Modelli di crescita della popolazione
Corso di LSMC, a.a. 2017-2018

Davide Gori
550282

October 30, 2018

1 Prima sperimentazione: Lotka-Volterra

Il modello di Lotka-Volterra che descrive la dinamica delle due popolazioni si scrive come segue:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \cdot \gamma_1 \cdot (1 - \frac{y_1}{k_1} - \frac{y_2}{h_12}) \\ y_2' = y_2 \cdot \Gamma_2 \cdot (1 - \frac{y_2}{k_2} + \frac{y_1}{h_21}) \end{cases} \tag{1}$$

dove $y_1(t)$ ed $y_2(t)$ indicano il volume in cc (centimetri cubi) occupato dalla prima e seconda popolazione di lieviti al tempo t (misurato in ore). I valori calcolati da Gause sono i seguenti:
$\gamma_1 = 0.21827$, $k_1 = 13$, $h_12 = 3.71429$; $\gamma_2 = 0.06069$, $k_2 = 5.8$, $h_21 = 13.2118$.
Utilizzando la routine `ode45` risolverò il sistema con i seguenti dati iniziali: $y_1(0) = 0.5$, $y_2(0) = 0.3$, sull'intervallo $[0, 300]$. Disegnerò sulla stessa figura i grafici della densità di popolazione.
Inoltre, fissato $y_2(0) = 0.5$, analizzerò i tre casi:
$y_1(0) = 0.5$, $y_2(0) = 0.1$, $y_3(0) = 10$.

1.1 L'implementazione

l'equazione è (`fun`):

$$\begin{cases} y'(1) = y(1) \cdot 0.21827 \cdot (1 - \frac{y(1)}{13} - \frac{y(2)}{3.71429}) \\ y'(2) = y(2) \cdot 0.06069 \cdot (1 - \frac{y(2)}{5.8} + \frac{y(1)}{13.2118}) \end{cases} \tag{2}$$

1.2 Il codice

Questo è lo script che realizza la prima sperimentazione:

```
[x,y] = ode45(@fun,[0 300],[0.5, 0.3]);
hold on
k=5.8*ones(length(x), 1);
plot(x,k)
hold on
```

```
plot(x,y)
legend("k_2", "N1", "N2")
```

Dove `fun` è la seguente:

```
function yp = fun(x,y)
yp = zeros(1,2);
yp(1) = y(1)*0.21827*(1-y(1)/13-y(2)/3.71429);
yp(2) = y(2)*0.06069*(1-y(2)/5.8+y(1)/13.2118);
end
```

Questo è lo script che realizza la seconda sperimentazione:

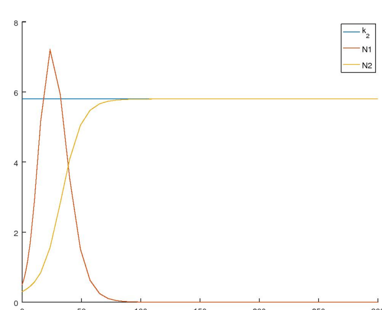
```
B=[0.5, 0.1, 10];
for i=1:3
    [x,y] = ode45(@fun,[0 300],[B(i), 0.5]);
    subplot(2, 2, i)
    plot(x,y)
    title(sprintf("caso y0=%d",B(i)))
    legend("N1", "N2")
    drawnow
end
```

Dove `fun` è la seguente:

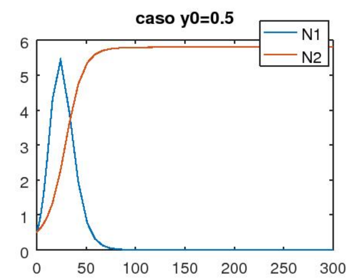
```
function yp = fun(x,y)
yp = zeros(1,2);
yp(1) = y(1)*0.21827*(1-y(1)/13-y(2)/3.71429);
yp(2) = y(2)*0.06069*(1-y(2)/5.8+y(1)/13.2118);
end
```

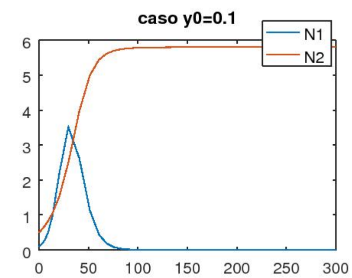
1.3 Risultati

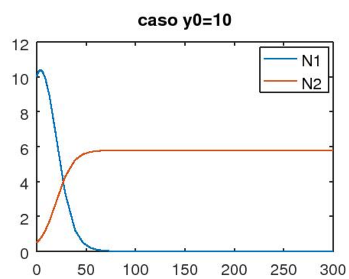
Riportiamo il grafico in output.



