

Programação Dinâmica

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação



Prof. Daniel Saad Nogueira
Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília,
Campus Taguatinga



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Programação Dinâmica
- 3 Problemas



Sumário

1 Introdução



Introdução

Divisão e Conquista

- Combina soluções de subproblemas para construir uma solução maior.
- Se subproblemas se sobrepõem, fazemos mais trabalho que o necessário.
 - ▶ Um problema se sobrepõe a outro quando compartilham subproblemas.



Introdução

Programação Dinâmica

- Na programação dinâmica, não há necessidade em resolver subproblemas que já foram resolvidos anteriormente.
- Resolvemos cada subproblema uma única vez e guardamos sua solução.
- Geralmente aplicamos esse paradigma em problemas de otimização.
 - ▶ Maior/menor resposta.
- Contudo, nada impede de utilizar as respostas de cada subproblema para resolver o problema de busca associado.



Introdução

Framework de Programação Dinâmica

- 1 Caracterize a estrutura de uma solução ótima.
- 2 Recursivamente, defina o valor de uma solução ótima.
- 3 Compute o valor da solução ótima.
- 4 Construa a solução ótima de informação já computadas.



Sumário

2 Programação Dinâmica



Programação Dinâmica

Corte de Barras de Aço

- Entrada: comprimento de uma barra de aço (em cm) e uma tabela P contendo os preços do pedaço por seu tamanho.
- Saída: o maior lucro.



Corte de Barras de Aço

Exemplo

comprimento i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
preço P_i	0	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

- Qual a melhor solução para uma barra de tamanho 4?



Corte de Barras de Aço

- Quantos jeitos de cortar a barra nós temos?



Corte de Barras de Aço

- Quantos jeitos de cortar a barra nós temos?
- 2^{n-1} .



Corte de Barras de Aço

- Quantos jeitos de cortar a barra nós temos?
- 2^{n-1} .
- Necessariamente temos um algoritmo $\Omega(2^n)$?



Corte de Barras de Aço

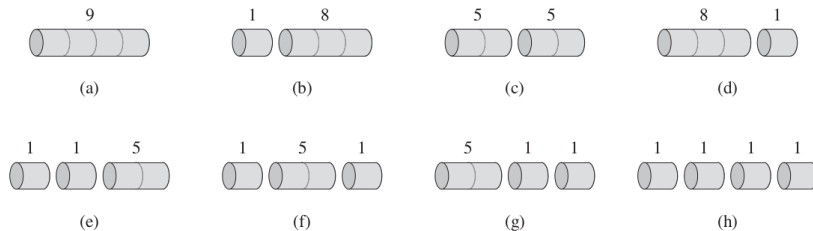


Figura: Maneiras de se cortar uma barra de tamanho 4.



Corte de Barras de Aço

- Suponha um corte ótimo:

$$n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$$

- A renda máxima obtida é:

$$r_n = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$$

- De maneira geral, temos:

$$r_n = \max(p_n, r_1 + r_{n-1}, r_2 + r_{n-2}, \dots, r_{n-1} + r_1)$$



Cortes de Barro de Aço

- $r_1 = 1$ (sem corte).
- $r_2 = 5$ (sem corte).
- $r_3 = 8$ (sem corte).
- $r_4 = 10$ (solução $r_2 + r_2$).
- $r_5 = 13$ (solução $r_2 + r_3$).
- $r_6 = 17$ (sem corte).
- $r_7 = 18$ (solução $r_1 + r_6$ ou $r_2 + r_2 + r_3$).
- $r_8 = 22$ (solução $r_2 + r_6$).
- $r_9 = 25$ (solução $r_3 + r_6$).
- $r_{10} = 30$ (sem corte).



Corte de Barras de Aço

- Esse problema de subestrutura ótima!.
- Soluções ótimas de subproblemas incorporam soluções ótimas de problemas maiores.
- Outra forma de enxergar a solução: um corte ótimo vai se basear em um pedaço de barra de tamanho i e na solução do corte de um pedaço de barra de tamanho $n - i$.
- Podemos resolvê-lo recursivamente com base na seguinte equação:

$$r_n = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r_{n-i})$$

- Estamos assumindo $r_0 = 0$.



