

# Tarefa 05

Davi Feliciano

Abril de 2021

## Problema 1

O decaimento radioativo pode ser modelado pela seguinte expressão  $\frac{dN}{dt} = -N\lambda$ , onde  $N$  é o número de átomos de determinada espécie radioativa e  $\lambda$  é o chamado coeficiente de decaimento radioativo.

- (a) Faça um programa que integre a equação do decaimento radioativo usando o método de Euler explícito. Sugestão: Use  $N_0 = N(0) = 1000$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\Delta t = 5$  e integre até um tempo final  $t_f = 50$ s. Porque essa escolha de  $\Delta t$ ?
- (b) Com os mesmos parâmetros e usando agora o método de Euler implícito, integre novamente a equação do decaimento radioativo.
- (c) Plote os resultados dos métodos anteriores e compare com a solução exata  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ . O que você conclui? Como você interpreta essas diferenças? O que ocorreria se diminuíssemos o intervalo de tempo  $\Delta t$ ?

## Solução

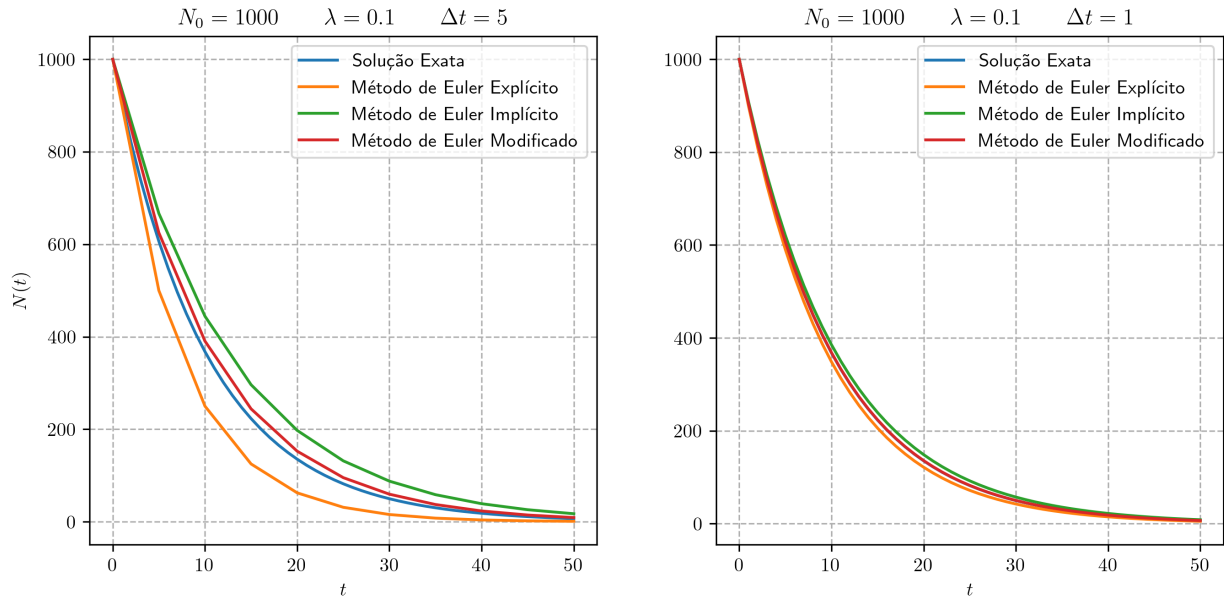


Figura 1: Resultados obtidos com o uso dos diversos métodos de Euler usando  $\Delta t = 5$  e  $\Delta t = 1$ , respectivamente. Como o método de Euler aproxima ponto a ponto a solução pelo termo linear de sua expansão em séries de potência, o erro de truncamento é proporcional a  $(\Delta t)^2$ , o que explica a diferença entre os dois gráficos. O método modificado é o que aproxima melhor a solução. Porém, como esse envolve em geral a solução de uma equação não linear — assim como o método implícito — pode não ser o método mais conveniente em certos casos.

