

Grafos

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação



Prof. Daniel Saad Nogueira
Nunes

Instituto Federal de Brasília,
Câmpus Taguatinga



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Percurso
- 3 Menor Caminho
- 4 Árvore Espalhada Mínima



Sumário

1 Introdução



Introdução

- Muitos problemas em Ciência da Computação são modelados em formas de relacionamento entre objetos, no sentido amplo da palavra.
- Precisamos de formalismo que consegue modelar relações presentes desde problemas envolvendo interações entre pessoas à problemas envolvendo redes gigantescas de computadores.
- A chave para resolução de muitos problemas computacionais pode residir em um único formalismo, os **grafos**.



Introdução

- A Teoria dos Grafos provê uma linguagem para falar de propriedades e relacionamentos dos objetos mencionados.
- Veremos que projetar um algoritmo novo usando grafos é extremamente complicado, muita das vezes, precisamos apenas utilizar um algoritmo já conhecido.
- Às vezes o mais difícil é modelar o problema em termos de grafos!



Introdução

Definição (Grafo)

Um grafo é uma dupla $G(V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas.



Introdução

- Repare que as arestas formam uma relação sobre o conjunto dos pares de vértices.
- Por exemplo, os vértices $v \in V$ poderiam representar cidades, enquanto uma aresta (u, v) informaria que estive uma rodovia entre a cidade u e v .
- As arestas representam relacionamentos entre os objetos!



Introdução

Tipos de Grafos

- Existem diversas especialidades de grafos.
- Cada qual com suas propriedades distintas, o que faz o seu uso mais adequado em determinados problemas:
 - 1 Simples \times Não-simples.
 - 2 Dirigido \times Não-dirigido.
 - 3 Com peso \times Sem peso.
 - 4 Esparso \times Denso.
 - 5 Cíclico \times Acíclico.
 - 6 Incorporado \times Topológico.
 - 7 Implícito \times Explícito.
 - 8 Rotulado \times Não-rotulado.



Sumário

- 1 **Introdução**
 - Tipos de Grafos
 - Aplicações
 - Representação de Grafos
 - Conceitos Fundamentais



Tipos de Grafos

Simplex × Não-simplex

- Grafos simples não possuem estruturas complexas, tais como:
 - ▶ Loops: arestas que ligam o vértice nele mesmo.
 - ▶ Multiarestas: podemos ter várias arestas ligando dois vértices.



Tipos de Grafos

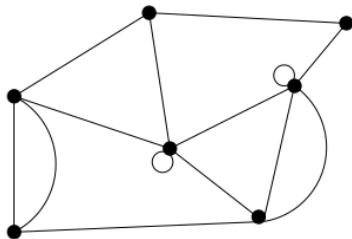
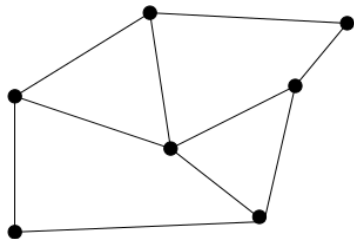


Figura: Simples \times Não-simples.



Tipos de Grafos

Dirigido \times Não-dirigido

- Um grafo é não-dirigido se, existe uma aresta (x, y) , logo, também existe a aresta (y, x) , temos arestas nas duas direções.
- Um grafo é dirigido se podemos ter arestas em uma única direção.
 - ▶ Muito útil para modelar problemas específicos.
 - ▶ Exemplo: uma via de mão única.



Tipos de Grafos

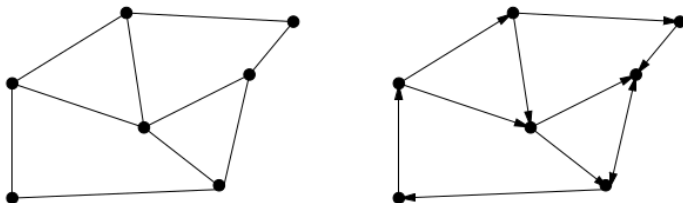


Figura: Dirigido \times Não-dirigido.



Tipos de Grafos

Com Peso \times Sem Peso

- Em um grafo com peso nas arestas, para cada aresta (u, v) , temos um peso relacionado a ela. que pode ser por exemplo números inteiros ou reais.
 - ▶ Muito utilizado em problemas de otimização, como o problema do menor caminho.



Tipos de Grafos

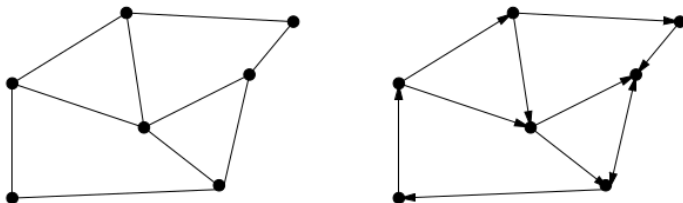


Figura: Dirigido \times Não-dirigido.



Tipos de Grafos

Esparso \times Denso

- Ao todo podemos ter $\binom{n}{2}$ pares de vértices.
- Grafos são esparsos se temos apenas uma pequena fração de arestas sobre os possíveis pares de vértice
- Grafos densos possuem uma grande porção de ligações entre os vértices.
- Não há uma regra geral, geralmente dizemos que um grafo é denso se $|E| \in \Theta(n^2)$.



Tipos de Grafos

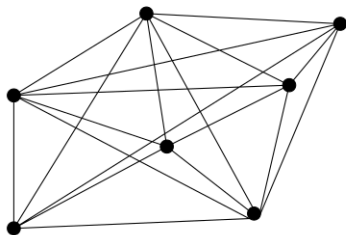
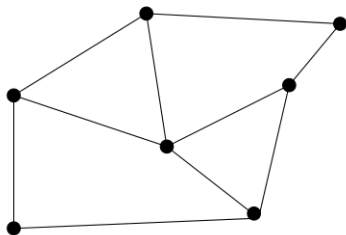


Figura: Esparso \times Denso.



Tipos de Grafos

Cíclicos × Acíclicos

- Um grafo acíclico são grafos que não possuem ciclos.



Tipos de Grafos

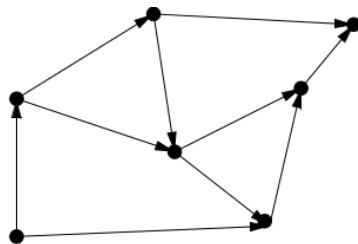
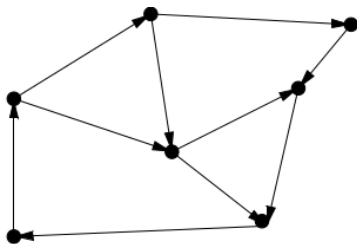


Figura: Cíclico \times Acíclico.



Tipos de Grafos

Incorporado \times Topológico

- Um grafo é incorporado se seus vértices estão mapeados em posições geométricas, como em um grid.
- Isso pode ter relevância em alguns problemas.
- Em problemas que isto não é importante, nos importamos apenas com a topologia do grafo (o esqueleto).



Tipos de Grafos

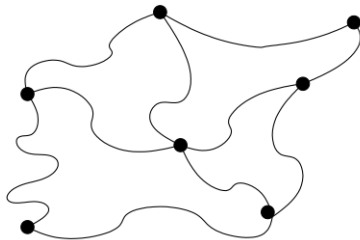
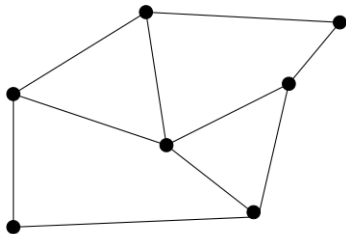


Figura: Incorporado \times Topológico.



