三维网格平面参数化

陈雨竹 PB19000160

2022 年 3 月 27 日

1 问题描述

在 MATLAB 上实现三维网格平面参数化，将类似图 1的三维网格参数化为二维网格。

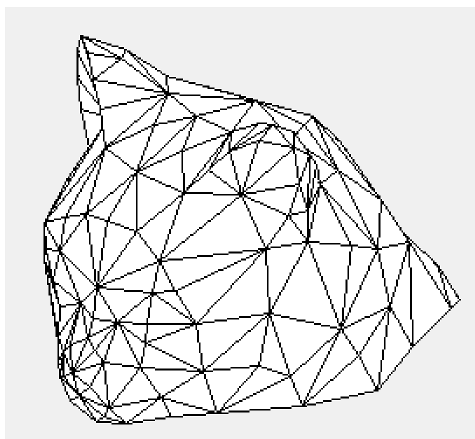

图 1: Original figure

2 实现方法

编程环境为 Ubuntu 20.04.3 LTS MATLAB R2021a (9.10.0.1602886)。

三维网格平面参数化的目的是将三维网格图像映射到二维平面上，使得满足某些性质。一般地，我们希望原曲面的边界映射到目标图形的边界上，同时希望能量函数取得更小的值，对于不同能量函数的选取会获得不同的结果。本文实现了三种方法的参数化。

Tutte 参数化 [1] 假设映射后的三角网格的每条边为弹簧，其长度为 s，劲度系数为 D，则总能量为

$$E = \sum_{(i,j)\in edges} \frac{1}{2} D||u_i - u_j||^2$$

对于内部的点 u_i，设其相邻点集为 $N(i)$，度为 v_i。求导得到

$$0 = \frac{\partial E}{\partial u_i} = \sum_{j\in N(i)} D(u_i - u_j)$$

于是对所有内部的点，有

$$u_i = \frac{1}{v_i} \sum_{j \in N(i)} u_j$$

从而可以列方程，解每个 u_i 的值。

离散保角映射 [2]　Matthias Eck 等人提出的离散保角映射法，对把第 i 个源图点映到平面点 $h(i)$ 的映射 h，取其能量函数为

$$E(h) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in edges} \frac{1}{2} \kappa_{ij} ||h(i) - h(j)||^2$$

设 L_{ij} 为源图中第 i 点到第 j 的距离，与点 i, j 组成三角形的两点为 k_1, k_2，用 $Area_{ijk}$ 表示源图中三角形 ijk 的面积，上式中

$$\kappa_{ij} = (L_{ik_1}^2 + L_{jk_1}^2 - L_{ij}^2)/Area_{ijk_1} + (L_{ik_2}^2 + L_{jk_2}^2 - L_{ij}^2)/Area_{ijk_2}$$

求导得到

$$\sum_{j \in N(i)} \kappa_{ij}(u_i - u_j) = 0$$

解方程可解得每个 u_i 的值。

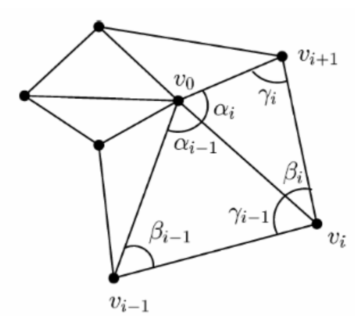

图 2: Floater

Floater 参数化 [3]　Michael S. Floater 于 2003 年提出了均值坐标参数化方法，这是一种近似的离散保角映射。如图 2所示定义 α_i，计算方法是使所有映到的内部点 v_0 及其相邻点 $v_1, \cdots, v_k$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = v_0 \qquad \lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{k} w_j} \qquad w_i = \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{||v_i - v_0||}$$

