Содержание

Начинать всегда стоит с того,
что сеет сомнения.

Борис Стругацкий

1 Топология в $\mathbb{R}^n$

1.1 Метрические, линейные нормированные, евклидовы пространства

1.1.1 Линейное пространство

Вещественным линейным пространством называется множество X, на котором определены операции $+ : X \times X \to X$ и $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, удовлетворяющие аксиомам линейного пространства:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y}\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
2. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3. $\exists \vec{0}\ \forall \vec{x} \in X\ \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
4. $\forall \vec{x} \in X\ \exists (-\vec{x}) \in X\ \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall \vec{x} \in X\ (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in X\ \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$
7. $\forall \vec{x} \in X\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

1.1.2 Евклидово пространство

Вещественным евклидовым пространством называется вещественное линейное пространство X, для любых элементов $\vec{x}, \vec{y}$ которого определено число $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in \mathbb{R}$ так, чтобы:

1. $\forall \vec{x} \in X\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geqslant 0$, причём $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$
2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \beta\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

1.1.3 Нормированное пространство

Линейное пространство X над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется нормированным, если $\forall \vec{x} \in X$ определено число $\|\vec{x}\| \in \mathbb{R}$ - норма, так, что:

1. $\forall \vec{x} \in X\ \|\vec{x}\| \geqslant 0$, причём $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ \forall \vec{x} \in X\ \|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$
3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X\ \|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

1.1.4 Метрическое пространство

Метрическим пространством называется множество X такое, что для любых $x,\, y \in X$ определено действительное число $\rho(x,\, y)$ (метрическое расстояние) и верны следующие утверждения:

1. $\forall x,\, y \in X\ \rho(x,\, y) \geqslant 0$, причём $\rho(x,\, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x,\, y \in X\ \rho(x,\, y) = \rho(y,\, x)$
3. $\forall x,\, y,\, z \in X\ \rho(x,\, y) \leqslant \rho(x,\, z) + \rho(z,\, y)$

1.2 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, Минковского

1.2.1 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Если X - вещественное евклидовое пространство, то

$$\forall \vec{x},\, \vec{y} \in X\ \langle \vec{x},\, \vec{y} \rangle^2 \leqslant \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y},\, \vec{y} \rangle$$

, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \vec{x} = \lambda \vec{y}$

1.2.2 О норме в евклидовых пространствах

Евклидово пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ является линейным нормированным пространством с $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x},\, \vec{x} \rangle}$

1.2.3 Неравенство Минковского

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},\ x_i,\, y_i \in \mathbb{R}$$

1.3 Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

1.3.1 Открытый шар

Открытым шаром с центром в точке $x_0 \in X$ радиусом $\varepsilon > 0$ (или же ε-окрестностью точки x_0) называется множество

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x_0,\, x) < \varepsilon\}$$

1.3.2 Внутренняя точка

Точка x_0 называется внутренней точкой множества $A \subset X$ если она принадлежит A вместе с некоторой своей ε-окрестностью

1.3.3 Внутренность множества

Внутренностью множества A называется множество всех внутренних точек A. Обозначается, как $\operatorname{int} A$

1.3.4 Открытое множество

Множество $A \subset X$ называется открытым, если все его точки - внутренние, то есть $A \subset int\, A$. Естественно, $\varnothing$ - открытое множество

1.3.5 Точка прикосновения

Точка x_0 называется точкой прикосновения множества $A \subset X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$$

1.3.6 Замыкание множества

Множество всех точек прикосновения множества $A \subset X$ называется его замыканием и обозначается как $\mathrm{cl}\ A$.

1.3.7 Замкнутое множество

Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения, то есть $\mathrm{cl}\ A \subset A$. Естественно, $\varnothing$ - замкнутое множество.

1.3.8 Предельная точка

Точка называется предельной точкой множества X, если пересечение любой её проколотой окрестности с этим множеством непусто.

1.3.9 Контрпример. Всякая ли внутренняя точка является предельной?

Нет, выберем дискретную метрику и рассмотрим любую внутреннюю точку с окрестностью радиуса $\frac{1}{2}$.

1.3.10 Свойства разности множеств

Для любого $A \subset X$ верны равенства:

1. $X \setminus int\, A = cl(X \setminus A)$
2. $X \setminus cl\ A = int(X \setminus A)$

1.3.11 Основные свойства совокупности открытых множеств

Пусть X - метрическое пространство. Тогда совокупность $\mathcal{T}$ открытых множеств X обладает следующими свойствами:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$
2. $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow G_1 \bigcap G_2 \in \mathcal{T}$
3. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{T}$, где A является некоторым множеством индексов.

1.3.12 Топология

Множество X называется топологическим пространством, если в нём выделена система подмножеств $\mathcal{T}$, называемых открытыми, которая удовлетворяет свойствам совокупности открытых множеств.

Множество $\mathcal{T}$ называется топологией множества X.

2 Про $\mathbb{R}^n$

2.1 Предел последовательности в $\mathbb{R}^n$

2.1.1 Критерий сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$

Последовательность $\{\vec{x}_m = (x_m^{(1)}, \ldots\, x_m^{(n)})\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к $\vec{x}_0 = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)})$ тогда и только тогда, когда $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ последовательность $\{x_m^{(j)}\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к $x_0^{(j)}$.

2.1.2 Основные свойства предела последовательностей в $\mathbb{R}^n$

1. (Единственность предела) В метрическом пространстве последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не может иметь более одного предела.

2. (Ограниченность сходящейся последовательности) Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \langle X, \rho\rangle$ - сходящаяся к $x_0 \in X$, то она ограничена. То есть

$$\exists R > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \rho(x_n, x_0) < R$$

3. (Отделимость от нуля) Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ (ЛНП) сходится к $x_0 \neq 0 \in E$, то она отделена от нуля. То есть

$$\exists c > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \|x_n\| > c$$

4. (Предел и арефметические операции) Если последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ (ЛНП) - сходящиеся к x_0, $y_0 \in E$ соответственно, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$ сходится к $\alpha_0 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то

   - $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
   - $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot x_n) = \alpha_0 \cdot x_o$

5. (Предел и скалярное произведение) Если последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ (Евклидово) - сходящиеся к x_0, y_0 соответственно, то

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$$

6. (Предел и векторное произведение) Если последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ - сходящиеся к $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$ соответственно, то

$$\lim_{n\to\infty}[\vec{x}_n, \vec{y}_n] = [\vec{x}_0, \vec{y}_0]$$

2.2 Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши в $\mathbb{R}^n$

2.2.1 Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$

Из каждой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2.2.2 Фундаментальная последовательность

Фундаментальной последовательностью в $\langle X,\, \rho \rangle$ называется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall p \in \mathbb{N}\, \rho(x_n,\, x_{n+p}) < \varepsilon$$

2.2.3 Критерий Коши в $\mathbb{R}^n$

Последовательность $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ фундаментальная.

2.3 Компактность в метрических пространствах и в $\mathbb{R}^n$

2.3.1 Определение

Компактным множеством в метрическом пространстве X называется такое множество K, что из любого его открытого покрытия множествами с индексами из A можно выделить конечное подпокрытие:

$$\exists \{\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n\} \subset A \mid K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

2.3.2 Связь компактности и замкнутости

Любое компактное множество замкнуто.

2.3.3 О замкнутых подмножествах компактного множества

Каждое замкнутое подмножество компактного множества компактно.

2.3.4 Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ следующие утверждения эквивалентны:

1. K - ограниченное замкнутое множество
2. K - компактное множество
3. $\forall \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K\, \exists (\{\vec{x}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty},\, \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_{m_k} = \vec{x}_0 \in K)$

3 О отображениях в $\mathbb{R}^n$

3.1 Эквивалентные определения непрерывных отображений

3.1.1 Топологическое определение непрерывности на множестве

Функция $f : D \to Y$, $D \subset X$ называется непрерывной на множестве D, если для любого открытого множества $G \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(G) = \{x \in D \mid f(x) \in G\}$ относительно открыт в D, то есть
$\exists \widetilde{G} \subset X$ - открытое

$$f^{-1}(G) = \widetilde{G} \cap D$$

3.1.2 Поточечное определение непрерывности на множестве

Функция $f : D \to Y$, $D \subset X$ называется непрерывной на множестве D, если $\forall x_0 \in D$ такой, что x_0 - предельная точка D верно

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

3.1.3 Эквивалентность этих определений

Два определения непрерывности на множестве эквивалентны.

3.2 Непрерывный образ компактного множества

Если $f : X \to Y$ непрерывна на компактном множестве $K \subset X$, то $f(K)$ компактно.

3.3 Пределы по направлениям, по совокупности переменных, повторные пределы

3.3.1 Предел по совокупности переменных

Если $\vec{x}_0$ - внутрення точка множества $D \cup \{\vec{x}_0\}$, то $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = l$ (Принадлежность $\vec{x} \in D$ опускается)

3.3.2 Предел по направлению

Пределом по направлению $\vec{e} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ в точке $\vec{x}_0$, которая является внутренней для множества $D \cup \{\vec{x}_0\}$, называется $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0,\, \vec{x} \in D_{\vec{x}_0, \vec{e}}} f(\vec{x}) = l$, где

$$D_{\vec{x}_0, \vec{e}} = D \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{e} \cdot t,\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

3.3.3 Повторный предел

Повторным пределом называется предел вида $\lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y))$

3.3.4 Связь предела по совокупности с пределом по направлению

Если существует предел по совокупности переменных $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = l$, то существует предел по любому направлению в точке $\vec{x}_0$, равный l. Обратное, вообще говоря, неверно.

Контрпример

$$y = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

3.3.5 Непрерывность сложной функции многих переменных

Пусть $f: D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\vec{y}_0 = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \in D \subset \mathbb{R}^m$, а также функции $\forall j \in \{1, \ldots, m\}\ g_j: G \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $\vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in G \subset \mathbb{R}^n$, причём

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}\ g_j(\vec{x}_0) = y_j^{(0)}$$

$$\forall \vec{x} \in G\ (g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})) \in D$$

Тогда сложная функция $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$ непрерывна в точке $\vec{x}_0$

3.3.6 Теорема Кантора о равномерной непрерывности на компактном множестве

Если f непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на нём.

3.4 Связность и линейная связность

3.4.1 Относительно открытое множество

Множество $A \subset E \subset \mathbb{R}^n$ называется относительно открытым (замкнутым) в E, если существует открытое (замкнутое) множество $G \subset \mathbb{R}^n$ ($F \subset \mathbb{R}^n$) такое, что:

$$A = E \cap G\ (A = E \cap F)$$

3.4.2 Связное множество

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется связным, если его нельзя разбить на 2 непересекающихся непустых относительно открытых (замкнутых) в E множеств.

3.4.3 Линейно связное множество

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$ существует кривая $\gamma \subset E$, соединяющая $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$

3.5 Теорема Больцано-Коши в $\mathbb{R}^n$

Если $f: E \to \mathbb{R}$ непрерывна на связном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то для любых своих значений $A < B$ она принимает и любое промежуточное, то есть

$$(\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E,\ f(\vec{x}_1) = A,\ f(\vec{x}_2) = B) \Rightarrow \forall A < C < B\ \exists \vec{\xi} \in E,\ f(\vec{\xi}) = C$$

3.6 *Связность открытых множеств

- Каждое линейно связное подмножество $\mathbb{R}^n$ связно.
- Если G - открытое связное множество, то оно линейно связно.

4 О дифференцируемости функций многих переменных

4.1 Дифференцируемость функций многих переменных и наличие частных производных

4.1.1 Необходимое условие дифференцируемости

Если f дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, то существуют частные производные $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, причём

$$grad\, f(\vec{x}) = (\frac{\delta f}{\delta x_1}(\vec{x}_0), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(\vec{x}_0))$$

Контпример. Обратное неверно

$$y = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

В точке (0,0) имеет обе частных производных, но функция не дифференцируема.

4.1.2 Достаточное условие дифференцируемости

Если f определена в окрестности точки $\vec{x}_0$ вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в $\vec{x}_0$, то f дифференцируема в $\vec{x}_0$

Контрпример. Требование непрерывности частичных производных в точке существенно.

$$y = \sqrt{|xy|}$$

в точке (0,0) эта непрерывная функция недифференцируема, а её частичные производные разрывны.

Контпример. Обратное неверно

$$y = \sqrt[3]{x^2y^2}$$

в точке (0,0) эта непрерывная функция имеет не непрервные частные производные равные нулю, однако она дифференцируема.

4.2 Дифференцируемость сложной функции

Пусть f дифференцируема в точке $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ g_j дифференцируемы в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, причём $g_j(\vec{x_0}) = y_{j,0}$, если $\vec{y}_0 = (y_{1,0}, \ldots, y_{m,0})$. Тогда сложная функция $f(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, причём

$$grad\, h(\vec{x}_0) = grad\, f(\vec{y}_0)$$

4.3 Касательная плоскость

4.3.1 О области и замкнутой области

Область - это открытое связное множество. Замкнутая область - это замыкание области.

