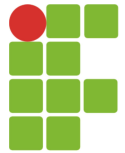
# NP-Completude: Tratamento

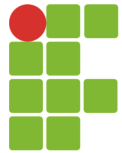
## Análise de Algoritmos – Ciência da Computação


Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Instituto Federal de Brasília, Câmpus Taguatinga

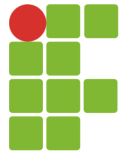


# Sumário



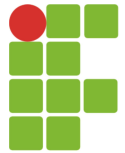
# Tratamento de Problemas $\mathcal{NP}$

- A literatura denomina os problemas que estão em $\mathcal{NP}$ como intratáveis.
- Na prática não é bem assim . . .
- Mesmo se um problema for $\mathcal{NPC}$ ainda há esperança.

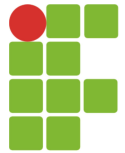


# Tratamento de Problemas $\mathcal{NP}$

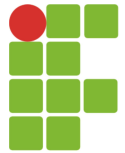
- Se a entrada for suficientemente pequena, algoritmos força-bruta podem fornecer uma resposta exata em tempo hábil.
- Casos específicas de problemas $\mathcal{NPC}$ podem ser resolvidas em tempo polinomial.
  - Maior caminho em DAGs.
  - Coloração de vértices quando há apenas duas cores.
- Algoritmos heurísticos: utilizam técnicas heurísticas que sacrificam a qualidade de resposta em prol de uma complexidade menor. Geralmente não garantem uma distância mínima da solução ótima.
- Algoritmos aproximados: possuem uma complexidade viável e garantem uma qualidade da resposta próxima da ideal.
- Focaremos em Algoritmos Aproximados.



# Sumário



# Sumário

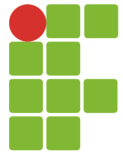


# Parâmetros de Aproximação

## Definição (Parâmetro de Aproximação)

Dizemos que um algoritmo para um determinado problema possui um parâmetro de aproximação $\rho$ se, para qualquer entrada de tamanho $n$, o custo $C$ produzido pela solução está a um fator $\rho(n)$ do custo $C^*$ da solução ótima.

Chamamos o algoritmo de $\rho(n)$-algoritmo de aproximação.

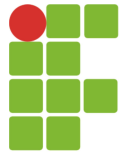


# Parâmetros de Aproximação

- Matematicamente, a definição anterior pode ser expressa como:

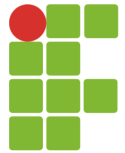
$$\max\left\{\frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C}\right\} \leq \rho(n)$$

- Funciona independentemente do problema ser de maximização ou minimização.
- Note que um algoritmo exato de acordo com esta definição sempre possui parâmetro de aproximação igual a $1$.
- Temos $1 \leq \rho(n)$.

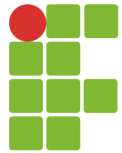


# Algoritmos Aproximados

- Veremos agora alguns problemas em $\mathcal{NPC}$ que admitem um $\rho(n)$-algoritmo de aproximação.

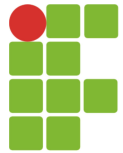


# Sumário



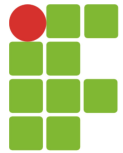
# Cobertura de Vértices

- Vimos anteriormente que o problema da Cobertura de Vértices (`VC`) consiste em encontrar um conjunto $V' \subseteq V$, tal que $|V'| \leq k$ e toda aresta incide nos vértices da cobertura.
- O problema de otimização correspondente, `VC-OPTM`, consiste em encontrar a cobertura mínima, ou seja, aquela com o menor número de vértices possível.



# Cobertura de Vértices

- Sabemos da dificuldade do problema, já que VC está em $\mathcal{NPC}$. Assim VC-OPTM é pelo menos tão difícil quanto.
- Atacaremos ele utilizando um algoritmo aproximado.



# VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

**Algorithm 1:** APPROX-VERTEX-COVER$(G)$

**Input:** $G$

**Output:** Cobertura aproximada de $G$

1 $C \leftarrow \emptyset$

2 $E' \leftarrow G.E$

3 **while** $E' \neq \emptyset$ **do**

    `// Escolha de uma aresta arbitrária`

4 Seja $(u, v)$ uma aresta arbitrária de $E'$

    `// Inserção de` $u$ `e` $v$ `na cobertura aproximada`

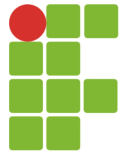
5 $C \leftarrow C \cup \{u\} \cup \{v\}$

    `// Remoção de todas as arestas incidentes nos nós incluidos na cobertura`

6 Remova de $E'$ todas as arestas incidentes em $u$ ou $v$

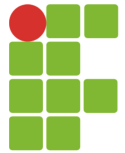
`// Retorna a cobertura aproximada`

7 **return** $C$



# VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

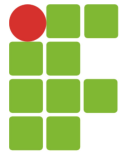
- Claramente o algoritmo leva tempo $O(|V|^2)$ se utilizada uma matriz de adjacências.
- Mostraremos agora que o algoritmo é de fato um $2$-algoritmo de aproximação.



# VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

## Theorem

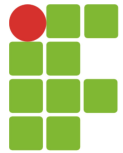
APPROX-VERTEX-COVER *é um 2-algoritmo de aproximação de tempo polinomial.*



# VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

## Demonstração

O conjunto $C$ retornado pelo algoritmo certamente é uma cobertura, uma vez que o algoritmo prossegue até remover todas as arestas de $G.E$ e portanto, todas estão cobertas por $C$.
Olhemos para a escolha das arestas feita na linha $4$ do algoritmo. Seja $A$ o conjunto de arestas escolhido pelo algoritmo. Uma cobertura ótima $C^*$ precisa incluir pelo menos uma das extremidades de cada $e \in A$.
Além disso, podemos concluir que nenhum vértice de uma extremidade de $e \in A$ se liga a outro vértice que está em uma das extremidades de $e' \in A$, devido à linha $6$ do algoritmo.



# VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

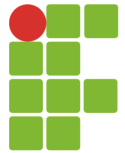
## Demonstração

Conseguimos concluir então que:

$$|C^*| \geq |A|$$

Ao mesmo tempo, cada execução da linha $5$ pega as duas extremidades de cada aresta de $A$, logo podemos concluir que:

$$C = 2|A|$$



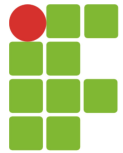
# VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

## Demonstração

Combinando as duas desigualdades, temos:

$$\begin{aligned} |C| &= 2|A| \\ &\leq 2|C^*| \end{aligned}$$

□

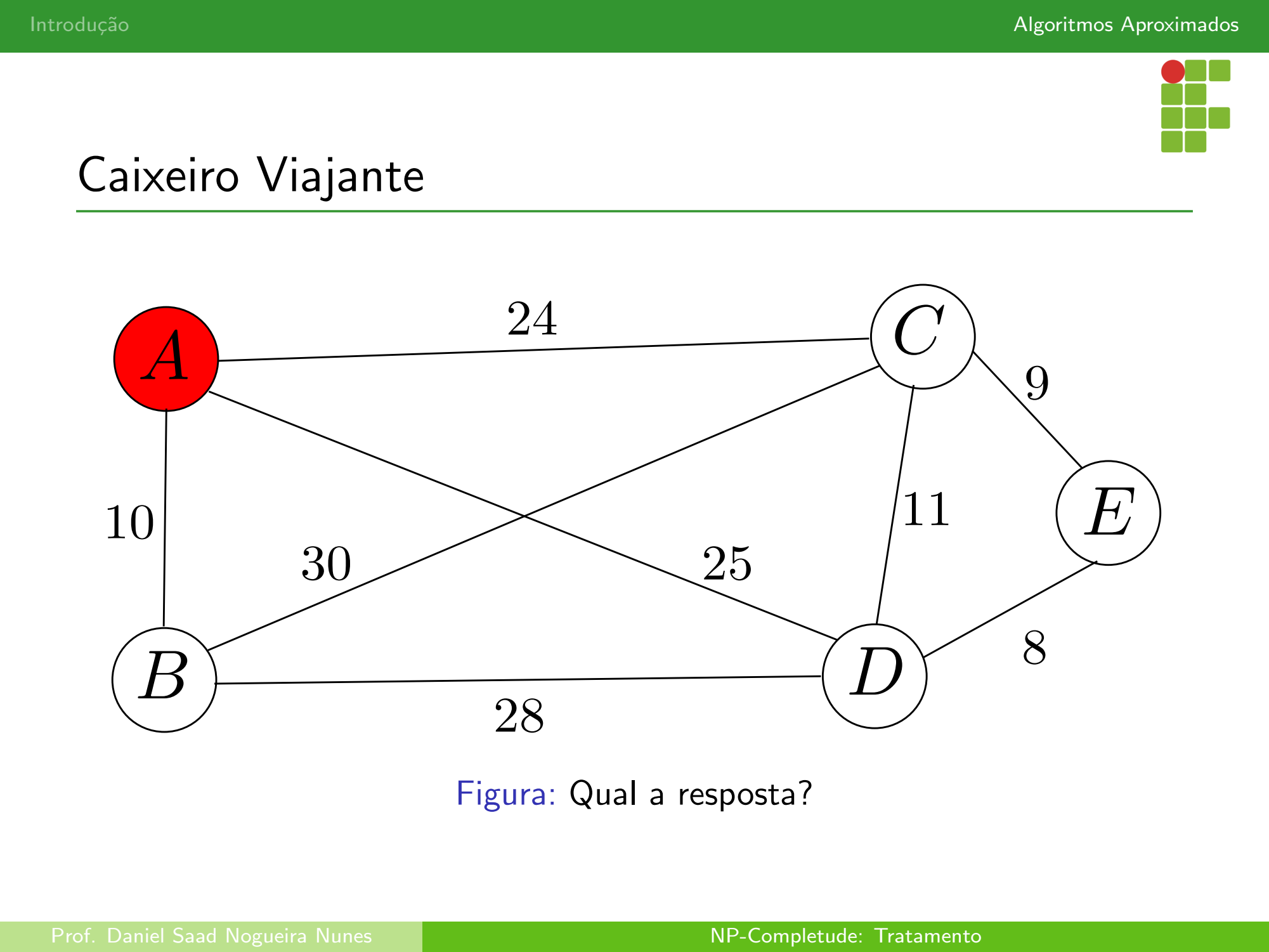


# Caixeiro Viajante

## Definição (TSP-OPTM)

A versão de otimização do problema do Caixeiro Viajante (TSP) consiste em, dado um grafo $G = (V, E)$ com uma função $c : E \to \mathbb{R}^+$, determinar um ciclo hamiltoniano $G$ de menor custo, ou seja, um ciclo que visita cada cidade apenas uma vez e volta na cidade original com menor custo possível.

- **Entrada**: $G = (V, E)$.
- **Saída**: o valor do ciclo hamiltoniano com menor custo possível.

