Modelli di crescita della popolazione
Corso di LSMC, a.a. 2017-2018

Davide Gori
550282

October 22, 2018

1 Prima sperimentazione: colonia di batteri

Considero una colonia di batteri. Assumiamo che la sua crescita, determinata da divisioni di cellule, sia caratterizzata dalle seguenti tre proprietà:

- all'inizio la colonia è composta da 1000 batteri.
- dopo un'ora il numero di batteri è raddoppiato.
- in intervalli temporali di uguale lunghezza il numero di batteri aumenta di uguale fattore.

Determino il valore dei parametri del modello che descrive questa situazione.
Utilizzando il metodo di Eulero, troverò la soluzione numerica del modello ottenuto e disegnerò il numero di batteri presenti nella colonia nelle prime sei ore.

1.1 L'implementazione

Essendo la velocità di accrescimento costante (per la terza ipotesi) allora abbiamo che y'/y=a costante, sapendo che la soluzione è del tipo ce^{at} sappiamo che, visto che in 1 ora si ha un raddoppiamento della popolazione, $e^a = 2$, da cui $a = \ln(2)$.
Siccome f(0)=1000 allora c=1000. Risolviamo ora utilizzando un metodo numerico.

1.2 Il codice

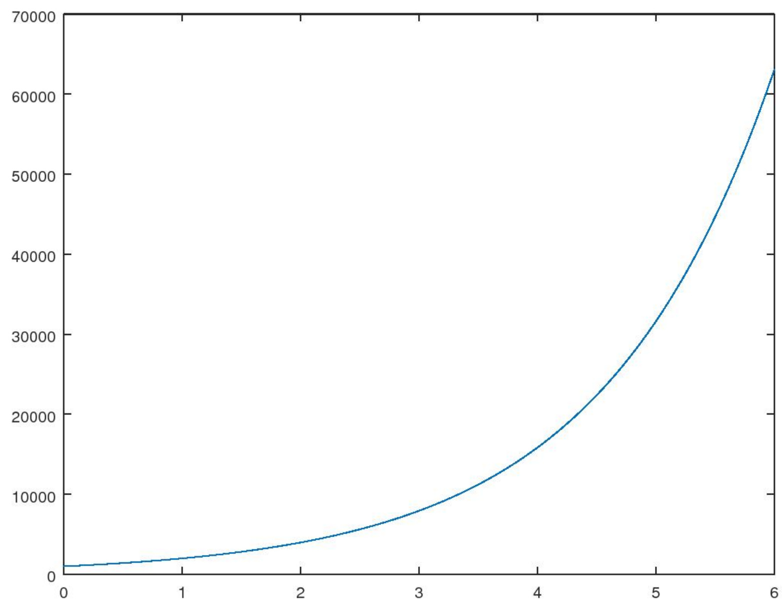
Questo è lo script che realizza la sperimentazione (viene usato `eulero`, già implementato nelle precedenti esercitazioni):

```
a=log(2);
f=@(x,y) a*y;
y0=1000;
```

```
[x,y] = eulero(f,[0, 6],y0, 0.01);
plot(x,y)
```

1.3 Risultati

Riportiamo il grafico in output.



2 Seconda sperimentazione: un esempio

La emivita del plutonio è di 50 anni. Troviamo la legge di decadimento e calcoleremo a quanto si riduce un grammo di plutonio dopo 100 anni.
Utilizzando il metodo di Runge-Kutta classico, determino la soluzione numerica del modello ottenuto. Deducendo quanti anni all'incirca occorrono affinché la quantità di plutonio sia 1/10 di quella iniziale. Rappresentare in un grafico l'andamento della quantità di plutonio presente nei primi 50 anni.

2.1 L'implementazione

Sapendo che la leggi per il decadimento è esponenziale, abbiamo che $y = ce^{at}$ abbiamo che $0.5 = \frac{y(t+50)}{y(t)} e^{50a}$.
Dunque $a = -ln(2)/50$. Se dopo 50 anni la quantità è dimezzata, dopo 100 è

1/4 di grammo. Il modello ottenuto risolve la seguente equazione differenziale: $y' = -\frac{\ln(2)}{50}y$, con $y(0) = 1$.

