Casamento de Padrões

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação

INSTITUTO FEDERAL
Brasília

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Instituto Federal de Brasília,
Câmpus Taguatinga

Sumário

Sumário

Introdução

- O Problema de Casamento de Padrões está entre um dos mais estudados em Computação
- Sua solução proporciona Aplicações nas mais diversas áreas.

Aplicações

Biologia Computacional

- Alinhamento Múltiplo.
- Mapeamento de Sequências.
- Montagem.

Aplicações

Compiladores

- Identificação de Tokens.
- Unificação.

Aplicações

Editores de Texto

- Identificar padrões no arquivo.
- Substituir padrões por outros.
- Casamento de expressões regulares.

Aplicações

Recuperação de Informação

- Retornar os documentos que contém o padrão buscado.
  - Buscadores!
  - Big Data? Por trás disso tudo temos algoritmos...
  - A essência da Computação são algoritmos.
  - Tecnologia $\neq$ Computação.

Introdução

- O Casamento de Padrões pode ser:
  1. Exato: ocorrências do Padrão no Texto sem nenhum erro.
  2. Aproximado: ocorrências do Padrão no Texto permitindo até k erros segundo uma métrica de distância.
     - Casamento Exato $=$ Casamento Aproximado quando $k = 0$.
  3. Focaremos em casamento exato de padrões.

Introdução

- Antes de definir os problemas, precisamos de alguns conceitos iniciais.

Conceitos Básicos

Definição (Palavras)

- Palavras (*strings*) são sequências sobre o alfabeto Σ.
- O conjunto de todos as possíveis palavras é denotada por $\Sigma^\star$.
- Em especial, temos a palavra vazia $\varepsilon \in \Sigma^\star$.
- O i-ésimo símbolo de uma palavra S, é denotado por $S[i]$.

Conceitos Básicos

Definição (Tamanho de Palavras)

- O tamanho de uma palavra S é detonado por $|S|$, e contém a quantidade de símbolos em S.
- Em especial, $|\varepsilon| = 0$.

Conceitos Básicos

Definição (Subpalavras)

- Uma subpalavra de S é denotada por $S[i, j]$, e é constituída pelos símbolos $S[i]S[i+1] \dots S[j]$ desde que $0 \leq i \leq j < |S|$. Caso contrário, $S[i, j] = \varepsilon$.

Conceitos Básicos

Notação (Texto e Padrão)

- Em especial, o texto é uma palavra denotada por T, sendo $|T| = n$.
- Já o padrão é denotado por P, tendo tamanho $|P| = m$.

Sumário

Casamento Exato

- O casamento exato de padrões procura identificar as ocorrências de um padrão em um dado texto.

Casamento Exato

Casamento Exato

- Entrada: P e T.
- Saída: $occ = \{k | P[0, m-1] = T[k, k+m-1]\}$.

Sumário

Algoritmo Ingênuo

- O algoritmo ingênuo é capaz de resolver o problema do casamento exato de padrões.
- Ideia: força-bruta. Comparamos o padrão com todas as posições possíveis do texto.
- Você é capaz de delinear o algoritmo subjacente?

Algoritmo Ingênuo

Algorithm 1: NAIVE-MATCHER(P, T)

Input: T, P

Output: $occ = \{k | P[0, m-1] = T[k, k+m-1]\}$

for($i \leftarrow 0; i < n - m + 1; i++$)
  $found \leftarrow true$
  for($j \leftarrow 0; j < m; j++$)
    if($T[i+j] \neq P[j]$)
      $found \leftarrow false$
  if($found$)
    REPORT-MATCH(i)

Algoritmo Ingênuo

- Qual a complexidade de tal algoritmo?
- $\Theta(n \cdot m)$

Sumário

Rabin-Karp

- Tome $P = aaaaaab$ e $T = aaaaaaaaaaaaaaaaaaaa$.
- O Algoritmo Ingênuo é extremamente ineficiente, pois ele precisa inspecionar todos os símbolos do padrão para descobrir que P não ocorre naquela posição do texto.
- O algoritmo de Rabin-Karp perde um pouco de tempo ao **preprocessar** informação do padrão de modo a agilizar a etapa de busca.

Rabin-Karp

- Para facilitar, suponha que o alfabeto subjacente seja $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Computamos o valor do padrão módulo algum número q, com preferência de q primo.
- Exemplo, se $P = 31415$, então $P \mod 13 = 7$.
- De maneira geral, o alfabeto tem base d. No caso do alfabeto de DNA, $d = 4$. Considerando proteínas $d = 20$. Considerando ASCII, $d = 255$.