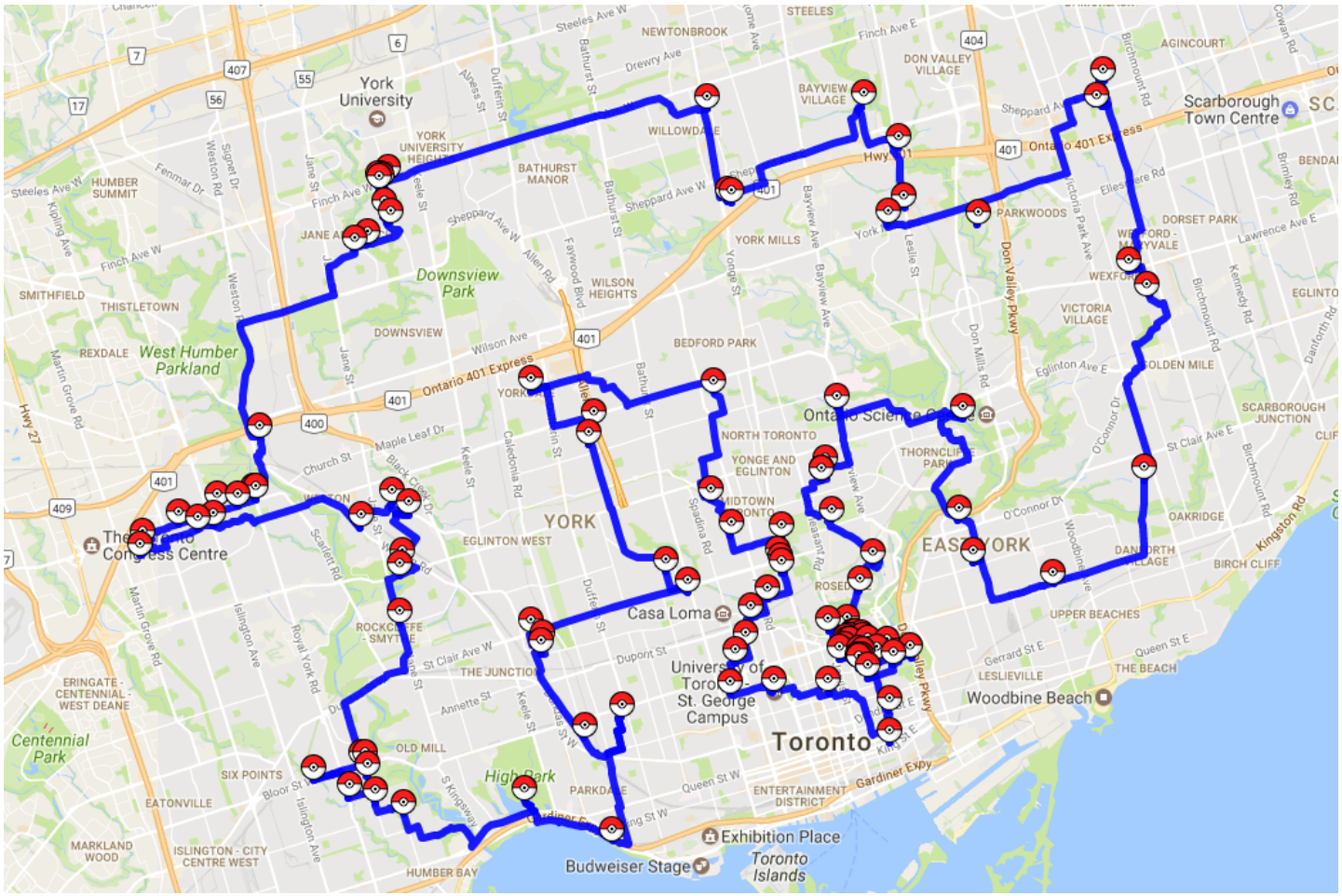


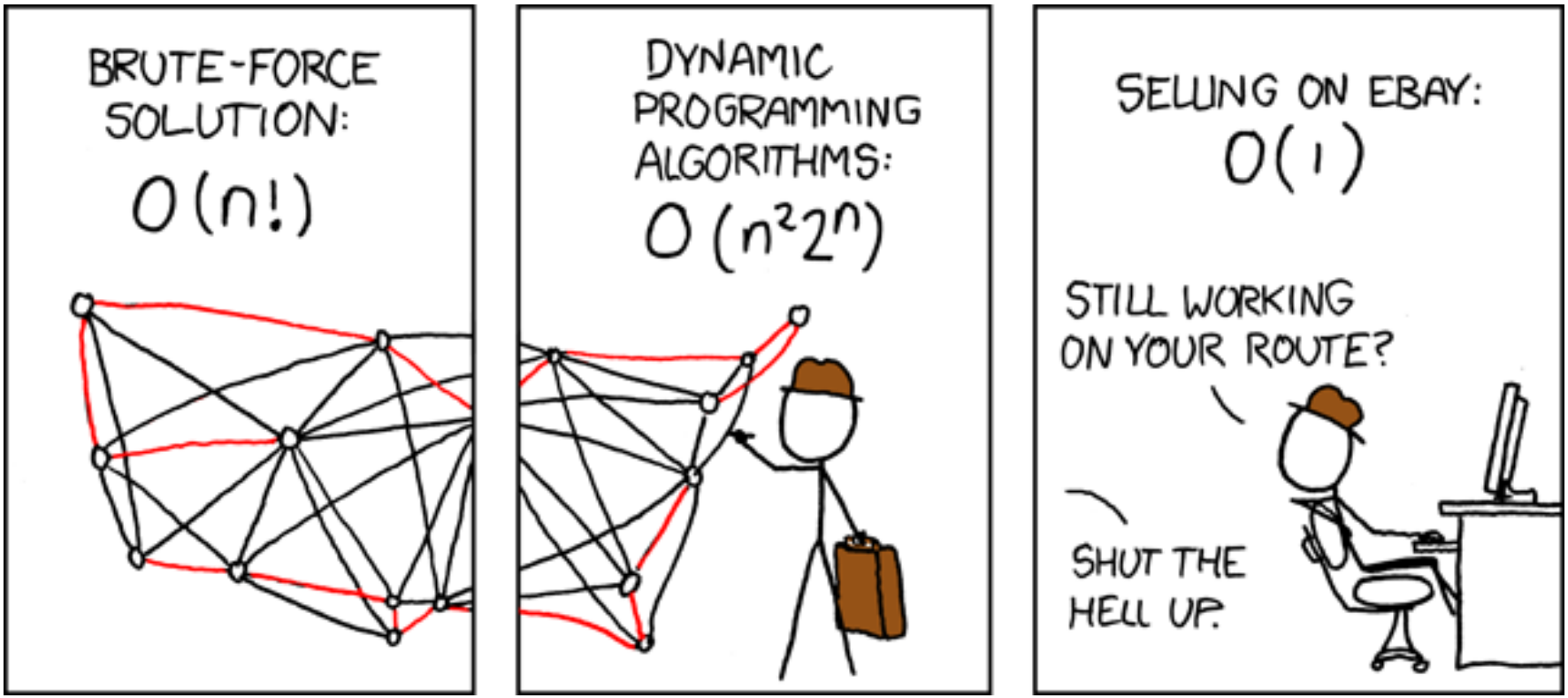
# Caixeiro Viajante



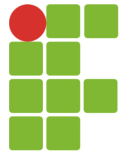

Figura: Qual a resposta?

# Caixeiro Viajante



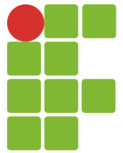


# Caixeiro Viajante



# Caixeiro Viajante

- Este é um problema difícil, uma vez que a versão de decisão do problema, TSP, está em $\mathcal{NPC}$.
- Como atacá-lo através de algoritmos aproximados?
- De fato, apenas a versão do TSP-OPTM que obedece a desigualdade triangular possui soluções aproximadas conhecidas.



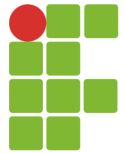
# Desigualdade Triangular

## Definição (Desiguldade Triangular para Grafos)

Uma função de custo $c$ satisfaz a desigualdade triangular quando, para quaisquer vértices $u$, $v$, $w \in V$, temos:

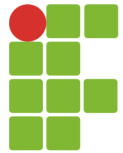
$$c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$$

Ou seja, não é mais custoso ir diretamente a um outro nó do que tentar pegar um atalho através de um terceiro.



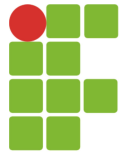
# Desigualdade Triangular

- Apesar de limitar a apenas grafos que obedecem a desigualdade triangular, vários grafos em problemas reais possuem esta propriedade.
- A distância euclidiana satisfaz a propriedade de distância triangular, logo qualquer grafo que seja modelado como pontos em um plano cartesiano também possui tal propriedade.



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

- Mostraremos agora como projetar um algoritmo com parâmetro de aproximação $2$ para TSP-OPTM.



