Modelli dinamici Pt.2
Corso di LSMC, a.a. 2017-2018

Davide Gori
550282

November 1, 2018

1 Prima sperimentazione: moto di un punto vincolato

Il moto di un punto $z(x) = [z_1(x), z_2(x), z_3(x)]^T$ di massa m soggetto alla forza di gravità $F = [0, 0, -gm]^T$ è vincolato a muoversi sulla superficie sferica di equazione $\phi(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1 = 0$ è descritto dal seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\mathbf{z}'' = \frac{1}{m}\left(\mathbf{F} - \frac{m\mathbf{z}'^{\mathbf{T}}H\mathbf{z}' + \nabla\phi^T\mathbf{F}}{|\nabla\phi|^2}\nabla\phi\right), x > 0$$

Con condizioni iniziali $\mathbf{z(0)} = \mathbf{z_0}$, $\mathbf{z'(0)} = \mathbf{v_0}$.
Dove abbiamo indicato con $\nabla\phi$ il gradiente di ϕ e con H la matrice hessiana di ϕ.
Modellizzo il seguente problema come problema di Caucy con incognita $\mathbf{y}$, dove $y(1) = z(1)$, $y(2) = z(2)$, $y(3) = z(3)$, $y(4) = z'(1)$, $y(5) = z'(2)$, $y(6) = z'(3)$.
Risolvo il problema con le seguenti condizioni iniziali: $y_0 = [0, 1, 0, 0.8, 0, 1.2]$, nell'intervallo di integrazione $[0, 10]$ e $m = 1$.
Applicando il metodo di Eulero esplicito (con $h = 0.0025$ e $h = 0.00025$), il metodo di Runge-Kutta classico (con $h = 0.005$ e $h = 0.0005$) e le funzioni predefinite `ode23` e `ode45`, quest'ultima con valori di `RelTot` pari a 10^{-3} (valore di default) e 10^{-6}.
La bontà della soluzione si può stimare calcolando il massimo valore di $r = \left|y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1\right|$, visto che la soluzione non approssimata soddisfa sempre $r = 0$.

1.1 Il codice

Questo è lo script che realizza lasperimentazione:

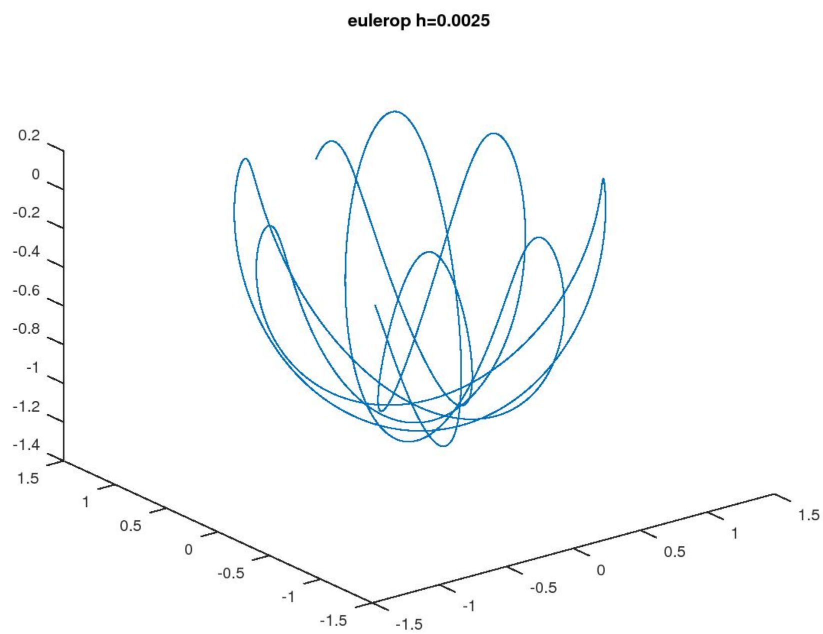
```
%Con facili conti si ottiene che l'equazione differenziale
%e' la seguente:
```

