

Karten der Erde Aktivitäten

Daniel Ramos*

MMACA (Museu de Matemàtiques de Catalunya)

übersetzt von Hannes Grimm–Strele†

7. Juli 2015

Zusammenfassung

In diesem Dokument sammeln wir Vorschläge, wie man mit den Werkzeugen, den Postern und der Software des Ausstellungsstücks „Karten der Erde“ arbeiten kann. Für eine Beschreibung der Werkzeuge verweisen wir auf das entsprechende Dokument. Dieses Dokument ist als Grundlage vorgesehen, von der ausgehend man entweder eine Vorlesung vorbereiten kann, oder das man ausgedruckt neben den einzelnen Stationen aufhängt. Diese Unterlagen sind in einem vorläufigen Zustand und noch nicht ausreichend getestet und überprüft. Daher können sie noch Tipp- und andere Fehler enthalten. Bitte lies dieses Dokument gründlich, bevor du „Karten der Erde“ in einer öffentlichen Ausstellung verwendst, und schreibe Probleme und Anregungen an den Autor.

Wir schlagen vor, das Dokument wie folgt zu verwenden: Abschnitt 1 ist als einführendes Material vorgesehen und sollte möglichst nahe beim Globus und den entsprechenden Materialien platziert werden. Die Abschnitte 2 bis 7 sollten direkt neben dem entsprechenden Poster aufgehängt werden. Der Abschnitt 8 ist thematisch dem Computer zugeordnet und sollte gelesen werden, nachdem man die Poster betrachtet hat. Das in Abschnitt 9 gesammelte Material ist als Ergänzung für interessierte Besucher vorgesehen.

*E-mail: daniel.ramos@mmaca.cat

†E-mail: hannes.grimm-strele@gmx.net

1 Was ist eine Kartenabbildung?

Eine *Kartenabbildung* oder *Projektion* ist eine flache Darstellung der Erdoberfläche. Als Karte bezeichnen wir das durch die Kartenabbildung erzeugte Bild der Erdoberfläche. Zwar gibt es unendlich viele solcher Abbildungen, jedoch verzerren alle die Darstellung in der einen oder anderen Weise. Abhängig von der beabsichtigten Nutzung der Karte möchten wir manche Eigenschaften der Erde in der Abbildung erhalten und müssen dafür den Verlust anderer Eigenschaften in Kauf nehmen. Beispielsweise ist es für Seekarten wichtig, den Winkel einer Route zum Nordpol wirklichkeitsgetreu darzustellen, damit wir ihn mit dem Ausschlag der Kompassnadel vergleichen können. Wenn wir hingegen Klimazonen auf der Erde darstellen wollen, wäre es sehr viel nützlicher eine Karte zu verwenden, die Flächeninhalte nicht verzerrt.

- Betrachte den Globus und einige wichtige Kartenabbildungen. Ähneln sie der Erdoberfläche? Kannst du die Verzerrung durch die Abbildung beschreiben oder sogar anhand der Eigenschaften der Abbildung erklären?
- Betrachte das Gitter auf dem Globus und auf den Karten. Wozu ist es da? Hilft es, die Verzerrungen zu erkennen?

Koordinaten

Das Koordinatensystem der Erde erlaubt, einen Punkt p auf der Oberfläche mit Hilfe zweier Zahlen zu identifizieren: *Längengrad* (λ) und *Breitengrad* (ϕ). Auf der Erdoberfläche gibt es feste Bezugspunkte: den Nord- und den Südpol definiert durch die Erdachse, die Äquatorebene, die im rechten Winkel zur Erdachse steht und sie in ihrem Mittelpunkt schneidet, und die Halbebene, die das Greenwich Royal Observatory sowie die Erdache enthält. Der Längengrad ist der Winkel zwischen der Linie, die den Punkt p mit dem Erdmittelpunkt verbindet, sowie der Äquatorebene.

- Finde Längen- und Breitengrad auf der durchsichtigen Halbkugel.

Ein *Längenkreis* oder *Meridian* ist eine Linie mit festem Längengrad, während man Linien, entlang derer der Breitengrad sich nicht ändert, *Breitenkreise* nennt. Auf dem Globus sind Längen- und Breitenkreise mit jeweils 10° Abstand eingezeichnet.

