

Hashing

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação



Prof. Daniel Saad Nogueira
Nunes

Instituto Federal de Brasília,
Câmpus Taguatinga



Sumário

1 Introdução



Introdução

- Em muitas aplicações, precisamos de um conjunto dinâmico, que suporte:
 - ▶ INSERT: inserção de um elemento pela sua chave.
 - ▶ DELETE: remoção de um elemento pela sua chave.
 - ▶ SEARCH: busca de um elemento pela sua chave.



Estruturas de Dados

- Muitas estruturas suportam essas operações eficientemente.
 - ▶ Árvores Binárias de Pesquisa.
 - ▶ Árvores Rubro-Negras.
 - ▶ ...
- Geralmente, o custo de cada operação é $\Theta(\log n)$.



Estruturas de Dados

- Muitas estruturas suportam essas operações eficientemente.
 - ▶ Árvores Binárias de Pesquisa.
 - ▶ Árvores Rubro-Negras.
 - ▶ ...
- Geralmente, o custo de cada operação é $\Theta(\log n)$.
- Será que podemos responder essas operações em $\Theta(1)$?



Estrutura de Dados

Hashing

- Possibilita a resposta dessas consultas em $O(1)$. No **caso médio**.
- No pior caso, as consultas levam $\Theta(n)$.
- Com hashing perfeito, conseguimos $O(1)$ até no **pior caso**!
- Alternativa eficiente na prática.
- Utilizado em Sistemas Operacionais para lookup rápido de tabelas.



Motivação

- Antes de introduzir o conceito de hashing, vamos dar uma pequena motivação ao mostrar problemas existentes com outros métodos.
- Mostraremos como a técnica de Hashing soluciona estes problemas.



Motivação

Tabelas de Endereçamento Direto

- O uso de tabelas de endereçamento diretos proporciona consultas de inserção, remoção e busca em tempo $O(1)$ no pior caso.
- Seja $U = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$ chaves do conjunto universo.
- **Premissa:** dois elementos distintos tem chaves distintas.
- Para cada chave, existe apenas uma entrada na tabela de endereçamento direto.
- Se o elemento não existe, então o conteúdo da tabela é preenchido com uma constante **NULL**.



Tabelas de Endereçamento Direto

- As operações das operações usando tabelas de endereçamento direto são triviais de serem implementadas.



Operações em Tabelas de Endereçamento Direto

Algorithm 1: DAT-SEARCH

Input: T, k

Output: $x, \quad x.key = k$

1 **return** $T[k]$

Algorithm 2: DAT-INSERT

Input: T, x

1 $T[x.key] \leftarrow x$

Algorithm 3: DAT-DELETE

Input: T, x

1 $T[x.key] \leftarrow \text{NULL}$



Tabelas de Endereçamento Direto

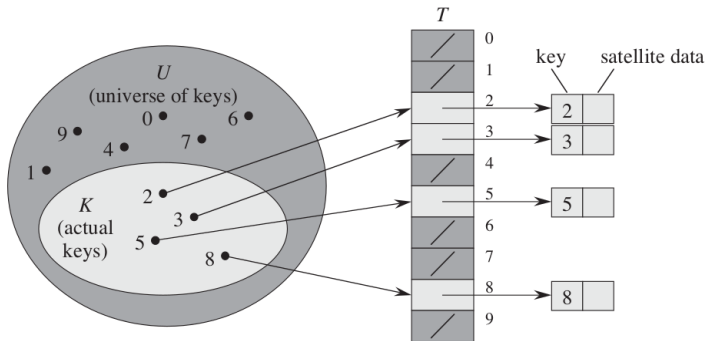


Figura: Tabelas de Endereçamento Direto.



Tabelas de Endereçamento Direto

- Qual o problema de utiliza esta técnica?
- Quantas posições precisamos na nossa tabela?



Tabelas de Endereçamento Direto

- Qual o problema de utiliza esta técnica?
- Quantas posições precisamos na nossa tabela?
- $|U|$, o tamanho do espaço de chaves.



Tabelas de Endereçamento Direto

- Qual o problema de utiliza esta técnica?
- Quantas posições precisamos na nossa tabela?
- $|U|$, o tamanho do espaço de chaves.
- O que acontece se as chaves forem números de 64 bits?



Tabelas de Endereçamento Direto

- Qual o problema de utiliza esta técnica?
- Quantas posições precisamos na nossa tabela?
- $|U|$, o tamanho do espaço de chaves.
- O que acontece se as chaves forem números de 64 bits?
- $|U| = 2^{64}$.



Tabelas de Endereçamento Direto

- Qual o problema de utiliza esta técnica?
- Quantas posições precisamos na nossa tabela?
- $|U|$, o tamanho do espaço de chaves.
- O que acontece se as chaves forem números de 64 bits?
- $|U| = 2^{64}$.
- Além disso, o número de elementos inseridos pode ser muito menor que o espaço de chaves.