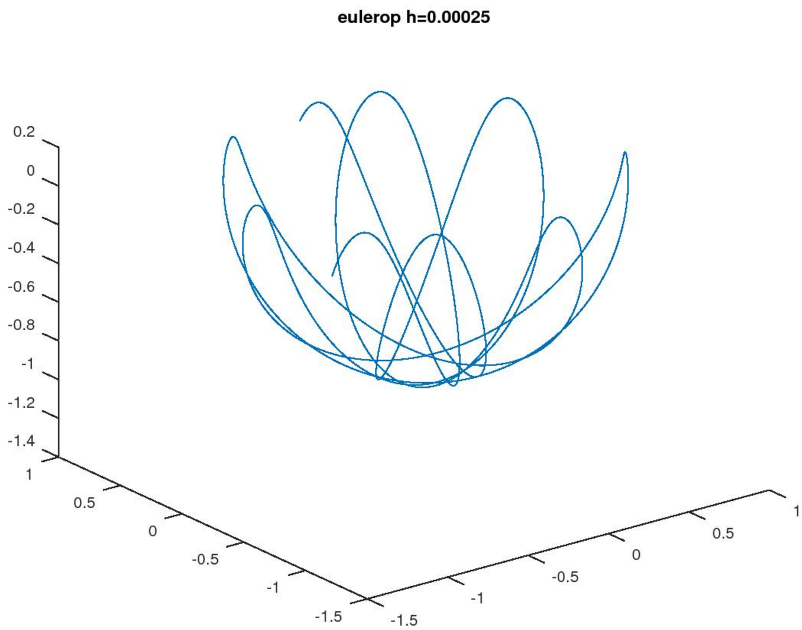
```
%[z1pp, z2pp, z3pp]=
%[z1*(g*z3-(z1p^2+z2p^2+z3p^2))/(z1^2+z2^2+z3^2),
%z2*(g*z3-(z1p^2+z2p^2+z3p^2))/(z1^2+z2^2+z3^2),
%z3(g*z3-(z1p^2+z2p^2+z3p^2))/(z1^2+z2^2+z3^2)-g]
%Che, trasformata come dovuto, diventa:
g=9.8;
f=@(x, y)[y(4), y(5), y(6), y(1)*(g*y(3)-(y(4)^2+y(5)^2+y(6)^2))/(y(1)^2+y(2)^2+y(3)^2), y(2)*(g*y(3)-
y0=[0, 1, 0, 0.8, 0, 1.2];
i=input("scegli␣uno␣dei␣7␣casi:\n1)␣eulerop␣h=0.0025\n2)␣eulerop␣h=0.00025\n3)␣RK4␣h=0.005\n4)␣RK4␣h=0
switch i
    case 1
        h=0.0025;
        [a,b] = eulerop(f,[0, 10],y0, h);
        n="eulerop␣h=0.0025";
    case 2
        h=0.00025;
        [a,b] = eulerop(f,[0, 10],y0, h);
        n="eulerop␣h=0.00025";
    case 3
        h=0.005;
        [a,b] = RK4(f,[0, 10],y0, h);
        n="RK4␣h=0.005";
    case 4
        h=0.0005;
        [a,b] = RK4(f,[0, 10],y0, h);
        n="RK4␣h=0.0005";
    case 5
        [a,b] = ode23(f,[0, 10],y0);
        n="ode23";
    case 6
        opz=odeset ("RelTol", 1e-3);
        [a,b]=ode45(f,[0, 10],y0, opz);
        n="ode45␣RelTol=0.001";
    case 7
        opz=odeset ("RelTol", 1e-6);
        [a,b]=ode45(f,[0, 10],y0, opz);
        n="ode45␣RelTol=0.000001";
    otherwise
        "non␣ho␣capito␣il␣comando"
        break
end
m=zeros(length(a), 1);
m=b(:,1).^2+b(:,2).^2+b(:,3).^2-ones(length(a),1);
r=max(abs(m))
plot3(b(:,1), b(:,2), b(:,3))
title(n)
```

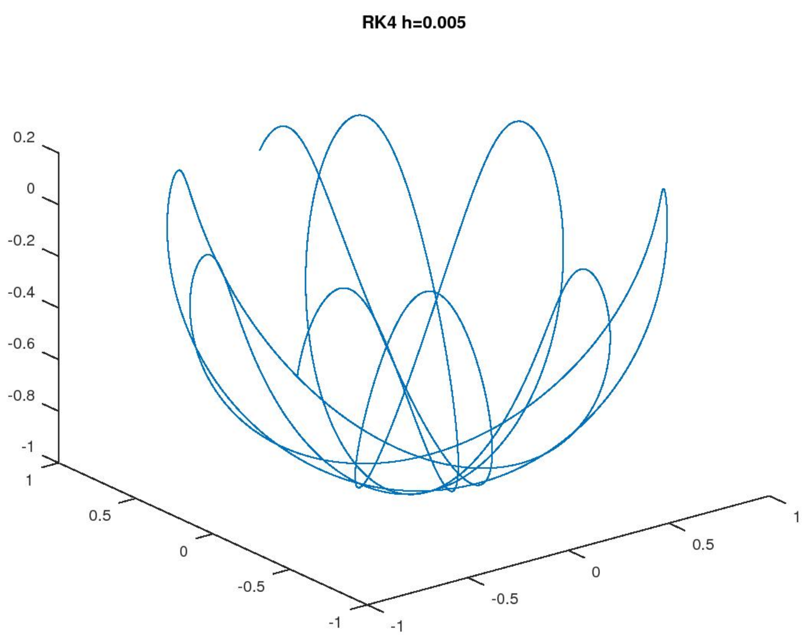
1.2 Risultati

Riportiamo i grafici in output.
Dove il massimo del parametro r vale, in ordine:

