

# Grafos

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação



Prof. Daniel Saad Nogueira  
Nunes

Instituto Federal de Brasília,  
Câmpus Taguatinga



# Sumário

---

- 1 Introdução
- 2 Percurso
- 3 Menor Caminho
- 4 Árvore Espalhada Mínima



# Sumário

---

## 1 Introdução



# Introdução

---

- Muitos problemas em Ciência da Computação são modelados em formas de relacionamento entre objetos, no sentido amplo da palavra.
- Precisamos de formalismo que consegue modelar relações presentes desde problemas envolvendo interações entre pessoas à problemas envolvendo redes gigantescas de computadores.
- A chave para resolução de muitos problemas computacionais pode residir em um único formalismo, os **grafos**.



# Introdução

---

- A Teoria dos Grafos provê uma linguagem para falar de propriedades e relacionamentos dos objetos mencionados.
- Veremos que projetar um algoritmo novo usando grafos é extremamente complicado, muitas das vezes, precisamos apenas utilizar um algoritmo já conhecido.
- Às vezes o mais difícil é modelar o problema em termos de grafos!



# Introdução

---

## Definição (Grafo)

Um grafo é uma dupla  $G(V, E)$ , onde  $V$  é o conjunto de vértices e  $E$  é o conjunto de arestas.



# Introdução

---

- Repare que as arestas formam uma relação sobre o conjunto dos pares de vértices.
- Por exemplo, os vértices  $v \in V$  poderiam representar cidades, enquanto uma aresta  $(u, v)$  informaria que estive uma rodovia entre a cidade  $u$  e  $v$ .
- As arestas representam relacionamentos entre os objetos!



# Introdução

---

## Tipos de Grafos

- Existem diversas especialidades de grafos.
- Cada qual com suas propriedades distintas, o que faz o seu uso mais adequado em determinados problemas:
  - 1 Simples  $\times$  Não-simples.
  - 2 Dirigido  $\times$  Não-dirigido.
  - 3 Com peso  $\times$  Sem peso.
  - 4 Esparso  $\times$  Denso.
  - 5 Cíclico  $\times$  Acíclico.
  - 6 Incorporado  $\times$  Topológico.
  - 7 Implícito  $\times$  Explícito.
  - 8 Rotulado  $\times$  Não-rotulado.





# Sumário

---

- 1 **Introdução**
  - Tipos de Grafos
  - Aplicações
  - Representação de Grafos
  - Conceitos Fundamentais



# Tipos de Grafos

---

## Simples × Não-simples

- Grafos simples não possuem estruturas complexas, tais como:
  - ▶ Loops: arestas que ligam o vértice nele mesmo.
  - ▶ Multiarestas: podemos ter várias arestas ligando dois vértices.



# Tipos de Grafos

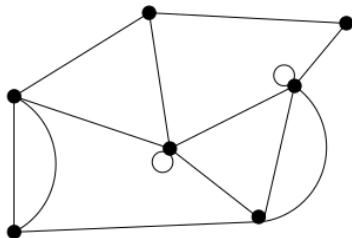
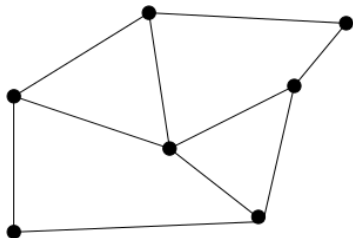


Figura: Simples  $\times$  Não-simples.



# Tipos de Grafos

---

## Dirigido × Não-dirigido

- Um grafo é não-dirigido se, existe uma aresta  $(x, y)$ , logo, também existe a aresta  $(y, x)$ , temos arestas nas duas direções.
- Um grafo é dirigido se podemos ter arestas em uma única direção.
  - ▶ Muito útil para modelar problemas específicos.
  - ▶ Exemplo: uma via de mão única.



# Tipos de Grafos

---

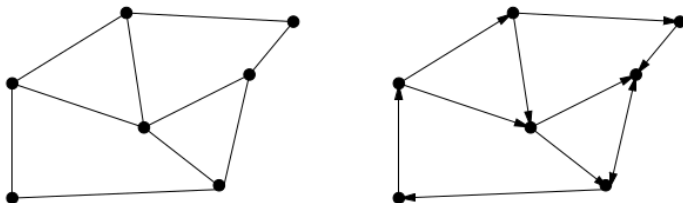


Figura: Dirigido  $\times$  Não-dirigido.



# Tipos de Grafos

---

## Com Peso $\times$ Sem Peso

- Em um grafo com peso nas arestas, para cada aresta  $(u, v)$ , temos um peso relacionado a ela. que pode ser por exemplo números inteiros ou reais.
  - ▶ Muito utilizado em problemas de otimização, como o problema do menor caminho.



# Tipos de Grafos

---

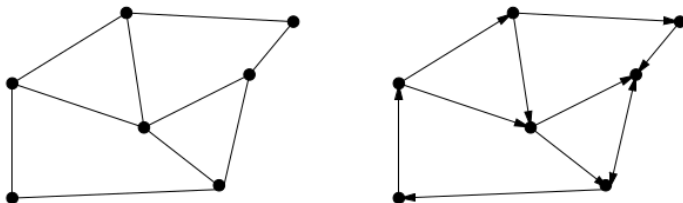


Figura: Dirigido  $\times$  Não-dirigido.



# Tipos de Grafos

---

## Esparso $\times$ Denso

- Ao todo podemos ter  $\binom{n}{2}$  pares de vértices.
- Grafos são esparsos se temos apenas uma pequena fração de arestas sobre os possíveis pares de vértice
- Grafos densos possuem uma grande porção de ligações entre os vértices.
- Não há uma regra geral, geralmente dizemos que um grafo é denso se  $|E| \in \Theta(n^2)$ .





# Tipos de Grafos

---

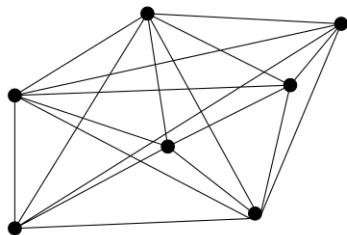
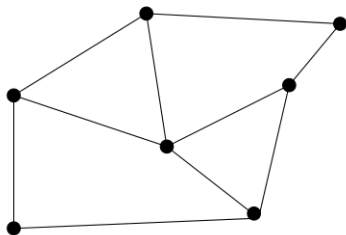


Figura: Esparso  $\times$  Denso.



# Tipos de Grafos

---

## Cíclicos × Acíclicos

- Um grafo acíclico são grafos que não possuem ciclos.



## Tipos de Grafos

---

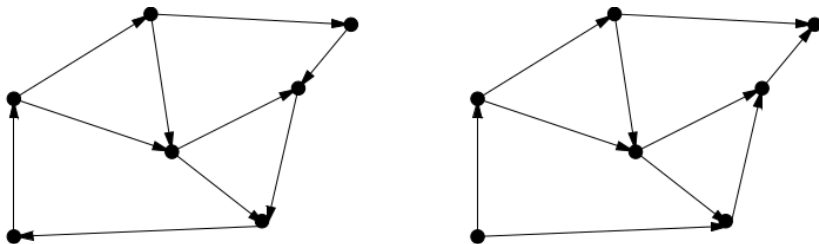


Figura: Cíclico  $\times$  Acíclico.



# Tipos de Grafos

---

## Incorporado $\times$ Topológico

- Um grafo é incorporado se seus vértices estão mapeados em posições geométricas, como em um grid.
- Isso pode ter relevância em alguns problemas.
- Em problemas que isto não é importante, nos importamos apenas com a topologia do grafo (o esqueleto).



## Tipos de Grafos

---

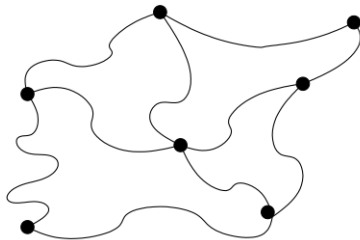
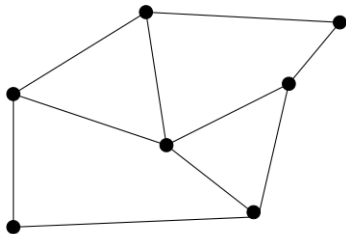


Figura: Incorporado  $\times$  Topológico.