Tipos de Grafos

Implícitos × Explícitos

- Grafos implícitos vão sendo construídos conforme vamos utilizando eles.
 - ▶ Backtracking, simulação...
- Em outros casos, precisamos do grafo já construído para resolver certos problemas.



Tipos de Grafos

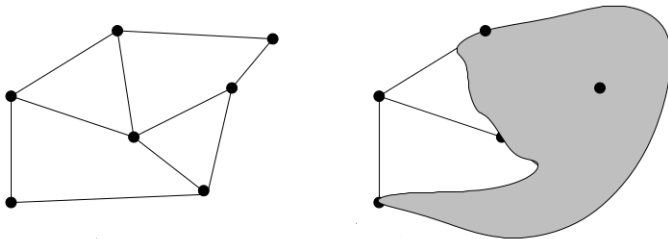


Figura: Implícito \times Explícito.



Tipos de Grafos

Rotulado \times Não rotulados

- Se o grafo é rotulado, a cada vértice é atribuído um rótulo que o identifica unicamente.
- Em grafos sem rótulo, não temos essa distinção.



Tipos de Grafos

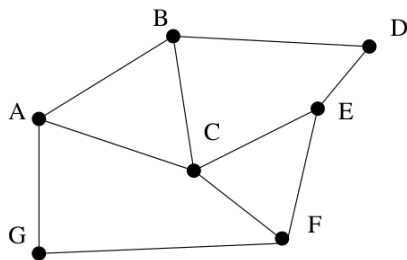
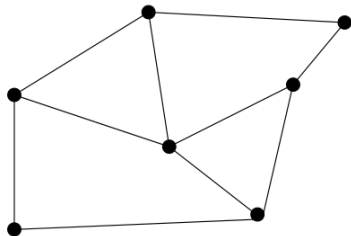


Figura: Rotulado \times Não-rotulado.



Sumário

- 1 Introdução
 - Tipos de Grafos
 - Aplicações
 - Representação de Grafos
 - Conceitos Fundamentais



Aplicações

- Usando esse formalismo, podemos resolver problemas reais!
- Desde problemas biológicos como problemas em rede de computadores!



Aplicações



Figura: Navegação.



Aplicações

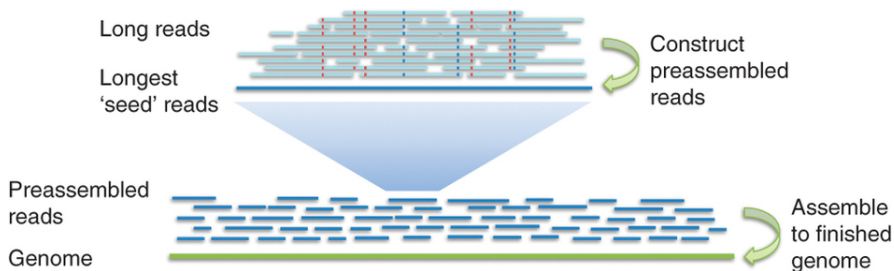


Figura: Montagem de Genomas.



Aplicações



Figura: Análise de Tráfego.



Aplicações



Figura: Redes de Computadores.



Aplicações

Exemplo

- Vamos começar nosso estudo desse incrível formalismo com uma modelagem simples.
- O grafo de relacionamento de pessoas!
 - ▶ Nosso Facebook.



Aplicações

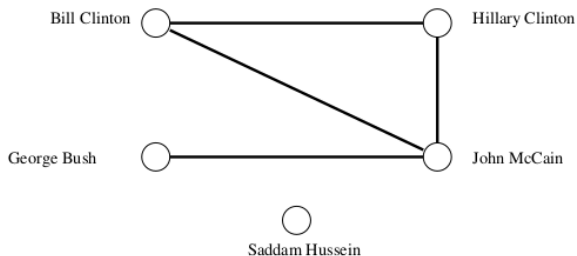


Figura: Grafo de relacionamento de pessoas.



Aplicações

Exemplo

- Através do grafo de relacionamento, podemos responder várias perguntas interessantes:
 - ▶ Meu amigo também me considera como amigo?
 - ▶ Qual é o nível da nossa amizade?
 - ▶ Eu sou amigo de mim mesmo?
 - ▶ Quem tem mais amigos?
 - ▶ Meus amigos moram perto de mim?
 - ▶ Você conhece esta pessoa?
 - ▶ Você é um indivíduo ou apenas um rosto?



Aplicações

Exemplo

- Meu amigo também me considera como amigo?



Aplicações

Exemplo

- Meu amigo também me considera como amigo?
- Existe uma aresta do seu amigo pra você?



Aplicações

Exemplo

- Qual é o nível da nossa amizade?



Aplicações

Exemplo

- Qual é o nível da nossa amizade?
- Quanto é o peso sobre a aresta que nos liga?



Aplicações

Exemplo

- Eu sou amigo de mim mesmo?



Aplicações

Exemplo

- Eu sou amigo de mim mesmo?
- O grafo é simples? Possui um loop pra mim mesmo?



Aplicações

Exemplo

- Quem tem mais amigos?



Aplicações

Exemplo

- Quem tem mais amigos?
- Qual é o vértice que tem mais arestas saindo dele?



Aplicações

Exemplo

- Meus amigos moram perto de mim?



Aplicações

Exemplo

- Meus amigos moram perto de mim?
- Dado que o grafo é incorporado, qual a distância do seu vértice aos seus amigos?



Aplicações

Exemplo

- Você é um indivíduo ou apenas um rosto?



Aplicações

Exemplo

- Você é um indivíduo ou apenas um rosto?
- O grafo é rotulado?



Sumário

- 1 **Introdução**
 - Tipos de Grafos
 - Aplicações
 - Representação de Grafos
 - Conceitos Fundamentais



Representação de Grafos

- Como representar grafos computacionalmente?
- Temos que escolher uma representação eficiente.
- Escolhas mais comuns:
 - 1 Listas de Adjacências.
 - 2 Matrizes de Adjacências.



Representação de Grafos

Listas de Adjacência

- As listas de adjacências consistem de um vetor de tamanho $|V|$ de listas encadeada.
- Cada elemento do vetor, aponta para uma lista encadeada.
- Suponha o i -ésimo elemento deste vetor. Ele apontará para uma lista encadeada que contém as arestas que saem do nó i .



Listas de Adjacência

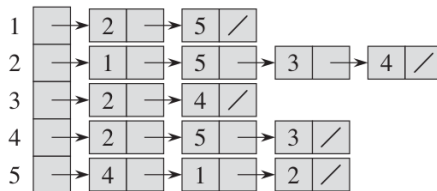
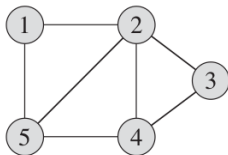


Figura: Lista de adjacências.



Listas de Adjacência

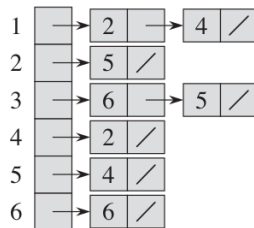
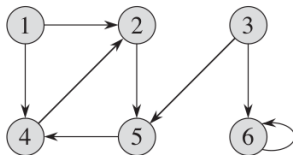


Figura: Lista de adjacências.



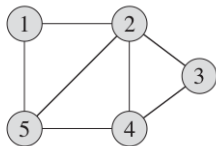
Representação de Grafos

Matrizes de Adjacências

- As matrizes de adjacências, como um nome diz, é uma matriz.
- O elemento $M[i][j]$, indica se existe uma aresta entre os nós i e j .



Matrizes de Adjacências

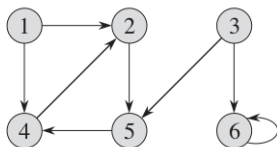


	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Figura: Matriz de Adjacências.



Matrizes de Adjacências



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Figura: Matriz de Adjacências.