Auf dem Globus kann man Entfernungen zwischen zwei Punkten entweder in Kilometern oder über die Bogenlänge messen, wobei man den Erdmittelpunkt als weiteren Eckpunkt wählt. Die Bogenlänge kann dann mittels der Formel $\text{Bogenlänge} = \text{Winkel} \cdot \text{Radius}$ berechnet werden.

- Versuche, vom Globus und den Karten die Koordinaten einiger Städte abzulesen.
- Verwende das biegbare Lineal, um einige Entfernungen zu messen. Beachte dabei, dass das Lineal zwei Skalen besitzt: eine in Kilometern und eine in Grad.

2 Die Platkarte

Die Platkarte ist die wahrscheinlich einfachste Kartenabbildung. Längen- und Breitengrad werden dabei als x - und y -Koordinate in der Ebene gewählt. Daher ist das Gitter auf der Platkarte quadratisch und die Gitterlinien haben gleichen Abstand. Ist diese Abbildung wirklichkeitsgetreu?

- Jedes Quadrat auf der Platkarte entspricht auf der Erdoberfläche einem Gebiet, dass 10° Differenz in Längen- und Breitengrad umfasst. Ist jedoch das Gitter auf der Erdoberfläche quadratförmig? Überprüfe die Seitenlänge eines „Quadrates“ nahe beim Äquator und nahe der Pole. Sind die Seiten gleich lang? Wie lange ist ein Bogen von 10° in einem Breitenkreis nahe beim Äquator, und wie lange bei 70° nördlicher Breite?
- Können wir das Maßband auf dieser Karte verwenden?

Um näher an der Wirklichkeit zu sein, sollte die Projektion des Gitters auf die Karte daher nicht quadratisch sein.

3 Die Mercator–Projektion

Diese Abbildung wurde 1569 von Gerardus Mercator erfunden und ist zweifellos die historisch gesehen wichtigste Kartenabbildung. Diese Abbildung wird oft standardmäßig für die Darstellung der Erdoberfläche verwendet. Betrachten wir ein „Gitterquadrat“ nahe bei den Polen, stellen wir fest, dass diese eher die Form von Rechtecken haben. Die Mercator–Projektion ist eine vertikale Verzerrung der Platkarte. Da die Breitenkreise länger zu sein scheinen als sie tatsächlich sind, werden sie im gleichen Maß gestreckt, so dass die Karte vertikal und horizontal in jedem Punkt gleichermaßen gestreckt ist. Flächen werden dabei stark verzerrt, dafür hat diese Abbildung eine andere wichtige Eigenschaft: Form und Winkel bleiben erhalten.

Für die Navigation ist Folgendes von zentraler Bedeutung. Wenn man mit dem Schiff von einer Stadt zu einer anderen segeln will und eine gerade Verbindungslinie auf einer von der Mercator–Projektion erzeugten Karte einzeichnet, schneidet diese Linie, *Loxodrome* genannt, die vertikalen Längengrade in einem konstanten, nach Norden zeigenden Winkel. Da Winkel durch die Abbildung erhalten werden, ist dieser Schnittwinkel genau der Winkel, der auf dem Kompass eingestellt werden muss, um zum Ziel zu kommen (abgesehen von dem kleinen Fehler durch den Unterschied zwischen magnetischem und geografischem Nordpol). Auf diese Art und Weise kann und konnte man jahrhundertlang einen „Kurs“ festlegen, um von einem Ort zu dem anderen zu navigieren. Allerdings ist die Loxodrome nicht die kürzeste Verbindung!

- Stelle dir vor, du wärst im 16. Jahrhundert und möchtest von Cadix im Süden von Spanien nach Caracas in Venezuela mit deiner Karavelle segeln. Welche Route ist am einfachsten für die Navigation? Verwende dazu den Winkelmesser für die Ebene.

- Stelle dir vor, du willst heutzutage von Athen in Griechenland nach Los Angeles in den USA fliegen. Wo verläuft die Loxodrome, die diese Städte verbindet?

