

# COMPTAGE DE POINTS D'UNE COURBE ELLIPTIQUE SUR DES CORPS FINIS

---

*par* DANIEL RESENDE

le 20 février 2017

RÉSUMÉ. — Il s'agit de la description de l'algorithme de René Schoof. Celui-ci fût le premier algorithme de comptage de points d'une courbe elliptique sur des corps finis en un temps polynomial ( $O(\log^9 p)$ ).

## Sommaire

Introduction. . . . .	2
§ 1. Courbes elliptiques sur $\mathbf{F}_q$ . . . . .	2
§ 2. Algorithme de Schoof . . . . .	4
§ 2.1. Cas général. . . . .	4
§ 2.2. Amélioration de Schoof . . . . .	5
§ 3. Étude de la complexité. . . . .	7
§ 3.1. Complexité de Schoof . . . . .	7
§ 3.2. Comparaison avec les autres méthodes . . . . .	7
§ 4. Architecture du programme . . . . .	7
§ 5. Résultats expérimentaux . . . . .	8

## Introduction

Les courbes elliptiques définissent une loi de groupe sur les corps finis  $\mathbf{F}_q$  qui est difficile pour le problème du logarithme discret. On retrouve par conséquent son utilisation dans plusieurs schémas cryptographiques comme Diffie-Hellman (avec ECDH) ou El-Gamal (avec ECDSA). Cependant, l'utilisation de schémas à l'aide de courbes elliptiques nécessite d'avoir un grand nombre premier qui divise l'ordre d'un sous-groupe cyclique de la courbe de  $E(\mathbf{F}_q)$ . Nous avons donc besoin de connaître le cardinal de  $E(\mathbf{F}_q)$ .

Il existe aujourd'hui de nombreux algorithmes de comptage de points d'une courbes elliptiques sur un corps finis  $\mathbf{F}_q$  :

- L'algorithme Baby Step Giant Step basé sur le théorème de Hasse,
- L'algorithme Schoof en 1985 que l'on va étudier dans ce mémoire,
- L'algorithme SEA [Schoof, Elkies, Atkin] en 1995 qui est une amélioration de l'algorithme de Schoof,
- L'algorithme de Satoh en 2005 basé sur le relèvement canonique sur les  $\mathbf{Z}$   $q$ -adiques,
- L'algorithme AGM [Mestre] basé sur le calcul de suites arithmetico-géométriques.

Dans ce projet, je vais vous présenter un algorithme de comptage de points de courbes elliptiques sur des corps finis. Je me restreindrai à des corps finis  $\mathbf{F}_q$  avec  $q = p^n$  et  $p$  premier différent de 2 et 3. Pour c'est deux derniers cas, l'algorithme est sensiblement le même.



FIGURE 1 – Portrait René Schoof

## 1 Courbes elliptiques sur $\mathbf{F}_q$

Soit  $\mathbf{F}_q$  un corps fini à  $p$  éléments de caractéristiques  $p \neq 2, 3$ .

Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\mathbf{F}_q$ . On obtient l'équation affine de Weierstraß :

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (1)$$

avec  $a, b \in \mathbf{F}_q$  et  $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$ .

### PROPOSITION 1.1

Soit  $E$  une courbe elliptique. On a que  $(E(\mathbf{F}_q), +)$  est un groupe additif tel que pour  $P = (x_P, y_P)$  et  $Q = (x_Q, y_Q)$  deux points finis la loi  $+$  est défini par :

— Soit  $R = P + Q = (x_R, y_R)$ .

$$\begin{aligned} x_R &= \lambda^2 - x_P - x_Q \\ y_R &= \lambda x_P - \lambda x_R - y_P \\ \text{avec } \lambda &= \begin{cases} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} & \text{si } P \neq Q, \\ \frac{3x_P^2 + a}{2y_P} & \text{si } P = Q, \end{cases} \end{aligned}$$

— Élément neutre :  $\vartheta$

— Élément inverse :  $-P = (x, -y)$

**Définition 1.1.** Soit  $\Phi$  l'endomorphisme de Frobenius d'une courbe elliptique  $E$  tel que

$$\begin{aligned} \Phi : E(\bar{\mathbf{F}}_q) &\longrightarrow E(\bar{\mathbf{F}}_q) \\ (x, y) &\longmapsto (x^p, y^p). \end{aligned}$$

**Définition 1.2 (Trace).** Soit  $E$  une courbe elliptique sur  $\mathbf{F}_q$ . La trace de  $E(\mathbf{F}_q)$  est l'entier  $t \in \mathbf{Z}^*$  tel que

$$t = q + 1 - \#E(\mathbf{F}_q) \quad (2)$$

.