Rabin-Karp

Algorithm 2: RK-PREPROCESS

Input: P, d, q

Output: $P \mod q$

$sum \leftarrow 0$

for$(\ i = 0; i < m; i++\ )$

  $sum = sum \cdot d$

  $sum \leftarrow sum + P[i]$

return $sum \mod q$

Rabin-Karp

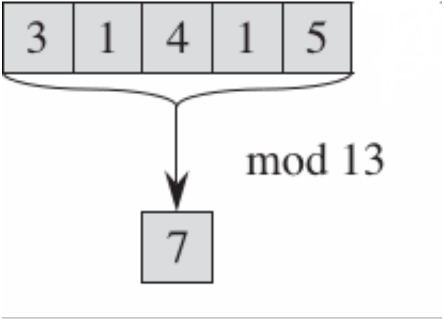


Figura: Preprocessando o padrão.

Rabin-Karp

- A ideia do algoritmo é fazer várias comparações de caracteres através de uma única comparação de inteiros.
- Assim como o padrão, cada porção do texto a ser comparada com o padrão, é preprocessada.
- Se o valor do padrão P é k e o valor da porção do texto é l. O que podemos dizer quando:
  - $k \neq l$?
  - $k = l$?

Rabin-Karp

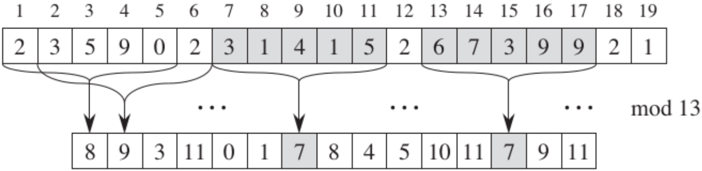


Figura: Valores das porções do texto.

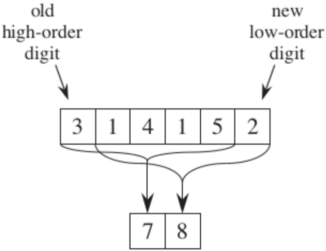
Processando o Texto

- Como converter o texto de maneira eficiente?
- Precisamos guardar o valor para cada posição do texto?

Processando o Texto

- Como converter o texto de maneira eficiente?
- Precisamos guardar o valor para cada posição do texto?
- Na verdade não, só da porção que estamos analisando.

Processando o Texto



$$\begin{aligned} 14152 &\equiv (31415 - \overset{\substack{\text{old}\\ \text{high-order}\\ \text{digit}\\ \downarrow}}{3}\cdot 10000)\cdot \overset{\substack{\text{shift}\\ \downarrow}}{10} + \overset{\substack{\text{new}\\ \text{low-order}\\ \text{digit}\\ \downarrow}}{2} \pmod{13} \\ &\equiv (7 - 3\cdot 3)\cdot 10 + 2 \pmod{13} \\ &\equiv 8 \pmod{13} \end{aligned}$$

Figura: Processando o valor do texto em $O(1)$ de tempo e espaço.

Rabin-Karp

Algorithm 3: COMPARE

Input: P, T, i

Output: $true \Leftrightarrow P = T[i, i+m-1]$

for($k \leftarrow 0; k < m; k++$)
    if($P[k] = T[i+k]$)
        return $false$

return $true$

Rabin-Karp

Algorithm 4: RK-MATCHER

Input: P, T, d, q

Output: $occ = \{k|P[0, m-1] = T[k][k+m-1]\}$

$h \leftarrow d^{m-1} \mod q$

$P_v =$ RK-PREPROCESS(P, d, q)

$T_v =$ RK-PREPROCESS$T[0, m-1], d, q$

for($i \leftarrow 0; i < n - m + 1; i++$)

    if($P_v = T_v$)

        if(COMPARE(P, T, i))

            REPORT-MATCH(i)

    if($i < n - m$)

        $T_v \leftarrow (d \cdot (T_v - T[i] \cdot h) + T[i+m]) \mod q$

Complexidade

- Qual a complexidade do algoritmo de Rabin-Karp?

Complexidade

- Qual a complexidade do algoritmo de Rabin-Karp?
- $O(n \cdot m)$.

Sumário

KMP

- Qual o problema dos algoritmos anteriores?

KMP

- Qual o problema dos algoritmos anteriores?
- Eles esquecem tudo! As comparações sempre são dadas do início.

KMP

- O algoritmo KMP, descoberto por Vaughan Pratt e Donald Knuth e de maneira independente por James Morris, contorna esse problema. O algoritmo utiliza a informação aprendida durante o casamento para evitar comparações supérfluas nas próximas etapas.
- Os três se juntaram e publicaram a descoberta.
- Um dos artigos mais clássicos da área de "Stringology".
- Knuth, Donald; Morris, James H.; Pratt, Vaughan (1977). "Fast pattern matching in strings". SIAM Journal on Computing 6 (2): 323–350. doi:10.1137/0206024

Algoritmo Ingênuo

Exemplo

- Tome $T = xyxxyxyxyyxyxyxyyxyxyxx$
- Considere $P = xyxyyxyxyxx$.

