

N° d'ordre :

École Doctorale Mathématiques, Sciences de
l'Information et de l'Ingénieur

UdS – INSA – ENGEEES

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Strasbourg
Discipline : Sciences pour l'Ingénieur
(spécialité Mécanique des Fluides)

par

Rabih Ghostine

**Contribution à la résolution numérique des équations de
Barré de Saint Venant bidimensionnelles par une méthode
de type éléments finis discontinus : application à la
simulation des écoulements au sein
des carrefours dans la ville**

Soutenue publiquement le 04 Novembre 2009

Membres du jury

Directeur de thèse : M. Abdellah Ghenaim, professeur, INSA Strasbourg

Rapporteur externe : M. Bernard Chocat, professeur, INSA Lyon

Rapporteur externe : M. Vincent Guinot, professeur, Université de Montpellier 2

Examineur : M. Robert Mose, professeur, ENGEEES-IMFS

Examineur : M. José Vazquez, Maître de Conférences, ENGEEES-IMFS

Examineur : Mme Caroline Grégoire, Ingénieur Divisionnaire de
l'Agriculture et de l'Environnement, ENGEEES-LHYGES

Tables des matières

Remerciements	7
Résumé	8
Abstract	10
Abréviations et notations principales	11
1. Introduction générale	15
1.1 Le problème physique pratique à résoudre	16
1.2 Le modèle mathématique	17
1.3 La méthode numérique	19
1.4 Plan de la thèse	20
1.5 Liste synoptique des publications	23
2. Les équations des écoulements à surface libre	27
2.1 Etablissement des équations bidimensionnelles	28
2.1.1 Forme conservative	34
2.1.2 Formule de frottement utilisée	37
2.1.3 Formule de diffusion turbulente utilisée	37
2.2 Etablissement des équations unidimensionnelles	38
2.2.1 Intégration de lois d'ouvrages	41
2.3 Conclusion	41
3. Présentation des méthodes de discrétisation numérique : la méthode des volumes finis	43
3.1 La méthode des volumes finis	44

3.1.1 Synthèse bibliographique	45
3.1.2 Discrétisation spatiale volume fini	46
3.1.3 Problème de Riemann associé au système de Barré de Saint Venant	48
3.1.4 Les solveurs de Riemann	48
3.1.5 Schéma du second ordre	51
3.1.6 Limitation de pente	55
3.1.7 Discrétisation temporelle	56
3.1.8 Stabilité du schéma	56
3.1.9 Conditions aux limites	57
3.2 Conclusion	60
4. Présentation des méthodes de discrétisation numérique : la méthode des éléments finis discontinus à discrétisation temporelle de Runge Kutta (RKDG)	61
4.1 Approximation numérique	63
4.1.1 Discrétisation en espace	64
4.1.2 Discrétisation temporelle	69
4.2 Limitation de pente	70
4.2.1 Limiteur de Cockburn et Shu	72
4.2.2 Limiteur de Hoteit et al.	75
4.2.3 Limiteur de pente modifié	76
4.3 Choix du limiteur de pente	77
4.4 Conclusion	78
5. Comparaison des méthodes numériques sur des problèmes hydrauliques stationnaires et transitoires	79
5.1 Problème du barrage idéal	81
5.2 Rupture partielle d'un barrage	85
5.3 Ressaut hydraulique oblique	89
5.4 Rupture d'un barrage dans un canal convergent divergent	91
5.5 Ecoulement dans un canal à lit concave	94

5.6 Ecoulement fluvial dans un canal convergent divergent	96
5.7 Ecoulement mixte et torrentiel dans un canal convergent	99
5.8 Conclusion	103
6. Synthèse bibliographique sur les jonctions	104
6.1 Etude bibliographique	105
6.1.1 Confluence fluvial	105
6.1.2 Confluence torrentielle	108
6.1.3 Confluence transcritique	111
6.1.4 Bifurcation	111
6.5 Conclusion	114
7. Simulation numérique des confluences	115
7.1 Types d'écoulements dans une confluence	117
7.2 Modélisation unidimensionnelle	118
7.2.1 Couplage dans le cas d'une confluence	119
7.3 Résultats numériques et discussion	122
7.3.1 Confluence fluvial	123
7.3.2 Confluence transcritique	131
7.3.3 Confluence torrentielle	136
7.4 Conclusion	140
8. Simulation numérique à travers les bifurcations	143
8.1 Le modèle mathématique 1D	144
8.2 Evaluation et discussion	146
8.2.1 Ecoulement torrentiel	149
8.2.2 Ecoulement transcritique	153
8.2.3 Ecoulement fluvial	156
8.3 Conclusion	159
9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours	161
9.1 Description de l'étude expérimentale	164

9.2 Description des types d'écoulement	167
9.3 Données expérimentales disponible	170
9.4 Qualité de prédiction de la répartition des débits dans les branches aval du carrefour	174
9.5 Capacités de la méthode RKDG à calculer les champs de hauteur d'eau mesurée	178
9.6 Conclusion	184
Conclusion générale et perspectives	186
Les annexes	189
A.1 La méthodes des caractéristiques	190
A.2 Les modèles de jonctions	194
Références	202
Les publications	213

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus chaleureux remerciements à monsieur Abdellah GHENAIM qui m'a proposé ce sujet de thèse et m'a accompagné tout au long de sa réalisation avec beaucoup d'intérêt et de disponibilité.

Je voudrais également remercier monsieur Antoine SADOWSKY de m'avoir accueilli dans son laboratoire, et pour toutes les discussions constructives dans le domaine.

Je tiens à présenter toute ma gratitude à monsieur Robert MOSE pour son aide scientifique. Je voudrais aussi remercier monsieur José VAZQUEZ pour ses conseils très constructifs aussi bien sur le plan scientifique qu'humain.

Je remercie madame Caroline GREGOIRE d'avoir répondu à mes questions avec beaucoup de disponibilité et de gentillesse.

Je remercie monsieur Nicolas RIVIERE et monsieur Emmanuel MIGNOT de l'INSA de Lyon de m'avoir fourni plusieurs résultats expérimentaux qui ont été indispensable pour mon travail.

Je remercie monsieur Bernard CHOCAT et monsieur Vincent GUINOT d'avoir accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs, et je remercie également les autres membres du jury.

Je voudrais également remercier ma famille, qui malgré l'éloignement géographique, m'a toujours apporté son soutien.

Je tiens également à exprimer toute mon amitié à toute l'équipe du laboratoire SHU (anciens et nouveaux), sans oublier mes amis à Strasbourg et au Liban.

Résumé

L'objectif scientifique de ce travail de thèse est la gestion hydraulique de l'inondation dans la ville. La maîtrise des volumes et hauteurs générés par les événements pluvieux passe par une connaissance fine des carrefours. En effet, les débits vont se distribuer au sein de la ville à travers ces nœuds. Le travail concerne tout particulièrement l'étude de la résolution numérique des équations bidimensionnelles de l'hydraulique à surface libre (équations de Barré de Saint Venant).