4.3.2 Определение

Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, называется касательной к графику $z = f(x, y)$ в данной точке, если для $M_1(x, y, f(x, y))$ угол между секущей M_0M_1 и плоскостью стремится к нулю при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ в некоторой замкнутой области $\vec{D}$

4.3.3 Теорема о касательной плоскости

Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то касательная плоскость к $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует и задаётся уравнением

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

4.4 Градиент, его геометрический смысл

4.4.1 Определение

Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, то его градиентом в этой точке называется вектор $\text{grad } (f(\vec{x}_0)) := (\frac{\delta f}{\delta x_1}(\vec{x}_0), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(\vec{x}_0))$

4.4.2 Производная по направлению

Производной функции f в точке $\vec{x}_0$ по направлению $\vec{l}$ называется предел (если он существует):

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{l}}(\vec{x}_0) := \lim_{t \to 0+} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

4.4.3 О связи дифференцируемости и производной по направлению

Если f дифференцируема в $\vec{x}_0$, то она имеет производную по любому направлению $\vec{l} \neq \vec{0}$, причём

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{l}}(\vec{x}_0) = \langle grad\, f(\vec{x}_0), \vec{l} \rangle$$

4.4.4 Геометрический смысл градиента

Если f дифференцируема в точке $\vec{x}_0$ и $grad\, f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$, то производная по направлению $\vec{l}$, $|\vec{l}| = 1$

- Максимальна при $\vec{l} = \frac{grad\, f(\vec{x}_0)}{|grad\, f(\vec{x}_0)|}$
- Минимальна при $\vec{l} = -\frac{grad\, f(\vec{x}_0)}{|grad\, f(\vec{x}_0)|}$

4.5 Теоремы Шварца и Юнга о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования

4.5.1 Контрпример. Порядок дифференцирования важен

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

В данном случае

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$$

4.5.2 Теорема Шварца

Если существуют $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ в некоторой окрестности точки $(x_0, \, y_0)$, причём они непрерывны в $(x_0, \, y_0)$, то

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0, \, y_0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0, \, y_0)$$

4.5.3 Теорема Юнга

Если f дважды дифференцируема в точке в точке $(x_0, \, y_0)$, то

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0, \, y_0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0, \, y_0)$$

4.5.4 Контрпример. Данные условия являются достаточными

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}}|y|^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

4.5.5 Контрпример. Юнг, но не Шварц

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3y^3 \sin\frac{1}{xy} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

4.5.6 Контрпример. Шварц, но не Юнг

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4.6 Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано*

4.6.1 Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа

Пусть f $m+1$ раз дифференцируема в окрестности точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда, для любого $\vec{x}$ из этой окрестности существует $\vec{\xi} = \vec{x}_0 + c(\vec{x} - \vec{x}_0)$, $0 \leqslant c \leqslant 1$ такая, что

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(\vec{x}_0)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(\vec{\xi})}{(m+1)!}$$

4.6.2 *Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Пеано

Если f дифференцируема m раз в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $m-1$ раз в окрестности точки $\vec{x}_0$, то

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(\vec{x}_0)}{k!} + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|^m),\ \vec{x} \to \vec{x}_0$$

5 О интеграле Римана

5.1 Суммы Дарбу, их свойства

5.1.1 Важные определения

- Диаметром разбиения называется величина $\Delta P = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$
- До конца параграфа зафиксируем, что f - это ограниченная функция на $[a,\, b]$
- Определим $M_k := \sup\limits_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x)$, $m_k := \inf\limits_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x)$

5.1.2 Верхняя сумма Дарбу

Верхней суммой дарбу называется величина

$$U(P,\, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

5.1.3 Нижняя сумма Дарбу

Нижней суммой Дарбу называется величина

$$L(P,\, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

5.1.4 Свойство сумм Дарбу

Для любых разбиений P_1, P_2 отрезка $[a,\, b]$ верно, что

$$L(P_1, f) \leqslant U(P_2, f)$$

5.2 Критерий интегрируемости

5.2.1 Нижний интеграл

Нижним интегралом $\underline{I}(f)$ называется величина

$$\underline{I}(f) := \sup_P L(P,\, f)$$

5.2.2 Верхний интеграл

Верхним интегралом $\overline{I}(f)$ называется величина

$$\overline{I}(f) := \inf_P U(P,\, f)$$

5.2.3 Интегрируемость по Риману

Если $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, то f называется интегрируемой по Риману на $[a,\, b]$, а общее значение $I(f)$ называется интегралом Римана от f по отрезку $[a,\, b] : \int\limits_a^b f(x)dx$

5.2.4 Критерий интегрируемости по Риману

f интегрируема по Риману на $[a,\, b]$ ($f \in R[a;b]$) тогда и только тогда, когда верно утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists P \mid U(P,\, f) - L(P,\, f) < \varepsilon$$

5.3 Интегрируемость непрерывных и монотонных функций

5.3.1 О непрерывных функциях

Каждая непрерывная на $[a,\, b]$ функция интегрируема по Риману на $[a;b]$

5.3.2 О монотонных функциях

Каждая монотонная на отрезке $[a,\, b]$ функция интегрируема по Риману на $[a;b]$

5.4 Основные свойства интеграла Римана

5.4.1 Линейность

Если $f_1, f_2 \in R[a;b]$, то $(f_1 + f_2) \in R[a;b]$, причём

$$\int\limits_a^b (f_1 + f_2)(x)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$$

$$\forall c \in \mathbb{R} \int\limits_a^b cf_1(x)dx = c\int\limits_a^b f_1(x)dx$$

5.4.2 Монотонность

Если $f_1,\ f_2 \in R[a;b]$ и $\forall x f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f_2(x)dx$$

5.4.3 Аддитивность

$f \in R[a;b] \Leftrightarrow f \in R[a;c] \wedge f \in R[c;b]$, где $c \in (a,\ b)$, причём

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

5.4.4 Оценка

Если $f \in R[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\ |f(x)| \leqslant M$, то

$$|\int\limits_a^b f(x)dx| \leqslant M(b-a)$$

5.5 Интегрируемость сложной функции

Если g интегрируема по Риману на $[a;b]$, причём $\forall x \in [a;b] m \leqslant g(x) \leqslant M$, f непрерывна на $[m;M]$, то $f \circ g$ интегрируема по Риману на $[a;b]$

5.6 Интеграл, как предел интегральных сумм

5.6.1 Определение интегральной суммы

Интегральной суммой $S(P, f, \{t_i\})$ называется сумма вида

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

где $P:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

5.6.2 Предел интегральных сумм

Число A называется пределом интегральных сумм $S(P, f, \{t_i\})$ при $\Delta(P) \to 0$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall P,\ \Delta(P) < \delta\, \forall \{t_i\},\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]\ |S(P, f, \{t_i\}) - A| < \varepsilon$$

5.6.3 Интеграл, как предел интегральных сумм

$f \in R[a;b]$ тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{\Delta(P)\to 0} S(P, f, \{t_i\})$, при этом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta(P)\to 0} S(P, f, \{t_i\})$$

5.7 Интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва

5.7.1 Вспомогательная теорема

Если $\forall b' \in (a;b)\ f \in R[a;b']$ и f ограничена на $[a;b]$, то $f \in R[a;b]$

5.7.2 Следствие об интегрируемости функций с конечным числом точек разрыва

Если f непрерывна на $[a;b]$, кроме конечного число точек, являющимися точками разрыва первого рода, то $f \in R[a;b]$

5.8 Свойства интеграла с переменным верхним пределом

5.8.1 Определение

Пусть $f \in R[a;b']\ \forall b' \in (a;b)$. Тогда $F(b') = \int\limits_a^{b'} f(x)dx$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

5.8.2 Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом

- Если $f \in R[a;b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $F(x)$ непрерывен на $[a;b]$
- Если, кроме того, f непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то $F(x)$ дифференцируема в x_0, причём $F'(x_0) = f(x_0)$

5.9 Формула Ньютона-Лейбница

Если $f \in R[a;b]$ имеет первообразную F на $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

5.10 Формулы интегрирования по частям и замены переменной в интеграле Римана

5.10.1 Формула интегрирования по частям

Если f и g интегрируемы по Риману на $[a;b]$ вместе со своими производными, то

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g(x)f'(x)dx$$

5.10.2 Формула замены переменной

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, $g(x)$ интегрируема по Риману на $[\alpha; \beta]$ вместе с $g'(x)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ $m \leqslant g(x) \leqslant M$, причём $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

5.11 Первая и вторая* теоремы о среднем для интеграла Римана

5.11.1 Первая теорема о среднем

Пусть $f(x),\ g(x) \in R[a; b]$, причём $\forall x \in [a; b]$ $g(x) \geqslant 0$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Тогда

$$\exists \mu \in [m; M] \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$$

Если также известно, что f - непрерывна на $[a; b]$, то

$$\exists \xi \in [a; b] \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx$$

5.11.2 *Вторая теорема о среднем

Пусть f интегрируема по Риману на $[a; b]$, $g(x)$ невозрастающая и неотрицательная функция на $[a; b]$. Тогда

$$\exists \xi \in [a; b] \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)dx$$

5.12 Формула Бонне

Пусть $f(x) \in R[a; b]$, $g(x)$ - монотонна на $[a; b]$, тогда:

$$\exists \xi \in [a; b] \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b) \int\limits_\xi^b f(x)dx$$

5.13 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Пусть $f(x)$ непрерывна в $U_\varepsilon(a)$ вместе со своими производными вплоть до $n+1$ порядка включительно. Тогда:

$$\forall x \in U_\varepsilon(a)\ f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!} \int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

5.14 ***** Основные свойства и два основных случая вычисления интегралов Римана-Стилтьеса

6 О несобственных интегралах

6.1 Критерий Коши и признак сравнения для несобственных интегралов Римана

6.1.1 Критерий Коши сходимости несобственного интеграла Римана

Пусть $f \in R[a;\widetilde{b}]$, $\forall \widetilde{b}$, $a < \widetilde{b} < b$. Тогда

$$\exists \int\limits_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists B \in (a;b)\, \forall B_1,\, B_2\; B < B_1 < B_2 < b\; |\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)dx| < \varepsilon$$

6.1.2 Лемма о связи интеграла с переменным верхним пределом и сходимости несобственного интеграла

Пусть $f(x) \geqslant 0\, \forall x \in (a;b)$, $f \in R[a;\widetilde{b}]\, \forall \widetilde{b}$, $a < \widetilde{b} < b$. Тогда
$\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ограничена на $[a;b)$

6.1.3 Признак сравнения

Пусть f, $g \in R[a;\widetilde{b}]$, $\forall \widetilde{b}$, $a < \widetilde{b} < b$, $\forall x \in [a;b)$ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$

6.2 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

6.2.1 Теорема о связи абсолютной и условной сходимости

Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

6.3 Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

6.3.1 Признак Дирихле

Если

1. $f \in R[a;\widetilde{b}]$, $\forall \widetilde{b}$, $a < \widetilde{b} < b$ и $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ограничена на $[a;b)$
2. g монотонна на $[a;b)$ и бесконечно мала при $x \to b - 0$ $(+\infty)$

то $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится

6.3.2 Признак Абеля

Если

1. $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится

2. g монотонна и ограничена на $[a; b)$

то $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится

6.4 *Признак Харди

Пусть f - периодическая (с периодом ω) и интегрируемая по Риману на $[a; b]$ функция. g - монотонная, бесконечно малая при $x \to +\infty$. Тогда

1. Если $\int\limits_a^{a+\omega} f(x)dx = 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится

2. Если $\int\limits_a^{a+\omega} f(x)dx \neq 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

7 О числовых рядах

7.1 Необходимое условие сходимости числовых рядов, критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.

7.1.1 Необходимое условие сходимости ряда

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

7.1.2 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами

Если $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n \geqslant 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

7.2 Признаки сравнения и интегральный (Коши-Маклорена) сходимости числовых рядов

7.2.1 Признак сравнения числовых рядов

Если $\forall n \in \mathbb{N}\; 0 \leqslant a_n < b_n$, то из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

7.2.2 Интегральный признак Коши-Маклорена

Пусть $f(x) \geqslant 0$ и монотонна на $[1; +\infty]$. Тогда несобственный интеграл Римана $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть $f(x)$ - невозрастающая, тогда $\forall x \in [n; n+1]$ $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$

Проинтегрируем каждую часть на отрезке $[n; n+1]$, получим $f(n+1) \leqslant \int\limits_n^{n+1} f(x) \leqslant f(n)$

Просуммируем эти неравенства от 1 до m, получим $\sum\limits_1^m f(n+1) \leqslant \int\limits_1^{m+1} f(x)dx \leqslant \sum\limits_1^m f(n)$

Тогда $\int\limits_1^{\infty} f(x)$ сх-ся $\Rightarrow \{\sum\limits_{n=1}^{m} f(n)\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена $\Rightarrow F(x) = \int\limits_1^x f(t)dt$ ограничена

Также если $\int\limits_1^{m+1} f(x)dx$ сходится, то $\{\sum\limits_{n=1}^{m} f(n)\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена $\Rightarrow \sum\limits_1^{\infty} f(x)$ сходится по критерию сходимости ряда

7.3 Признак Даламбера и Коши сходимости числовых рядов

7.3.1 Признак Даламбера

Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geqslant 0$

1. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ рассходится

7.3.2 Признак Коши

Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geqslant 0$

1. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = p < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ рассходится

7.4 *Регулярный метод Чезаро, сравнение предельных форм признаков Даламбера и Коши

7.4.1 Метод Чезаро

Говорят, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется по Чезаро к числу S, если последовательность средних арифметических $\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{m} a_n$, имеет предел S, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$$

7.4.2 Регулярный метод суммирования

Метод суммирования называется регулярным, если из сходимости ряда к числу S следует, что он суммируется к числу S.

7.4.3 О регулярности метода Чезаро

Метод суммирования рядов по Чезаро регулярен.

7.4.4 Признак Коши в предельной форме

Если $\forall n \in \mathbb{N}\, p_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = L$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1 \cdot \dots \cdot p_n} = L$$

7.5 Критерий Коши сходимости числовых рядов, абсолютная и условная сходимость

7.5.1 Критерий Коши сходимости числовых рядов

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall p \in \mathbb{N}\, |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$
Доказательство.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится $\Leftrightarrow$ (Критерий Коши для числовой последовательности) $\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall p \in \mathbb{N}\, |S_{n+p} - S_n| = |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_n| < \varepsilon$

7.5.2 О связи абсолютной сходимости и сходимости

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится
Доказательство.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится $\Rightarrow$ (Критерий Коши)

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall p \in \mathbb{N} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

7.5.3 О следовании абсолютной / условной сходимости ряда

Если $a_n = b_n + c_n (\forall n \in \mathbb{N})$, то из абсолютной сходимости $\sum b_n, \sum c_n$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum a_n$, а из абсолютной сходимости одного и условной сходимости другого следует условная сходимость ряда $\sum a_n$

Доказательство.

$|a_n| \leqslant |b_n| + |c_n| \Rightarrow$ если b_n и c_n сходятся абсолютно, то $\sum\limits_{n=1}^{k} |b_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{k} |c_n|$ ограничены $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{k} |a_n|$ также ограничена $\Leftrightarrow \sum a_n$ сходится абсолютно

Пусть $\sum b_n$ сходится абсолютно, а $\sum c_n$ условно, тогда если $\sum a_n$ сходится абсолютно $\Rightarrow c_n = a_n - b_n$, то $\sum c_n$ также сходится абсолютно, но это не так, противоречие $\Rightarrow \sum a_n$ сходится условно

7.6 Признак Лейбница

Если $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ невозрастающая, бесконечно малая, то $\sum(-1)^{n+1}b_n$ сходится, причём для его остатков $r_n := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$ справедлива оценка $|r_n| \leqslant b_{n+1}$, $(\forall n \in \mathbb{N})$

Доказательство.

$$S_{2n} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{2n-1} - b_{2n}) \Rightarrow S_{2n} \leqslant S_{2(n+1)}$$

$$S_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n} \Rightarrow \leqslant b_1$$

Значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + b_{2n+1}) = S$$

$|r_1| < b_2$, т.к. $0 \geqslant r_1 = -b_2 + (b_3 - b_4) + \ldots \geqslant -b_2$, для остальных случаев доказательство аналогичное.