Riportiamo il grafico in output.
In tutti e tre i casi si verifica che dopo un transiente, circa della stessa durata per le tre poplazioni, la specie N2 si stabilizza a 5.8 e quella N2 si estingue.







2 Seconda sperimentazione: Lotka-Volterra V2

Il modello di Lotka-Volterra che descrive la dinamica delle due popolazioni si scrive come segue:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \cdot \gamma_1 \cdot (1 - \frac{y_1}{k_1} - \frac{y_2}{h_1 2}) \\ y_2' = y_2 \cdot \Gamma_2 \cdot (1 - \frac{y_2}{k_2} + \frac{y_1}{h_2 1}) \end{cases} \tag{3}$$

Utilizzeremo il metodo di Runge-Kutta classico con i seguenti parametri: $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 0.001$; $\hat{\alpha} = 1$, $\hat{\beta} = 0.001$.
supponendo che le densità iniziali siano le seguenti:

- $y_1(0) = 300$, $y_2(0) = 150$.
- $y_1(0) = 15$, $y_2(0) = 22$.

2.1 Il codice

Questo è lo script che realizza la sperimentazione:

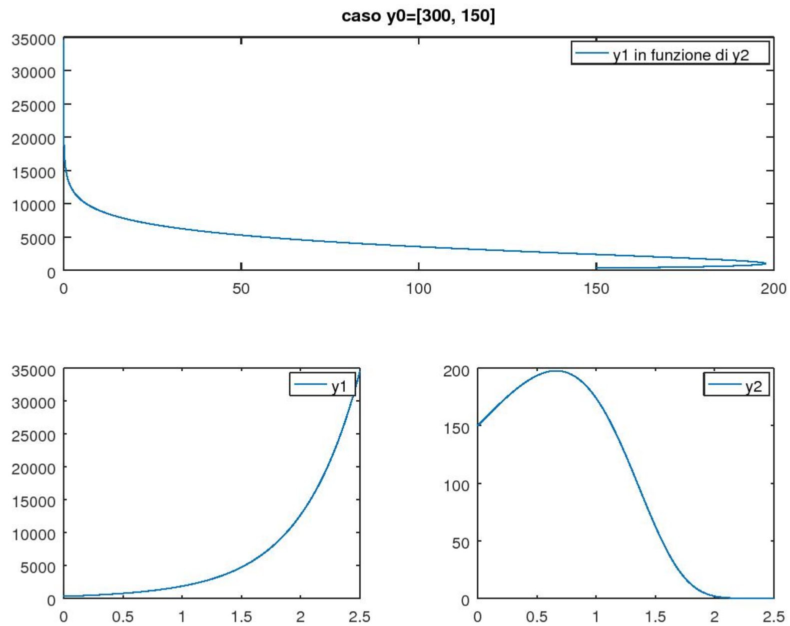
```
y0=[300, 150];
tmax=2.5;
h=0.0001;

%per stampare il secondo caso basta modificare:
%y0=[15, 22];
%tmax=3.8;
%h=0.0001;

[x,y] = RK4(@fun1,[0, tmax],y0, h);
length(x)
length(y(:,1))
subplot(2, 2, 1:2)
plot(y(:,2), y(:,1))
legend("y1 in funzione di y2")
title("caso y0=[300, 150]")
subplot(2, 2, 3)
plot(x,y(:, 1))
legend("y1")
subplot(2, 2, 4)
plot(x,y(:, 2))
legend("y2")
```

Dove `fun1` è la seguente:

```
function yp = fun1(x,y)
yp = zeros(1,2);
yp(1) = y(1)*(2-0.001*y(2));
yp(2)= y(2)*(1-0.001*y(1));
end
```

2.2 Risultati

Riportiamo il grafico in output.



Riportiamo il grafico in output.