L'outil privilégié pour répondre aux demandes des services techniques des agglomérations est la simulation numérique, seul outil permettant de faire des prévisions pour des événements exceptionnels. L'objectif est ainsi de mettre au point un outil de simulation robuste permettant de faire des choix en fonction d'objectifs. Le schéma numérique considéré est de type éléments finis discontinus de Galerkin associés à une limitation de pente. Le travail vise tout particulièrement à mettre en œuvre ce type de schéma et à étudier la robustesse et la stabilité de ce nouveau schéma de discrétisation notamment lors de l'utilisation de maillage non-structuré des carrefours de la ville à partir d'éléments triangulaires.

Dans un premier temps, le schéma numérique est comparé favorablement par rapport à un schéma volume fini mis en œuvre avec les mêmes propriétés sur différents problèmes hydrauliques transitoire et stationnaire. Un banc d'essai numérique est effectué montrant l'intérêt du schéma développé.

Dans un deuxième temps, le schéma numérique est comparé par rapport à l'approche unidimensionnelle pour la prédiction des écoulements fluviaux, torrentiels et transcritiques à travers les jonctions.

Nous terminons ce mémoire en vérifiant les capacités du schéma numérique à simuler les écoulements qui se développent au sein des carrefours de la ville, dans les conditions expérimentales étudiées par Mignot et al. (2008b). Ainsi, les résultats prédits par le schéma numérique sont comparés avec les caractéristiques correspondantes des écoulements mesurés expérimentalement ainsi qu'avec les résultats prédits par la méthode des volumes finis 2D et un

logiciel basé sur la méthode des volumes finis pour la résolution des équations tridimensionnelles de Navier Stokes (FLUENT 3D).

Mots clés : Equations de Saint Venant ; Méthode des volumes finis ; Méthode discontinue de Galerkin ; Jonction des canaux ; Inondations urbaines.

Abstract

The scientific objective of this work of thesis is the hydraulic management of the flood in the city. The control of volumes and water depths generated by the rainy events passes by a fine knowledge of the crossroads. In fact, the flows will be distributed within the city through these nodes. The work concerns particularly the study of the numerical resolution of the two-dimensional equations of hydraulics at open channel (Saint Venant equations).

The tool privileged to answer to the requests of the engineering departments of the agglomerations is the numerical simulation, only tool making it possible to make forecasts for exceptional events. The objective is thus to develop a tool for simulation robust making it possible to make choices according to objectives. The considered numerical scheme is based on the discontinuous Galerkin finite elements method associated with a slope limitation. The work will aim particularly to implements this type of scheme and to study the robustness and the stability of this new scheme of discretization in particular during the use of unstructured mesh of the crossroads of the city starting from triangular element.

In the first time, the numerical scheme is favourably compared to a finite volume scheme implemented with the same properties on various hydraulic problems transient and steady. Numerical results of several flow problems show the interest of the developed method.

In the second time, the numerical scheme is compared to the one-dimensional approach for the prediction of the subcritical, supercritical and transcritical flows through the junctions.

We finish this memory by checking the capacities of the numerical scheme to simulate the flows which develop within the crossroads of the city, under the experimental conditions studied by Mignot et al. (2008b). Thus, the results predicted by the numerical scheme are then compared with the corresponding characteristics of the flows measured in experiments as well as with the results predicted by a 2D finite volume method and a software based on the finite volume method for the resolution of the three-dimensional equations of Navier stokes (FLUENT 3D).

Key words: Saint Venant equations; Finite volume method; Discontinuous Galerkin method; Open channel junction; Urban flooding.

Abréviations et notations principales

▪ *Liste des abréviations principales*

RKDG	Runge-Kutta Discontinuous Galerkin
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrich-Levy Condition
HLL	Harten Lax Van Leer Riemann solver
MUSCL	Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws
EDO	Equation Différentielle Ordinaire
TVB	Total Variation Bounded
TVD	Total Variation Diminishing
VF	Volume Fini

▪ *Liste des notations principales*

(a_1, a_2, a_3)	sommets du triangle
(a^1, a^2, a^3)	valeurs propres de la matrice jacobienne J_n
A	matrice de masse
A	section mouillée
b	centre de gravité du triangle
B	largeur du canal
c	célérité de l'onde
c_w	coefficient de forme du déversoir
C	constante de Chézy (frottement au fond)
C_d	coefficient de débit

C^+, C^-	lignes des caractéristiques
dl	longueur de l
(e^1, e^2, e^3)	vecteurs propres de la matrice jacobienne J_n
(E, F, G)	vecteurs flux
E_{QT}	estimateur de qualité de prédiction de répartition de débit
E_{QXY}	estimateur de qualité de prédiction des débits dans les branches aval
E_Y	estimateur de qualité de la prédiction de la hauteur d'eau
f	somme des forces extérieures
Fr	nombre de Froude
g	accélération de la pesanteur
h	hauteur d'eau
H	énergie spécifique
J_n	matrice jacobienne
k	degré du polynôme
k	ordre du schéma numérique
K_s	coefficient (de frottement au fond) de Strickler
l	côté de la maille
L	longueur du canal
m	fonction minmod
(m_1, m_2, m_3)	points milieux des arrêtes du triangle
\tilde{m}	fonction TVB minmod
n	vecteur normal unitaire
n_M	coefficient de Manning
n^*	nombre de parois déversantes
P	pression
P_e	périmètre mouillé
P^k	espace des polynômes de degré k

q	débit par unité de largeur
Q	débit
r	Distance entre les centres de gravité de deux mailles voisines
R	fonction résiduelle
R	invariant de Riemann
R_h	rayon hydraulique
S	vecteur source
(S_{fx}, S_{fy})	pentés énergétiques dans les deux directions x et y
(S_{0x}, S_{0y})	pentés du canal dans les deux directions x et y
t	coordonnée temporelle
T	tenseur de contrainte
T	triangle
u	en 2D, vitesse selon l'axe Ox en 3D, vecteur vitesse (de coordonnées u_i)
u_h	fonction linéaire
U	vecteur d'écoulement ou vecteur des variables (h, hu, hv)
v	vitesse selon l'axe Oy
V	espace des solutions
V_h^k	espace d'éléments finis discontinus
w	hauteur de la crête
W	poids de l'eau dans le volume de contrôle
W	variable adimensionnelle de hauteur de crête
(x, y)	coordonnée spatiale
x	variable adimensionnelle de distance suivant la longueur du déversoir
y	variable adimensionnelle de hauteur d'eau
z	cote de la surface libre
Z	cote du fond
α	coefficient de limitation de pente