### PROPOSITION 1.2

Soit la trace  $t$  de  $E(\mathbf{F}_q)$ , on a alors

$$\phi^2 - t\phi + q = 0 \quad (3)$$

THÉORÈME 1.1 (de Hasse)

Soit  $E$  une courbe elliptique sur  $\mathbf{F}_q$  et la trace  $t$  de  $E(\mathbf{F}_q)$ . On a

$$|t| \leq 2\sqrt{q}, \quad (4)$$

et par conséquent

$$|\#E(\mathbf{F}_q) - (q+1)| \leq 2\sqrt{q} \quad (5)$$

Nous allons maintenant nous concentrer sur les sous-groupe de  $n$ -torsions  $E[n]$  avec  $n \in \mathbf{Z}_{\geq -1}$  tel que  $p \nmid n$ . Et on introduit la notion de polynôme de division.

**Définition 1.3** (Polynôme de division). Soit  $n \in \mathbf{Z}^*$ , le polynôme de division  $\psi_n$  est la fonction polynôme de  $K[E]$  de coefficient dominant  $n$  et de diviseur

$$\text{div}(\psi_n) = (E[n]) - n^2(\vartheta)$$

PROPOSITION 1.3 (Caractérisation du polynôme de division)

On construit le polynôme de division par récurrence sur  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$  :

1.  $\psi_{-1}(X, Y) = -1$ ,  $\psi_0(X, Y) = 0$ ,  $\psi_1(X, Y) = 1$ ,  $\psi_2(X, Y) = 2Y$ ,
2.  $\psi_3(X, Y) = 3X^4 + 6aX^2 + 12bX - a^2$ ,
3.  $\psi_4(X, Y) = 4Y(X^6 + 5aX^4 + 20bX^3 - 5a^2X^2 - 4bX - 8b^2 - a^3)$ ,
4.  $\psi_{2n}(X, Y) = \psi_n(\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2)/2Y$ ,
5.  $\psi_{2n+1}(X, Y) = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n+1}^3\psi_{n-1}$ ,
6.  $\psi_{-n} = \psi_n$ .

Démonstration. Voir [tM17]. □

Dans l'algorithme de Schoof, nous utiliserons une variante du polynôme de division.

**Définition 1.4.** Soit  $n \in \mathbf{Z}^*$ , le polynôme  $f_n$  est une fonction polynôme de  $K[E]$  définie par les relations suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} \bar{\psi}_n(X, Y) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \bar{\psi}_n(X, Y)/Y & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

où  $\bar{\psi}_n$  est la réduction de  $\psi_n$  par les termes en  $Y^2$  par l'équation (E).

PROPOSITION 1.4 (Caractérisation de  $f_n$ )

On construit  $f_n$  par récurrence sur  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$  :

1.  $f_{-1}(X) = -1$ ,  $f_0(X) = 0$ ,  $f_1(X) = 1$ ,  $f_2(X) = 2$ ,
2.  $\psi_3(X) = 3X^4 + 6aX^2 + 12bX - a^2$ ,
3.  $\psi_4(X) = 4Y(X^6 + 5aX^4 + 20bX^3 - 5a^2X^2 - 4bX - 8b^2 - a^3)$ ,
4.  $f_{2n}(X, Y) = f_n(f_{n+2}f_{n-1}^2 - f_{n-2}f_{n+1}^2)$ ,
5. 
$$f(n) = \begin{cases} \bar{\psi}_n(X, Y) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \bar{\psi}_n(X, Y)/Y & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
6.  $f_{2n+1}(X, Y) = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n+1}^3\psi_{n-1}$ ,

