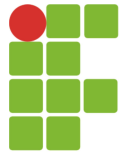
# Casamento de Padrões

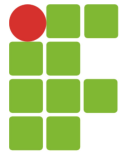
## Análise de Algoritmos – Ciência da Computação


Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

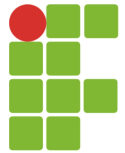
Instituto Federal de Brasília,
Câmpus Taguatinga



# Sumário

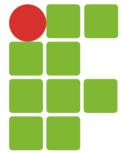


# Sumário



# Introdução

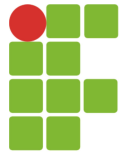
- O Problema de Casamento de Padrões está entre um dos mais estudados em Computação
- Sua solução proporciona Aplicações nas mais diversas áreas.



# Aplicações

## Biologia Computacional

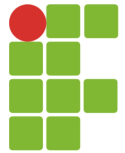
- Alinhamento Múltiplo.
- Mapeamento de Sequências.
- Montagem.



# Aplicações

## Compiladores

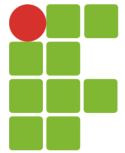
- Identificação de Tokens.
- Unificação.



# Aplicações

## Editores de Texto

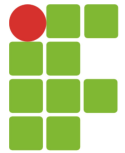
- Identificar padrões no arquivo.
- Substituir padrões por outros.
- Casamento de expressões regulares.



# Aplicações

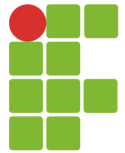
## Recuperação de Informação

- Retornar os documentos que contém o padrão buscado.
  - Buscadores!
  - Big Data? Por trás disso tudo temos algoritmos. . .
  - A essência da Computação são algoritmos.
  - Tecnologia $\neq$ Computação.



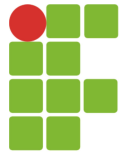
# Introdução

- O Casamento de Padrões pode ser:
  1. Exato: ocorrências do Padrão no Texto sem nenhum erro.
  2. Aproximado: ocorrências do Padrão no Texto permitindo até $k$ erros segundo uma métrica de distância.
     - Casamento Exato $=$ Casamento Aproximado quando $k = 0$.
  3. Focaremos em casamento exato de padrões.



# Introdução

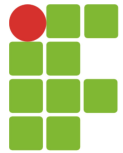
- Antes de definir os problemas, precisamos de alguns conceitos iniciais.



# Conceitos Básicos

## Definição (Palavras)

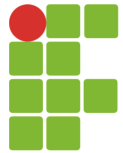
- Palavras (*strings*) são sequências sobre o alfabeto $\Sigma$.
- O conjunto de todos as possíveis palavras é denotada por $\Sigma^\star$.
- Em especial, temos a palavra vazia $\varepsilon \in \Sigma^\star$.
- O $i$-ésimo símbolo de uma palavra $S$, é denotado por $S[i]$.



# Conceitos Básicos

## Definição (Tamanho de Palavras)

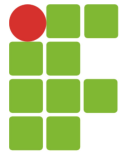
- O tamanho de uma palavra $S$ é detonado por $|S|$, e contém a quantidade de símbolos em $S$.
- Em especial, $|\varepsilon| = 0$.



# Conceitos Básicos

## Definição (Subpalavras)

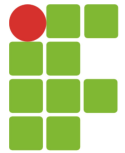
- Uma subpalavra de $S$ é denotada por $S[i, j]$, e é constituída pelos símbolos $S[i]S[i+1]\ldots S[j]$ desde que $0 \leq i \leq j < |S|$. Caso contrário, $S[i, j] = \varepsilon$.



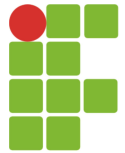
# Conceitos Básicos

## Notação (Texto e Padrão)

- Em especial, o texto é uma palavra denotada por $T$, sendo $|T| = n$.
- Já o padrão é denotado por $P$, tendo tamanho $|P| = m$.

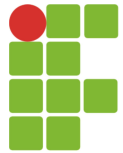


# Sumário



# Casamento Exato

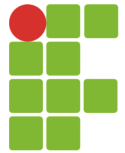
- O casamento exato de padrões procura identificar as ocorrências de um padrão em um dado texto.



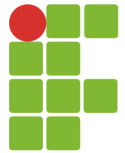
# Casamento Exato

## Casamento Exato

- Entrada: $P$ e $T$.
- Saída: $occ = \{k | P[0, m-1] = T[k, k+m-1]\}$.

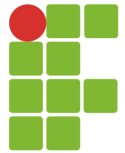


# Sumário



# Algoritmo Ingênuo

- O algoritmo ingênuo é capaz de resolver o problema do casamento exato de padrões.
- Ideia: força-bruta. Comparamos o padrão com todas as posições possíveis do texto.
- Você é capaz de delinear o algoritmo subjacente?



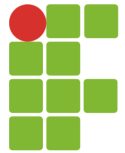
# Algoritmo Ingênuo

**Algorithm 1:** NAIVE-MATCHER$(P, T)$

**Input:** $T, P$

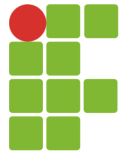
**Output:** $occ = \{k | P[0, m-1] = T[k, k+m-1]\}$

```
1 for( i ← 0; i < n − m + 1; i++ )
2     found ← true
3     for( j ← 0; j < m; j++ )
4         if( T[i + j] ≠ P[j] )
5             found ← false
6     if( found )
7         REPORT-MATCH(i)
```

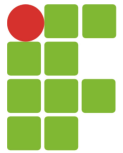


# Algoritmo Ingênuo

- Qual a complexidade de tal algoritmo?
- $\Theta(n \cdot m)$

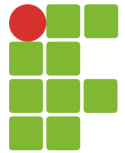


# Sumário



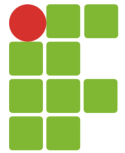
# Rabin-Karp

- Tome $P = aaaaaab$ e $T = aaaaaaaaaaaaaaaaaaaa$.
- O Algoritmo Ingênuo é extremamente ineficiente, pois ele precisa inspecionar todos os símbolos do padrão para descobrir que $P$ não ocorre naquela posição do texto.
- O algoritmo de Rabin-Karp perde um pouco de tempo ao **preprocessar** informação do padrão de modo a agilizar a etapa de busca.