Algoritmo Ingênuo

Tabela: Casamento do Padrão com o Texto.

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
	$T:$	x	y	x	x	y	x	y	x	y	y	x	y	x	y	x	y	y	x	y	x	y	x	x
0	$P:$	x	y	x	y																			
1	$P:$		x																					
2	$P:$			x	y																			
3	$P:$				x	y	x	y	y															
4	$P:$					x																		
5	$P:$						x	y	x	y	y	x	y	x	y	x	x							
6	$P:$							x																
7	$P:$								x	y	x													
8	$P:$									x														
9	$P:$										x													
10	$P:$											x	y	x	y	y								
11	$P:$												x											
12	$P:$													x	y	x	y	y	x	y	x	y	x	x

KMP

- O algoritmo KMP usa a informação da porção de P que causou para deslizar o padrão de maneira eficiente.
- Ele utiliza o conhecimento durante o processo de casamento para evitar comparações desnecessária.
- Vamos examinar como ele faz isso.

KMP

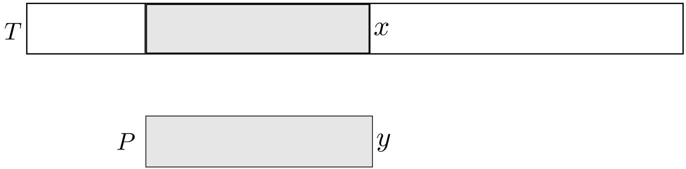


Figura: Casamento de uma porção do padrão com o texto.

- Suponha que $x \neq y$.

KMP

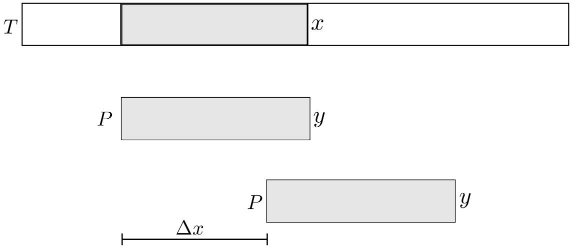


Figura: Deslizamento do padrão sobre o texto.

- Suponha que o algoritmo KMP deslize o padrão com um deslocamento Δx.
- O que podemos dizer sobre a sobreposição dos padrões para poder haver possibilidade de casamento?

KMP

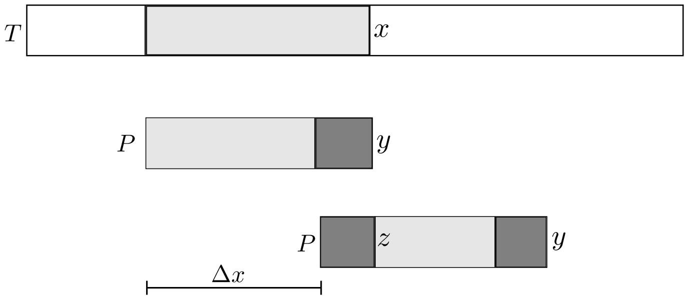


Figura: Deslizamento do padrão sobre o texto.

- Prefixo tem que ser igual a um sufixo da parte que casou.

KMP

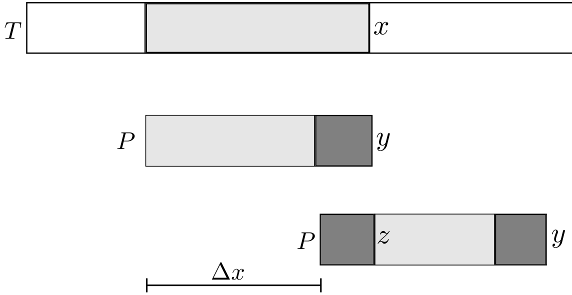


Figura: Deslizamento do padrão sobre o texto.

- Para não pular nenhuma ocorrência de P em T, o deslocamento deve ser o menor possível que atenda a propriedade.

KMP

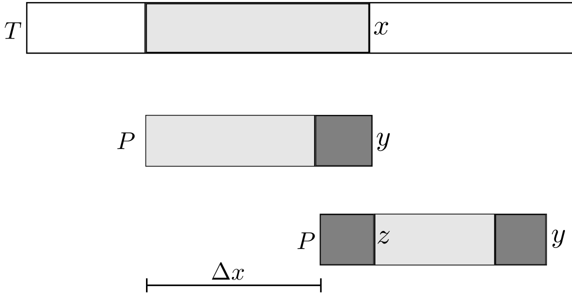


Figura: Deslizamento do padrão sobre o texto.