In Wirklichkeit würdest das Flugzeug jedoch über Grönland fliegen. Warum? Suche auf dem Globus die kürzeste Strecke.

- Überprüfe mit den zwei Winkelmessern, dass die Winkel entlang der Loxodrome auf der Karte und auf dem Globus gleich sind.

4 Die Gall–Peters–Projektion

Die Mercator–Projektion hat im Vergleich zur Plattkarte den Vorteil, dass sie die Winkel erhält. Dafür verzerrt sie aber Flächen stark. Andere Kartenabbildungen wie die Gall–Peters–Projektion erhalten Flächen. Man nennt diese Abbildung auch die „Dritte Welt–Karte“, da Länder in Afrika und Südamerika sowie alle Gegenden nahe beim Äquator auf der Karte hervorstechen. Afrika ist auf der Karte größer als Europa, entsprechend den realen Größenverhältnissen. Dafür wird die Form nicht erhalten: Afrika ist nicht so schmal wie es auf der Karte zu sein scheint.

- Ist Nordamerika größer als Afrika oder umgekehrt? Beantworte diese Frage mit Hilfe der Gall–Peters–Projektion. Wie ist das Größenverhältnis unter der Mercator–Projektion? (Die Fläche Nordamerikas ist etwa $24\,709\,000\text{ km}^2$, die Fläche Afrikas etwa $30\,221\,532\text{ km}^2$.)
- Vergleiche die Form und die Größe der Kontinente mittels der Schablonen auf der Karte und auf dem Globus. Passen sie zusammen? Was passiert mit der Antarktis?

5 Die mittabstandstreue Azimutalprojektion

Diese Projektion nennt man auch „Flughafen–Abbildung“. In der aktuellen Einstellung ist Barcelona als Zentrum der Karte gewählt, aber diese Wahl ist beliebig und kann durch jeden anderen Ort ersetzt werden. Nachdem wir das Zentrum gewählt haben, zeichnen wir alle Punkte gleichen Abstands vom Zentrum auf konzentrische Kreise um das Zentrum, indem wir die Entfernung als Radius wählen. Daher wird auf der Karte die Entfernung jedes Punktes zu Barcelona korrekt dargestellt (alle anderen Entfernungen sind allerdings verzerrt!). Der Winkel zwischen der Verbindungslinie zwischen Barcelona und dem Zielpunkt und der vertikalen Richtung nach Norden ist ebenfalls korrekt. Daher ist diese Karte am Flughafen von Barcelona sehr nützlich, da man einfach erkennen kann, wie weit entfernt das Ziel ist und über welche Länder man fliegen wird. Man kann damit auch die Entfernungen verschiedener Städte von Barcelona vergleichen.

Wir können das Maßband nur dazu verwenden, Entfernungen von Barcelona aus zu messen; für alle anderen Strecken wird die gemessene Entfernung falsch sein.

- Wie weit sind New York (USA), Kapstadt (Südafrika) und Tokio (Japan) von Barcelona entfernt?
- Was ist der Durchmesser dieser Karte?
- Wie viele Länder kannst du von Barcelona aus besuchen, wenn du weniger als 10 000 km reist?
- Als Antipode bezeichnet man den Punkt, der sich auf der gegenüberliegenden Seite der Erdkugel befindet. Die Antipode von Barcelona befindet sich irgendwo im Pazifischen Ozean nahe bei Neuseeland. Findest du diesen Punkt auf der Karte? Wo ist Neuseeland?

6 Die gnomonische Projektion

Die mit dieser Projektion erzeugte Karte wirkt stark verzerrt. Dennoch hat sie eine einzigartige Eigenschaft: die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte, auch Geodäte genannt, wird als gerade Linie dargestellt. Das bedeutet, dass du, wenn du die Verbindungslinie als gerade Linie darstellen willst, die Karte entsprechend verzerren musst. Auf dieser Karte kann man nicht die gesamte Erdoberfläche darstellen, sondern nur einen Teil, der kleiner ist als die Hälfte. Wir haben wieder Barcelona als Zentrum gewählt. Du erhältst diese Karte, indem du jeden Punkt auf der Erdoberfläche durch das Erdzentrum auf eine Tangentialebene mit Barcelona als Zentrum projizierst.