Démonstration. Voir [tM17]. □

PROPOSITION 1.5

Soit  $P = (x, y) \in E(\bar{\mathbf{F}}_q)$  avec  $P \notin E[2]$  et  $n \in \mathbf{Z}_{\geq -1}$ . Alors

$$nP = \vartheta \iff \psi_n = 0 \quad (6)$$

d'où

$$nP = \vartheta \iff f_n = 0 \quad (7)$$

Démonstration. Voir caractérisation des points de torsion [tM17]. □

## PROPOSITION 1.6

Soit  $P = (x, y) \in E(\mathbb{F}_q)$  et  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Alors

$$nP = \left( x - \frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2}, \frac{\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2}{4Y\psi_n^3} \right) \quad (8)$$

Démonstration. Voir [tS78]. □

On définit l'application  $\begin{array}{ccc} \text{End}_{\mathbb{F}_q}(E) & \longrightarrow & \text{End}_{\text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_q)}(E[l]) \\ \phi & \longmapsto & \phi_l \end{array}$  avec  $l$  premier.

On obtient l'équation par l'application précédente et l'équation (3) :

$$\phi_l^2 - t\phi_l + q = 0 \quad (9)$$

Puis si on applique (9) à un point  $P \in E(\mathbb{F}_q)$ , on a alors

$$(\phi_l^2 - t\phi_l + q)P = \vartheta \quad (10)$$

## 2 Algorithme de Schoof

### 2.1 Cas général

Cette algorithme consiste à calculer la trace du frobenius modulo tous les  $l < l_{\max}$  tel que  $l_{\max}$  soit le plus grand nombre premier vérifiant :

$$\prod_{l \text{ premier, } p \nmid l}^{l_{\max}} l > 4\sqrt{q}. \quad (11)$$

Une fois calculé la trace modulo toutes les  $l$ -torsions, on utilise le Théorème des Restes Chinois (CRT) pour obtenir la trace dans  $\mathbb{F}_q$ . Puis on utilise le théorème de Hasse pour avoir le cardinal de la courbe  $E$  sur  $\mathbb{F}_q$ .

---

**Algorithme 1** Algorithme de Schoof

---

**Require:** Une courbe elliptique  $E$  sur  $\mathbb{F}_q$  un polynôme quelconque.

**Ensure:** Le cardinal de  $E(\mathbb{F}_q)$ .

```

 $M \leftarrow 2, l \leftarrow 3;$ 
 $S \leftarrow \{(t \bmod 2, 2)\}; \{\text{Cas pour } l = 2\}$ 
while  $M < 4\sqrt{q}$  do
   $k \leftarrow q \bmod l;$ 
  for  $\tau = 0$  to  $\frac{l-1}{2}$  do
    if  $\forall P \in E[l], \phi^2(P) + [k]P = \pm[\tau]\phi(P)$  then
       $S \leftarrow S \cup \{(\tau, l)\}$  or  $S \leftarrow S \cup \{(-\tau, l)\}$  {Selon les cas}
    break;
  end if
end for
 $M \leftarrow M * l;$ 
 $l \leftarrow \text{nextprime}(l); \{\text{Donne le prochain nombre premier après } l\}$ 
end while
 $\forall t \in S, \text{trace} \leftarrow \text{CRT}(t); \{\text{Effectue le théorème des restes chinois}\}$ 
return  $q + 1 - \text{trace}.$ 

```

---

On regarde cette algorithme plus en détail sur le calcul de la trace modulo  $l$ .

**Dans le cas  $l = 2$ ,** on cherche les points de 2-torsions,

$$t = 1 \bmod 2 \Leftrightarrow \text{pgcd}(x^3 + ax + b, x^q - x) = 1 \quad (12)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} t = 1 \bmod 2 &\Leftrightarrow \#E(\mathbf{F}_q)[2] = 1 \text{ (i.e. } \#E(\mathbf{F}_q)[2] = \{\vartheta\}) \\ &\Leftrightarrow x^3 + ax + b \text{ est irréductible sur } \mathbf{F}_q \\ &\Leftrightarrow \text{pgcd}(X^3 + ax + b, X^q - X) = 1 \end{aligned}$$

□

**Dans le cas général**, on pose  $k = q \bmod l$  et on recherche un  $\tau \bmod l$  qui vérifie (10), i.e.

$$\phi_l^2(P) - \tau\phi_l(P) + kP = \vartheta \iff \phi_l^2(P) + kP = \tau\phi_l(P) \quad (13)$$