# Tipos de Grafos

---

## Implícitos × Explícitos

- Grafos implícitos vão sendo construídos conforme vamos utilizando eles.
  - ▶ Backtracking, simulação...
- Em outros casos, precisamos do grafo já construído para resolver certos problemas.



## Tipos de Grafos

---

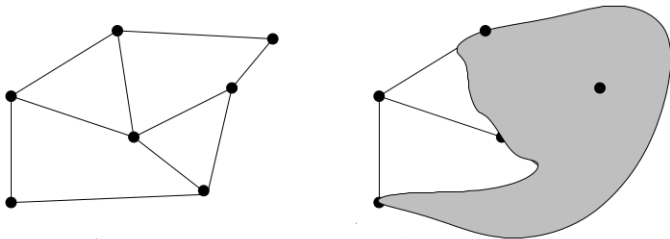


Figura: Implícito  $\times$  Explícito.



# Tipos de Grafos

---

## Rotulado $\times$ Não rotulados

- Se o grafo é rotulado, a cada vértice é atribuído um rótulo que o identifica unicamente.
- Em grafos sem rótulo, não temos essa distinção.





# Tipos de Grafos

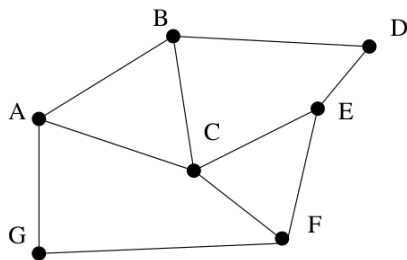
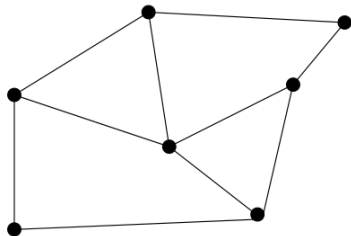


Figura: Rotulado  $\times$  Não-rotulado.



# Sumário

---

## 1 Introdução

- Tipos de Grafos
- Aplicações
- Representação de Grafos
- Conceitos Fundamentais



# Aplicações

---

- Usando esse formalismo, podemos resolver problemas reais!
- Desde problemas biológicos como problemas em rede de computadores!



# Aplicações

---



Figura: Navegação.



# Aplicações

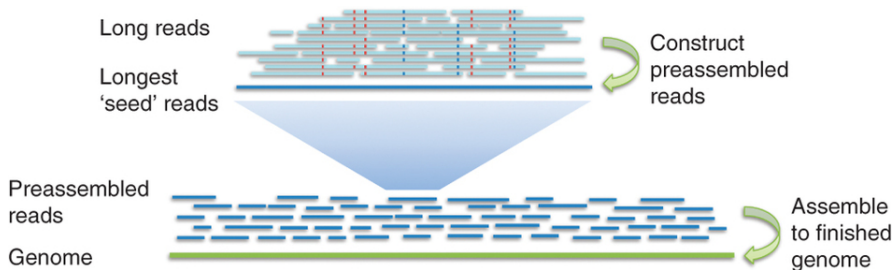


Figura: Montagem de Genomas.



# Aplicações

---



Figura: Análise de Tráfego.



# Aplicações

---



Figura: Redes de Computadores.



# Aplicações

---

## Exemplo

- Vamos começar nosso estudo desse incrível formalismo com uma modelagem simples.
- O grafo de relacionamento de pessoas!
  - ▶ Nosso Facebook.





# Aplicações

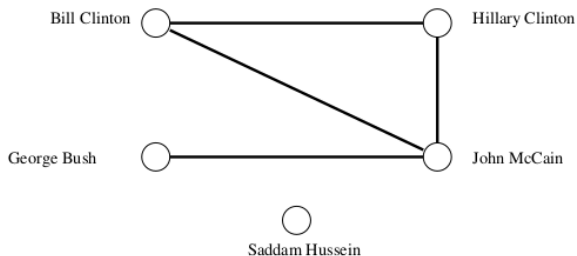


Figura: Grafo de relacionamento de pessoas.



# Aplicações

---

## Exemplo

- Através do grafo de relacionamento, podemos responder várias perguntas interessantes:
  - ▶ Meu amigo também me considera como amigo?
  - ▶ Qual é o nível da nossa amizade?
  - ▶ Eu sou amigo de mim mesmo?
  - ▶ Quem tem mais amigos?
  - ▶ Meus amigos moram perto de mim?
  - ▶ Você conhece esta pessoa?
  - ▶ Você é um indivíduo ou apenas um rosto?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Meu amigo também me considera como amigo?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Meu amigo também me considera como amigo?
- Existe uma aresta do seu amigo pra você?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Qual é o nível da nossa amizade?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Qual é o nível da nossa amizade?
- Quanto é o peso sobre a aresta que nos liga?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Eu sou amigo de mim mesmo?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Eu sou amigo de mim mesmo?
- O grafo é simples? Possui um loop pra mim mesmo?





# Aplicações

---

## Exemplo

- Quem tem mais amigos?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Quem tem mais amigos?
- Qual é o vértice que tem mais arestas saindo dele?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Meus amigos moram perto de mim?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Meus amigos moram perto de mim?
- Dado que o grafo é incorporado, qual a distância do seu vértice aos seus amigos?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Você é um indivíduo ou apenas um rosto?



# Aplicações

---

## Exemplo

- Você é um indivíduo ou apenas um rosto?
- O grafo é rotulado?



# Sumário

---

- 1 **Introdução**
  - Tipos de Grafos
  - Aplicações
  - Representação de Grafos
  - Conceitos Fundamentais



# Representação de Grafos

---

- Como representar grafos computacionalmente?
- Temos que escolher uma representação eficiente.
- Escolhas mais comuns:
  - 1 Listas de Adjacências.
  - 2 Matrizes de Adjacências.





# Representação de Grafos

---

## Listas de Adjacência

- As listas de adjacências consistem de um vetor de tamanho  $|V|$  de listas encadeada.
- Cada elemento do vetor, aponta para uma lista encadeada.
- Suponha o  $i$ -ésimo elemento deste vetor. Ele apontará para uma lista encadeada que contém as arestas que saem do nó  $i$ .



## Listas de Adjacência

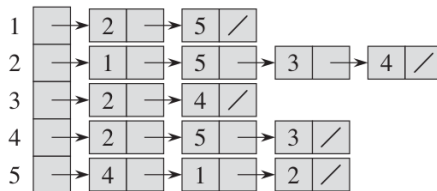
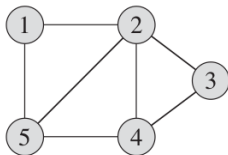


Figura: Lista de adjacências.



## Listas de Adjacência

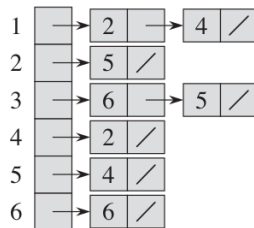
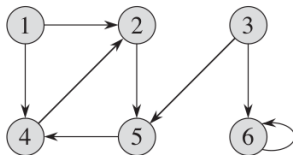


Figura: Lista de adjacências.



# Representação de Grafos

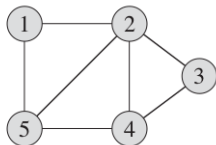
---

## Matrizes de Adjacências

- As matrizes de adjacências, como um nome diz, é uma matriz.
- O elemento  $M[i][j]$ , indica se existe uma aresta entre os nós  $i$  e  $j$ .



## Matrizes de Adjacências

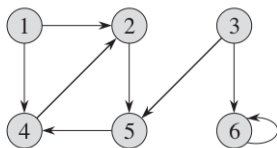


|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Figura: Matriz de Adjacências.



# Matrizes de Adjacências



|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Figura: Matriz de Adjacências.