Visti i coefficienti dell'equazione differenziale ci si aspetta una crescita pressoché esponenziale (per y1), in effetti questa previsione è rispettata.
I valori scelti per h e tmax sono i seguenti:

- modello $y(0) = [300, 150]$, $h = 0.0001$, $tmax = 2.5$
- modello $y(0) = [15, 22]$, $h = 0.0001$, $tmax = 3.8$

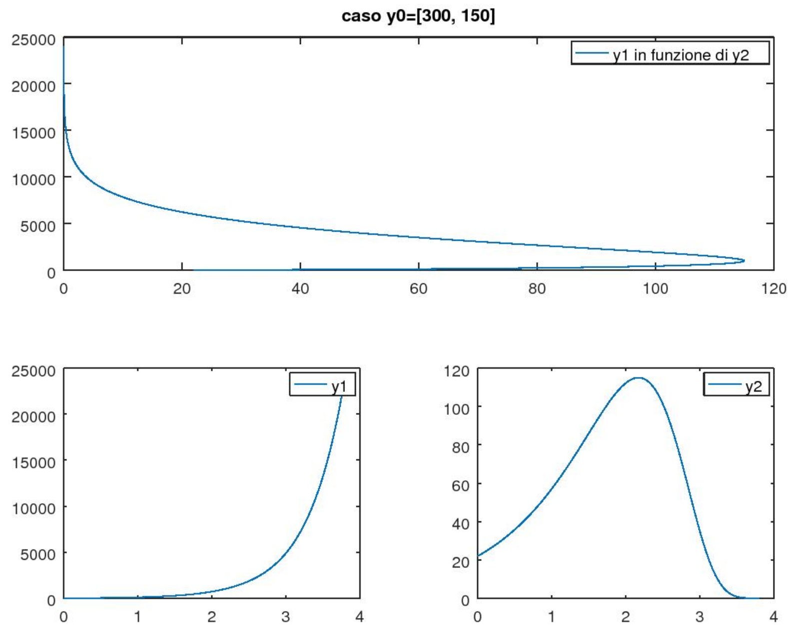
è possibile aumentare h di un fattore 10 a seconda delle prestazioni del calcolatore, il risultato è pressapoco lo stesso.

3 Terza sperimentazione: Lotka-Volterra V3

Il modello di Lotka-Volterra che descrive la dinamica delle due popolazioni si scrive come segue:

$$\begin{cases} G' = G(0.405 - 0.81L) \\ L' = L(-1.5 + 0.125G) \end{cases} \tag{4}$$

Sapendo $G(1975) = 7.7$ e $L(1975) = 0.5$. Utilizziamo la routine `ode45`, sull'intervallo $[0, T]$ per $T = 10$ e $T = 25$.
Nel primo caso, rappresenteremo come varia il numero dei predatori in funzione



del numero di prede, mentre nel secondo plotteremo il numero delle prede ed il numero dei predatori rispetto al tempo.

3.1 Implementazione

$$\begin{cases} y_1' = y_1(0.405 - 0.81y_2) \\ y_2' = y_2(-1.5 + 0.125y_1) \end{cases} \tag{5}$$

con $G = y(1)$ e $L = y(2)$.
Essendo l'equazione autonoma supponiamo $T_0 = 0$.

3.2 Il codice

Questo è lo script che realizza la sperimentazione:

```
[x,y] = ode45(@fun2,[0 10],[7.7, 0.5]);
[z,k] = ode45(@fun2,[0 25],[7.7, 0.5]);

subplot(2, 2, 1:2)
plot(y(:,1), y(:,2))
legend("L in funzione di G")
title("dal 1975 al 1985")
subplot(2, 2, 3)
plot(z,k(:, 1))
```

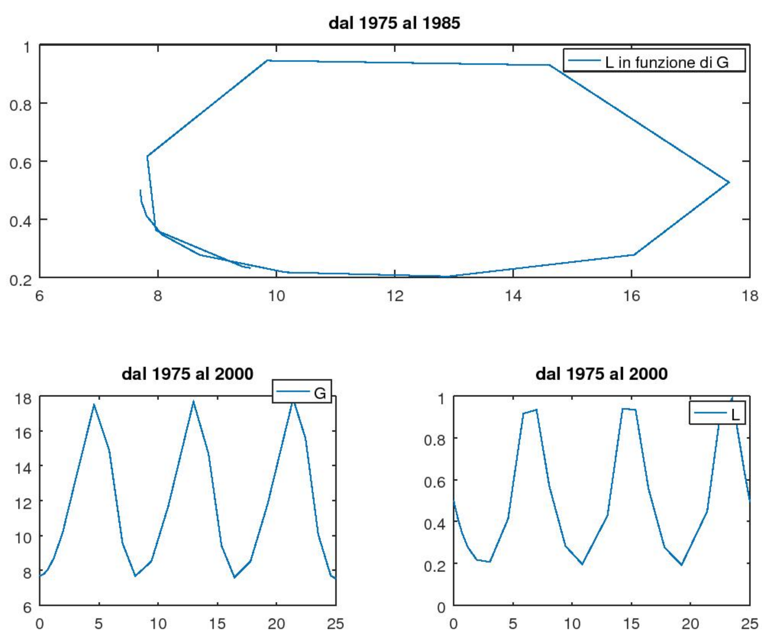
```
legend("G")
title("dal␣1975␣al␣2000")
subplot(2, 2, 4)
plot(z,k(:, 2))
legend("L")
title("dal␣1975␣al␣2000")
```