- Finde die kürzeste Verbindung von Jerusalem (Israel) nach Havanna (Kuba). Überquert die Linie Afrika? Hättest du das auch gedacht, wenn du die anderen Karten betrachtest?
- Welche Form nehmen Längen- und Breitenkreise an?

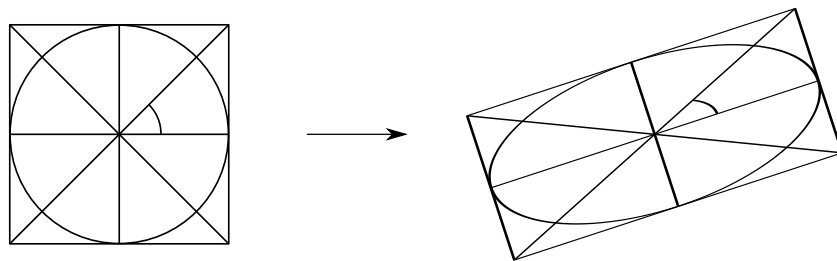
7 Die Mollweide-Projektion

Die von dieser Projektion erzeugte Karte füllt eine Ellipse aus, die doppelt so lang wie hoch ist. Sie löst ein Problem, das viele zylindrische Projektionen wie die Platkarte, die Mercator-, die Gall-Peters- und einige anderen Projektionen haben. In der Mollweide-Projektion werden die Pole an eindeutigen Punkten angezeigt, während sie z.B. auf der Platkarte den oberen und unteren Rändern der Karte entsprechen. Dadurch werden die Gegenden um die Pole, also Arktis und Antarktis, extrem verzerrt. Die Mollweide-Projektion hat dieses Problem nicht und reduziert daher die Verzerrungen beträchtlich. Außerdem erhält sie den Flächeninhalt. Wegen ihrer gebogenen Ränder erinnert ihr Umriss an den Umriss der Erdkugel.

- Wie werden Längen- und Breitenkreise dargestellt?
- Vergleiche diese Projektion mit der Gall-Peters-Projektion. Beide erhalten den Flächeninhalt. Welche verzerrt deiner Meinung nach die Erde weniger? Verwende die Schablonen der Kontinente auf beiden Abbildungen und dem Globus.

8 Können wir die Verzerrung messen?

Die Verzerrung einer Kartenabbildung ist eine schwierig zu messende Größe und kaum durch eine einzelne Maßzahl auszudrücken. Stattdessen hat der französische Mathematiker Nicolas Auguste Tissot 1859 eine grafische Methode entwickelt, um die Verzerrung in einem Punkt auf der Karte darzustellen. Stell dir einen kleinen Kreis um einen beliebigen Punkt auf der Erdoberfläche vor. Nach der Projektion auf die Karte wird dieser Kreis durch die Verzerrung nicht mehr kreisförmig sein. Wenn der Kreis klein genug ist, wird er auf eine Ellipse projiziert werden – mathematisch gesehen aber erst für verschwindend kleinen Radius, wie in Abbildung 1 dargestellt. Wir vergrößern diese Ellipse so lange, bis wir sie auf der Karte sehen können. Wir nennen sie die *Tissotsche Indikatrix* der Karte, und können mit ihrer Hilfe viele Informationen über die Verzerrungen durch die Projektion herausfinden.



Ein Kreis mit verschwindendem Radius wird auf eine Ellipse projiziert.

- Betrachte die Ausgabe des Programms auf deinem Bildschirm. Mit den Registerkarten in der Leiste am oberen Rand kannst du eine Abbildung auswählen. Wenn du den Mauszeiger über die Karte bewegst, erscheint die Tissotsche Ellipse für den entsprechenden Punkt. Wenn du auf die Karte klickst, bleibt die Ellipse an diesem Punkt fixiert. Im rechten unteren Eck kannst du die Größe der Ellipse verändern und alle angezeigten Ellipsen entfernen.