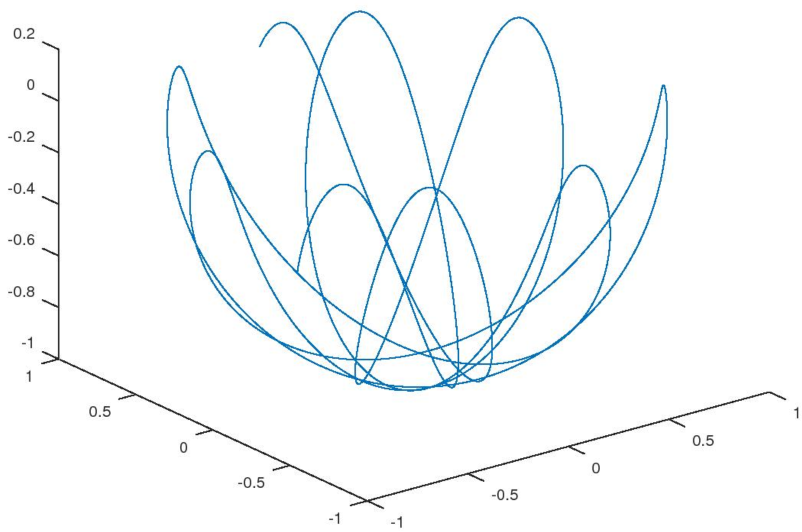
- $r = 0.44791$.
- $r = 0.043485$.
- $r = 4.7988e - 06$.
- $r = 4.8007e - 10$.
- $r = 0.0092088$.
- $r = 0.55712$.
- $r = 1.0655e - 04$.