7.7 Признак и Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов

7.7.1 Признак Дирихле

Если

1. Частичные суммы $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ образуют ограниченную последовательность

2. Последовательность $\{b_n\}$ монотонна и бесконечно мала

то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(A_{k+1} - A_k)b_k = A_{n+2}b_{n+1} - A_{n+1}b_{n+1} + \dots + A_{n+p+1}b_{n+p} - A_{n+p}b_{n+p} = A_{n+p+1}b_{n+p} - A_{n+1}b_{n+1} + \sum\limits_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1})A_{k+1}$

Т.к. $|A_n| \leqslant M \forall n \in \mathbb{N}$

$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k| \leqslant M(|b_{n+p} - b_{n+1}| + |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1})|) = 2M(|b_{n+p} - b_{n+1}|) < \varepsilon$

7.7.2 Признак Абеля сходимости числовых рядов

Если

1. $\sum a_n$ сходится

2. Последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена

то ряд $\sum a_n b_n$ сходится

Доказательство. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$

$\widetilde{b_n} = b_n - b_0$

По Признаку Дирихле ряд $\sum \widetilde{b_n} a_n$ сходится. $\sum \widetilde{b_n} a_n = \sum b_n a_n - b_0 \sum a_n \Rightarrow \sum a_n b_n$ сходится (т.к. сходится левая часть и второе слагаемое в правой части)

7.8 Перестановки абсолютно сходящихся рядов

Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то сходится (и притом абсолютно) ряд $\sum a_n^*$, где $a_k^* = a_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{n_k\}$ - биективный образ $\mathbb{N}$, причём $\sum a_n^* = \sum a_n$

Доказательство. $\sum a_n$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ - ограниченная последовательность $\Rightarrow$ частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k^*|$ тоже ограничены, т.к.

$\exists m > n \{a_i^* \,|\, i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset \{a_i \,|\, i \in \{1, \ldots, m\}\} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k^*| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} |a_k| \Rightarrow \sum a_n^*$ сходится абсолютно

Далее, покажем, что результат тот же. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N\ \{a_i^* \mid i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset \{a_i \mid i \in \{1, \ldots, N\}\}\ \forall m \geqslant N |S_m - S_n^*| \leqslant |a_{n+1}^*| + \cdots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k^*|$

При $m \to +\infty$ $S_m \to S$, а при $n \to +\infty$ $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k^*| \to 0$, то есть

$\sum a_n = \sum a_n^*$

7.9 *Теорема Римана о перестановках

Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то $\forall A \in \overline{\mathbb{R}}$ существует биективный образ $\mathbb{N}$ ($\{n_k\}$) такой, что $\sum\limits_{k=1}^{K} a_{n_k} \to A$

7.10 Произведение абсолютно сходящихся рядов

Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся к A и B соответственно, то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{n_j} b_{m_j}$, составленный из всевозможных попарных произведений членов этих рядов в произвольном порядке, абсолютно сходится к AB.

Доказательство

$\sum\limits_{j=1}^{N} |a_{n_j} b_{m_j}| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\max(n_1, \ldots, n_N)} |a_i| \cdot \sum\limits_{k=1}^{\max(m_1, \ldots, m_N)} |b_k| < M$

По Теореме о перестановках абсолютно сходящихся рядов, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{n_j} b_{m_j}$ не зависит от перестановок.

$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2) + (a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_3) + \ldots$, т.е. подпоследовательность частичных сумм этого ряда является произведением частичных сумм исходных рядов $(\sum\limits_{i=1}^{N} a_i) \cdot (\sum\limits_{k=1}^{N} b_k) \to AB$ (При $N \to \infty$)

7.11 Произведение рядов по Коши

Произведением рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ по Коши называется $\sum c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$

7.12 Теорема Мертенса

Если хотя бы один из сходящихся рядов $\sum a_n$, $\sum b_n$ сходится аюсолютно, то сходится и их произведение по Коши

Доказательство. Пусть $\sum a_n$ сходится абсолютно

$\sum\limits_{k=1}^{n} c_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \dots + a_k b_1) = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_n B_1 = a_1(B_n - B) + a_2(B_{n-1} - B) + \dots + a_n(B_1 - B) + A_n B$

При $n \to \infty$ $A_n B \to AB$

$\forall N \sum\limits_{n=1}^{N} |a_n| \leqslant M_1$

$\beta_N := B_N - B$; $\beta_N \to 0$ (При $N \to \infty$) $\Rightarrow \forall N \; |\beta_N| \leqslant M_2$

$\gamma_N := a_1\beta_N + a_2\beta_{N-1} + \dots + a_N\beta_1 = (a_1\beta_N + \dots + a_m\beta_{N+1-m}) + (a_{m+1}\beta_{N-m} + \dots + a_N\beta_1)$

Про правую скобку: $|a_{m+1}\beta_{N-m} + \dots + a_N\beta_1| \leqslant M_2(|a_{m+1} + \dots + a_N|) < \frac{\varepsilon}{2}$

Про левую скобку: $\exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant (N+1-m)\; |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$ $|a_1\beta_N + \dots + a_m\beta_{N+1-m}| \leqslant (|a_1| + \dots + |a_m|)\frac{\varepsilon}{2M_1} < \frac{\varepsilon}{2}$

Значит $|\gamma_N| \to 0$ при $N \to \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = AB$

8 О функциональных последовательностях и рядах

8.0.1 Равномерная сходимость функциональной последовательности

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на E к функции $f(x)$ ($f_n(x) \rightrightarrows f$) если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall x \in E\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

8.1 Критерий Коши и признак Вейшерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов

8.1.1 Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей

$f_n \rightrightarrows f$ на $E \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E\; |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

Необходимость: $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall x \in E\, \forall p \in \mathbb{N}\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Достаточность: Критерий Коши сходимости числовой последовательности $\Rightarrow$

$$\exists f(x)\,\forall x \in R\; f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x) \Rightarrow$$

$$p \to \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall x \in E\, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

8.1.2 Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов

$\sum f_n$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E\, |\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon$$

Доказательство аналогично случаю с функциональными последовательностями.

8.1.3 Признак Вейшерштрасса

Если $\forall x \in E\, \forall n \in \mathbb{N}\, |f_n(x)| \leqslant c_n$ и ряд $\sum c_n$ сходится, то $\sum f_n(x)$ равномерно сходится на E

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E\, |\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_n < \varepsilon$$

8.2 Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

8.2.1 Признак Дирихле

Если

1. Последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n(x)$ равномерно ограничена
2. Последовательность $\{b_n(x)\}\, \forall x \in E$ монотонна и равномерно сходится к нулю

то $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство.

$$A_k(x) := \sum_{j=n+1}^{k} a_j(x)$$

$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (A_{k+1}(x) - A_k(x))b_k(x) = A_{n+p+1}(x)b_{n+p}(x) - A_{n+1}(x)b_{n+1}(x) - \sum\limits_{k=n+2}^{n+p} A_k(x)(b_k(x) - b_{k-1}(x)) \Rightarrow$

$$\exists M\, \forall k \in \mathbb{N}\, |A_k| \leqslant M$$

$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)| \leqslant 2M(|b_{n+p}(x)| + |b_{n+2}(x)|) < \varepsilon$, т.к. $\{b_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю

8.2.2 Признак Абеля

Если

1. Ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится

2. Последовательность $\{b_n(x)\}\ \forall x \in E$ монотонна и равномерно ограничена на E

то $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство.

$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (A_{k+1}(x) - A_k(x))b_k(x) = A_{n+p+1}(x)b_{n+p}(x) - A_{n+1}(x)b_{n+1}(x) - \sum\limits_{k=n+2}^{n+p} A_k(x)(b_k(x) - b_{k-1}(x)) \Rightarrow$

$$\exists M\ \forall x \in E\ \forall n \in \mathbb{N}\ |b_n(x)| \leqslant M$$

$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)| \leqslant 2M(2|A_{n+p+1}| + 2|A_{n+1}|) < \varepsilon$, по Критерию Коши из сходимости $\sum a_n(x)$

8.3 Предельный переход в равномерно сходящихся функциональных последовательностях и рядах

8.3.1 Предельный переход в равномерно сходящихся функциональных последовательностях

Если $f_n(x)$ равномерно сходится к f на множестве E метрического пространства, x_0 - предельная точка E, $\forall n \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{x \to x_0,\, x \in E} f_n(x) = a_n$, то $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in E} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ (т.е. оба предела существуют и равны)

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, устремляя $x \to x_0$ получим

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E |a_{n+p} - a(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow$ предел последовательности $\{a_n\}$ существует и равен какому-то a

$$|f(x) - a| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

Устремляя $p \to \infty$ получим достаточную малость первого модуля (из равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$), и выбрав достаточно маленькую окрестность x_0 (из $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in E} f_n(x) = a_n$) получим малость второго модуля. Итого получим, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \rho(x,\, x_0) < \delta\ |f(x) - a| < \varepsilon$$

8.3.2 Предельный переход в равномерно сходящихся функциональных рядах

Если $\sum f_n(x)$ сходится равномерно на E, $\forall n \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{x \to x_0,\, x \in E} f_n(x) = a_n$, то

$$\sum a_n = \lim_{x \to x_0,\, x \in E} \sum f_n(x)$$

8.4 Признак Дини

Если $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n непрерывны на компактном множестве E в метрическом пространстве, $\forall x \in E$ последовательность $\{f_n(x)\}$ - невозрастающая, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, f непрерывна на E, то $f_n \rightrightarrows f$ на E.

Доказательство.

$g(x) := f_n(x) - f(x)$ - монотонно убывает к нулю, нам надо доказать, что равномерно стремится к нулю.

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in E\, \exists n_x \in \mathbb{N}\; 0 \leqslant g_{n_x}(x) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in E\, \exists n_x \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant n_x\, \exists \delta_x > 0\, \forall t \in E\; \rho(x,\, t) < \delta_x\; 0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon$$

Получили покрытие E окрестностями $x \in E$. НО т.к. E компактное, то

$$\exists x_1,\, \ldots,\, x_N \in E\; E \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{\delta_{x_k}}(x_k)$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_0 = \max(n_{x_1},\, \ldots,\, n_{x_N})\, \forall n > N_0\; 0 \leqslant g_n < \varepsilon$$

8.5 Равномерная сходимость и интегрирование

8.5.1 Интегрирование равномерно сходящейся последовательности

Если $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in R[a;b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$, то $f \in R[a;b]$, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$

Доказательство.

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists P\; U(P, f_n) - L(P, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N\, \forall n > N\, \forall x \in [a;b]\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1};x_k]} f(x)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\sup_{x \in [x_{k-1};x_k]} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)})\Delta x_k = U(P, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$L(P, f) = L(P, f_n) - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists P\; U(P, f) - L(P, f) \leqslant U(P, f_n) - L(P, f_n) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \Rightarrow f \in R[a;b]$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N\; |\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon dx}{3(b-a)} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

8.5.2 Интегрирование равномерно сходящегося ряда

Если $f_n \in R[a;b]$, $\sum f_n(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$, то $\sum f_n(x) \in R[a;b]$ и $\int\limits_a^b (\sum f_n(x))dx = \sum \int\limits_a^b f_n(x)dx$

8.6 Дифференцирование функциональных последовательностей и рядов

8.6.1 Дифференцирование функциональных последовательностей

Если

1. f_n дифференцируемы на $(a;b)$
2. f'_n равномерно сходятся на $(a;b)$
3. $f_n(x_0)$ сходится, где $x_0 \in (a;b)$

то

1. $f_n \rightrightarrows f$ на $(a;b)$
2. f дифференцируема на $(a;b)$
3. $f'_n \rightrightarrows f'$ на $(a;b)$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall x \in (a;b)\; |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \wedge |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall x,\, t \in (a;b) (f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(t) - f_n(t)) = (f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi))(x-t)$$

$$t := x_0\; |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| + |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$

По Критерию Коши $f_n \rightrightarrows f$ на $(a;b)$

$$x \in (a;b)\; \varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x},\; \varphi := \frac{f(t) - f(x)}{t-x}$$

$$|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| = |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\forall t \in (a;b) \setminus \{x\}\; \varphi_n \rightrightarrows \varphi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \lim_{t \to x_0,\, t \in (a;b)} \varphi_n(t) = \lim_{t \to x_0,\, t \in (a;b)} \varphi(t) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f'_n = f'$$

(При первом переходе мы воспользовались теоремой о предельном переходе в равномерно сходящихся функциональных последовательностях)

8.7 *Пример ван дер Вардена

Существует непрерывная, нигде не дифференцируемая функция

8.8 Радиус сходимости степенных рядов

8.8.1 Определение

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum c_n(z-z_0)^n$ называется

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}},\ 0 \leqslant R \leqslant +\infty$$

8.8.2 Теорема Коши-Адамара

Если $R \in [0; +\infty]$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum c_n(z-z_0)^n$, то

1. $(\forall z\ |z-z_0| < R)$ ряд $\sum c_n(z-z_0)^n$ сходится, причём абсолютно
2. $(\forall z\ |z-z_0| > R)$ ряд $\sum c_n(z-z_0)^n$ расходится

Доказательство.
1) $R > 0$. По признаку Коши $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n(z-z_0)^n|} < 1 \Rightarrow \sum c_n(z-z_0)^n$ сходится

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n(z-z_0)^n|} = (\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|})\cdot|z-z_0| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

2) $R < +\infty$. По ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ признака Коши

$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n(z-z_0)^n|} > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|c_n(z-z_0)^n| \neq 0$$

8.9 Равномерная сходимость степенных рядов, вторая теорема Абеля, её следствие

8.9.1 Равномерная сходимость степенных рядов

Если ряд $\sum c_n(z-z_0)^n$ имеет радиус сходимости R, то он сходится равномерно в любом круге $|z-z_0| \leqslant r$, $0 < r < R$

Доказательство.
$|z_1-z_0| = r \Rightarrow \sum c_n(z-z_0)^n$ сходится абсолютно, т.е. $\sum |c_n|r^n$ сходится
$(\forall z\ |z-z_0| \leqslant r)\ |c_n(z-z_0)^n| \leqslant |c_n|r^n \Rightarrow$ по признаку Вейертштрасса искомый ряд равномерно сходится.

8.9.2 Вторая теорема Абеля

Если ряд $\sum c_n(z-z_0)^n$ сходится в точке z_1, то его сумма - непрерывная функция на $[z_0; z_1]$

Доказательство. $z \in [z_0; z_1] \Leftrightarrow z = z_0 + t(z_1 - z_0)$, $t \in [0;1]$
$\sum c_n t^n (z_1-z_0)^n$ - равномерно сходится на $[0;1]$?
$\sum c_n(z_1-z_0)^n$ - равномерно сходится по t на $[0;1]$ (по условию).
Последовательность $\{t_n\}$ монотонна и равномерно ограничена
Значит ряд сходится равномерно по признаку Абеля.

8.9.3 Следствие второй теоремы Абеля

Если произведение по Коши сходящихся рядов $\sum a_n$, $\sum b_n$ сходится, то оно равно произведению сумм этих рядов.

Доказательство.