Listas vs Matrizes de Adjacências

- Cada abordagem tem seus pontos fortes e fracos.
- Listas de adjacência são mais econômicas em espaço quando o grafo é esparso.
- Matrizes de adjacência permitem acesso em tempo constante a qualquer aresta.
- Qual utilizar?



Listas vs Matrizes de Adjacências

Tabela: Comparação entre listas e matrizes de adjacências.

Critério	Ganhador
Tempo de acesso em arestas	Matriz
Verificar o grau do vértice	Lista
Consumo de memória em grafos esparsos	Lista
Consumo de memória em grafos densos	Matriz
Inserção/remoção de arestas	Matriz
Percurso do grafo	Listas



Sumário

- 1 Introdução
 - Tipos de Grafos
 - Aplicações
 - Representação de Grafos
 - Conceitos Fundamentais



Conceitos Fundamentais

Definição (Grau de Entrada)

- Definido sobre um nó v .
- Representa o número de arestas que chegam em um nó v .



Conceitos Fundamentais

Definição (Grau de Saída)

- Definido sobre um nó v .
- Representa o número de arestas que saem de um nó v .
- **OBS:** em um grafo não direcionado, o grau de entrada de cada vértice é igual ao grau de saída.



Conceitos Fundamentais

Definição (Caminho)

- Um caminho é uma sequência de arestas que conecta vértices distintos.



Conceitos Fundamentais

Definição (Conectividade)

- Um grafo não-dirigido é dito conexo se existe um caminho para qualquer dois pares de vértices.
- Um grafo com apenas um vértice também é considerado conexo.



Conceitos Fundamentais

Definição (Componente Conexa)

- Uma componente conexa de um grafo não dirigido é um subgrafo maximal conexo do grafo original.



Conceitos Fundamentais

Definição (Conectividade Fraca)

- Um grafo dirigido é dito fracamente conexo se ao trocarmos suas arestas pela versão não dirigida, obtemos um grafo conexo.



Conceitos Fundamentais

Definição (Conectividade Forte)

- Um grafo **dirigido** é dito fortemente conexo se para quaisquer par u e v de vértices, existe um caminho de u para v e um de v para u .



Conceitos Fundamentais

Definição (Corte)

- Um corte é um conjunto de vértices que separa o grafo, isto é, que o deixa com mais de uma componente conexa.



Conceitos Fundamentais

Definição (k -conectividade)

- Um grafo não-dirigido é dito k -conexo se não existe um conjunto de $k - 1$ vértices, que desconecta o grafo.



Sumário

2 Percurso



Percurso em Grafos

- Talvez o problema mais elementar em grafos seja percorrê-los.
- O percurso deve certificar de não visitar os mesmos nós várias vezes.
- Precisamos marcar o nó após visitá-lo, para não voltar nos mesmos.
- Duas estratégias elementares:
 - 1 Busca em largura (BFS - Breath-First-Search).
 - 2 Busca em profundidade (DFS - Depth-First-Search).



Percurso em Grafos

- Talvez o problema mais elementar em grafos seja percorrê-los.
- O percurso deve certificar de não visitar os mesmos nós várias vezes.
- Precisamos marcar o nó após visitá-lo, para não voltar nos mesmos.
- Duas estratégias elementares:
 - 1 Busca em largura (BFS - Breath-First-Search).
 - 2 Busca em profundidade (DFS - Depth-First-Search).



Sumário

2 Percurso

- Breath-First-Search
- Depth-First-Search
- Problemas



Busca em Largura

BFS

- Consiste em, a partir de um nó, descobrir todos os seus vizinhos.
- O procedimento é repetido para cada vizinho do nó original em ordem de descoberta.
- Cada nó visitado é marcado para evitar loops.
- Implementável com uma fila!



Busca em Largura



Busca em Largura

Complexidade

- $O(|V| + |E|)$ com listas de adjacências.
- $O(|V|^2)$ com matrizes de adjacências.



Busca em Largura

Complexidade

- $O(|V| + |E|)$ com listas de adjacências.
- $O(|V|^2)$ com matrizes de adjacências.
- Por que?



Busca em Largura

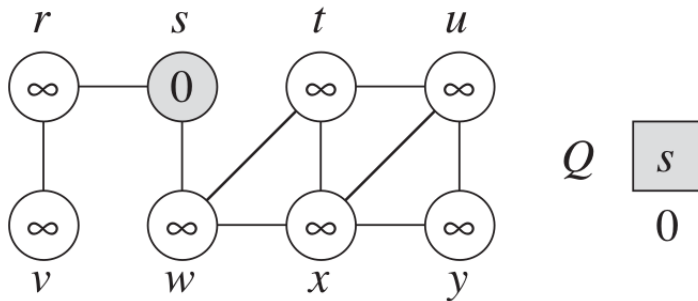


Figura: Como ficaria a busca em largura para este grafo?



Busca em Largura

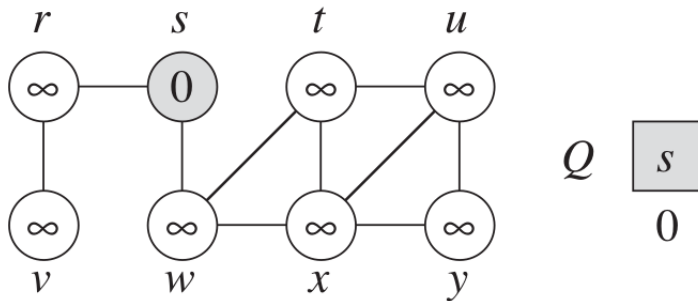


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

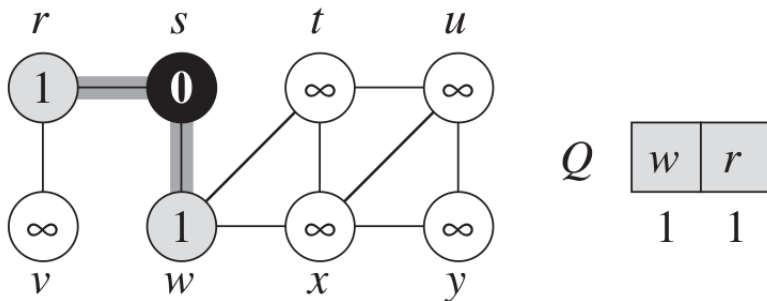


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

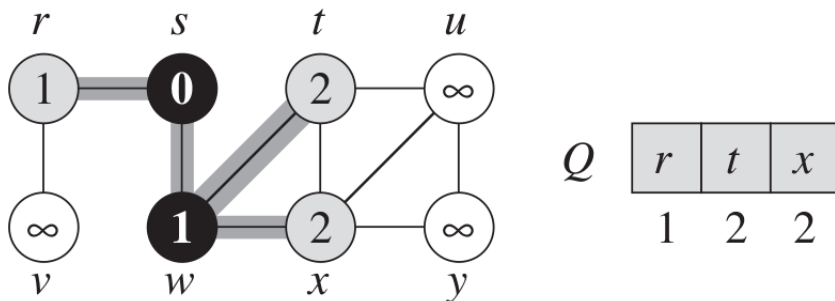


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

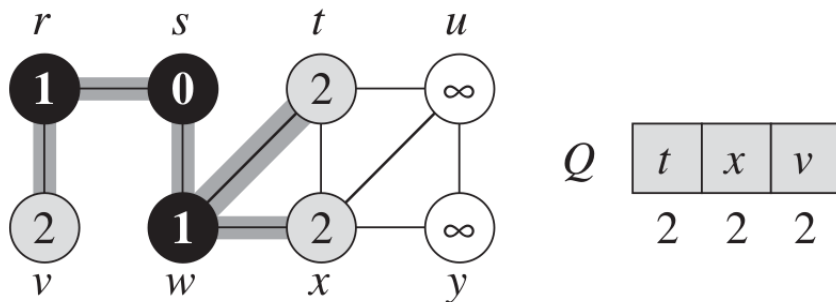
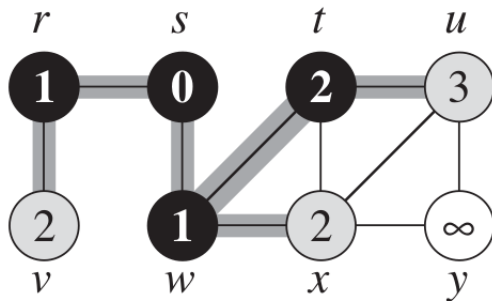