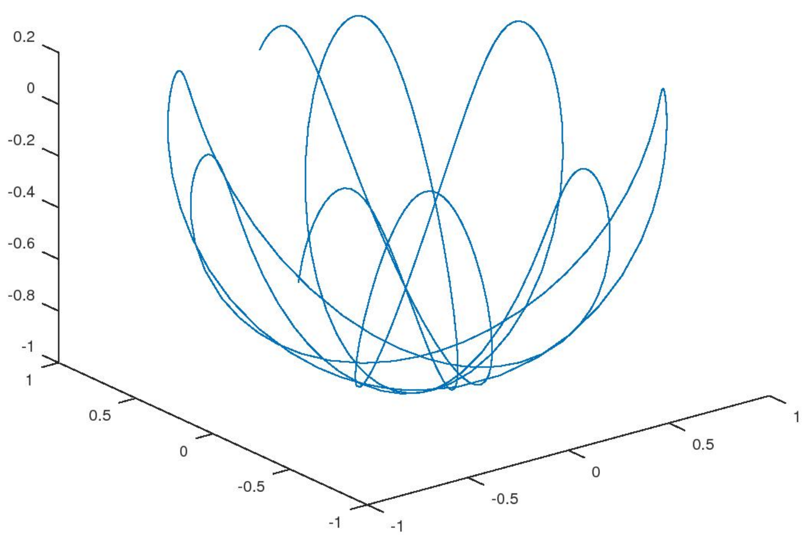

eulerop h=0.00025
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1


RK4 h=0.005
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

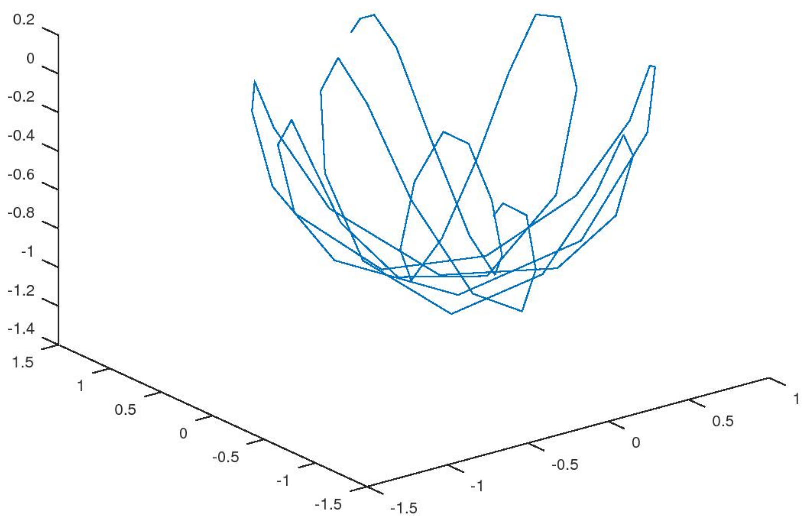
RK4 h=0.0005



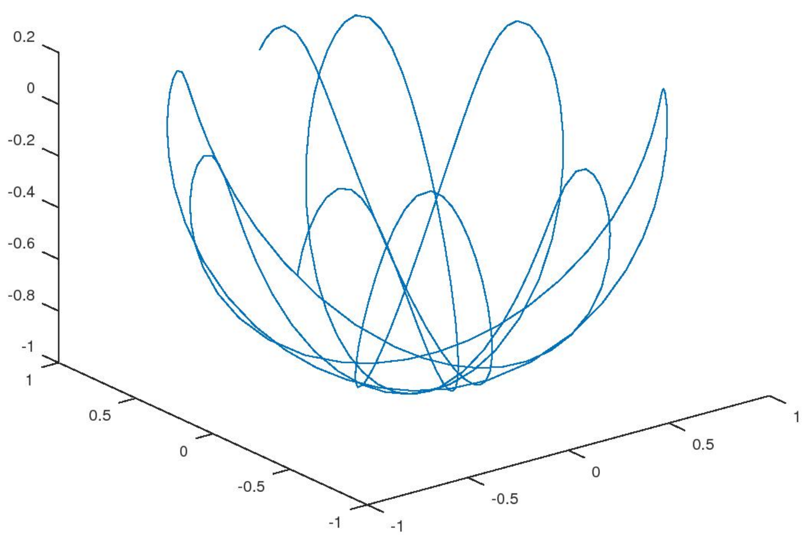
ode23



ode45 RelTol=0.001



ode45 RelTol=0.000001



2 Seconda sperimentazione: modello di Lorentz

Calcolo la soluzione numerica del modello di Lorenz nel caso $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$ a partire dalle seguenti condizioni iniziali:
$y_1(0) = 10$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 20$.
$y_1(0) = 11$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 20$.
Per un tempo x_max adeguato. Realizzando separatamente i grafici di (x, y_1), (x, y_2), (x, y_3), (y_1, y_2, y_3).

2.1 Il codice

Questo è lo script che realizza la sperimentazione:

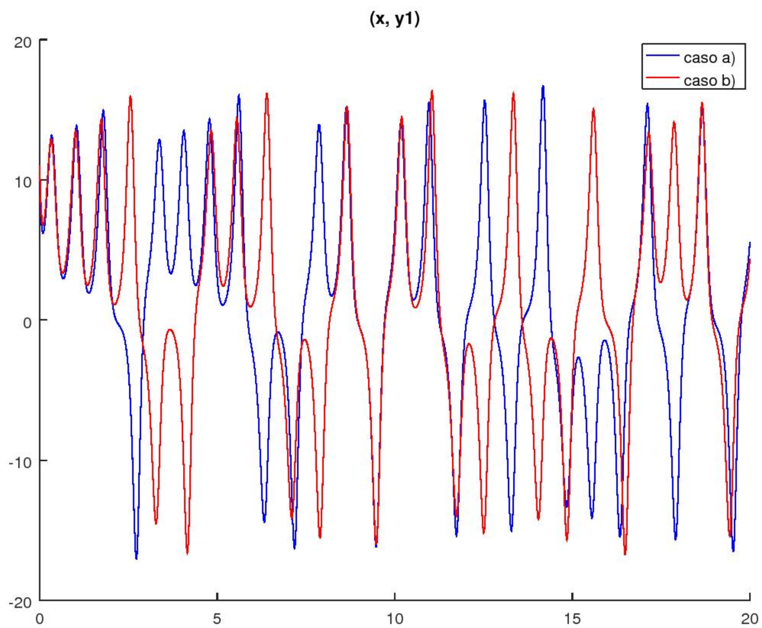
```
fAL = @(x,y,sigma,r,b) [sigma*(y(2)-y(1));...
r*y(1)-y(2)-y(1)*y(3); y(1)*y(2)-b*y(3)];

sigma = 10; r = 28; b = 8/3;
y0=[10, 0, 20];
opz=odeset ("RelTol", 1e-6);
[x,y] = ode45(fAL,[0, 20],y0,opz,sigma,r,b);
y0=[11, 0, 20];
[a,b] = ode45(fAL,[0, 20],y0,opz,sigma,r,b);
hold on
plot(x,y(:,1), "b")
plot(a,b(:,1), "r")
legend("caso␣a)","caso␣b)")
title("(x,␣y1)")
print('-djpeg','6_2_1.jpeg');
clf
hold on
plot(x,y(:,2), "b")
plot(a,b(:,2), "r")
legend("caso␣a)","caso␣b)")
title("(x,␣y2)")
print('-djpeg','6_2_2.jpeg');
clf
hold on
plot(x,y(:,3), "b")
plot(a,b(:,3), "r")
legend("caso␣a)","caso␣b)")
title("(x,␣y3)")
print('-djpeg','6_2_3.jpeg');
clf
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3), "b")
hold on
plot3(b(:,1),b(:,2),b(:,3), "r")
legend("caso␣a)","caso␣b)")
title("(y1,␣y2,␣y3)")
print('-djpeg','6_2_4.jpeg');
clf
```

