M2 CSSI EDP hyperboliques TP2

S1

Résolution numérique du système de Saint-Venant

1. Calculer numériquement au moyen du solveur de Riemann exact fourni la solution du problème de Riemann pour le modèle de Saint-Venant

$$\begin{aligned} \partial_t w + \partial_x f(w) &= 0 \\ w = (h, hu) & \\ f(w) = (hu, hu^2 + gh^2/2) &\quad , \quad g = 9.81 m/s^2 \\ u(x,0) &= 0 \\ h(x,0) &= \begin{cases} h_L = 2 \text{ si } x < 0, \\ h_R = 1 \text{ si } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Programmer le schéma de Godunov. Vérifier votre programmation au moyen du cas test ci-dessus. On réalisera le programme en Python. Pour des raisons de performances, le solveur de Riemann sera écrit en C. Il faut donc appeler une fonction C à partir de Python. Un exemple (programme réalisé par Matthieu Boileau) peut être téléchargé à : https://git.unistra.fr/m.boileau/phypso
3. On considère un bassin $[-10, 10]$ fermé. Le bassin est séparé en deux parties égales grâce à une paroi situé en $x = 0$. à l'instant $t = 0$, la partie gauche (respt. droite) est remplie avec de l'eau immobile à une hauteur h_L (respt. h_R). à l'instant $t = 0$, on retire la paroi. écrire et justifier la condition aux limites que vous devez imposer en $x = -10$ et $x = 10$. Que devient cette condition si le bassin est infini ?
4. Calculer l'évolution de la surface d'eau au cours du temps. On représentera h et u à divers instants pour diverses finesses de maillage. Comparer avec la solution exacte du problème de Riemann et expliquer pourquoi les deux solutions diffèrent à partir d'un certain instant que l'on calculera.
5. Décrire le schéma de Rusanov, le programmer et le tester sur le même cas que ci-dessus. Vérifier numériquement que sa précision est moins bonne que celle du schéma de Godunov mais qu'il est beaucoup plus rapide.
6. Décrire le schéma VFRoe en variables $Y = (h, u)$. Calculer le flux numérique.
7. Programmer ce schéma, vérifier qu'il ne donne pas toujours la bonne solution (choisir un problème de Riemann associé à une onde de détente qui traverse une valeur propre nulle. Dans cette détente, $u + 2\sqrt{gh}$ est constant et l'onde doit contenir un point où $\lambda_1 = u - \sqrt{gh} = 0$).
8. Programmer la correction entropique qui utilise le flux de Rusanov aux points "soniques" (c'est à dire les points où la vitesse du "son" $c = \sqrt{gh}$ est égale à $\pm u$). Voir l'explication de (`http://www-irma.u-strasbg.fr/~helluy/PHYP/entropy-fix.pdf`).
9. Comparer le schéma ainsi corrigé avec le schéma Godunov en terme de précision et de temps de calcul.
10. Calculer le flux de Roe. voir
`http://www.ciemat.es/sweb/comfos/personal/uhlmann/reports_comp/shallow/report.html`
Programmer et tester le schéma de Roe. Vérifier qu'il a besoin lui aussi d'une correction entropique. Tester le schéma de Roe avec correction entropique.
11. Programmer la méthode MUSCL pour le schéma VFRoe sans correction entropique avec intégration en temps de RK2. Vérifier numériquement que la correction entropique n'est plus nécessaire.