## Listas vs Matrizes de Adjacências

---

- Cada abordagem tem seus pontos fortes e fracos.
- Listas de adjacência são mais econômicas em espaço quando o grafo é esparso.
- Matrizes de adjacência permitem acesso em tempo constante a qualquer aresta.
- Qual utilizar?



## Listas vs Matrizes de Adjacências

---

**Tabela:** Comparação entre listas e matrizes de adjacências.

| Critério                              | Ganhador |
|---------------------------------------|----------|
| Tempo de acesso em arestas            | Matriz   |
| Verificar o grau do vértice           | Lista    |
| Consumo de memória em grafos esparsos | Lista    |
| Consumo de memória em grafos densos   | Matriz   |
| Inserção/remoção de arestas           | Matriz   |
| Percurso do grafo                     | Listas   |





# Sumário

---

## 1 Introdução

- Tipos de Grafos
- Aplicações
- Representação de Grafos
- Conceitos Fundamentais



# Conceitos Fundamentais

---

## Definição (Grau de Entrada)

- Definido sobre um nó  $v$ .
- Representa o número de arestas que chegam em um nó  $v$ .



# Conceitos Fundamentais

---

## Definição (Grau de Saída)

- Definido sobre um nó  $v$ .
- Representa o número de arestas que saem de um nó  $v$ .
- **OBS:** em um grafo não direcionado, o grau de entrada de cada vértice é igual ao grau de saída.



# Conceitos Fundamentais

---

## Definição (Caminho)

- Um caminho é uma sequência de arestas que conecta vértices distintos.



# Conceitos Fundamentais

---

## Definição (Conectividade)

- Um grafo não-dirigido é dito conexo se existe um caminho para qualquer dois pares de vértices.
- Um grafo com apenas um vértice também é considerado conexo.



# Conceitos Fundamentais

---

## Definição (Componente Conexa)

- Uma componente conexa de um grafo não dirigido é um subgrafo maximal conexo do grafo original.



# Conceitos Fundamentais

---

## Definição (Conectividade Fraca)

- Um grafo dirigido é dito fracamente conexo se ao trocarmos suas arestas pela versão não dirigida, obtemos um grafo conexo.



# Conceitos Fundamentais

---

## Definição (Conectividade Forte)

- Um grafo **dirigido** é dito fortemente conexo se para quaisquer par  $u$  e  $v$  de vértices, existe um caminho de  $u$  para  $v$  e um de  $v$  para  $u$ .





# Conceitos Fundamentais

---

## Definição (Corte)

- Um corte é um conjunto de vértices que separa o grafo, isto é, que o deixa com mais de uma componente conexa.



# Conceitos Fundamentais

---

## Definição ( $k$ -conectividade)

- Um grafo não-dirigido é dito  $k$ -conexo se não existe um conjunto de  $k - 1$  vértices, que desconecta o grafo.



# Sumário

---

## 2 Percurso



## Percurso em Grafos

---

- Talvez o problema mais elementar em grafos seja percorrê-los.
- O percurso deve certificar de não visitar os mesmos nós várias vezes.
- Precisamos marcar o nó após visitá-lo, para não voltar nos mesmos.
- Duas estratégias elementares:
  - 1 Busca em largura (BFS - Breath-First-Search).
  - 2 Busca em profundidade (DFS - Depth-First-Search).



## Percurso em Grafos

---

- Talvez o problema mais elementar em grafos seja percorrê-los.
- O percurso deve certificar de não visitar os mesmos nós várias vezes.
- Precisamos marcar o nó após visitá-lo, para não voltar nos mesmos.
- Duas estratégias elementares:
  - 1 Busca em largura (BFS - Breath-First-Search).
  - 2 Busca em profundidade (DFS - Depth-First-Search).



# Sumário

---

## 2 Percurso

- Breath-First-Search
- Depth-First-Search
- Problemas



# Busca em Largura

---

## BFS

- Consiste em, a partir de um nó, descobrir todos os seus vizinhos.
- O procedimento é repetido para cada vizinho do nó original em ordem de descoberta.
- Cada nó visitado é marcado para evitar loops.
- Implementável com uma fila!



# Busca em Largura





# Busca em Largura

---

## Complexidade

- $O(|V| + |E|)$  com listas de adjacências.
- $O(|V|^2)$  com matrizes de adjacências.



# Busca em Largura

---

## Complexidade

- $O(|V| + |E|)$  com listas de adjacências.
- $O(|V|^2)$  com matrizes de adjacências.
- Por que?



## Busca em Largura

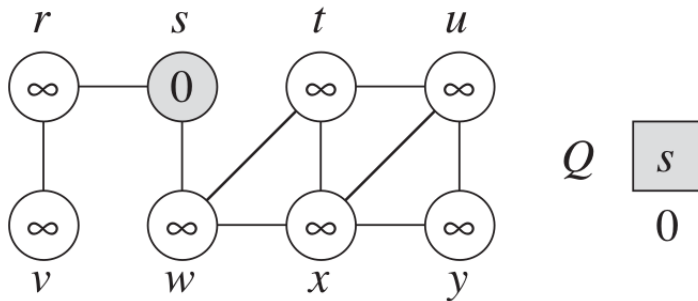


Figura: Como ficaria a busca em largura para este grafo?



## Busca em Largura

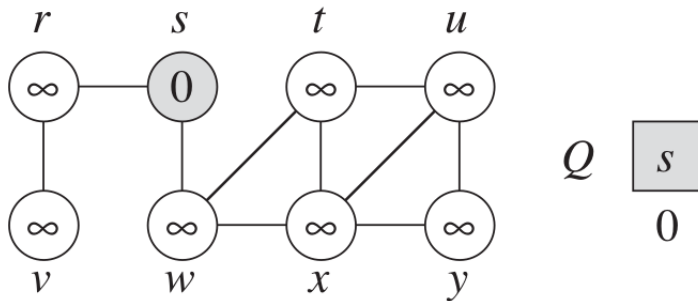


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

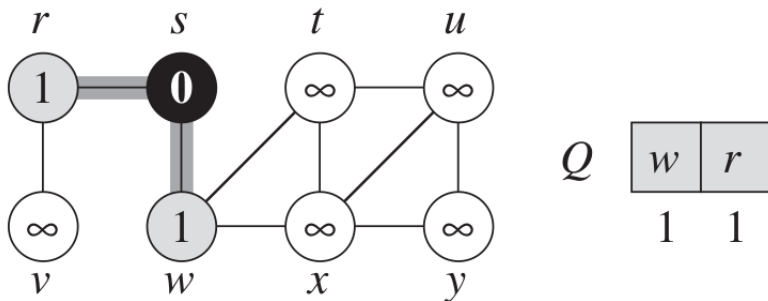


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

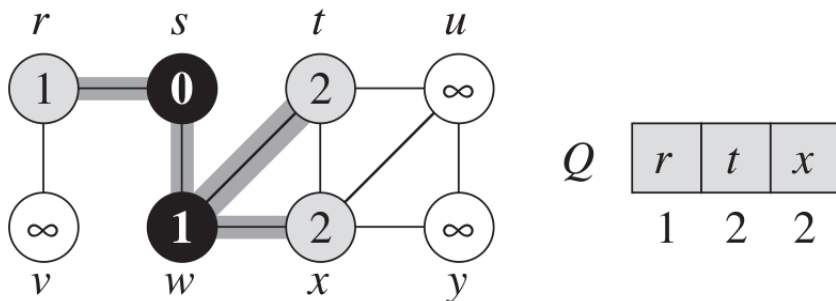


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

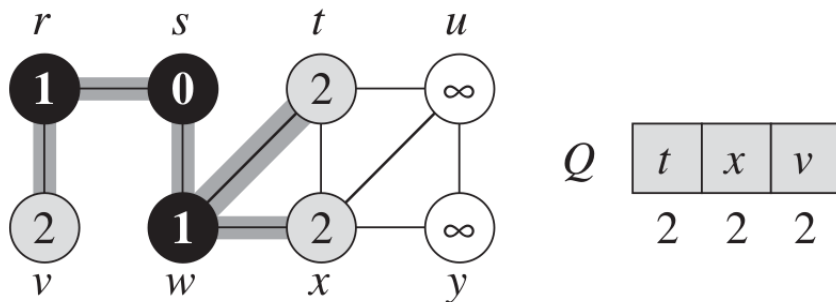
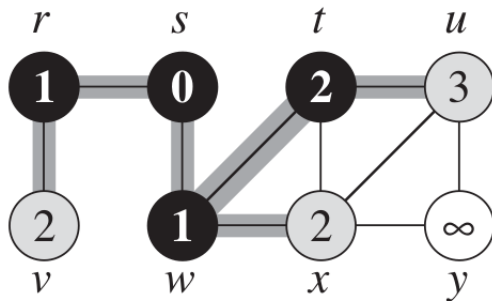


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura


 $Q$ 

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $x$ | $v$ | $u$ |
| 2   | 2   | 3   |

Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .





## Busca em Largura

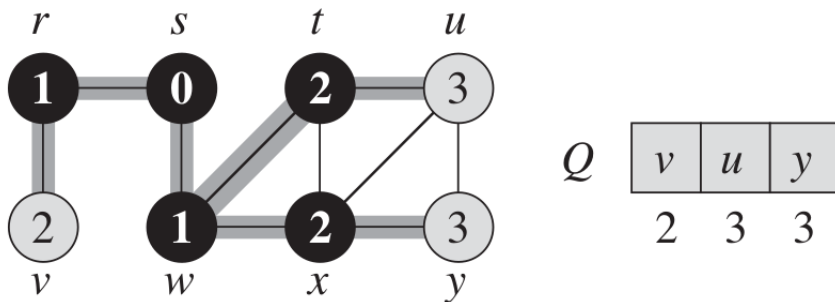


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

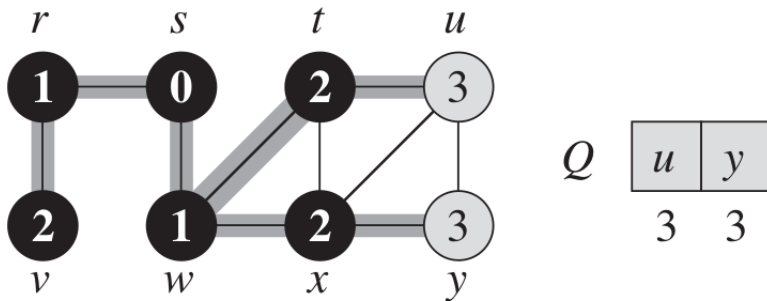


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

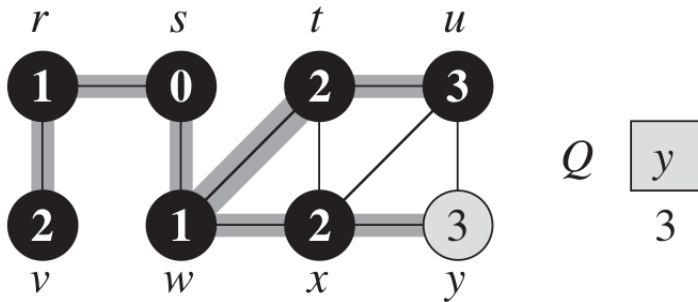


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

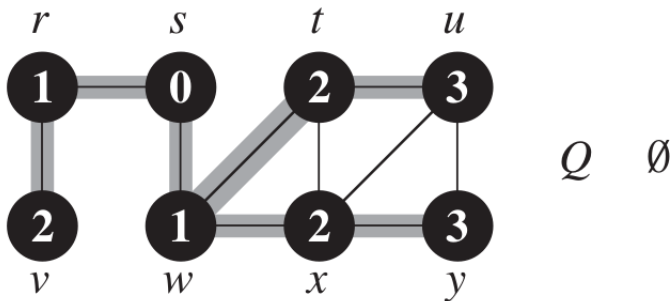


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



# Busca em Profundidade

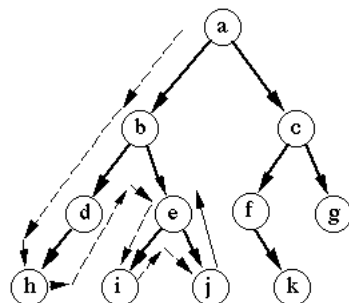
---

## DFS

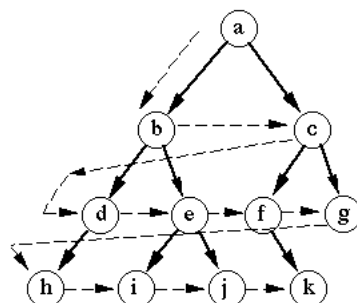
- A busca em profundidade parte de um determinado nó e avança para o seu vizinho imediato.
- Recursivamente, repetimos a mesma ideia para o vizinho imediato.
- Apenas após ter ido à profundidade máxima, passamos para o próximo vizinho.



# Depth-First-Search



Depth-first search

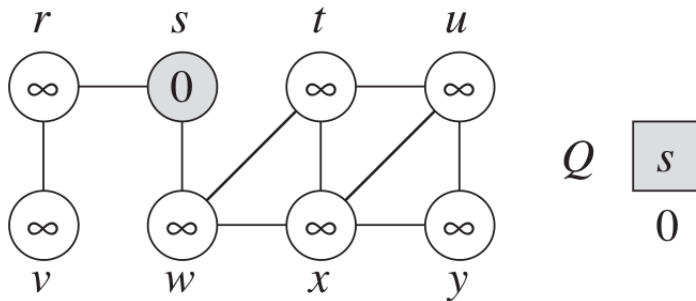


Breadth-first search

**Figura:** Busca em Largura vs Busca em Profundidade.



## Busca em Profundidade



**Figura:** Como ficaria a busca em profundidade para este grafo?



# Busca em Profundidade

---

- Como implementar a busca em profundidade?





# Busca em Profundidade

---

- Como implementar a busca em profundidade?
- Busca em largura trocando fila por pilha!



# Busca em Profundidade



# Busca em Profundidade

---

- Podemos implementar recursivamente também.
- Mais simples e mais elegante.
- Pilha implícita.



# Busca em Profundidade



# Problemas

---

- Veremos uma serie de problemas em que estes simples problemas de busca são aplicáveis.



# Sumário

---

## 2 Percurso

- Breath-First-Search
- Depth-First-Search
- Problemas



# Problemas

---

## Menor Distância

- Dado um grafo **sem peso**, determine a distância de um vértice para todos os outros vértices.
- Neste caso, a distância de  $u$  e  $v$ , denotada por  $D(u, v)$  é dada pela quantidade de arestas do menor caminho estes dois vértices.
- Extremamente aplicável em roteamento! Queremos minimizar o número de saltos.



## Menor Distância

---

- Para computar a menor distância, podemos recorrer a uma simples busca em largura.
- A cada passo da busca em largura, estamos descobrindo nós a uma distância de uma unidade maior.