On découpe ensuite l'équation (13) en deux et on applique (8) pour obtenir d'une part

$$\tau\phi_l(P) = \left( x^q - \left( \frac{\psi_{\tau-1}\psi_{\tau+1}}{\psi_\tau^2} \right)^q, \left( \frac{\psi_{\tau+2}\psi_{\tau-1}^2 - \psi_{\tau-2}\psi_{\tau+1}^2}{4Y\psi_\tau^3} \right)^q \right), \quad (14)$$

et d'autre part

$$\phi_l^2(P) + kP = \left( -x^{q^2} - x + \frac{\psi_{k-1}\psi_{k+1}}{\psi_k^2} + \lambda^2, -y^{q^2} - \lambda \left( -x^{q^2} - x + \frac{\psi_{k-1}\psi_{k+1}}{\psi_k^2} \right) \right) \quad (15)$$

avec

$$\lambda = \frac{\psi_{k+2}\psi_{k-1}^2 - \psi_{k-2}\psi_{k+1}^2 - 4y^{q^2+1}\psi_k^3}{4\psi_k y((x - x^{q^2})\psi_k^2 - \psi_{k-1}\psi_{k+1})}. \quad (16)$$

On veut donc tester si les deux parties sont égales modulo  $l$ , et par conséquent tester que les abscisses puis les ordonnées sont égales. On en profite aussi pour tout mettre au même dénominateur, afin de ne pas avoir de division à calculer. En effet, il est plus facile de calculer des multiplications que des divisions de polynôme.

Pour les abscisses, on doit vérifier que

$$((\psi_{k-1}\psi_{k+1} - \psi_k(x^{q^2} + x^q + x))\beta^2 + \psi_k^2\alpha^2)\psi_\tau^{2q} + \psi_{\tau-1}^q\psi_{\tau+1}^q\beta^2\psi_k^2 = 0 \bmod \phi_l. \quad (17)$$

Si l'assertion est vraie, alors on vérifie aussi pour les ordonnées que

$$4y^q\psi_\tau^{3q}(\alpha((2x^{q^2} + x)\psi_k^2 - \psi_{k-1}\psi_{k+1}) - y^{q^2}\beta\psi_k^2) - \beta\psi_k^2(\psi_{\tau+2}\psi_{\tau-1}^2 - \psi_{\tau-2}\psi_{\tau+1}^2)^q = 0 \bmod \phi_l. \quad (18)$$

Où

$$\begin{cases} \alpha = \psi_{k+2}\psi_{k-1}^2 - \psi_{k-2}\psi_{k+1}^2 - 4y^{q^2+1}\psi_k^3 \\ \beta = ((x - x^{q^2})\psi_k^2 - \psi_{k-1}\psi_{k+1})4y\psi_k \end{cases}$$

*Remarque.* — Pour résumer, si un  $\tau$  vérifie (17) et (18), alors la trace est égale à  $\tau$  modulo  $l$ . Sinon si aucun  $\tau$  ne vérifie les deux relation, alors la trace est nulle modulo  $l$ .

*Remarque.* — En pratique, dans les équations (17) et (18), on remplace les  $\psi_n$  par des  $f_n$ . Puis si nécessaire on réduira modulo (1) et on divisera par  $y$ .

## 2.2 Amélioration de Schoof

Dans son article original, Schoof (voir [tR85]) propose une amélioration possible de son algorithme en regardant des  $\tau$  particuliers qui sont des carrés modulo  $l$ .

**Algorithme 2** Algorithme de Shoof amélioré**Require:** Une courbe elliptique  $E$  sur  $\mathbf{F}_q$  un polynôme quelconque.**Ensure:** Le cardinal de  $E(\mathbf{F}_p)$ .