## Problema 2

- (a) Faça um programa, usando o método de Euler, para calcular o movimento tridimensional de um projétil sob a ação de uma campo gravitacional uniforme com posição inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$  e velocidade inicial  $(v_x, v_y, v_z) = (0, 0, 320)$ , em m/s em uma latitude de  $40^\circ$  N, considerando o efeito de rotação da Terra — aceleração de Coriolis. Despreze a curvatura da terra e a resistência do ar. Apesar de o corpo ser lançado na vertical, o efeito de Coriolis vai impor um desvio em sua trajetória. Faça um gráfico 3D para representar a trajetória do lançamento e calcule o valor desse desvio.
- (b) Modifique o programa feito no item anterior introduzindo o efeito da resistência do ar. Considere que a força de resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade em cada instante e tem uma direção oposta à velocidade.

## Solução

Tomando A segunda lei de Newton para um referencial não inercial é dada por

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{W} + m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{\Omega}} + 2m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega} + m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{\Omega}), \quad (1)$$

onde  $U$  é algum potencial,  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{\Omega}$  são, respectivamente, a aceleração e a velocidade angular do referencial com respeito a algum referencial inercial. Para o caso de um referencial na superfície terrestre,  $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$ , e, como  $\Omega \ll 1$ , o último termo da equação — responsável pela força inercial centrífuga — é desprezível. Por fim, somando a força de arrasto aerodinâmico  $\mathbf{F}_d = -\alpha \dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}$ , a Equação 1 fica

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\alpha}{m} \dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} \quad (2)$$

Tomando o sistema cartesiano de coordenadas  $(x, y, z) = (e, n, z)$ , sendo  $\hat{\mathbf{e}}$  orientado na direção leste, o potencial para pontos nas proximidades da superfície é  $U = mgz$ . A velocidade angular em termos da latitude  $\lambda$  do referencial é

$$\mathbf{\Omega} = \omega \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{bmatrix} \implies 2\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega} = 2\omega \begin{bmatrix} \dot{n} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda \\ -\dot{e} \sin \lambda \\ \dot{e} \cos \lambda \end{bmatrix}$$

e a Equação 2 é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= 2\omega(\dot{n} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda) - \frac{\alpha}{m} \dot{e} \sqrt{\dot{e}^2 + \dot{n}^2 + \dot{z}^2} \\ \ddot{n} &= -2\omega \dot{e} \sin \lambda - \frac{\alpha}{m} \dot{n} \sqrt{\dot{e}^2 + \dot{n}^2 + \dot{z}^2} \\ \ddot{z} &= 2\omega \dot{e} \cos \lambda - \frac{\alpha}{m} \dot{z} \sqrt{\dot{e}^2 + \dot{n}^2 + \dot{z}^2} - mg. \end{aligned}$$

Fazendo  $\dot{e} = \epsilon$ ,  $\dot{n} = \eta$  e  $\dot{z} = \zeta$ , o problema se resume a resolver dois sistemas de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= 2\omega(\eta \sin \lambda - \zeta \cos \lambda) - \frac{\alpha}{m} \epsilon \sqrt{\epsilon^2 + \eta^2 + \zeta^2} \\ \dot{\eta} &= -2\omega \epsilon \sin \lambda - \frac{\alpha}{m} \eta \sqrt{\epsilon^2 + \eta^2 + \zeta^2} \\ \dot{\zeta} &= 2\omega \epsilon \cos \lambda - \frac{\alpha}{m} \zeta \sqrt{\epsilon^2 + \eta^2 + \zeta^2} - mg, \end{aligned}$$

o que pode ser feito facilmente usando o método de Euler explícito. Pela equação da força de arrasto aerodinâmico,

$$\alpha = \frac{1}{2} \rho A C_d,$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido na qual o projétil se move,  $A$  é a área de sua secção transversal, e  $C_d$  é o coeficiente de arrasto, que pode ser obtido experimentalmente para diferentes tipos de projéteis. As soluções obtidas para uma esfera de aço com 2,5 cm de raio e para um projétil .50 BMG se encontram nas Figuras 2-7.

