



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília – Câmpus Taguatinga  
Ciência da Computação – Análise de Algoritmos  
Lista de Exercícios – Análise Assintótica  
Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Aluno: \_\_\_\_\_

Matrícula: \_\_\_\_\_

### Exercício 1

Demonstre que:

- (a)  $n! \in \omega(2^n)$
- (b)  $n! \in o(n^n)$
- (c)  $k \log n \in \Theta(n) \Rightarrow k \in \Theta(n/\log n)$ .

### Exercício 2

Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções monotonicamente crescentes. Prove ou ache um contra-exemplo para cada uma das seguintes conjecturas:

- (a)  $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$
- (b)  $f(n) + g(n) \in \Theta(\min(f(n), g(n)))$
- (c)  $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \log(f(n)) \in O(\log(g(n)))$ , onde  $\log(g(n)) \geq 1$  e  $f(n) \geq 1$  para  $n$  suficientemente largo
- (d)  $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$
- (e)  $f(n) \in O((f(n))^2)$
- (f)  $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$
- (g)  $f(n) \in \Theta(f(n/2))$
- (h)  $f(n) + o(f(n)) \in \Theta(f(n))$

### Exercício 3

Mostre que para constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $b \geq 0$  que:

$$(n + a)^b \in \Theta(n^b)$$

### Exercício 4

Seja

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

onde  $a_i > 0$ . Seja  $k$  uma constante, ise as definições de notação assintótica para provar as seguintes propriedades:

- (a) Se  $k \geq d$ , então  $p(n) \in O(n^k)$
- (b) Se  $k \leq d$ , então  $p(n) \in \Omega(n^k)$
- (c) Se  $k = d$ , então  $p(n) \in \Theta(n^k)$
- (d) Se  $k > d$ , então  $p(n) \in o(n^k)$
- (e) Se  $k < d$ , então  $p(n) \in \omega(n^k)$

### Exercício 5

Indique, para cada par de expressões  $(A, B)$  na tabela abaixo, se  $A$  é  $O$ ,  $o$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  ou  $\Theta$  de  $B$ . Assuma  $k \geq 1$ ,  $\epsilon > 0$  e  $c > 1$  são constantes. Sua resposta deve estar na forma “sim” ou “não”.

|    | $A$          | $B$           | $O$ | $o$ | $\Omega$ | $\omega$ | $\Theta$ |
|----|--------------|---------------|-----|-----|----------|----------|----------|
| a) | $\log^k n$   | $n^\epsilon$  |     |     |          |          |          |
| b) | $n^k$        | $c^n$         |     |     |          |          |          |
| c) | $\sqrt{n}$   | $c^{\sin(n)}$ |     |     |          |          |          |
| d) | $2^n$        | $2^{n/2}$     |     |     |          |          |          |
| e) | $n^{\log c}$ | $c^{\log n}$  |     |     |          |          |          |
| f) | $\lg(n!)$    | $\lg(n^n)$    |     |     |          |          |          |

### Exercício 6

Demonstre que:

$$n! \gg c^n \gg n^3 \gg n^2 \gg n^{1+\epsilon} \gg n \log n \gg n \gg \sqrt{n} \gg \log^2 n \gg \log n \gg \log n / \log \log n \gg \log \log n \gg 1$$

### Exercício 7

Verdadeiro ou falso?

- (a)  $2^{n+1} \in O(2^n)$
- (b)  $2^{2n} \in O(2^n)$

### Exercício 8

Para cada um dos seguintes pares  $f(n)$  e  $g(n)$ , identifique se  $f(n) \in O(g(n))$ ,  $f(n) \in \Omega(g(n))$  ou  $f(n) \in \Theta(g(n))$ .

