

César Bieniek Lemos

**Controle  $\mathcal{H}_\infty$  por Realimentação de Estados  
Aplicado a um Robô Omnidirecional**

Salvador

2017



César Bieniek Lemos

# **Controle $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação de Estados Aplicado a um Robô Omnidirecional**

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Universidade Federal da Bahia

Escola Politécnica

Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Humberto Xavier de Araújo

Salvador

2017

**CÉZAR BIENIEK LEMOS**

**CONTROLE  $\mathcal{H}_\infty$  POR REALIMENTAÇÃO DE  
ESTADOS APLICADO A UM ROBÔ  
OMNIDIRECIONAL**

Este Trabalho de Graduação foi julgado adequado para a obtenção do grau de Engenheiro(a) Eletricista e aprovado em sua forma final pela Comissão Examinadora e pelo Colegiado do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia.

---

**Cristiane Corrêa Paim**

Coordenadora do Colegiado do Curso de  
Engenharia Elétrica

Comissão Examinadora:

---

**Prof. Humberto Xavier de Araújo**

Orientador

---

**Prof. André Gustavo Scolari  
Conceição**

Avaliador Interno – DEE/UFBA

---

**Prof. Leizer Schnitman**

Avaliador Interno – DEQ/UFBA

# Resumo

Neste trabalho, o controle de um robô omnidirecional de três rodas é estudado. Na modelagem do problema, são consideradas não linearidades provenientes de fenômenos de atrito. Propõe-se o uso de um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  pela abordagem LMI (Desigualdades Matriciais Lineares), que permite a obtenção de um controlador ótimo. Para a melhoria do desempenho transitório do sistema e para atender a requisitos quanto à magnitude dos sinais de controle, foi realizada a alocação de pólos em uma sub-região circular do plano complexo. Simulações foram realizadas para a validação do projeto. O desempenho do sistema pôde ser analisada através de experimentos conduzidos com o robô.

**Palavras-chave:** controle  $\mathcal{H}_\infty$ , robô omnidirecional.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Robô. . . . .	19
Figura 2 – Diagrama do <i>hardware</i> . . . . .	20
Figura 3 – Diagrama de forças. . . . .	21
Figura 4 – Representação dos atritos . . . . .	23
Figura 5 – Forma geral. . . . .	30
Figura 6 – Simulação - Inversão de Movimento - Estados. . . . .	34
Figura 7 – Simulação - Inversão de Movimento - Sinais de controle. . . . .	35
Figura 8 – Simulação - Rejeição de Pertubações - Estados. . . . .	35
Figura 9 – Simulação - Rejeição de Pertubações - Sinais de Controle. . . . .	36
Figura 10 – Simulação - Trajetória - Quadrado. . . . .	37
Figura 11 – Simulação - Trajetória - Quadrado - Estados. . . . .	37
Figura 12 – Simulação - Trajetória - Quadrado - Sinais de Controle. . . . .	38
Figura 13 – Inversão de Movimento - Estados. . . . .	39
Figura 14 – Inversão de Movimento - Sinais de controle. . . . .	39
Figura 15 – Trajetória - Quadrado. . . . .	40
Figura 16 – Trajetória - Quadrado - Estados. . . . .	41
Figura 17 – Trajetória - Quadrado - Sinais de Controle. . . . .	41
Figura 18 – Trajetória - Quadrado 2. . . . .	42
Figura 19 – Trajetória - Quadrado 2 - Estados. . . . .	42
Figura 20 – Trajetória - Quadrado 2 - Sinais de Controle. . . . .	43
Figura 21 – Trajetória - Quadrado 2 - Histograma de erros. . . . .	43
Figura 22 – Trajetória - 8 - Postura. . . . .	44
Figura 23 – Trajetória - 8 - Estados. . . . .	45
Figura 24 – Trajetória - 8 - Sinais de Controle. . . . .	45
Figura 25 – Trajetória - 8 - Histograma de erros. . . . .	46
Figura 26 – Trajetória - 8 ( $v_{nav} = 0,3$ m/s) - Postura. . . . .	47
Figura 27 – Trajetória - 8 ( $v_{nav} = 0,3$ m/s) - Estados. . . . .	47
Figura 28 – Trajetória - 8 ( $v_{nav} = 0,3$ m/s) - Sinais de Controle. . . . .	48
Figura 29 – Trajetória - 8 - Histograma de erros. . . . .	48





# Lista de tabelas

Tabela 1	.....	24
----------	-------	----



# Lista de abreviaturas e siglas

MPC	<i>Model Predictive Control</i> (Controle Preditivo Baseado em Modelo);
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> (Desigualdade Matricial Linear);
ZOH	<i>Zero-order Hold</i> (Segurador de ordem zero);
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> (Modulação por Largura de Pulso).



# Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos;
$\eta_m$	Postura do robô;
$R$	Matriz de rotação;
$v_{ri}$	Velocidade escalar de cada roda;
$M$	Massa do robô;
$J$	Momento de inercia do robô;
$F_v, F_{v_n}$	Forças resultantes sobre o centro de massa do robô nas direções frontal e ortogonal;
$\Gamma, \Gamma_a$	Torques sobre o centro de massa do sistema;
$F_{mi}$	Força de propulsão da roda $i$ ;
$T_{mi}$	Torque produzido pelo motor $i$ ;
$L_{ai}$	Indutância do enrolamento do motor $i$ ;
$R_{ai}$	Resistência do enrolamento do motor $i$ ;
$k_{vi}$	Constante de $emf$ do motor $i$ ;
$k_{ti}$	Constante de torque do motor $i$ ;
$l_i$	Fator de redução do motor $i$ ;
$i_{ai}$	Corrente no enrolamento do motor $i$ ;
$\omega_{mi}$	Velocidade angular do eixo do motor $i$ ;
$C_v$	Coefficiente de atrito de Coulomb;
$C_{v_n}$	Coefficiente de atrito de Coulomb;
$C_\omega$	Coefficiente de atrito de Coulomb;
$B_v$	Coefficiente de atrito viscoso;
$B_{v_n}$	Coefficiente de atrito viscoso;

$B_{\omega}$	Coeficiente de atrito viscoso;
$F_{sv}$	Força de <i>Stiction</i> ;
$F_{sv_n}$	Força de <i>Stiction</i> ;
$F_{s\omega}$	Força de <i>Stiction</i> ;
$v_{sv}$	Velocidade de <i>Stribeck</i> ;
$v_{sv_n}$	Velocidade de <i>Stribeck</i> ;
$v_{s\omega}$	Velocidade de <i>Stribeck</i> ;
$\delta_s$	Parâmetro de ajuste;
$\xi$	Estados do sistema;
$A_c$	Matriz do sistema em tempo contínuo;
$B_c$	Matriz do sistema em tempo contínuo;
$C_c$	Matriz do sistema em tempo contínuo;
$D_c$	Matriz do sistema em tempo contínuo;
$K_c$	Matriz do sistema em tempo contínuo;
$G$	Matriz do sistema em tempo contínuo;
$E$	Matriz do sistema em tempo contínuo;
$u_i$	Tensão nos terminais do motor $i$ ;
$A_d$	Matriz do sistema em tempo discreto;
$B_d$	Matriz do sistema em tempo discreto;
$C_d$	Matriz do sistema em tempo discreto;
$D_d$	Matriz do sistema em tempo discreto;
$\eta$	Integral do erro;
$A_{aug}$	Matriz do sistema aumentado;
$B_{aug}$	Matriz do sistema aumentado;
$C_{aug}$	Matriz do sistema aumentado;
$D_{aug}$	Matriz do sistema aumentado;

$B_w$	Matriz do sistema aumentado;
$P$	Matriz de Lyapunov;
$K$	Matriz de ganho do controlador;
$L$	Variável;
$\otimes$	Produto de Kronecker;
$\mathcal{D}$	Sub-região do plano complexo;
$V$	Matriz de uma região LMI;
$M$	Matriz de uma região LMI;
$r$	Raio da região LMI circular;
$q$	Centro da região LMI circular;
$ref$	Sinal de referência;
$v_{nav}$	Velocidade de navegação;
$x_r, y_r, \theta_r$	Coordenadas de um marco de posição;
$x_m, y_m, \theta$	Coordenadas do robô no sistema global;
$pert$	Pertubação.





# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa</b>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Estrutura do Texto</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>ROBÔ</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Hardware</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelo Cinemático</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>Modelo Dinâmico</b>	<b>22</b>
<b>2.4</b>	<b>Representação no Espaço de Estados</b>	<b>24</b>
<b>2.5</b>	<b>Discretização</b>	<b>25</b>
<b>2.6</b>	<b>Estados Aumentados</b>	<b>26</b>
<b>3</b>	<b>CONTROLE <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>27</b>
<b>3.1</b>	<b>Definições</b>	<b>27</b>
3.1.1	Normas de Sinais e Sistemas	27
3.1.2	Desigualdades Matriciais Lineares	28
3.1.3	Complemento de Schur	28
3.1.4	Teorema de Lyapunov para Sistemas em Tempo Discreto	29
3.1.5	<i>Real Bounded Lemma</i> para Sistemas em Tempo Discreto	29
<b>3.2</b>	<b>Sistema Generalizado</b>	<b>29</b>
<b>3.3</b>	<b>Norma <math>\mathcal{H}_\infty</math> - Abordagem LMI</b>	<b>31</b>
<b>3.4</b>	<b>Controlador <math>H_\infty</math> - Síntese</b>	<b>31</b>
<b>3.5</b>	<b>Alocação de Polos em Região Circular</b>	<b>32</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>33</b>
<b>4.1</b>	<b>Simulações</b>	<b>33</b>
4.1.1	Resposta ao Degrau	34
4.1.2	Rejeição de Perturbações	34
4.1.3	Trajetória - Quadrado	36
<b>4.2</b>	<b>Experimentos</b>	<b>38</b>
4.2.1	Resposta ao Degrau	39
4.2.2	Trajetória - Quadrado	40
4.2.3	Trajetória - Quadrado 2	40
4.2.4	Trajetória - 8	44
4.2.5	Trajetória - 8 - Velocidade Reduzida	46

<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>49</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>51</b>

# 1 Introdução

Sistemas robóticos são extremamente comuns na indústria e, atualmente, seu uso vem se expandindo no mercado pessoal e de serviços. Este novo segmento requer robôs versáteis que possam operar satisfatoriamente diante de condições diversas. No trabalho proposto, serão estudados um sistema robótico e uma técnica de controle, com grande potencial de suprir as novas demandas do mercado.

Robôs omnidirecionais são ideais em aplicações que exigem alta capacidade de manobra. Cada uma de suas rodas possui rolamentos antiparalelos ao seu eixo principal. Este arranjo confere ao robô a capacidade de rotacionar e transladar simultaneamente e independentemente, permitindo mudanças na direção do movimento sem o redirecionamento do seu eixo principal. Em contrapartida, usualmente, o controle deste tipo de robô é mais complexo quando comparado a robôs com menor grau de liberdade em seu movimento (SIEGWART; NOURBAKSH; SCARAMUZZA, 2011).

Em geral, sistemas robóticos apresentam dificuldades como: incertezas dos parâmetros, não-linearidades, dinâmicas não modeladas, ruídos e limitações físicas dos atuadores. Na tentativa de contornar estes desafios, propõe-se o uso de um controlador projetado pela técnica de controle  $\mathcal{H}_\infty$ .

Em suma, no problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  procura-se obter um controlador que minimize a norma de uma função de transferência apropriada do sistema, o que se traduz na minimização do ganho máximo entre uma determinada entrada e uma saída escolhida. Esta técnica apresenta bons resultados na rejeição de perturbações de alta amplitude e com espectro de frequência desconhecido. Além disso, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  também é apropriado quando deseja-se conferir robustez diante de incertezas inerentes ao modelo (STOORVOGEL, 2000).

## 1.1 Justificativa

Um dos desafios enfrentados no projeto de robôs móveis são não-linearidades presentes no modelo real do sistema. Dentre as diversas fontes de não-linearidades estão as forças de atrito, comuns a qualquer sistema mecânico. Em (OLSSON *et al.*, 1998), são apresentados modelos de forças de fricção, como o atrito de Coulomb, o atrito viscoso, o *Stiction* e o efeito *Stribeck*.

Outro desafio são as perturbações presentes em sistemas desse tipo. Como exemplos, pode-se citar as irregularidades no terreno, as quais causam mudanças nos coeficientes de atrito além de eventuais perdas de contato entre o solo e as rodas do robô. Em

(UDENGAARD; IAGNEMMA, 2009), o projeto de robôs omnidirecionais para terrenos irregulares é estudado.

Em (CONCEIÇÃO; MOREIRA; COSTA, 2009), uma abordagem utilizando o método dos mínimos quadrados, para a estimativa dos parâmetros do modelo dinâmico e dos coeficientes dos atritos de Coulomb e viscoso, é apresentada e aplicada a um robô omnidirecional de quatro rodas. Já em (CONCEIÇÃO; CORREIA; MARTINEZ, 2013), a abordagem anterior foi revisitada e, além dos parâmetros anteriores, os coeficientes de *Striebeck* e *Stiction* são estimados e o método é aplicado a um robô omnidirecional de três rodas.