Algoritmo Recursivo

Algorithm 1: CUT-ROD(p, k)

Input: $P[0, n], k$

Output: r_k

```
1 if(  $k == 0$  )
2   return 0
3 else
4    $q \leftarrow -\infty$ 
5   for(  $i \leftarrow 1; i \leq n; i++$  )
6      $q \leftarrow \max(q, p[i] + \text{CUT-ROD}(p, n - i))$ 
7 return  $q$ 
```



Análise

- O custo de pior caso do algoritmo é dado pela seguinte relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n \leq 1 \\ \sum_{j=1}^{n-1} T(j) + \Theta(1), & n > 1 \end{cases}$$

- Mostre que $T(n) = \Omega(2^n)$.



Análise

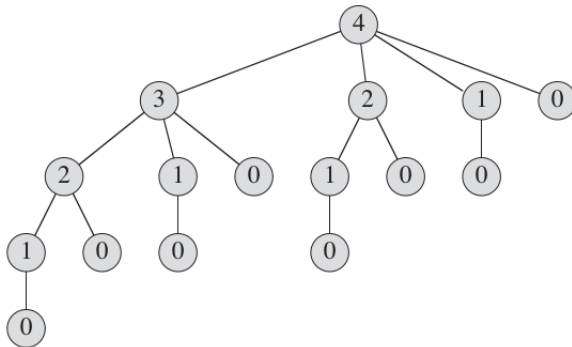


Figura: Árvore de recursão.



Programação Dinâmica

- Qual o problema da solução?



Programação Dinâmica

- Qual o problema da solução?
- Resolve os mesmos problemas várias vezes. . .



Programação Dinâmica

- Qual o problema da solução?
- Resolve os mesmos problemas várias vezes. . .
- A programação dinâmica se encarrega disso ao salvar as soluções dos subproblemas, dessa forma não é necessário recomputá-los.



Programação Dinâmica

- Qual o problema da solução?
- Resolve os mesmos problemas várias vezes. . .
- A programação dinâmica se encarrega disso ao salvar as soluções dos subproblemas, dessa forma não é necessário recomputá-los.
- Trocamos tempo por espaço!



Programação Dinâmica

Top-Down vs Bottom-Up

- Temos duas abordagens, Top-Down ou Bottom-Up.
- Top-Down: usa a técnica **memoization**. Se baseia na recursão salvando o progresso para cada subproblema resolvido. Soluções já computadas são aproveitadas sem esforço adicional.
- Bottom-Up: resolvemos os problemas menores primeiro para depois resolver os problemas maiores com base nas soluções dos problemas menores.



Algoritmo Recursivo com Memoization

Algorithm 2: INITIALIZATION(P, R, n)

Input: $P[0, n], n$

Output: $R[0, n] = (r_0, r_1, \dots, r_n)$, inicializado

- 1 $R[0] \leftarrow 0$
 - 2 **for**($i \leftarrow 1; i \leq n; i++$)
 - 3 $R[i] \leftarrow -\infty$
-



Algoritmo Recursivo com Memoization

Algorithm 3: MEMOIZED-CUT-ROD(P, R, k)

Input: $P[0, n], R[0, n], k$

Output: r_k

```
1 if(  $R[k] \geq 0$  )
2   | return  $R[k]$ 
3 else
4   | for(  $i \leftarrow 1; i \leq k; i++$  )
5     |   |  $R[k] \leftarrow \max(R[k], P[i] + \text{MEMOIZED-CUT-ROD}(P, R, k - i))$ 
6 return  $R[k]$ 
```

- Chamada de interesse: MEMOIZED-CUT-ROD(P, R, k), em que k é o tamanho da barra inteira.



Algoritmo Bottom-Up

- Podemos implementar a solução de uma outra maneira.
- Computando as soluções de problemas menores para então computar as soluções dos problemas maiores.
- Abordagem *Bottom-Up*.
- Implementação iterativa.



Algoritmo Bottom-Up

Algorithm 4: BOTTOM-UP-CUT-ROD(P, R)

Input: $P[0, n], R[0, n], n$

Output: r_n

```
1  $R[0] \leftarrow 0$ 
2 for(  $j \leftarrow 1; j \leq n; j++$  )
3    $q \leftarrow -\infty$ 
4   for(  $i \leftarrow 1; i \leq j; i++$  )
5      $q \leftarrow \max(q, P[i] + R[j - i])$ 
6    $R[j] \leftarrow q$ 
7 return  $R[n]$ 
```



Análise

- Qual a complexidade da solução usando Programação Dinâmica?



