

Laplace 曲面编辑

陈雨竹 PB19000160

2022 年 4 月 10 日

1 问题描述

在 C++ 上实现三维网格平面参数化，对图 1 的顶点进行保持 Laplace 坐标的拉动。

图形界面说明：拉动顶点可直接在网格中选中拉动，交互是实时的；更换 Laplace 矩阵方法是按下 Change mode 按钮，每按一次在均匀权重和 cot 权重中切换一次，初始为均匀权重；对 Laplace 坐标进行旋转则需在左侧图形界面旋转到适当位置后，点击 Update 按钮。

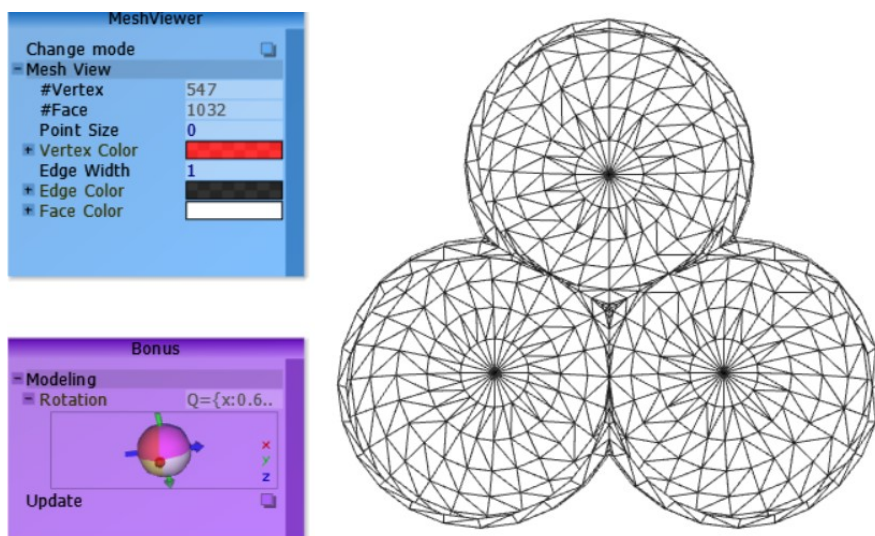


图 1: Original figure

2 实现方法

编程环境为 Windows Visual Studio 2019(未使用 MATLAB，且为避免 Visual Studio 版本问题，提交代码部分只有 main.cpp 和 laplacian.h 和框架不同)。

网格顶点的 Laplace 坐标是指在原图中其邻域顶点坐标的加权平均值和这个点的差，一般地其形式为

$$\delta_i = \sum_{j \in N(i)} \omega_{ij} (x_i - x_j) \quad , \quad \omega_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{j \in N(i)} w_{ij}}$$

拉动过程要求指定点在目标图中出现在指定点附近，而保持 Laplace 坐标是指希望原图和目标图每个点的 Laplace 坐标尽可能接近。

具体实现过程中, 首先根据网格情况建立 Laplace 矩阵 L , 根据原图数据 x 计算 Laplace 坐标 Lx ; 其次根据拉动的要求 I' 以及目标位置 b 建立方程组 $(L + \lambda I')y = Lx + \lambda b$; 最后解出 y 即为目标图像的结果。为保证拉动的约束尽可能满足, 需要使得 λ 足够大, 本文取 $\lambda = 10^5$ 。

此外, 本次实验实现了使用四元数对 Laplace 坐标进行旋转, 其方法是根据用户交互得到四元数 $q = w + xi + yj + zk$ 后对 Laplace 坐标 P 进行对应的旋转 qPq^{-1} 。化简后得到

$$qPq^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\ 2xy + 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2wx \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix} P$$

其中, 对于 Laplace 矩阵 L 的建立, 本文采用以下两种方法。

均匀权重 即取 $w_{ij} = 1$ 。这时某顶点的 Laplace 坐标为此点和周围点平均坐标的差。

cot 权重 Matthias Eck 等人提出的 *cot* 权重。设 L_{ij} 为源图中第 i 点到第 j 的距离, 与点 i, j 组成三角形的两点为 k_1, k_2 , 用 $Area_{ijk}$ 表示源图中三角形 ijk 的面积, 取

$$w_{ij} = (L_{ik_1}^2 + L_{jk_1}^2 - L_{ij}^2)/Area_{ijk_1} + (L_{ik_2}^2 + L_{jk_2}^2 - L_{ij}^2)/Area_{ijk_2}$$