O controle de robôs omnidirecionais é um tema recorrente na literatura. Um projeto com uma configuração semelhante a este trabalho foi desenvolvido em (AUGELLO; ARAÚJO; CONCEIÇÃO, 2013), em que um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  com alocação de pólos foi projetado para um robô omnidirecional de três rodas.

Um controlador MPC (*Model Predictive Control*) com compensação de atrito foi projetado para um robô omnidirecional de três rodas em (BARRETO *et al.*, 2014).

Em (SANTOS *et al.*, 2016), um outro tipo de controlador foi desenvolvido para a plataforma estudada, no caso, um preditor de Smith e um controlador LQR com realimentação de estados foram aplicados ao robô utilizado neste trabalho.

Em (SANTOS, 2014), o projeto de *hardware* e *firmware* do robô utilizado neste trabalho foi desenvolvido. O sistema inclui circuitos de medições de grandezas físicas como correntes de armadura, velocidades angulares e forças resultantes, além de um sistema de comunicação baseado no protocolo Zigbee.

## 1.2 Estrutura do Texto

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

- No capítulo 2, o robô será apresentado. Suas equações dinâmicas e cinemáticas serão desenvolvidas e um modelo no espaço de estados será encontrado;
- No capítulo 3, a técnica de controle  $\mathcal{H}_\infty$  com alocação de pólos será abordada;
- No capítulo 4, a sintonia do controlador será abordada e validada através de simulações e os resultados de experimentos práticos serão apresentados;
- No capítulo 5, o trabalho será concluído e as considerações finais serão apresentadas.

## 2 Robô

O robô utilizado (Figura 1), tem sua construção documentada em (SANTOS, 2014). Nas seções seguintes, serão abordados alguns aspectos da construção do robô e serão apresentados os seus modelos cinemático e dinâmico.

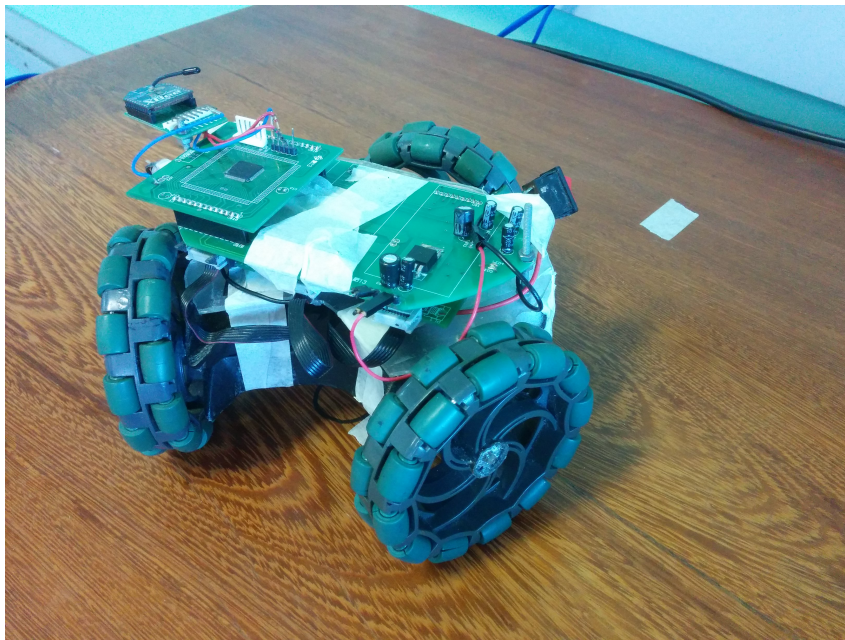


Figura 1 – Robô.

### 2.1 Hardware

Basicamente, o *Hardware* do robô é constituído por cinco módulos, que podem ser visualizados na Figura 2:

- Uma placa base, responsável pela conexão dos demais módulos;
- Uma placa de controle, contendo um Microcontrolador, responsável pelo controle dos outros módulos além da comunicação;
- Um módulo de acionamento, capaz de acionar cada um dos motores e medir sua velocidade;
- Um módulo dedicado à medição de grandezas físicas, contando com acelerômetro, giroscópio e compasso digital;
- E um módulo de comunicação, composto por um transmissor *Zigbee*.

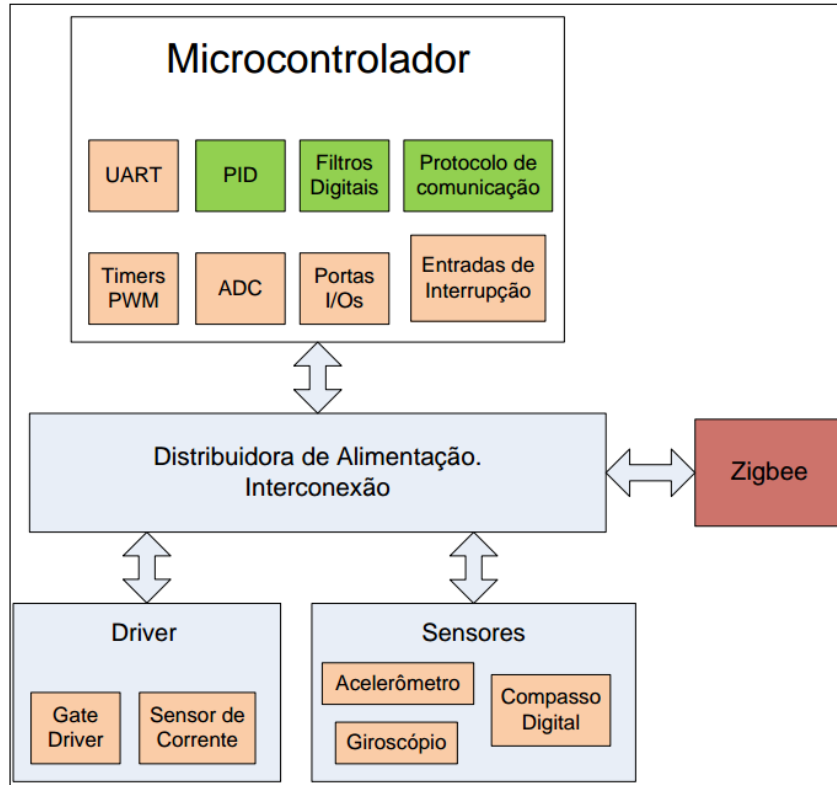


Figura 2 – Diagrama do *Hardware*, retirado de (SANTOS, 2014).

O modulo de processamento conta com um microcontrolador PIC32 da *Microchip*. Este dispositivo tem 32 bits e uma alta capacidade de processamento, necessária para lidar com o alto número de sensores e atuadores, e com a comunicação.

O robô conta com três motores DC AMax-22 da empresa Maxon, tendo como principais especificações: tensão nominal de 6 V, corrente nominal de 0,84 A e velocidade angular de até 16000 rpm (SANTOS, 2014).

O controle de velocidade de cada motor DC é realizado através de uma ponte H, controlada por um sinal PWM de 20 kHz. Acoplado ao modulo de controle, cada motor contém um encoder responsável por medir a sua velocidade de rotação.

O robô também conta com um modulo de comunicação Zigbee da empresa Digi. A comunicação ocorre através protocolo Zigbee, que pertence à classe das WPANs (*Wireless Personal Area Network*) com operação na faixa de 2,4 GHz ou 915 MHz (SANTOS, 2014).

## 2.2 Modelo Cinemático

Define-se o vetor de estados no sistema de coordenadas do robô como:

$$\xi = \begin{bmatrix} v \\ v_n \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde  $v$  é a velocidade frontal,  $v_n$  a velocidade ortogonal e  $\omega$  a velocidade angular, medidas em relação ao centro de massa do robô. Estas grandezas podem ser visualizadas na Figura 3. O espaçamento entre suas rodas é de  $120^\circ$  e o ângulo  $\delta$  é de  $30^\circ$ .

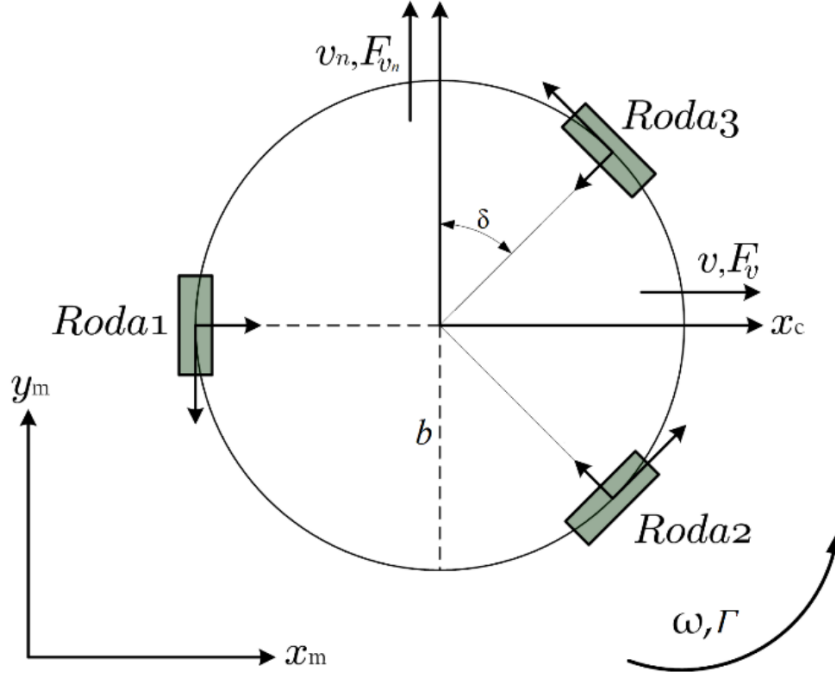


Figura 3 – Diagrama de forças.

Para a análise do modelo cinemático, define-se a postura do robô como o vetor:

$$\eta_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$x_m$  e  $y_m$  representam a posição do centro de massa do robô no sistema de coordenadas global e  $\theta$  a sua orientação.

Os estados do robô podem ser convertidos do sistema local para o global através da relação:

$$\dot{\eta}_m = R(\theta)^T \xi, \quad (2.3)$$

onde  $R$  é a matriz de rotação descrita por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

As velocidades escalares das rodas ( $v_{ri}$ ) se relacionam com as velocidade frontal,

ortogonal e angular do centro de massa de acordo com as equações:

$$v_{r1} = -v_n + wb, \quad (2.5)$$

$$v_{r2} = -vcos(\delta) + v_nsin(\delta) + wb, \quad (2.6)$$

$$v_{r3} = v_nsin(\delta) - vcos(\delta) + wb. \quad (2.7)$$

## 2.3 Modelo Dinâmico

Sejam  $M$  a massa e  $J$  momento de inércia do robô, as forças e torques resultantes no centro de massa, representadas no Figura 3, são descritos pelas seguintes equações:

$$M\dot{v}(t) = F_v(t) - F_{va}(t), \quad (2.8)$$

$$M\dot{v}_n(t) = F_{v_n}(t) - F_{v_na}(t), \quad (2.9)$$

$$J\dot{\omega}(t) = \Gamma(t) - \Gamma_a(t), \quad (2.10)$$

sendo  $F_v$  e  $F_{v_n}$  as resultantes das forças de tração de cada roda nas direções frontal e normal, respectivamente, e  $\Gamma$  o torque resultante devido à ação destas forças. A relação entre estas e as trações ( $F_{mi}$ ) de cada roda são dadas pelas equações:

$$F_v(t) = (F_{m2}(t) - F_{m3}(t))cos(\delta), \quad (2.11)$$

$$F_{v_n}(t) = -F_{m1}(t) + (F_{m3}(t) + F_{m2}(t))sin(\delta), \quad (2.12)$$

$$\Gamma(t) = (F_{m1}(t) + F_{m2}(t) + F_{m3}(t))b. \quad (2.13)$$

Cada uma das rodas é movida por motores DC idênticos. Sendo  $r$  o raio de cada uma das rodas, tem-se que a força de tração no motor  $i$  é dada pela relação:

$$F_{mi}(t) = \frac{T_i(t)}{r_i}, \quad (2.14)$$

$T_i(t)$  é o torque produzido pelo motor  $i$ , e pode ser relacionado à tensão de entrada no rolamento através das equações:

$$u_i(t) = L_{ai} \frac{di_{ai}(t)}{dt} + R_{ai}i_{ai} + k_{vi}\omega_{mi}(t), \quad (2.15)$$

$$T_i = l_i k_{ti} i_{ai}, \quad (2.16)$$

$L_{ai}$  e  $R_{ai}$  são a indutância e resistência, respectivamente, do rolamento do motor.  $K_{ti}$  é a constante de torque,  $K_{vi}$  a constante de *emf* e  $l_i$  é o fator de redução do eixo.