Рассмотрим степенные ряды $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$. По второй Теореме Абеля суммы этих рядов непрерывны на $[0;1]$. Радиусы сходимости этих рядов $\geqslant 1$. Значит, они сходятся абсолютно при $|z| < 1$.

Произведение по Коши этих степенных рядов $\sum \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum c_n z^n$, где $\sum c_n$ - произведение по Коши рядов $\sum a_n$, $\sum b_n$

Получили, что $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$, $\sum z_n \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ - непрерывны на $[0;1]$, причём $\forall z \in [0;1)$ $\sum z_n \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (\sum a_n z^n) \cdot (\sum b_n z^n)$. Тогда, устремив $z \to 1$ получим, что

$$\sum \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$$

8.10 Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Пусть $f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$, $|x-x_0| < R$, $R > 0$ - радиус сходимости степенного ряда. Тогда

1. $f(x)$ бесконечно дифференцируема $\forall x$ $|x-x_0| < R$, причём
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$$
2. $\forall x$, $|x-x_0| < R$ $f \in R[x_0;x] \wedge \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$
3. Все степенные ряды, упомянутые в пунктах 1 и 2, имеют радиусы сходимости R
4. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Доказательство.

3)
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot a_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$$

2) $|x-x_0| = r < R \Rightarrow$ ряд сходится равномерно на $[x_0, x] \Rightarrow$ по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов получаем, что можем проинтегрировать этот ряд.

1) Радиус сходимости ряда $\sum a_n n(x-x_0)^{n-1}$ равен R, значит на $|x-x_0| \leqslant r$, $r < R$ он сходится равномерно (по теореме о равномерной сходимости степенных рядов) $\Rightarrow$ (По теореме о дифференцируемости функциональных последовательностей) $f'(x) = \sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$

4) По результатам первого пункта $f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$, что и требовалось доказать

8.11 Достаточное условие представления функции рядом Тейлора

Если f бесконечно дифференцируема на $(x_0 - h; x_0 + h)$, причём $\exists M\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in (x_0 - h; x_0 + h)\ |f^{(n)}(x)| \leqslant M$, то $f(x)$ представима своим рядом Тейлора в точке x_0 при всех $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$

Доказательство.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \xi \in (x; x_0)$$

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \to 0$$

8.12 Представление основных элементарных функций рядами Маклорена

1. $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$
$$x \in (-h; h)\ |(e^x)^{(n)}| = |e^x| \leqslant e^h$$
2. $\sin x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$
$$|(\sin x)^{(n)}| = |\sin(x + n\frac{\pi}{2})| \leqslant 1$$
3. $\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n!)}$, $x \in \mathbb{R}$
$$|(\cos x)^{(n)}| = |\cos(x + n\frac{\pi}{2})| \leqslant 1$$
4. $\cosh x = \sum \frac{x^{2n}}{(2n!)}$, $x \in \mathbb{R}$
5. $\sinh x = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$
6. $\ln(1 + x) = \sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $-1 < x \leqslant 1$
7. $(1 + x)^\alpha = \sum \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $-1 < x < 1$

9 О мерах Лебега и Жордана

9.1 Кольцо элементарных множеств, их объём и его свойства

9.1.1 Брус

Пусть $\langle a,\, b\rangle$ - конечный промежуток ($[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$)

Брусом в $\mathbb{R}^n$ назовём $\prod\limits_{k=1}^{n} \langle a_k,\, b_k\rangle$

9.1.2 Объём бруса

Объёмом бруса P назовём число $|P| = \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$

9.1.3 Элементарное множество

M называется элементарным множеством, если оно представимо дизъюнктным объединением конечного числа брусьев

9.1.4 Объём элементарного множества

Объёмом элементарного множества $M = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} P_i$ называется $|M| = \sum\limits_{i=1}^{m} |P_i|$

9.1.5 Лемма об операциях с элементарными множествами

Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность элементарных множеств является элементарным множеством.

Доказательство.

1. Заметим, что пересечение двух брусьев P, Q является брусом $\Rightarrow M \cap Q$ - элементарное множество $\Rightarrow M \cap N$ - элементарное, если M, N - элементарные множества.
2. $P \setminus Q = P \cap Q^c$; $Q^c = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$, где Q^c - дополнение Q до $\mathbb{R}^n$, а Q_i - брус, возможно бесконечный.
   $M \setminus Q = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} (M_i \setminus Q)$
   $M \setminus N = M \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} Q_i = M \cap \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i^c = \bigcap\limits_{i=1}^{m} (M \cap Q_i^c)$
3. $M \cup Q = (M \setminus Q) \sqcup Q$
4. $M \triangle N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$

9.1.6 Следствие леммы

Совокупность элементарных множеств является кольцом множеств. В качестве единицы будем брать $K_I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$

9.1.7 Свойства объёма на кольце элементарных множеств

1. Определение объёма корректно
2. Если M и N - элементарные, то $|M \cap N| + |M \cup N| = |M| + |N|$
3. $M \subset N \Rightarrow |M| \leqslant |N|$
4. (Конечная аддитивность) Если $M = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} M_i$, то $|M| = \sum\limits_{i=1}^{n} |M_i|$

Доказательство.

1. $M = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} P_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j = \bigsqcup\limits_{i,j} P_i \cap Q_j$

   Геометрически понятно, что в результате такого представления сумма объёмов будет одна и та же.

2. Геометрически очевидно

3. Геометрически очевидно

4. Геометрически очевидно

9.2 Счётная аддитивность объёма на кольце элементарных множеств

9.2.1 ε брусы

ε-растяжением бруса $P = \prod\limits_{k=1}^{n} \langle a_k,\, b_k \rangle$ называется брус

$$P^{\varepsilon} = \prod_{k=1}^{n} (\frac{a_k + b_k}{2} - \frac{b_k - a_k}{2} \cdot \sqrt[n]{1+\varepsilon},\ \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{a_k - b_k}{2} \cdot \sqrt[n]{1+\varepsilon})$$

$$|P^{\varepsilon}| = |P| \cdot (1+\varepsilon)$$

ε-сжатием бруса $P = \prod\limits_{k=1}^{n} \langle a_k,\, b_k \rangle$ называется брус

$$P^{-\varepsilon} = \prod_{k=1}^{n} [\frac{a_k + b_k}{2} - \frac{b_k - a_k}{2} \cdot \sqrt[n]{1-\varepsilon},\ \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{a_k - b_k}{2} \cdot \sqrt[n]{1-\varepsilon}]$$

$$|P^{-\varepsilon}| = |P| \cdot (1-\varepsilon)$$

9.2.2 Счётная, или σ-аддитивность объёма на кольце элементарных множеств

Если элементарное множество M представлено дизъюнктным объединением счётного числа элементарных множеств M_i, то $|M| = \sum |M_i|$

Доказательство.

1. Хотим получить $M \subset \bigsqcup M_i \Rightarrow |M| \leqslant \sum |M_i|$

$$M_i = \bigsqcup_{j} P_{i,\,j} \Rightarrow \bigsqcup M_i = \bigsqcup P_k = M = \bigsqcup_{i=1}^{m} Q_i$$

$$\alpha_k := \frac{\varepsilon}{|P_k| \cdot 2^k}$$

$$Q_i^{-\varepsilon},\ P_k^{\alpha_k}\ \bigsqcup_{i=1}^{m} Q_i^{-\varepsilon} \subset \bigcup P_k^{\alpha_k}$$

$$\bigsqcup_{i=1}^{m} Q_i^{-\varepsilon} \text{ - компактное } \Rightarrow \exists k_1,\, \ldots,\, k_N\ \bigsqcup_{i=1}^{m} Q_i^{-\varepsilon} \subset \bigcup_{j=1}^{N} P_{k_j}^{\alpha_{k_j}}$$

$$|\bigsqcup_{i=1}^{m} Q_i^{-\varepsilon}| = |M| \cdot (1-\varepsilon)$$

$$|\bigcup_{j=1}^{N} P_{k_j}^{\alpha_{k_j}}| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |P_{k_j}| \cdot (1+\alpha_{k_j}) = \sum_{j=1}^{N} |P_{k_j}| + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{k_j} \cdot |P_{k_j}| \leqslant \sum |P_k| + \varepsilon = \sum |M_i| + \varepsilon$$

В итоге получаем, что $|M| \cdot (1-\varepsilon) \leqslant \sum |M_i| + \varepsilon$, устремляя $\varepsilon \to 0$ получим то, что хотели

2. Хотим получить $\bigsqcup M_i \subset M \Rightarrow |M| \geqslant \sum |M_i|$

$$\forall N \in \mathbb{N} \bigcup_{i=1}^{N} M_i \subset M \Rightarrow |M| \geqslant \sum |M_i|$$

9.3 Свойства внешних мер Жордана и Лебега

9.3.1 Определение внешней меры Жордана

Внешней мерой Жордана множества A называется

$$\mu^*_{\mathcal{J}}(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} M_i} \sum_{i=1}^{r} |M_i|$$

где inf берётся по всем покрытиям множества A конечным числом элементарных множеств

9.3.2 Определение внешней меры Лебега

Внешней мерой Лебега множества A называется

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup M_i} \sum |M_i|$$

где inf берётся по всем покрытиям множества A счётным числом элементарных множеств

9.3.3 Основные свойства внешних мер Жордана и Лебега

1. $\forall$ элементарного множества A выполняется:

$$|A| = \mu^*_{\mathcal{J}}(A) = \mu^*(A)$$

2. Если $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i \Rightarrow \mu^*_{(\mathcal{J})}(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{r} \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_i)$

3. $\forall A$ $\mu^*(A) \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(A)$

4. Если $A \subset \bigcup A_i \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum \mu^*(A_i)$

Доказательство.

1. По определению меры, как инфимума по покрытиям
$$A \subset A \Rightarrow \mu^*_{(\mathcal{J})}(A) \leqslant |A|$$
По свойствам объёма на кольце элементарных множеств.
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} M_i \Rightarrow |A| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |M_i| \Rightarrow |A| \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(A)$$
По счётной аддитивности объёма на кольце элементарных чисел
$$A \subset \bigcup |M_i| \Rightarrow |A| \leqslant \sum |M_i| \Rightarrow |A| \leqslant \mu^*(A) \Rightarrow |A| = \mu^*(A)$$

2. По определению
$$\mu^*_{\mathcal{J}}(A_i) = \inf_{A_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{r_i} M_{i,\,j}} \sum_{j=1}^{r_i} |M_{i,\,j}|$$
По свойствам инфимума
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \{M_{i,\,j}\}_{j=1}^{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} |M_{i,\,j}| < \mu^*_{\mathcal{J}}(A_i) + \frac{\varepsilon}{r}$$
По свойствам операций в кольце элементарных множеств
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{r_i} |M_{i,\,j}| \Rightarrow \mu^*_{\mathcal{J}}(A) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r_i} |M_{i,\,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \mu^*_{\mathcal{J}}(A_i) + \varepsilon$$
Для меры Лебега доказательство аналогичное (в некоторых местах верхняя r заменяется на ∞)

3. Очевидно, что, следуя определению, все наборы, которые учитываются в инфимуме меры Жорждана, учитываются и в мере Лебега, но к ним добавляются ещё счётные наборы. Значит, инфимум на большем множестве, не может стать больше. Ч.т.д.

4. По определению
$$\mu^*(A_i) = \inf_{A_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_{i,\,j}} \sum_{j=1}^{\infty} |M_{i,\,j}|$$
По свойствам инфимума
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \{M_{i,\,j}\}_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |M_{i,\,j}| < \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$
Если ряд $\sum \mu^*_{\mathcal{J}}(A_i)$ расходится, то доказывать нечего, иначе

По счётной аддитивности в кольце элементарных множеств
$$A \subset \bigcup \bigcup A_{i,\,j} \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum \sum |M_{i,\,j}| < \sum \mu^*(A_i) + \varepsilon$$

9.4 Внутрення мера, её основные свойства

9.4.1 Определение

Для $A \subset K_I$ $\mu_*^{(\mathcal{J})}(A) = 1 - \mu^*_{(\mathcal{J})}(A')$, где $A' = K_I \setminus A$

9.5 Основное свойство внутренней меры

$\forall A \subset K_I$ $\mu_*^{(\mathcal{J})}(A) \leqslant \mu^*_{(\mathcal{J})}(A)$
Доказательство.
По основным свойствам внешней меры

$$K_I \subset A \cup A' \Rightarrow \mu^*_{\mathcal{J}}(K_I) \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(A) + \mu^*_{\mathcal{J}}(A') \Rightarrow 1 - \mu^*_{\mathcal{J}}(A') \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(A) \Rightarrow \mu_*^{(\mathcal{J})}(A) \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(A)$$

9.6 Критерий измеримости

Множество $A \subset K_I$ измеримо по Лебегу (Жордану) т.и.т.т.к.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists M_\varepsilon \; \mu^*_{(\mathcal{J})}(A \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Доказательство. Достаточность.
По конечной аддитивности элементарных множеств

$$M_\varepsilon \subset K_I, \, M'_\varepsilon = K_I \setminus M_\varepsilon \Rightarrow |M_\varepsilon| + |M'_\varepsilon| = 1$$

По основным свойствам внешней меры

$$A \subset (A \setminus M_\varepsilon) \cup M_\varepsilon; \Rightarrow \mu^*_{(\mathcal{J})}(A) \leqslant \mu^*_{(\mathcal{J})}(A \triangle M_\varepsilon) + \mu^*_{(\mathcal{J})}(M_\varepsilon)$$

$$A' \subset (A' \setminus M'_\varepsilon) \cup M'_\varepsilon \Rightarrow \mu^*_{(\mathcal{J})}(A') \leqslant \mu^*_{(\mathcal{J})}(M_\varepsilon \triangle A) + \mu^*_{(\mathcal{J})}(M'_\varepsilon)$$

$$K_I \subset A \cup A' \Rightarrow 1 = \mu^*_{(\mathcal{J})}(K_I) \leqslant \mu^*_{(\mathcal{J})}(A) + \mu^*_{(\mathcal{J})}(A') \leqslant 2\varepsilon + 1$$

$\varepsilon > 0$ - произвольное $\Rightarrow \mu^*_{(\mathcal{J})}(A) + \mu^*_{(\mathcal{J})}(A') = 1$
Необходимость.
По основным свойствам внешней меры

$$\mu^*_{(\mathcal{J})}(A) = \mu_*^{(\mathcal{J})}(A)$$

По свойствам инфимума

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \{P_i\} \sum_i |P_i| < \mu^*_{(\mathcal{J})}(A) + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \{Q_j\} \sum_j |Q_j| < \mu^*_{(\mathcal{J})}(A') + \varepsilon$$

(Для Лебега) Т.к. ряд $\sum |P_i|$ сходится, то

$$\exists r \; \sum_{i=r+1}^{\infty} |P_i| < \varepsilon; \; P_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{r} P_i$$