- (a)  $f(n) = \log^2 n$ ;  $g(n) = \log n + 5$
- (b)  $f(n) = \sqrt{n}$ ;  $g(n) = \lg n$
- (c)  $f(n) = \log^2 n$ ;  $g(n) = \log n$
- (d)  $f(n) = n$ ;  $g(n) = \log^2 n$
- (e)  $f(n) = n \log n$ ;  $g(n) = \log n$
- (f)  $f(n) = 10$ ;  $g(n) = \log 10$
- (g)  $f(n) = 2^n$ ;  $g(n) = 10n^2$

- 
- (h)  $f(n) = 2^n; g(n) = 3^n$
  - (i)  $f(n) = n + 2\sqrt{n}; g(n) = n^2$
  - (j)  $f(n) = n \log n; g(n) = \frac{n\sqrt{n}}{2}$
  - (k)  $f(n) = n + \log n; g(n) = \sqrt{n}$
  - (l)  $f(n) = 2(\log n)^2; g(n) = \log n + 1$
  - (m)  $f(n) = 4n \log n; g(n) = (n^2 - n)/2$

### Exercício 9

Prove que  $n^3 - 3n^2 - n + 1 \in \Theta(n^3)$

### Exercício 10

Demonstre que:

- (a) Se  $f_1(n) \in O(g_1(n))$  e  $f_2(n) \in O(g_2(n))$ , então  $f_1(n) + f_2(n) \in O(g_1(n) + g_2(n))$
- (b) Se  $f_1(n) \in \Omega(g_1(n))$  e  $f_2(n) \in \Omega(g_2(n))$ , então  $f_1(n) + f_2(n) \in \Omega(g_1(n) + g_2(n))$
- (c) Se  $f_1(n) \in \Omega(g_1(n))$  e  $f_2(n) \in \Omega(g_2(n))$ , então  $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Omega(g_1(n) \cdot g_2(n))$

### Exercício 11

Liste as funções da menor pra maior ordem assintótica. Se duas funções são da mesma ordem, indique.

|                  |              |            |                                    |
|------------------|--------------|------------|------------------------------------|
| $n$              | $2^n$        | $n \log n$ | $\ln n$                            |
| $n - n^3 + 7n^5$ | $\log n$     | $\sqrt{n}$ | $e^n$                              |
| $n^2 + \log n$   | $n^2$        | $2^{n-1}$  | $\log \log n$                      |
| $n^3$            | $(\log n)^2$ | $n!$       | $n^{1+\epsilon}, 0 < \epsilon < 1$ |

### Exercício 12

Ache, caso existam, duas funções  $f(n)$  e  $g(n)$  que satisfazem as seguintes relações,

- (a)  $f(n) \in o(g(n))$  e  $f(n) \notin \Theta(g(n))$
- (b)  $f(n) \in \Theta(g(n))$  e  $f(n) \notin o(g(n))$
- (c)  $f(n) \in \Theta(g(n))$  e  $f(n) \notin O(g(n))$
- (d)  $f(n) \in \Omega(g(n))$  e  $f(n) \notin O(g(n))$

### Exercício 13

Para cada uma das perguntas, justifique sua resposta:

- (a) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo  $O(n^2)$ , é possível que ele leve tempo  $O(n)$  em algumas instâncias?
- (b) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo  $O(n^2)$ , é possível que ele leve tempo  $O(n)$  em todas as instâncias?
- (c) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo  $\Theta(n^2)$ , é possível que ele leve tempo  $O(n)$  em algumas as instâncias?
- (d) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo  $\Theta(n^2)$ , é possível que ele leve tempo  $O(n)$  em todas as instâncias?

- 
- (e) A função  $f(n) \in \Theta(n^2)$  onde  $f(n) = 100n^2$ , para  $n$  par e  $f(n) = 20n^2 - n \log n$  para  $n$  ímpar?

### Exercício 14

Qual das afirmativas é verdadeira?

- (a)  $\sum_{i=1}^n 3^i \in \Theta(3^{n-1})$ .
- (b)  $\sum_{i=1}^n 3^i \in \Theta(3^n)$ .
- (c)  $\sum_{i=1}^n 3^i \in \Theta(3^{n+1})$ .

### Exercício 15

Analise os algoritmos abaixo de maneira mais justa possível:

(a)

```
1 sum = 0;
2 for (int i=0; i<n; i++){
3     for (int j=i; j<n; j++){
4         sum++;
5     }
6 }
```

(b)

```
1 sum = 0;
2 for (int i=1; i<=n; i*=2){
3     for (int j=1; j<=n; j++){
4         sum++;
5     }
6 }
```

(c)

```
1 sum = 0;
2 for (int i=1; i<=n; i*=2){
3     for (int j=1; j<=n; j+=i){
4         sum++;
5     }
6 }
```