Análise

- Qual a complexidade da solução usando Programação Dinâmica?
- $\Theta(n^2)$.



Sumário

3 Problemas



Problemas

- Apresentaremos alguns problemas que possuem solução eficiente utilizando Programação Dinâmica.
- Perceba que os problemas possuem subproblemas compartilhados.
- Procuraremos elaborar uma solução recursiva e depois elaborar a solução utilizando Programação Dinâmica.



Sumário

3 Problemas

- Parentetização Ótima de Matrizes
- Subsequência Comum mais Longa



Multiplicação de Matrizes

Algorithm 5: MATRIX-MULTIPLICATION(A, B)

Input: $A[0, n_1 - 1][0, m_1 - 1], B[0, n_2 - 1][0, m_2 - 1]$

Output: $C[0, n_1 - 1][0, m_2 - 1]$

```
1 if(  $m_1 \neq n_2$  )
2   | REPORT-ERROR()
3 else
4   | for(  $i \leftarrow 0; i < n_1; i++$  )
5     | for(  $j \leftarrow 0; j < m_2; j++$  )
6       |  $C[i][j] \leftarrow 0$ 
7       | for(  $k \leftarrow 0; k < m_1; k++$  )
8         |  $C[i][j] \leftarrow C[i][j] + A[i][k] \cdot B[k][j]$ 
9 return  $C$ 
```



Multiplicação de Matrizes

- Claramente, o algoritmo mostrado é $\Theta(n^3)$.
- Só é possível multiplicar duas matrizes que são compatíveis.
- E se quiséssemos multiplicar várias matrizes? Qual a melhor maneira?
- Lembre-se que a multiplicação em matrizes possui a propriedade associativa:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$



Multiplicação de Matrizes

- Imagine que queremos fazer uma multiplicação de matrizes, e suponha que temos as matrizes $A_{10 \times 100}^0, A_{100 \times 5}^1$ e $A_{5 \times 50}^2$.
- Quantas operações são feitas em $(A^0 \cdot A^1) \cdot A^2$.
- Quantas operações são feitas em $A^0 \cdot (A^1 \cdot A^2)$.
- Qual o melhor jeito de multiplicar as matrizes?



Parentetização Ótima de Matrizes

Parentetização Ótima de Matrizes

- Entrada: matrizes (A_0, \dots, A_{n-1}) . Cada matriz A_i tem dimensão $p_i \times p_{i+1}$.
- Saída: parentetização ótima de matrizes que minimize o número de operações feitas.



Parentetização Ótima de Matrizes

Exemplo

Tabela: Exemplo Anterior

i	0	1	2	3
$P[i]$	10	100	5	50



Parentetização Ótima de Matrizes

Contando o Número de Parentetizações

- O número de parentetizações de matrizes é expressa pela seguinte relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} T(k) \cdot T(n-k), & n > 1 \end{cases}$$



Parentetização Ótima de Matrizes

Contando o Número de Parentetizações

- O número de parentetizações de matrizes é expressa pela seguinte relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} T(k) \cdot T(n-k), & n > 1 \end{cases}$$

- $T(n) \in \Omega\left(\frac{4^n}{n^{3/2}}\right)$



Parentetização Ótima de Matrizes

- Esse problema pode ser resolvido por Programação Dinâmica.
- Vários subproblemas são compartilhados entre os problemas?
- Vamos seguir o framework para desenvolver um algoritmo de PD.
 - 1 Caracterizar a estrutura de uma solução ótima.
 - 2 Recursivamente definir o valor de uma solução ótima.
 - 3 Computar o valor de uma solução ótima.
 - 4 Construir uma solução ótima a partir de valores computados anteriormente.



Parentetização de Matrizes

Caracterização de uma Solução Ótima

- Buscamos uma parentetização ótima do subproblema envolvendo as submatrizes $A_i \dots A_j$.
- Temos que achar o índice k que divide $A_i \dots A_k$ de $A_{k+1} \dots A_j$ de modo que o número de operações entre $A_{i,k}$ e $A_{k+1,j}$ seja o menor possível.
- Note que para o resultado final ser ótimo, $A_{i,k}$ tem que ser uma parentetização ótima, caso contrário, poderíamos substituir para uma melhor e ter um resultado final melhor. O mesmo argumento vale para $A_{k+1,j}$.
- Podemos construir uma solução ótima a partir de soluções ótimas dos subproblemas.