# Busca em Largura



## Busca em Largura

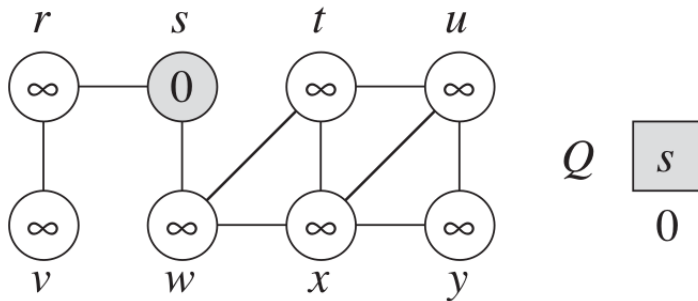


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

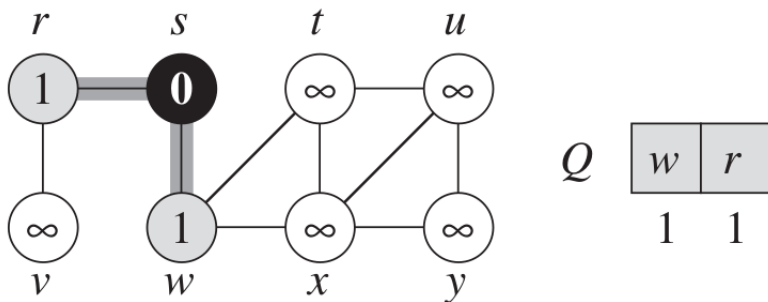


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

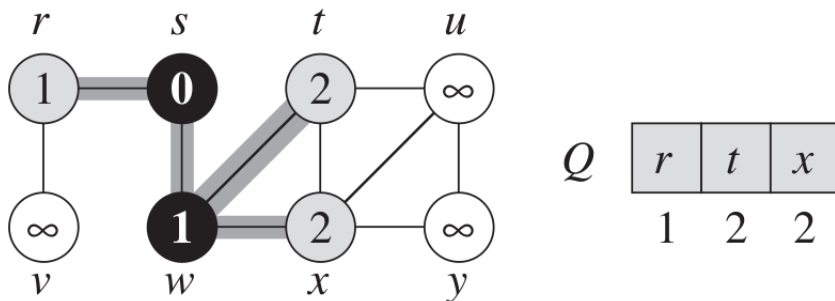


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

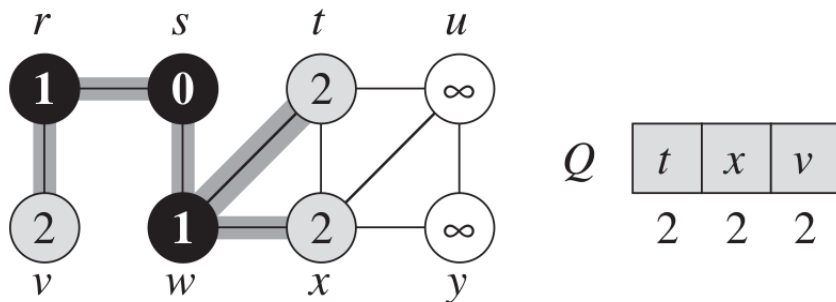


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

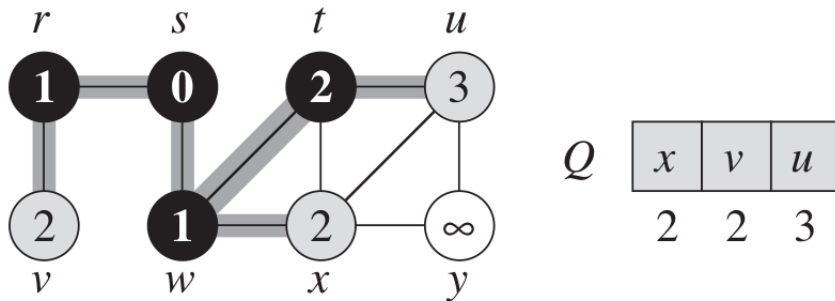


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

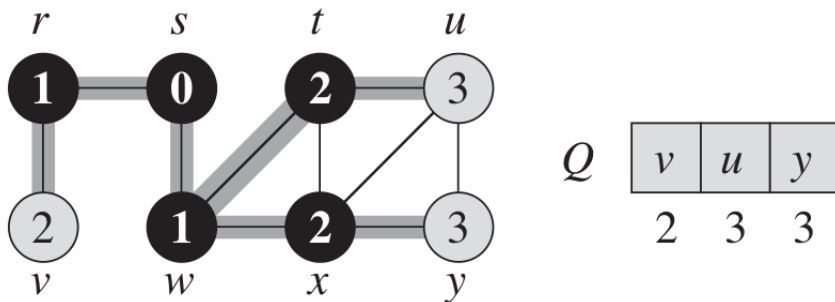


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

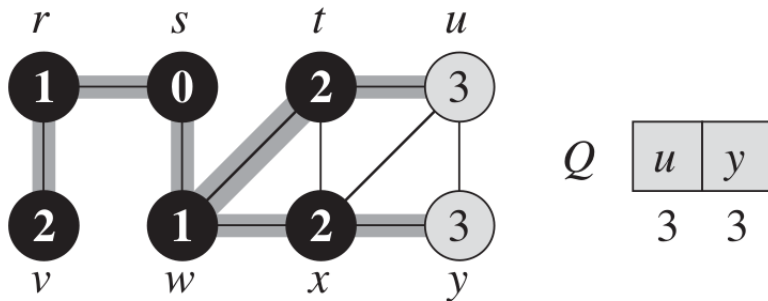


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .





## Busca em Largura

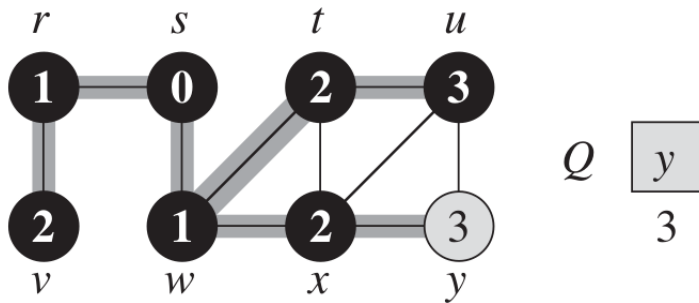


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



## Busca em Largura

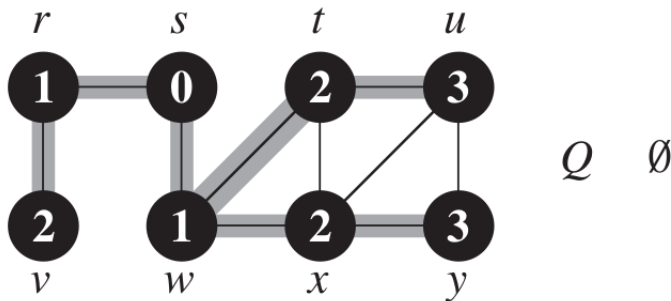


Figura: Busca em largura partindo do nó  $s$ .



# Problemas

---

## Ordenação Topológica

- Dado um grafo **acíclico** dirigido (DAG), produzir uma ordenação topológica é interessante em algumas aplicações.
- A ordenação topológica produz uma ordenação dos vértices tal que, se existe uma aresta  $(u, v)$ , então  $u$  deve estar antes de  $v$  no resultado da ordenação.
- Na prática, podemos usar DAGs para indicar precedência de eventos.
- Exemplo: verificar quais disciplinas são pré-requisito de outras.



# Ordenação Topológica

---

- Para produzir a ordenação topológica, podemos usar a busca em profundidade para marcar os tempos em que um nó é visitado pela primeira e segunda vez (tempo de início e tempo de término).
- Conforme a busca, adicionamos o nó com tempo de término mais recente no início de uma lista.
- Isso quer dizer que o nó com tempo mais recente obrigatoriamente vem antes do nó com tempo menos recente na ordenação.



# Ordenação Topológica

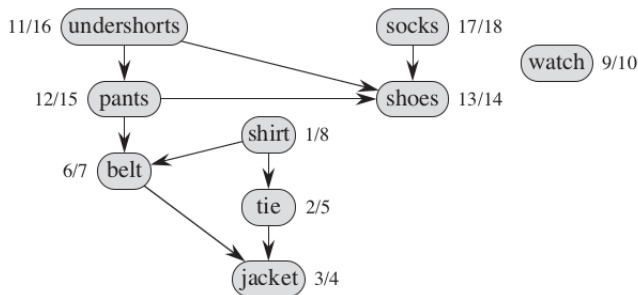
---



# Ordenação Topológica



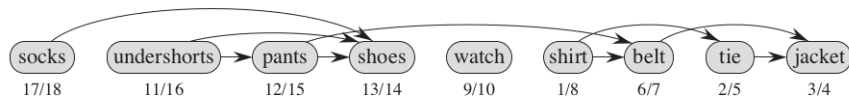
# Ordenação Topológica



**Figura:** Ordenação topológica da sequência de vestimento.



# Ordenação Topológica



**Figura:** Ordenação topológica da sequência de vestimento.





# Ordenação Topológica

---

## Complexidade

- Precisamos apenas fazer uma busca em profundidade modificada.
- $O(|V| + |E|)$



# Problemas

---

## Detecção de Ciclos

- Detectar ciclos em grafos dirigidos é muito útil em algumas aplicações.
- Exemplo: detecção de deadlock pelo S.O.
- Exemplo: detecção de incompatibilidade de dependências.