Die Hauptrichtungen. Indem die Projektion die Karte staucht und streckt, entsteht eine Verzerrung. Je nach Projektion kann die Verzerrung die Karte in die eine Richtung stauchen und in die andere Richtung strecken, je nach Punkt, an dem wir uns befinden. Die zwei Achsen der Tissotschen Ellipse zeigen die *Hauptrichtungen* an. Das sind die Richtungen, in denen die Karte am stärksten und am schwächsten gestreckt wird. Wenn die Ellipse extrem abgeplattet ist, d.h. wenn ihre Hauptachse sehr viel länger als ihre Nebenachse ist, dann bedeutet das, dass die Verzerrung je nach Richtung sehr unterschiedlich wirkt.

- Unter welchen Projektionen sind die Ellipsen am stärksten verformt? Welche Form haben die Ellipsen?
- Welche Form hat die Ellipse am Nordpol für die Platkarte? Wo ist der Nordpol?
- Sind die Hauptrichtungen immer entlang der Längen- und Breitenkreise?

Winkeltreue. Wenn Haupt- und Nebenachse der Tissotschen Ellipse gleich lang sind, wird die Ellipse zu einem Kreis und die Verzerrung ist in diesem Punkt in jede Richtung gleich stark. Daher wird jede Form, wie z.B. eine Küstenlinie, in der Umgebung dieses Punktes in alle Richtungen gleichmäßig gestreckt, ohne verzerrt zu werden. Eine Projektion, die in keinem Punkt Formen verzerrt, wird *winkeltreu* genannt. Aus Abbildung 1 folgern wir, dass alle Winkel durch die Projektion unverändert bleiben, wenn die Tissotsche Ellipse ein Kreis ist. *Winkeltreue Abbildungen lassen Winkel unverändert.*

- Wenn die Tissotsche Ellipse zu einem Kreis wird, wird ihr Rand grün gefärbt. Finde für jede Karte die Punkte, wo die entsprechende Projektion winkeltreu ist.
- Was ist an der Mercator-Projektion anders? Wie stark werden Winkel und Flächen verzerrt?

Flächentreue. Aus dem Flächeninhalt einer Ellipse können wir schließen, ob die Projektion in diesem Punkt im Mittel staucht oder streckt. Wenn ein kleiner Kreis mit Radius r und Flächeninhalt πr^2 auf die Ellipse mit Haupt- und Nebenachse a und b projiziert wird und $ab = r^2$ gilt, bedeutet das, dass die Ellipse den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis hat. Daraus folgt, dass die Abbildung den Flächeninhalt in diesem Punkt nicht verändert.

Eine Abbildung, die Flächeninhalte erhält, wird *flächentreue Projektion* genannt.

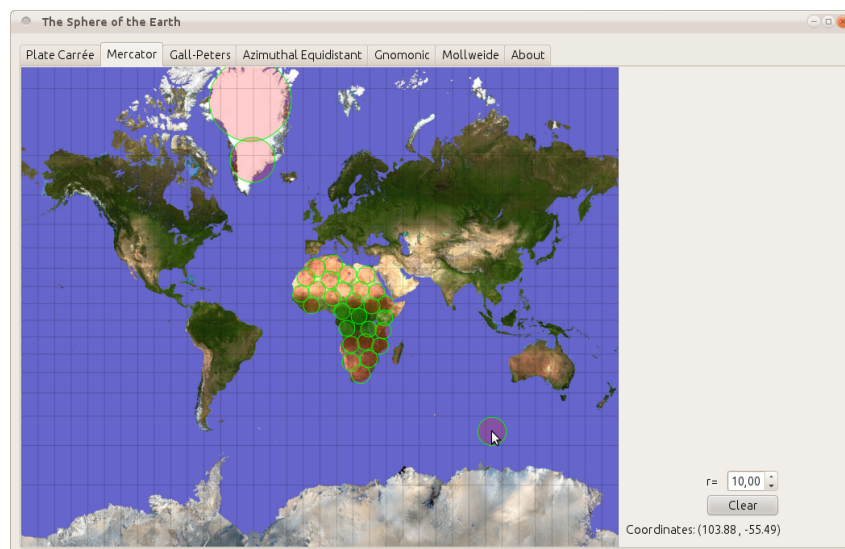
Wenn ein Punkt unter einer Projektion sowohl winkel- als auch flächentreu ist, sagen wir, dass die Projektion in diesem Punkt *maßstabsgetreu* ist. Dieser Punkt wird auf der Karte ohne jede Verzerrung dargestellt. Ein wichtiger Satz aus der Geometrie besagt, dass es keine Abbildung gibt, die alle Punkte maßstabsgetreu darstellen kann. Mit anderen Worten, es gibt keine „perfekte“ Karte, die die gesamte Erdoberfläche maßstabsgetreu darstellt.