Parentetização de Matrizes

Definição de uma Solução Recursiva

- Seja $M(i, j)$ o número mínimo de operações para computar o produto de $A_{i,j}$.
- $M(i, j)$ é trivial quando $i = j$, pois são necessárias 0 operações para computar $A_{i,i}$ (não há produto).
- Suponha que a parentetização ótima divide $A_{i,j}$ em produto de $A_{i,k}$ e $A_{k+1,j}$



Parentetização de Matrizes

Definição de uma Solução Recursiva

- Neste caso, $M(i, j) = M(i, k) + M(k + 1, j) + p_i \cdot p_{k+1} \cdot p_{j+1}$.
- De maneira genérica, a parentetização ótima é aquela que minimiza o resultado dentre todas as formas de particionamento:

$$M(i, j) = \begin{cases} 0, & i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{M(i, k) + M(k + 1, j) + p_i \cdot p_{k+1} \cdot p_{j+1}\}, & j > i \end{cases}$$



Parentetização de Matrizes

Computação da Solução Ótima

- A partir da solução recursiva, podemos implementar a solução PD.
- Como temos vários problemas que compartilham subproblemas, a PD vai ser bem eficiente.



Parentetização de Matrizes

Algorithm 6: MATRIZ-CHAIN-ORDER(P)

Input: $P[0, n]$

Output: $M[0, n - 1][0, n - 1], S[0, n - 1][0, n - 1]$

```
1 for(  $i \leftarrow 0; i < n; i++$  )
2    $M[i][i] \leftarrow 0$ 
3 for(  $l \leftarrow 1; l < n; l++$  )
4   for(  $i \leftarrow 0; i < n - l; i++$  )
5      $j \leftarrow i + l$ 
6      $M[i][j] \leftarrow \infty$ 
7     for(  $k \leftarrow i; k < j; k++$  )
8        $q \leftarrow M[i][k] + M[k + 1][j] + P[i] \cdot P[k + 1] \cdot P[j + 1]$ 
9       if(  $q < M[i][j]$  )
10         $M[i][j] \leftarrow q$ 
11         $S[i][j] \leftarrow k$ 
```



Parentetização de Matrizes

- Vamos rodar o algoritmo para a seguinte entrada:

Matriz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
dimensão	30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25	
i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0					
1		0				
2			0			
3				0		
4					0	
5						0



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	●				
1		0				
2			0			
3				0		
4					0	
5						0

$$M[0][1] = \min \{ M[0][0] + M[1][1] + P[0] \cdot P[1] \cdot P[2] = 15750 \}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750				
1		0				
2			0			
3				0		
4					0	
5						0

$$M[1][2] = \min \{ M[1][1] + M[2][2] + P[1] \cdot P[2] \cdot P[3] = 2625 \}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750				
1		0	2625			
2			0			
3				0		
4					0	
5						0

$$M[2][3] = \min \{ M[2][2] + M[3][3] + P[2] \cdot P[3] \cdot P[4] = 750 \}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750				
1		0	2625			
2			0	750		
3				0		
4					0	
5						0

$$M[3][4] = \min \{ M[3][3] + M[4][4] + P[3] \cdot P[4] \cdot P[5] = 1000 \}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25


	0	1	2	3	4	5
0	0	15750				
1		0	2625			
2			0	750		
3				0	1000	
4					0	●
5						0

$$M[4][5] = \min \{ M[4][4] + M[5][5] + P[4] \cdot P[5] \cdot P[6] = 5000 \}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750				
1		0	2625			
2			0	750		
3				0	1000	
4					0	5000
5						0

$$M[0][2] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[0][0] + M[1][2] + P[0] \cdot P[1] \cdot P[3] = 7875 \\ M[0][1] + M[2][2] + P[0] \cdot P[2] \cdot P[3] = 18000 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25