# Problemas

---

## Detecção de Ciclos

- Entrada: Um grafo dirigido.
- Saída: Sim, se o grafo possui ciclos, não, caso contrário.



## Detecção de Ciclos

---

- Estamos procurando por uma **back edge**, isto é, uma aresta que volta para um nó que ainda está sendo processado na busca em profundidade.
- Se no grafo existe uma **back edge**, então temos um ciclo.
- Basta adaptar a busca em profundidade.



## Detecção de Ciclos

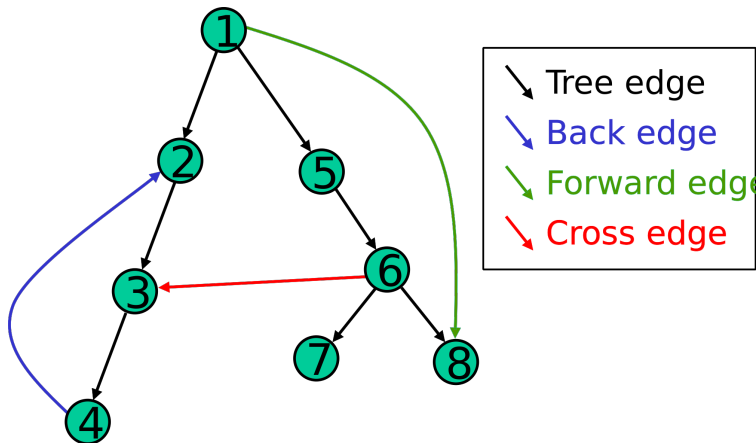


Figura: Tipos de aresta.



## Detecção de Ciclos

---

---

### Algorithm 7: CYCLE-DETECTION

---

**Input:**  $G$

**Output:** Sim, se  $G$  tem ciclos, não, caso contrário.

```
1 for all(  $v \in V$  )
2    $v.color = WHITE$ 
3    $v.\pi = NIL$ 
4 for all(  $v \in V$  )
5   if(  $v.color = WHITE$  )
6     if(  $CYCLE-SEARCH(G, v)$  )
7       return true
8 return false
```

---



## Detecção de Ciclos

---

### Algorithm 8: CYCLE-SEARCH

---

**Input:**  $G, v$

**Output:** Sim, se a componente conexa de  $v$  tem ciclos

```
1  $v.color = GREY$ 
2  $temp \leftarrow false$ 
3 for all  $(v, w) \in E$ 
4   if  $(w.color = GREY)$                                 // back edge
5      $temp \leftarrow true$ 
6   else if  $(w.color = WHITE)$ 
7     if  $(CYCLE-SEARCH(G, w))$ 
8        $temp \leftarrow true$ 
9  $v.color = BLACK$ 
10 return  $temp$ 
```



## Detecção de Ciclos

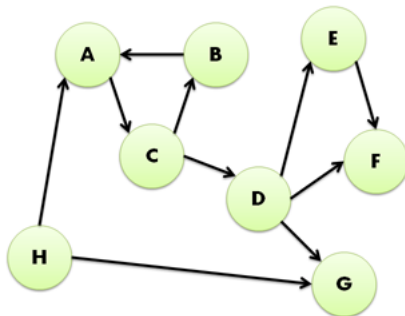


Figura: Detecção de Ciclos





# Detecção de Ciclos

---

## Complexidade

- $O(|V| + |E|)$ .



## Componentes Fortemente Conexas

---

- Todo grafo dirigido pode ser decomposto em várias componentes fortemente conexas.
- Um grafo é dito fortemente conexo se possui apenas 1 componente fortemente conexa.
- Como determinar as componentes fortemente conexas de um grafo?



# Componentes Fortemente Conexas

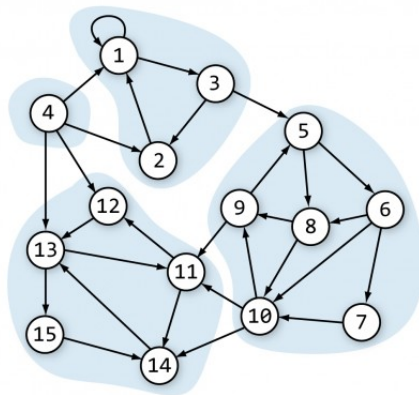


Figura: Componentes fortemente conexas.



# Componentes Fortemente Conexas

---

## Componentes Fortemente Conexas

- **Entrada:** um grafo  $G$ .
- **Saída:** suas componentes fortemente conexas.



## Componentes Fortemente Conexas

---

- Uma componente é dita fortemente conexa se existe um caminho entre quaisquer dois pares de vértice nesta componente.
- Se a partir de um vértice  $v$  chegamos em  $u$ , temos que certificar que é possível chegar em  $v$  à partir de  $u$ .
- Podemos usar o conceito de **back edge**!



## Componentes Fortemente Conexas

---

- Primeiramente, numeramos cada vértice com a busca em profundidade de acordo com sua ordem de exploração ( $v.index$ ).
- Se durante a busca em profundidade um nó  $u$  possui um caminho para um nó  $v$  que tem um número menor que  $u$ , então sabemos que também existe um caminho de  $u$  para  $v$ , e portanto, eles estão na mesma componente conexa.
- Marcaremos cada nó com um número  $v.low$ , indicando o vértice com menor número que é alcançável por ele.
- Todos os nós que possuem  $v.low \leq v.index$  estão na mesma componente conexa de  $v.low$ .



## Componentes Fortemente Conexas

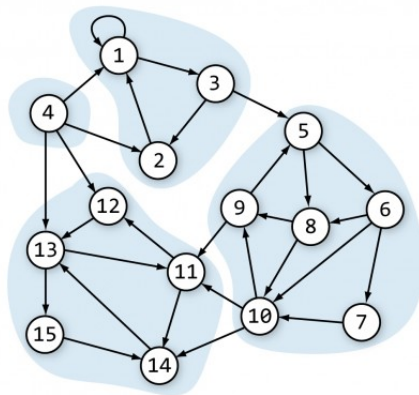


Figura: Componentes fortemente conexas.



## Componentes Fortemente Conexas

---

---

**Input:**  $G$

**Output:** Componentes Fortemente Conexas de  $G$

```
1  $list \leftarrow []$ 
2  $S \leftarrow \emptyset$ 
3 for all(  $v \in V$  )
4   if(  $v.color = WHITE$  )
5      $\text{STRONG-COMPONENTES}(G, v, list, S)$ 
```

---





# Componentes Fortemente Conexas



## Componentes Fortemente Conexas

---

---

**Input:**  $S, v$

**Output:** Componentes Fortemente Conexas que inclui o nó  $v$

```
1  $list' \leftarrow []$   
2 repeat  
3    $w = S.POP()$   
4    $list'.INSERT(w)$   
5 until  $w \neq v$   
6 return  $list'$ 
```

---



# Componentes Fortemente Conexas

---

## Complexidade

- $O(|V| + |E|)$ .



# Sumário

---

## 3 Menor Caminho

- Dijkstra



# Menor Caminho

---

- Detectar o menor caminho por dois vértices é fácil quando o grafo não possui peso.
  - ▶ Busca em largura.
- E no caso genérico? Se o grafo possuir pesos, como resolvemos este problema.
- Antes de definir o problema, examinaremos alguns conceitos.



# Menor Caminho

---

## Definição (Custo do Caminho)

- Suponha um grafo dirigido  $G(V, E)$  e uma função de peso sobre as arestas  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Tome um caminho  $p = (v_0, \dots, v_k)$ . O custo do caminho é definido como:

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$



# Menor Caminho

---

## Definição (Custo do Menor Caminho)

- O custo do menor caminho dentre um vértice  $u$  e um vértice  $v$  é dado por:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) \mid u \rightarrow^p v\}, & \text{se existe um caminho de } u \text{ a } v \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



# Menor Caminho

---

- Agora podemos definir o problema!