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

**Algorithm 2:** APPROX-TSP-TOUR$(G, c, r)$

**Input:** $G, c, r$

**Output:** Solução aproximada para TSP

// Computa a árvore geradora mínima de $G$ com raiz em $r$

1 $T \leftarrow$ MINIMUM-SPANNING-TREE$(G, c, r)$

// Executa a busca pré-ordem em $T$ e retorna a lista dos nós

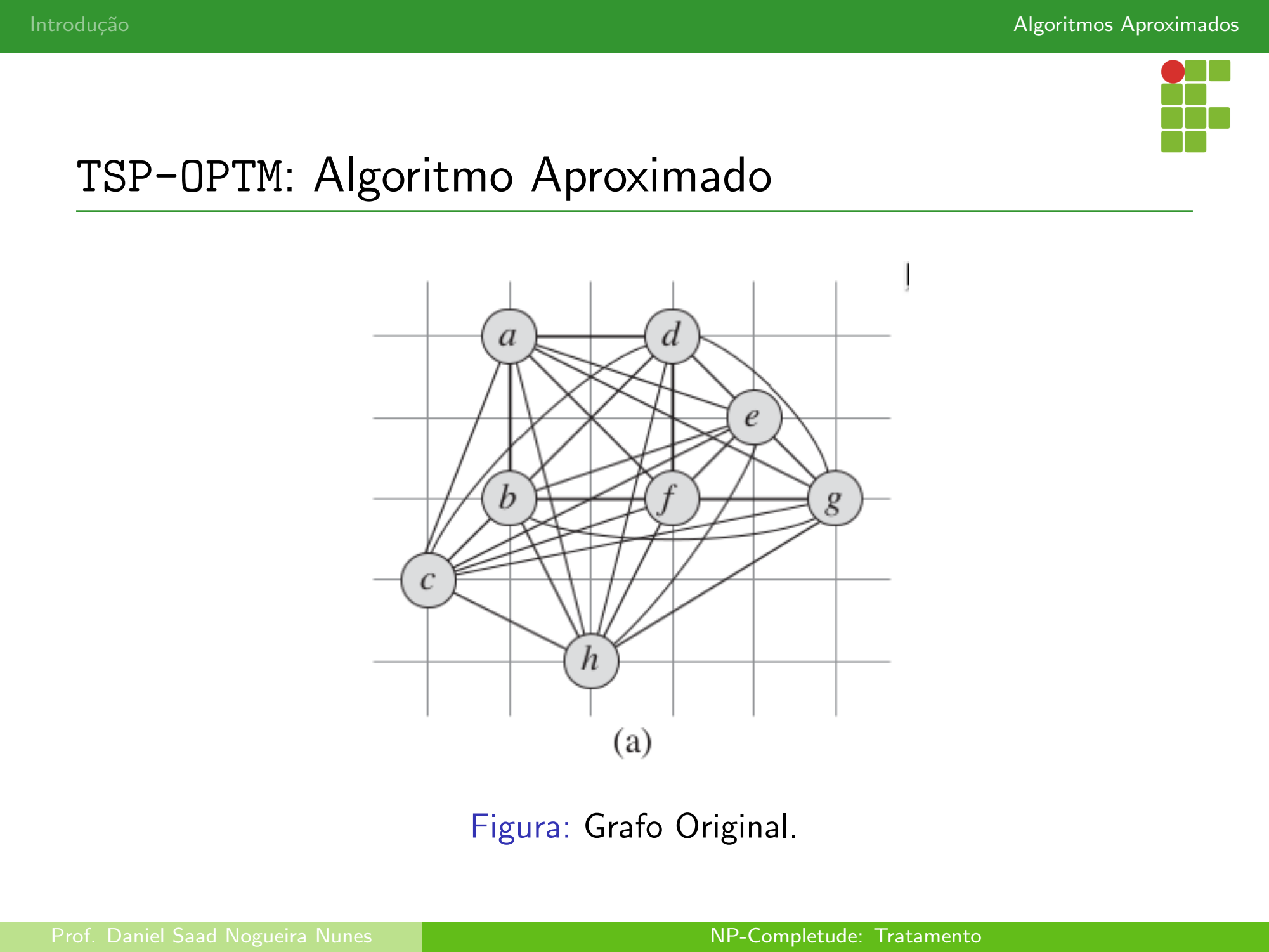
2 $H \leftarrow$ PREORDER$(T, r)$

// Remove nós duplicados do passeio

3 REMOVE-DUPLICATE$(H)$

// Retorna o ciclo hamiltoniano

4 **return** $(H)$



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado




Figura: Grafo Original.

# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

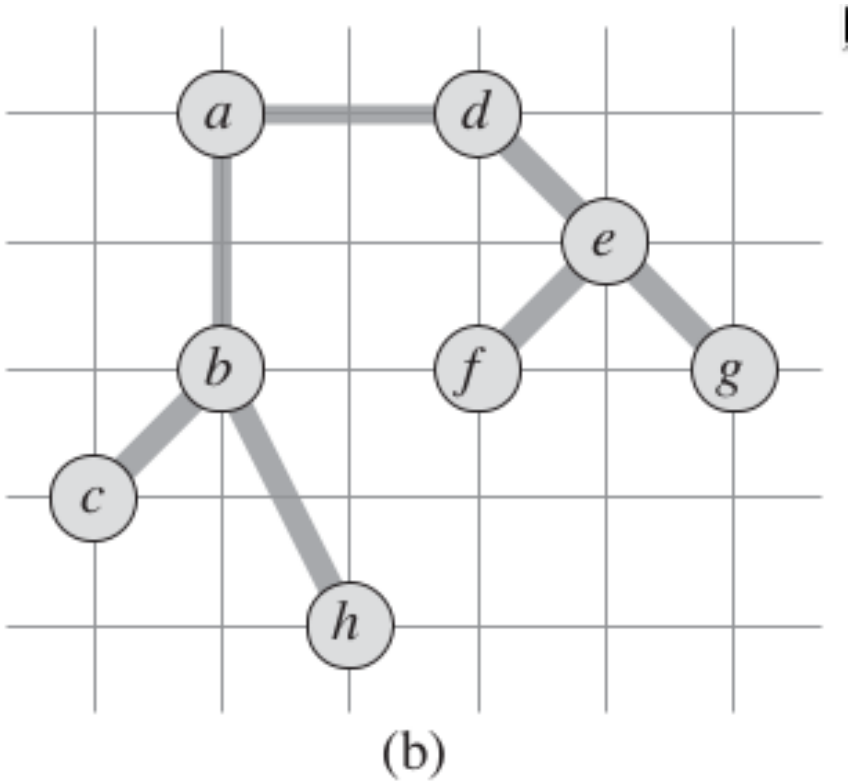
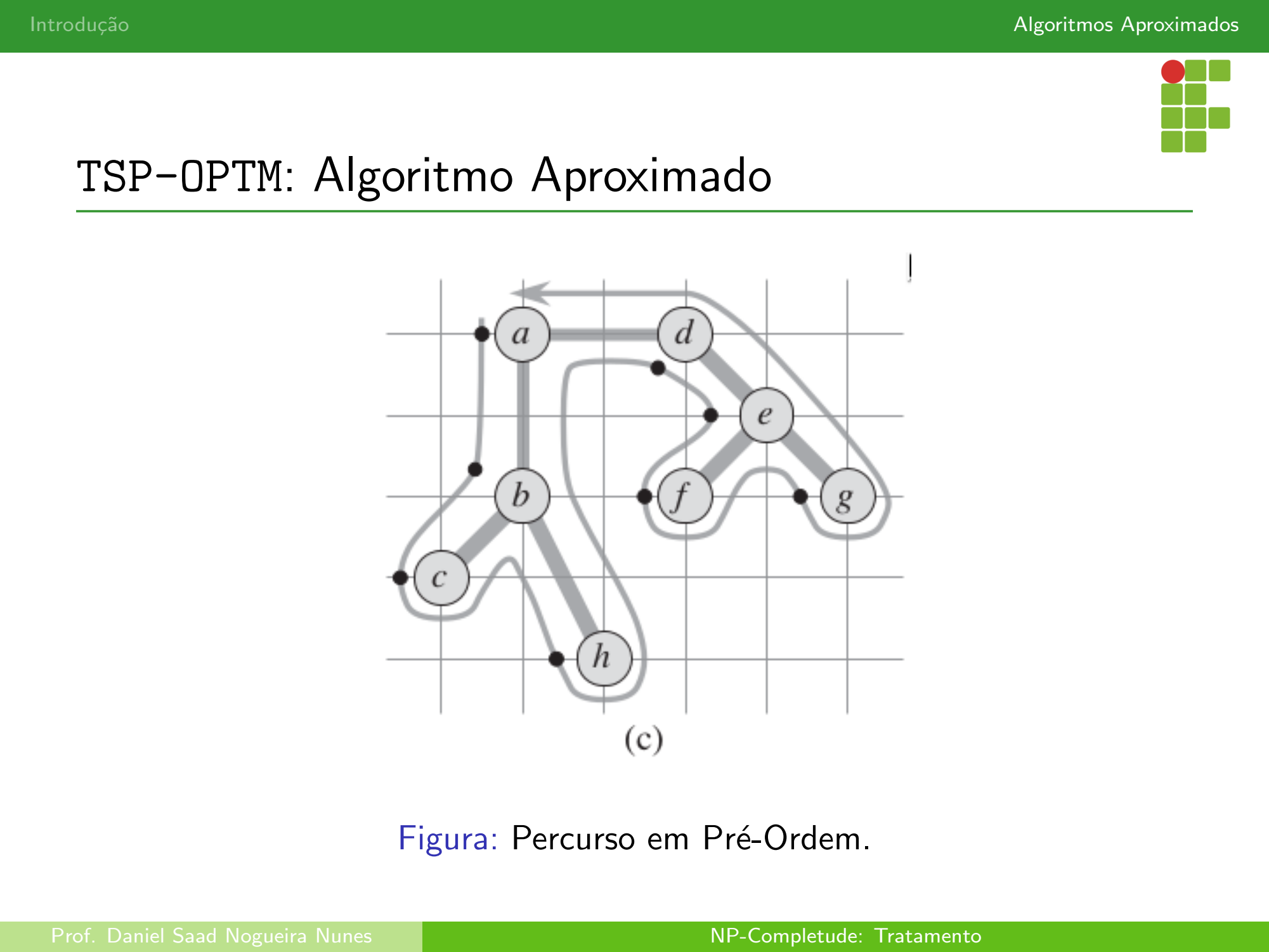