α	facteurs de correction de l'énergie
$(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$	coefficients de pondération pour le schéma de Roe
β	coefficients de correction de la quantité du mouvement
δ_{ij}	symbole de Kronecker
δ	angle de jonction
θ	Angle associé au changement longitudinal de largeur
Δt	pas de temps
(Δ_x, Δ_y)	pas d'espaces dans les deux directions x et y
ν	viscosité
ν_t	Viscosité turbulente
ρ	Masse volumique de l'eau
φ	fonction test
ω_y	effet de la vitesse latérale et de sa direction
ω_ϕ	effet de l'entonnement du déversoir
Ω	domaine de calcul
Γ	bord du volume de contrôle

■ *Liste des indices principaux*

e	entrée du canal
d	Frontière aval de la jonction
L	frontière latérale de la jonction
L	A l'interface de 2 mailles, désigne la face gauche
n	Indice du temps discrétisé
R	A l'interface de 2 mailles, désigne la face droite
s	sortie du canal
u	frontière amont de la jonction

1

Introduction générale

La mécanique des fluides numérique ou CFD (Computational Fluid dynamics dans la terminologie anglo-saxonne) est un outil indispensable pour les ingénieurs hydrauliciens. Son utilisation permet d'obtenir des prévisions détaillées concernant l'écoulement au sein de cours d'eau dans différentes configurations, sans avoir la nécessité de prendre de nombreuses mesures de terrain, qui sont nécessairement coûteuses et gourmandes en temps. A une échelle globale, ce qui se produit dans les fleuves et les mers a un impact fondamental sur l'environnement et donc sur la société toute entière. Au sein de la communauté hydraulicienne, la plupart des applications en CFD sont concentrées sur l'évaluation des incidences environnementale de projets spécifiques. Les applications de l'hydraulique sont extrêmement diverses mais on peut dire que les applications typiques en hydraulique concernent des études impliquant les ruptures de barrage, les schémas visant la diminution des inondations, les prévisions morphologiques en milieu fluvial et côtier.

Le besoin d'un logiciel robuste et précis pouvant traiter les problèmes abordés par les ingénieurs hydrauliciens a conduit au développement de nombreux codes commerciaux de simulation numérique. Mais il existe encore de nombreux domaines où les techniques numériques rencontrent des difficultés lorsqu'elles sont appliquées aux problèmes des écoulements dans les canaux ou rivière à surface libre. Ainsi les géométries fortement irrégulières des fleuves peuvent conduire à des problèmes dans l'obtention d'une grille physique capable de représenter la structure de ceux-ci. L'occurrence de régions d'écoulement où apparaissent des ressauts hydrauliques liés à la transition d'un écoulement torrentiel à un autre fluvial, mène aussi à des

difficultés telles que de nombreuses méthodes numériques fournissent des résultats « pauvres » au voisinage de ces discontinuités ou même ne fournissent pas de solution du tout.

Un certain nombre de modèles numériques existent et conviennent pour la modélisation des écoulements dans les canaux à surface libre : ils s'étendent du modèle régi par les équations de Barré de Saint Venant 1D jusqu'au modèle régi par les équations de Navier Stokes 3D. Tous sont fondés sur les mêmes principes physiques fondamentaux (conservation de la masse, théorème des quantités de mouvement) et le choix le plus approprié dépendra du problème réel considéré et notamment de la nature des résultats attendus par l'étude. Dans notre travail de recherche, nous considérons le modèle de Barré de Saint Venant : bien que le modèle de Barré de Saint Venant soit relativement plus simple que celui de Navier Stokes, celui-ci permet d'obtenir suffisamment d'informations pour l'ingénieur hydraulicien de terrain.

Classiquement, pour la résolution des problèmes d'ingénierie, trois aspects doivent être pris en considération :

- a) le problème physique pratique à résoudre et le modèle physique associé,
- b) le modèle mathématique qui représente le problème à travers le système d'équations aux dérivées partielles,
- c) la méthode numérique pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

1.1. LE PROBLEME PHYSIQUE PRATIQUE A RESOUDRE

La gestion durable et la protection des ressources en eau est un des principaux problèmes du 21^{ème} siècle. Pendant de nombreuses années, la seule possibilité d'étudier ces phénomènes physiques était fondée sur des approches expérimentales, mais dans de nombreux cas, cette approche expérimentale est très difficile voire même impossible en raison de l'extension du domaine physique de l'étude considérée ou de l'impossibilité de reproduire les conditions réelles en laboratoire. Par ailleurs, les coûts financiers de l'approche expérimentale peuvent être très

élevés. Dans ces situations, les méthodes numériques représentent une véritable alternative pour prédire l'évolution de phénomènes physiques. L'approche de la simulation numérique appliquée à l'industrie ou l'ingénierie améliore l'efficacité de la production, et réduit le temps de conception technique et les coûts financiers. Cette approche fondée sur la simulation numérique est aussi utilisée par les institutions de service public pour créer des plans d'urgence ou des plans de prévention des risques en cas d'inondation par les cours d'eau, les tsunamis ou les ruptures du barrage.

Ma thématique de recherche porte ainsi sur la modélisation numérique des écoulements à surface libre appliquée à la propagation des inondations au sein des carrefours dans la ville et tout particulièrement sur le développement de schémas numériques robustes et stables.

1.2. LE MODELE MATHEMATIQUE

Nous nous intéressons ici à la résolution des équations de Barré de Saint Venant. Les équations non linéaires de Barré de Saint Venant régissent les écoulements à surface libre en eau peu profonde et sont déduites des équations de Navier Stokes, à l'aide de certaines hypothèses simplificatrices. Ecrites sous forme vectorielle conservative, ces équations (Barré de Saint Venant) représentent un modèle mathématique d'une extrême importance qui permet de prévoir le comportement de l'écoulement dans les réseaux hydrauliques naturel ou artificiel, et dans de nombreuses autres applications comme le domaine maritime, les avalanches de neige, la climatologie, la météorologie...

Dans le contexte de la modélisation des inondations dans les réseaux d'assainissement et le calcul d'ouvrages en milieu urbain, la simulation de dispositifs hydrauliques peut être traitée avec différentes approches :

- Soit par une approche unidimensionnelle dans les branches couplée à des formulations analytiques de nature semi-empiriques permettant de traiter les

jonctions. Cette méthodologie est généralement accompagnée d'une phase expérimentale permettant de valider les relations semi-empiriques traitant la répartition des débits à la jonction.

- Soit par une approche complète bidimensionnelle des écoulements.
- Soit par une approche bidimensionnelle de l'écoulement dans la jonction en utilisant les équations de Barré de Saint Venant 2D couplée à une approche unidimensionnelle dans les branches.
- Soit par une approche tridimensionnelle de l'écoulement basée sur la résolution des équations de Navier Stokes.

Dans le cadre d'une simulation de l'inondation en milieu urbain étendu, l'approche tridimensionnelle est inenvisageable. Les ressources informatiques actuelles sont incompatibles avec de telles simulations. Elle ne peut être considérée qu'à une échelle très locale, comme par exemple un ouvrage spécifique du réseau.