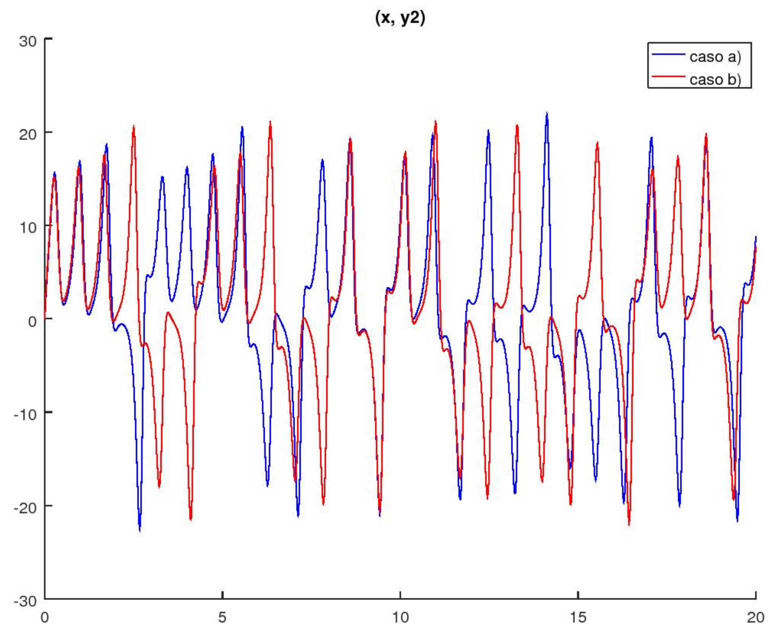
2.2 Risultati

Riportiamo i grafici in output.
Dove i dati relativi al primo caso sono in blu e in rosso quelli relativi al secondo. Si puà osservare che, pur essendo i dati iniziali molto vicini, il comportamento della soluzione per tempi grandi risulta completamente diverso nei due casi.

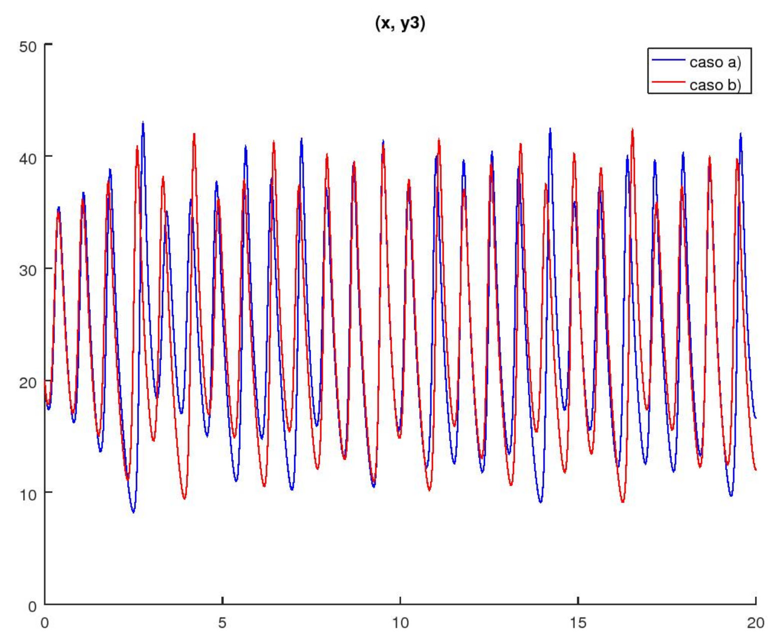
Notiamo che y_1 e y_2 si hanno comportamenti diversi per i due dati iniziali,



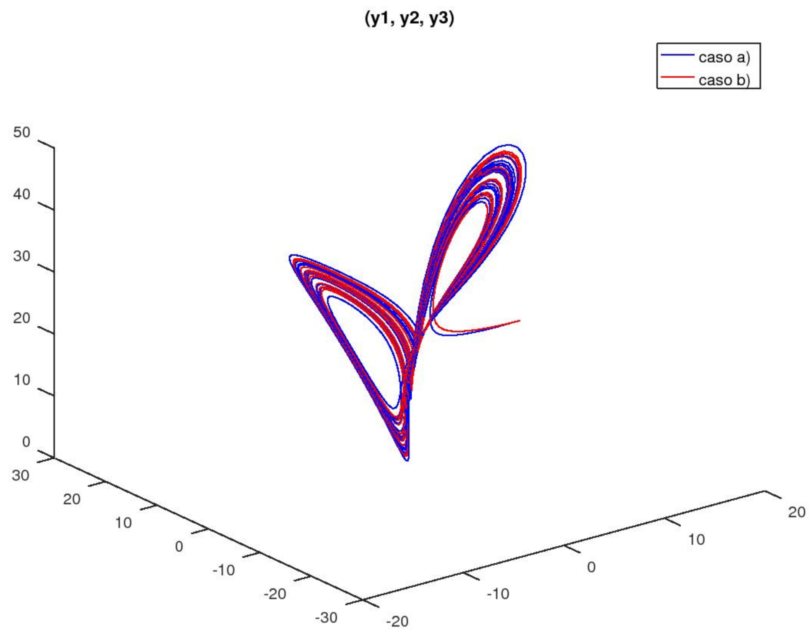
mentre y_3 ha un comportamento più simile nelle due sperimentazioni.



(x, y2)
caso a)
caso b)
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
5
10
15
20



(x, y3)
caso a)
caso b)
50
40
30
20
10
0
0
5
10
15
20



3 Terza sperimentazione: equazione di Van der Pol

L'equazione di Van der Pol governa l'intensità di corrente $y(x)$ in un circuito oscillante a triodo e viene utilizzata nello studio di circuiti che contengono valvole termoioniche, i cosiddetti tubi a vuoto, come il magnetron nei forni a microonde. L'equazione ha la forma seguente:

$$y'' = \mu(1 - y^2)y' - y$$

dove μ indica l'intensità dello smorzamento non lineare. Per valori di μ piccoli, y ha un comportamento transitorio oscillante che evolve in un comportamento a regime di forma simile ad una sinusoide. Invece per valori di μ grandi il comportamento di y presenta rapide transizioni intercalate da periodi più tranquilli. Vogliamo studiare questo fenomeno.