Dove `fun2` è la seguente:

```
function yp = fun2(x,y)
yp = zeros(1,2);
yp(1) = y(1)*(0.405-0.81*y(2));
yp(2)= y(2)*(-1.5+0.125*y(1));
end
```

3.3 Risultati

Riportiamo il grafico in output.



Si può notare che l'andamento di L e G é quasi periodico.

4 Quarta sperimentazione: modellizzare una malattia

Supponiamo che una popolazione di N individui si ainfettata da una malattia inguaribile e non mortale, indicando con $S(t)$ il numero di persone sane e con $I(t)$ quelle infette, si ha che $S(t) + I(t) = N$. Determinerò un modello matematico che descrive la situazione e testerò questo su un esempio dato.

4.1 Implementazione

Supponiamo $r \geq 0$ il tasso di rischio di infezione, otteniamo il seguente modello:

$$\begin{cases} I(t) = rI(t)(N - I(t)) \\ I(0) = I_0 \end{cases} \tag{6}$$

Il modello implementato è il modello SIR con parametro $\beta = 0$, notando che $I+S = N$. Per far si che il modello abbia senso fisico occorre che: $I(0)$ sia intero e appartenente all'intervallo $[0, N]$. Essendo l'equazione autonoma supponiamo $t_0 = 0$.

Proviamo a implementare un caso reale con i seguenti dati:
$N = 1000$, $r = 0.0001$ e $I(0) = 1$

4.2 Il codice

Questo è lo script che realizza la sperimentazione:

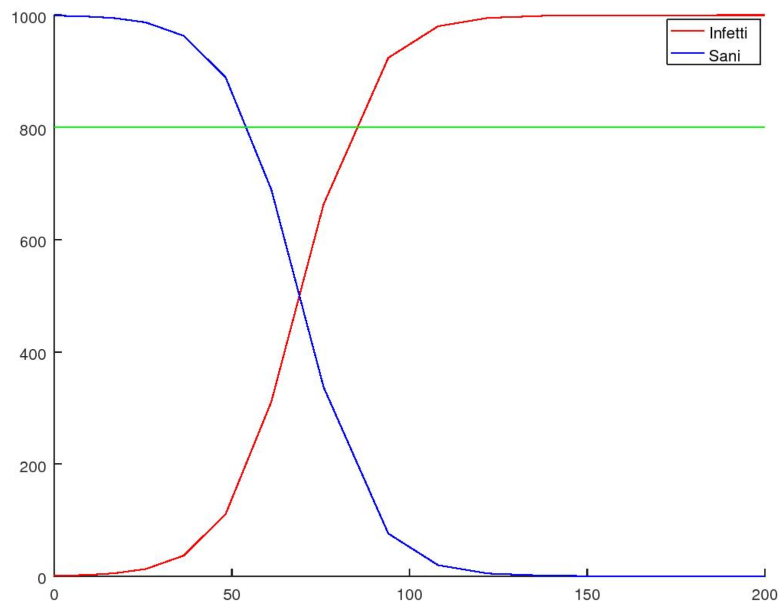
```
[x,y] = ode45(@fun3,[0 200],1);
z=1000*ones(length(x))-y;
k=800*ones(length(x));

hold on
plot(x,y, "r")
hold on
plot(x,z, "b")
hold on
plot(x,k, "g")

legend("Infetti", "Sani")
```

Dove `fun3` è la seguente:

```
function yp = fun3(x,y)
yp = 0.0001*y*(1000-y);
end
```

4.3 Risultati

Riportiamo il grafico in output.



Graficamente si vede che l'80% viene superato circa all'80-esimo giorno di diffusione della malattia.