A velocidade escalar de cada roda ( $v_{ri}$ ) se relaciona à velocidade angular do rotor pela relação:

$$v_{ri} = \frac{r_i \omega_{mi}}{l_i}. \quad (2.17)$$



Os componentes  $F_{av}$ ,  $F_{avn}$  e  $\Gamma_a$  nas equações 2.8 a 2.10 correspondem às forças e torque de atrito e serão descritas a seguir. Em sua modelagem foram considerados o atrito viscoso, o atrito de Coulomb e os efeitos de *Stiction* e *Stribeck*, descritos em (OLSSON *et al.*, 1998). A força de atrito viscoso está relacionada à fricção entre os componentes lubrificados e é diretamente proporcional à velocidade do sistema. O atrito de Coulomb corresponde à força de fricção dinâmica. O *Stiction* é a força de fricção que age quando o sistema está em repouso. E o *Stribeck* é o efeito proveniente da passagem constante entre os atritos estáticos e dinâmicos para baixas velocidades. Essas forças são descritas por:

$$F_{av} = B_v v + [C_v + (F_{sv} - C_v)e^{\frac{-|v|^{\delta_s}}{v_{sv}}}] \text{sign}(v), \quad (2.18)$$

$$F_{avn} = B_{vn} v_n + [C_{vn} + (F_{sv_n} - C_{vn})e^{\frac{-|v_n|^{\delta_s}}{v_{sv_n}}}] \text{sign}(v_n), \quad (2.19)$$

$$\Gamma_a = B_\omega \omega + [C_\omega + (F_{s\omega} - C_\omega)e^{\frac{-|\omega|^{\delta_s}}{\omega_{s\omega}}}] \text{sign}(\omega), \quad (2.20)$$

em que  $B_v$ ,  $B_{vn}$  e  $B_\omega$  são os coeficientes de atrito viscoso com relação a cada uma das direções definidas. Os coeficientes de atrito de Coulomb são representados por  $C_v$ ,  $C_{vn}$  e  $C_\omega$ . As forças e o torque de *Stiction* são dados por  $F_{sv}$ ,  $F_{sv_n}$  e  $F_{v\omega}$ , e as velocidades de *Stribeck* são  $v_{sv}$ ,  $v_{sv_n}$  e  $v_{s\omega}$ . Já  $\delta_s$  é um parâmetro de ajuste.

Uma representação dos efeitos descritos pode ser vista na Figura 4.

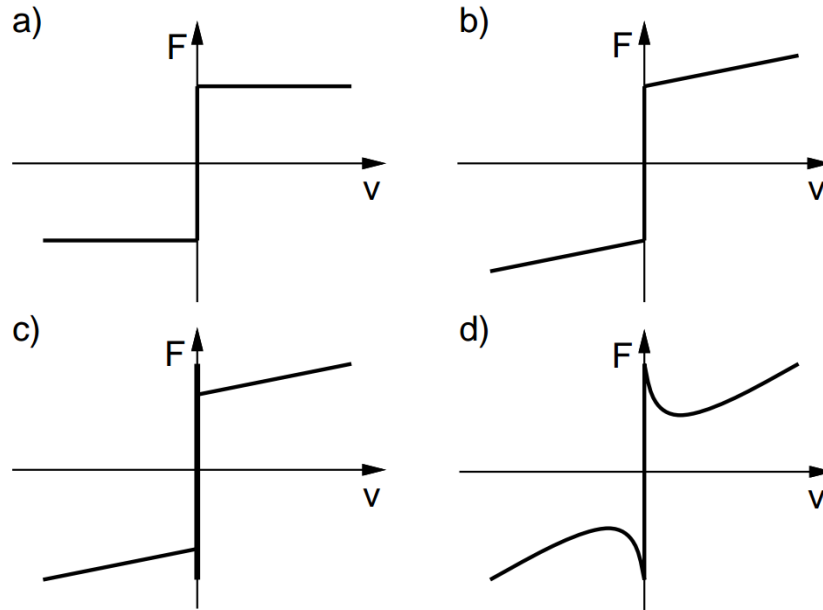


Figura 4 – Exemplos das forças de fricção como função da velocidade, retirado de (OLSSON *et al.*, 1998). a) mostra o atrito de Coulomb. A figura b) Mostra o atrito de Coulomb em adição ao viscoso. Em c) é adicionado o *Stiction*. E em d), atrito de Coulomb, *Stiction*, fricção viscosa e o efeito *Stribeck* podem ser vistos.

Os valores dos parâmetros do modelo dinâmico do robô e do modelo de atrito foram determinados em (SANTOS *et al.*, 2016) e em (CONCEIÇÃO; CORREIA; MARTINEZ, 2016), e se encontram na Tabela 1.

Tabela 1 – Coeficientes do Modelo

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
$B_v$	Coeficiente de atrito viscoso com relação a $v$	0,7	$N/m/s$
$B_{vn}$	Coeficiente de atrito viscoso com relação a $v_n$	0,7	$N/m/s$
$B_w$	Coeficiente de atrito viscoso com relação a $\omega$	0,011	$N/rad/s$
$C_v$	Coeficiente de atrito de Coulomb com relação a $v$	0,28	$N$
$C_{vn}$	Coeficiente de atrito de Coulomb com relação a $v_n$	0,14	$N$
$C_w$	Coeficiente de atrito de Coulomb com relação a $\omega$	0,0086	$Nm$
$F_{sv}$	<i>Stiction</i> relativo a $v$	0,8	$N$
$F_{sv_n}$	<i>Stiction</i> relativo a $v_n$	0,65	$N$
$F_{s\omega}$	<i>Stiction</i> relativo a $\omega$	0,02	$N$
$v_{sv}$	<i>Stribeck</i> relativo a $v$	1	$m/s$
$v_{sv_n}$	<i>Stribeck</i> relativo a $v_n$	1	$m/s$
$v_{s\omega}$	<i>Stribeck</i> relativo a $\omega$	1	$rad/s$
$\delta_s$	Parâmetro de ajuste	1	-
$M$	Massa do robô	1,551	$Kg$
$J$	Momento de inércia	0,0062	$Kgm^2$
$b$	Raio do robô	0,1	$m$
$r$	Raio das rodas	0,0505	$m$
$l$	Fator de redução	19	-
$R_a$	Resistência de armadura	1,69	$\Omega$
$L_a$	Indutância de armadura	0,00011	$H$
$K_v$	Constante EMF	0,0059	$V/rad/s$
$K_t$	Constante de torque	0,0059	$Nm/A$

## 2.4 Representação no Espaço de Estados

Com base no modelos dinâmico e cinemático, pode-se construir um modelo em tempo contínuo no espaço de estados da forma:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_c \xi(t) + B_c u(t) + (K_c + GE(t)) \text{sign}(\xi), \\ y(t) = C_c(t) \xi + D_c u(t), \end{cases} \quad (2.21)$$

o vetor  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^T$  corresponde às tensões nos motores. As matrizes do modelo são descritas por:

$$A_c = \begin{bmatrix} -\frac{3l^2 k_t k_v}{2r^2 M R_a} - \frac{B_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3l^2 k_t k_v}{2r^2 M R_a} - \frac{B_v}{M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3l^2 k_t k_v}{r^2 J R_a} - \frac{B_w}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$B_c = \frac{l K_t}{r R_a} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2M} & -\frac{\sqrt{3}}{2M} \\ -\frac{1}{M} & \frac{1}{2M} & \frac{1}{2M} \\ \frac{b}{J} & \frac{b}{J} & \frac{b}{J} \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na construção da matriz  $A_c$ , foi considerado o atrito viscoso, já que este integra-se de forma linear ao modelo do robô. Os coeficientes de atrito de Coulomb foram incorporados

ao modelo através da matriz  $K_c$ , enquanto os coeficientes relativos aos efeitos de *Stiction* e *Stribeck* aparecem na forma das matrizes  $G$  e  $E$ . Estas estão descritas a seguir:

$$K_c = \begin{bmatrix} -\frac{C_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{v_n}}{M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_\omega}{J} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -\frac{F_{sv}+C_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_{sv_n}+C_{v_n}}{M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F_{s\omega}+C_\omega}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$E = \begin{bmatrix} e^{\frac{-|v(t)|\delta s}{v_{sv}}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-|v_n(t)|\delta s}{v_{sv_n}}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{-|\omega(t)|\delta s}{v_{s\omega}}} \end{bmatrix}.$$

Utilizado-se os dados da Tabela 1, os valores finais das matrizes de estado são dados por:

$$A_c = \begin{bmatrix} -3.4484 & 0 & 0 \\ 0 & -3.5151 & 0 \\ 0 & 0 & -4.0421 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0.7721 & -0.7721 \\ -0.8915 & 0.4457 & 0.4457 \\ 5.3489 & 5.3489 & 5.3489 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$K_c = \begin{bmatrix} -0.2200 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3160 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -0.3133 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3133 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4840 \end{bmatrix}.$$

## 2.5 Discretização

Para a discretização, foi utilizado um ZOH (segurador de ordem zero) com um período de amostragem de  $T_s = 0,05$  s. A principal razão para esta escolha é o fato deste valor já estar implementado no *firmware* robô. Além disso, no Capítulo 4, será visto que este valor é muito menor que os tempos de subida e acomodação verificados em malha fechada, os quais, como sugerido em (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2002), podem servir como indicadores para a escolha do período de amostragem.

A representação em espaços de estados em tempo discreto tem a forma:

$$\begin{cases} \xi_{[k+1]} = A_d \xi_{[k]} + B_d u_{[k]} + w_{[k]}, \\ y_{[k]} = C_d \xi_{[k]} + D_d u_{[k]} \end{cases} \quad (2.25)$$

A relação entre a representação em espaço de estados em tempo contínuo (equação 2.21) e a representação em tempo discreto é dada por (ASTRÖM; WITTENMARK, 2013):

$$A_d = e^{AT_s}, \quad (2.26)$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{As} ds B, \quad (2.27)$$

$$C_d = C, \quad (2.28)$$

$$D_d = D. \quad (2.29)$$

Os termos não lineares passam a ser modelados pela perturbação  $w_{[k]}$  que age diretamente sobre os estados do sistema.

As matrizes do sistema em tempo discreto obtidas são:

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0.8416 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8388 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8170 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0.0355 & -0.0355 \\ -0.0409 & 0.0204 & 0.0204 \\ 0.2422 & 0.2422 & 0.2422 \end{bmatrix}, \\ C_d &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

## 2.6 Estados Aumentados

O controlador a ser projetado atua por realimentação de estados e não adiciona uma ação integral ao sistema. Como a planta não tem integradores em malha aberta, é necessária a adição de uma ação integral para que o seguimento de referência constante seja possível.

Uma ação integral pode ser inserida na malha através da adoção do novo vetor de estados:

$$x_{[k]} = \begin{bmatrix} e_{[k]} \\ \eta_{[k]} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

sendo:

$$e_{[k]} = y_{[k]} - r_{[k]}, \quad (2.32)$$

$$\eta_{[k+1]} = \eta_{[k]} + e_{[k]}, \quad (2.33)$$

onde  $r_{[k]}$  é o sinal de referência. Assim, obtém-se uma nova representação no espaço de estados da forma:

$$\begin{cases} x_{[k+1]} = A_{aug}x_{[k]} + B_{aug}u_{[k]} + B_w w_{[k]}, \\ y_{[k]} = C_{aug}x_{[k]} + D_{aug}u_{[k]}. \end{cases} \quad (2.34)$$

As novas matrizes do sistema a são dadas por:

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ I & I \end{bmatrix}, B_{aug} = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}, C_{aug} = [C_d \quad 0], D_{aug} = D_d, B_w = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

sendo  $I$  uma matriz identidade de ordem três e  $0$  uma matriz  $3 \times 3$  de zeros.

## 3 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Existem duas abordagens para o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . A primeira delas é baseada em duas equações de Riccati e leva à especificação de um controlador sub-ótimo, ou seja, para um  $\gamma > 0$ , procura-se todos os controladores  $K$  para os quais  $\|H_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ , sendo  $\|H_{zw}(s)\|_\infty$  a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função ou matriz de transferência entre uma entrada  $w$  e uma saída  $z$  definidas de um sistema.

A segunda abordagem, utilizada neste trabalho, se dá através de LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares). Nessa abordagem, é possível encontrar um controlador ótimo com relação a  $\|H_{zw}(s)\|_\infty$ .

O nome da técnica deriva do Espaço de Hardy, que consiste no espaço de funções (escalares ou matriciais) que são analíticas no semiplano direito aberto e limitadas no eixo imaginário (ZHOU *et al.*, 1996).

### 3.1 Definições

Nesta seção, são apresentados alguns resultados úteis no entendimento da teoria de Controle  $\mathcal{H}_\infty$ .

#### 3.1.1 Normas de Sinais e Sistemas

Uma norma de uma matriz, vetor, sinal ou sistema é um número real representado por  $\|c\|$  que satisfaz as seguintes propriedades (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005):

1.  $\|c\| \geq 0$ ;
2.  $\|c\| = 0 \iff c = 0$ ;
3.  $\|\alpha c\| = \|\alpha\| \|c\|$  para todo número complexo  $\alpha$ ;
4.  $\|c_1 + c_2\| \leq \|c_1\| + \|c_2\|$ .

Uma norma definida sobre uma matriz é uma Norma Matricial se, além das quatro condições anteriores, a condição

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (3.1)$$

é satisfeita.