# Rabin-Karp

- Para facilitar, suponha que o alfabeto subjacente seja $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Computamos o valor do padrão módulo algum número $q$, com preferência de $q$ primo.
- Exemplo, se $P = 31415$, então $P \mod 13 = 7$.
- De maneira geral, o alfabeto tem base $d$. No caso do alfabeto de DNA, $d = 4$. Considerando proteínas $d = 20$. Considerando ASCII, $d = 255$.



# Rabin-Karp

**Algorithm 2:** RK-PREPROCESS

**Input:** $P, d, q$

**Output:** $P \mod q$

```
1 sum ← 0
2 for( i = 0; i < m; i++ )
3 |   sum = sum · d
4 |   sum ← sum + P[i]
5 return sum mod q
```

# Rabin-Karp

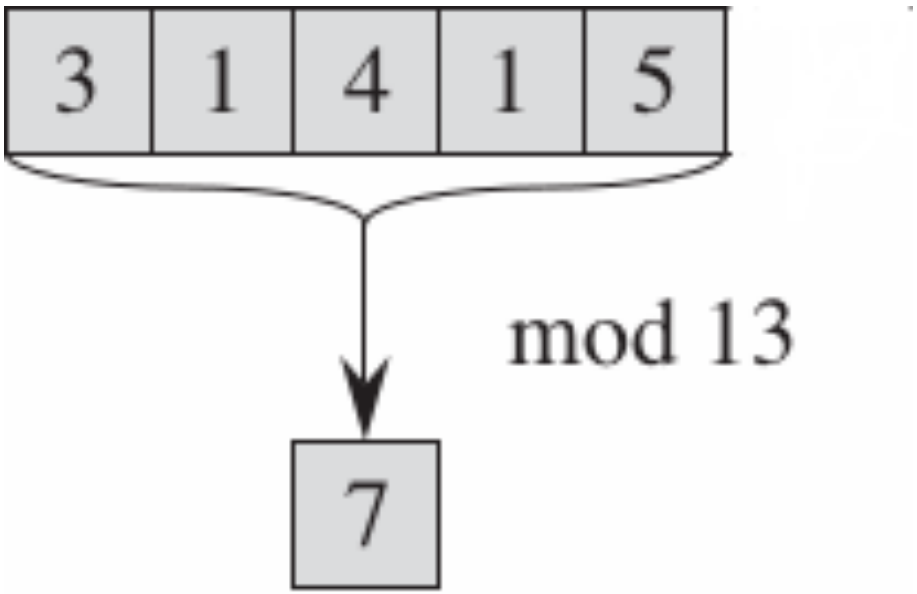
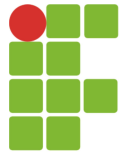



Figura: Preprocessando o padrão.



# Rabin-Karp

- A ideia do algoritmo é fazer várias comparações de caracteres através de uma única comparação de inteiros.
- Assim como o padrão, cada porção do texto a ser comparada com o padrão, é preprocessada.
- Se o valor do padrão $P$ é $k$ e o valor da porção do texto é $l$. O que podemos dizer quando:
  - $k \neq l$?
  - $k = l$?

# Rabin-Karp

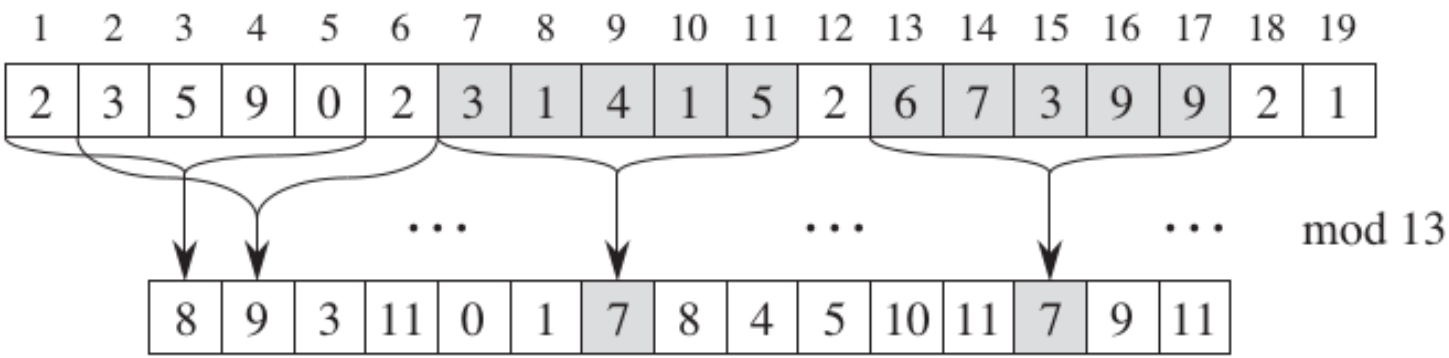
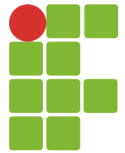
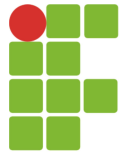



Figura: Valores das porções do texto.



# Processando o Texto

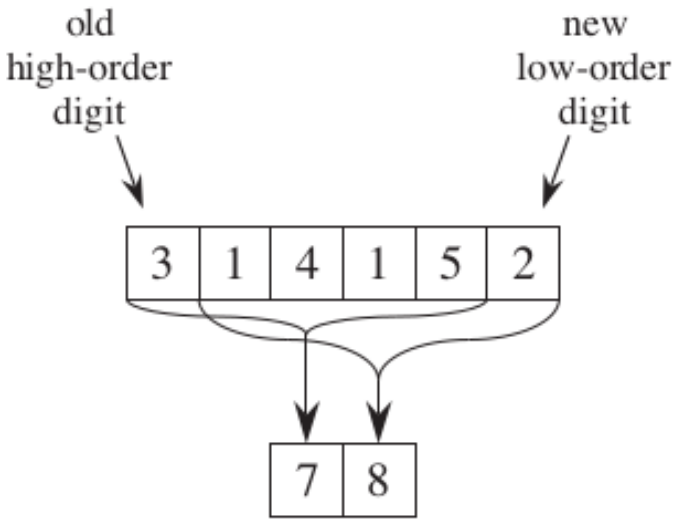
- Como converter o texto de maneira eficiente?
- Precisamos guardar o valor para cada posição do texto?