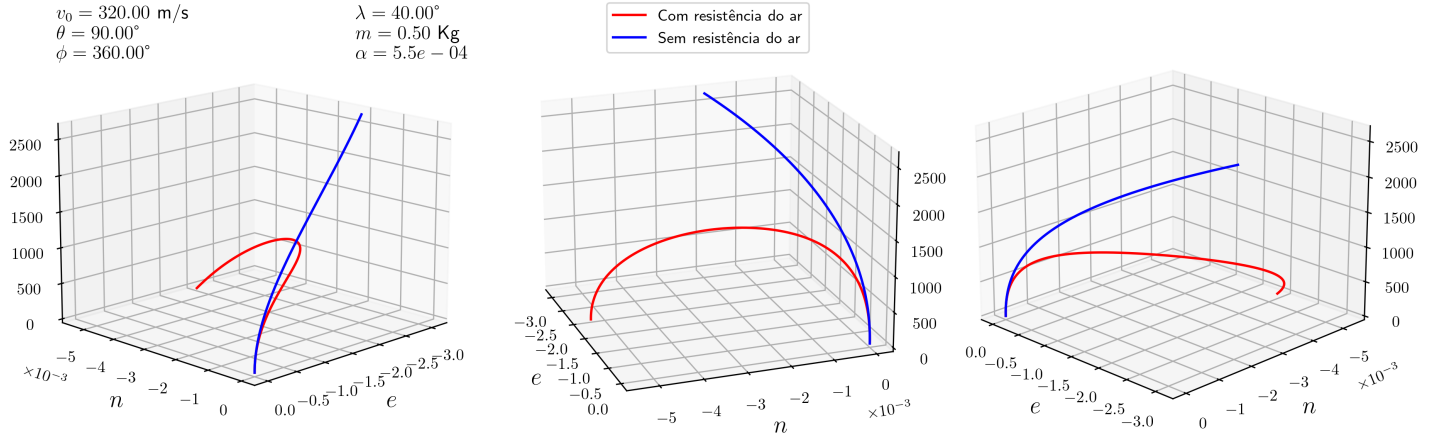


Figura 2: Aproximação da trajetória de um projétil .50 BMG, com  $C_d = 0,3$ ,  $A = 158,4 \text{ mm}^2$ ,  $v_0 = 2,6 \text{ Mach}$ ,  $m = 42 \text{ g}$ . O disparo é feito para cima, atingindo uma altura máxima de 950 metros. Graças ao efeito de Coriolis, o projétil atinge o solo em um ponto 52,2 metros distante da posição de disparo após 51 segundos com uma velocidade vertical terminal de 120,1 m/s.