A norma  $\infty$ -vetorial consiste na maior magnitude dos elementos de um vetor. Para um vetor  $a \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|a\|_\infty \triangleq \max_i |a_i|. \quad (3.2)$$

A norma  $\infty$  para sinais representa o valor de pico para sinais unidimensionais. Para um sinal com múltiplos canais, a formulação geral, para um sinal  $e(t) \in \mathbb{R}^n$ , é dada por:

$$\|e(t)\|_\infty \triangleq \max_t (\max_i |e_i|). \quad (3.3)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas, ou seja, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de uma matriz de transferência  $G(s)$  é definida como (DOYLE *et al.*, 1989):

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} (\sigma_{\max}[G(j\omega)]). \quad (3.4)$$

$\sigma_{\max}$  denota o maior valor singular e  $\sup$  denota o limite superior para todos os valores de frequência. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema pode ser interpretada como o ganho máximo considerando-se todas as direções e frequências.

### 3.1.2 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma LMI tem a seguinte forma (BOYD, 1994):

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (3.5)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^m$  é a variável e as matrizes simétricas  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são conhecidas.

Vale salientar que múltiplas LMIs podem ser escritas na forma de uma única LMI, com cada uma das LMIs originais ocupando a diagonal principal de uma matriz bloco diagonal.

LMIs costumam aparecer de forma condensada, forma como estão todas as LMIs presentes neste trabalho. Nesta, as LMIs apresentam matrizes como variáveis e podem ser convertidas para a forma da Equação 3.5. Além de uma notação mais compacta, a forma condensada pode levar a computações mais eficientes (BOYD, 1994). Como exemplo, pode-se citar a LMI  $A^T P + P A < 0$  em  $P$ , que denota que a matriz  $P$  é a variável.

### 3.1.3 Complemento de Schur

Sejam  $Q$ ,  $M$  e  $R$  matrizes reais ou complexas e assumindo-se que  $Q$  e  $M$  são hermitianas. Então, as afirmações a seguir são equivalentes:

1.  $Q > 0$  e  $M - RQ^{-1}R^H > 0$ ,

2.  $\begin{bmatrix} M & R \\ R^H & Q \end{bmatrix} > 0$ ,

onde  $R^H$  denota o conjugado transposto da matriz  $R$ .

### 3.1.4 Teorema de Lyapunov para Sistemas em Tempo Discreto

Considerando-se o sistema discreto linear invariante no tempo (LTI):

$$\begin{cases} x_{[k+1]} = Ax_{[k]} + Bu_{[k]}, \\ y_{[k]} = Cx_{[k]} + Du_{[k]}, \end{cases} \quad (3.6)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados. O sistema em questão é estável se existe uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva, que satisfaz a seguinte desigualdade:

$$A^T P A - P < 0. \quad (3.7)$$

Com o auxilio do Complemento de Schur, o teorema pode ser reescrito pela LMI:

$$\begin{bmatrix} P & AP \\ PA^T & P \end{bmatrix} > 0. \quad (3.8)$$

### 3.1.5 Real Bounded Lemma para Sistemas em Tempo Discreto

Considerando-se o sistema de tempo discreto  $T(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$ , as afirmações a seguir são equivalentes (GAHINET; APKARIAN, 1994):

1.  $\|T(z)\|_\infty < 1$  e  $A$  é estável;

2. Existe  $X = X^T > 0$  de forma que 
$$\begin{bmatrix} X^T A X - X & A^T X B & C^T \\ B^T X A & B^T X B - I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0;$$

3. Existe  $X = X^T > 0$  tal que 
$$\begin{bmatrix} -X^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -X & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -I & D^T \\ 0 & C & D & -I \end{bmatrix} < 0.$$

## 3.2 Sistema Generalizado

Na literatura, a representação geral a seguir é comumente utilizada na formulação do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . A forma generalizada pode ser vista na Figura 5. A planta é representada por  $M$  e tem a perturbação  $w$  e o sinal de controle  $u$  como entradas. São definidas as saídas  $y$  e  $z$ .  $y$  é a variável mensurada e a entrada do controlador  $K$ , que tem como saída o sinal  $u$ . A saída  $z$  é construída pelas variáveis a serem influenciadas pelo controlador.

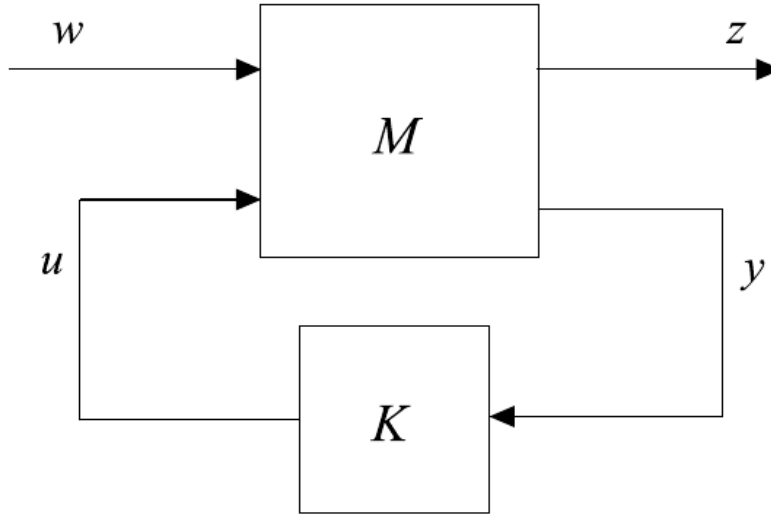


Figura 5 – Forma geral.

Da forma generalizada, deriva-se a seguinte representação em espaço de estados em malha aberta:

$$M : \begin{cases} x_{[k+1]} = Ax_{[k]} + B_1w_{[k]} + B_2u_{[k]}, \\ z_{[k]} = C_1x_{[k]} + D_{11}w_{[k]} + D_{12}u_{[k]}, \\ y_{[k]} = C_2x_{[k]} + D_{21}w_{[k]} + D_{22}u_{[k]}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Nesta configuração, deseja-se minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência  $H_{zw}(s)$ , que tem como entrada o sinal  $w$  e como saída o sinal  $z$ . Neste trabalho, o vetor  $z$  é definido como:

$$z = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

ou seja, deseja-se reduzir os efeitos das perturbações, forças de fricção e dinâmicas não modeladas sobre a saída e os esforços de controle.

Levando-se em conta o sistema aumentado (equação 2.34), as matrizes na equação 3.9 são dadas por:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $I$  representa uma matriz identidade de ordem três e  $0$  uma matriz  $3 \times 3$  de zeros .

Em malha fechada, defini-se a matriz  $B_r = \begin{bmatrix} A_d - I \\ 0 \end{bmatrix}$  que multiplica a referência do sistema.



### 3.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$ - Abordagem LMI

Como consequência do *Real Bounded Lemma* (subseção 3.1.5), tem-se o resultado descrito nesta seção.

Considerando-se um sistema de tempo discreto  $T(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$ , a desigualdade  $\|T(z)\|_\infty < \gamma$  é satisfeita se, e somente se, existir uma matriz simétrica  $P$  de forma que a LMI:

$$\begin{bmatrix} P & AP & B & 0 \\ PA^T & P & 0 & PC^T \\ B^T & 0 & I & D^T \\ 0 & CP^T & D & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.12)$$

seja factível (OLIVEIRA; GEROMEL; BERNUSSOU, 2002). Vale ressaltar que esta LMI impõe que a matriz  $A$  seja Schur estável (todos os autovalores dentro do círculo unitário), uma vez que a desigualdade de Lyapunov (equação 3.8) aparece na diagonal principal.

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema pode ser obtida através da solução do seguinte problema de otimização convexo: minimizar  $\gamma^2$  sujeito a restrição da LMI dada pela equação 3.12.

### 3.4 Controlador $H_\infty$ - Síntese

Considerando-se uma lei de controle por realimentação de estados da forma

$$u = Kx, \quad (3.13)$$

e o sistema dado pela equação 3.9, definem-se as seguintes matrizes em malha fechada:

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A + KB_2, \\ C_{cl} &= C_1 + D_{12}K. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Utilizando-se a relação dada pela equação 3.12, pode-se afirmar que existe um controlador por realimentação de estados que garanta que a desigualdade  $\|H_{zw}\| < \gamma$  apenas se a matriz simétrica  $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  e a matriz  $L \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  forem as soluções da seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} P & AP + B_2L & B_1 & 0 \\ PA^T + L^TB_2^T & P & 0 & PC_1^T + L^TD_{12}^T \\ B_1^T & 0 & I & D_{11}^T \\ 0 & C_1P + D_{12}L & D_{11} & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.15)$$

Um controlador ótimo com relação à norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência  $H_{zw}(s)$  pode ser obtido pela solução do seguinte problema de otimização convexo: minimizar  $\gamma^2$ , sujeito à LMI definida pela equação 3.15. O controlador pode ser obtido através de:

$$K = LP^{-1}. \quad (3.16)$$

### 3.5 Alocação de Polos em Região Circular

O método apresentado apenas traz garantias quanto ao valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência entre a entrada  $w$  e a saída  $z$ . Até então, nenhuma especificação quanto ao regime transitório do sistema foi considerada. Parâmetros como o sobressinal e o tempo de acomodação são geralmente importantes na avaliação do desempenho de uma planta. A fim de melhorar essas especificações, é possível alocar os pólos do sistema em uma sub-região do plano complexo através da adição de uma *LMI* ao problema de otimização apresentando na seção anterior.

Um subconjunto  $\mathcal{D}$  do plano complexo é chamado região LMI se existirem uma matriz simétrica  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_D(z) < 0, f_D(z) = V + Mz + M^T \bar{z}\}. \quad (3.17)$$

$f_D$  é chamada de equação característica da região LMI.

A equação característica a seguir define uma região circular com centro sobre o eixo real em  $q$  e raio  $r$  (CHILALI; GAHINET, 1996):

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} -r & z - q \\ \bar{z} - q & -r \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Uma matriz é chamada  $\mathcal{D}$ -estável se todos os seus autovalores estão localizados dentro de uma dada região  $\mathcal{D}$ .

A  $\mathcal{D}$ -estabilidade pode ser caracterizada em termos de um sistema de LMIs através de:

$$\begin{cases} M_D(A, P) = V \otimes P + M \otimes (AP) + M^T \otimes (AP)^T < 0, \\ P > 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

onde  $\otimes$  denota o produto de Kronecker. Dadas as matrizes  $A$  e  $B$ , a matriz  $C = A \otimes B$  é uma matriz de bloco, cujo bloco genérico é dado por (CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999):

$$C_{ij} = A_{ij}B. \quad (3.20)$$

Utilizando-se a equação 3.19 para a região descrita pela equação 3.18, obtém-se a LMI a seguir, capaz de alocar os pólos do sistema em uma região circular com raio  $r$  e centro  $q$  sobre o eixo real:

$$\begin{bmatrix} -rP & -qP + AP + B_2L \\ -qP + PA^T + L^TB_2^T & -rP \end{bmatrix} < 0. \quad (3.21)$$

## 4 Resultados

Neste capítulo, o controlador obtido será apresentado, sua escolha será validada através de simulações e, conseqüentemente, experimentos serão executados com o robô. Primeiramente, serão apresentadas algumas considerações quanto metodologia do projeto.

Foi assumida uma velocidade frontal de operação de 0,6 m/s que corresponde a cerca de um quarto da velocidade máxima alcançável pelo robô, calculada através do modelo teórico.

Para fins de comparação, um projeto sem alocação de polos foi realizado. O sistema em malha fechada obtido apresenta norma  $\mathcal{H}_\infty$  de 19,9745 para a matriz de transferência  $H_{zw}(s)$ . Este sistema tem regime transitório em malha fechada muito lento.

Para a sintonia do controlador, foram verificadas múltiplas alocações em regiões circulares, em busca de um controlador que trouxesse uma boa relação entre a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema, a magnitude dos esforços de controle e o comportamento transitório.

Além de evitar esforços de controles superiores à tensão de saturação (6 Volts), também buscou-se evitar variações bruscas de tensão sobre os motores. Assim, foi adotado um limite máximo de 2 Volts para o módulo da variação de tensão sobre cada motor em um período de amostragem.

De acordo com o processo de síntese do controlador, descrito na Seção 3.4, e com o processo de alocação de pólos, desenvolvido na seção 3.5, foi projetado o seguinte ganho de realimentação de estados:

$$K = \begin{bmatrix} 0,0000 & 1,9096 & -0,0386 & 0,0000 & 0,3424 & -0,0140 \\ -1,5656 & -0,9548 & -0,0386 & -0,2702 & -0,1712 & -0,0140 \\ 1,5656 & -0,9548 & -0,0386 & 0,2702 & -0,1712 & -0,0140 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Nesta configuração, o sistema apresenta norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência entre a entrada  $w$  e a saída  $z$  de 20,6315, próximo ao valor mínimo, obtido pelo projeto sem alocação. A região escolhida tem centro em 0,8900 e raio 0,05.