	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875			
1		0	2625			
2			0	750		
3				0	1000	
4					0	5000
5						0

$$M[1][3] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[1][1] + M[2][3] + P[1] \cdot P[2] \cdot P[4] = 6000 \\ M[1][2] + M[3][3] + P[0] \cdot P[4] \cdot P[4] = 4375 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875			
1		0	2625	4375		
2			0	750		
3				0	1000	
4					0	5000
5						0

$$M[2][4] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[2][2] + M[3][4] + P[2] \cdot P[3] \cdot P[5] = 2500 \\ M[2][3] + M[4][4] + P[2] \cdot P[4] \cdot P[5] = 3750 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875			
1		0	2625	4375		
2			0	750	2500	
3				0	1000	●
4					0	5000
5						0

$$M[3][5] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[3][3] + M[4][5] + P[3] \cdot P[4] \cdot P[6] = 6250 \\ M[3][4] + M[5][5] + P[3] \cdot P[5] \cdot P[6] = 3500 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875	●		
1		0	2625	4375		
2			0	750	2500	
3				0	1000	3500
4					0	5000
5						0

$$M[0][3] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[0][0] + M[1][3] + P[0] \cdot P[1] \cdot P[4] = 14875 \\ M[0][1] + M[2][3] + P[0] \cdot P[2] \cdot P[4] = 21000 \\ M[0][2] + M[3][3] + P[0] \cdot P[3] \cdot P[4] = 9375 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875	9375		
1		0	2625	4375		
2			0	750	2500	
3				0	1000	3500
4					0	5000
5						0

$$M[1][4] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[1][1] + M[2][4] + P[1] \cdot P[2] \cdot P[5] = 13000 \\ M[1][2] + M[3][4] + P[0] \cdot P[3] \cdot P[5] = 7125 \\ M[1][3] + M[4][4] + P[0] \cdot P[4] \cdot P[5] = 11375 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875	9375		
1		0	2625	4375	7125	
2			0	750	2500	●
3				0	1000	3500
4					0	5000
5						0

$$M[2][5] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[2][2] + M[3][5] + P[2] \cdot P[3] \cdot P[6] = 5375 \\ M[2][3] + M[4][5] + P[2] \cdot P[4] \cdot P[6] = 9500 \\ M[2][4] + M[5][5] + P[2] \cdot P[5] \cdot P[6] = 10000 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875	9375	●	
1		0	2625	4375	7125	
2			0	750	2500	5375
3				0	1000	3500
4					0	5000
5						0

$$M[0][4] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[0][0] + M[1][4] + P[0] \cdot P[1] \cdot P[5] = 28125 \\ M[0][1] + M[2][4] + P[0] \cdot P[2] \cdot P[5] = 27250 \\ M[0][2] + M[3][4] + P[0] \cdot P[3] \cdot P[5] = 11875 \\ M[0][3] + M[4][4] + P[0] \cdot P[4] \cdot P[5] = 15375 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875	9375	11875	
1		0	2625	4375	7125	●
2			0	750	2500	5375
3				0	1000	3500
4					0	5000
5						0

$$M[1][5] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[1][1] + M[2][5] + P[1] \cdot P[2] \cdot P[6] = 18500 \\ M[1][2] + M[3][5] + P[1] \cdot P[3] \cdot P[6] = 10500 \\ M[1][3] + M[4][5] + P[1] \cdot P[4] \cdot P[6] = 18125 \\ M[1][4] + M[5][5] + P[1] \cdot P[5] \cdot P[6] = 24625 \end{array} \right\}$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875	9375	11875	●
1		0	2625	4375	7125	10500
2			0	750	2500	5375
3				0	1000	3500
4					0	5000
5						0

$$M[0][5] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[0][0] + M[1][5] + P[0] \cdot P[1] \cdot P[6] = 36750 \\ M[0][1] + M[2][5] + P[0] \cdot P[2] \cdot P[6] = 32375 \\ M[0][2] + M[3][5] + P[0] \cdot P[3] \cdot P[6] = 15125 \\ M[0][3] + M[4][5] + P[0] \cdot P[4] \cdot P[6] = 21875 \\ M[0][4] + M[5][5] + P[0] \cdot P[5] \cdot P[6] = 26875 \end{array} \right.$$