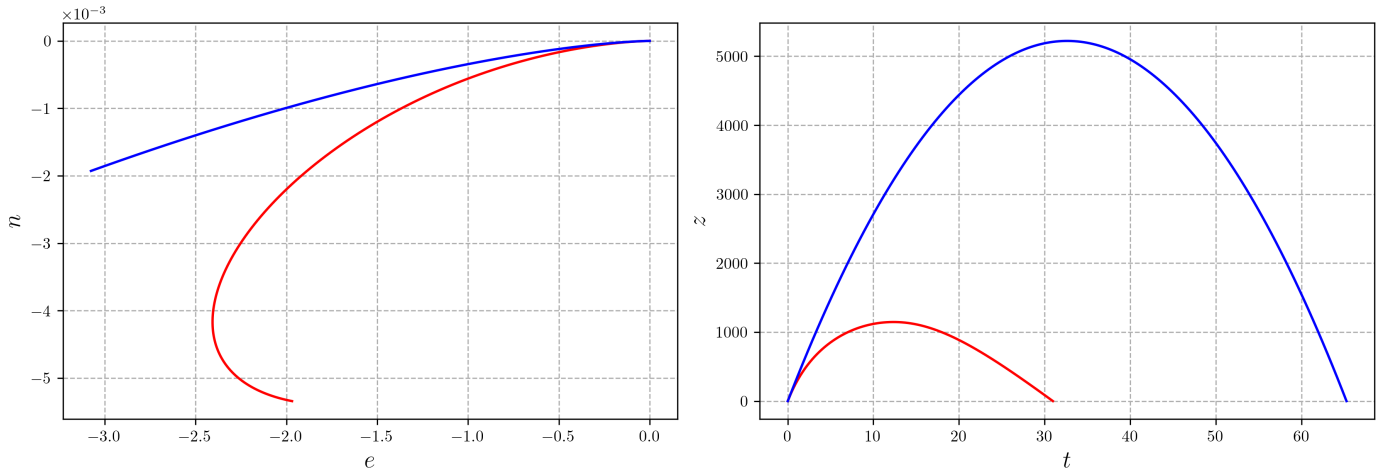


Figura 3: Posição do projétil .50 BMG durante seu voo. No gráfico de  $n(e)$  podemos ver claramente o efeito Coriolis em ação, já que na ausência deste, a projeção da trajetória sobre o solo coincidiria sempre à posição de disparo. No gráfico de  $z(t)$  fica claro também o efeito da resistência do ar: o tempo de subida do projétil se torna menor do que o tempo de descida, o que não seria verdade se a atmosfera fosse desconsiderada.

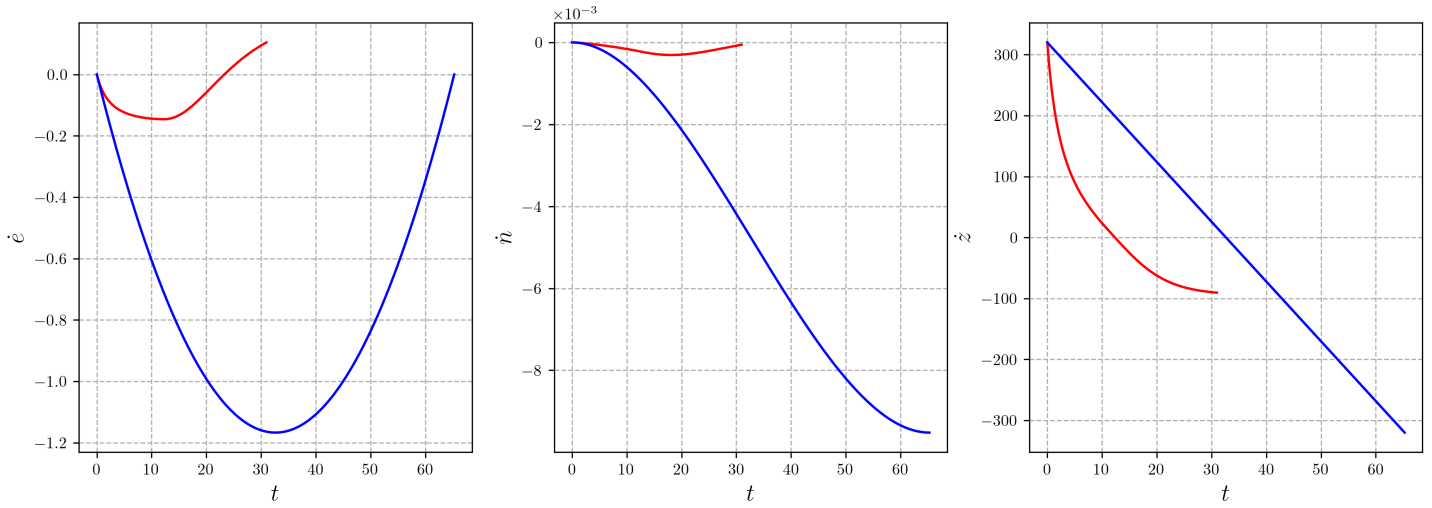


Figura 4: Velocidade do projétil .50 BMG durante seu voo. No gráfico de  $v_z(t)$  podemos observar o impacto da resistência do ar na trajetória. A assíntota horizontal corresponde à velocidade terminal de um projétil desse tipo, que na simulação foi de 120,1 m/s.

