Métodos de Ordenação Pseudolineares

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

Sumário

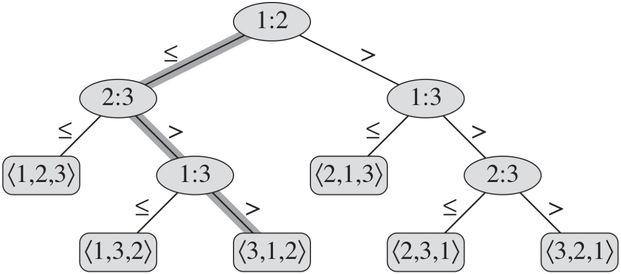
Sumário

Ordenação por Comparações

Cota Inferior para Algoritmos de Ordenação por Comparações

- Vimos até o presente momento, diversos algoritmos de ordenação que se baseiam em comparações de chaves para resolver o prolema da Ordenação.
- Até agora, sabemos que uma cota superior para o problema da ordenação é de $O(n \lg n)$, obtidas por algoritmos como o **Heapsort** e o **Mergesort**.
- Existe uma cota mínima para algoritmos de ordenação por comparação?

Ordenação por Comparação



Ordenação por Comparação

- Durante o seu trajeto, o algoritmo de ordenação, faz escolhas baseadas nessa árvore de decisão de modo a obter uma permutação da sequência original em ordem crescente.
- Isso corresponde de um percurso da raiz até uma folha.
- Qual a cota inferior para o número de folhas? E para altura da árvore?

Ordenação por Comparação

- Durante o seu trajeto, o algoritmo de ordenação, faz escolhas baseadas nessa árvore de decisão de modo a obter uma permutação da sequência original em ordem crescente.
- Isso corresponde de um percurso da raiz até uma folha.
- Qual a cota inferior para o número de folhas? E para altura da árvore?
- $n_{\text{folhas}} \geq n!$ folhas e $h \geq \lg n!$.

Ordenação por Comparação

- Durante o seu trajeto, o algoritmo de ordenação, faz escolhas baseadas nessa árvore de decisão de modo a obter uma permutação da sequência original em ordem crescente.
- Isso corresponde de um percurso da raiz até uma folha.
- Qual a cota inferior para o número de folhas? E para altura da árvore?
- $n_{\text{folhas}} \geq n!$ folhas e $h \geq \lg n!$.

O problema de ordenações usando comparações possui cota $\Omega(n \lg n)$.

Demonstração da cota inferior

Queremos mostrar que $\lg n! \in \Omega(n \lg n)$

$$
\begin{aligned}
\lg n! &= \sum_{i=1}^{n} \lg(i) \\
&\geq \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} \lg(i) \\
&\geq \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} \lg\left(\frac{n}{2}\right) \\
&\geq \frac{n}{2} \lg(n/2) \\
&= \frac{n}{2}(\lg(n) - 1) = \frac{n \lg n}{2} - \frac{n}{2} \geq cn \lg n, \quad \diamond\, c < 2 \text{ e } \forall n > n_0 \text{ sfg}
\end{aligned}
$$

Algoritmos Ótimos

Algoritmos Ótimos

- O Heapsort e o Mergesort são **algoritmos ótimos** de ordenação por **comparações**.
- No pior caso, eles levam o mesmo tempo que o melhor algoritmo possível para o problema da ordenação por comparações, que por sua vez, possui uma cota inferior de $\Omega(n \lg n)$.

Ordenação em Tempo “Linear”

Ordenação em Tempo “Linear”

- É possível resolver o problema da ordenação em tempo linear ao explorar propriedades de algumas instâncias e resolver este problema reduzido em tempo $o(n \lg n)$, desde que não se use comparações.
- Dois métodos de ordenação em tempo “pseudolinear” são:
    1. Countingsort;
    2. Radixsort;

Sumário

Countingsort

Countingsort

- O Countingsort conta as ocorrências de cada elemento na sequência original.
- Uma vez computada essa informação, o Countingsort calcula o número de elementos menor ou igual a um elemento i qualquer.
- A partir disso, o Countingsort consegue ordenar a sequência original ao varrer a sequência da direita para esquerda e, utilizando os contadores de cada valor, posicioná-los na posição correta da sequência resultado.

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	0	0	0	0	0	0	0

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	1	2	0	2	3	0	1

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	1	3	3	5	8	8	9

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	1	3	3	5	8	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V'									

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	1	3	3	5	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V'								4	

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	0	3	3	5	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V'	0							4	

Countingsort

Exemplo

V

0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	6	4	1	3	4	1	0	4

C

0	1	2	3	4	5	6
0	2	3	5	7	8	9

V'

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		1					4	

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	0	2	3	5	6	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V'	0		1				4	4	

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	0	2	3	4	6	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V'	0		1		3		4	4	

Countingsort

Exemplo

V

0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	6	4	1	3	4	1	0	4

C

0	1	2	3	4	5	6
0	1	3	4	6	8	9

V'

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1		3		4	4	

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	0	1	3	4	5	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V'	0	1	1		3	4	4	4	

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	0	1	3	4	5	8	8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V'	0	1	1		3	4	4	4	6

Countingsort

Exemplo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V	3	6	4	1	3	4	1	0	4

	0	1	2	3	4	5	6
C	0	1	3	3	5	8	8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V'	0	1	1	3	3	4	4	4	6

Countingsort

Function Countingsort

Input: $V[0, n-1], k$

Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < n-1$

$V' \leftarrow V[0, n-1]$

for($i \leftarrow 0; i \leq k; i++$)

  $C[i] \leftarrow 0$

for($i \leftarrow 0; i < n; i++$)

  $C[V'[i]]++$

for($i \leftarrow 1; i \leq k; i++$)

  $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$

for($i \leftarrow n-1; i \geq 0; i--$)

  $V[--C[V'[i]]] \leftarrow V'[i]$

Countingsort: Análise

Análise

- Primeiramente, é necessário contar a ocorrência de cada elemento, o que leva tempo $\Theta(n)$.
- Depois, é preciso computar a quantidade de elementos menores ou iguais a um outro determinado elemento, o que leva tempo $\Theta(k)$, onde k é o valor do maior elemento possível na sequência.
- Por fim, uma inspeção no vetor é necessária para executar a ordenação, logo, é necessário tempo $\Theta(n)$.
- Portanto, o custo total é de $\Theta(n + k)$.

In-place	Estável
✗	✓

Sumário

Radixsort

Radixsort

- A ideia do Radixsort é olhar, para cada iteração i, olhar para o i-ésimo dígito menos significativo e ordenar a sequência original baseado na ordem dos dígitos e na informação da iteração anterior.
- Ele pode usar o Countingsort para ordenar os dígitos na i-ésima iteração.
- Ele deve utilizar um método estável de ordenação para ordenar os dígitos em cada iteração.

Radixsort

Exemplo

329	720	720	329
457	355	329	355
657	436	436	436
839	457	839	457
436	657	355	657
720	329	457	720
355	839	657	839

Radixsort

Function Radixsort

Input: $V[0, n-1]$

Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < n-1$

for($i \leftarrow 0; i < d; i++$)

  Use um método de ordenação estável considerando apenas o i-ésimo dígito menos significativo

Radixsort

Análise

- Suponha que o maior elemento possua d casas em uma determinada base.
- Se em cada iteração utilizarmos o Countingsort para ordenar os dígitos, levaremos tempo $\Theta(n+k)$ para a iteração, onde k corresponde ao valor da base.
- Como são necessárias d iterações, temos que o tempo total do Algoritmo corresponde à $\Theta(d \cdot (n+k))$.

In-place	Estável
✗	✓