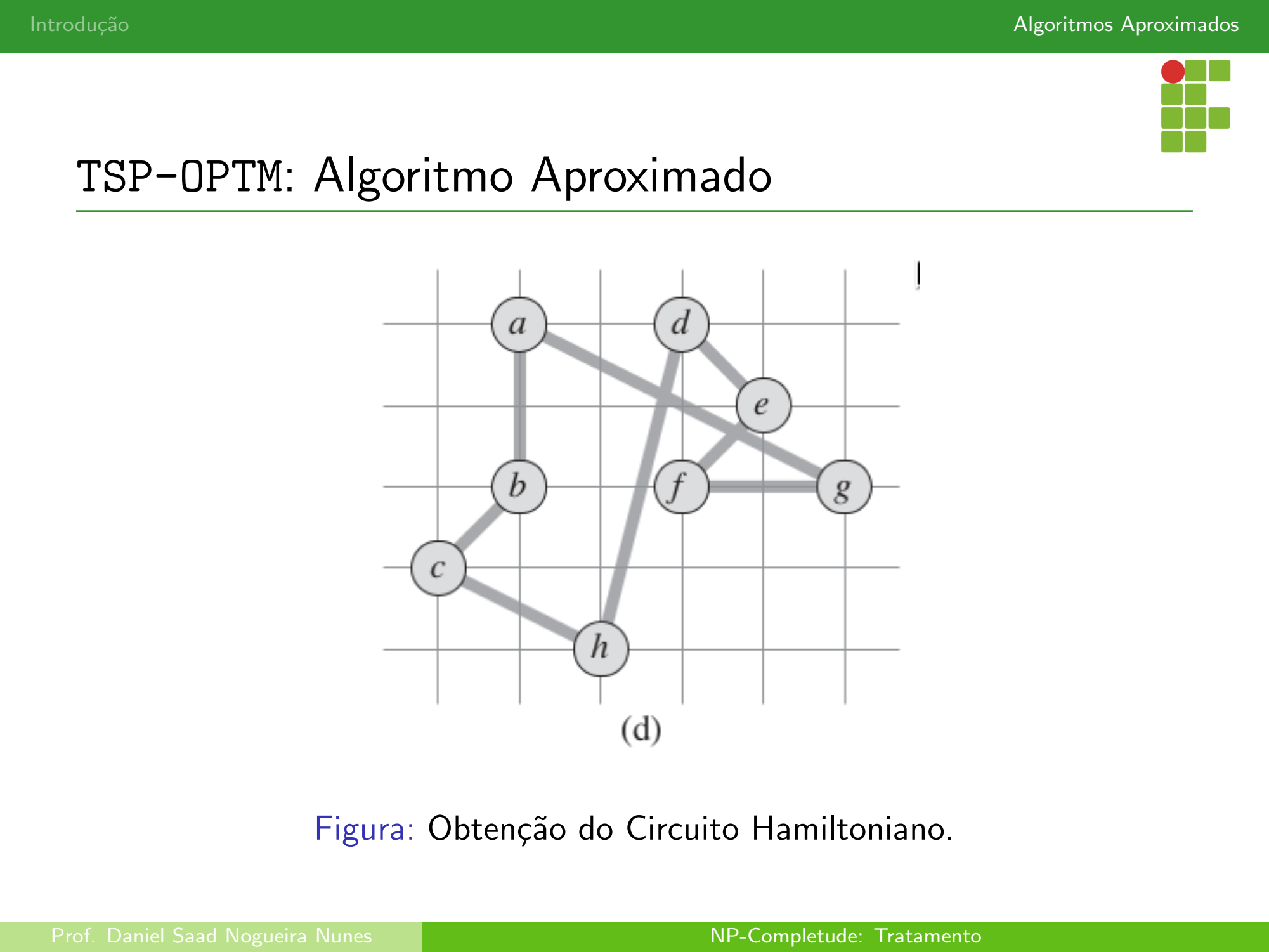

Figura: Árvore Espalhada Mínima.