### 4.1 Simulações

As simulações a seguir foram realizadas com o controlador escolhido e levam em consideração os fenômenos de atrito viscoso, atrito de Coulomb, efeito *Stiction* e efeito *Stribeck*. Vale lembrar que o período de amostragem equivale a 0,05 s.

### 4.1.1 Resposta ao Degrau

Este experimento tem como objetivos avaliar o comportamento transitório do sistema em malha fechada e verificar a amplitude dos esforços de controle sobre os motores. Para isso, foi imposta uma mudança de referência de  $ref = [0,6 \ 0 \ 0]^T$  para  $ref = [-0,6 \ 0 \ 0]^T$ , que impõe uma inversão do sentido do movimento e pode ser interpretada como uma medida de pior caso. O vetor  $ref$  é definido como:  $ref = [v_{ref} \ v_{nref} \ \omega_{ref}]^T$ , sendo  $v_{ref}$ ,  $v_{nref}$  e  $\omega_{ref}$  as referências de velocidade frontal, ortogonal e angular, respectivamente.

A resposta simulada do sistema pode ser vista nas Figuras 6 e 7, onde os estados e os sinais de controle estão representados respectivamente.

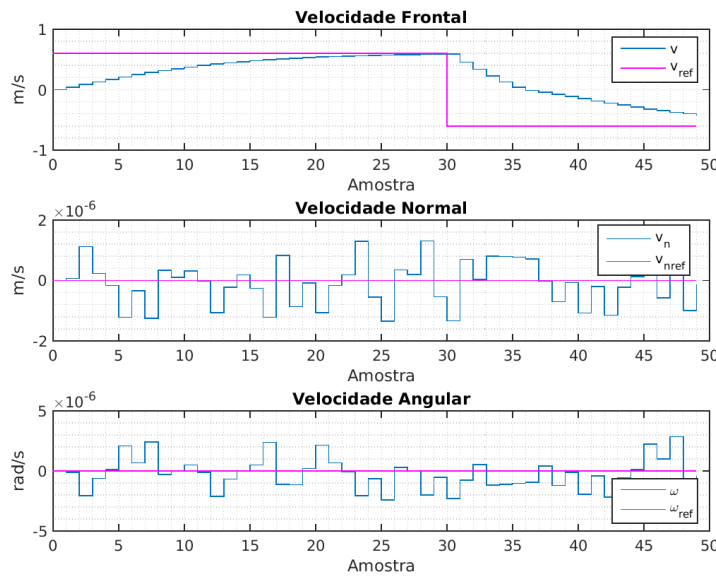


Figura 6 – Simulação - Inversão de Movimento - Estados.

Tem-se que o tempo de subida (de 10% a 90%) é de 0,8909 s e tempo de acomodação (critério de 2%) de 1,4869 s. As variações de tensão, que podem ser verificados na Figura 7, nos sinais de controle dos motores 2 e 3, são de 1,8785 Volts cada, ficando dentro dos limites estabelecidos.

### 4.1.2 Rejeição de Perturbações

Este experimento tem por objetivo visualizar a capacidade do sistema de rejeitar perturbações do tipo degrau. Uma referência  $ref = [0,6 \ 0 \ 0]^T$  é imposta na amostra zero e mantida até o final do experimento. Na amostra 30, uma perturbação  $pert = [0,2 \ 0,2 \ 0,2]^T$  foi introduzida sobre os estados do sistema e mantida até o final do

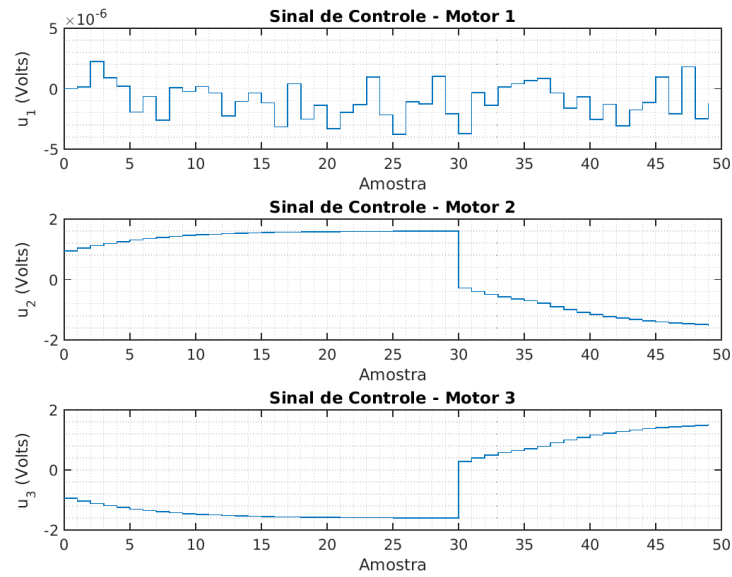


Figura 7 – Simulação - Inversão de Movimento - Sinais de controle.

experimento. Os efeitos das perturbações sobre os estados e os sinais de controle podem ser verificados nas Figuras 8 e 9, respectivamente.

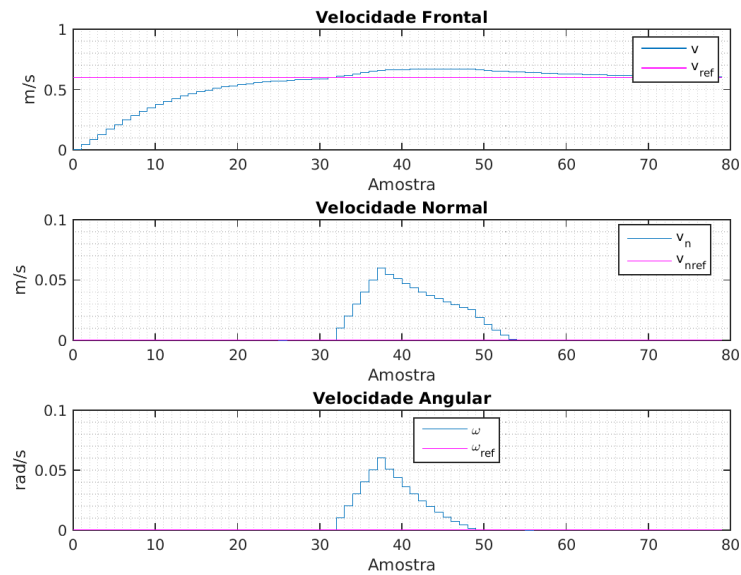


Figura 8 – Simulação - Rejeição de Perturbações - Estados.

Pode-se observar que as perturbações foram rejeitadas em aproximadamente 25 amostras (1,25 segundos). Além disso, foi visto que os sinais de controle variaram suavemente diante das perturbações, não impondo variações bruscas de tensão aos motores.

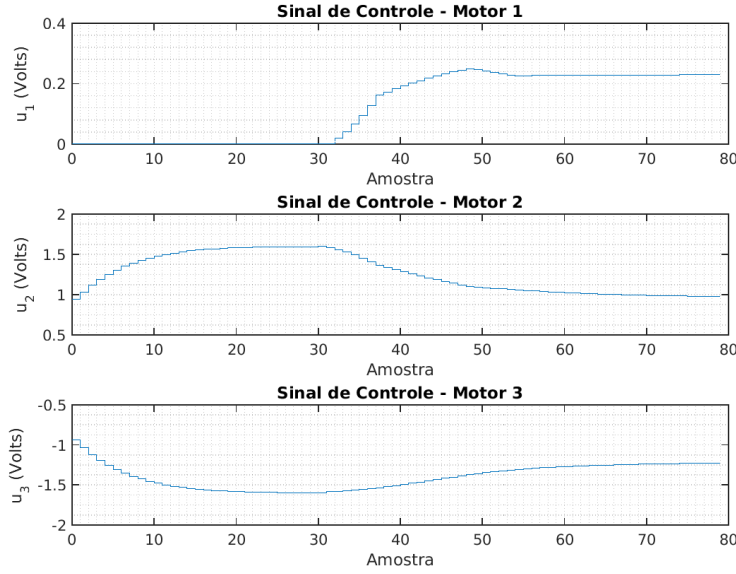


Figura 9 – Simulação - Rejeição de Pertubações - Sinais de Controle.

#### 4.1.3 Trajetória - Quadrado

Este experimento tem como objetivo avaliar o desempenho do controlador em uma situação de operação com mudanças bruscas de direção. Uma malha de cinemática inversa foi utilizada para a estimativa da postura do robô. As referências foram geradas pelo seguinte algoritmo: sejam  $[x_r(k) \ y_r(k) \ \theta_r(k)]^T$  e  $[x_m(k) \ y_m(k) \ \theta(k)]^T$  o marco de destino e a postura do robô no instante  $k$ , respectivamente. A referência de velocidade para o instante  $k$  pode ser calculada através de:

$$\begin{bmatrix} v(k) \\ v_n(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} = R(\theta(k)) \begin{bmatrix} v_{nav} \cos(\phi) \\ v_{nav} \sin(\phi) \\ \theta_r(k) - \theta(k) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

com:

$$\phi = \text{atan2}(y_r(k) - y_m(k), x_r(k) - x_m(k)), \quad (4.3)$$

onde  $v_{nav}$  é a velocidade do centro de massa do robô, que é um parâmetro livre. Quando a posição estimada do centro de massa do robô estiver a um raio de 5 cm da posição de um marco, considera-se que este foi alcançado e o objetivo é atualizado para o próximo marco.

Foram utilizados os cinco marcos de posição  $(x_m, y_m)$ : (0, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 1) e (0, 0) que definem um quadrado com um metro de lado. O ruído de medição foi simulado através de ruído gaussiano com desvio padrão de 0,02. O parâmetro  $v_{nav}$  foi escolhido como 0,6 m/s. O robô parte do ponto  $x_m = 0$ ,  $y_m = 0$  e percorre os marcos no sentido anti-horário. A orientação do robô não foi alterada entre os marcos.

A Figura 10 representa a postura estimada do robô. Nas Figuras 11 e 12, os estados e os sinais de controle podem ser vistos, respectivamente.

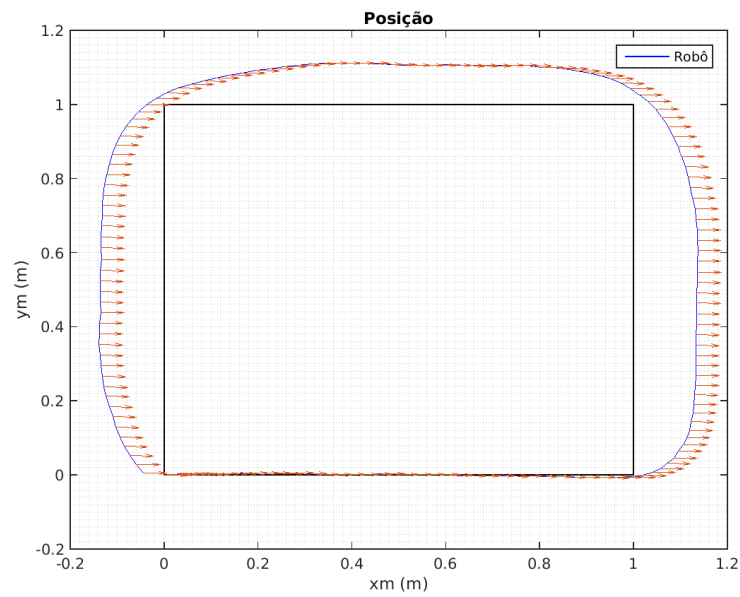


Figura 10 – Simulação - Trajetória - Quadrado. O robô está orientado de acordo com as setas vermelhas.

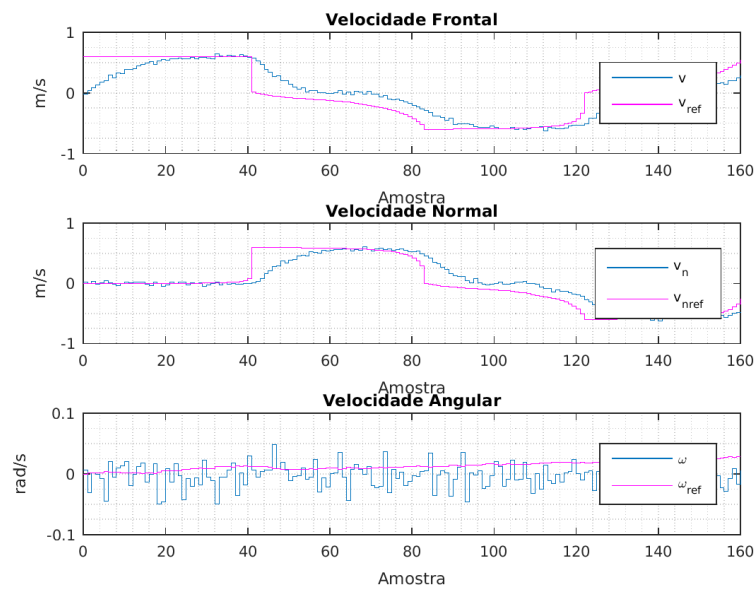


Figura 11 – Simulação - Trajetória - Quadrado - Estados.