3.1 L'implementazione

Risolveremo numericamente questa equazione sull'intervallo $[0, 100]$ applicando `ode45` oppure `eulero` con le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$ per i casi $\mu = 0.1, 1, 10, 100$.
Per ciascun caso disegneremo la traiettoria di y in funzione di x.

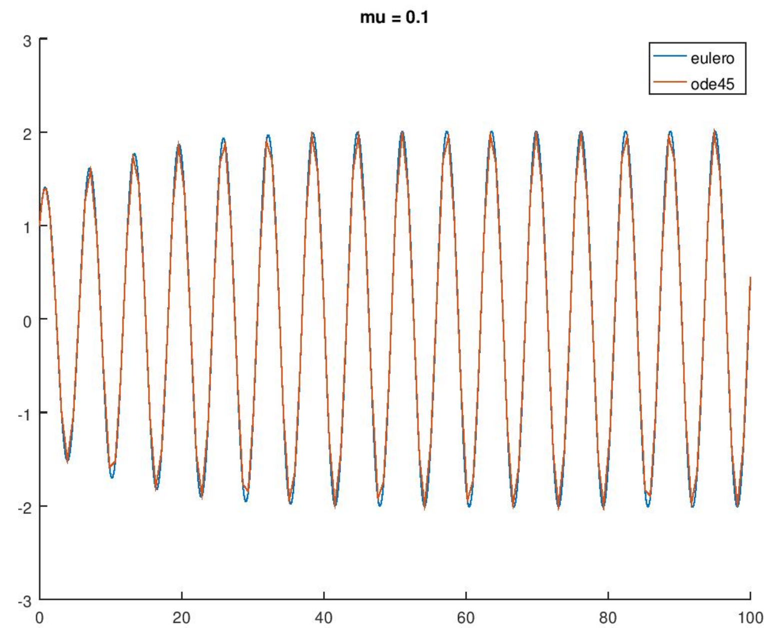
3.2 Il codice

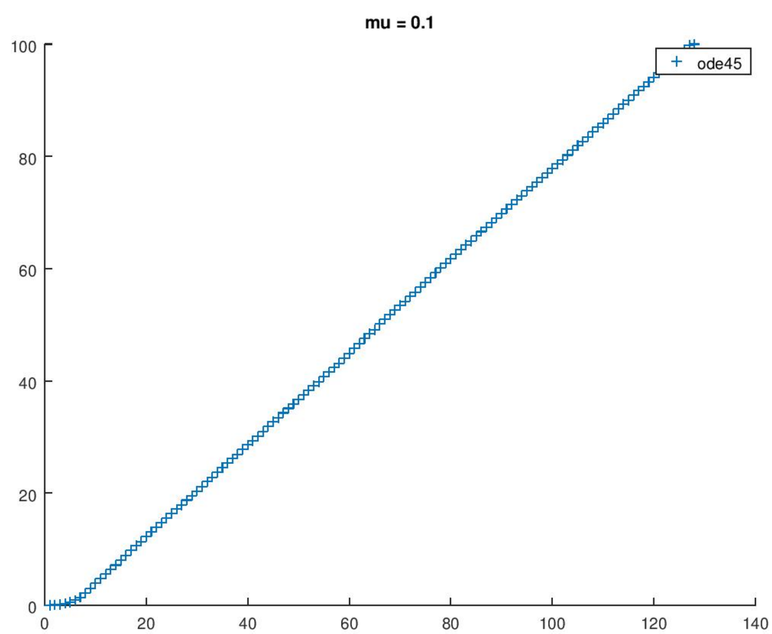
Questo è lo script che realizza la sperimentazione:

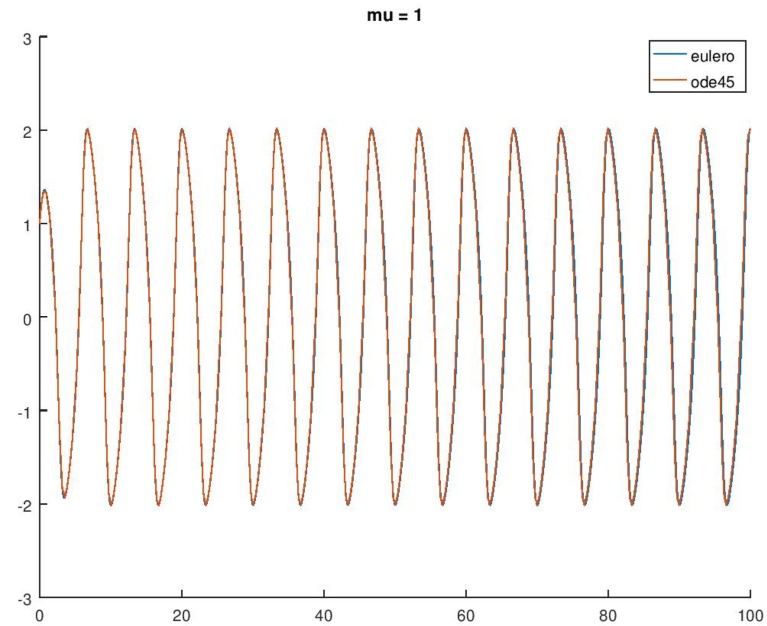
```
i=input("scegli␣uno␣dei␣4␣casi:\n1)␣mu=0.1\n2)␣mu=1\n3)␣mu=10\n4)␣mu=100\n");
switch i
    case 1
        a=0.1;
        n="mu␣=␣0.1";
    case 2
        a=1;
        n="mu␣=␣1";
    case 3
        a=10;
        n="mu␣=␣10";
    case 4
        a=100;
        n="mu␣=␣100";
    otherwise
        "non␣ho␣capito␣il␣comando"
        break
end
opz= odeset("AbsTol", 1e-20);
f=@(x, y)[y(2), a*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
y0=[1, 1];
[x,y] = eulerop(f,[0, 100],y0, 0.001);
[a,b] = ode45(f,[0, 100],y0, opz);
hold on
plot(x,y(:,1))
plot(a,b(:,1))
legend("eulero","ode45")
title(n)
file_name = sprintf('6_3_%i.jpeg', i);
print('-djpeg', file_name)
clf
hold on
plot(a(1:end),'+')
legend("ode45")
title(n)
file_name = sprintf('6_3_%i_a.jpeg', i);
print('-djpeg', file_name)
```