2.2 Il codice

Questo è lo script che realizza la sperimentazione (viene usato RK4, già implementato nelle precedenti esercitazioni):

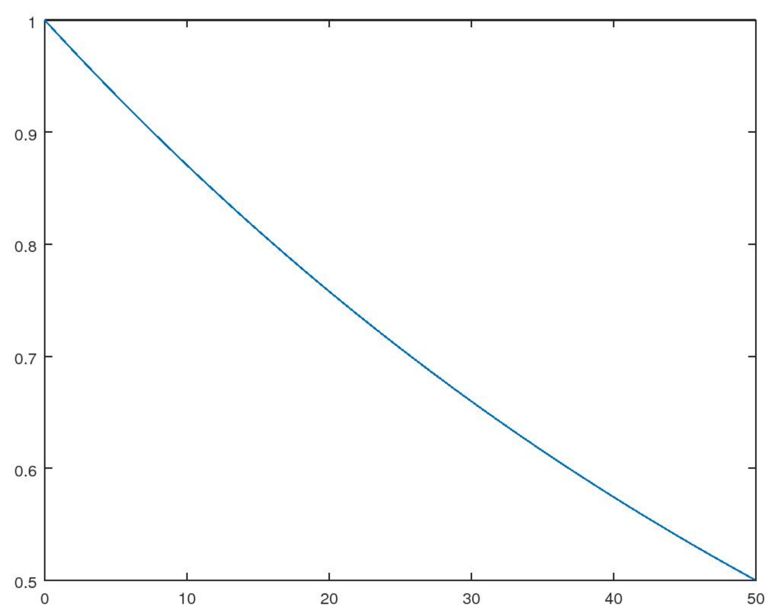
```
a=-log(2)/50;
f=@(x,y) a*y;
y0=1;
[x,y] = RK4(f,[0, 2000],y0, 0.1);

k=-log(10)/a

plot(x(1:50*10),y(1:50*10))
```

2.3 Risultati

Il tempo necessario per decimare la quantità di atomi è $t = -\frac{\ln(10)}{a} = 166.10$. Riportiamo il grafico in output.



3 Terza sperimentazione: un altro esempio

Consideriamo una popolazione la cui evoluzione è descritta dall'equazione logistica. Si supponga che la densità iniziale di popolazione sia pari a 2 e che la capacità portante dell'ambiente sia 0.01, con potenziale biologico della popolazione pari a 0.2. Risolveremo numericamente l'equazione logistica mediante la routine ode45 sull'intervallo $[0, 0.5]$ e tracceremo il grafico della soluzione stabilendo graficamente a quale istante la densità di popolazione sarà un decimo di quella iniziale.

3.1 L'implementazione

L'equazione logistica è del tipo $y' = y(a - by)$ dove:

- Capacità portante dell'ambiente: $K = a/b = 0.01$.
- Potenziale biologico: $a = 0.2$.
- $y0 = 2$

quindi $b = 20$, $a = 0.2$ (con riferimento al codice scritto).