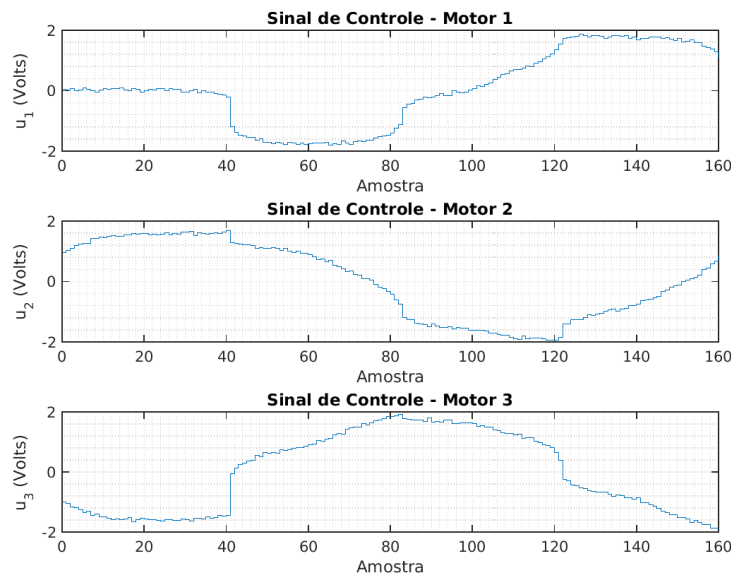


Figura 12 – Simulação - Trajetória - Quadrado - Sinais de Controle.

A maior variação de tensão, ocorrido no motor 3, tem valor 1,4898 Volts, ficando dentro dos limites desejados.

## 4.2 Experimentos

Nas simulações apresentadas, foi possível verificar que o controlador projetado atende às especificações de projeto, além da sua capacidade de rejeitar perturbações do tipo degrau e de seguir referências constantes.

Nesta seção, experimentos derivados das simulações serão executados. Para a realização dos testes, além do robô, foi utilizado um computador executando Ubuntu Linux 14.10.

Os experimentos foram realizados de acordo com a seguinte configuração: a cada 50 ms, o robô envia um pacote contendo, entre outros dados, as velocidades de cada roda. O computador, utilizando um módulo Zigbee serial, aguarda o recebimento da mensagem. Ao receber um pacote, os estados e o sinal de controle são calculados, e este é transmitido prontamente para o robô. Então o computador passa a aguardar um novo pacote.

Desta forma, temos dois fenômenos que podem degradar o desempenho do sistema: o atraso de comunicação entre os módulos Zigbee e o tempo de computação. Este foi mensurado e tem valor médio desprezível em comparação ao período amostragem. O atraso de comunicação carece de uma mediação exata.



### 4.2.1 Resposta ao Degrau

De forma semelhante à simulação realizada, neste experimento, uma referência de  $ref = [0,6 \ 0 \ 0]^T$  foi aplicada por 50 amostras e depois foi modificada para  $ref = [-0,6 \ 0 \ 0]^T$  mantida por outras 50 amostras.

Nas figuras 13 e 14 os estados e os sinais de controle podem ser vistos, respectivamente.

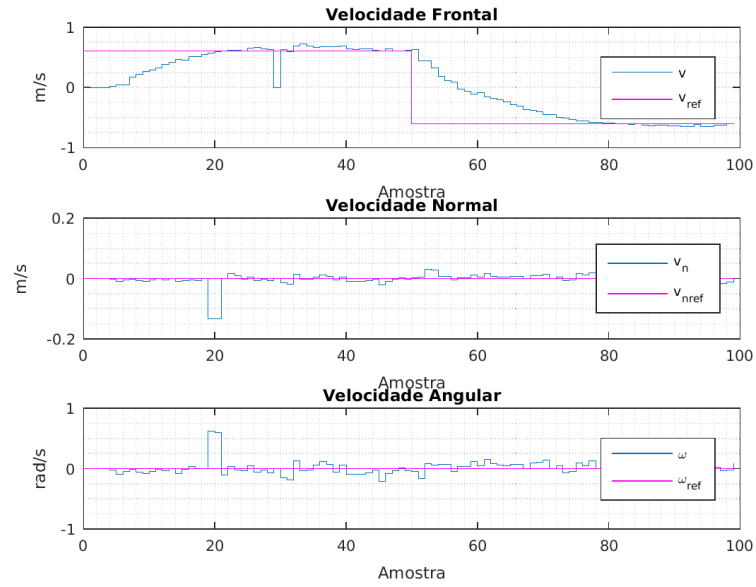


Figura 13 – Inversão de Movimento - Estados.

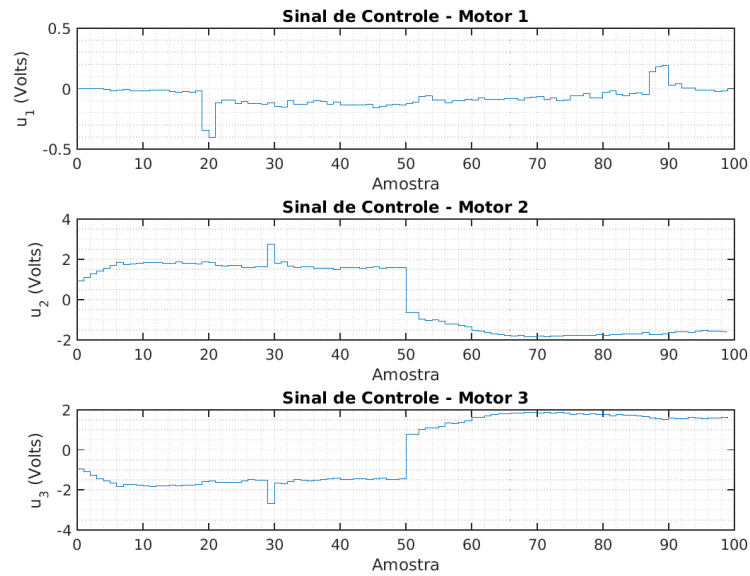


Figura 14 – Inversão de Movimento - Sinais de controle.

Neste teste prático, a variação máxima do sinal de controle sobre um mesmo motor em um período de amostragem foi de 2,2250 Volts, valor superior ao verificado na simulação. A partir da resposta obtida, temos que tempo de subida foi de 0,6149 s (10% a 90%) e tempo de acomodação 2,3136 s (critério de 2%). A grande diferença entre o tempo de acomodação medido e o simulado pode ser explicada por ruídos de medição e dinâmicas não modeladas. Utilizando-se o critério de 5%, o tempo de acomodação foi de 1,9894 s.

### 4.2.2 Trajetória - Quadrado

Para esse experimento, foi utilizada a mesma metodologia da simulação da subseção 4.1.3, ou seja, foram utilizados os mesmos marcos de posição, e foi utilizado o mesmo algoritmo para o cálculo das referências. A postura do robô está representada na Figura 15. A evolução dos estados pode ser vista na Figura 16 e os sinais de controle na Figura 17.

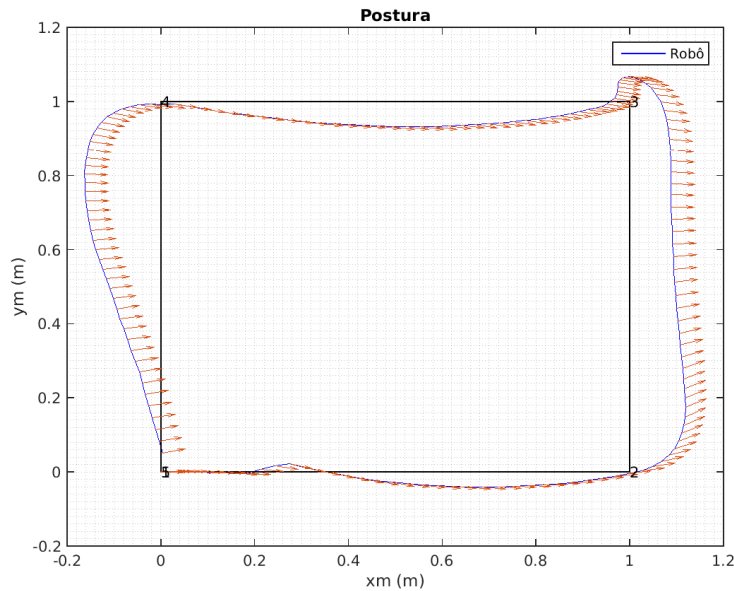


Figura 15 – Trajetória - Quadrado - O robô está orientado de acordo com as setas vermelhas.

Neste teste, a variação máxima de tensão foi de 2,1674 Volts no motor 3, registrado na amostra 91. Este valor é fruto da mudança brusca na referência de velocidade frontal que ocorre quando o robô não consegue alcançar diretamente o terceiro marco de posição. Pode-se observar que a tensão de saturação não foi atingida.

### 4.2.3 Trajetória - Quadrado 2

Neste experimento, novamente, foi descrito um quadrado com um metro de lado. Mas, agora, foram utilizados marcos de posição espaçados de 20 cm, que podem ser visualizados na Figura 18, estes aparecem numerados na ordem em que foram percorridos.

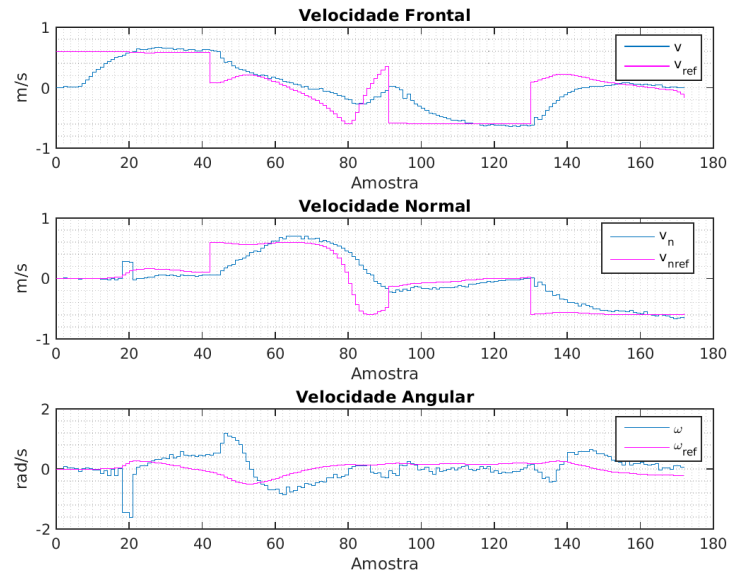


Figura 16 – Trajetória - Quadrado - Estados.

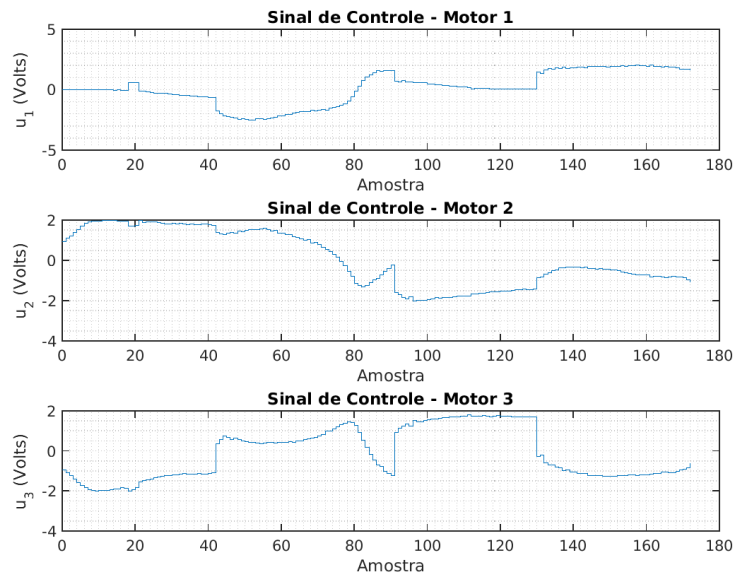


Figura 17 – Trajetória - Quadrado - Sinais de Controle.

Nas figuras 19 e 20, os estados e os sinais de controle podem ser vistos, respectivamente. Foi utilizado o parâmetro  $v_{nav} = 0,3 \text{ m/s}$ .

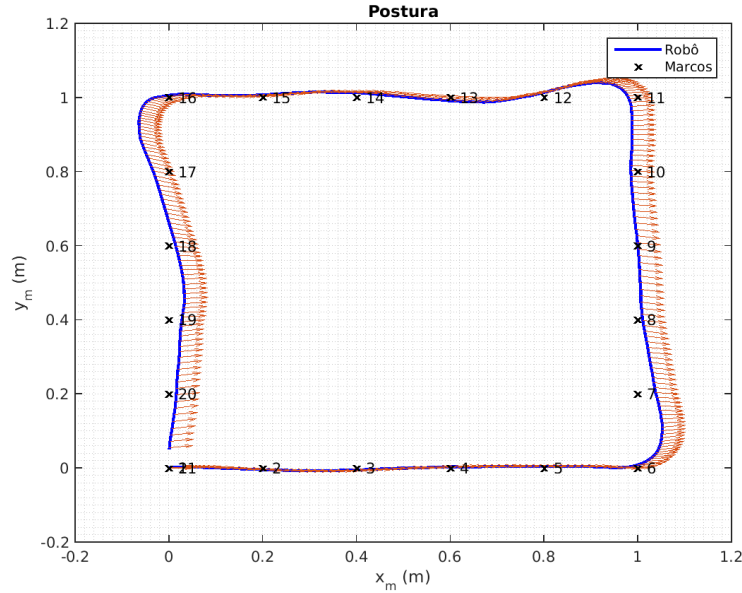


Figura 18 – Trajetória - Quadrado 2 - O robô está orientado de acordo com as setas vermelhas.