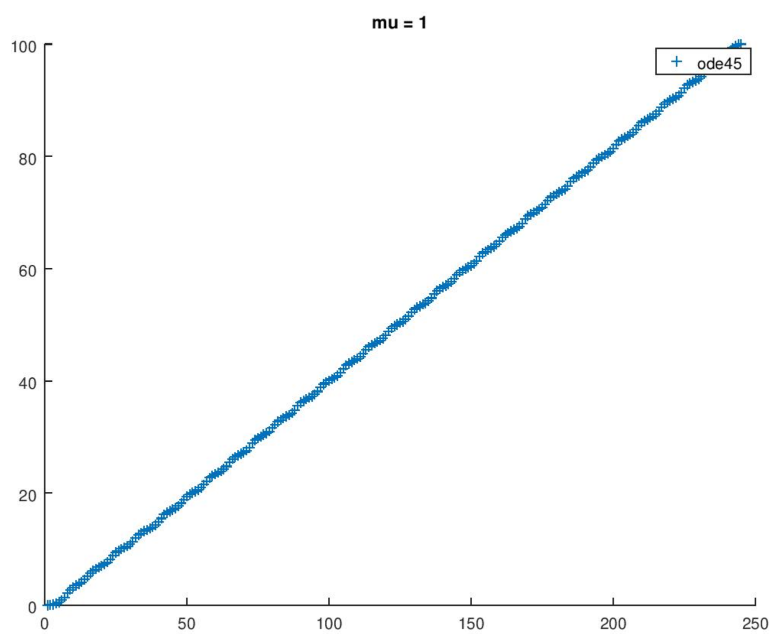
3.3 Risultati

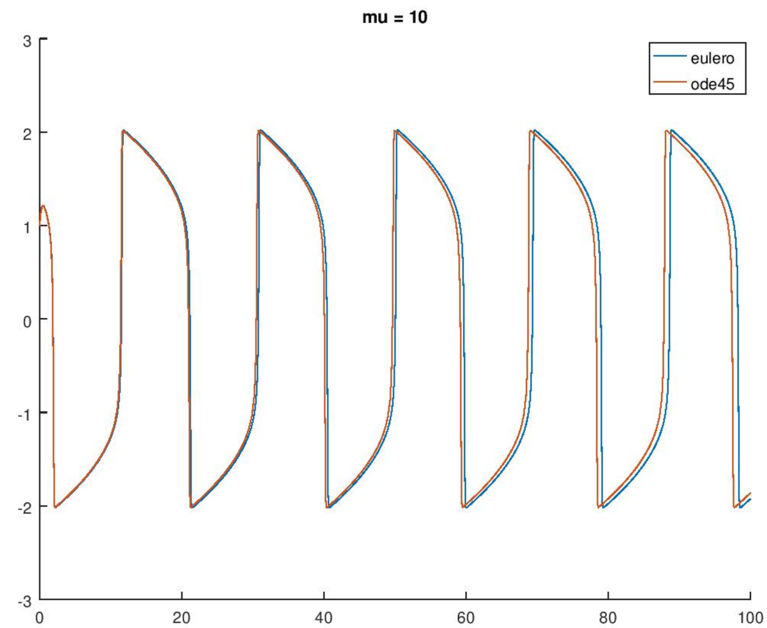
Riportiamo i grafici in output.
Il secondo grafico di ogni coppia rappresenta la distribuzione dei nodi nel caso `ode45`, la non linearità del grafico è sintomo di ”difficoltà” numerica.