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura


 Q

x	v	u
2	2	3

Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

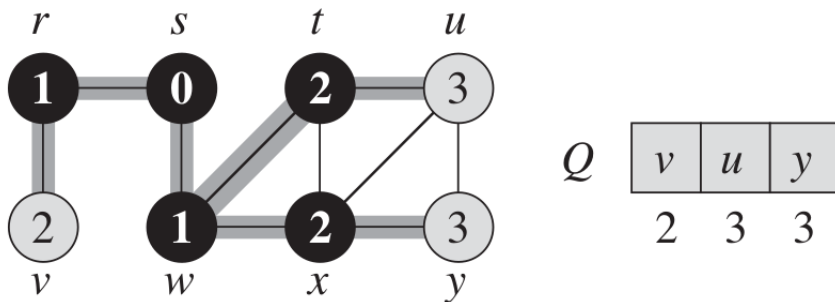


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

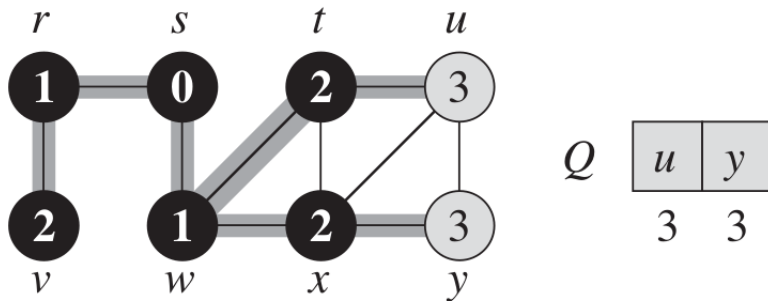


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

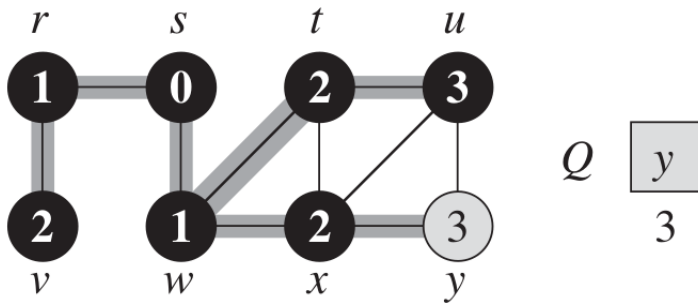


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

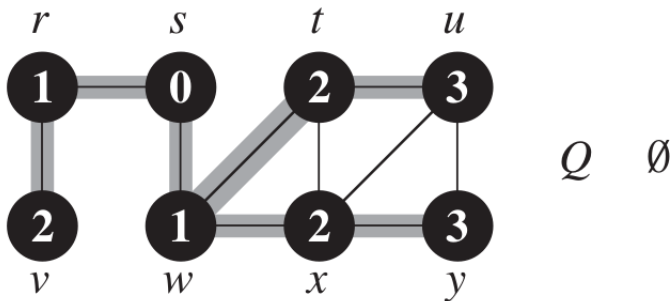


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



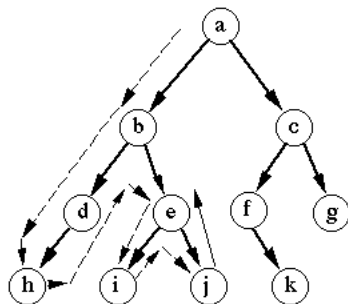
Busca em Profundidade

DFS

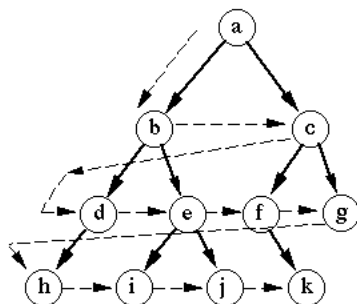
- A busca em profundidade parte de um determinado nó e avança para o seu vizinho imediato.
- Recursivamente, repetimos a mesma ideia para o vizinho imediato.
- Apenas após ter ido à profundidade máxima, passamos para o próximo vizinho.



Depth-First-Search



Depth-first search



Breadth-first search

Figura: Busca em Largura vs Busca em Profundidade.



Busca em Profundidade

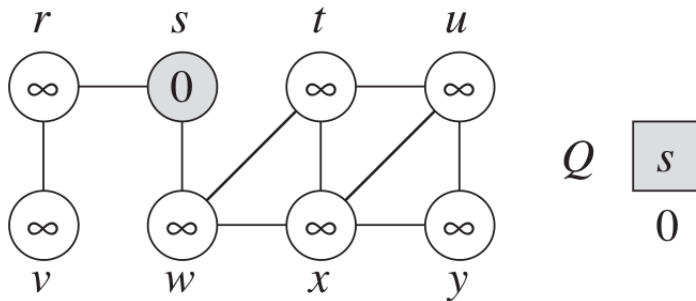


Figura: Como ficaria a busca em profundidade para este grafo?



Busca em Profundidade

- Como implementar a busca em profundidade?



Busca em Profundidade

- Como implementar a busca em profundidade?
- Busca em largura trocando fila por pilha!



Busca em Profundidade



Busca em Profundidade

- Podemos implementar recursivamente também.
- Mais simples e mais elegante.
- Pilha implícita.



Busca em Profundidade



Problemas

- Veremos uma serie de problemas em que estes simples problemas de busca são aplicáveis.



Sumário

2 Percurso

- Breath-First-Search
- Depth-First-Search
- Problemas



Problemas

Menor Distância

- Dado um grafo **sem peso**, determine a distância de um vértice para todos os outros vértices.
- Neste caso, a distância de u e v , denotada por $D(u, v)$ é dada pela quantidade de arestas do menor caminho estes dois vértices.
- Extremamente aplicável em roteamento! Queremos minimizar o número de saltos.



Menor Distância

- Para computar a menor distância, podemos recorrer a uma simples busca em largura.
- A cada passo da busca em largura, estamos descobrindo nós a uma distância de uma unidade maior.