Lorsque l'écoulement inondant les rues est en régime fluvial durant la totalité de l'événement, il semble (Garcia-Navarro et al., 1992) que le modèle unidimensionnel couplée à la solution semi-empirique de la jonction soit adapté à la simulation de l'événement. Le modèle unidimensionnel calculant l'écoulement dans les rues est alors simplement complété par deux équations valables aux carrefours des rues : une équation de conservation des débits entre les branches arrivant et partant de la jonction et une équation d'égalité des niveaux d'eau aux extrémités des branches bordant cette jonction. Par contre, si l'écoulement au sein du réseau de rues tend à passer en certains points en régime torrentiel, l'égalité des hauteurs d'eau n'est plus valide. On trouve alors dans la littérature (Hager 1989b ; Gurram et al., 1997 ; Hsu et al., 1989a et 1998b ; Shabayek et al., 2002 etc) des expressions plus complexes mais toujours semi-empiriques permettant de traiter la jonction. Ces expressions découlent des équations de conservation de la masse et de continuité de la charge utilisant un coefficient empirique de perte de charge dans la jonction à caler en

fonction de l'urbanisme local. Dans ce cas, on voit qu'il est nécessaire de caler un coefficient qui limite ainsi l'opérationnalité de la méthodologie et par la même occasion, on voit l'intérêt de l'approche 2D de la jonction, qui est plus "universelle".

Dans ce travail, nous utilisons ainsi un modèle bidimensionnel résolvant les équations de Barré de Saint Venant. Les raisons de ce choix sont d'une part la possibilité de représenter les structures urbaines ou obstacles, explicitement présents au sein de la topographie de la zone urbaine, et d'autre part, la possibilité de calculer directement les écoulements dans les jonctions, ce qui ne nécessite plus d'équations supplémentaires. Par ailleurs, les résultats des calculs bidimensionnels sont plus précis et plus informatifs, et permettent d'établir des cartes de risque plus détaillées.

1.3. LA METHODE NUMERIQUE

Dans la conception de telles méthodes numériques nous nous trouvons face à, au moins, trois difficultés majeures :

- a) la conservation, une condition essentielle et obligatoire de façon que la présence des discontinuités hydrauliques soit prise en compte automatiquement dans la solution,
- b) la non génération d'oscillations parasites aux voisinages des forts gradients,
- c) le traitement convenable des termes sources afin de préserver la haute précision du modèle numérique dans la résolution des problèmes impliquant des termes sources pouvant admettre essentiellement des fonctions non différentiables (comme par exemple un lit irrégulier).

Quel que soit la nature de la méthode numérique développée, chacune de ces difficultés est, à elle seule, difficile à résoudre ; la résolution simultanée des trois difficultés évoquées ci-dessus est une tâche redoutable dans l'analyse numérique de lois de conservation hyperbolique. A l'heure actuelle, il existe plusieurs approches pour la construction de schémas numériques qui tentent de surmonter ces difficultés. La classe des méthodes numériques de type Godunov (1959) est souvent considérée comme une des plus efficaces. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes

intéressés à la conception d'un schéma numérique utilisant l'approximation spatiale de type élément fini de Galerkin couplé à une discrétisation temporelle de Runge-Kutta. Ce schéma numérique sera désigné par l'acronyme RKDG (correspondant à Runge-Kutta Discontinuous Galerkin). Il conserve toutes les propriétés avantageuses des méthodes numériques de type Godunov (1959). Cette méthode résout les systèmes de type hyperboliques non linéaires avec terme source s'écrivant sous forme conservative et permet donc la capture des chocs dans le cadre de la solution numérique. Les méthodes RKDG sont conçues avec une procédure de limitation de pente qui permet d'éviter la génération de fausses oscillations aux voisinages des forts gradients. Ainsi, l'avantage essentiel de ce type de méthodes numériques est qu'elles mènent à un résultat numérique de bonne qualité avec moins d'effort informatique dans le traitement des termes sources et avec un nombre de cellules de calcul plus réduit que les autres classes traditionnelles de schémas numériques (Zhou et al., 2001). En outre, les approximations spatiales de type élément fini de Galerkin sont locales, et quel que soit l'ordre désiré de la méthode conçue, le schéma numérique ne recourt qu'aux informations des cellules de calcul voisines. Contrairement aux méthodes de type volume fini et différence fini, cette dernière propriété constitue un avantage essentiel dans le contexte de la programmation parallèle et dans les traitements des problèmes hydrauliques impliquant des conditions aux limites internes et externes.

1.4. PLAN DE LA THESE

Dans la suite de ce chapitre introductif, je vais préciser la structuration de ce travail.

Ainsi la première partie de cette recherche est orientée vers le développement de méthodes numériques. Le but de notre travail consiste à développer une méthode numérique d'ordre supérieur pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation englobant en particulier le système de Barré de Saint Venant.

La deuxième partie de ce travail est plus orientée vers l'aspect pratique (et sa déclinaison numérique associée) en génie hydraulique. En nous fondant sur une littérature récente en hydraulique, nous nous intéressons à la modélisation des inondations dans les milieux urbains. L'échelle de ce travail concerne l'échelle locale. Dans notre étude, nous avons limité notre spectre d'application aux réseaux admettant des jonctions simples de canaux (confluence, déffluence) et des croisements en croix.

Je vais maintenant détailler le plan de chacune des deux parties de ce travail.

Ainsi la première partie est abordée aux chapitres 2, 3 et 4 de ce mémoire. Au chapitre 2 sont présentées les équations de l'écoulement à surface libre. Nous nous intéressons aux équations de Barré de Saint Venant ainsi qu'à la formulation conservative de cette dernière. Nous commençons par indiquer comment à partir des équations de Navier Stokes, sont obtenues les équations de Barré de Saint Venant.

Au chapitre 3, nous présentons une méthode volume fini (VF) du second ordre en temps et en espace pour la résolution des équations de Barré de Saint Venant 2D. On détaille également les aspects mathématiques de cette méthode. Cette méthode a été choisie comme élément de comparaison pour le schéma numérique développé en éléments finis.

Le chapitre 4 expose une méthode éléments finis dite Galerkin Discontinue du second ordre pour la résolution du système de Barré de Saint Venant. Cette méthode utilise une approximation spatiale de type élément fini de Galerkin couplée à une discrétisation temporelle de type Runge-Kutta. Ce schéma numérique sera désigné par l'acronyme RKDG (correspondant à Runge-Kutta Discontinuous Galerkin). Nous présentons aussi dans ce chapitre une nouvelle formulation du limiteur de pente, qui consiste à limiter la solution aux points d'intégration de sorte que celle-ci soit « encadrée » par les solutions moyennes des cellules voisines, sans avoir recours à un coefficient « empirique » de limitation, qui est présent dans les limiteurs « habituels ».