- Wenn der Flächeninhalt durch die Projektion nicht verändert wird, wird das Innere der Ellipse grün angezeigt. Welche Projektionen sind flächentreu? Was ist der Flächeninhalt der gesamten Karte für diese Projektionen?
- Vergleichen wir einmal den Flächeninhalt von Afrika und Grönland, zunächst unter der Gall-Peters-Projektion. Wähle eine mittlere oder kleine Größe für die Ellipsen aus. Wie viele kannst du auf Grönland platzieren, ohne dass sie sich überschneiden?

Und wie viele auf Afrika? Wiederhole dies für die Mercator-Projektion. Wir erinnern uns: die Tissotschen Ellipsen sehen unterschiedlich aus, *stellen aber immer den gleichen Kreis auf der Erde dar*.

Je kleiner die Ellipse ist, die du auswählst, umso genauer wird die Näherung für den Flächeninhalt. In Wirklichkeit ist Afrika 14,2 mal so groß wie Grönland. Auf welchen zwei Karten wird dieses Größenverhältnis richtig dargestellt?

- Was ist größer: Grönland oder Australien? Was würdest du sagen, wenn du die Plattkarte anschaust? Was erhältst du, wenn du die Tissotschen Ellipsen verwendest?
- Sowohl die Gall-Peters- als auch die Mollweide-Projektion sind flächentreu. Welche der beiden verzerrt Formen und Umrisse weniger stark?



Vergleich des Flächeninhalts von Afrika und Grönland unter der Mercator-Projektion.

9 Die Mathematik dahinter

In diesem Abschnitt geht es um höhere Mathematik. Lesen auf eigene Gefahr!

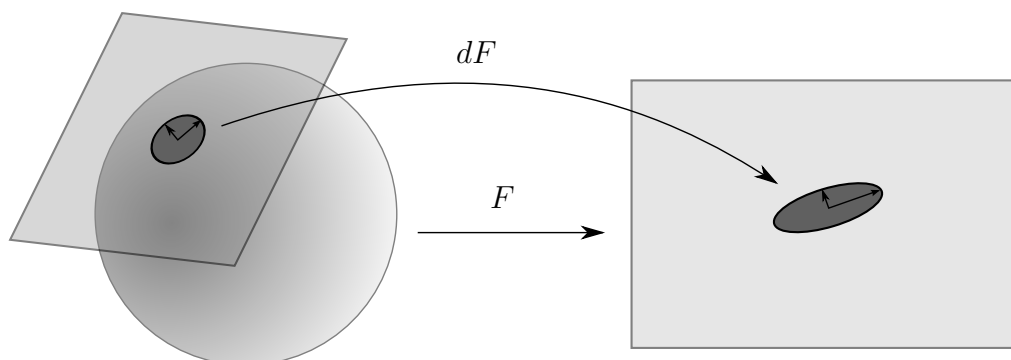
Eine Kartenabbildung oder Projektion ordnet jedem Koordinatenpaar auf der Kugel \mathbb{S} ein Koordinatenpaar auf der Ebene \mathbb{R}^2 zu,