Иначе (Для Жордана)

$$P_\varepsilon = \bigcup_i P_i$$

$$\mu^*_{(\mathcal{J})}(A \triangle P_\varepsilon) = \mu^*_{(\mathcal{J})}((A \setminus P_\varepsilon) \cup (P_\varepsilon \setminus A))$$

(Левая скобка)

$$A \setminus P_\varepsilon \subset \bigcup_{i=r+1}^{\infty} P_i \Rightarrow \mu^*(A \setminus P_\varepsilon) \leqslant \sum_{i=r+1}^{\infty} |P_i| < \varepsilon$$

Аналогично доказываем

$$\mu^*(A' \setminus Q_\varepsilon) < \varepsilon$$

(Правая скобка)
Хотим получить

$$\mu^*(P_\varepsilon \setminus A) < 5\varepsilon$$

По аналогии с r для $\{P_n\}$ введём

$$\exists s \ \sum_{i=s+1}^{\infty} |Q_i| < \varepsilon; \ Q_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{s} Q_j$$

$$P_\varepsilon \setminus A \subset (P_\varepsilon \cap Q_\varepsilon) \cup (A' \setminus Q_\varepsilon)$$

$$|P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon| = |P_\varepsilon| + |Q_\varepsilon| - |P_\varepsilon \cap Q_\varepsilon|$$

$$K_I \subset (\bigcup P_i) \cup (\bigcup Q_j) = P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon \cup (\bigcup_{i=r+1}^{\infty} P_i) \cup (\bigcup_{j=s+1}^{\infty} Q_j)$$

$$1 = \mu^*(K_I) \leqslant \mu^*(P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon) + \mu^*(\bigcup_{i=r+1}^{\infty} P_i) + \mu^*(\bigcup_{j=s+1}^{\infty})Q_j < \mu^*(P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon) + 2\varepsilon \Rightarrow \mu^*(P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon) > 1 - 2\varepsilon$$

$$|P_\varepsilon| \leqslant \sum |P_i| < \mu^*_{(\mathcal{J})}(A) + \varepsilon$$

$$|Q_\varepsilon| \leqslant \sum |Q_j| < \mu^*_{(\mathcal{J})}(A') + \varepsilon$$

$$|P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon| < 1 + 2\varepsilon - (1 - 2\varepsilon) = 4\varepsilon$$

Получили, что $\mu^*_{(\mathcal{J})}(A \triangle P_\varepsilon) < 6\varepsilon$

9.7 Алгебра измеримых множеств

Семейство измеримых по Лебегу (Жордану) подмножеств K_I образуют алгебру множеств.

Доказательство.

Пусть A, B - измеримы

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists M_\varepsilon, \, N_\varepsilon \ \mu^*_{(\mathcal{J})}(A \triangle M) < \varepsilon \wedge \mu^*_{(\mathcal{J})}(B \triangle N) < \varepsilon$$

$$(A \cup B) \triangle (M_\varepsilon \cup N_\varepsilon) = ((A \cup B) \setminus (M_\varepsilon \cup N_\varepsilon)) \cup ((M_\varepsilon \cup N_\varepsilon) \setminus (A \cup B)) \subset$$

$$((A \setminus M_\varepsilon) \cup (B \setminus N_\varepsilon)) \cup ((M_\varepsilon \setminus A) \cup (N_\varepsilon \setminus B)) = (A \triangle M) \cup (B \triangle N) \Rightarrow$$

$$\mu^*_{(\mathcal{J})}((A \cup B) \triangle (M_\varepsilon \cup N_\varepsilon)) < 2\varepsilon$$

A измеримо $\Leftrightarrow$ A' измеримо

$$(A \cap B)' = A' \cup B';\ A \setminus B = A \cap B';\ A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

9.8 Конечная аддитивность мер Жордана и Лебега

Если A_1, A_2, ... - измеримые по Лебегу (Жордану) непересекающиеся подмножества K_I, то $\mu^*_{(\mathcal{J})}(\bigsqcup\limits_{i=1}^{N} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_i)$

Доказательство.

$$N = 2;\ A_1 \bigsqcup A_2$$

Критерий измеримости

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists M_{i,\varepsilon}\ \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_i \triangle M_{i,\varepsilon}) < \varepsilon$$

Выберем элементарное множество, которым будем приближаться к $A_1 \bigsqcup A_2$

$$M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon}$$

$$A_i \subset (A_i \triangle M_{i,\varepsilon}) \cup M_{i,\varepsilon};\ M_{i,\varepsilon} \subset (M_{i,\varepsilon} \triangle A_i) \cup A_i$$

$$\mu^*_{(\mathcal{J})}(A_i) \leqslant \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_i \triangle M_{i,\varepsilon}) + \mu^*_{(\mathcal{J})}(M_{i,\varepsilon});\ \mu^*_{(\mathcal{J})}(M_{i,\varepsilon}) \leqslant \mu^*_{(\mathcal{J})}(M_{i,\varepsilon} \triangle A_i) + \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_i) \Rightarrow$$
$$|\mu^*_{(\mathcal{J})}(M_{i,\varepsilon}) - \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_i)| < \varepsilon$$

$$A_1 \sqcup A_2 \subset (A_1 \triangle M_{1,\varepsilon}) \cup (A_2 \triangle M_{2,\varepsilon}) \cup (M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon});\ M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon} \subset (M_{1,\varepsilon} \triangle A_1) \cup (M_{2,\varepsilon} \triangle A_2) \cup (A_1 \sqcup A_2) \Rightarrow$$

$$|\mu^*_{(\mathcal{J})}(A_1 \sqcup A_2) - \mu^*_{(\mathcal{J})}(M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon})| < 2\varepsilon$$

$$M_{1,\varepsilon} \cap M_{2,\varepsilon} \subset ((M_{1,\varepsilon} \triangle A_1) \cup A_1) \cap ((M_{2,\varepsilon} \triangle A_2) \cup A_2) =$$
$$((M_{1,\varepsilon} \triangle A_1) \cup A_1) \cap (M_{2,\varepsilon} \triangle A_2)) \cup ((M_{1,\varepsilon} \triangle A_1) \cap A_2) \subset (M_{2,\varepsilon} \cup A_2) \cup (M_{1,\varepsilon} \triangle A_1) \Rightarrow$$
$$\mu^*_{(\mathcal{J})}(M_{1,\varepsilon} \cap M_{2,\varepsilon}) \leqslant \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_1 \triangle M_{1,\varepsilon}) + \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_2 \triangle M_{2,\varepsilon}) = 2\varepsilon$$

$$A_1 \sqcup A_2 \subset A_1 \sqcup A_2$$
$$\mu^*_{(\mathcal{J})}(A_1 \sqcup A_2) \leqslant \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_1) + \mu^*_{(\mathcal{J})}(A_2) = \mu_{(\mathcal{J})}(A_1) + \mu_{(\mathcal{J})}(A_2) < |M_{1,\varepsilon}| + |M_{2,\varepsilon}| + 2\varepsilon =$$
$$|M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon}| + 4\varepsilon < \mu_{(\mathcal{J})}(A_1 \sqcup A_2) + 6\varepsilon$$

9.9 σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств

Если $A_1,\, A_2,\, \ldots$ - измеримые по Лебегу подмножества K_I, то $\bigcup A_i$ также измерима по Лебегу

Доказательство.

Сначала рассмотрим $\bigsqcup A_i$

$$\forall m \in \mathbb{N} \bigsqcup A_i \subset K_I \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \leqslant 1 \Rightarrow \sum \mu(A_i) \leqslant 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists r \in \mathbb{N} \sum_{i=r+1}^{\infty} \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

По критерию измеримости

$$\exists M_{i,\varepsilon},\, i \in \{1,\, \ldots,\, r\} \;\mu(A_i \triangle M_{i,\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2r}$$

$M = \bigcup\limits_{i=1}^{r} M_{i,\varepsilon}$ - элементарное множество

$$(\bigsqcup A_i)\triangle M \subset (\bigsqcup_{i=1}^{r} A_i \backslash M) \cup (\bigsqcup_{i=r+1}^{\infty} A_i) \cup (M \backslash \bigsqcup_{i=1}^{r} A_i) \subset \bigsqcup_{i=1}^{r} (A_i \backslash M_{i,\varepsilon}) \cup (\bigsqcup_{i=r+1}^{\infty} A_i) \cup \bigsqcup_{i=1}^{r} (M_{i,\varepsilon} \backslash A_i) \Rightarrow$$

$$\mu^*((\bigsqcup A_i)\triangle M) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \mu^*(A_i \triangle M) + \sum_{i=r+1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

9.10 σ-аддитивность меры Лебега

Если $A_1,\, A_2,\, \ldots$ - измеримые по Лебегу подмножества K_I, то $\mu(\bigsqcup A_i) = \sum \mu(A_i)$

Доказательство.

$$A := \bigsqcup A_i$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i \subset A \Rightarrow \mu(\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \leqslant \mu(A) \Rightarrow \sum \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$$

$$A \subset \bigsqcup A_i \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum \mu^*(A_i)$$

9.11 Непрерывность меры Лебега

9.11.1 Пределы последовательностей множеств

$$\sup_i \{A_i\} := \bigcup A_i; \; \inf_i \{A_i\} := \bigcap A_i$$

$$\varlimsup_{i\to\infty} A_i := \lim_{i\to\infty} \sup_{k \geqslant i} \{A_k\}; \; \varliminf_{i\to\infty} A_i := \lim_{i\to\infty} \inf_{k \geqslant i} \{A_k\}$$

9.11.2 Лемма о возрастающей подпоследовательности

Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ - измеримые по Лебегу подмножества K_I. Тогда

$$\mu(\bigcup A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

Доказательство.

$$\bigcup A_i = \bigsqcup \widetilde{A_i},\ \widetilde{A_i} = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$$

По Теореме о σ-аддитивности меры Лебега

$$\mu(A) = \mu(\bigcup A_i) = \mu(\bigsqcup \widetilde{A_i}) = \sum \mu(\widetilde{A_i}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(\widetilde{A_i}) = \lim_{N\to\infty} \mu(\bigsqcup_{i=1}^{N} \widetilde{A_i}) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)$$

9.11.3 Лемма об убывающей подпоследовательности

Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ - измеримые по Лебегу подмножества K_I. Тогда

$$\mu(\bigcap A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

Доказательство.

$$B_i := A_1 \setminus A_i,\ i = 1, \dots$$

$$\varnothing = B_1 \subset B_2 \subset \dots \Rightarrow \mu(\bigcup B_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i)$$

$$\bigcup B_i = \bigcup (A_1 \setminus A_i) = A_1 \setminus (\bigcap A_i)$$

$$\mu(A_1) - \mu(\bigcap A_i) = \mu(\bigcup B_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(A_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

9.11.4 Лемма о свойствах $\limsup$

Если $A_1, A_2, \dots$ - измеримые по Лебегу подмножества K_I, то

$$\varlimsup_{i\to\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu(\varlimsup_{i\to\infty} A_i)$$

Доказательство.

$$\mu(\varlimsup_{i\to\infty} A_i) = \mu(\lim_{i\to\infty} \sup_{k\geqslant i}\{A_k\}) = \lim_{i\to\infty} \mu(\sup_{k\geqslant i}\{A_k\}) \geqslant \lim_{i\to\infty} \sup_{k\geqslant i} \mu(A_k) = \varlimsup_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

9.11.5 Лемма о свойствах $\liminf$

Если $A_1, A_2, \dots$ - измеримые по Лебегу подмножества K_I, то

$$\varliminf_{i\to\infty} \mu(A_i) \geqslant \mu(\varliminf_{i\to\infty} A_i)$$

Доказательство.

$$\mu(\varliminf_{i\to\infty} A_i) = \mu(\lim_{i\to\infty} \inf_{k\geqslant i}\{A_k\}) = \lim_{i\to\infty} \mu(\inf_{k\geqslant i}\{A_k\}) \leqslant \lim_{i\to\infty} \inf_{k\geqslant i} \mu(A_k) = \varliminf_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

9.11.6 Непрерывность меры Лебега

Если последовательность измеримых по Лебегу подмножеств K_I имеет предел $A = \lim\limits_{i\to\infty} A_i$, то A измерима по Лебегу, причём

$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

Доказательство.

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\mu(A_i) \leqslant \mu(\overline{\lim_{i\to\infty}} A_i) = \mu(\underline{\lim_{i\to\infty}} A_i) \leqslant \underline{\lim_{i\to\infty}}\mu(A_i) \leqslant \overline{\lim_{i\to\infty}}\mu(A_i)$$

9.12 Структура открытых множеств в $\mathbb{R}^n$

Каждое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ представимо счётным (или конечным) объединением непересекающихся брусьев.

Доказательство.

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\vec{l}\in\mathbb{Z}^n} \prod_{k=1}^{n} [\frac{l_k}{2^m}; \frac{l_k+1}{2^m}),\ m = 1,\ 2,\ \ldots;\ \vec{l} = (l_1,\ \ldots,\ l_m)$$

$$P_{\vec{l},m} := \prod_{k=1}^{n} [\frac{l_k}{2^m}; \frac{l_k+1}{2^m})$$

Пусть G - открытое множество.

$$M_0 = \bigcup_{\vec{l}\colon P_{\vec{l},\,0}\subset G} P_{\vec{l},0};\ M_m = \bigcup_{\vec{l}\colon P_{\vec{l},\,m}\subset G} (P_{\vec{l},m} \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} M_j)$$

$$G \supset \bigcup M_m$$

$$\forall x \in G\ \exists r > 0\ U_r(x) \subset G\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists \vec{l} \in \mathbb{Z}^n\ x \in \prod_{i=1}^{n} [\frac{l_k}{2^m}; \frac{l_k+1}{2^m}) \subset U_r(x)$$

9.13 *Структура измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$

Пусть A - измеримое по Лебегу множество, $\mu(A) < +\infty$. Тогда:

$$A = \bigcap \bigcup A_{i,\,j} \setminus A_0$$

где $A_{i,\,j}$ - элементарные,

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ A_{i,1} \subset A_{i,2} \subset \ldots;$$

$$B_i := \bigcup A_{i,j},\ B_1 \supset B_2 \supset \ldots;$$

причём $\mu(B_1) < +\infty$, $\mu(A_0) = 0$

9.14 Критерий измеримости по Жордану

Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда $\mu^*_{\mathcal{J}}(\delta A) = 0$

Доказательство. Необходимость.