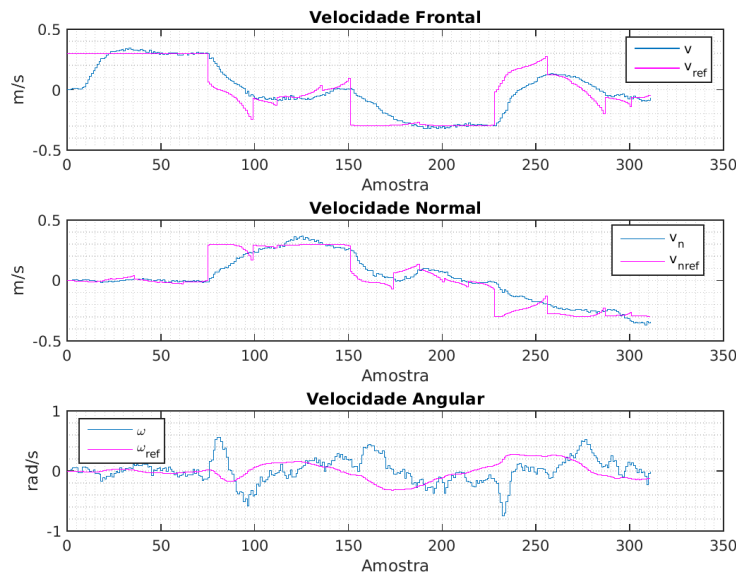


Figura 19 – Trajetória - Quadrado 2 - Estados.

Pode-se observar que o robô consegue percorrer satisfatoriamente todos os marcos. Além disso, nota-se que os sinais de controle variam suavemente mesmo com as mudanças bruscas na direção de movimento nos vértices do quadrado. A maior variação de tensão registrada foi de 0,9107 Volts, ocorrida no motor 2, na amostra 151.

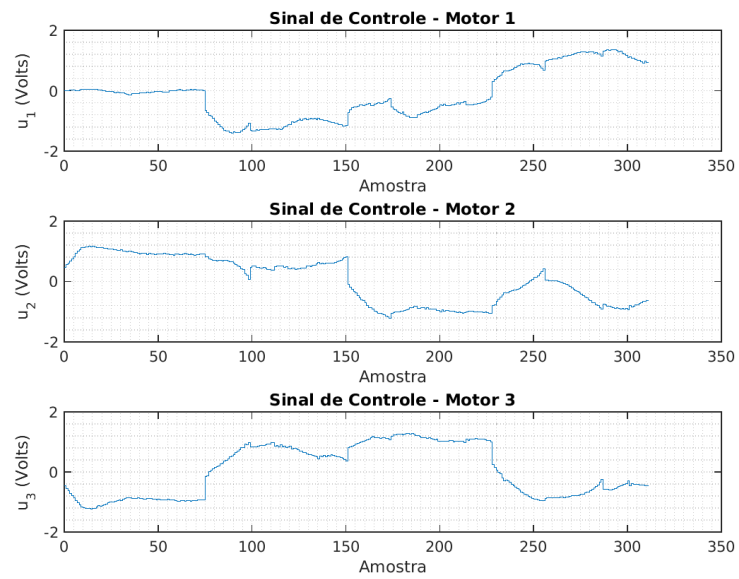


Figura 20 – Trajetória - Quadrado 2 - Sinais de Controle.

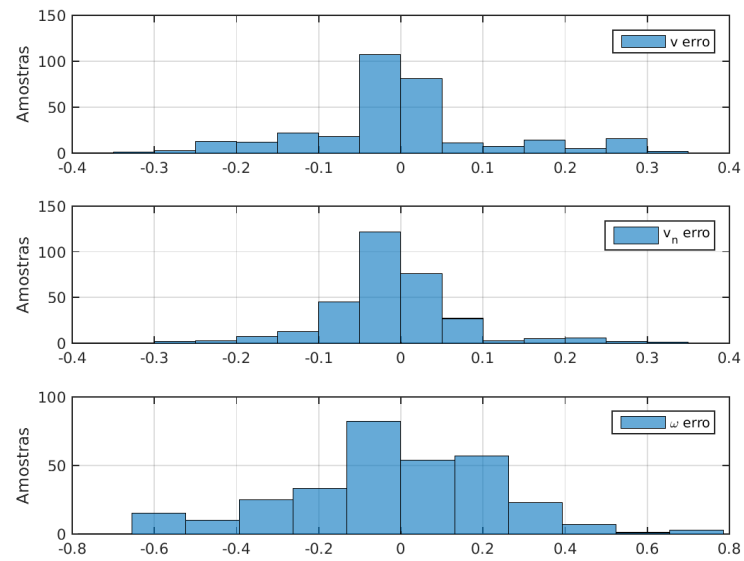


Figura 21 – Trajetória - Quadrado 2 - Histograma de erros.

A Figura 21 representa o histograma dos erros de rastreamento verificados no experimento. Pode-se verificar que, na maioria das amostras, o erro de rastreamento para as velocidades frontal e normal teve valores baixos, entre 0,05 e  $-0,05$ .

#### 4.2.4 Trajetória - 8

Este experimento tem por objetivo avaliar o desempenho do sistema diante de uma trajetória mais suave. Agora, o robô necessita alterar sua direção de movimento constantemente entre 50 marcos de posição.

Para a cálculo das referências, o mesmo algoritmo da trajetória tipo quadrado é utilizado, que, desta vez, é alimentado por marcos de posição que descrevem um trajeto em forma de um 8. Na Figura 22, os marcos de posição utilizados e a estimativa da trajetória percorrida pelo robô podem ser vistos. Nas Figuras 23 e 24, os estados e sinais de controle estão representados, respectivamente.

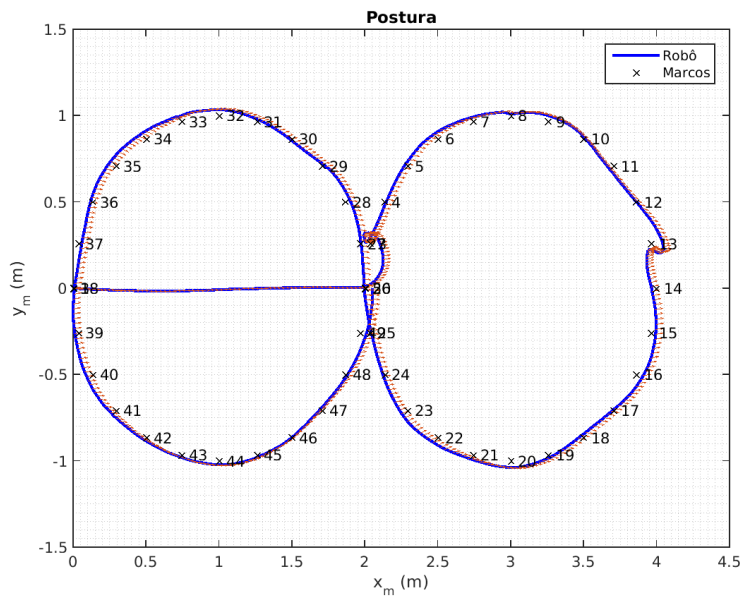


Figura 22 – Trajetória - 8 - O robô está orientado de acordo com as setas vermelhas. Os números indicam a ordem em que os marcos foram percorridos. Os marcos 1 e 2 ocupam as mesmas posições dos marcos 38 e 26 respectivamente.

Pode-se observar que o robô tangencia os marcos 3 e 13, o que impõe uma mudança brusca na referência de velocidade e, conseqüentemente, na direção de movimento. Foi observado uma variação de tensão de 2,5299 Volts no motor 1, na amostra 220, momento em que a referência de velocidade normal varia de aproximadamente 0,6 ms para  $-0,6$  ms, enquanto a referência de velocidade angular é de 0,2854 rad/s. Vale ressaltar que, novamente, os sinais de controle não ultrapassaram a tensão de saturação.

A Figura 25 representa o histograma dos erros de rastreamento.

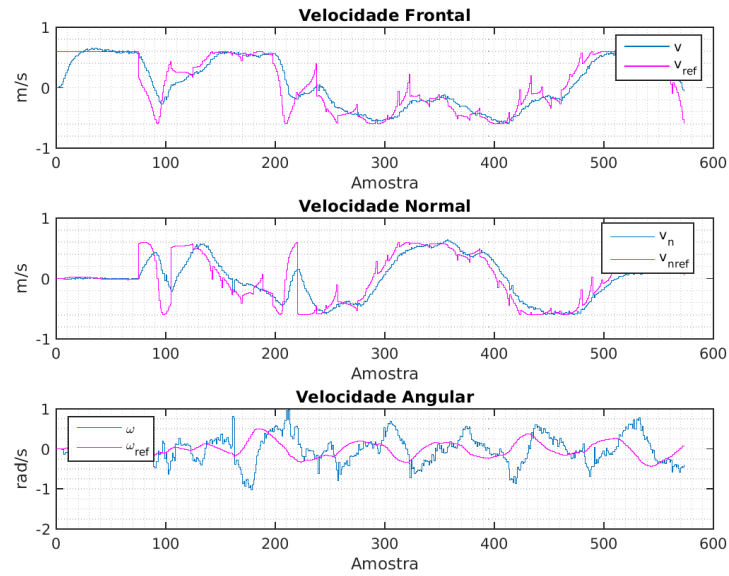


Figura 23 – Trajetória - 8 - Estados.

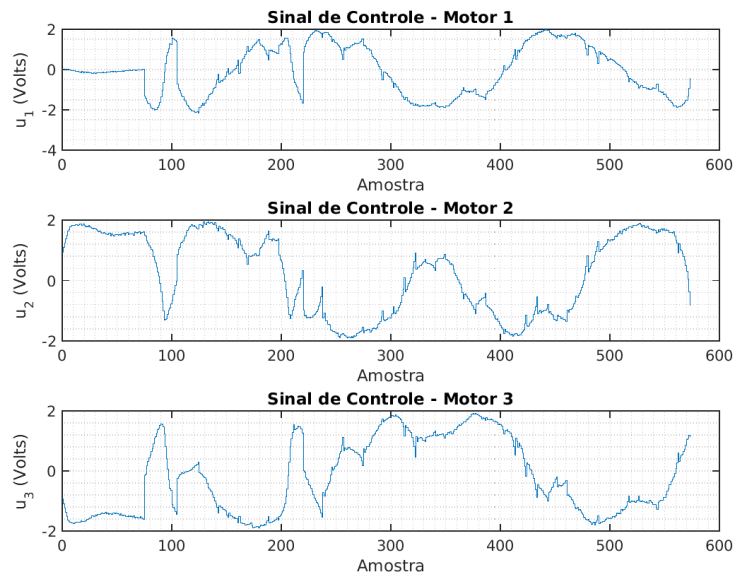


Figura 24 – Trajetória - 8 - Sinais de Controle.

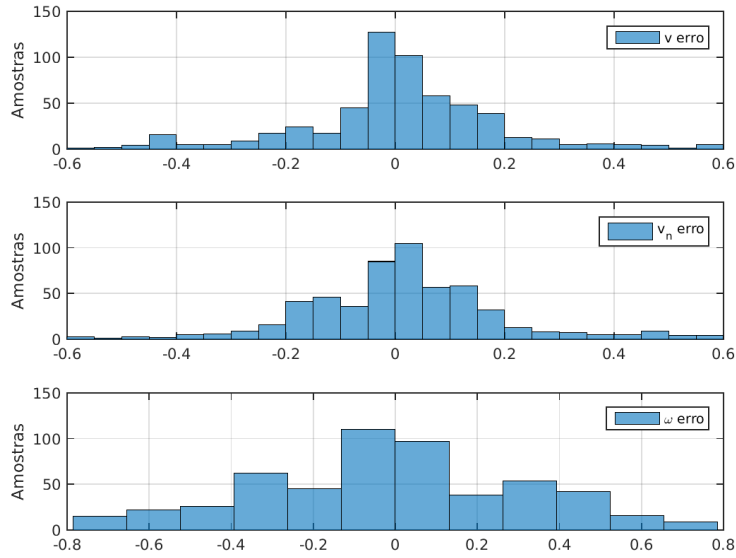


Figura 25 – Trajetória - 8 - Histograma de erros.

#### 4.2.5 Trajetória - 8 - Velocidade Reduzida

Neste experimentos, a trajetória em 8 é repetida, mas agora, foi utilizado o parâmetro  $v_{nav} = 0,3$  m/s, ou seja, metade da velocidade anterior.