La seconde partie de mon travail (dévolue aux aspects plus applicatifs) est abordée dans les chapitres 5, 6, 7, 8 et 9. Dans le chapitre 5, nous comparons les solutions obtenues par la méthode VF et celles obtenues par la méthode RKDG, du point de vue qualitatif et quantitatif. Les deux schémas sont mis en œuvre avec les mêmes techniques (même traitement des conditions aux limites, même limiteur de pente, même solveur de Riemann,...). Les deux schémas numériques sont validés à travers un banc d'essai numérique impliquant des problèmes stationnaires et transitoires avec des écoulements fluvial, torrentiel et mixte (tous possédant une solution de référence ou des résultats expérimentaux).

Dans le chapitre 6, nous présentons une synthèse bibliographique sur les écoulements à travers les jonctions (de type confluence ou bifurcation).

Dans le chapitre 7, nous présentons les problématiques de la modélisation 1D de la jonction et nous comparons les résultats obtenus par cette approche avec ceux obtenus par l'approche 2D. Des problèmes hydrauliques de confluence sont définis et simulés pour comparer les deux approches 1D et 2D et les résultats sont illustrés pour de nombreux choix d'angles de jonction et différents régimes hydrauliques.

Dans le chapitre 8, nous nous intéressons à la prédiction de la séparation de l'écoulement à travers une déffluence de canaux formant un angle de 90° . Pour la modélisation 1D, nous introduisons explicitement le modèle mathématique du seuil latéral dans le terme source de la forme conservative du système de Barré de Saint Venant 1D (la bifurcation de l'écoulement étant représentée en considérant une hauteur de crête nulle pour le modèle du déversoir latéral). Les comparaisons sont effectuées pour des bifurcations latérales en régime torrentiel, transcritique et fluvial.

Le chapitre 9 s'inscrit dans la problématique de la modélisation d'inondations urbaines au sein des carrefours. L'échelle de ce travail concerne l'échelle locale. Suite à l'établissement d'une typologie des inondations en ville, le choix des événements à étudier spécifiquement s'est porté sur les inondations violentes ayant lieu dans des carrefours. Les résultats obtenus par la méthode

VF, par la méthode RKDG ainsi que ceux obtenus à l'aide du logiciel FLUENT 3D (qui résout les équations de Navier Stokes tridimensionnelles) sont comparés avec les résultats expérimentaux de Mignot et al. (2008b).

Le mémoire s'achève par une conclusion sur les travaux effectués ainsi que sur une vision prospective des recherches numériques dans le domaine des écoulements à surface libre en milieu urbain.

Ce travail de recherche a débouché sur un certain nombre d'articles et présentations à divers colloques dont la liste synoptique est présentée ci-dessous.

1.5. LISTE SYNOPTIQUE DES PUBLICATIONS

Revue spécialisée à comité de lecture	9 (+3 soumis)
Colloques internationaux avec actes et présentation orale	6
Colloques sans acte ou à diffusion restreinte	1

Revue spécialisée à comité de lecture et ouvrages :

Ghostine R, Kesserwani G, Mose R, Vazquez J, Ghenaim A, Grégoire C. "A confrontation of 1D and 2D RKDG numerical simulation of transitional flow at open channel junction". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Accepted in **Novembre 2008**. DOI: 10.1002/fld.1977.

Ghostine R, Kesserwani G, Vazquez J, Nicolas R., Ghenaim A., Mose R., **2009**. "Simulation of supercritical flow in crossroads: confrontation of 2D and 3D numerical approaches to experimental results". **Computers and Fluids**, 38(2): 425–432.

Ghostine R, Kesserwani G, Mose R, Vazquez J, Ghenaim A, **2009**. “An improvement of classical slope limiters for high-order discontinuous Galerkin method”. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 59(4): 423–442.

Ghostine R, Kesserwani G, Vazquez J, Mose R, Ghenaim A, **2007**. “Simulation bidimensionnelle de l’écoulement à travers les jonctions”. **La Houille Blanche**, 5:107–112.

Ghostine R, Mose R, Vazquez J, Grégoire C, Ghenaim A. “Discontinuous Galerkin method for shallow water equations: comparison with finite volume method on sub- and supercritical flow”. Article soumis dans **Computers and Fluids**.

Ghostine R, Kesserwani G, Abdallah M, Mose R, Vazquez J, Rivière N. “Discontinuous Galerkin finite-element method for simulation of flood in crossroads”. Article soumis avec révision dans **Journal of Hydraulic Engineering**.

Ghostine R, Mose R, Vazquez J, Grégoire C, Ghenaim A. “Two-dimensional simulation of subcritical flow at a combining junction: luxury or necessity”. Article soumis avec révision dans **Journal of Hydraulic Engineering**.

Kesserwani G, **Ghostine R**, Vazquez J, Mose R, **2007**. “One Dimensional Free Surface flow Simulation by Means of a TVD numerical scheme with an Implicit and an Explicit Time Integrations”. **La Houille Blanche**, 5, 101–106.

Kesserwani G, **Ghostine R**, Vazquez J, Mose R, Abdallah M., Ghenaim A., **2008**. “Simulation of subcritical flow at open channel junction”. **Advances in Water Resources**, 31(2): 287–297.

Kesserwani G, **Ghostine R**, Vazquez J, Ghenaim A, Mose R, **2008**. “Application of a second order Runge-Kutta discontinuous Galerkin scheme for the shallow water equations with source terms”. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 56(7): 805–821.

Kesserwani G, **Ghostine R**, Vazquez J, Ghenaim A, Mose R, **2008**. “Riemann Solvers with Runge Kutta Discontinuous Galerkin schemes for the 1D Shallow Water Equations”. **Journal of Hydraulic Engineering**, 134(2): 243–255.

Kesserwani G, **Ghostine R**, Vazquez J, Ghenaim A, Mose R, **2008**. “One-dimensional simulation of supercritical flow at a confluence by means of a nonlinear junction model applied with the RKDG2 method”. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 57(12): 1695–1708.

Colloques internationaux avec actes (à comité de lecture)

Ghostine R, Kesserwani G, Vazquez J, Mose R, Ghenaim A. “Comparison of one and two dimensional simulation of subcritical flow through combining junction”. **32nd International congress of IAHR, Harmonizing the Demands of Art and Nature in Hydraulics**, Venice (Italy) July **2007**.

Ghostine R, Vazquez J, Ghenaim A, Kesserwani G, Mose R. “One and two dimensional simulation of subcritical flow at a combining junction”. **9th International Conference on Fluid Control, Measurements, and Visualization Integrating Technologies for Advancements in Fluid Applications for Multiple Scales**, Tallahassee, Florida (USA) September **2007**.

Ghostine R, Vazquez J, Ghenaim A, Kesserwani G, Mose R. “Discontinuous Galerkin finite-element method for simulation of flood in an urban area”. **Water down under 2008**, Adelaide (Australia) April **2008**.

Ghostine R, Kesserwani G, Vazquez J, Rivière N, Ghenaim A, Mose R. “Simulation of supercritical flow in crossroads: confrontation of a 2D and 3D numerical approaches to

experimental results”. **IV International Symposium on Transboundary Waters Management**, Thessaloniki (Greece) October **2008**.