Пусть A - измеримо по Жордану.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{элементарные множества } E_1,\ E_2\ E_2 \subset A \subset E_1 \wedge |E_1 \setminus E_2| < \varepsilon$$

$$|E_1| = |\text{cl } E_1|,\ |E_2| = |\text{int } E_2|$$
$$\text{cl } A \subset \text{cl } E_1 \Rightarrow \mu^*_{\mathcal{J}}(\text{cl } A) \leqslant |E_1|;\ \text{int } A \supset \text{int } E_2 \Rightarrow \mu_*^{\mathcal{J}}(\text{int } A) \geqslant |E_2|$$
$$\mu^*_{\mathcal{J}}(\text{cl } A) - \mu_*^{\mathcal{J}}(\text{int } A) < \varepsilon;\ \delta A = \text{cl } A \setminus \text{int } A \Rightarrow \mu^*_{\mathcal{J}}(\delta A) < \varepsilon$$

Достаточность.

$$\mu^*_{\mathcal{J}}(\delta A) = 0;\ \mu^*_{\mathcal{J}}(A) \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(\text{cl } A) = \mu(\text{cl } A) = \mu(\text{int } A) + \mu(\delta A) = \mu(\text{int } A) \leqslant \mu_*^{\mathcal{J}}(A) \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(A)$$

9.15 Канторово множество

Существует замкнутое множество, неизмеримое по Жордану

Доказательство.

$$I_0 = [0;1]$$
$$\mathcal{J}_1 := (\frac{1}{3};\frac{2}{3});\ I_1 = I_0 \setminus \mathcal{J}_1$$
$$\mathcal{J}_2 := \mathcal{J}_{2,1} \cup \mathcal{J}_{2,2} = (\frac{1}{9};\frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9};\frac{8}{9});\ I_2 = I_1 \setminus \mathcal{J}_2$$

$$C := \bigcap I_i;\ \mu(C) = \lim_{i\to\infty} |I_i| = 0$$
$$|I_i| = |I_0 \setminus (\mathcal{J}_1 \cup \dots \cup \mathcal{J}_i)| = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots - \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^i}{1 - \frac{2}{3}}$$

Данное множество измеримо по Жордану, НО мы можем выкидывать не $\frac{1}{3}$, а $\frac{2}{5}$ на каждом шаге, получим, что

$$|I_i| = |I_0 \setminus (\mathcal{J}_1 \cup \dots \cup \mathcal{J}_i)| = 1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{25} - \frac{8}{625} - \dots - \frac{2^i}{5^i} = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - (\frac{2}{5})^i}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{А вот для такого множества C' получим, что } 0 = \mu_*^{\mathcal{J}}(C') < \mu^*_{\mathcal{J}}(C') = \frac{2}{3}$$

9.16 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Рассмотрим $[0;1]$. Введём отношение эквивалентности на нём: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$$[0;1] = \bigsqcup_{\alpha} Cl_{\alpha}$$

Пусть E образовано из элементов различных классов (по одному из каждого). Занумеруем все числа из $[-1;1]:\ \mathbb{Q} \cap [-1;1] = \{r_n\}$.

Предположим, что E измеримо по Лебегу. Тогда $\forall m \in \mathbb{N}\, E_m := \{y:\ y = x + r_m,\ x \in E\}$ измеримо по Лебегу, причём $\forall m \in \mathbb{N}\, \mu(E_m) = \mu(E)$.

Докажем, что $\forall k \neq j\ E_k \cap E_j = \varnothing$. От противного, $y_0 \in E_k \cap E_j \Leftrightarrow y_0 = x_k + r_k = x_j + r_j (x_k \in E,\ x_j \in E) \Rightarrow x_k - x_j = r_j - r_k \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_k \sim x_j$.

Теперь $\forall y \in [0;1] \Rightarrow \exists \alpha_0\ y \in Cl_{\alpha_0}\ \exists x \in E \cap Cl_{\alpha_0} \Rightarrow \exists m:\ y = x + r_m \Rightarrow y = E_m$.

$$\bigsqcup E_m \supset [0;1],\ \bigsqcup E_m \subset [-1;2]$$

$$1 \leqslant \sum \mu(E_m) = \sum \mu(E) \leqslant 3$$

10 Об измеримых функциях

10.1 Измеримые функции, возможность использования разных неравенств в определении

10.1.1 Лебегово множество

Лебеговым множеством функции $f:\ E \to \mathbb{R},\ E \subset \mathbb{R}^n$, называется

$$E_a(f) = \{x \in E \mid f(x) < a\},\ a \in \mathbb{R}$$

10.1.2 Измеримая функция

Функция $f:\ E \to \mathbb{R}$, E - измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, называется измеримой, если $\forall x \in \mathbb{R}\ E_a(f)$ - измеримое.

10.1.3 Возможность другого определения измеримых функций

Совокупность измеримых фунций не изменится, если в определении Лебегова множества заменить знак $<$ на любой из знаков $\leqslant, >, \geqslant$

Доказательство.

Знаки $\geqslant, <$, а также $\leqslant, >$ дают эквивалентные определения, т.к.

$$\{x \in E \mid f(x) \geqslant a\} = E \setminus E_a(f)$$

Из

$$\{x \in E \mid f(x) \leqslant a\} = \bigcap E_{a+\frac{1}{n}}(f);\ E_a(f) = \bigcup \{x \in E \mid f(x) \leqslant a - \frac{1}{n}\}$$

следует, что знаки $<$ и $\leqslant$ дают одинаковые определения.

10.2 Арифметические операции с измеримыми функциями, измеримость сложной функции

1. Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна множестве значений измеримой на $E \subset \mathbb{R}^n$ функции g, то $f \circ g$ измерима.

2. Если f, g измеримы на E, то $f \pm g$, $f \cdot g$ и (на своей области определения) $\frac{f}{g}$ измеримы.

Доказательство.

1. Рассмотрим Лебегово множество $E_a(f \circ g) = \{x \in E \mid f(g(x)) < a\}$.

   f - непрерывна на $g(E)$ $\Rightarrow$ $f^{-1}((-\infty; a))$ - открыт в $g(E)$, т.е. $\exists G$ - открытое в $\mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty; a)) = g(E) \cap G$

   По Теореме о структуре открытых множеств $G = \bigsqcup \mathcal{J}_m$ - промежутки.

$$(f \circ g)^{-1}((-\infty; a)) = \{x \in E \mid g(x) \in f^{-1}((-\infty; a))\} = \bigsqcup \{x \in E \mid g(x) \in \mathcal{J}_m\} \Rightarrow$$

   композиция измерима, т.к. $\mathcal{J}_m$ - промежуток, который может быть представлен пересечением Лебегова множества и $\{x \in E \mid f(x) > a\}$.

2.

$$E_a(f+g) = \{x \in E \mid f(x) + g(x) < a\} = \{x \in E \mid f(x) < a - g(x)\} \Rightarrow$$
$$E_a(f+g) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E \mid f(x) < r \wedge r < a - g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} E_r(f) \cap E_{a-r}(g)$$

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

   квадраты измеримы по первой части теоремы, всё остальное - по предыдущему пункту.

$$\frac{f}{g} = f \cdot (\frac{1}{x} \circ g)$$

10.3 *Пример неизмеримой композиции измеримой и непрерывной функции

Пусть $\psi(x) := \frac{1}{2}(\varphi(x) + x)$, где $\varphi(x)$ - канторова лестница, тогда $\psi(x)$ - измеримая, непрерывная и монотонная, значит $\exists \psi^{-1}(x)$, которая непрерывная, монотонная, но не измеримая. Тогда пусть $g(x) := \psi^{-1}(x)$, $f(x) = \chi_A(x)$, где $A \subset C$, $\psi(C)$ - неизмеримое

10.4 Предельный переход и измеримость

Если $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(x)$ - измеримы на E. $\forall x \in E\ \exists \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$, то $f(x)$ измерима на E.

Доказательство.

Докажем, что из измеримости

$$\forall m \in \mathbb{N}\ f_m(x) \Rightarrow \sup_m f_m(x) \text{ тоже измерима}$$

$$\{x \in E \mid \sup_m f_m(x) \leqslant a\} = \bigcap_m \{x \in E \mid f_m(x) \leqslant a\}$$

Отсюда

$$\varlimsup_{m\to\infty} f_m(x) = \inf_{k\geqslant m} \sup_k f_k(x)$$

которая измерима.

10.5 Представление измеримых функций пределами последовательностей ступенчатых

10.5.1 Ступенчатая функция

Ступенчатой функцией назовём измеримую функцию, имеющую конечное или счётное множество значений.

10.5.2 О представлении неотрицательной функции пределами последовательностей ступенчатых функций

Если $f : E \to [0;+\infty)$ измерима на E, то она представима пределом равномерно сходящихся на E последовательности ступенчатых функций $\{h_n(x)\}$ неубывающей или невозрастающей $\forall x \in E$.

Доказательство.

$$[0;+\infty) = \bigsqcup [\frac{l}{2^k}; \frac{l+1}{2^k}),\ k = 1,\ 2,\ \dots$$

$$E_{l,m} := \{x \in E \mid f(x) \in [\frac{l}{2^m}; \frac{l+1}{2^m})\}$$

$$E_{l,m} = E_{\frac{l+1}{2^m}}(f) \setminus E_{\frac{l}{2^m}}(f)$$

$$h_m(x) := \frac{l}{2^m},\ x \in E_{l,m},\ l = 0,\ 1,\ \dots$$

$$\forall x \in E\ 0 \leqslant f(x) - h_m(x) < \frac{1}{2^m}$$

$$\forall x \in E_{l,m}\ h_m(x) = \frac{l}{2^m}\ h_{m+1}(x) = \frac{2l}{2^{m+1}} \vee h_{m+1}(x) = \frac{2l+1}{2^{m+1}} \Rightarrow h_{m+1}(x) \geqslant h_m(x)$$

10.6 Связь сходимости по мере и почти всюду

10.6.1 Определение сходимости по мере

Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится к f по мере, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \lim_{m\to\infty} \mu\{x \in E \mid |f_m(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0$$

10.6.2 Теорема о связи сходимости по мере и почти всюду

Если последовательность измеримых, почти всюду конечных на измеримом множестве E конечной меры функций $\{f_m\}$ сходится почти всюду на E к конечной почти всюду функции f, то f_m сходится к f по мере на E.

Доказательство.

$$E_0 := \{x \in E \mid (\exists m \in \mathbb{N}\, f_m(x) = \pm\infty) \vee (f_m(x) \not\to f(x)) \vee (f(x) = \pm\infty)\}$$

По условию $\mu(E_0) = 0$

$$E_m(\varepsilon) := \{x \in E \mid |f_m(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

$$x \notin E_0 \Rightarrow x \notin \overline{\lim_{m\to\infty}} E_m(\varepsilon)$$

$$x \notin E_0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists m_0 \in \mathbb{N}\, \forall m > m_0\, |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow x \notin E_m(\varepsilon) \Rightarrow x \notin \overline{\lim_{m\to\infty}} E_m(\varepsilon) \Rightarrow$$

Используя лемму о свойствах $\limsup$ (В доказательстве теоремы о непрерывности меры Лебега)

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m(\varepsilon) \subset E_0 \Rightarrow \overline{\lim_{m\to\infty}} \mu(E_m(\varepsilon)) \leqslant \mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m(\varepsilon)) \leqslant \mu(E_0) = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \mu(E_m(\varepsilon)) = 0$$

10.7 Теоремы Рисса, Егорова* и Лузина*

10.7.1 Теорема Рисса

Если $f_m \rightrightarrows f$ на E, то $\exists$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся почти всюду на E к f.

Доказательство.

$$f_m \rightrightarrows f \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \lim_{m\to\infty} \mu(E_m(\varepsilon)) = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \exists n_k\ \mu(E_{n_k}(\frac{1}{k})) < \frac{1}{2^k}$$

$$Q := \bigcap \bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k}(\frac{1}{k}) = \lim_{m\to\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k}(\frac{1}{k});\ \mu(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k}(\frac{1}{k})) \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} \mu(E_{n_k}) \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$\mu(Q) = \lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k}(\frac{1}{k})) = 0$$

$$x_0 \in E \setminus Q \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}\, x_0 \notin \bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k}(\frac{1}{k}) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}\, \forall p \geqslant m\ x_0 \notin E_{n_p}(\frac{1}{p}) \Rightarrow$$

$$\exists m \in \mathbb{N}\, \forall p \geqslant m\ |f_{m_p}(x) - f(x)| < \frac{1}{p}$$

10.7.2 *Теорема Егорова

Если последовательность измеримых на конечной меры E и ограниченных, почти всюду конечных функций f_m сходится почти всюду на E к конечной почти всюду функции f, то

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists E_\varepsilon \subset E\ \mu(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon\ f_m \rightrightarrows f \text{ на } E_\varepsilon$$

10.7.3 *Теорема Лузина

Если f - измеримая, почти всюду конечная на $[a;b]$ функция, то

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \varphi(x) \in C[a;b] \wedge \mu(\{x \in [a;b] \mid f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$$

10.8 Структура открытых множеств в $\mathbb{R}$

Каждое открытое множество на прямой в $\mathbb{R}$ представимо объединением не более чем счётного числа непересекающихся открытых интервалов.

Доказательство.

Пусть G - открытое множество, т.ч. $G \subset \mathbb{R}$. Введём на G отношение эквивалетности $x \sim y$, если $(x;y) \in G$

$G = \bigsqcup Cl_\sim$. Рассмотрим $Cl_\sim$. Пусть $a = \inf Cl_\sim$, $b = \sup Cl_\sim$. Докажем, что $Cl_\sim = (a;b)$

$$\forall c \in (a;b)\ \exists a_1 \in Cl_\sim \cap (a;c)\ \exists b_1 \in Cl_\sim \cap (c;b) \Rightarrow (a_1;b_1) \subset G \Rightarrow c \in G;\ (a_1;c) \subset G \Rightarrow c \in Cl_\sim$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ от противного: } a \in Cl_\sim \Rightarrow a \in G \Rightarrow \exists \delta\ (a-\delta; a+\delta) \subset G \Rightarrow \exists a - \frac{\delta}{2} \in Cl_\sim$$

Противоречие.

11 О геометрических приложениях интеграла Римана

11.1 Вычисление площадей

11.1.1 Определение площади плоских фигур

Площадь - мера Жордана в $\mathbb{R}^2$. Фигуры, измеримые по Жордану, называются квадрируемыми.

11.2 Вычисление площади подграфика

Пусть f - неотрицательная, интегрируемая по Риману на $[a;b]$. Тогда её подграфик (криволинейная трапеция) $D_f = \{(x;y) : \ a \leqslant x \leqslant b, \, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ квадрируем, причём его площадь равна $\int\limits_a^b f(x)dx$, и наоборот.