# Processando o Texto

- Como converter o texto de maneira eficiente?
- Precisamos guardar o valor para cada posição do texto?
- Na verdade não, só da porção que estamos analisando.

# Processando o Texto



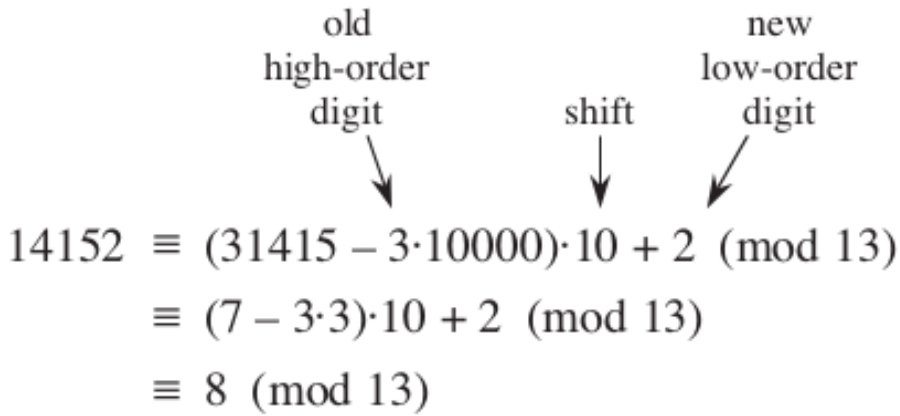
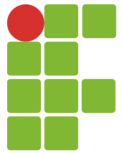




Figura: Processando o valor do texto em $O(1)$ de tempo e espaço.



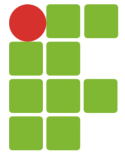
# Rabin-Karp

**Algorithm 3:** COMPARE

**Input:** $P, T, i$

**Output:** $true \Leftrightarrow P = T[i, i + m - 1]$

```
1 for( k ← 0; k < m; k++ )
2     if( P[k] = T[i + k] )
3         return false
4 return true
```



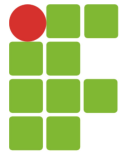
# Rabin-Karp

**Algorithm 4:** RK-MATCHER

**Input:** $P, T, d, q$

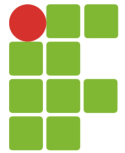
**Output:** $occ = \{k | P[0, m-1] = T[k][k+m-1]\}$

```
1  h ← d^(m−1) mod q
2  P_v = RK-PREPROCESS(P, d, q)
3  T_v = RK-PREPROCESS T[0, m − 1], d, q
4  for( i ← 0; i < n − m + 1; i++ )
5      if( P_v = T_v )
6          if( COMPARE(P, T, i) )
7              REPORT-MATCH(i)
8      if( i < n − m )
9          T_v ← (d · (T_v − T[i] · h) + T[i + m]) mod q
```



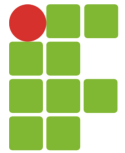
# Complexidade

- Qual a complexidade do algoritmo de Rabin-Karp?

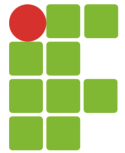


# Complexidade

- Qual a complexidade do algoritmo de Rabin-Karp?
- $O(n \cdot m)$.

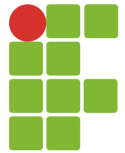


# Sumário



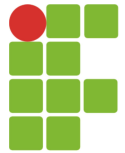
# KMP

- Qual o problema dos algoritmos anteriores?



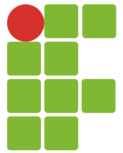
# KMP

- Qual o problema dos algoritmos anteriores?
- Eles esquecem tudo! As comparações sempre são dadas do início.



# KMP

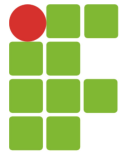
- O algoritmo KMP, descoberto por Vaughan Pratt e Donald Knuth e de maneira independente por James Morris, contorna esse problema. O algoritmo utiliza a informação aprendida durante o casamento para evitar comparações supérfluas nas próximas etapas.
- Os três se juntaram e publicaram a descoberta.
- Um dos artigos mais clássicos da área de "Stringology".
- Knuth, Donald; Morris, James H.; Pratt, Vaughan (1977). "Fast pattern matching in strings". SIAM Journal on Computing 6 (2): 323–350. doi:10.1137/0206024



# Algoritmo Ingênuo

## Exemplo

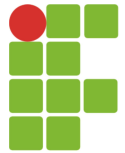
- Tome $T = xyxxyxyxyyxyxyxyyyxyxyxx$
- Considere $P = xyxyyxyxyxx$.



# Algoritmo Ingênuo

Tabela: Casamento do Padrão com o Texto.

| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $T$ : | $x$ | $y$ | $x$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $x$ |
| 0 | $P$ : | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | $P$ : | | $x$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | $P$ : | | | $x$ | $y$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | $P$ : | | | | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $y$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | $P$ : | | | | | $x$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | $P$ : | | | | | | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $x$ | | | | | | | |
| 6 | $P$ : | | | | | | | $x$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | $P$ : | | | | | | | | $x$ | $y$ | $x$ | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | $P$ : | | | | | | | | | $x$ | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | $P$ : | | | | | | | | | | $x$ | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | $P$ : | | | | | | | | | | | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $y$ | | | | | | | | |
| 11 | $P$ : | | | | | | | | | | | | $x$ | | | | | | | | | | | |
| 12 | $P$ : | | | | | | | | | | | | | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $x$ |



# KMP

- O algoritmo KMP usa a informação da porção de $P$ que causou para deslizar o padrão de maneira eficiente.
- Ele utiliza o conhecimento durante o processo de casamento para evitar comparações desnecessária.
- Vamos examinar como ele faz isso.