Kesserwani G, **Ghostine R**, Vazquez J, Mose R, Ghenaim A. “RKDG2 scheme for the 1D open channel flow”. **Numerical Modelling of Hydrodynamics for Water Resources, International Workshop**, Zaragoza (Spain) June **2007**.

Kesserwani G, **Ghostine R**, Vazquez J, Ghenaim A, Mose R. “Simulation of subcritical flow at a combining junction”. **6^{ème} Conférence Internationale sur les techniques et stratégies durables pour la gestion des eaux urbaines par temps de pluie**, Lyon (France) June **2007**.

Colloque sans acte ou à diffusion restreinte

Ghostine R, Kesserwani G, Vazquez J, Mose R, Ghenaim A. “Simulation bidimensionnelle de l’écoulement à travers les jonctions”. **2^{ème} Journées Doctorales de l’Hydrologie Urbaine**, Nantes (France) Octobre **2006**.

2

Les équations des écoulements à surface libre

Les équations de Barré de Saint Venant 2D sont destinées à prédire l'évolution temporelle et spatiale d'un écoulement majoritairement bidimensionnel, c'est-à-dire dont les vitesses verticales sont faibles par rapport aux vitesses dans le plan horizontal. La principale simplification apportée dans les équations de Barré de Saint-Venant par rapport aux équations de Navier Stokes provient en effet de l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions dans l'écoulement. Cette hypothèse simplificatrice est valable pour des écoulements horizontaux sous certaines conditions que l'on supposera vérifiées dans l'ensemble des écoulements étudiés. Ces conditions sont des accélérations verticales faibles devant la pesanteur, des hauteurs d'eau grandes par rapport aux irrégularités du fond, des rayons de courbures des lignes de courant dans un plan horizontal importants, des faibles pentes de la surface libre et une vitesse supposée constante dans toute section verticale. Les équations de Barré de Saint Venant sont alors obtenues en intégrant sur la verticale les équations de Navier Stokes avec les hypothèses précédentes.

Je commencerai par indiquer comment, à partir des équations de Navier Stokes, sont obtenues les équations bidimensionnelles puis je détaillerai le passage de ces dernières équations aux équations unidimensionnelles.

2.1. ETABLISSEMENT DES EQUATIONS BIDIMENSIONNELLES

Dans toute l'étude, je considère que le seul fluide modélisé est de l'eau, autrement dit, je suppose que les matières contenues dans l'eau n'ont aucune influence sur l'écoulement. Dans ce cadre, les équations de base sont les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible (Versteeg et Malalasekera, 1995) :

$$\begin{cases} \text{div}(u) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u) \otimes u + \frac{1}{\rho} \text{grad}(P) = \nu \Delta u + f \end{cases} \quad (2.1)$$

où u est le vecteur vitesse, ρ est la masse volumique de l'eau, P est la pression, ν est la viscosité et f représente les forces extérieures (volumiques) qui, dans le cadre qui nous intéresse, d'un référentiel lié à la terre, peuvent être réduites à la force de pesanteur et la force de Coriolis. Compte tenu des relativement faibles vitesses du fluide (au maximum quelques m/s), nous négligeons aussi la force de Coriolis devant la pesanteur.

Le système d'équations (2.1) peut aussi s'écrire scalairement sous la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \nu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + f_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Lorsqu'on ne s'intéresse pas aux phénomènes de turbulence, on intègre les équations précédentes sur une échelle de temps microscopique correspondant aux fluctuations turbulentes afin de se ramener aux équations sur des valeurs moyennes. On obtient alors des équations de même type

2. Les équations des écoulements à surface libre

que les précédentes. Toutefois, il apparait des termes de turbulence à l'écoulement moyen ; on remplacera le terme $\nu \text{grad}(u)$ par $\nu \text{grad}(u) + \overline{u_b \otimes u_b}$ où u représente maintenant la valeur moyenne de la vitesse, u_b la fluctuation de vitesse turbulente par rapport à la moyenne et le signe " $\overline{\quad}$ " la moyenne obtenue par intégration sur l'échelle de la turbulence (on a donc $\overline{u_b} = 0$) ; cette somme peut être écrite sous la forme d'un tenseur de contraintes de termes T_{ij} (Paquier, 1995) d'où la nouvelle expression de (2.3) :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Les équations de base sont donc maintenant (2.2) et (2.4) où les variables sont des valeurs moyennes qui ne prennent plus en compte la turbulence, cette dernière apparaissant au second membre.

Les mouvements que nous cherchons à modéliser sont, en général, dans les problèmes d'hydraulique fluviale, horizontaux ce qui amène à simplifier la troisième équation (2.4). La simplification la plus couramment utilisée est l'hypothèse de pression hydrostatique qui consiste à négliger dans cette équation, l'ensemble des termes sauf la pression et la force de gravité. On obtient donc l'équation :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} = -g \quad \text{ce qui donne en intégrant : } P = P_0 - \rho g(x_3 - z) \quad \text{où } P_0 \text{ est la pression atmosphérique,}$$

g l'accélération de la pesanteur et z la cote de la surface libre.

Cette hypothèse de pression hydrostatique impose (Herouin, 1991) :

- des accélérations verticales faibles devant la pesanteur

2. Les équations des écoulements à surface libre

- des rayons de courbure verticaux des lignes de courant importants ce qui impose, en particulier, des rayons de courbures de l'écoulement dans un plan horizontal importants et des hauteurs d'eau grandes devant les aspérités du fond
- une faible pente de la surface libre.

Les termes $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$ dans les 2 équations (2.4) restantes s'écrivent alors $g \frac{\partial z}{\partial x_i}$.

L'intégration des équations ainsi obtenues sur la verticale (entre le fond de cote Z et la surface libre z) permet d'éliminer la vitesse verticale qui ne nous intéresse pas (Paquier, 1995). Pour une variable quelconque A , on posera $\bar{A} = \frac{1}{h} \int_Z^z A dx_3$ et on aura $\int_Z^z \frac{\partial A}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial(h\bar{A})}{\partial x_i} + A_f \frac{\partial Z}{\partial x_i} - A_s \frac{\partial z}{\partial x_i}$ (même type d'expression en remplaçant x_i par t) où A_f et A_s sont les valeurs de A respectivement au fond et à la surface libre. On remarque, en outre, que, en l'absence d'apports, la vitesse verticale au fond est égale à $\frac{\partial Z}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left(u_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} \right)_f$ (même type d'expression à la surface libre) et que la hauteur d'eau h est égale à $z - Z$. L'équation (2.2) devient alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial(h\bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

et (2.4) devient (pour $i = 1$ ou 2) :

$$h \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \left(\int_Z^z (u_i - \bar{u}_i)(u_{ji} - \bar{u}_j) dx_3 \right)}{\partial x_j} + gh \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{T_i}{\rho} \quad (2.6)$$

où T_i est l'expression suivante : $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial(h\bar{T}_{ij})}{\partial x_j} + \left(T_{i3} - \sum_{j=1}^2 T_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right)_s - \left(T_{i3} - \sum_{j=1}^2 T_{ij} \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right)_f$.