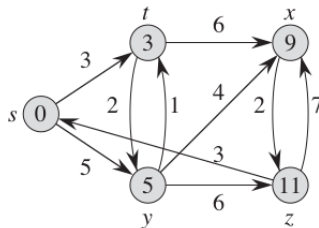
## Menor Caminho

- Entrada: um grafo dirigido  $G(V, E)$ , uma função de peso  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  e um vértice de origem  $v$ .
- Saída:  $\delta(v, w)$ , o custo do menor caminho de  $v$  até os demais vértices  $w$ .





# Menor Caminho



**Figura:** Grafo  $G(V, E)$  com as respectivas distâncias de uma origem.



# Menor Caminho

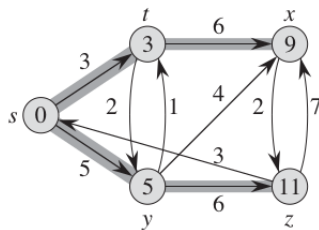


Figura: Menor rota até um destino.



# Menor Caminho

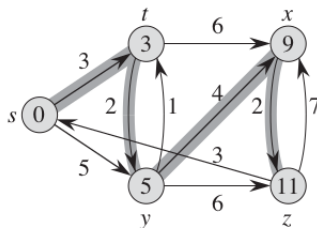


Figura: Menor rota até um destino.



# Menor Caminho

---

- Um dos algoritmos que resolve esse problema é o algoritmo de Dijkstra.



# Sumário

---

- 3 Menor Caminho
  - Dijkstra



# Algoritmo de Dijkstra

---

- O algoritmo de Dijkstra se parece muito com uma busca em largura.
- Só que em vez de pegar sempre o próximo vizinho, consideramos o nó com menor custo até o momento.
- Pode ser visto como um algoritmo guloso!



## Algoritmo de Dijkstra

---

- O algoritmo de Dijkstra se baseia no “relaxamento” de distâncias até chegar na distância ótima.
- Se a distância atual de uma origem a um nó  $v$  é maior do que a distância atual da origem a um nó  $u$  mais  $w(u, v)$ , atualizamos a distância atual.

$$v.d > u.d + w(u, v)$$

$$v.d \leftarrow u.d + w(u, v)$$



# Algoritmo de Dijkstra

---

---

## Algorithm 9: INITIALIZE-DIJKSTRA

---

**Input:**  $G, s$

```
1 for all(  $v \in V$  )
2    $v.d \leftarrow \infty$ 
3    $v.\pi \leftarrow \text{NULL}$ 
4  $s.d \leftarrow 0$ 
```

---





# Algoritmo de Dijkstra

---

## Algorithm 10: DIJKSTRA

---

**Input:**  $G, w, s$

**Output:**  $\delta(s, v), \forall v \in V$

```
1 INITIALIZE-DIJKSTRA( $G, s$ )
2  $Q.$ INSERT( $s$ ) // Fila de prioridades
3 while  $\neg Q.$ EMPTY do
4    $u \leftarrow Q.$ EXTRACT-MIN()
5    $visited[u] \leftarrow true$ 
6   for all  $(u, v) \wedge \neg visited[v]$ 
7     if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
8        $v.d \leftarrow u.d + w(u, v)$ 
9        $v.\pi \leftarrow u$ 
10     $Q.$ INSERT-UPDATE( $v$ ) // Insere ou atualiza o nó na
        fila
```



## Algoritmo de Dijkstra

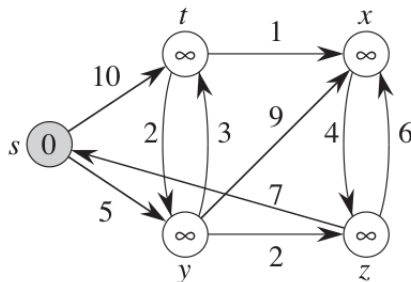


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



# Algoritmo de Dijkstra

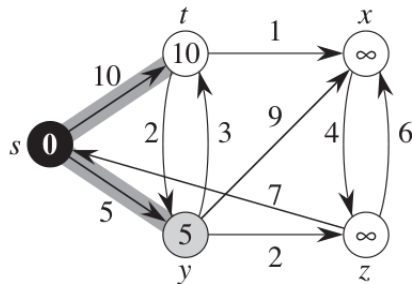


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



# Algoritmo de Dijkstra

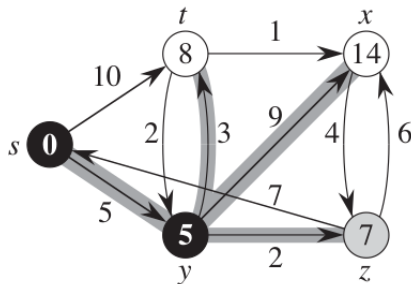


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



## Algoritmo de Dijkstra

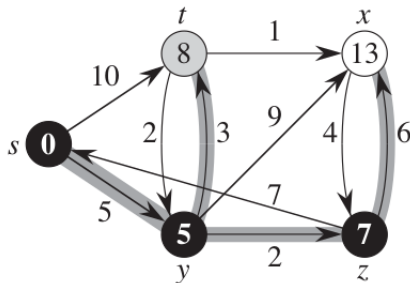


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



# Algoritmo de Dijkstra

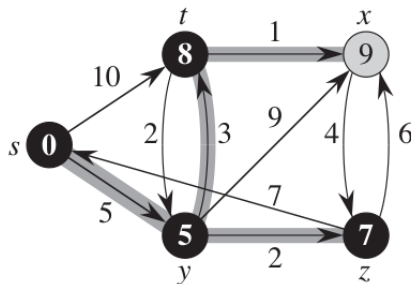


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



# Algoritmo de Dijkstra

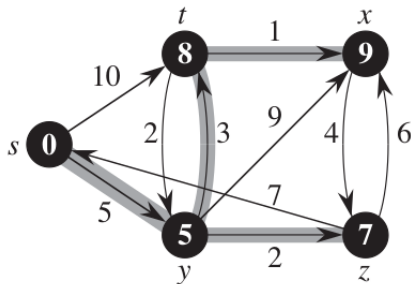


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



# Algoritmo de Dijkstra

---

## Complexidade

- Qual a complexidade do algoritmo?
- Depende da estrutura  $Q$  utilizada.
- **For** interno:  $\Theta(|E|)$  vezes.
- **While** externo:  $\Theta(|V|)$  vezes.
- Vai depender do custo das operações `EXTRACT-MAX` e `INSERT-UPDATE` para a estrutura de dados  $Q$ .





# Algoritmo de Dijkstra

---

## Complexidade

- Usando vetores:  $\Theta(|V|^2 + |E|)$ .
- Usando heap:  $\Theta(|V| \log |V| + |E| \log |V|)$ .
- Usando heap de fibonacci:  $\Theta(|V| \log |V| + |E|)$ .
- O que você vai usar em grafos densos? E em grafos esparsos?



# Algoritmo de Dijkstra

---

## Correção do Algoritmo de Dijkstra

- Por que o algoritmo de Dijkstra funciona?



# Algoritmo de Dijkstra

---

## Limitações

- Apesar de ser um algoritmo clássico, o algoritmo de Dijkstra apresenta alguns problemas.
- Se a função  $w$  atribuir um custo negativo às arestas, o algoritmo de Dijkstra não apresentará o comportamento esperado.
- Problema: ciclos negativos!
- O que era um problema fácil, passa a ser um problema difícil.



# Sumário

---

## 4 Árvore Espalhada Mínima



# Motivação

---

- Suponha que tenhamos uma infraestrutura de rede montada.
- Várias máquinas estão conectadas à outras através de diversos roteadores.
- Ao mesmo tempo, a economia de energia se tornou uma situação crítica nos dias de hoje.
- Como você faria para continuar permitindo a comunicação de quaisquer computadores com menor custo possível?
- Quais roteadores você desativaria?
- Qual a estrutura obtida?