Busca em Largura



Busca em Largura

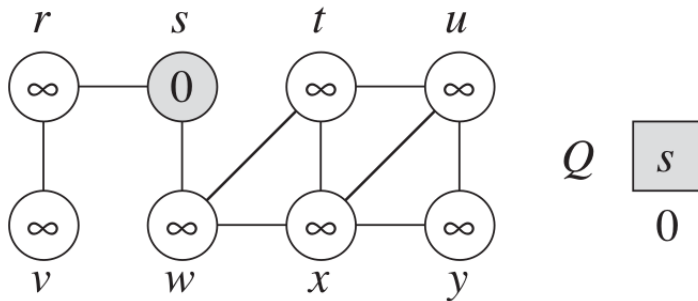


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

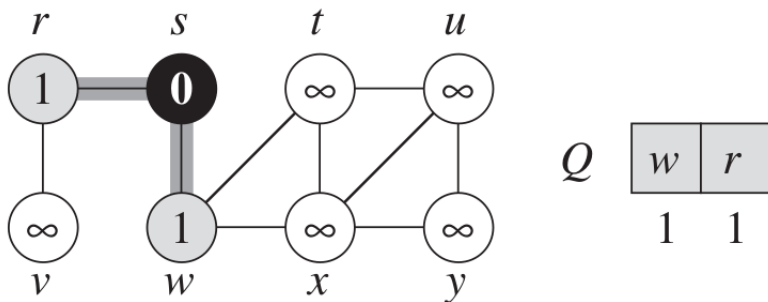


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

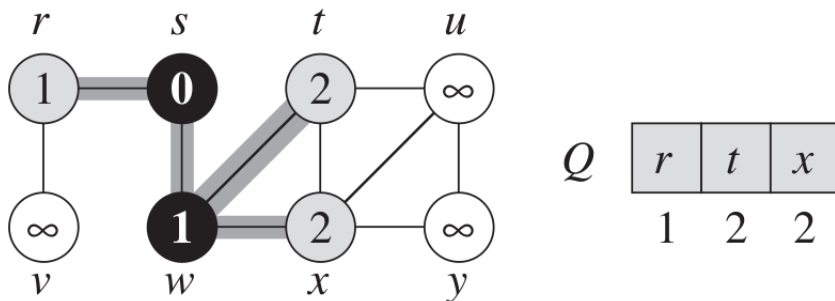


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

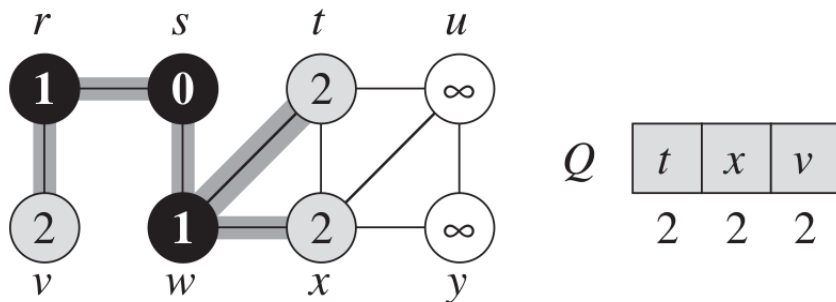


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

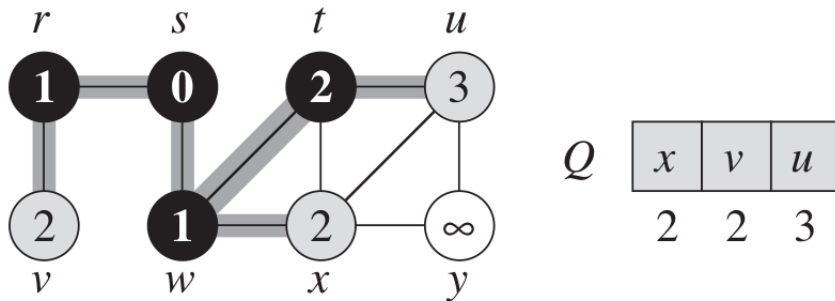


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

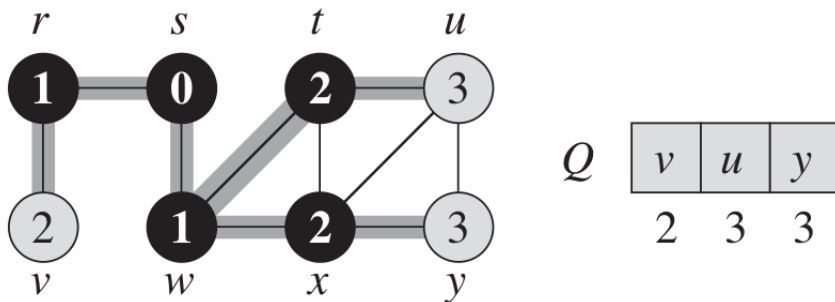


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

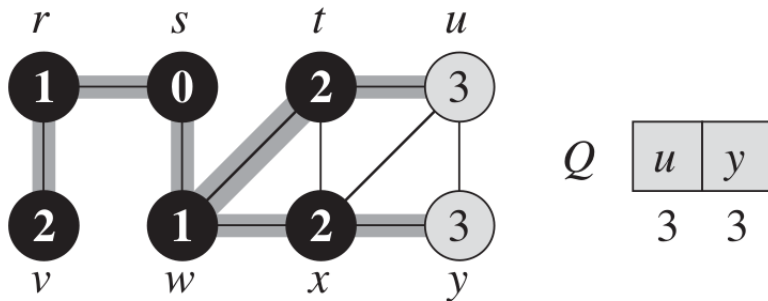


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

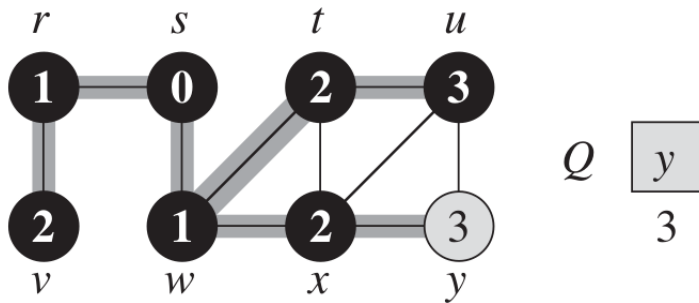


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Busca em Largura

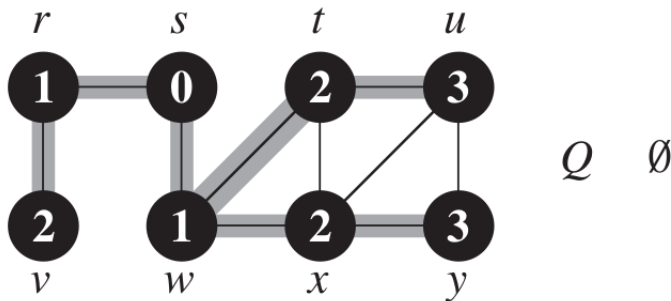


Figura: Busca em largura partindo do nó s .



Problemas

Ordenação Topológica

- Dado um grafo **acíclico** dirigido (DAG), produzir uma ordenação topológica é interessante em algumas aplicações.
- A ordenação topológica produz uma ordenação dos vértices tal que, se existe uma aresta (u, v) , então u deve estar antes de v no resultado da ordenação.
- Na prática, podemos usar DAGs para indicar precedência de eventos.
- Exemplo: verificar quais disciplinas são pré-requisito de outras.



Ordenação Topológica

- Para produzir a ordenação topológica, podemos usar a busca em profundidade para marcar os tempos em que um nó é visitado pela primeira e segunda vez (tempo de início e tempo de término).
- Conforme a busca, adicionamos o nó com tempo de término mais recente no início de uma lista.
- Isso quer dizer que o nó com tempo mais recente obrigatoriamente vem antes do nó com tempo menos recente na ordenação.



Ordenação Topológica



Ordenação Topológica



Ordenação Topológica

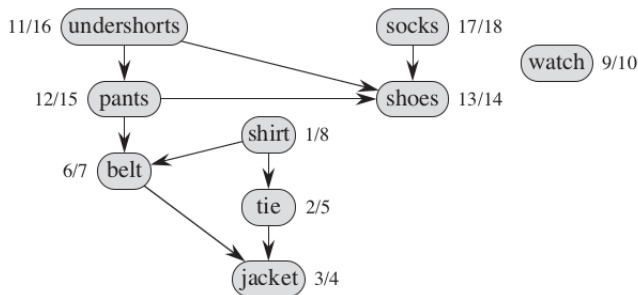


Figura: Ordenação topológica da sequência de vestimento.



Ordenação Topológica

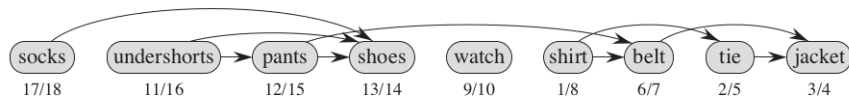


Figura: Ordenação topológica da sequência de vestimento.