Na Figura 26, os marcos de posição utilizados e a estimativa da trajetória percorrida pelo robô podem ser vistos. Nas Figuras 27 e 28, os estados e sinais de controle estão representados, respectivamente.

Pode-se observar que, agora, o robô consegue percorrer todos os marcos satisfatoriamente. Foi observada uma variação de tensão máxima de 0,7398 Volts, sobre o motor 3, na amostra 144.

A Figura 29 representa o histograma dos erros de rastreamento. Nota-se que os erros assumiram valores pequenos na maior parte das amostras.



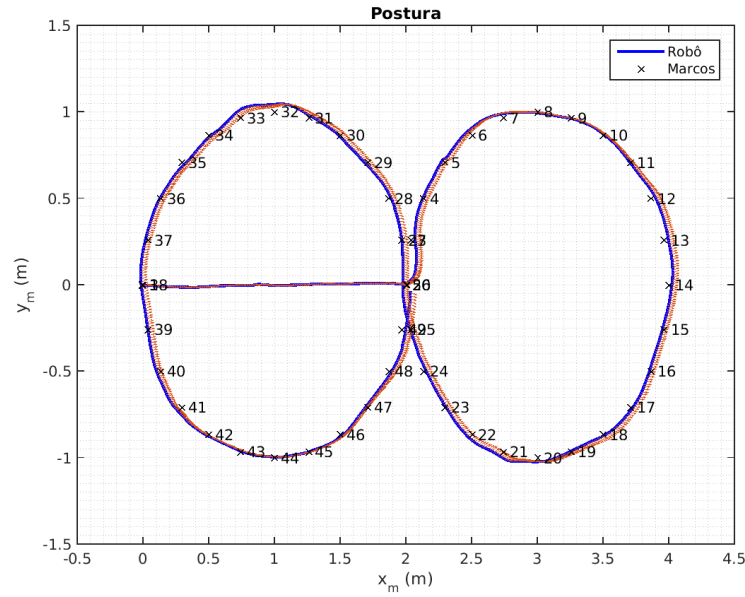


Figura 26 – Trajetória - 8 ( $v_{nav} = 0,3$  m/s) - O robô está orientado de acordo com as setas vermelhas. Os números indicam a ordem em que os marcos foram percorridos. Os marcos 1 e 2 ocupam as mesmas posições dos marcos 38 e 26 respectivamente.

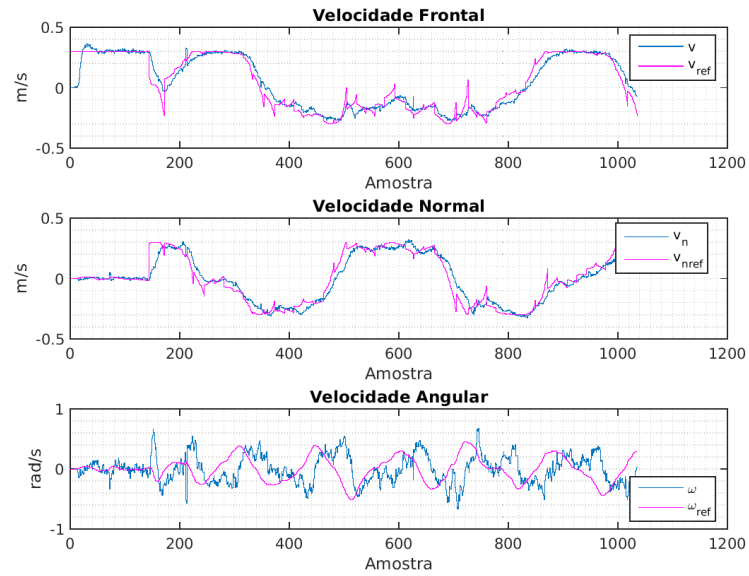


Figura 27 – Trajetória - 8 ( $v_{nav} = 0,3$  m/s) - Estados.

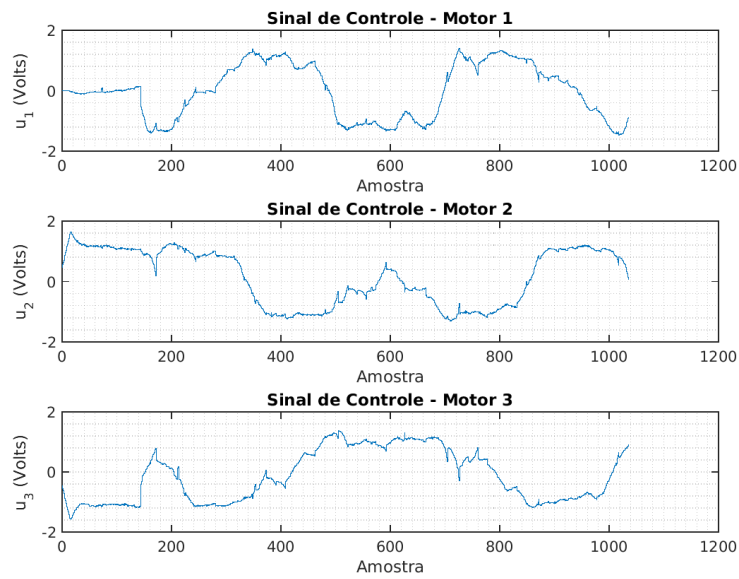


Figura 28 – Trajetória - 8 ( $v_{nav} = 0,3$  m/s) - Sinais de Controle.

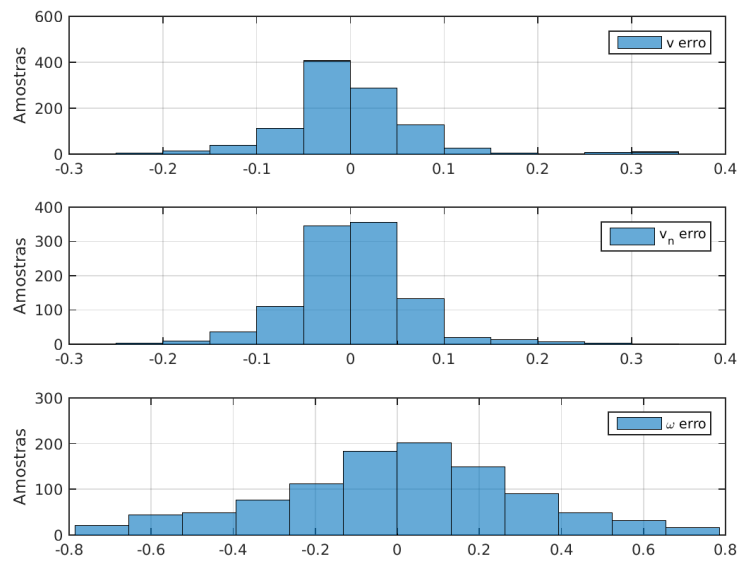


Figura 29 – Trajetória - 8 - Histograma de erros.

## 5 Conclusão

Um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estados foi projetado para um robô omnidirecional de três rodas. Foi apresentada a modelagem do robô, cujo modelo obtido levou em consideração a ação de forças de atrito estáticos e dinâmicos. Utilizando-se parâmetros obtidos experimentalmente, uma representação no espaço de estados foi derivada e aumentada para a adição de um integrador à malha. Para o projeto do controlador, foi utilizada a abordagem LMI, que permitiu a obtenção de um controlador ótimo com relação à norma  $\mathcal{H}_\infty$  de uma matriz de transferência escolhida. Para a melhoria do regime transitório e para atender requisitos quanto à magnitude dos esforços de controle, foi realizada a alocação dos pólos do sistema em malha fechada em uma sub-região circular do plano complexo.

Simulações foram realizadas para a análise do controlador projetado, por meio das quais observou-se que o controlador atende aos requisitos de projeto. Por fim, o desempenho do controlador pôde ser avaliado através de experimentos conduzidos com a plataforma. Nestes, foi possível observar que o controlador teve um desempenho satisfatório. Embora o limite estabelecido para o módulo da variação de tensão em um período de amostragem tenha sido violado em parte dos experimentos, isto ocorreu apenas em situações extremas.

Para a implementação da técnica apresentada, são necessários apenas a computação dos estados e o cálculo dos sinais de controle a partir da matriz de ganho. O que faz com que esta técnica seja de fácil implementação, podendo ser aplicada em sistemas embarcados com baixo poder de computação.

Uma possível melhoria para o trabalho seria embarcar o controlador no *firmware* do robô, evitando-se os efeitos do atraso de comunicação. Outra melhoria seria a realização de um projeto com um objetivo de otimização misto, ou seja, utilizando-se as normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$ . A adição de restrições quanto à variação dos sinais de controle foi alcançada através da verificação do resultado de múltiplas alocações de pólos. Esta abordagem consiste num processo de tentativa erro. Uma melhoria futura seria uma revisão da técnica, para que a adição de restrições nos sinais de controle possam ser levadas em consideração no projeto do controlador.



# Referências

ASTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-controlled Systems: Theory and Design*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado na página 25.

AUGELLO, L. L.; ARAÚJO, H. X.; CONCEIÇÃO, A. G. Controle  $\mathcal{H}_\infty$  Aplicado a um Robô Omnidirecional. 2013. Disponível em: <<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/5754.pdf>>. Citado na página 18.

BARRETO, J. C. L. *et al.* Design and Implementation of Model-Predictive Control With Friction Compensation on an Omnidirectional Mobile Robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 19, n. 2, p. 467–476, 2014. ISSN 1083-4435, 1941-014X. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/6461945/>>. Citado na página 18.

BOYD, S. P. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. (SIAM studies in applied mathematics, vol. 15). ISBN 978-0-89871-334-3. Citado na página 28.

CHILALI, M.; GAHINET, P.  $\mathcal{H}_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: an LMI Approach. *IEEE Transactions on automatic control*, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/486637/>>. Citado na página 32.

CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust Pole Placement in LMI Regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, p. 2257–2270, 1999. Citado na página 32.

CONCEIÇÃO, A.; CORREIA, M. D.; MARTINEZ, L. Modelagem de Robôs Móveis com Rodas Omnidirecionais Incluindo Modelos Estáticos de Atrito. 2013. Disponível em: <<http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/4734.pdf>>. Citado na página 18.

CONCEIÇÃO, A.; MOREIRA, A.; COSTA, P. Practical Approach of Modeling and Parameters Estimation for Omnidirectional Mobile Robots. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 14, n. 3, p. 377–381, jun. 2009. ISSN 1083-4435, 1941-014X. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/4797830/>>. Citado na página 18.

CONCEIÇÃO, A. G. S.; CORREIA, M. D.; MARTINEZ, L. Modeling and Friction Estimation for Wheeled Omnidirectional Mobile Robots. *Robotica*, v. 34, n. 09, p. 2140–2150, set. 2016. ISSN 0263-5747, 1469-8668. Disponível em: <[http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0263574715000065](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0263574715000065)>. Citado na página 23.

DOYLE, J. C. *et al.* State-space Solutions to Standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 831–847, ago. 1989. ISSN 0018-9286. Disponível em: <<http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:DOYieetac89>>. Citado na página 28.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 4th ed. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. ISBN 978-0-13-032393-4. Citado na página 25.

- GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, n. 4, p. 421–448, 1994. ISSN 10498923, 10991239. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/rnc.4590040403>>. Citado na página 29.
- OLIVEIRA, M. C. D.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Norm Characterizations and Controller Parametrizations for Discrete-time Systems. *International Journal of Control*, v. 75, n. 9, p. 666–679, jan. 2002. ISSN 0020-7179, 1366-5820. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207170210140212>>. Citado na página 31.
- OLSSON, H. *et al.* Friction Models and Friction Compensation. 1998. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.
- SANTOS, J. *et al.* Remote Control of an Omnidirectional Mobile Robot with Time-Varying Delay and Noise Attenuation. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.
- SANTOS, J. T. d. *Projeto e Desenvolvimento De Um Sistema De Controle Embarcado Aplicado a Robótica Móvel*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Salvador, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 20.
- SIEGWART, R.; NOURBAKHSI, I. R.; SCARAMUZZA, D. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. 2nd ed. ed. Cambridge, Mass: MIT Press, 2011. (Intelligent robotics and autonomous agents). ISBN 978-0-262-01535-6. Citado na página 17.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control - Analysis and Design*. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 27.
- STOORVOGEL, A. A. *The  $\mathcal{H}_\infty$  Control Problem: A State Space Approach*. Citeseer, 2000. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.461.8723&rep=rep1&type=pdf>>. Citado na página 17.
- UDENGAARD, M.; IAGNEMMA, K. Analysis, Design, and Control of an Omnidirectional Mobile Robot in Rough Terrain. *Journal of Mechanical Design*, v. 131, n. 12, p. 121002, 2009. ISSN 10500472. Disponível em: <<http://MechanicalDesign.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1472601>>. Citado na página 18.
- ZHOU, K. *et al.* *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall New Jersey, 1996. v. 40. Disponível em: <<http://www.ulb.tu-darmstadt.de/tocs/109091736.pdf>>. Citado na página 27.