_2 \wedge b \notin G_1$。

由$a \in G_1 \cup G_2$，$b \in G_1 \cup G_2$及$G_1 \cup G_2$为子群得：$ab \in G_1 \cup G_2$，从而$ab \in G_1$或$ab \in G_2$。若$ab \in G_1$，则由$a^{-1} \in G_1$知$a^{-1}(ab) \in G_1 \Rightarrow b \in G_1$矛盾；若$ab \in G_2$，则由$b^{-1} \in G_2$知$(ab)b^{-1} \in G_2 \Rightarrow a \in G_2$矛盾，故假设不成立。

//

2. 设$(G_1,\circ)$和$(G_2,*)$都是群，$\varphi: G_1 \to G_2$，φ是满射且$\forall a,b \in G_1$有：

$\varphi(a,b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

证明：$\varphi^{-1}(e_2)$是G_1的子群，其中e_2为G_2的单位元素。

$//\varphi^{-1}(e_2) = \{x | x \in G_1 \wedge \varphi(x) = e_2\}$

证明：记$S = \varphi^{-1}(e_2)$，则$S = \{x | \varphi(x) = e_2, x \in G_1\}$，显然$S \subseteq G_1$

1）S 非空：对$\forall y \in G_2$，由φ为满射，则$\exists x \in G_1$，使得$y = \varphi(x)$，从而$\varphi(e_1) * y = \varphi(e_1) * \varphi(x) = \varphi(e_1 \circ x) = \varphi(x) = y$，同理有$y * \varphi(e_1) = \varphi(x) = y$，即有：$\varphi(e_1) * y = y * \varphi(e_1) = y$，从而$\varphi(e_1) = e_2$，故有$e_1 \in S$。

2)封闭性：对$\forall x,t \in S$，有$\varphi(x) = e_2$，$\varphi(t) = e_2$，则$\varphi(x \circ t) = \varphi(x) * \varphi(t) = e_2$，所以 $x \circ t \in S$。

3)结合律：显然。

4)单位元：$e_1 \in S$。

5)逆元：对$\forall x \in S$，有$\varphi(x) = e_2$，则：$e_2 = \varphi(e_1) = \varphi(x \circ x^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(x^{-1})$

$= e_2 * \varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1})$，即 $\varphi(x^{-1}) = e_2$，所以 $x^{-1} \in S$。

//

3. 设 $(Z,+)$ 为整数的加法群，令 $S_1 = \{3,5\}$，$S_2 = \{8,12\}$，请分别给出 (S_1) 与 (S_2)。

//需要给出生成过程, 或给出生成结果的由来。不能直接给出结果。

解： $(S_1) = Z$，$(S_2) = \{4k | k \in Z\}$

//////////////////////////////////

4. 设 R 是全体实数之集，$G = \{ f | f : R \to R, f(x) = ax + b, \forall x \in R, a \neq 0, b \in R\}$。试证：$G$ 是一个变换群。

证明： 显然对 $\forall f \in G$，f 为双射。

1）封闭性：对 $\forall f, g \in G$，设 $f(x) = ax + b$，$g(x) = cx + d$，$a \neq 0, c \neq 0$，

则 $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = (ac)x + ad + b$，所以 $f \circ g \in G$

2）结合律：映射的复合运算满足结合律。

3）单位元：$I_e(x) = x$

4）逆元：显然对 $\forall f \in G$，由 f 为双射，故 f 可逆，且 $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$，则 $f^{-1} \in G$。

//

5. 设 R^+ 是一切正实数之集，R 为一切实数之集。$(R^+, \times)$，$(R, +)$ 是群。令 $\varphi : R^+ \to R$，$\forall x \in R^+$，$\varphi(x) = \log_p x$，其中 p 是正数。证明：φ 是同构。

证明：

1）由 φ 的构造知 φ 为双射。

2）同构方程：对 $\forall x, y \in R^+$，$\varphi(x \times y) = \log_p (x \times y) = \log_p x + \log_p y = \varphi(x) + \varphi(y)$。