解线性方程组可得到每个内部点的位置。

3 实验结果

对图 1的三维网格参数化为二维网格的结果中，使用 Tutte 参数化的结果如图 3，使用离散保角映射的结果如图 4，使用 Floater 参数化的结果如图 5。

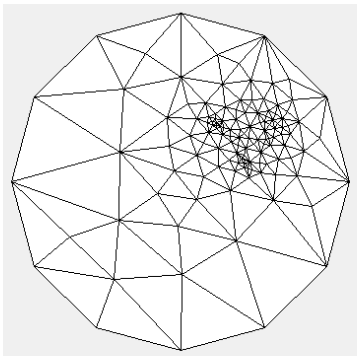

图 3: Tutte 参数化

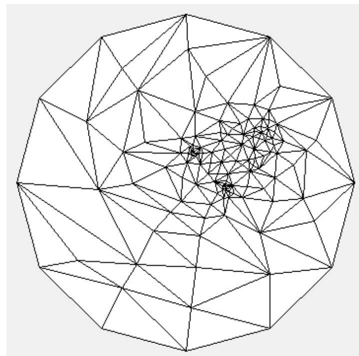

图 4: 离散保角映射

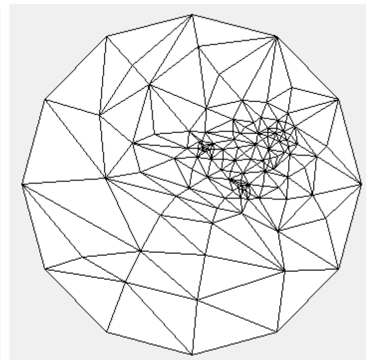

图 5: Floater 参数化

为探究源图像对参数化结果的影响，本文对 1沿 z 轴压缩一半，得到如图 6的图像进行测试。

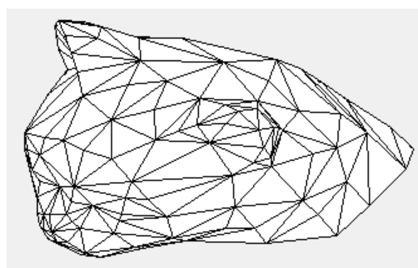

图 6: New source figure

对图 6的三维网格参数化为二维网格的结果中，使用 Tutte 参数化的结果如图 7，使用离散保角映射的结果如图 8，使用 Floater 参数化的结果如图 9。

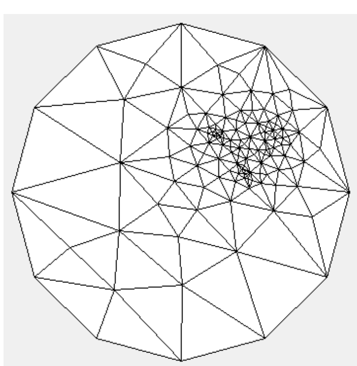

图 7: Tutte 参数化

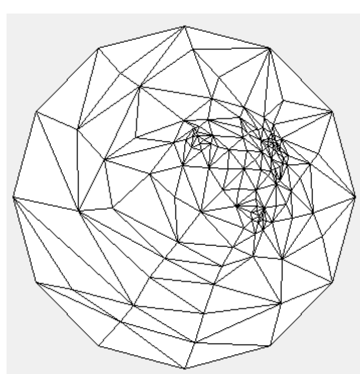

图 8: 离散保角映射

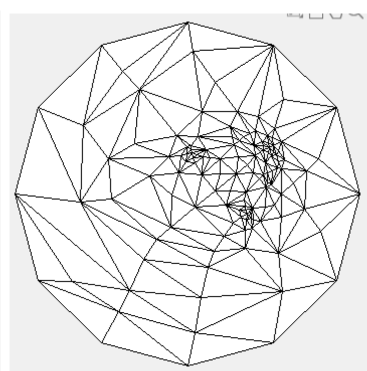

图 9: Floater 参数化

可以看出，压缩前后的 Tutte 参数化的结果无变化，因为这种方法参数化过程只取决于连边情况，而不取决于源图的长度。剩下两种方法的结果都会随着源图压缩而有所改变。

4 参考文献

[1]Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. CAGD1997

[2]Eck, M., DeRose, T., Duchamp, T., Hoppe, H., Lounsbery, M., and Stuelze, W., “Multiresolution analysis of arbitrary meshes,” in [Proceedings of ACM SIGGRAPH], 173–183 (1995).

[3]Floater M. Mean Value Coordinates [J]. Computer Aided Design (S0010-4485), 2003, 20(1): 19-27.