

ARAP 形状插值

陈雨竹 PB19000160

2022 年 4 月 17 日

1 问题描述

在 MATLAB 上实现 ARAP 形状插值，在如图 1 的初态末态中，构造中间态的结果，并连续运算生成动画。



图 1: Result

2 实现方法

编程环境为 Ubuntu 20.04.3 LTS MATLAB R2021a (9.10.0.1602886)。

给定的初态末态为三维网格，由于其 z 坐标恒为 0，故看做二维网格进行处理。

ARAP 方法中，对于三角网格 i ，考虑边向量从初态到末态的映射 $x \rightarrow A_i x$ (这个映射可以被 $A_i x_{i12} = x'_{i12}$ 和 $A_i x_{i13} = x'_{i13}$ 确定)，对其做 SVD 分解得到

$$A_i = U_i \Lambda_i V_i^T = R_i S_i$$

其中 $R_i = U_i V_i^T$ 为旋转矩阵， $S_i = V_i \Lambda_i V_i^T$ 为平移矩阵。对于 t 时刻的位置，取 $S_{it} = (1-t)I + tS_i$ 为该时刻的平移矩阵，类似的取 R_{it} 为该时刻的旋转矩阵，从而可以用下式计算得到希望 t 时刻时边向量的值

$$x_{i12t} = R_{it} S_{it} x_{i12}$$

$$x_{i13t} = R_{it} S_{it} x_{i13}$$

再利用网格信息，计算最小二乘意义下最接近上述边向量的三角网格，即为 t 时刻的结果。

得到 R_{it} 的一种方法是取

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad R_{it} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_i}{t} & \sin \frac{\theta_i}{t} \\ -\sin \frac{\theta_i}{t} & \cos \frac{\theta_i}{t} \end{pmatrix}$$

但从 R_i 得到的 θ_i 不一定是确定的，它可以任意的加减 2π 的整数倍，这可能会造成一定程度的不连续性，从而导致旋转不一致的问题。

为了解决旋转不一致问题，一种旋转一致方法是对于有相邻边的三角网格计算出的 θ_i, θ_j ，通过加减 2π 的整数倍使其尽可能满足

$$|\theta_i - \theta_j| \leq \pi$$

实现它的一个方法是，指定一个初始三角形，寻找与其有相邻边且未被规范化的点，将其规范化并插入队列，广度优先地执行上述操作。

为使动画顺畅进行，代码中将所有 S_i, θ_i 进行事先处理，并对最小二乘矩阵进行预分解，从而减小冗余计算。

3 实验结果

利用上述方法，并进行事先计算和预分解，动画可以顺畅运行。采用旋转一致的方法，可生成如附件中的 result.gif 文件。

若不采用旋转一致的方法，得到 $t = 0.5$ 时刻的结果如图 2，可以看出大象的鼻子位置是突兀的。

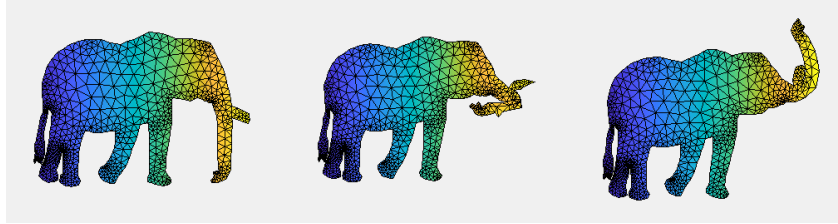


图 2: 不旋转一致结果

若采用旋转一致的方法，指定初始三角形为 1 号三角形，得到 $t = 0.5$ 时刻的结果如图 3，可以看出大象的鼻子位置突兀的问题有所改善，但大象身体的缩小较为严重。

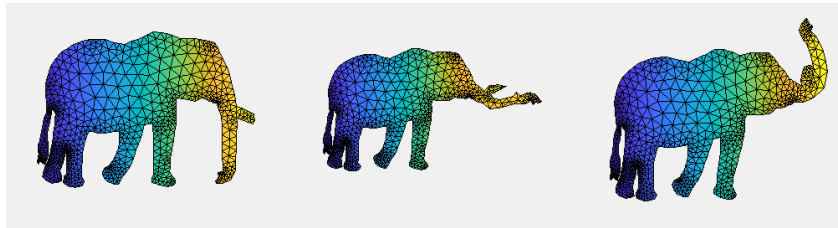


图 3: 旋转一致结果

4 参考文献

- [1]M. Alexa et al. As-Rigid-As-Possible Shape Interpolation. SIGGRAPH 2000
- [2]Baxter et al. Rigid shape interpolation using normal equations. Symposium on Non-photorealistic animation and rendering 2008