# KMP

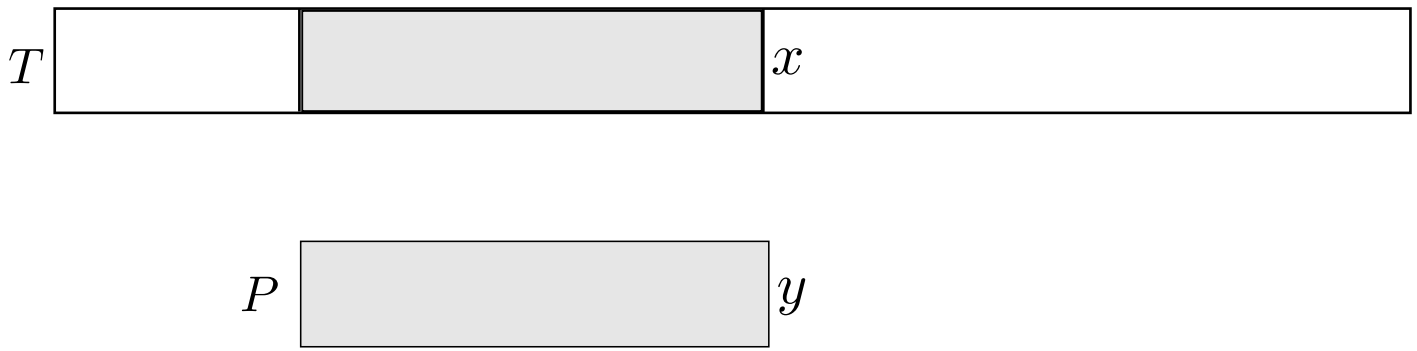



Figura: Casamento de uma porção do padrão com o texto.

- Suponha que $x \neq y$.

# KMP

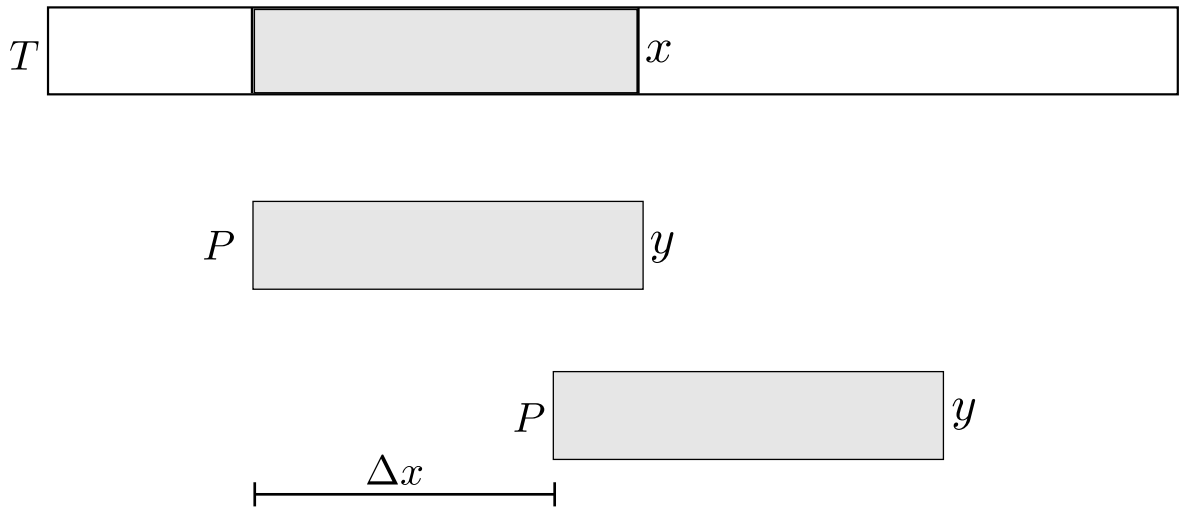



Figura: Deslizamento do padrão sobre o texto.

- Suponha que o algoritmo KMP deslize o padrão com um deslocamento $\Delta x$.
- O que podemos dizer sobre a sobreposição dos padrões para poder haver possibilidade de casamento?

# KMP

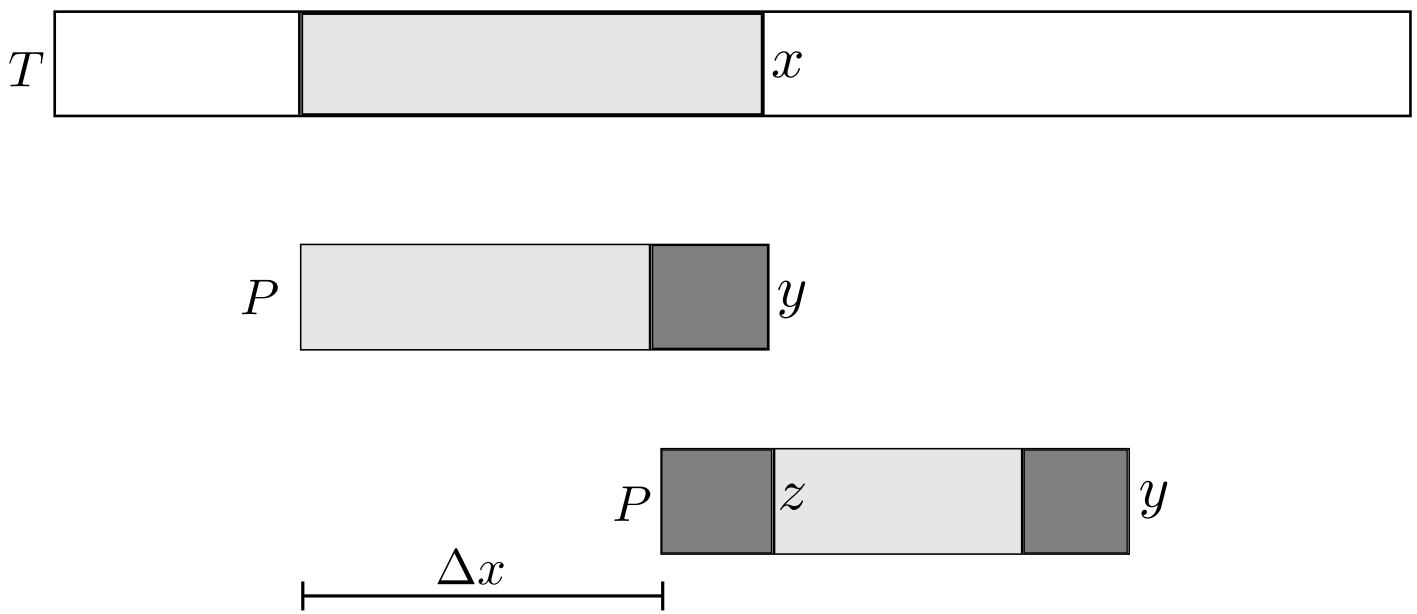



Figura: Deslizamento do padrão sobre o texto.