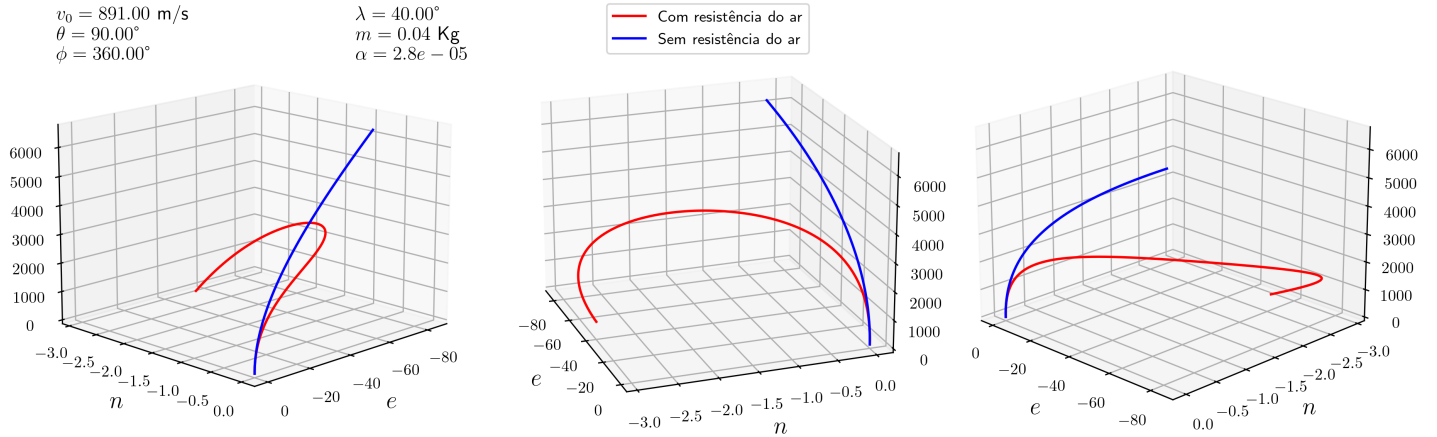


Figura 5: Aproximação da trajetória de um projétil .50 BMG, com  $C_d = 0,3$ ,  $A = 158,4 \text{ mm}^2$ ,  $v_0 = 2,6 \text{ Mach}$ ,  $m = 42 \text{ g}$ . O disparo é feito para cima, atingindo uma altura máxima de 950 metros. Graças ao efeito de Coriolis, o projétil atinge o solo em um ponto 52,2 metros distante da posição de disparo após 51 segundos com uma velocidade vertical terminal de 120,1 m/s.

