Relações de Recorrência: Método da Substituição

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

Sumário

Sumário

Método da Substituição

Método da Substituição

O método da substituição se baseia em:

1. "Chutar" a forma da solução;
2. Verificar que o chute está correto através da indução matemática e escolhas de constantes apropriada;
3. Ajustar as cotas superiores e inferiores de modo a conseguir uma cota justa;

Método da Substituição

Exemplo

Determine uma cota superior para:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n, & n > 1 \end{cases}$$

1. Chute: $T(n) \in O(n \lg n)$. Isto é: $T(n) \leq cn \lg n$;
2. Indução:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq cn \lg(n/2) + n \\ &= cn(\lg(n) - 1) + n \\ &= cn \lg(n) - cn + n \\ &\leq cn \lg n \quad \diamond\, c \geq 1 \end{aligned}$$

Método da Substituição

Exemplo

- Verificação do caso base.

$$1 \not\leq c(1 \lg 1)$$

- A verificação do caso base falhou.
- Como estamos realizando uma análise assintótica, não precisamos provar para $n_0 = 1$, só precisamos mostrar que a indução vale para todo $n \geq n_0$ suficientemente grande. Vamos mostrar que a propriedade vale para todo $n \geq n_0 > 1$.

Método da Substituição

Exemplo

- Verificação do caso base quando $n_0 > 1$.
- Pela natureza da recorrência, qualquer valor de $n > 1$ passará por $T(2)$ ou $T(3)$ nas chamadas recursivas. Vamos verificar que a propriedade vale para $T(2)$ e $T(3)$

$$T(2) = 2T(1) + 2 \leq c2\lg 2, \quad \diamond\, c \geq 2$$
$$T(3) = 2T(1) + 3 \leq c3\lg 3, \quad \diamond\, c \geq 2$$

- Mostramos que a indução funciona para todo $n > 1$ com a constante $c \geq 2$ escolhida.

Método da Substituição

Exercício

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n, & n > 1 \end{cases}$$

- Será que $\Theta(n \lg n)$ é uma cota justa? Ajuste!

Método da Substituição

Método da Substituição

- Como dar um bom chute? Experiência. Muitas relações de recorrência são similares:

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$$

- Pisos e tetos não são importantes na maioria das vezes e não afetam o comportamento assintótico da recorrência. Por isso, muitas das vezes, as relações de recorrência, em uma primeira análise, são expressas sem pisos e tetos. Caso valha a pena, fazemos uma análise mais minuciosa posteriormente.
- O mesmo pode ser dito do caso base.

Método da Substituição

Método da Substituição

- Ajuste das cotas: Podemos superestimar cotas superiores e subestimar cotas inferiores e ir ajustando progressivamente para deixá-las justas. Exemplo: $O(n^2)$ e $\Omega(n)$ para a recorrência:

$$T(n) = 2T(n/2 + 17) + n$$

Sumário

Método da Substituição

Reforçando a Hipótese de Indução

- Muitas das vezes, nosso chute pode estar correto, mas mesmo assim, não obtemos a resposta na indução matemática.
- Neste casos, podemos reforçar nossa hipótese de indução em uma mais difícil, mas que acaba facilitando a demonstração.

Método da Substituição

Exemplo

Ache uma cote superior para:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

Chute: $T(n) \leq cn$:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(cn/2) + 1 \\ &= cn + 1 \\ &\not\leq cn \end{aligned}$$

Método da Substituição

Exemplo

Ache uma cote superior para:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

A conta não fecha, apesar do chute inicial estar correto! Vamos reforçar a hipótese de indução: $T(n) \leq cn - b$.

Método da Substituição

Exemplo

Ache uma cote superior para:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

Chute: $T(n) \leq cn - b$:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(cn/2 - b) + 1 \\ &= cn - 2b + 1 \\ &\leq cn - b \quad \diamond\ \forall n > n_0 \text{ suficientemente grande} \wedge b \geq 1 \end{aligned}$$

Sumário

Método da Substituição

Mudança de Variáveis

- Para simplificar a resolução de recorrências, podemos fazer mudanças de variáveis.

Método da Substituição

Exemplo

Ache uma cota superior para:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \lg n$$

Defina $m := \lg n$.

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$$

Defina $S(m) = T(2^m)$.

$$S(m) = 2S(m/2) + m$$

Sabemos que $S(m) \in O(m \lg m)$. Trocando de volta as variáveis, temos: $S(m) \in O(m \lg m) = O(\lg n \lg \lg n)$.