- Prefixo tem que ser igual a um sufixo da parte que casou.

# KMP

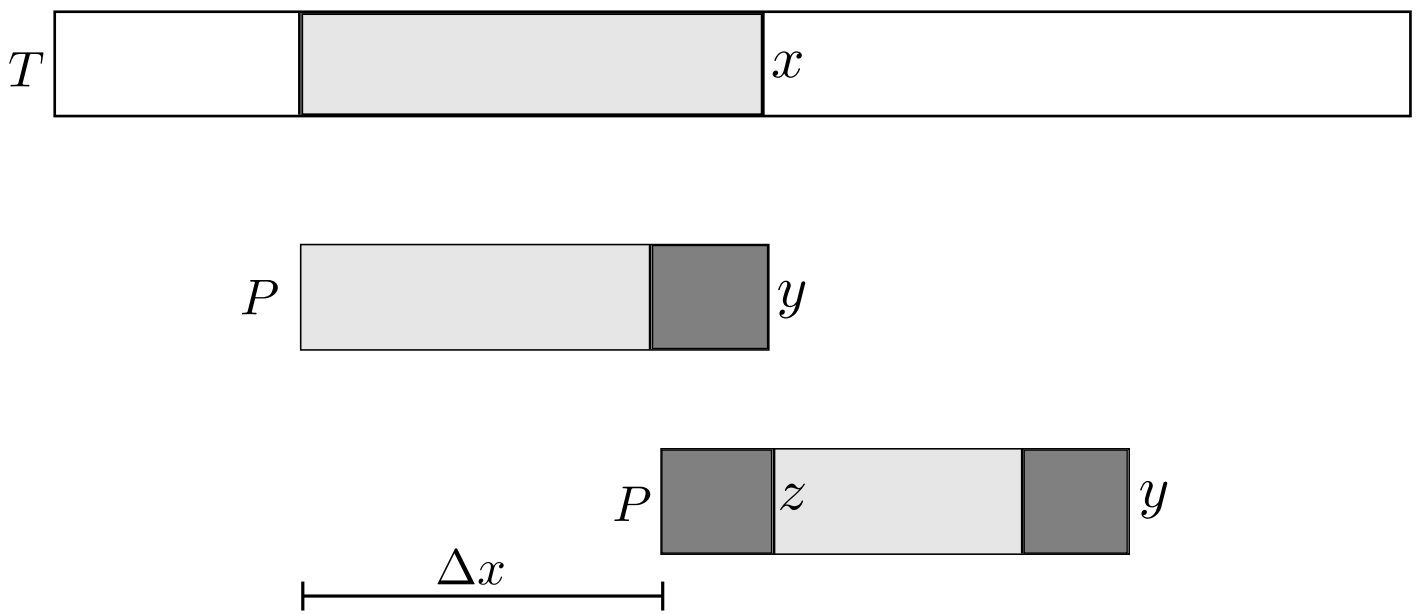



Figura: Deslizamento do padrão sobre o texto.

- Para não pular nenhuma ocorrência de $P$ em $T$, o deslocamento deve ser o menor possível que atenda a propriedade.

# KMP

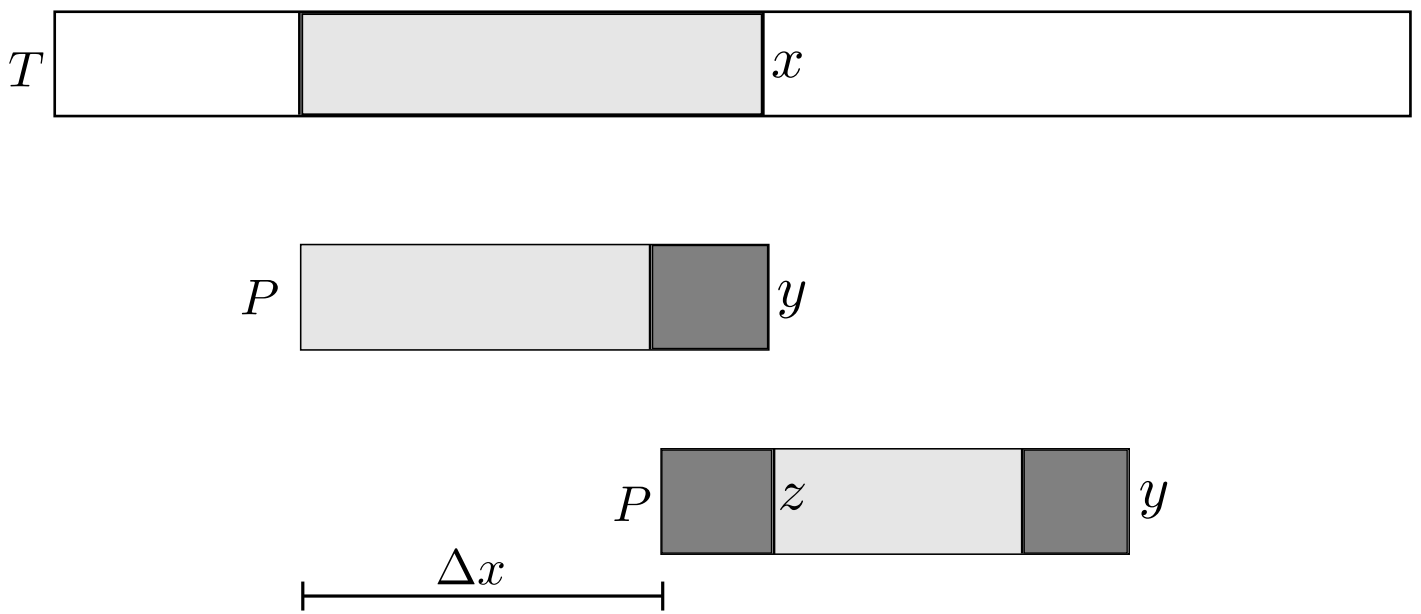
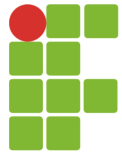



Figura: Deslizamento do padrão sobre o texto.