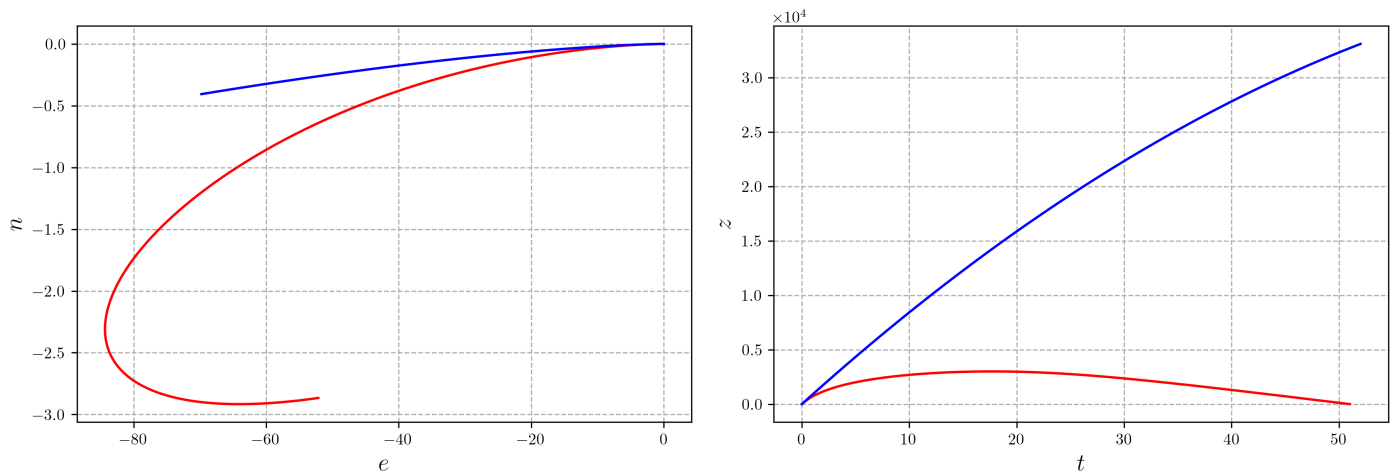


Figura 6: Posição do projétil .50 BMG durante seu voo. No gráfico de  $n(e)$  podemos ver claramente o efeito Coriolis em ação, já que na ausência deste, a projeção da trajetória sobre o solo coincidiria sempre à posição de disparo. No gráfico de  $z(t)$  fica claro também o efeito da resistência do ar: o tempo de subida do projétil se torna menor do que o tempo de descida, o que não seria verdade se a atmosfera fosse desconsiderada.

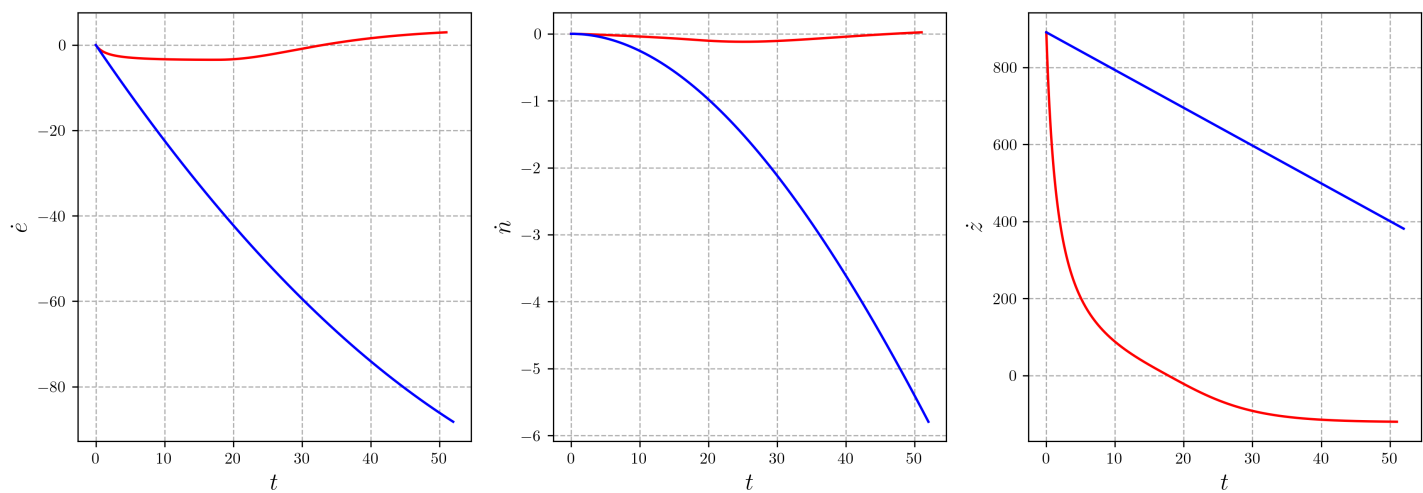


Figura 7: Velocidade do projétil .50 BMG durante seu voo. No gráfico de  $v_z(t)$  podemos observar o impacto da resistência do ar na trajetória. A assíntota horizontal corresponde à velocidade terminal de um projétil desse tipo, que na simulação foi de 120,1 m/s.