Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília – Câmpus Taguatinga
Ciência da Computação – Análise de Algoritmos
Lista de Exercícios – Relações de Recorrência
Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Aluno: ______________________________
Matrícula: ______________________________

Exercício 1

Demonstre as questões abaixo por indução matemática.

(a) Mostre que a série abaixo possui esta desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < 1$$

(b) Demonstre que $x^n - y^n$ é divisível por $x - y$, para todos os números naturais x, y com $x \neq y$ e $n \in \mathbb{N}$.

(c) O princípio das casas dos pombos afirma que, se temos $n+1$ bolas $n \geq 1$ e n caixas, e colocarmos todas as bolas nas caixas, pelo menos uma caixa terá mais que uma bola. Demonstre esse princípio.

(d) Mostre que o termo geral de uma progressão aritmética é dado por:

$$a_n = a_0 + rn$$

(e) Mostre que a soma de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{n(a_0 + a_{n-1})}{2}$$

(f) Mostre que o termo geral de uma progressão geométrica é dada por:

$$a_n = a_0 r^n$$

(g) Mostre que a soma de uma progressão aritmética, com $r \neq 1$ é dada por:

$$S_n = \frac{a_0(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r}$$

Exercício 2

Prove que $T(n) \in \Theta(n^2)$ de modo que:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(n), & n > 1 \end{cases}$$

Exercício 3

Prove pelo método da substituição que $T(n) \in \Theta(\log n)$ de modo que:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1), & n > 1 \end{cases}$$

Exercício 4

Demonstre que a busca binária possui tempo de pior caso $\Theta(\log n)$.

Exercício 5

Ache uma cota assintoticamente justa para:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 3T(n/4) + \Theta(n^2), & n > 1 \end{cases}$$

Exercício 6

Prove que $T(n) \in \Theta(n \log n)$ de modo que:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + \Theta(n), & n > 1 \end{cases}$$

Exercício 7

Prove pelo método mestre que a seguinte relação de recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 4T(n/3) + n, & n > 1 \end{cases}$$

pertence à $\Theta(n^{\log_3 4})$.

Tente mostrar o mesmo pelo método da substituição e veja que o "chute" $T(n) \leq cn^{\log_3 4}$ irá falhar, sendo necessário reforçar a **hipótese** de indução.

Exercício 8

Prove pelo método mestre que a seguinte relação de recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 4T(n/2) + n^2, & n > 1 \end{cases}$$

pertence à $\Theta(n^2 \lg n)$.

Exercício 9

Ache uma cota justa para a relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 2T(n-1) + 1, & n > 1 \end{cases}$$

Exercício 10

Ache uma cota justa para a relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 3T(\sqrt{n}) + \lg n, & n > 1 \end{cases}$$

Utilizando mudança de variáveis.

Exercício 11

Utilize o método da iteração para achar uma aproximação de uma cota inferior para a relação de recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ T(n/3) + T(2n/3) + \Theta(n), & n > 1 \end{cases}$$

Prove a cota inferior com o método da substituição.

Exercício 12

Utilize o método mestre para descobrir uma cota justa para as relações de recorrência a seguir. Considere que o caso base é simples o suficiente:

(a) $T(n) = 2T(n/4) + 1$

(b) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

(c) $T(n) = 2T(n/4) + n$

(d) $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

Exercício 13

O método mestre pode ser aplicado para a relação de recorrência a seguir?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 4T(n/2) + n^2 \lg n, & n > 1 \end{cases}$$

Dê uma cota superior justa para $T(n)$.