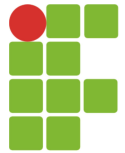
- Temos que achar o maior prefixo próprio que seja igual a um sufixo próprio da porção do Padrão que casou com o Texto.



# KMP

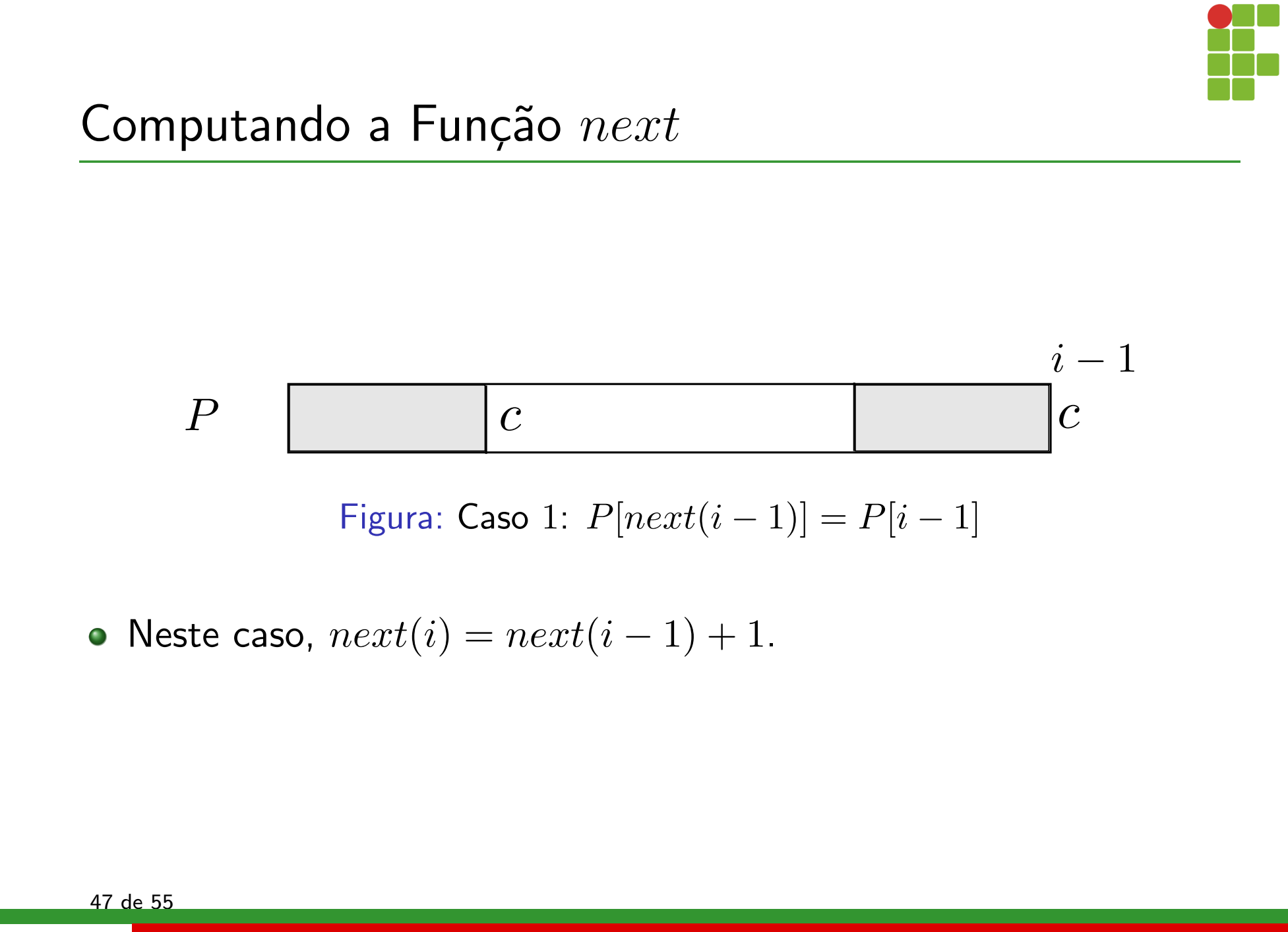
- Vamos definir nosso objeto de cálculo.
- Nossa função $next$ vai nos dar o próximo caractere do padrão que se deve começar as comparações.

$$next(i) = \begin{cases} -1, & i = 0 \\ \max\{k | P[0, k-1] = P[i-k, i-1] \end{cases}$$



# Computando a Função $next$

- Como computar $next$?
- Sabemos que $next(0) = -1$. Suponha agora que queiramos computar $next(i)$ e já tenhamos computado $next(j)$ com $0 \leq j < i$.
- Como computar $next(i)$?