Parentetização de Matrizes

i	0	1	2	3	4	5	6
P	30	35	15	5	10	20	25

	0	1	2	3	4	5
0	0	15750	7875	9375	11875	15125
1		0	2625	4375	7125	10500
2			0	750	2500	5375
3				0	1000	3500
4					0	5000
5						0

$$M[0][5] = \min \left\{ \begin{array}{l} M[0][0] + M[1][5] + P[0] \cdot P[1] \cdot P[6] = 36750 \\ M[0][1] + M[2][5] + P[0] \cdot P[2] \cdot P[6] = 32375 \\ M[0][2] + M[3][5] + P[0] \cdot P[3] \cdot P[6] = 15125 \\ M[0][3] + M[4][5] + P[0] \cdot P[4] \cdot P[6] = 21875 \\ M[0][4] + M[5][5] + P[0] \cdot P[5] \cdot P[6] = 26875 \end{array} \right.$$



Parentetização de Matrizes

- Qual a complexidade do algoritmo?
- Está claro que é $O(n^3)$, pois temos que preencher a metade superior de uma matriz quadrada levando tempo $O(n)$ para cada célula.
- Será que também é $\Omega(n^3)$ e portanto $\Theta(n^3)$?



Parentetização de Matrizes

Queremos mostrar que

$$\sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-l-1} \sum_{k=0}^{l-1} \Theta(1) \in \Omega(n^3)$$



Parentetização de Matrizes

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-l-1} \sum_{k=0}^{l-1} \Theta(1) \\ & \geq d \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-l-1} \sum_{k=0}^{l-1} 1 \\ & = d \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-l-1} l \\ & = d \sum_{l=1}^{n-1} nl - l^2 \end{aligned}$$



Parentetização de Matrizes

$$\begin{aligned} &= d \left(\sum_{l=1}^{n-1} nl - \sum_{l=1}^{n-1} l^2 \right) \\ &= d \left(n \sum_{l=1}^{n-1} l - \sum_{l=1}^{n-1} l^2 \right) \\ &= d \left(\frac{n(n^2 - n)}{2} - \sum_{l=1}^{n-1} l^2 \right) \\ &= d \left(\frac{n^3 - n^2}{2} - \sum_{l=1}^{n-1} l^2 \right) \end{aligned}$$



Parentetização de Matrizes

$$\begin{aligned} & d \left(\frac{n^3 - n^2}{2} - \sum_{l=1}^{n-1} l^2 \right) \\ &= d \left(\frac{n^3 - n^2}{2} - \frac{(n-1)(n)(2n)}{6} \right) \\ &= d \left(\frac{n^3 - n^2}{2} - \frac{2n^3 - 2n^2}{6} \right) \\ &= d \left(\frac{3n^3 - 3n^2 - 2n^3 + 2n^2}{6} \right) \\ &= d \left(\frac{n^3 - n^2}{6} \right) = \frac{dn^3 - dn^2}{6} \geq cn^3, \quad \diamond \quad 0 < c < \frac{d}{6} \text{ e } n \text{ s.f.g} \end{aligned}$$



Parentetização de Matrizes

Construindo a Solução Ótima

- A matriz S guarda o índice k que torna a parentetização ótima para cada subproblema.
- Podemos utilizar S para construir a melhor parentetização.
- Um problema de otimização vira agora um problema de busca.



Parentetização de Matrizes

Algorithm 7: PRINT-OPTIMAL-PARENS(S, i, j)

Input: $S[0, n - 1][0, n - 1], i, j$

Output: Parentetização ótima de $A_{i,j}$

```
1 if(  $i = j$  )
2   | PRINT( " $A_i$ " )
3 else
4   | PRINT( "(" )
5   | PRINT-OPTIMAL-PARENS( $S, i, S[i, j]$ )
6   | PRINT-OPTIMAL-PARENS( $S, S[i, j] + 1, j$ )
7   | PRINT( ")" )
```



Sumário

3 Problemas

- Parentetização Ótima de Matrizes
- Subsequência Comum mais Longa



LCS

Definição (Subsequência)

Dada uma sequência $X = x_0x_1 \dots x_{n-1}$ e outra sequência $Z = z_0 \dots z_{m-1}$, dizemos que Z é subsequência de X , se existe uma sequência crescente de índices $(i_0, i_1, \dots, i_{m-1})$ tal que, para todo k , $0 \leq k < m$, $X_{i_k} = Z_k$.

Exemplo

$Z = BCDB$ é subsequência de $X = ABCBDAB$.



