Афинни операции с вектори:

1. Умножение на вектор с число:
   За $\lambda \in \mathbb{R}$ векторът $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ има дължина $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$ и посока $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ за $\lambda > 0$ и противоположна посока $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $\lambda < 0$. За $\lambda = -1$ получаваме:
   $$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad -\vec{a} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$
2. Събиране на вектори: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
3. Нека т.A, B, O са произволни и т.M е среда на AB тогава е изпълнено $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$
4. Ако $M(x_1, x_2, x_3), N(y_1, y_2, y_3)$, то
   $$\overrightarrow{NM}(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$$
5. Ако $A(x_1, x_2, x_3), B(y_1, y_2, y_3)$, то средата M на отсечката AB има координати:
   $$M\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \frac{x_3 + y_3}{2}\right)$$
6. Ако $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$, $C(z_1, z_2, z_3)$, то медицентърът M на $\triangle ABC$ има координати:
   $$M\left(\frac{x_1 + y_1 + z_1}{3}, \frac{x_2 + y_2 + z_2}{3}, \frac{x_3 + y_3 + z_3}{3}\right)$$

Скаларно произведение:
Нека $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Тогава:

1. $< \vec{a}, \vec{b} >= |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle e(\vec{a}, \vec{b})$
2. $< \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{b}, \vec{a} >$
3. $< \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \vec{c} > + < \vec{b}, \vec{c} >$
4. $< \lambda\vec{a}, \vec{b} >= \lambda < \vec{a}, \vec{b} >$
5. $< \vec{a}, \vec{a} >= |\vec{a}|^2$
6. $< \vec{a}, \vec{b} >= 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$
7. $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{< \vec{a}, \vec{b} >}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
8. Ако $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то
   $$< \vec{a}, \vec{b} >= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Векторно произведение:
Нека $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Тогава $\vec{a} \times \vec{b}$ е единственият вектор удовлетворяващ условията:

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
2. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) \in S^+$

Свойства:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
3. $(\lambda\vec{a}) \times (\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a} \times \vec{b})$
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$
5. Лицето на успоредник, построен върху векторите $\vec{a}, \vec{b}$, взети с общо начало:
   $$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$
6. Лицето на триъгълник, построен върху векторите $\vec{a}, \vec{b}$, взети с общо начало:
   $$S = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$$
7. $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
8. $< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} >=< \vec{a}, \vec{a} >< \vec{b}, \vec{b} > - < \vec{a}, \vec{b} >^2$
9. Ако $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то
   $$\vec{a} \times \vec{b} \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Двойно векторно произведение:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} =< \vec{a}, \vec{c} > \vec{b} - < \vec{b}, \vec{c} > \vec{a}$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) =< \vec{a}, \vec{c} > \vec{b} - < \vec{a}, \vec{b} > \vec{c}$

Смесено произведение:
Смесено произведение на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ наричаме числото $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} >$

Свойства:

1. $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= 0 \iff \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ са компланарни
2. $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} >=< \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} >$
3. $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= - < \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} >= - < \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} >=$
   $= - < \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} >$
4. $< \vec{a_1} + \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a_1}, \vec{b}, \vec{c} > + < \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c} >$
5. $< \lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c} >=$
   $= \lambda < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$
6. Обема на паралелепипед, построен върху векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взети с общо начало:
   $$V = | < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > |$$
7. Обем на тетраедър, построен върху векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взети с общо начало:
   $$V = \frac{| < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > |}{6}$$
8. Ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то
   $$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
9. $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >^2 = \begin{vmatrix} < \vec{a}, \vec{a} > & < \vec{a}, \vec{b} > & < \vec{a}, \vec{c} > \\ < \vec{b}, \vec{a} > & < \vec{b}, \vec{b} > & < \vec{b}, \vec{c} > \\ < \vec{c}, \vec{a} > & < \vec{c}, \vec{b} > & < \vec{c}, \vec{c} > \end{vmatrix}$

Смяна на координати:
Нека имам $K = O_{\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}}$ и $K = O'_{\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'}$

Формула за смяна на координати на точка:

$$x = s + Tx'$$

x - координати на точка M (произволна) спрямо K
s - координати на началото O' на K' спрямо K
T - матрица на прехода от K' в K
x' - координати на точка M спрямо K'

Формула за смяна на координати на вектор:

$$v = Tv'$$

v - координати на вектор $\vec{v}$ (произволен) спрямо K
T - матрица на прехода от K' в K
v' - координати на вектор $\vec{v}$ спрямо K'

Права в равнина: Уравнение от вида $Ax + By + C = 0$ наричаме общо уравнение на права в равнина. Нека $g : Ax + By + C = 0$. Тогава:

1. Вектора $\vec{p}(-B, A)$ е колинеарен с правата g ($\vec{p} \parallel g$)
2. Вектора $\vec{N_g}(A, B)$ е перпендикулярен на правата g ($\vec{N_g} \perp g$)
3. Правата $m \parallel g \iff m : Ax + By + C_1 = 0$
4. Правата $h \perp g \iff h : -Bx + Ay + C_2 = 0$
5. Уравнение от вида $\dfrac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$ наричаме нормално уравнение на правата g
6. Нека $M(x_1, y_1)$, разстояние от точката M до правата g се намира по формулата:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Нека $g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогава ъглополовящите b_1, b_2 на правите g_1 и g_2 имат уравнения:

$$b_1, b_2 : \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

Ако $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, то общото уравнение на правата l минаваща през точките A и B се намира чрез една от детерминантите:

$$l : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$l : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Права и равнина в пространството:
Уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ наричаме общо уравнение на равнина в пространството.
Нека $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава:

1. Вектора $\vec{p}(v_1, v_2, v_3)$ е колинеарен с равнината $\pi \iff Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$
2. Вектора $\vec{N_g}(A, B, C)$ е перпендикулярен на равнината π ($\vec{N_g} \perp \pi$)
3. Уравнение от вида $\dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ наричаме нормално уравнение на равнината π
4. Нека $M(x_1, y_1, z_1)$, разстояние от точката M до равнината g се намира по формулата:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Нека:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогава ъглополовящите равнини b_1, b_2 на равнините π_1 и π_2 имат уравнения:

$$b_1, b_2 : \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0$$

Ако $A(x_1, y_1, z_1), \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, то общото уравнение на равнина π определена чрез точката A и векторите $\vec{v}$ и $\vec{u}$ се намира чрез детерминантата:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ако $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$, то общото уравнение на равнина π минаваща през точките A, B и C се намира чрез детерминантата:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Права в пространството:

1. Ако $A(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, то параметрично уравнение на права g в пространството, определена от точката A и вектор $\vec{v}$ се представя:

$$g : \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases}$$

   Ако $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, то параметрично уравнение на права g в пространството, минаваща през точките A и B се представя:

$$g : \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}$$

   Където векторът с координати $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ е колинеарен с правата g.

2. Правата g може да се представи като пресечница на две равнини:

$$g : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Конични сечения:

1. Канонично уравнение на елипса наричаме уравнение от вида $c : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. При $a > b$ фокусите имат координати:

$$F_1(\sqrt{a^2 - b^2}, 0),$$
$$F_2(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

   При $a < b$ фокусите имат координати:

$$F_1\left(0, \sqrt{b^2 - a^2}\right),$$
$$F_2\left(0, -\sqrt{b^2 - a^2}\right)$$

   Директрисите на елипса имат уравнение:

$$x = \pm\frac{a^2}{c}$$

   Допирателна към елипса в точка $P(x_0, y_0)$:

$$t : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

2. Канонично уравнение на хипербола наричаме уравнение от вида $c : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусите имат координати:

$$F_1\left(\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right),$$
$$F_2\left(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right)$$

   Директрисите на хипербола имат уравнение:

$$d_{1,2} : x = \pm\frac{a^2}{c}$$

   Допирателна към хипербола в точка $P(x_0, y_0)$:

$$t : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

3. Канонично уравнение на парабола наричаме уравнение от вида $c : y^2 = 2px$. Фокусът имат координати:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

   Директрисата на параболата имат уравнение:

$$d : x = -\frac{p}{2}$$

   Допирателна към параболата в точка $P(x_0, y_0)$:

$$t : yy_0 = p(x + x_0)$$

Крива от 2-ра степен в хомогенни координати: Нека е дадена кривата

$$c : F(M) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t$$

Тогава:

$$\begin{cases} F_1(M) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t \\ F_2(M) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}t \\ F_3(M) = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}t \end{cases}$$

Поляра на точката $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ще наричаме правата $\pi(P_0)$.

$$\pi(P_0) : F_1(P_0)x + F_2(P_0)y + F_3(P_0)t = 0$$

Полюс на правата $g : ax + by + ct = 0$ ще наричаме точката $Q_1(x_1, y_1, z_1)$ изпълняваща:

$$\begin{cases} F_1(Q_1) = ka \\ F_2(Q_1) = kb \\ F_3(Q_1) = kc \end{cases}$$

1. Точките P и Q са спрегнати $\iff$ $P \in \pi(Q)$ и $Q \in \pi(P)$.
2. Ако $P_0 \in c \Rightarrow \pi(P_0)$ е допирателна към c в точка P_0.
3. Безкрайните точки на кривата c са точки, които лежат едновременно на кривата и безкрайната права $\omega : t = 0$. ($c \cap \omega = Q \Rightarrow Q$ е безкрайна точка)
4. Асимптота наричаме допирателна към кривата c в безкрайна точка.
5. Център на кривата c наричаме полюса на безкрайната права $\omega : t = 0$.
6. Нека V е безкрайна точка в равнината. Тогава $\pi(V)$ е диаметър. Всеки диаметър минава през центъра на кривата.