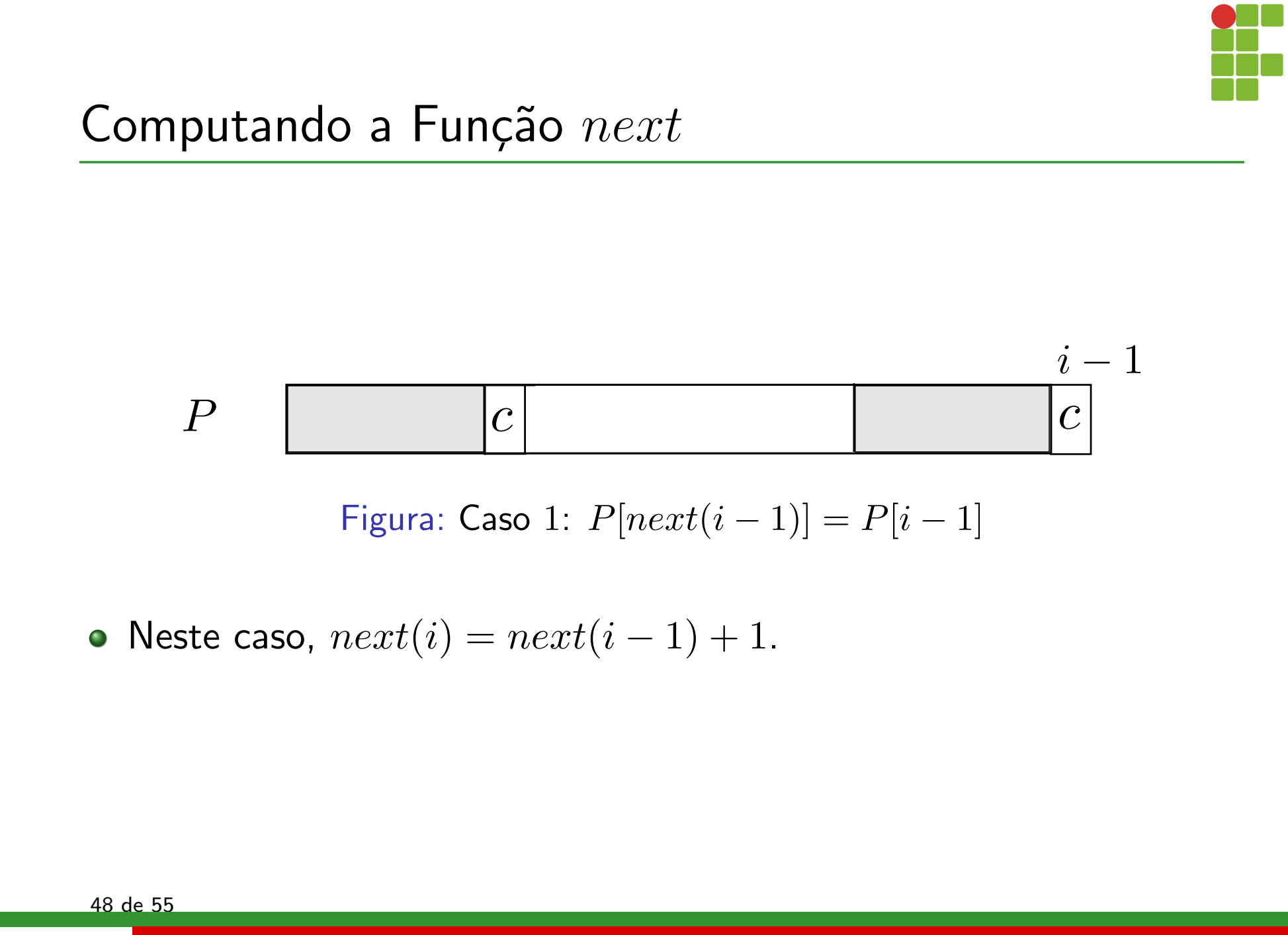


# Computando a Função $next$




Figura: Caso 1: $P[next(i-1)] = P[i-1]$

- Neste caso, $next(i) = next(i-1) + 1$.



# Computando a Função $next$




Figura: Caso 1: $P[next(i-1)] = P[i-1]$

- Neste caso, $next(i) = next(i-1) + 1$.

# Computando a Função $next$

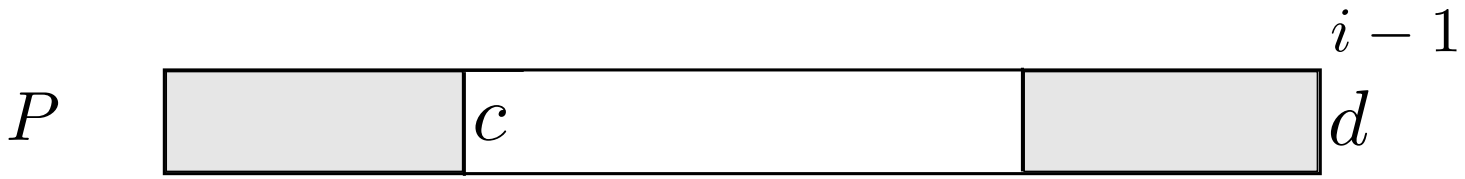
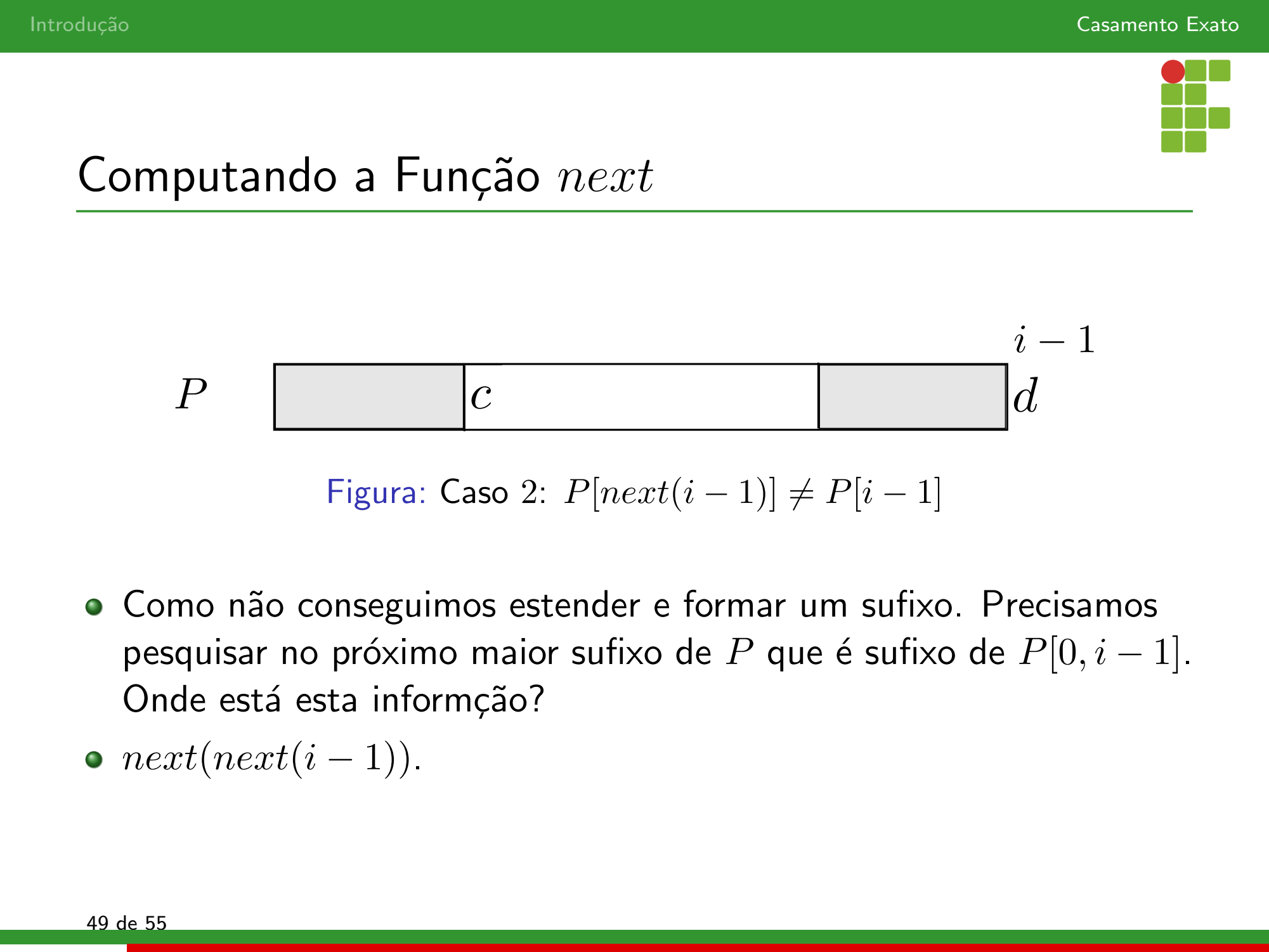