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado



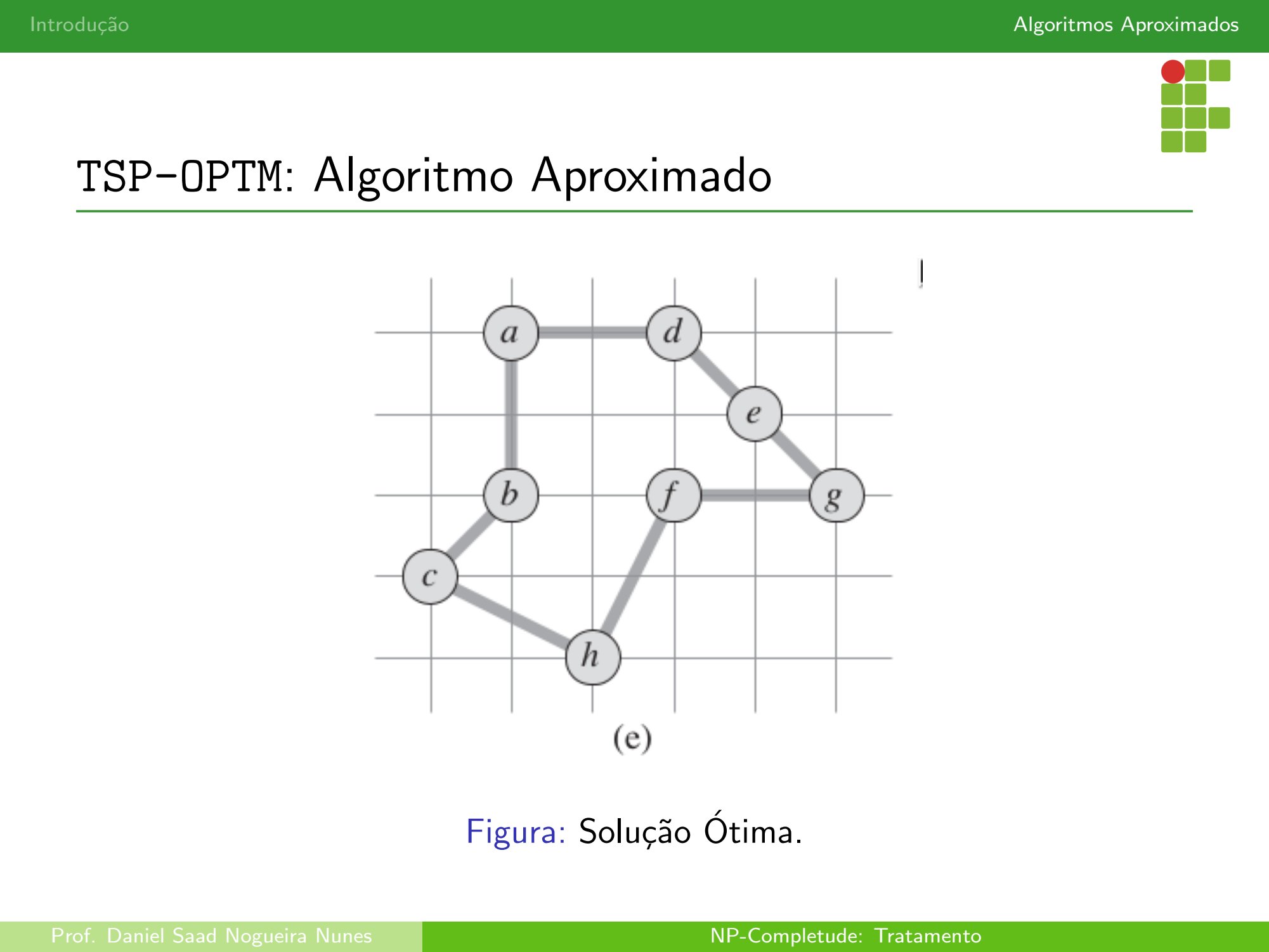

Figura: Percurso em Pré-Ordem.



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado



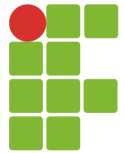

Figura: Obtenção do Circuito Hamiltoniano.



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado



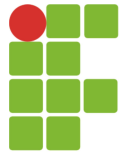

Figura: Solução Ótima.



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

## Theorem

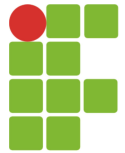
APPROX-TSP-TOUR *é um 2-algoritmo de aproximação para o* TSP-OPTM *para grafos que obedecem a desigualdade triangular.*



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

## Demonstração

Primeiramente, é fácil ver que o algoritmo APPROX-TSP-TOUR executa em tempo polinomial dominado pela construção da árvore geradora mínima.
Precisamos mostrar agora que a solução obtida está no máximo a um fator de $2$ da solução ótima.

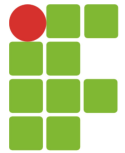


# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

## Demonstração

Seja $c(T)$ o custo da árvore geradora mínima obtida e $c(H^*)$ a melhor resposta possível. Claramente temos:

$$c(T) \leq c(H^*)$$



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

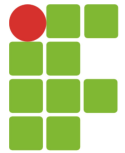
## Demonstração

Durante o percurso em $T$, foi obtido uma lista de vértices $W$ que representa o passeio na árvore geradora mínima. Claramente, como o passeio atravessa cada aresta duas vezes, temos:

$$c(W) = 2c(T)$$

Logo:

$$c(W) \leq 2c(H^*)$$



# TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

## Demonstração

No entanto, o passeio não necessariamente corresponde a um ciclo Hamiltoniano. Ao desprezar os nós repetidos no passeio e utilizando a desigualdade triangular, podemos obter um ciclo hamiltoniano $H$, que com certeza possui:

$$c(H) \leq C(W)$$

Observando as desigualdades, é fácil concluir que:

$$c(H) \leq 2c(H^{\star})$$

□