2. Les équations des écoulements à surface libre

Dans l'équation (2.6), quatre termes sont à expliciter :

- t1) le terme lié à la dispersion des vitesses sur la verticale $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \left(\int_Z^z (u_i - \bar{u}_i)(u_{ji} - \bar{u}_j) dx_3 \right)}{\partial x_j}$

est habituellement modélisé sous la forme de la somme de deux termes : $\frac{\partial (t_i h \bar{u}_i^2)}{\partial x_i}$ et

$$D_i \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \left(h \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}{\partial x_j} \text{ où } t_i \text{ et } D_i \text{ sont des coefficients constants dans le temps.}$$

- t2) le terme lié aux contraintes à l'intérieur du fluide (viscosité, turbulence) $\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial (h T_{ij})}{\partial x_j}$

est remplacé par un terme $D_i \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \left(h \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}{\partial x_j}$ où D_i est une constante dans le temps.

- t3) le terme de frottement au fond $-\frac{I}{\rho} \left(T_{i3} - \sum_{j=1}^2 T_{ij} \frac{\partial Z}{\partial x_j} \right)_f$ est classiquement remplacé par

une formule de type Chézy : $-g \bar{u}_i \frac{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^2 \bar{u}_j^2 \right)}}{C^2}$ où C est une constante dans le temps (ou est

égale à $K_s h^{1/6}$ où K_s est le coefficient dit de Strickler, constant dans le temps pour la formule Manning-Strickler).

2. Les équations des écoulements à surface libre

- t4) le terme de frottement à la surface $\frac{1}{\rho} \left(T_{i3} - \sum_{j=1}^2 T_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right)_s$ noté τ_w qui, lorsqu'il s'agit de l'action du vent, peut être estimé par différentes formules (Raspopin et Kovalyov, 1989 ; Falconer et al., 1991).

En écartant les cas où h est nul (car alors il n'y a pas d'écoulement), on effectue le changement de variables suivant $q_x = h\bar{u}_1$ et $q_y = h\bar{u}_2$ et les coordonnées horizontales sont renommées x et y . L'équation (2.5) s'écrit alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

et les équations (2.6) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} h \frac{\partial (q_x/h)}{\partial t} + q_x \frac{\partial (q_x/h)}{\partial x} + q_y \frac{\partial (q_x/h)}{\partial y} + \frac{\partial (t_1 q_x^2/h)}{\partial x} + gh \frac{\partial z}{\partial x} = \\ \quad (D_1 + D'_1) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial (q_x/h)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial (q_x/h)}{\partial y} \right) \right) - g q_x \frac{\sqrt{(q_x^2 + q_y^2)}}{C^2 h^2} + \tau_{w1} \\ \\ h \frac{\partial (q_y/h)}{\partial t} + q_x \frac{\partial (q_y/h)}{\partial x} + q_y \frac{\partial (q_y/h)}{\partial y} + \frac{\partial (t_2 q_y^2/h)}{\partial x} + gh \frac{\partial z}{\partial y} = \\ \quad (D_2 + D'_2) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial (q_y/h)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial (q_y/h)}{\partial y} \right) \right) - g q_y \frac{\sqrt{(q_x^2 + q_y^2)}}{C^2 h^2} + \tau_{w2} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Qui s'écriront, en ajoutant (2.7) multiplié par q_x/h (respectivement par q_y/h), en écrivant $D_1 + D'_1 = D_2 + D'_2 = D$ et en négligeant le coefficient t_i :

2. Les équations des écoulements à surface libre

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial(q_x^2/h)}{\partial x} + \frac{\partial(q_x q_y/h)}{\partial y} + gh \frac{\partial z}{\partial x} = \\ D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial(q_x/h)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial(q_x/h)}{\partial y} \right) \right) - g q_x \frac{\sqrt{(q_x^2 + q_y^2)}}{C^2 h^2} + \tau_{w1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial(q_x q_y/h)}{\partial x} + \frac{\partial(q_y^2/h)}{\partial y} + gh \frac{\partial z}{\partial y} = \\ D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial(q_y/h)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial(q_y/h)}{\partial y} \right) \right) - g q_y \frac{\sqrt{(q_x^2 + q_y^2)}}{C^2 h^2} + \tau_{w2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le second membre des équations (2.9) et (2.10) peut se trouver sous des expressions légèrement différentes en fonction des problèmes posés.

Les équations (2.7), (2.9) et (2.10) constituent la formulation la plus classique des équations de Barré de Saint-Venant bidimensionnelles (en concurrence avec une formulation équivalente faisant intervenir la hauteur et les vitesses). Dans ce mémoire, on utilise la formulation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -gh \frac{\partial z}{\partial x} + \\ v_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - gh \frac{n_M^2 u \sqrt{(u^2 + v^2)}}{h^{4/3}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

2. Les équations des écoulements à surface libre

$$\begin{aligned} \frac{\partial h v}{\partial t} + \frac{\partial (h u v)}{\partial x} + \frac{\partial (h v^2 + g h^2 / 2)}{\partial y} = -g h \frac{\partial z}{\partial y} + \\ \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial (v)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial (v)}{\partial y} \right) \right) - g h \frac{n_M^2 v \sqrt{(u^2 + v^2)}}{h^{4/3}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec (u, v) sont les composantes de la vitesse dans les deux directions x et y , respectivement, n_M est le coefficient de Manning et ν_t est la viscosité turbulente.

C'est la résolution de ce système d'équations qui sera étudiée dans les chapitres 3 et 4.

2.1.1. Forme conservative

Les équations de Barré de Saint-Venant (2.11)-(2.13) peuvent être réécrites sous la forme conservatrice suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla F = S \quad (2.14)$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \text{ le vecteur d'écoulement ou le vecteur des valeurs inconnues.}$$

$$F = (E, G) \text{ avec } E = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \text{ sont les vecteurs flux.}$$

2. Les équations des écoulements à surface libre

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) + \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) + \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial (v)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial (v)}{\partial y} \right) \right) \end{pmatrix} \text{ est le vecteur source.}$$

avec $S_{0x} = -\frac{\partial z}{\partial x}$ et $S_{0y} = -\frac{\partial z}{\partial y}$ sont les pentes du canal dans les deux directions x et y, respectivement, S_{fx} et S_{fy} sont les pentes énergétiques qui tiennent compte des frottements dans le canal. Elles sont données soit par la relation de Manning-Strickler :

$$S_{fx} = \frac{n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2.15)$$

soit par la relation de Chézy :

$$S_{fx} = \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{h C^2}, \quad S_{fy} = \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{h C^2} \quad (2.16)$$

où C est le coefficient de frottement de Chézy.