- Temos que achar o maior prefixo próprio que seja igual a um sufixo próprio da porção do Padrão que casou com o Texto.

KMP

- Vamos definir nosso objeto de cálculo.
- Nossa função $next$ vai nos dar o próximo caractere do padrão que se deve começar as comparações.

$$next(i) = \begin{cases} -1, & i = 0 \\ \max\{k | P[0, k-1] = P[i-k, i-1] \end{cases}$$

Computando a Função $next$

- Como computar $next$?
- Sabemos que $next(0) = -1$. Suponha agora que queiramos computar $next(i)$ e já tenhamos computado $next(j)$ com $0 \leq j < i$.
- Como computar $next(i)$?

Computando a Função $next$

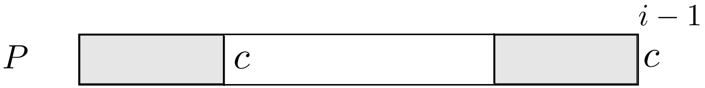


Figura: Caso 1: $P[next(i-1)] = P[i-1]$

- Neste caso, $next(i) = next(i-1) + 1$.

Computando a Função *next*

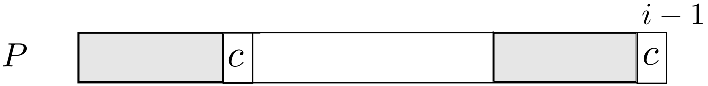


Figura: Caso 1: $P[next(i-1)] = P[i-1]$

- Neste caso, $next(i) = next(i-1) + 1$.

Computando a Função $next$

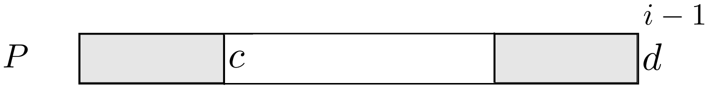


Figura: Caso 2: $P[next(i-1)] \neq P[i-1]$

- Como não conseguimos estender e formar um sufixo. Precisamos pesquisar no próximo maior sufixo de P que é sufixo de $P[0, i-1]$. Onde está esta informção?

Computando a Função $next$

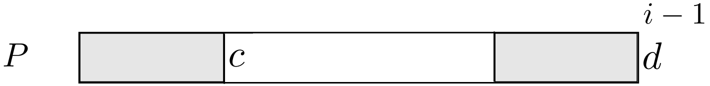


Figura: Caso 2: $P[next(i-1)] \neq P[i-1]$

- Como não conseguimos estender e formar um sufixo. Precisamos pesquisar no próximo maior sufixo de P que é sufixo de $P[0, i-1]$. Onde está esta informção?
- $next(next(i-1))$.

Computando a Função $next$

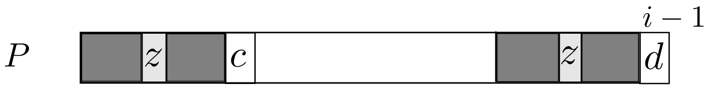


Figura: Tentamos estender usando o próximo maior prefixo que também é sufixo.

Pré-processamento

Algorithm 5: KMP-PREPROCESS

Input: P

Output: $next$

$next[0] \leftarrow j \leftarrow -1$

for($i \leftarrow 1; i \leq m; i++$)

  while $(j \geq 0 \land P[i-1] \neq P[j])$ **do**

    $j \leftarrow next[j]$

  $j++$

  $next[i] \leftarrow j$

Pré-processamento

Análise

- Qual a complexidade de KMP-PREPROCESS?
- $\Theta(m^2)$?
- Quantas vezes o **while** interno pode executar?

Pré-processamento

Análise

- Qual a complexidade de $\text{KMP-}\textsc{preprocess}$?
- $\Theta(m^2)$?
- Quantas vezes o **while** interno pode executar?
- Máximo de $2m$ iterações agregadas no laço interno.
- $\Theta(m)$.

KMP

- Agora que temos a informação suficiente, podemos elaborar o algoritmo de busca.
- Toda vez que um caractere do texto diferir do i-ésimo caractere do padrão, não precisamos reinicializar a busca.
- Começamos de $next[i]$!

Busca

Algorithm 6: KMP-PREPROCESS

Input: T, P

Output: $occ\{k | P[0, m-1] = T[k, k+m-1]\}$

```
next ← KMP-PREPROCESS(P)
i ← j ← 0
while (i < n) do
    while (j ≥ 0 ∧ T[i] ≠ P[j]) do
        j ← next[j]
    j++
    i++
    if( j = m )
        REPORT-MATCH(i − j)
        j ← next[j]
```

KMP

Exemplo

- Tome $T = xyxxyxyxyyxyxyxyyxyxyxx$
- Considere $P = xyxyyxyxyxx$.
- Calcule $next$ e aplique o algoritmo KMP.