Доказательство.

$$L(P,f) \leqslant \mu_*^{\mathcal{J}}(D_f) \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(D_f) \leqslant U(P,f)$$

По критерию интегрируемости

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists P \; U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon \Rightarrow \mu^*_{\mathcal{J}} = \mu_*^{\mathcal{J}}$$

11.2.1 Площадь фигуры в полярных координатах

Если фигура D задана, как $D = \{(r;\varphi) : \ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \, 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}$, где r, φ - полярные координаты, $r(\varphi)$ интегрируема по Риману на $[\varphi_1, \varphi_2]$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$, то D квадрируема, причём

$$\mu_{\mathcal{J}}(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$$

Доказательство.

$$f(\varphi) := \frac{1}{2}r^2(\varphi); \; L(P,\, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\Phi_k = S_1 \leqslant \mu_*^{\mathcal{J}}(D) \leqslant \mu^*_{\mathcal{J}}(D) \leqslant U(P,f) = S_2$$

$$m_k = \inf_{\varphi \in [\Phi_{k-1};\Phi_k)} f(\varphi)$$

(Нарисовать рисунок и показать геометрический смысл функции $f(x)$, S_1 - площадь внутри графика, составленная из секторов с радиусом инфимума; S_2 - соответственно, из секторов с радусом супремума на полуинтервалах)

11.3 Объём тела вращения

11.3.1 Определение объёма

Объём - мера Жордана в $\mathbb{R}^3$. Тело, измеримое по Жордану, называется кубируемым.

11.3.2 Вычисление объёма тела вращения

Если $f(x)$ - неотрицательная, интегрируемая по Риману на $[a;b]$, то тело, получаемое вращением её подграфика D_f вокруг оси Ox кубируемо, причём

$$V_{D_f} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Доказательство.

Начинаем вращать элементарные множества, получившиеся в разбиении, когда мы вычисляли площадь подграфика.

$$F(x) := \pi f^2(x);\ L(P,\, F) = \pi \sum_{i=1}^{n} m_k^2 \Delta x_k \leqslant \mu_*^{\mathcal{J}}(V_{D_f}) \leqslant \mu_{\mathcal{J}}^*(V_{D_f}) \leqslant U(P, F)$$

где нижняя сумма Дарбу $F(x)$ - это сумма объёмов цилиндров, получившихся от вращения элементарных множеств

11.4 *Сапог Шварца

Опредление площади поверхности тела вращения, как точной верхней грани площадей всех вписанных многогранников **неверно**. Контрпример - сапог Шварца.

11.5 Площадь поверхности тела вращения

11.5.1 Правильное определение площади поверхности тела вращения

Площадью поверхности тела вращения называется предел площадей поверхностей суммы усечённых конусов, полученной вращением ломаных, вписанных во вращаемую кривую, если максимальная из длин проекций звеньев ломаных на ось вращения стремится к нулю.

11.5.2 Вычисление площади поверхности тела вращения

Площадь поверхности тела вращения из условия теоремы о вычислении объёма тела вращения с дополнительным условием непрерывности f' на $[a; b]$ равна

$$S_{D_f} = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Доказательство.

Пусть S_p - площадь поверхности суммы усечённых конусов, соответствующих разбиению $P:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$F(x) := 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$S_p = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{x-1})^2} =$$

$$\pi \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\Delta x_k$$

$$S(P,\, F,\, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$$

$$|f'(x)| \leqslant M$$

$f-$ р-но н-на на $[a;b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x,\, t \in [a;b],\, |x-t| < \delta\ |f(x)-f(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2\pi(b-a)\sqrt{1+M^2}}$

$$|S_p - S(P,\, F,\, \{\xi_k\})| = |2\pi \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) + f(x_k) - 2f(\xi_k))\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k| \leqslant$$

$$2\pi \sum_{k=1}^{n} (|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)| + |f(x_k) - f(\xi_k)|)\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k <_{\Delta(P)\to 0} \varepsilon$$

12 О неявных функциях

12.1 Теорема о неявной функции, определяемой одним уравнением

Пусть $F(\vec{x},\, y) = F(x_1,\, \dots,\, x_n,\, y)$ дифференцируема в окрестности точки $(\vec{x}^0,\, y_0) = (x_1^0,\, \dots,\, x_n^0,\, y_0)$, её производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в этой окрестности, $F(\vec{x}^0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}^0, y_0) \neq 0$. Тогда $\forall$ достаточно малого $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что

$$\forall \vec{x} \in K_{\delta,\, \vec{x}^0} = \prod_{k=1}^{n} (x_k^0 - \delta,\, x_k^0 + \delta)\ \exists! y = \varphi(x)\ \forall (\vec{x}, y) \in K_{\delta, \vec{x}^0} \times (y_0 - \varepsilon,\, y_0 + \varepsilon)$$

$$F(\vec{x}, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(\vec{x}) \wedge \varphi(x) \in D(\{\vec{x}^0\})$$

Доказательство.

Для определённости будем считать, что $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}^0, y_0) > 0$.

$$\exists \text{ окрестность точки } (\vec{x}^0, y_0) : \frac{\partial F}{\partial y} > 0$$

Рассмотрим $F(\vec{x}^0,\, y)$. Тогда $\forall$ достаточно малого

$$\varepsilon > 0\ F(\vec{x}^0,\, y + \varepsilon) > 0 \wedge F(\vec{x}^0,\, y - \varepsilon) < 0$$

Рассмотрим $F(\vec{x},\, y_0)$. Тогда $\exists$ достаточно малая

$$\delta > 0\ \forall \vec{x} \in K_{\delta, \vec{x}^0} \exists! y = \varphi(\vec{x})\ F(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) = 0$$

В роли точки $(\vec{x}^0,\, y_0)$ можем брать любую точку из нашей окрестности, значит достаточно доказать только для $\vec{x}^0$.

$\varphi(\vec{x})$ непрерывна в точке $\vec{x}^0$ по построению.

F дифференцируема в точке $(\vec{x}^0,\, y_0)$:

$$F(\vec{x}, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x}^0,\, y_0) \cdot (x_k - x_k^0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}^0,\, y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha(\vec{x}, y)$$

$$\alpha(\vec{x}, y) = o(|(\vec{x},\, y) - (\vec{x}^0,\, y_0)|),\ (\vec{x}, y) \to (\vec{x}^0,\, y_0)$$

$$\alpha(\vec{x}, y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha(\vec{x},\, y) \cdot (x_j - x_j^0)^2}{|(\vec{x}, y) - (\vec{x}^0, y_0)|^2} + \frac{\alpha(\vec{x},\, y) \cdot (y - y_0)^2}{|(\vec{x}, y) - (\vec{x}^0, y_0)|^2}$$

$$\alpha_j(\vec{x}, y) := \frac{\alpha(\vec{x},\, y) \cdot (x_j - x_j^0)}{|(\vec{x}, y) - (\vec{x}^0, y_0)|^2};\ \beta(\vec{x}, y) := \frac{\alpha(\vec{x},\, y) \cdot (y - y_0)}{|(\vec{x}, y) - (\vec{x}^0, y_0)|^2}$$

$$F(\vec{x}, y) = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_k} + \alpha_k(\vec{x}, y))(x_k - x_k^0) + (\frac{\partial F}{\partial y} + \beta(\vec{x}, y))(y - y_0)$$

Подставляя $y = \varphi(\vec{x})$ в данное выражение будем использовать

$$\widetilde{\alpha_k}(\vec{x}) = \alpha_k(\vec{x}, \varphi(\vec{x}));\ \widetilde{\beta}(\vec{x}) = \beta(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))$$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x}^0, \varphi(\vec{x}^0)) + \widetilde{\alpha_k}(\vec{x}^0))(x_k - x_k^0) + (\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}^0, \varphi(\vec{x}^0)) + \widetilde{\beta}(\vec{x}))(\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}^0))$$

$$\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}^0) = \sum_{k=1}^{n} (-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x}^0, \varphi(\vec{x}^0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}^0, \varphi(\vec{x}^0))} + \gamma_k(\vec{x}))(x_k - x_k^0)$$

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x}^0, \varphi(\vec{x}^0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}^0, \varphi(\vec{x}^0))} + \gamma_k(\vec{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x}^0, \varphi(\vec{x}^0)) + \widetilde{\alpha_k}(\vec{x})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}^0, \varphi(\vec{x}^0)) + \widetilde{\beta}(\vec{x})} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \lim_{\vec{x} \to \vec{x}^0} \gamma_k(\vec{x}) = 0$$

$$\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}^0) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k - x_k^0) + \gamma(\vec{x}), \gamma(\vec{x}) = o(|\vec{x} - \vec{x}^0|), \vec{x} \to \vec{x}^0$$

12.2 Теорема о неявных функциях, определяемых системой уравнений

12.2.1 Определение Якобиана

Якобианом отображения $\vec{F}\,:\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ по переменным $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ в точке $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in \mathcal{D}$ называется

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1,\, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

где все производные взяты в точке $(\vec{x}^0, \vec{y}^0)$

12.2.2 Теорема о неявных функциях, заданных системой уравнений

Если функции $F_1,\, \ldots,\, F_m$ дифференцируемы в некоторой окрестности $(\vec{x}^0, \vec{y}^0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ непрерывны в этой окрестности, $F_i(\vec{x}^0, \vec{y}^0) = 0$, $i = 1, \ldots, m$; $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(\vec{x}^0,\, \vec{y}^0) \neq 0$, то $\forall$ достаточно маленьких

$$\varepsilon_1 > 0,\, \ldots,\, \varepsilon_m > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{x} \in K_{\delta, \vec{x}^0}\ \exists! \forall i \in \{1,\, \ldots,\, m\}\ y_i = \varphi_i(\vec{x})$$

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in K_{\delta, \vec{x}^0} \times \prod_{j=1}^{m} (y_j^0 - \varepsilon_j; y_j^0 + \varepsilon)\ F_j(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\, \ldots, m\}\ y_i = \varphi_i(\vec{x}) \wedge \varphi_i \in D(K_{\delta, \vec{x}^0})$$

Доказательство.

Индукция по m. Случай $m=1$ был разобран в теореме о неявной функции.

Предположим, что для $m-1$ утверждение теоремы верно. БОО будем считать, что главный минор матрицы Якобиана $\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(\vec{x}^0,\,\vec{y}^0)$ также не равен нулю.

$$\forall \varepsilon_1>0,\,\ldots,\,\varepsilon_{m-1}>0\;\exists\delta_1>0\;\forall(\vec{x},y_m)\in K_{\delta,\,(\vec{x}^0,\,y_m^0)}\;\exists!\forall i\in\{1,\,\ldots,m-1\}\;y_i=\psi(\vec{x},y_m)$$

$$\forall(\vec{x},y_m;y_1,\,\ldots,y_{m-1})\in K_{\delta_1,\,(\vec{x}^0,\,y_m^0)}\times\prod_{j=1}^{m-1}(y_j^0-\varepsilon_j;y_j^0+\varepsilon)\;F_k(\vec{x},\,\vec{y})=0\Leftrightarrow y_l=\psi_l(\vec{x},y_m);\;l,k=1,\,\ldots,m-1$$

Рассмотрим функцию $\Phi(\vec{x},y_m):=F_m(\vec{x},\psi_1(\vec{x},y_m),\,\ldots,\psi_{m-1}(\vec{x},y_m),y_m)$. Она очевидно подходит под условия теоремы о неявной функции, кроме факта, что $\frac{\partial\Phi}{\partial y_m}\neq 0$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_m}=\frac{\partial F_m}{\partial\psi_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial\psi_{m-1}}\cdot\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\neq 0\text{ в точке }(\vec{x}^0,y_m^0)\qquad(1)$$

Продифференцируем тождества $F_j(\vec{x},\psi_1(\vec{x},y_m),\,\ldots,\psi_{m-1}(\vec{x},y_m),y_m)=0;\;j=1,\,\ldots,m-1$ по y_m

$$0=\frac{\partial F_j}{\partial\psi_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m}+\cdots+\frac{\partial F_j}{\partial\psi_{m-1}}\cdot\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial F_j}{\partial y_m},\;j=1,\,\ldots,m-1\qquad(2)$$

$$\Delta:=\frac{\partial(F_1,\,\ldots,\,F_m)}{\partial(y_1,\,\ldots,\,y_m)}$$

$\Delta_1,\,\ldots,\Delta_m$ - алгебраические дополнения элементов m-го столбца в Матрице Якобиана Δ

Умножим (1) на Δ_m, и выражения (2) на $\Delta_j,j=1,\,\ldots,m-1$, все определители берутся в $(\vec{x}^0,\vec{y}^0)$

$\Delta_m\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y_m}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m}(\Delta_m\cdot\frac{\partial F_m}{\partial\psi_1}+\sum\limits_{j=1}^{m-1}(\Delta_j\cdot\frac{\partial F_j}{\partial\psi_1}))+\cdots+\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m}(\Delta_m\cdot\frac{\partial F_m}{\partial\psi_{m-1}}+\sum\limits_{j=1}^{m-1}(\Delta_j\cdot\frac{\partial F_j}{\partial\psi_{m-1}}))+\Delta_m\cdot\frac{\partial F_m}{\partial y_m}+\sum\limits_{j=1}^{m-1}(\Delta_j\cdot\frac{\partial F_j}{\partial y_m})\Rightarrow$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_m}=\frac{\Delta}{\Delta_m}\neq 0\text{ в точке }(\vec{x}^0,\vec{y}^0)$$

$$\forall\text{ достаточно малого }\varepsilon_m>0\exists\delta_2>0\forall\vec{x}\in K_{\delta_2,\,\vec{x}^0}\exists!y_m=\varphi_m(\vec{x})\;\forall(\vec{x},y_m)\in K_{\delta_2,\vec{x}^0}\times(y_m^0-\varepsilon_m;y_m^0+\varepsilon_m)$$

$$F_j(\vec{x},\vec{y})=0\Leftrightarrow y_j=\psi(\vec{x},y_m);\;F_m(\vec{x},\psi_1(\vec{x},y_m),\,\ldots,\psi_{m-1}(\vec{x},y_m),y_m)=\Phi(\vec{x},y_m)=0\Leftrightarrow y_m=\varphi_m(\vec{x})$$

Положим $\varphi_j(\vec{x}):=\psi_j(\vec{x},\varphi_m(\vec{x})),j=1,\,\ldots,m-1$

Выбор $\varphi_j(\vec{x}),j=1,\,\ldots,m-1$ зависит от $\psi_j(\vec{x},y_m),j=1,\,\ldots,m-1,\;\varphi_m(\vec{x})$, которые выбирались единственным образом, значит и $\varphi_j(\vec{x}),j=1,\,\ldots,m-1$ выбираются единственным образом

12.3 Локальная обратимость отображений

12.3.1 О локальной обратимости

Если $\vec{\varphi} : D \to \mathbb{R}^n, D$ - область в $\mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ и якобиан $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$ в точке $\vec{x}^0$, то в некоторой окрестности $y^0 = \vec{x}^0$ существует обратное отображение, дифференцируемое в данной окрестности.