---

```

 $M \leftarrow 2, l \leftarrow 3;$ 
 $S \leftarrow \{(t \bmod 2, 2)\}; \{\text{Cas pour } l = 2\}$ 
while  $M < 4\sqrt{q}$  do
   $k \leftarrow q \bmod l;$ 
  if  $\phi_l^2 P = \pm kP$  then
    if  $(\frac{k}{l}) = -1$  then
       $S \leftarrow S \cup \{(0, l)\}$ 
    else
      on recherche  $w$  tel que  $k = w^2 \bmod l$ 
      if  $\pm w$  est une valeur propre de  $\phi_l$  then
         $S \leftarrow S \cup \{(w, l)\}$  or  $S \leftarrow S \cup \{(-w, l)\}$  {Selon les cas}
      else
         $S \leftarrow S \cup \{(0, l)\}$ 
      end if
    end if
  end if
else
  for  $\tau = 1$  to  $\frac{l-1}{2}$  do
    if  $\forall P \in E[l], \phi^2(P) + [k]P = \pm[\tau]\phi(P)$  then
       $S \leftarrow S \cup \{(\tau, l)\}$  or  $S \leftarrow S \cup \{(-\tau, l)\}$  {Selon les cas}
      break;
    end if
  end for
end if
 $M \leftarrow M * l;$ 
 $l \leftarrow \text{nextprime}(l);$  {Donne le prochain nombre premier après  $l$ }
end while
 $\forall t \in S, \text{trace} \leftarrow CRT(t);$  {Effectue le théorème des restes chinois}
return  $q + 1 - \text{trace}.$ 

```

---

— Si  $\forall P$  nonzéro

$$\phi_l^2 P = \pm kP \quad (19)$$

avec  $q \equiv k[l]$ 

— Sinon on fait le cas général.

On va donc transformer l'équation (19) en un calcul de  $\text{pgcd}$  pour pouvoir l'implémenter sur machine.

$$\begin{aligned} \phi_l^2(P) &= \pm kP \\ x^{q^2} &= x - \frac{\psi_{k-1}\psi_{k+1}}{\psi_k^2}(x, y) \end{aligned} \quad (20)$$

$$= \begin{cases} x - \frac{f_{k-1}f_{k+1}}{f_k^2(x^3 + ax + b)} & \text{si } k \text{ pair} \\ x - \frac{f_{k-1}f_{k+1}(x^3 + ax + b)}{f_k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad (21)$$

On prend l'équation (21) et on met tout au même dénominateur. on obtient le résultat suivant :

$$\begin{cases} (x^{q^2} - x)f_k^2(x^3 + ax + b) + f_{k-1}f_{k+1} = 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ (x^{q^2} - x)f_k^2 + f_{k-1}f_{k+1}(x^3 + ax + b) = 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad (22)$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \text{pgcd}((x^{q^2} - x)f_k^2(x^3 + ax + b) + f_{k-1}f_{k+1}, f_l) & \text{si } k \text{ pair} \\ \text{pgcd}((x^{q^2} - x)f_k^2 + f_{k-1}f_{k+1}(x^3 + ax + b), f_l) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad (23)$$

Donc le  $\text{pgcd} \neq 1$  si et seulement si  $\phi_l^2 P = \pm kP$ .

### 3 Étude de la complexité

Dans cette section, nous allons étudier complexité de l'algorithme de schoof et faire une brève comparaison avec les autres méthodes de comptage de points.

#### 3.1 Complexité de Schoof

Tout d'abord commençons par la complexité de la recherche de  $l_{max}$  tel que il soit le plus grand nombre premier vérifiant la relation (11).

THÉORÈME 3.I (Théorème des nombres premiers)

Soit  $\pi(x)$  le nombre de premier plus petit que  $x$ . On a alors que

$$\begin{aligned}\pi(x) &\sim \frac{x}{\log(x)} \\ x &\sim +\infty\end{aligned}$$

Démonstration. Voir [tC07]. □

THÉORÈME 3.II (Théorème des nombres premiers)

Soit  $\pi(x)$  le nombre de premier plus petit que  $x$ . On a alors que

$$\begin{aligned}\pi(x) &\sim \frac{x}{\log(x)} \\ x &\sim +\infty\end{aligned}$$

Démonstration. Voir [tC07]. □

Remarque. — Le théorème précédent donne aussi la relation suivante :

$$\log \left( \prod_{l \text{ premier, } pl \leq l_{max}} l \right) \sim l_{max}$$

D'où

$$\prod_{l \text{ premier, } pl \leq l_{max}} l \sim e^{l_{max}}$$

On en déduit que  $e^{l_{max}} > 4\sqrt{q} \Rightarrow l_{max} = O(\log(q))$ . Et par conséquent, on a  $O\left(\frac{\log(q)}{\log(\log(q))}\right)$ , i.e.  $O(\log(q))$  torsion à calculer.