Ordenação Topológica

Complexidade

- Precisamos apenas fazer uma busca em profundidade modificada.
- $O(|V| + |E|)$



Problemas

Detecção de Ciclos

- Detectar ciclos em grafos dirigidos é muito útil em algumas aplicações.
- Exemplo: detecção de deadlock pelo S.O.
- Exemplo: detecção de incompatibilidade de dependências.



Problemas

Detecção de Ciclos

- Entrada: Um grafo dirigido.
- Saída: Sim, se o grafo possui ciclos, não, caso contrário.



Detecção de Ciclos

- Estamos procurando por uma **back edge**, isto é, uma aresta que volta para um nó que ainda está sendo processado na busca em profundidade.
- Se no grafo existe uma **back edge**, então temos um ciclo.
- Basta adaptar a busca em profundidade.



Detecção de Ciclos

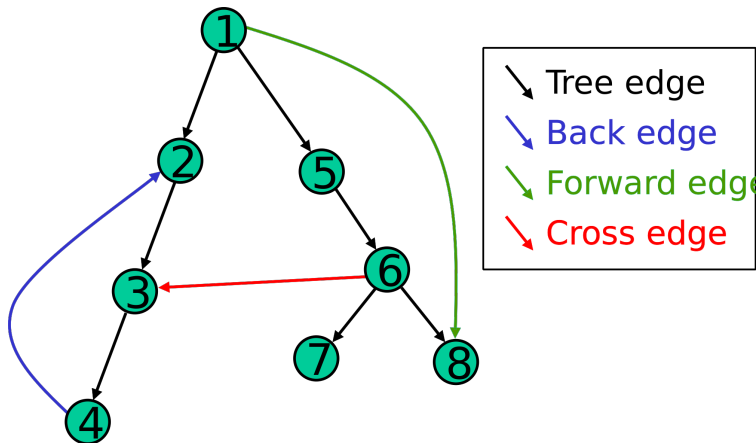


Figura: Tipos de aresta.



Detecção de Ciclos

Algorithm 7: CYCLE-DETECTION

Input: G

Output: Sim, se G tem ciclos, não, caso contrário.

```
1 for all(  $v \in V$  )
2    $v.color = WHITE$ 
3    $v.\pi = NIL$ 
4 for all(  $v \in V$  )
5   if(  $v.color = WHITE$  )
6     if(  $CYCLE-SEARCH(G, v)$  )
7       return true
8 return false
```



Detecção de Ciclos

Algorithm 8: CYCLE-SEARCH

Input: G, v

Output: Sim, sse a componente conexa de v tem ciclos

```
1  $v.color = GREY$ 
2  $temp \leftarrow false$ 
3 for all(  $(v, w) \in E$  )
4   if(  $w.color = GREY$  )                                // back edge
5      $temp \leftarrow true$ 
6   else if(  $w.color = WHITE$  )
7     if(  $CYCLE-SEARCH(G, w)$  )
8        $temp \leftarrow true$ 
9  $v.color = BLACK$ 
10 return  $temp$ 
```



Detecção de Ciclos

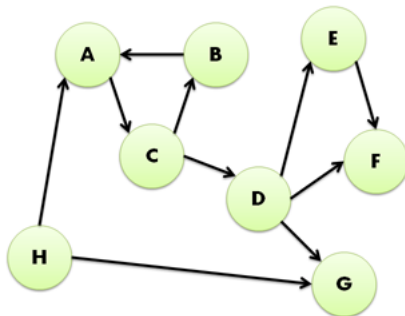


Figura: Detecção de Ciclos



Detecção de Ciclos

Complexidade

- $O(|V| + |E|)$.



Componentes Fortemente Conexas

- Todo grafo dirigido pode ser decomposto em várias componentes fortemente conexas.
- Um grafo é dito fortemente conexo se possui apenas 1 componente fortemente conexa.
- Como determinar as componentes fortemente conexas de um grafo?



Componentes Fortemente Conexas

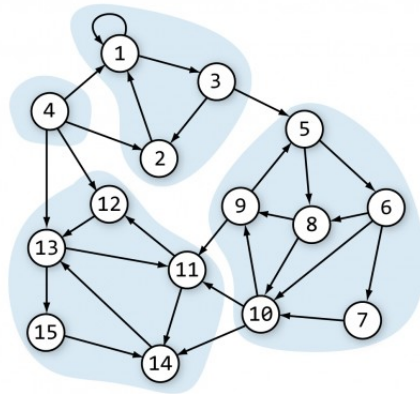


Figura: Componentes fortemente conexas.



Componentes Fortemente Conexas

Componentes Fortemente Conexas

- **Entrada:** um grafo G .
- **Saída:** suas componentes fortemente conexas.



Componentes Fortemente Conexas

- Uma componente é dita fortemente conexa se existe um caminho entre quaisquer dois pares de vértice nesta componente.
- Se a partir de um vértice v chegamos em u , temos que certificar que é possível chegar em v à partir de u .
- Podemos usar o conceito de **back edge**!



Componentes Fortemente Conexas

- Primeiramente, numeramos cada vértice com a busca em profundidade de acordo com sua ordem de exploração ($v.index$).
- Se durante a busca em profundidade um nó u possui um caminho para um nó v que tem um número menor que u , então sabemos que também existe um caminho de u para v , e portanto, eles estão na mesma componente conexa.
- Marcaremos cada nó com um número $v.low$, indicando o vértice com menor número que é alcançável por ele.
- Todos os nós que possuem $v.low \leq v.index$ estão na mesma componente conexa de $v.low$.



Componentes Fortemente Conexas

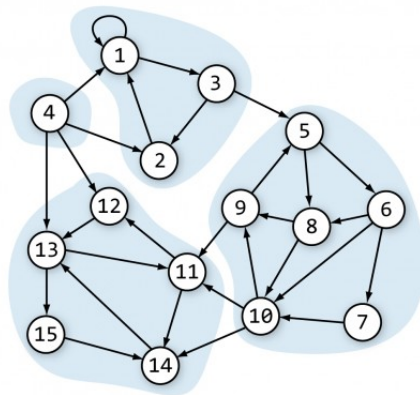


Figura: Componentes fortemente conexas.



Componentes Fortemente Conexas

Input: G

Output: Componentes Fortemente Conexas de G

```
1  $list \leftarrow []$ 
2  $S \leftarrow \emptyset$ 
3 for all(  $v \in V$  )
4   if(  $v.color = WHITE$  )
5      $\text{STRONG-COMPONENTES}(G, v, list, S)$ 
```



Componentes Fortemente Conexas



Componentes Fortemente Conexas

Input: S, v

Output: Componentes Fortemente Conexas que inclui o nó v

```
1  $list' \leftarrow []$   
2 repeat  
3    $w = S.POP()$   
4    $list'.INSERT(w)$   
5 until  $w \neq v$   
6 return  $list'$ 
```



Componentes Fortemente Conexas

Complexidade

- $O(|V| + |E|)$.



Sumário

3 Menor Caminho

- Dijkstra



Menor Caminho

- Detectar o menor caminho por dois vértices é fácil quando o grafo não possui peso.
 - ▶ Busca em largura.
- E no caso genérico? Se o grafo possuir pesos, como resolvemos este problema.
- Antes de definir o problema, examinaremos alguns conceitos.



Menor Caminho

Definição (Custo do Caminho)

- Suponha um grafo dirigido $G(V, E)$ e uma função de peso sobre as arestas $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.
- Tome um caminho $p = (v_0, \dots, v_k)$. O custo do caminho é definido como:

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$



Menor Caminho

Definição (Custo do Menor Caminho)

- O custo do menor caminho dentre um vértice u e um vértice v é dado por:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) \mid u \rightarrow^p v\}, & \text{se existe um caminho de } u \text{ a } v \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Menor Caminho

- Agora podemos definir o problema!