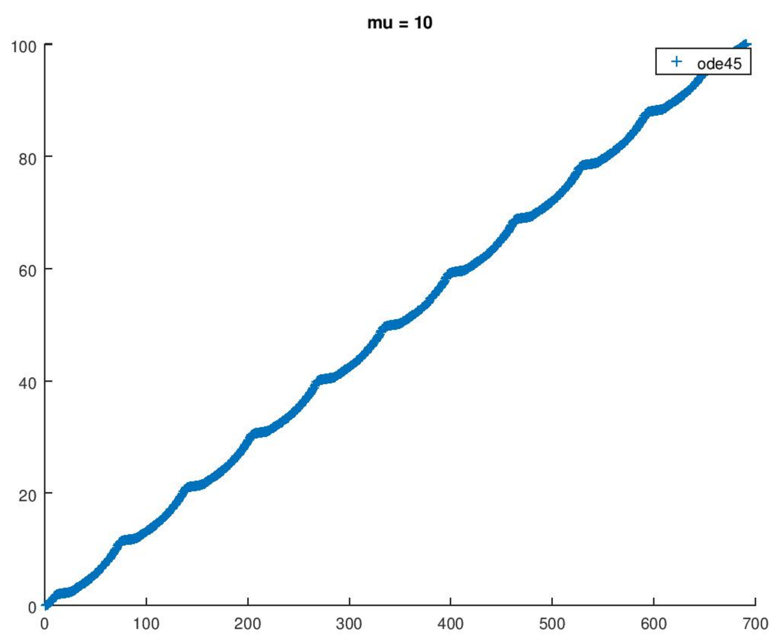

mu = 0.1
eulero
ode45
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
20
40
60
80
100

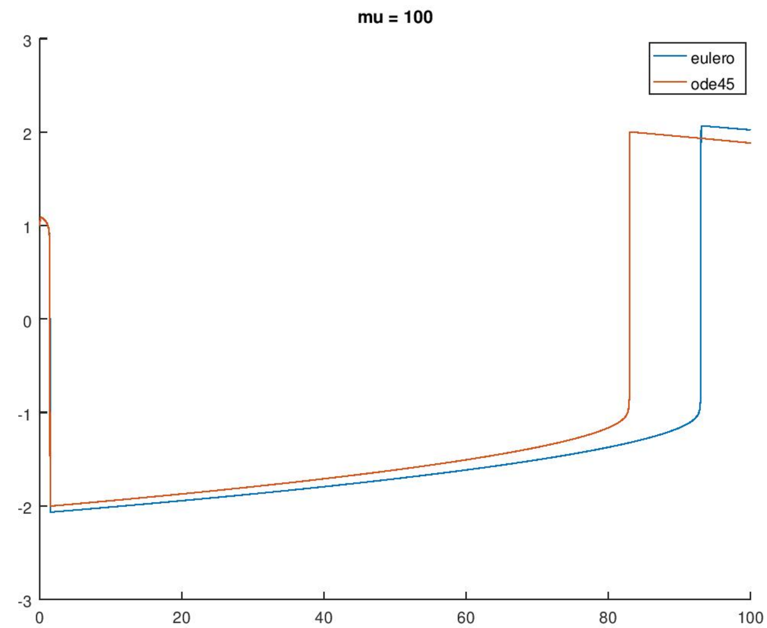

mu = 0.1
ode45
100
80
60
40
20
0
0
20
40
60
80
100
120
140

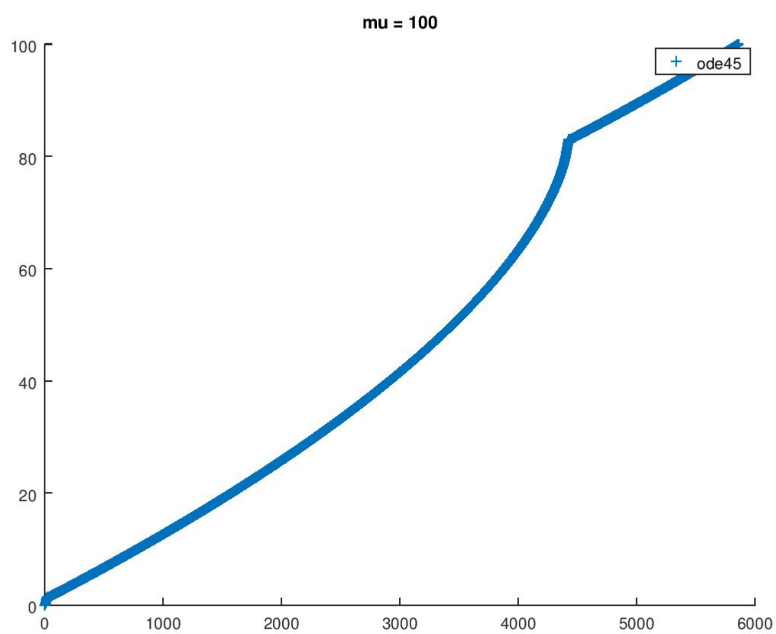

mu = 1
eulero
ode45
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
20
40
60
80
100


mu = 1
ode45
100
80
60
40
20
0
0
50
100
150
200
250


mu = 10
eulero
ode45
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
20
40
60
80
100


mu = 10
ode45
100
80
60
40
20
0
0
100
200
300
400
500
600
700


mu = 100
eulero
ode45
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
20
40
60
80
100


mu = 100
ode45
100
80
60
40
20
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000