Tabelas de Endereçamento Direto

- Qual o problema de utiliza esta técnica?
- Quantas posições precisamos na nossa tabela?
- $|U|$, o tamanho do espaço de chaves.
- O que acontece se as chaves forem números de 64 bits?
- $|U| = 2^{64}$.
- Além disso, o número de elementos inseridos pode ser muito menor que o espaço de chaves.
- **Problema:** muito espaço utilizado.



Tabelas de Endereçamento Direto

- Qual o problema de utiliza esta técnica?
- Quantas posições precisamos na nossa tabela?
- $|U|$, o tamanho do espaço de chaves.
- O que acontece se as chaves forem números de 64 bits?
- $|U| = 2^{64}$.
- Além disso, o número de elementos inseridos pode ser muito menor que o espaço de chaves.
- **Problema:** muito espaço utilizado.
- **Solução:** hashing!



Sumário

2 Hashing



Hashing

Ideia do Hashing

- Nas tabelas de endereçamento direto, o elemento de chave k é armazenado no k -ésimo slot.
- Utilizando a técnica de **hashing**, aplicamos uma função $h : U \rightarrow \{0, 1, \dots, m - 1\}$, de modo que h mapeie um elemento x e uma entrada da tabela de **hash**.
- **Problema:** nem sempre h é injetora.



Hashing

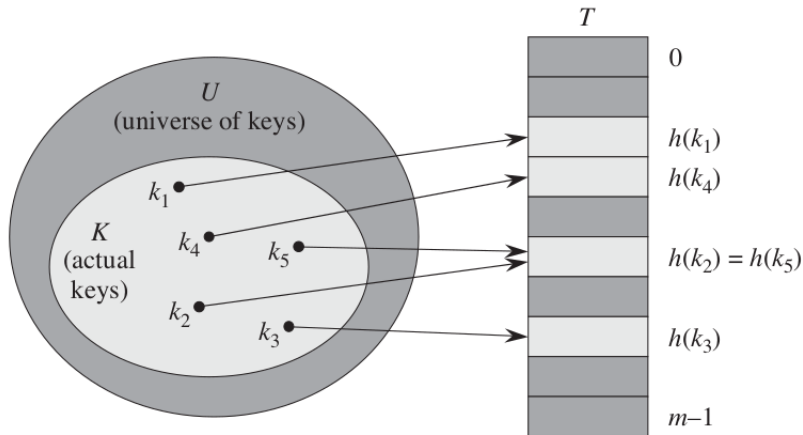


Figura: Técnica de hashing.



Hashing

Vantagens e Desvantagens

- Obviamente, a técnica de hashing tem uma vantagem enorme de espaço em relação à técnica de endereçamento direto.
- Em vez de utilizar $|U|$, utilizamos apenas m entradas da tabela hash.
- Problema: dois ou mais elementos podem ser mapeados na mesma posição da tabela.



Hashing

Vantagens e Desvantagens

- Obviamente, a técnica de hashing tem uma vantagem enorme de espaço em relação à técnica de endereçamento direto.
- Em vez de utilizar $|U|$, utilizamos apenas m entradas da tabela hash.
- Problema: dois ou mais elementos podem ser mapeados na mesma posição da tabela.
- Princípio da casa dos pombos!



Hashing

Vantagens e Desvantagens

- Obviamente, a técnica de hashing tem uma vantagem enorme de espaço em relação à técnica de endereçamento direto.
- Em vez de utilizar $|U|$, utilizamos apenas m entradas da tabela hash.
- Problema: dois ou mais elementos podem ser mapeados na mesma posição da tabela.
- Princípio da casa dos pombos!
- Chamamos isso de **colisão**.



Hashing

Tratamento de Colisões

- Obviamente, haverá colisões, uma vez que $m < |U|$.
- Temos que escolher h de maneira apropriada, de maneira que espalhe os elementos de maneira uniforme!
- h tem que “parecer aleatória”.
- Além disso, temos que conseguir distinguir um elemento do outro, temos que tratar a colisão.



Hashing

Tratamento de Colisões

- Obviamente, haverá colisões, uma vez que $m < |U|$.
- Temos que escolher h de maneira apropriada, de maneira que espalhe os elementos de maneira uniforme!
- h tem que “parecer aleatória”.
- Além disso, temos que conseguir distinguir um elemento do outro, temos que tratar a colisão.
- Agora sim, Luiz, alguns princípios da criptografia.



Hashing

Tratamento de Colisões

- Existem diversas maneiras de tratar colisão.
- Estudaremos o método de encadeamento.