Figura: Caso 2: $P[next(i-1)] \neq P[i-1]$

- Como não conseguimos estender e formar um sufixo. Precisamos pesquisar no próximo maior sufixo de $P$ que é sufixo de $P[0, i-1]$. Onde está esta informção?



# Computando a Função $next$




Figura: Caso 2: $P[next(i-1)] \neq P[i-1]$

- Como não conseguimos estender e formar um sufixo. Precisamos pesquisar no próximo maior sufixo de $P$ que é sufixo de $P[0, i-1]$. Onde está esta informção?
- $next(next(i-1))$.

# Computando a Função $next$

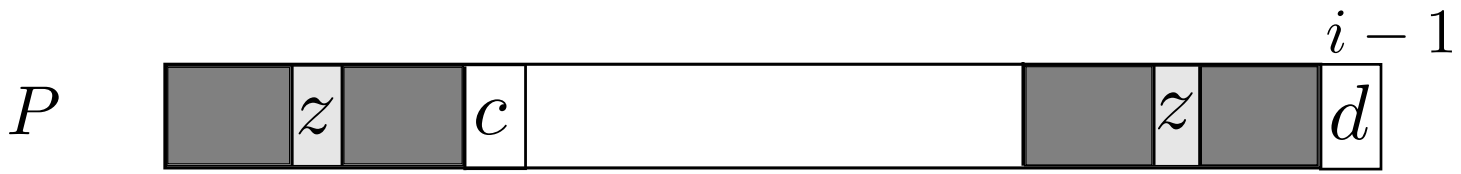
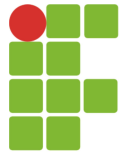



Figura: Tentamos estender usando o próximo maior prefixo que também é sufixo.



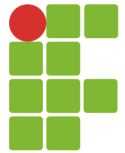
# Pré-processamento

**Algorithm 5:** KMP-PREPROCESS

**Input:** $P$

**Output:** $next$

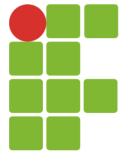
```
1 next[0] ← j ← −1
2 for( i ← 1; i ≤ m; i++ )
3 |   while (j ≥ 0 ∧ P[i − 1] ≠ P[j]) do
4 |   |   j ← next[j]
5 |   j++
6 |   next[i] ← j
```



# Pré-processamento

## Análise

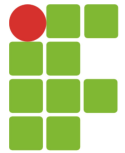
- Qual a complexidade de KMP-PREPROCESS?
- $\Theta(m^2)$?
- Quantas vezes o **while** interno pode executar?



# Pré-processamento

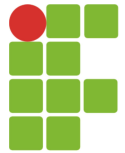
## Análise

- Qual a complexidade de KMP-PREPROCESS?
- $\Theta(m^2)$?
- Quantas vezes o **while** interno pode executar?
- Máximo de $2m$ iterações agregadas no laço interno.
- $\Theta(m)$.



# KMP

- Agora que temos a informação suficiente, podemos elaborar o algoritmo de busca.
- Toda vez que um caractere do texto diferir do $i$-ésimo caractere do padrão, não precisamos reinicializar a busca.
- Começamos de $next[i]$!



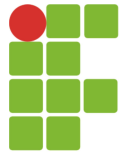
# Busca

**Algorithm 6:** KMP-PREPROCESS

**Input:** $T, P$

**Output:** $occ\{k|P[0, m-1] = T[k, k+m-1]\}$

```
1  next ← KMP-PREPROCESS(P)
2  i ← j ← 0
3  while (i < n) do
4      while (j ≥ 0 ∧ T[i] ≠ P[j]) do
5          j ← next[j]
6      j++
7      i++
8      if( j = m )
9          REPORT-MATCH(i − j)
10         j ← next[j]
```



# KMP

## Exemplo

- Tome $T = xyxxyxyxyyxyxyxyyyxyxyxx$
- Considere $P = xyxyyxyxyxx$.
- Calcule $next$ e aplique o algoritmo KMP.