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, \phi) &\mapsto (x, y), \end{aligned}$$

wobei wir mit λ den Längengrad und mit ϕ den Breitengrad bezeichnen. Diese Abbildung kann im Punkt p durch die Tangentialabbildung dF

$$dF_p : T_p\mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

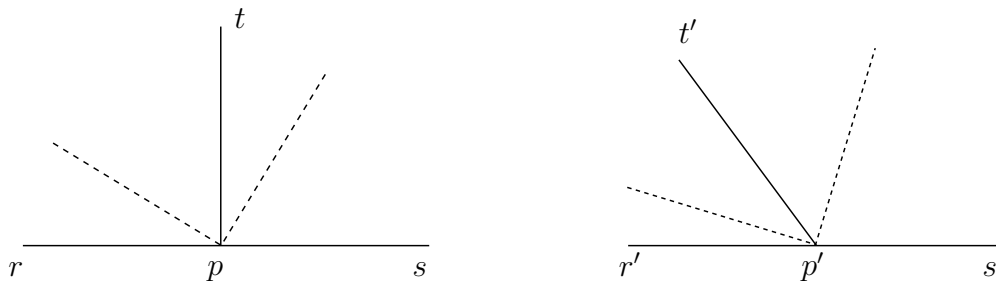
beschrieben werden. Sie ordnet der Tangentialebene zur Kugel \mathbb{S} im Punkt p die Ebene \mathbb{R}^2 mit Zentrum $F(p)$ zu. Die Tangentialebene enthält also alle vom Punkt p ausgehenden Richtungen. In diesem Sinne beschreibt der Einheitskreis alle Richtungsvektoren mit Länge 1 in der Tangentialebene. Die Tissotsche Ellipse ist das Bild des Einheitskreises in der Tangentialebene $T_p\mathbb{S}$ unter der Abbildung dF . Wir können daher die Tissotsche Ellipse als Darstellung der Verzerrung der von p ausgehenden Richtungsvektoren verstehen.



Die Abbildung F und ihre Tangentialabbildung dF .

Zwei Richtungen stehen sowohl auf die Erdoberfläche als auch auf die Karte senkrecht. Um das zu sehen, betrachten wir eine beliebige Gerade rs durch p in der Tangentialebene und eine Halbgerade t , die in p beginnt und im rechten Winkel auf rs steht. Ihre Bilder $r's'$ und t' berühren $p' = F(p)$, müssen aber nicht mehr im rechten Winkel zueinander stehen. Nehmen wir an, dass $r'p't'$ ein scharf- und $t'p's'$ ein stumpfwinkliges Dreieck ist. Stellen wir uns vor, dass wir den rechten Winkel rpt um p rotieren, bis wir auf dem Winkel tps liegen. Auf der Karte beginnen wir mit dem spitzen Winkel $r'p't'$ und hören mit dem

stumpfen Winkel $t'p's'$ auf. Also muss es dazwischen einen Punkt gegeben haben, wo der Winkel auf der Karte rechtwinklig war.



Die Hauptrichtungen stehen im rechten Winkel zueinander.

Diese zwei Richtungen sind die so genannten Hauptrichtungen. Sie werden durch zwei Einheitsvektoren beschrieben, die senkrecht zueinander stehen. Auf der Karte sind die Hauptrichtungen durch das Bild dieser zwei Vektoren gegeben und ihre Längen a und b sind die Längen der Halbachsen der Tissotschen Ellipse. Im Fall $a = b$, wenn die Ellipse zum Kreis wird, sind alle Richtungen gleichermaßen verzerrt. Die Abbildung ist in diesem Punkt winkeltreu. Im Fall $ab = 1$ hat die Ellipse den gleichen Flächeninhalt wie der Einheitskreis in der Tangentialebene. Mit einem unendlich großen Kreis erhalten wir die Oberfläche der Kugel. Daher ist die Abbildung in diesem Punkt flächentreu.

Formal gesprochen gilt, dass die Tangentialabbildung dF diagonalisierbar in der Kugelmetrik ist, sowie dass die Eigenvektoren die Hauptrichtungen und die Eigenwerte die Halbachsen der Tissotschen Ellipse sind. Die Abbildung ist winkeltreu, wenn dF ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist, und flächentreu, denn $\det(dF) = 1$. Wenn beide Bedingungen in jedem Punkt erfüllt sind, ist F eine Isometrie. Für den Fall der Erdoberfläche ist das auf Grund des Theorema egregium von Gauss nicht erfüllbar.