Encadeamento

Encadeamento

- No encadeamento, colocamos todos os elementos mapeados em uma mesma entrada em uma **lista ligada**.
- Cada slot i tem um ponteiro para a cabeça da lista.



Encadeamento

Encadeamento

- No encadeamento, colocamos todos os elementos mapeados em uma mesma entrada em uma **lista ligada**.
- Cada slot i tem um ponteiro para a cabeça da lista.



Operações em Hashing com Encadeamento

Algorithm 4: CHAINED-HASH-SEARCH

Input: T, k

Output: $x, \quad x.key = k$

- 1 Procure o elemento x na lista apontada por $h(x)$
 - 2 Retorne **NULL** caso x não ocorra na lista, e x caso contrário.
-

Algorithm 5: CHAINED-HASH-INSERT

Input: T, x

- 1 Insira x no final da lista apontada por $h(x)$
-

Algorithm 6: CHAINED-HASH-DELETE

Input: T, x

- 1 Ache x na lista apontada por $h(x)$
 - 2 Remova x da lista
-



Operações em Hashing com Encadeamento

Análise

- Inserção: $O(1)$ de pior caso.
- Remoção: $O(1)$ se as listas forem duplamente ligadas.
- Busca: tempo de pior caso proporcional ao tamanho da lista.



Operações em Hashing de Encadeamento

Análise

- O pior caso da técnica de hashing com encadeamento é muito ruim. $\Theta(n)$.
- Mas se escolhermos uma função de hashing adequada, o caso médio é bastante atraente na prática.



Operações em Hashing de Encadeamento

Definição (Fator de Carga)

- O fator de carga, definido como α , é dado por n/m . Sendo n o número de elementos e m o tamanho da tabela hashing.



Operações em Hashing de Encadeamento

Análise

- Em uma função de hashing adequada, o tamanho de uma lista arbitrária é bem próxima de α .
- Pior caso de busca: $O(1 + \alpha)$, desde que a função de hash espalhe de maneira uniforme.
- Quanto mais espaço, menos colisões.
- Quanto mais espaço, mais espaço!



Sumário

- 2 Hashing
 - Funções de Hashing



Funções de Hashing

- Vimos que o sucesso da técnica de hash se baseia na escolha da função de hash.
- A função tem que parecer uniforme.
- Caso contrário, haverão muitas colisões, e portanto, mais tempo será gasto procurando elementos.



Funções de Hashing

Projetando funções de Hashing

- Para projetar uma função de hashing adequada, temos que analisar uma série de fatores.
 - ▶ A distribuição das chaves é conhecida?
 - ▶ Queremos que valores próximos ocupem slots próximos?



Funções de Hashing

Projetando funções de Hashing

- É interessante interpretar as chaves como números naturais.
- Se as chaves não forem números naturais (ex: strings), é interessante interpretá-las como números naturais.
- Na prática: usamos o índice da tabela ascii.



Funções de Hashing

Método da Divisão

- O método da divisão mapeia uma chave k em um dos m slots ao pegar o resto da divisão de k por m .

$$h(k) = k \mod m$$

- Exemplo, se $m = 12$ e $k = 100$, então $h(k) = 4$.
- Muito rápida na prática, precisamos apenas de uma instrução de divisão e um acesso à memória.



Funções de Hashing

Método da Divisão

- Temos que tentar evitar alguns valores de m .
- Por exemplo, se m for uma potência de 2, i.e, $m = 2^p$, então $h(k)$ são os p bits menos significativos.
- O padrão dos bits menos significativos pode ser altamente repetitivo dependendo da aplicação.



Funções de Hashing

Método da Divisão

- Geralmente, um primo não muito próximo de uma potência de 2 é uma boa escolha.
- Por exemplo, para $n = 2000$, $m = 701$ é uma boa escolha:

$$h(k) = k \mod 701$$



Funções de Hashing

Método da Multiplicação

- O método da multiplicação para criar funções de hash opera em dois passos.
 - 1 Primeiro multiplicamos a chave k por uma constante A , $0 < A < 1$ e extraímos a parte fracionária de k .
 - 2 Depois, multiplicamos este valor por m e pegamos o chão do resultado.

$$h(k) = \lfloor m(k \cdot A \bmod 1) \rfloor$$



Funções de Hashing

Método da Multiplicação

- Uma vantagem deste método é que o valor de m não é crítico.
- Geralmente escolhemos $m = 2^p$ para algum p .
 - ▶ Mais fácil de implementar.
- Seja w o tamanho da palavra do computador e suponha que as chaves caibam em uma palavra. Podemos restringir A como um número da forma $s/2^w$, onde $0 < s < 2^w$.
- Apesar deste método funcionar para qualquer valor de A , alguns valores se comportam melhor que outros.
- Sugestão do D. Knuth: $A \approx (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.6180339887\dots$