Ensuite nous calculons la complexité de la création du tableau de polynôme de division. On doit pour se faire calculer  $l_{max} = O(\log(q))$  polynômes avec 9 (cas pair) ou 11 (cas impair) opérations élémentaires à chaque tour. Le coût total de la création du tableau est de  $O(\log(q))$ .

#### 3.2 Comparaison avec les autres méthodes

### 4 Architecture du programme

Pour rappel, ce programme est écrit avec le langage C et j'utilise la librairie FLINT afin de manipuler des polynômes dans  $\mathbf{F}_q$ . J'ai choisi de décomposer mon programme en trois parties :

- La fonction `main` qui récupère les arguments au près de l'utilisateur, et qui vérifie que les arguments donne une courbe elliptique sur  $\mathbf{F}_q$ . Elle se finit en affichant le cardinal de la courbe elliptique.
- La fonction `division_polynomial` remplit un tableau avec tous les polynômes de division. J'ai pris le parti de garder en mémoire tous les polynômes de division dans un tableau dynamique. En effet, on sait à l'avance que l'on aura au plus  $l_{max}$  polynômes à calculer et on a besoin à de nombreuses reprises des polynômes de division. De plus, c'est une récursivité à  $\frac{n-2}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}$  et  $\frac{n+2}{2}$  (pour  $k = 2n$  ou  $k = 2n + 1$ ).

```
void division_polynomial(fq_poly_t *tab, fq_t a, fq_t b, fq_poly_t ecc,
    ulong k, fq_ctx_t fq)
```

ENTRÉE :

Tableau de Fq-polynôme tab et k la taille du tableau  
Entiers a,b tels que  $E: y^2 = x^3 + ax + b$  une courbe elliptique sur Fq  
Fq-polynôme ecc représentant la courbe elliptique  
Corps fini fq à q éléments

SORTIE :

Tableau de Fq-polynôme tab rempli de k polynôme de division

- La fonction `schoof` crée un tableau de  $lmax$  polynômes de division (remplie par la fonction `division_polynomial`), puis elle exécute l'algorithme de schoof. Et renvoie le cardinal de la courbe elliptique.

```
void schoof(fmpz_t card, fq_t a, fq_t b, fmpz_t q, fq_ctx_t fq)
```

ENTRÉE :

Entier q premier tel que Fq un corps fini à q éléments  
Entiers a,b tels que  $E: y^2 = x^3 + ax + b$  une courbe elliptique sur Fq

SORTIE :

Entier card tel que  $card = \#E(Fq)$

Par ailleurs, j'ai implémenté une fonction `fmpz_nextprime` qui renvoi le prochain nombre premier. En effet, cette fonction n'est pas inclut dans la librairie FLINT. Il est possible d'optimiser cette fonction, cependant dans notre cas les nombres premiers tester sont de l'ordre de  $O(\log(q))$ .

```
void fmpz_nextprime(fmpz_t rop, fmpz_t op)
```

ENTRÉE :

Entier op tel que  $op > 2$

SORTIE :

Entier rop

```
void fmpz_nextprime(fmpz_t rop, fmpz_t op)
```

```
{
    fmpz_add_ui(rop, op, 2);
    while(!fmpz_is_prime(rop))
    {
        fmpz_add_ui(rop, rop, 2);
    }
}
```

## 5 Résultats expérimentaux



## Références

- [tC07] ZUILY Claude. Une démonstration du théorème des nombres premiers. *Licence 3 de Mathématiques, Université d'Orsay*, 2007.
- [tIF99] SMART N. BLAKE I. F., SEROUSSI G. *Elliptic curves in cryptography*, volume 265. Cambridge university press, 1999.
- [tM17] KRIR Mohamed. Cours de courbes elliptiques. *Master 2 AA, Université Paris-Saclay*, 2017.
- [tR85] SCHOOF René. Elliptic curves over finite fields and the computation of square roots mod  $p$ . *Mathematics of computation*, 44(170) :483–494, 1985.
- [tR06] POMERANCE C. CRANDALL R. *Prime numbers : a computational perspective*, volume 182. Springer Science & Business Media, 2006.
- [tS78] LANG Serge. *Elliptic curves : Diophantine analysis*, volume 231. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1978.