# Motivação

---

- O problema da árvore espalhada mínima visa resolver este tipo de problemas.
- Queremos um subgrafo acíclico e conexo de menor custo (árvore de menor custo).
- Existem algoritmos bem conhecidos para resolução deste problema, tais como:
  - ▶ Algoritmo de Prim.
- No entanto, vamos examinar algumas definições antes de atacar o problema.



# Árvore Espalhada Mínima

---

## Menor custo

- Obviamente, o subgrafo gerado de menor custo tem que ser uma árvore.
- O custo desta árvore é dado pelo somatório de suas arestas:

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u,v)$$



# Árvore Espalhada Mínima

---

## Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?





# Árvore Espalhada Mínima

---

## Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?
- Inicialmente, todo vértice é uma componente conexa.



# Árvore Espalhada Mínima

---

## Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?
- Inicialmente, todo vértice é uma componente conexa.
- Adicione arestas de menor custo possível de modo que conecte componentes conexas.



# Árvore Espalhada Mínima

---

## Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?
- Inicialmente, todo vértice é uma componente conexa.
- Adicione arestas de menor custo possível de modo que conecte componentes conexas.
- Jamais adicione uma aresta de custo maior que conecte as mesmas componentes.



# Árvore Espalhada Mínima

---

## Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?
- Inicialmente, todo vértice é uma componente conexa.
- Adicione arestas de menor custo possível de modo que conecte componentes conexas.
- Jamais adicione uma aresta de custo maior que conecte as mesmas componentes.
- Jamais forme um ciclo!



# Árvore Espalhada Mínima

---

---

## Algorithm 11: GENERIC-MST

---

- 1  $T \leftarrow \emptyset$
  - 2 **while**  $T$  não for uma árvore **do**
  - 3     Encontre uma aresta  $(u, v)$  que é segura para  $T$
  - 4     Adicione a aresta à  $T$
-



# Árvore Espalhada Mínima

---

- Como escolher uma aresta segura?



# Sumário

---

- 4 Árvore Espalhada Mínima
  - Prim



## Algoritmo de Prim

---

- O algoritmo de Prim de certa forma se parece muito com o algoritmo de Dijkstra.
- Começamos de um nó arbitrário como o único nó de nossa árvore.
- Escolhemos sempre as arestas de menor custo para adicionarmos à árvore a partir dos nós previamente inseridos na árvore.
- Da mesma forma que no algoritmo de Dijkstra, precisamos de uma estrutura de dados eficiente.





# Algoritmo de Dijkstra

---

---

## Algorithm 12: INITIALIZE-PRIM

---

**Input:**  $G, s$

- 1 **for all**(  $v \in V$  )
  - 2      $v.d \leftarrow \infty$
  - 3      $v.\pi \leftarrow \mathbf{NULL}$
  - 4  $s.d \leftarrow 0$
-



# Algoritmo de PRIM



## Algoritmo de Prim

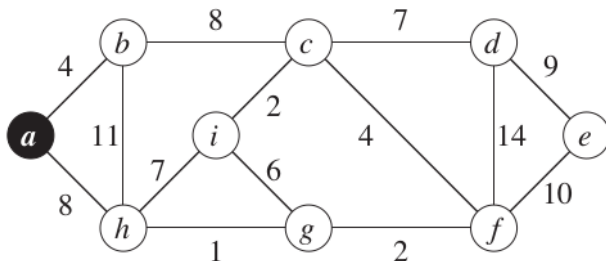


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



## Algoritmo de Prim

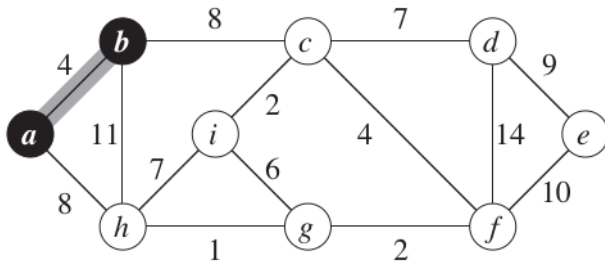
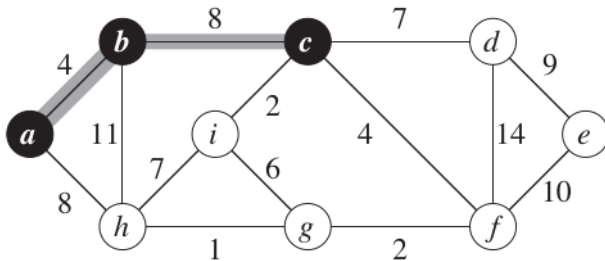


Figura: Execução do Algoritmo de Prim





## Algoritmo de Prim

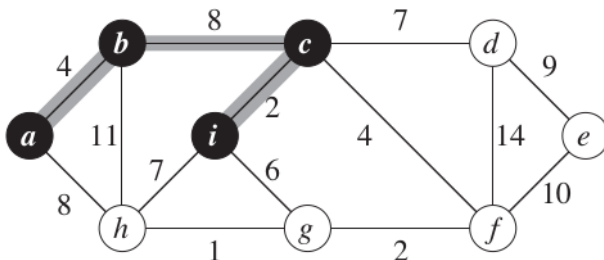


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



## Algoritmo de Prim

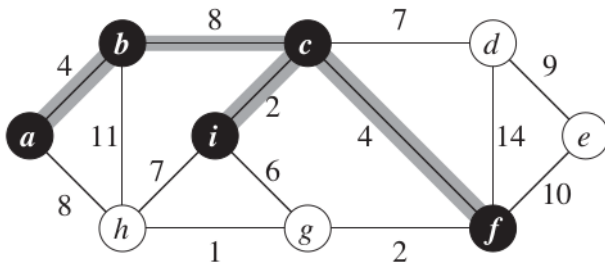


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



## Algoritmo de Prim

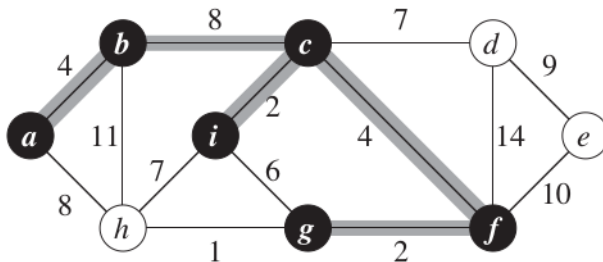


Figura: Execução do Algoritmo de Prim





## Algoritmo de Prim

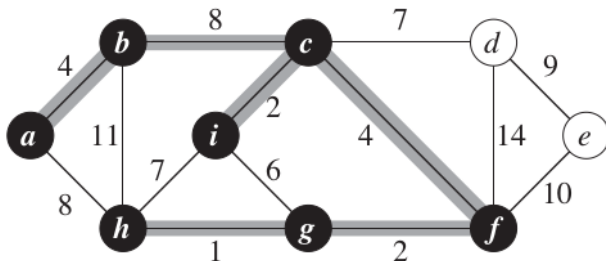


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



## Algoritmo de Prim

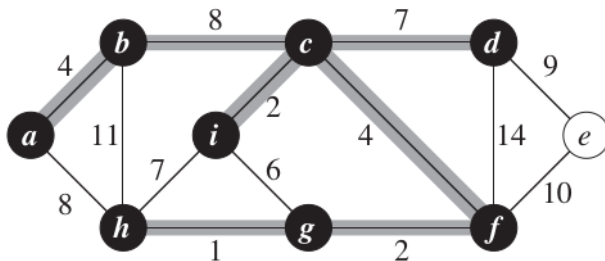


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



## Algoritmo de Prim

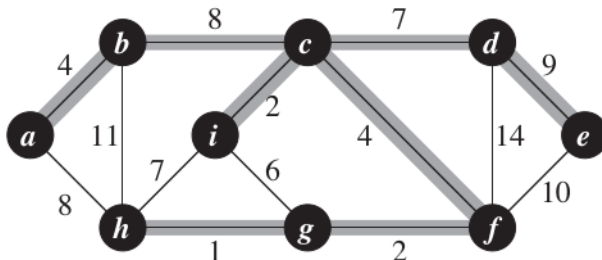


Figura: Execução do Algoritmo de Prim