Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília – Câmpus Taguatinga
Ciência da Computação – Análise de Algoritmos
Lista de Exercícios – Análise Assintótica
Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Aluno: ____

Matrícula: ____

Exercício 1

Demonstre que:

(a) $n! \in \omega(2^n)$

(b) $n! \in o(n^n)$

(c) $k \log n \in \Theta(n) \Rightarrow k \in \Theta(n/\log n)$.

Exercício 2

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções monotonicamente crescentes. Prove ou ache um contra-exemplo cada uma das seguintes conjecturas:

(a) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$

(b) $f(n) + g(n) \in \Theta(\min(f(n), g(n))$

(c) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \log(f(n)) \in O(\log(g(n))$, onde $\log(g(n)) \geq 1$ e $f(n) \geq 1$ para n suficientemente largo

(d) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$

(e) $f(n) \in O((f(n))^2)$

(f) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

(g) $f(n) \in \Theta(f(n/2))$

(h) $f(n) + o(f(n)) \in \Theta(f(n))$

Exercício 3

Mostre que para constantes $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \geq 0$ que:

$$(n+a)^b \in \Theta(n^b)$$

Exercício 4

Seja

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

onde $a_i > 0$. Seja k uma constante, ise as definições de notação assintótica para provar as seguintes propriedades:

(a) Se $k \geq d$, então $p(n) \in O(n^k)$

(b) Se $k \leq d$, então $p(n) \in \Omega(n^k)$

(c) Se $k = d$, então $p(n) \in \Theta(n^k)$

(d) Se $k > d$, então $p(n) \in o(n^k)$

(e) Se $k < d$, então $p(n) \in \omega(n^k)$

Exercício 5

Indique, para cada par de expressões (A, B) na tabela abaixo, se A é O, o, Ω, ω ou Θ de B. Assuma $k \geq 1$, $\epsilon > 0$ e $c > 1$ são constantes. Sua resposta deve estar na forma "sim" ou "não".

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
a)	$\log^k n$	n^ϵ					
b)	n^k	c^n					
c)	$\sqrt{n}$	$c^{\sin(n)}$					
d)	2^n	$2^{n/2}$					
e)	$n^{\log c}$	$c^{\log n}$					
f)	$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

Exercício 6

Demonstre que:

$$n! >> c^n >> n^3 >> n^2 >> n^{1+\epsilon} >> n \log n >> n >>$$
$$\sqrt{n} >> \log^2 n >> \log n >> \log n / \log\log n >> \log\log n >> 1$$

Exercício 7

Verdadeiro ou falso?

(a) $2^{n+1} \in O(2^n)$

(b) $2^{2n} \in O(2^n)$

Exercício 8

Para cada um dos seguintes pares $f(n)$ e $g(n)$, identifique se $f(n) \in O(g(n))$, $f(n) \in \Omega(g(n))$ ou $f(n) \in \Theta(g(n))$.

(a) $f(n) = \log^2 n; g(n) = \log n + 5$

(b) $f(n) = \sqrt{n}; g(n) = \lg n$

(c) $f(n) = \log^2 n; g(n) = \log n$

(d) $f(n) = n; g(n) = \log^2 n$

(e) $f(n) = n \ logn; g(n) = \log n$

(f) $f(n) = 10; g(n) = \log 10$

(g) $f(n) = 2^n; g(n) = 10n^2$

(h) $f(n) = 2^n; g(n) = 3^n$

(i) $f(n) = n + 2\sqrt{n}; g(n) = n^2$

(j) $f(n) = n \log n; g(n) = \frac{n\sqrt{n}}{2}$

(k) $f(n) = n + \log n; g(n) = \sqrt{n}$

(l) $f(n) = 2(\log n)^2; g(n) = \log n + 1$

(m) $f(n) = 4n \log n; g(n) = (n^2 - n)/2$

Exercício 9

Prove que $n^3 - 3n^2 - n + 1 \in \Theta(n^3)$

Exercício 10

Demonstre que:

(a) Se $f_1(n) \in O(g_1(n))$ e $f_2(n) \in O(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in O(g_1(n) + g_2(n))$

(b) Se $f_1(n) \in \Omega(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Omega(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Omega(g_1(n) + g_2(n))$

(c) Se $f_1(n) \in \Omega(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Omega(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Omega(g_1(n) \cdot g_2(n))$

Exercício 11

Liste as funções da menor pra maior ordem assintótica. Se duas funções são da mesma ordem, indique.

n	2^n	$n \log n$	$\ln n$
$n - n^3 + 7n^5$	$\log n$	$\sqrt{n}$	e^n
$n^2 + \log n$	n^2	2^{n-1}	$\log \log n$
n^3	$(\log n)^2$	$n!$	$n^{1+\epsilon}, 0 < \epsilon < 1$

Exercício 12

Ache, caso existam, duas funções $f(n)$ e $g(n)$ que satisfazem as sequintes relações,

(a) $f(n) \in o(g(n))$ e $f(n) \notin \Theta(g(n))$

(b) $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $f(n) \notin o(g(n))$

(c) $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $f(n) \notin O(g(n))$

(d) $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $f(n) \notin O(g(n))$

Exercício 13

Para cada uma das perguntas, justifique sua resposta:

(a) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo $O(n^2)$, é possível que ele leve tempo $O(n)$ em algumas instâncias?

(b) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo $O(n^2)$, é possível que ele leve tempo $O(n)$ em todas as instâncias?

(c) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo $\Theta(n^2)$, é possível que ele leve tempo $O(n)$ em algumas as instâncias?

(d) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo $\Theta(n^2)$, é possível que ele leve tempo $O(n)$ em todas as instâncias?

(e) A função $f(n) \in \Theta(n^2)$ onde $f(n) = 100n^2$, para n par e $f(n) = 20n^2 - n \log n$ para n ímpar?

Exercício 14

Qual das afirmativas é verdadeira?

(a) $\sum_{i=1}^{n} 3^i \in \Theta(3^{n-1})$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} 3^i \in \Theta(3^{n})$.

(c) $\sum_{i=1}^{n} 3^i \in \Theta(3^{n+1})$.

Exercício 15

Analise os algoritmos abaixo de maneira mais justa possível:

(a)
```
sum = 0;
for(int i=0;i<n;i++){
   for(int j=i;j<n;j++){
      sum++;
   }
}
```

(b)
```
sum = 0;
for(int i=1;i<=n;i*=2){
   for(int j=1;j<=n;j++){
      sum++;
   }
}
```

(c)
```
sum = 0;
for(int i=1;i<=n;i*=2){
   for(int j=1;j<=n;j+=i){
      sum++;
   }
}
```