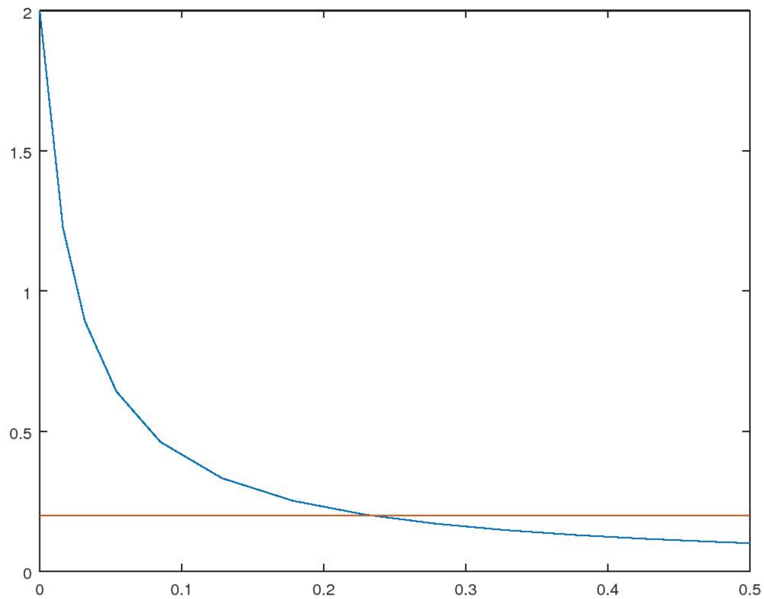
3.2 Il codice

Questo è lo script che realizza la sperimentazione:

```
f=@(x,y) y*(0.2-20*y);
y0=2;
[x,y] = ode45(f,[0 0.5],y0);
plot(x,y)
hold on
k=0.2*ones(length(x), 1);
plot(x,k)
```

3.3 Risultati

Riportiamo il grafico in output, dal quale si può evincere la soluzione grafica.



4 Quarta sperimentazione: uno studio

Risolverò numericamente l'equazione logistica

$$\begin{cases} y' = \alpha \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

con il parametro malthusiano dipendente dal tempo nel modo seguente (periodicità stagionale):

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} + \cos(2\pi t)$$

e la capacità portante $K = 100$. Studiare la soluzione in funzione del tempo t. Disegnerò poi sull'intervallo $[0, 20]$ il grafico di $y(t)$ per i valori iniziali $y0 = 1, 10, 50, 200$.

4.1 L'implementazione

L'equazione logistica è del tipo $y' = \alpha(t) \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right)$; dove:

- $\alpha(t) = \frac{1}{2} + \cos(2\pi t)$.
- $K = 100$.

- $y_0 = 2$.

quindi $b = 20$, $a = 0.2$.

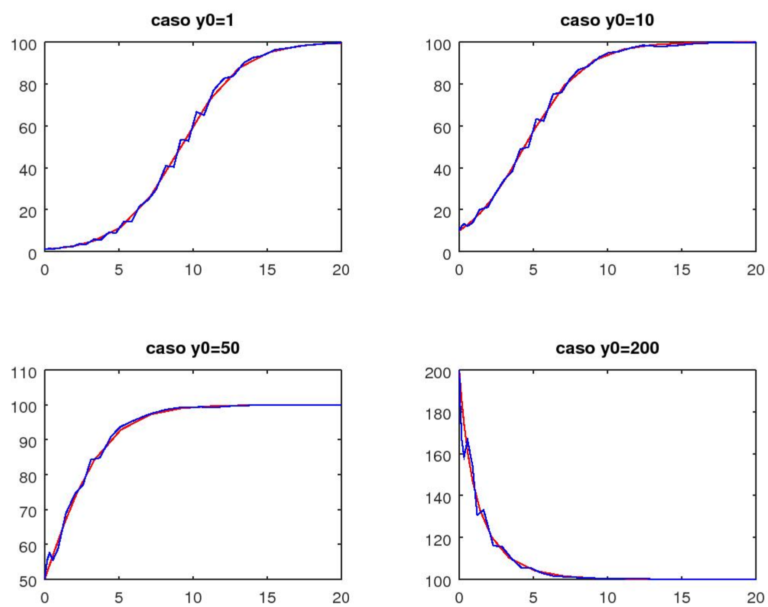
4.2 Il codice

Questo è lo script che realizza la sperimentazione:

```
f=@(x,y) (1/2+cos(2*pi*x))*y*(1-0.01*y);
g=@(x,y) 0.5*y*(1-0.01*y);
B=[1, 10, 50, 200];
for i=1:4
    y0=B(i);
    [x,y] = ode45(f,[0 20],y0);
    [z,k] = ode45(g,[0 20],y0);
    subplot(2, 2, i)
    plot(z,k, 'r')
    hold on
    subplot(2, 2, i)
    plot(x,y, 'b')
    title(sprintf("caso y0=%d",B(i)))
    drawnow
end
```

4.3 Risultati

Possiamo notare che se $y_0 > K$ abbiamo una soluzione decrescente, negli altri casi cresce. In generale la soluzione è simile a quella del caso classico in cui α è costante.
Riportiamo il grafico in output.


caso y0=1
caso y0=10
caso y0=50
caso y0=200