LCS

Definição (Subsequência Comum)

Dadas duas sequências X e Y , Z é uma subsequência comum de X e Y se:

- 1 Z é subsequência de X .
- 2 Z é subsequência de Y .



LCS

Definição (Longest Common Subsequence)

- Entrada: duas sequências X e Y .
- Saída: maior subsequência comum de X e Y (LCS).

Exemplo

- Entrada: $X = ABCBDAB$ e $Y = BDCABA$.
- Saída: $Z = BCBA$ ou $Z = BDAB$.
- Não existe subsequência comum de tamanho ≥ 5 .



LCS

Solução Força-Bruta

- Gere todas as subsequências de X .
- Para cada subsequência gerada a partir de X , verifique se ela também é uma subsequência de Y .
- Armazene a maior subsequência comum encontrada.
- Inviável: 2^n subsequências de X .



LCS

Caracterizando uma LCS

- Seja $X = x_0 \dots x_{n-1}$ e $Y = y_0 \dots y_{m-1}$ sequências. Tome $Z = z_0 \dots z_{k-1}$ a maior subsequência comum entre X e Y .
 - ① Se $x_{n-1} = y_{m-1}$, então $z_{k-1} = x_{n-1} = y_{m-1}$. $Z[0, k-2]$ tem que ser uma LCS de $X[0, n-2]$ e $Y[0, m-2]$.
 - ② Se $x_{n-1} \neq y_{m-1}$, e $z_{k-1} \neq x_{n-1}$, então Z é uma LCS de $X[0, n-2]$ e Y .
 - ③ Se $x_{n-1} \neq y_{m-1}$, e $z_{k-1} \neq y_{m-1}$, então Z é uma LCS de X e $Y[0, m-2]$.



LCS

Caracterizando uma LCS

- É fácil ver que a caracterização possui subestrutura ótima.



LCS

Solução Recursiva

- Seja $C(i, j)$ o tamanho da maior subsequência entre $X[0, i - 1]$ e $Y[0, j - 1]$.
- Logo:

$$C(i, j) = \begin{cases} 0, & i = 0 \vee j = 0 \\ C(i - 1, j - 1) + 1, & i, j > 0 \wedge x_{i-1} = y_{j-1} \\ \max(C(i - 1, j), C(i, j - 1)), & i, j > 0 \wedge x_{i-1} \neq y_{j-1} \end{cases}$$

- Podemos ver que existem várias sobreposições de subproblemas:
 - ▶ LCS de $X[0, n - 1]$ e $Y[0, m - 2]$ e LCS de $X[0, n - 2]$ e $Y[0, m - 2]$.



LCS

Solução Bottom-Up

- A partir da solução recursiva, podemos elaborar uma solução PD bottom-up.
- Essa solução resolve subproblemas menores para assim, resolver os subproblemas maiores.



LCS

Algorithm 8: LCS(X, Y)

Input: $X[0, n - 1], Y[0, m - 1]$

Output: $C[0, n - 1][0, m - 1], D[0, n - 1][0, m - 1]$

```
1  $C[i][0] \leftarrow 0, \quad 0 \leq i \leq n$ 
2  $C[0][j] \leftarrow 0, \quad 0 \leq j \leq m$ 
3 for(  $i \leftarrow 1; i \leq n; i++$  )
4   for(  $j \leftarrow 1; j \leq m; j++$  )
5     if(  $X[i - 1] = Y[j - 1]$  )
6        $C[i][j] \leftarrow C[i - 1][j - 1] + 1$ 
7        $D[i][j] \leftarrow \text{'}\nwarrow\text{'}$ 
8     else if(  $C[i - 1][j] \geq C[i][j - 1]$  )
9        $C[i][j] \leftarrow C[i - 1][j]$ 
10       $D[i][j] \leftarrow \text{'}\uparrow\text{'}$ 
11    else
12       $C[i][j] \leftarrow C[i][j - 1]$ 
13       $D[i][j] \leftarrow \text{'}\leftarrow\text{'}$ 
```



LCS

Recuperando a LCS

- Para recuperar a LCS, basta seguir a matriz de direções D .



LCS

y_j		B	D	C	A	B	A
x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Figura: LCS entre X e Y .



LCS

Análise

- Qual a complexidade do Algoritmo?



LCS

Análise

- Qual a complexidade do Algoritmo?
- $\Theta(n \cdot m)$.