Menor Caminho

- Entrada: um grafo dirigido $G(V, E)$, uma função de peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ e um vértice de origem v .
- Saída: $\delta(v, w)$, o custo do menor caminho de v até os demais vértices w .



Menor Caminho

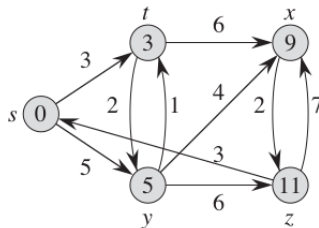


Figura: Grafo $G(V, E)$ com as respectivas distâncias de uma origem.



Menor Caminho

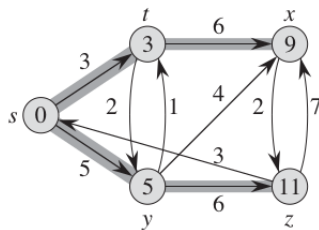


Figura: Menor rota até um destino.



Menor Caminho

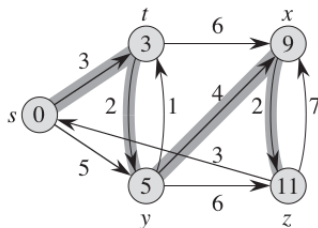


Figura: Menor rota até um destino.



Menor Caminho

- Um dos algoritmos que resolve esse problema é o algoritmo de Dijkstra.



Sumário

- 3 Menor Caminho
 - Dijkstra



Algoritmo de Dijkstra

- O algoritmo de Dijkstra se parece muito com uma busca em largura.
- Só que em vez de pegar sempre o próximo vizinho, consideramos o nó com menor custo até o momento.
- Pode ser visto como um algoritmo guloso!



Algoritmo de Dijkstra

- O algoritmo de Dijkstra se baseia no “relaxamento” de distâncias até chegar na distância ótima.
- Se a distância atual de uma origem a um nó v é maior do que a distância atual da origem a um nó u mais $w(u, v)$, atualizamos a distância atual.

$$v.d > u.d + w(u, v)$$

$$v.d \leftarrow u.d + w(u, v)$$



Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 9: INITIALIZE-DIJKSTRA

Input: G, s

```
1 for all(  $v \in V$  )
2    $v.d \leftarrow \infty$ 
3    $v.\pi \leftarrow \text{NULL}$ 
4  $s.d \leftarrow 0$ 
```



Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 10: DIJKSTRA

Input: G, w, s

Output: $\delta(s, v), \forall v \in V$

```
1 INITIALIZE-DIJKSTRA( $G, s$ )
2  $Q.$ INSERT( $s$ ) // Fila de prioridades
3 while  $\neg Q.$ EMPTY do
4    $u \leftarrow Q.$ EXTRACT-MIN()
5    $visited[u] \leftarrow true$ 
6   for all  $(u, v) \wedge \neg visited[v]$ 
7     if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
8        $v.d \leftarrow u.d + w(u, v)$ 
9        $v.\pi \leftarrow u$ 
10     $Q.$ INSERT-UPDATE( $v$ ) // Insere ou atualiza o nó na
        fila
```



Algoritmo de Dijkstra

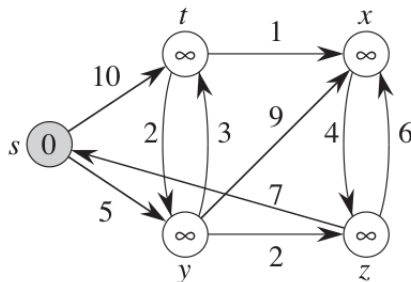


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



Algoritmo de Dijkstra

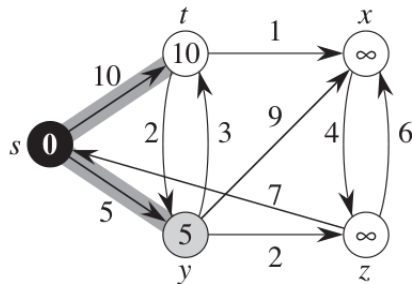


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



Algoritmo de Dijkstra

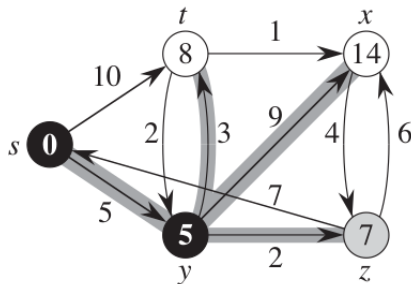


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



Algoritmo de Dijkstra

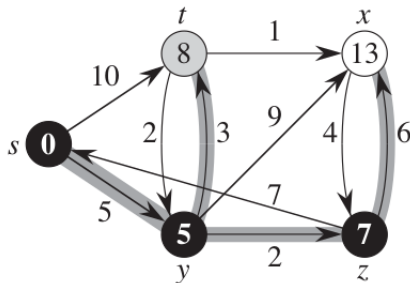


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



Algoritmo de Dijkstra

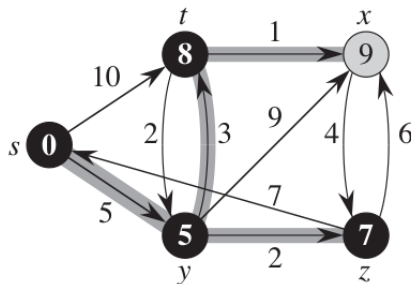


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



Algoritmo de Dijkstra

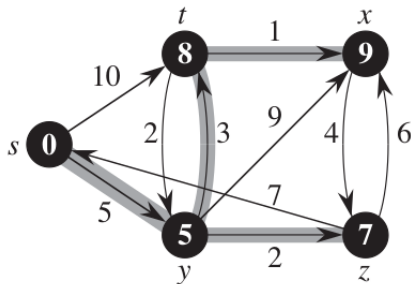


Figura: Algoritmo de Dijkstra.



Algoritmo de Dijkstra

Complexidade

- Qual a complexidade do algoritmo?
- Depende da estrutura Q utilizada.
- **For** interno: $\Theta(|E|)$ vezes.
- **While** externo: $\Theta(|V|)$ vezes.
- Vai depender do custo das operações `EXTRACT-MAX` e `INSERT-UPDATE` para a estrutura de dados Q .



Algoritmo de Dijkstra

Complexidade

- Usando vetores: $\Theta(|V|^2 + |E|)$.
- Usando heap: $\Theta(|V| \log |V| + |E| \log |V|)$.
- Usando heap de fibonacci: $\Theta(|V| \log |V| + |E|)$.
- O que você vai usar em grafos densos? E em grafos esparsos?



Algoritmo de Dijkstra

Correção do Algoritmo de Dijkstra

- Por que o algoritmo de Dijkstra funciona?



Algoritmo de Dijkstra

Limitações

- Apesar de ser um algoritmo clássico, o algoritmo de Dijkstra apresenta alguns problemas.
- Se a função w atribuir um custo negativo às arestas, o algoritmo de Dijkstra não apresentará o comportamento esperado.
- Problema: ciclos negativos!
- O que era um problema fácil, passa a ser um problema difícil.



Sumário

4 Árvore Espalhada Mínima



Motivação

- Suponha que tenhamos uma infraestrutura de rede montada.
- Várias máquinas estão conectadas à outras através de diversos roteadores.
- Ao mesmo tempo, a economia de energia se tornou uma situação crítica nos dias de hoje.
- Como você faria para continuar permitindo a comunicação de quaisquer computadores com menor custo possível?
- Quais roteadores você desativaria?
- Qual a estrutura obtida?