这正比于三角形 ijk_1 和三角形 ijk_2 中 k_1 角和 k_2 角的 *cot* 之和。

3 实验结果

对图 1 的三维网格的一个球进行拉伸且不旋转, 使用均匀权重和 *cot* 权重得到的结果如图 2 和图 3。

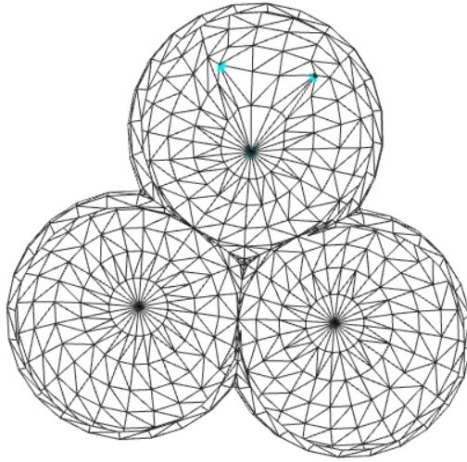


图 2: 均匀权重

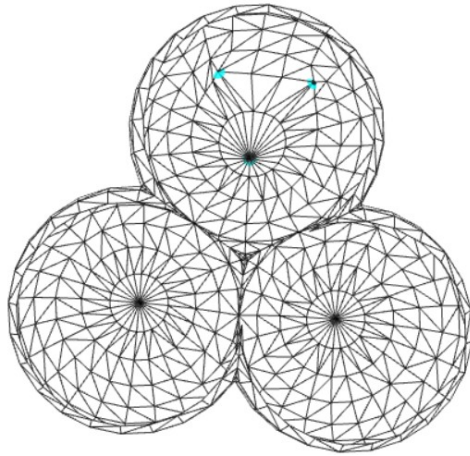


图 3: cot 权重

对图 1 的三维网格的三个球之间进行拉伸且不旋转, 使用均匀权重和 *cot* 权重得到的结果如图 4 和图 5。

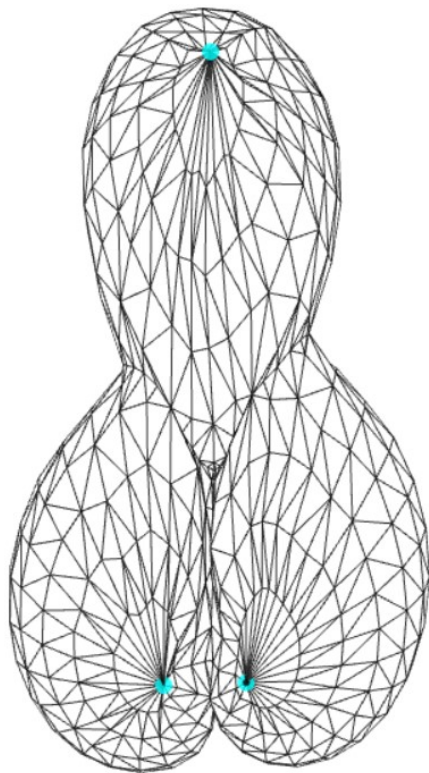


图 4: 均匀权重

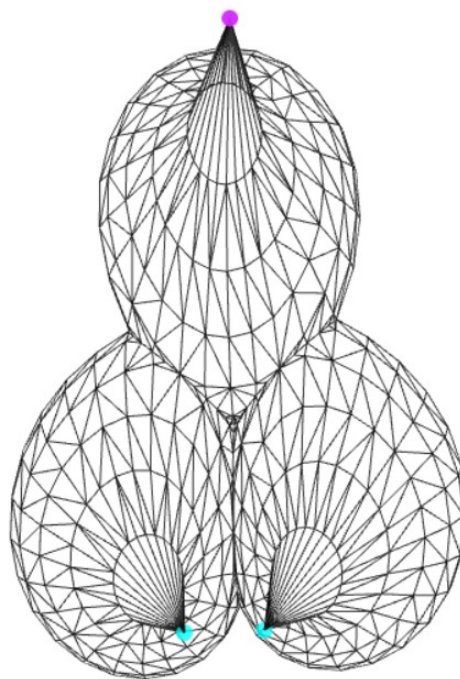


图 5: cot 权重

可以看出，变换尺度较小时，两种参数拉伸结果类似。在变换尺度较大时，cot 权重作为一种保型变换，变换过程中确实在尽量保证形状变化小一些，但这可能在某种程度上是不利于拉伸的。

4 参考文献

[1]O. Sorkine et al. Laplacian Surface Editing. SGP 2004