Доказательство.

$$F_j(\vec{x}, \vec{y}) := \varphi_j(\vec{x}) - y_j, j = 1, \ldots, n; \; \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0 \Rightarrow$$
$$\exists! x_j = \psi_j(y_1, \ldots, y_n), j = 1, \ldots, n$$

$$y_j = \varphi_j(\vec{x}) \Leftrightarrow F_j(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow x_j = \psi_j(\vec{y}), j = 1, \ldots, n$$

12.3.2 Локальность, но не глобальность

Ненулевой якобиан гарантирует лишь локальную обратимость, но не глобальную.

Доказательство.

$$x = r\cos\varphi; \; y = r\sin\varphi$$
$$(r, \varphi) \to (x, y) \Rightarrow [0; +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\cos\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0 \text{ на } (0; +\infty) \times \mathbb{R}$$

Заметим, что $\forall k \in \mathbb{Z}$ $(r, \varphi + 2k\pi)$ значения отображения совпадают $\Rightarrow$ оно необратимо.

12.4 Необходимое условие локального экстремума

Если $\vec{x}^0$ - точка локального экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в окрестности точки $\vec{x}^0$, то $df(\vec{x}^0) = 0$.

Доказательство.

Рассмотрим для фиксированного $k = 1, \ldots, n$

$$\psi(x_k) = f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0), \; \vec{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

ψ дифференцируема в некоторой окрестности x_k^0, x_k^0 - точка локального экстремума $\psi \Rightarrow$ (По Т.Ферма)

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \; \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0) = 0 \Rightarrow df(\vec{x}^0) = 0$$

12.5 Достаточное условие локального экстремума

Если $\vec{x}^0$ - стационарная точка функции f, дважды дифференцируемой в точке $\vec{x}^0$, то

1. Если $d^2f(\vec{x}^0)$ - положительно определённая квадратичная форма, то $\vec{x}^0$ - точка строгого локального минимума

2. Если $d^2f(\vec{x}^0)$ - отрицательно определённая квадратичная форма, то $\vec{x}^0$ - точка строгого локального максимума

3. Если $d^2f(\vec{x}^0)$ - неопределённая квадратичная форма, то $\vec{x}^0$ - не является точкой локального экстремума

Доказательство.

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0) + df(\vec{x}^0) + \frac{d^2f(\vec{x}^0)}{2} + o(\rho^2), \rho \to 0, dk_k = x_k - x_k^0, \rho = |\vec{x} - \vec{x}^0|$$

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}d^2f(\vec{x}^0) + o(\rho^2), \rho \to 0;\ \xi_k = \frac{x_k - x_k^0}{\rho} \Rightarrow$$

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = \frac{1}{2}\rho^2(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i\xi_j + o(1)), \rho \to 0$$

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}^0)\xi_i\xi_j;\ \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$$

$$\min_{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2=1} F(\xi_1, \ldots, \xi_n) =: C > 0$$

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) \geqslant \frac{C\rho^2}{4} > 0$$

2. Аналогично первому пункту

3. $\exists(\xi_1^1, \ldots, \xi_n^1), (\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2)$

$$F(\xi_1^1, \ldots, \xi_n^1) > 0;\ F(\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2) < 0$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \vec{x}^1, \vec{x}^2 \in U_\varepsilon(\vec{x}^0)(f(\vec{x}^1) - f(\vec{x}^0) > 0) \wedge (f(\vec{x}^2) - f(\vec{x}^0) < 0)$$

12.6 Необходимое условие условного минимума

Пусть $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, m < n$ - дифференцируемые в окрестности точки $\vec{x}^0$ функции, выполнены равенства $\varphi_j(\vec{x}^0) = 0, j = 1, \ldots, m$ и ранг матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ максимален. Если точка $\vec{x}^0$ - точка локального экстремума при наличии связей $\varphi_j(\vec{x}) = 0$, то существует и при том единственным набор множителей функции Лагранжа, такой, что $(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ - стационарная точка функции Лагранжа.

Доказательство.

$\vec{x}^0$ - локальный экстремум $\Rightarrow (x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ - точка локального экстремума функции

$$F(x_{m+1}, \ldots, x_n) \Rightarrow dF(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0)dx_j = 0, dx_j = d\psi_j, j = 1, \ldots, m \Leftrightarrow$$

$$d\varphi_j(\vec{x}^0) = 0, j = 1, \ldots, m;\ df + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j d\varphi_j = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}^0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\vec{x}^0)) dx_j = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}^0) dx_i$$

Чтобы достичь правого равенства, потребуем, чтобы

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\vec{x}^0) = 0$$

Т.к. ранг матрицы из условия максимален, то её главный минор ненулевой $\Rightarrow$ $\exists! \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0\ (x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0) = \vec{\tilde{x}}^0$ - стационарная точка.

Это действительно так, т.к. $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{\tilde{x}}^0) dx_i = 0$ - для этого мы находили $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$,

$$\sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{\tilde{x}}^0) dx_i = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0) dx_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\vec{\tilde{x}}^0) d\lambda_i = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\vec{x}) d\lambda_i = 0$$

12.7 Достаточное условие условного экстремума

Пусть функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\vec{x}^0$, причём ранг матрицы якобиана $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}$ в точке $\vec{x}^0$ максимален, и $(\vec{x}^0, \vec{\lambda}^0)$ - стационарная точка функции Лагранжа $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$. Если $d^2_{\vec{x}\vec{x}} L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ является положительно (отрицательно) определённой квадратичной формой переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, подчинённых продифференцированным уравнениям связи $d\varphi_j(\vec{x}^0) = 0, j = 1, \ldots, m$, то $\vec{x}^0$ является точкой строго условного минимума (максимума) функции f при наличии связей $\varphi_j(\vec{x}^0), j = 1, \ldots, m$. Если же $d^2_{\vec{x}\vec{x}} L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ является неопределённой квадратичной формой от тех же переменных, то $\vec{x}^0$ не является точкой условного локального экстремума.

Доказательство.

БОО, будем считать главный минор матрицы якобиана из условия $\neq 0$.

Как уже было сказано, задача на условный экстремум $\Leftrightarrow$ задаче на безусловный экстремум функции $F(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(\psi_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \psi_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n)$

Достаточное условие локального экстремума F: $d^2F(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ - положительно (отрицательно) определённая квадратичная форма.

$$d^2F = d(dF) = d(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j) = d(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j} dx_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} d^2 x_i =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

13 О дифференциальном исчислении в ЛНП

13.1 Линейные ограниченные операторы

Линейный оператор $A : E_1 \to E_2, E_1, E_2$ - л.н.п., называется ограниченным, если $\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in E_1\; \|Ax\|_{E_2} \leqslant M \cdot \|x\|_{E_1}$

13.2 Норма оператора

Пусть A - линейный ограниченный оператор из $E_1 \to E_2$. inf множества всех M, т.ч. $\|Ax\|_{E_2} \leqslant |M| \cdot \|x\|_{E_1}$, называется нормой оператора $A, \|A\|$

$$\|A\| = \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E_1\; \|Ax\|_{E_2} \leqslant |M| \cdot \|x\|_{E_1}\}$$

13.3 Сильная производная, её единственность

13.3.1 Определение

Отображение $F : G \to E_2$, где G - открытое мн-во в E_1, E_1, E_2 - л.н.п., называется дифференцируемым в точке $x \in G$, если $\exists$ линейный оператор $L_x : E_1 \to E_2$, т.ч.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall h \in E_1, \|h\|_{E_1} < \delta\; \|F(x+h) - F(x) - L_x h\|_{E_2} \leqslant \varepsilon \|h\|_{E_1}$$

Выражение $L_x h$ называется сильным дифференциалом (дифференциалом Фреше), оператор L_x называется сильной производной (производной Фреше).

13.3.2 Единственной сильной производной

Производная Фреше отображения F единственна

Доказательство. Предположим, что L_x^1, L_x^2 - две производные Фреше отображения F

$$\|L_x^1 h - L_x^2 h\|_{E_2} \leqslant \|F(x+h) - F(x) - L_x^1 h\|_{E_2} + \|F(x+h) - F(x) - L_x^2 h\|_{E_2} = o(\|h\|_{E_1}), h \to 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall h \in E_1, 0 < \|h\|_{E_1} < \delta\; \frac{\|(L_x^1 - L_x^2)h\|_{E_2}}{\|h\|_{E_1}} < \varepsilon$$

$$e := \frac{h}{\|h\|_{E_1}}\; \|(L_x^1 - L_x^2)e\|_{E_2} < \varepsilon \Rightarrow \|L_x^1 - L_x^2\| < \varepsilon \Rightarrow L_x^1 = L_x^2$$

13.3.3 Производная композиции отображений

Если $F : \Omega \to E_2, \Omega$ - открытое в E_1, дифференцируемо в $\vec{x} \in \Omega, F(\Omega)$ - открытое, $G : F(\Omega) \to E_3$ - дифференцируемо в $F(\vec{x})$, то $G \circ F$ дифференцируемо в $\vec{x}$, причём

$$(G \circ F)' = G'(F(x)) \circ F'(x)$$

Доказательство.

$$F(x+h) - F(x) - F'(x)h =: \alpha(h);\; G(y+\eta) - G(y) - G'(y)\eta =: \beta(\eta)$$

$$\alpha(h) = o(\|h\|_{E_1}), h \to 0;\ \beta(\eta) = o(\|\eta\|_{E_2}), \eta \to 0 \Rightarrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta_1 > 0, \forall\eta \in E_2\ \|\eta\|_{E_2} < \delta_1\ \|\beta(\eta)\|_{E_3} < \varepsilon\|\eta\|_{E_2}$$

$$\eta := F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \alpha(h)$$
$$\|\eta\|_{E_2} \leqslant \|F'(x)\|\|h\|_{E_1} + \|\alpha(h)\|_{E_2} < \delta_1 \text{ при } \|h\|_{E_1} < \delta_2$$

$$\|G \circ F(x+h) - G \circ F(x) - G'(y)F'(x)h\|_{E_3} \leqslant$$
$$\|G(y+\eta) - G(y) - G'(y)(F'(x)h + \alpha(h))\|_{E_3} + \|G'(y)\alpha(h)\|_{E_3} < \frac{\varepsilon_1}{2}\|\eta\|_{E_2} + \|G'(y)\|\|\alpha(h)\|_{E_2} \leqslant$$
$$\frac{\varepsilon_1}{2}\|F'(x)\| + \frac{\varepsilon_1}{2}\|\alpha(h)\|_{E_2} + \|G'(y)\|\|\alpha(h)\|_{E_2} < \varepsilon_1\|h\|_{E_1}$$

13.4 Производные высших порядков отображений

Если отображение $F' : G \to \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$ дифференцируемо в точке x, то F дважды дифференцируемо в точке x, причём $(F')'$ называется (сильной) второй производной отображения F, F''_x

F''_x - линейно ограниченный оператор $E_1 \to \mathcal{L}(E_1 \to \mathcal{L}(E_1 \to E_2), F''_x \in \mathcal{L}(E_1 \to \mathcal{L}(E_1 \to \mathcal{L}(E_1 \to E_2))$

13.5 *Пример О.В.Бесова

Существует функция дважды дифференцируемая в точке, но не дифференцируема ни в какой окрестности этой точки

14 Об образах

14.1 Образ куба меньшей размерности

Пусть $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемая на области $\Omega \supset K_I \subset \mathbb{R}^n, n < m$. Тогда $\mu_{\mathcal{J}}(\vec{f}(K_I)) = 0$

Доказательство.

$M := \max\limits_{\vec{x} \in K_I} |\vec{f}'(x)|$. По лемме $\forall\vec{x}, \vec{y} \in K_I\ |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})| \leqslant M\sqrt{m}|\vec{x} - \vec{y}|$.

Разобьём K_I на N^n равных кубов со стороной $\delta = \frac{1}{N}$

$$|K_I| = \sum_{i=1}^{N^n} |K_{\delta,\, i}|$$

$$\max_{\vec{x}, \vec{y} \in K_{\delta,\, i}} |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})| \leqslant M\sqrt{mn}\delta \Rightarrow \vec{f}(K_{\delta,i}) \subset \text{ куб со стороной } 2M\sqrt{mn}\delta \Rightarrow$$

$$\mu^*_{\mathcal{J}}(\vec{f}(K_{\delta,i})) \leqslant (2M\sqrt{mn}\delta)^m \Rightarrow \mu^*_{\mathcal{J}}(\vec{f}(K_I)) \leqslant N^n(2M\sqrt{mn}\delta)^m = N^{n-m}(2M\sqrt{mn})^m \to_{N\to\infty} 0$$

14.2 Диффеоморфный образ измеримого по Лебегу множества

14.2.1 Определение диффеоморфизма

Диффеоморфизмом $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^n$, где D - область в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение такое, что $\vec{f}'(\vec{x})$ - невырожденная матрица $\forall \vec{x} \in D$

$$|\vec{f}'(\vec{x})| := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |grad\, \vec{f}_i(\vec{x})|$$

14.2.2 Теорема о диффеоморфном образе измеримого по Лебегу множества

Пусть $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^n$ - диффеоморфизм на области cl $E \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, где E - измеримое по Лебегу множество. Тогда $\vec{f}(E)$ измеримо по Лебегу.

Доказательство.

Рассмотрим брус $P \subset \Omega$. $P = \text{int } P \sqcup \partial P$.

$\vec{f}$ - дифференцируемо $\Rightarrow \vec{f}^{-1}$ - непрерывно.

$$\vec{f}(\text{int } P) \to_{\vec{f}^{-1}} \text{int } P;\ \vec{f}(\text{int } P) \text{ - открытое } \Rightarrow \text{ измеримое по Лебегу}$$

По предыдущей теореме $\mu(\vec{f}(\partial P)) = 0 \Rightarrow \mu(\vec{f}(P))$ - измеримо по Лебегу.

Из доказательства предыдущей теоремы

$$\mu(\vec{f}(K)) \leqslant M \cdot |K| \Rightarrow \mu(\vec{f}(P)) \leqslant M \cdot |P|\ (P = \bigcup_j K_j)$$

Пусть $\mu(E) = 0 \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bigsqcup P_k \supset E\ \sum |P_k| < \varepsilon \Rightarrow \mu(\vec{f}(\bigsqcup P_k)) \leqslant M \sum_k |P_k| < M\varepsilon \Rightarrow \mu(\vec{f}(E)) = 0$$

$$E = (\bigcup F_k) \cup F_0, \mu(F_0) = 0;$$

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \Rightarrow \vec{f}(F_1) \subset \vec{f}(F_2) \subset \dots;\ \vec{f}(\bigcup F_k) = \bigcup \vec{f}(F_k)$$

Т.к. $\forall k \in \mathbb{N}\ F_k$ - замкнутые (По теореме о структуре измеримых по Лебегу множеств), то $\bigcup \vec{f}(F_k)$ - измеримое по Лебегу, а $\mu(F_0) = 0 \Rightarrow \vec{f}(E)$ - измеримо по Лебегу.