Motivação

- O problema da árvore espalhada mínima visa resolver este tipo de problemas.
- Queremos um subgrafo acíclico e conexo de menor custo (árvore de menor custo).
- Existem algoritmos bem conhecidos para resolução deste problema, tais como:
 - ▶ Algoritmo de Prim.
- No entanto, vamos examinar algumas definições antes de atacar o problema.



Árvore Espalhada Mínima

Menor custo

- Obviamente, o subgrafo gerado de menor custo tem que ser uma árvore.
- O custo desta árvore é dado pelo somatório de suas arestas:

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u,v)$$



Árvore Espalhada Mínima

Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?



Árvore Espalhada Mínima

Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?
- Inicialmente, todo vértice é uma componente conexa.



Árvore Espalhada Mínima

Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?
- Inicialmente, todo vértice é uma componente conexa.
- Adicione arestas de menor custo possível de modo que conecte componentes conexas.



Árvore Espalhada Mínima

Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?
- Inicialmente, todo vértice é uma componente conexa.
- Adicione arestas de menor custo possível de modo que conecte componentes conexas.
- Jamais adicione uma aresta de custo maior que conecte as mesmas componentes.



Árvore Espalhada Mínima

Menor custo

- Qual a estratégia para chegar no menor custo possível?
- Inicialmente, todo vértice é uma componente conexa.
- Adicione arestas de menor custo possível de modo que conecte componentes conexas.
- Jamais adicione uma aresta de custo maior que conecte as mesmas componentes.
- Jamais forme um ciclo!



Árvore Espalhada Mínima

Algorithm 11: GENERIC-MST

- 1 $T \leftarrow \emptyset$
 - 2 **while** T não for uma árvore **do**
 - 3 Encontre uma aresta (u, v) que é segura para T
 - 4 Adicione a aresta à T
-



Árvore Espalhada Mínima

- Como escolher uma aresta segura?



Sumário

- 4 Árvore Espalhada Mínima
 - Prim



Algoritmo de Prim

- O algoritmo de Prim de certa forma se parece muito com o algoritmo de Dijkstra.
- Começamos de um nó arbitrário como o único nó de nossa árvore.
- Escolhemos sempre as arestas de menor custo para adicionarmos à árvore a partir dos nós previamente inseridos na árvore.
- Da mesma forma que no algoritmo de Dijkstra, precisamos de uma estrutura de dados eficiente.



Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 12: INITIALIZE-PRIM

Input: G, s

- 1 **for all**($v \in V$)
 - 2 $v.d \leftarrow \infty$
 - 3 $v.\pi \leftarrow \mathbf{NULL}$
 - 4 $s.d \leftarrow 0$
-



Algoritmo de PRIM



Algoritmo de Prim

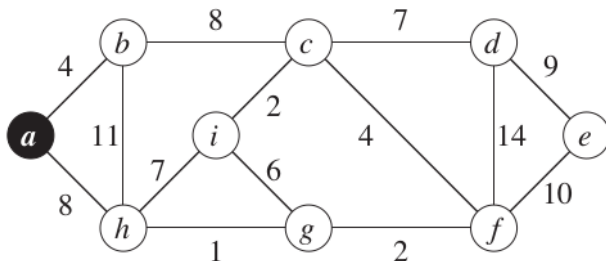


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

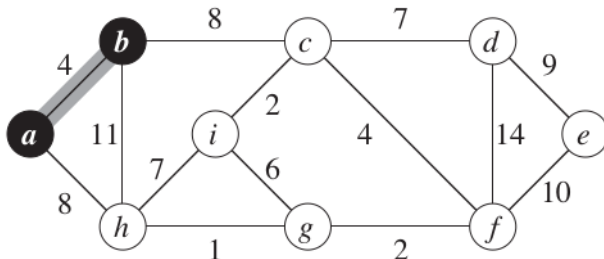


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

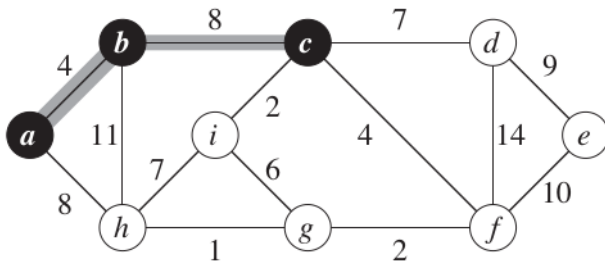


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

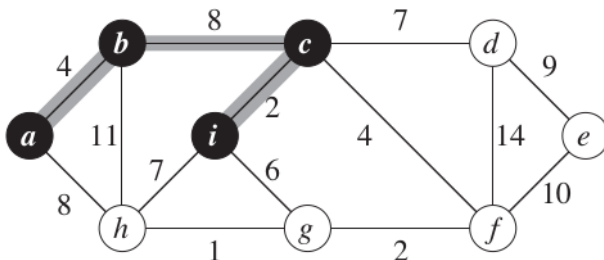


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

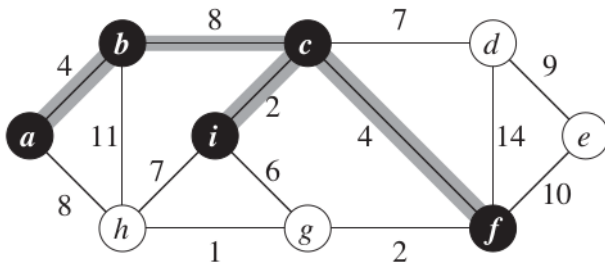


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

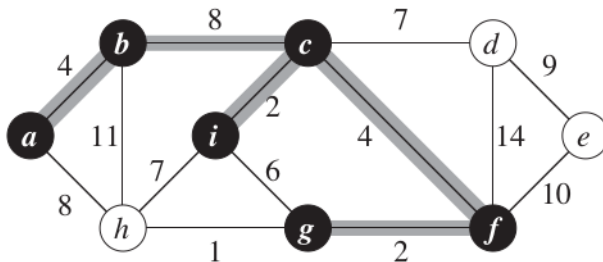


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

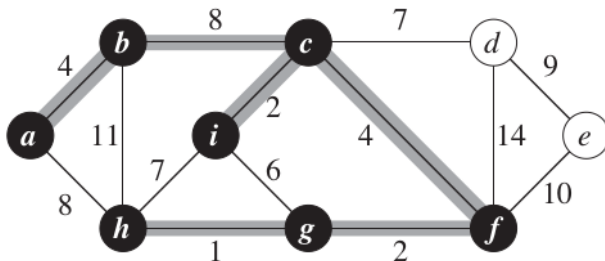


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

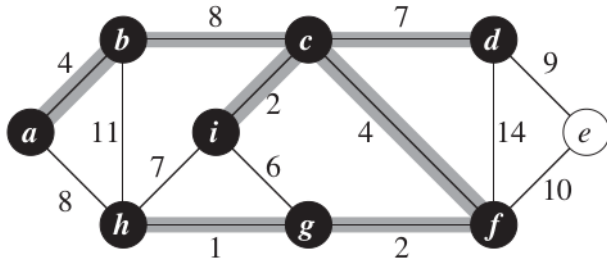


Figura: Execução do Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

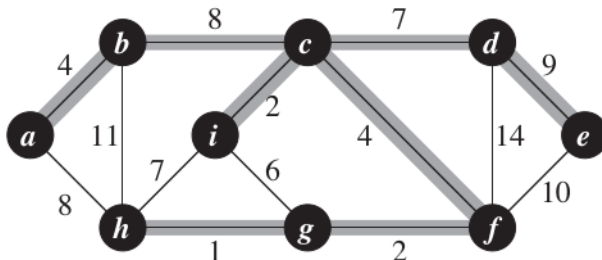


Figura: Execução do Algoritmo de Prim