Les propriétés mathématiques du système hyperbolique que nous traitons incluent l'existence d'une matrice jacobienne, J_n , du flux normal à l'interface ($F.n$) défini comme suit :

$$J_n = \frac{\partial(F.n)}{\partial U} = \frac{\partial E}{\partial x} n_x + \frac{\partial G}{\partial y} n_y \quad (2.17)$$

2. Les équations des écoulements à surface libre

avec $n = (n_x, n_y)$ est le vecteur normal extérieur à l'interface. Cela peut être exprimé en termes des variables conservées comme suit :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ -uvn_x + (c^2 - v^2)n_y & vn_x & un_x + 2vn_y \end{pmatrix}$$

avec $c = \sqrt{gh}$ est la célérité d'onde.

Les valeurs propres de J_n sont une représentation des vitesses caractéristiques :

$$\begin{cases} a^1 = un_x + vn_y + c \\ a^2 = un_x + vn_y \\ a^3 = un_x + vn_y - c \end{cases} \quad (2.18)$$

Les vecteurs propres correspondants sont :

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -cn_y \\ cn_x \end{pmatrix}, \quad e^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

De ces vecteurs propres, deux matrices P et P^{-1} peuvent être construites. Elles diagonalisent bien sûr la matrice jacobienne J_n .

$$J_n = PAP^{-1} \quad (2.20)$$

2. Les équations des écoulements à surface libre

où A est la matrice diagonale constituée par les valeurs propres. Les matrices de passage sont données par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u+cn_x & -cn_y & u-cn_x \\ v+cn_y & cn_x & v-cn_x \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -(un_x+vn_y)+c & n_x & n_y \\ 2(un_y-vn_x) & -2n_y & 2n_x \\ un_x+vn_y+c & -n_x & -n_y \end{pmatrix}$$

2.1.2. Formule de frottement utilisée

Les écoulements étudiés dans ce mémoire sont en régime turbulent rugueux du fait du fort nombre de Reynolds et des grandes tailles caractéristiques des aspérités au fond. Ainsi, les coefficients de frottement de Manning et de Chézy (n_M et C dans les équations (2.15) et (2.16)) sont considérés constants durant la totalité de l'événement quelles que soient les caractéristiques de l'écoulement et ne dépendent que des caractéristiques du fond (lit de rivière, rue ...).

2.1.3. Formule de diffusion turbulente utilisée

Nous avons vu que le terme de diffusion utilisé dans les équations (2.12) et (2.13) fait appel à un coefficient de diffusion (ou de viscosité turbulente) ν_t . Ce terme a pour vocation de rendre compte principalement de la diffusion (ou viscosité turbulente) induite par la turbulence qui se développe au sein de l'écoulement et de manière secondaire de la diffusion provenant de l'intégration des équations de Navier Stokes sur la verticale.

Il reste désormais à déterminer la méthode de détermination de ce coefficient. Il existe en effet dans la littérature plusieurs modèles de turbulence de complexités différentes allant de la

viscosité turbulente constante (utilisée dans la plupart des calculs présentés dans ce mémoire) à des modèles $k-\varepsilon$ plus coûteux en temps de calcul. Le concept de viscosité turbulente constante sur l'ensemble de l'écoulement consiste donc à considérer le coefficient ν_t constant en espace et en temps. Dans ce travail, comme nous sommes dans un régime turbulent rugueux, ν_t est approximée par la formule de frottement de Manning et de Chézy (n_M et C).

2.2. ETABLISSEMENT DES EQUATIONS UNIDIMENSIONNELLES

On suppose (pour simplifier les expressions) que $D = 0$ et $\tau_{wi} = 0$ dans les équations (2.9) et (2.10) et on s'intéresse à un écoulement unidimensionnel selon l'axe des x .

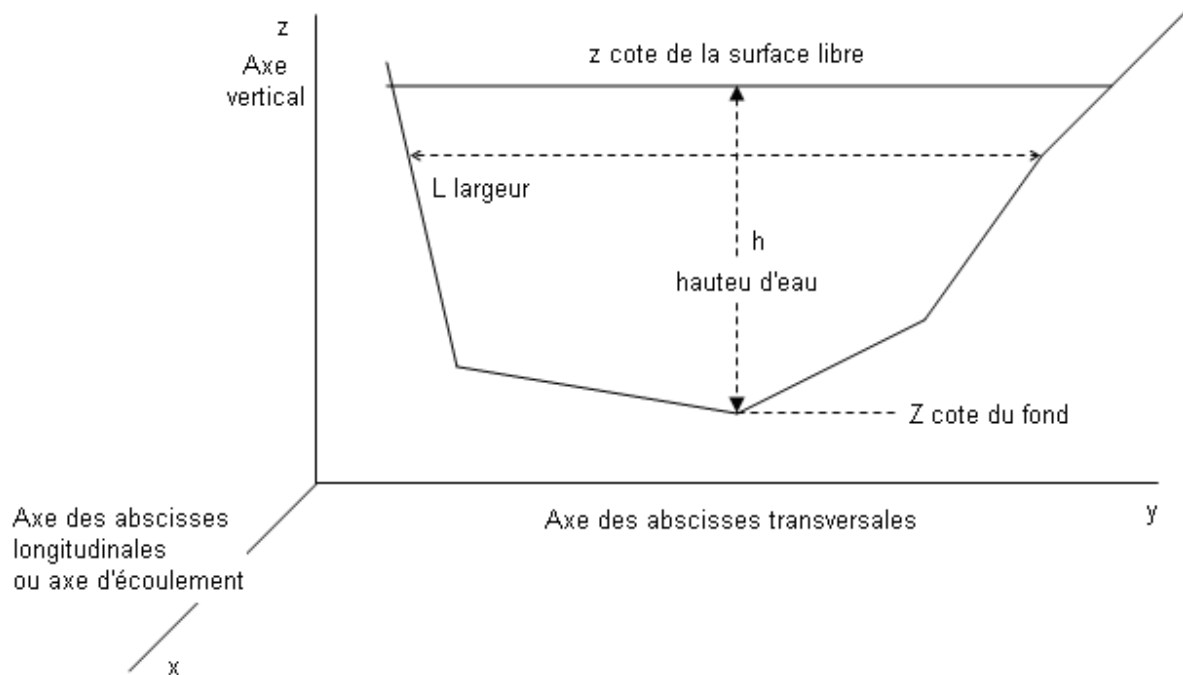


Figure 2.1 : Schématisation d'une section en travers dans un écoulement unidimensionnel.

Si on intègre (2.7) entre y_1 et y_2 , on obtient :

2. Les équations des écoulements à surface libre

$$\frac{\partial A}{\partial t} + h_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} - h_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q_{x_2} \frac{\partial y_1}{\partial x} - q_{x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x} + q_{y_2} - q_{y_1} = 0 \quad (2.21)$$

où A est la section mouillée (aire de la partie de la section en travers située au-dessous de la surface libre et au-dessus du fond) et Q le débit (selon l'axe d'écoulement l'axe des x) entre les abscisses transversales y_1 et y_2 où les hauteurs d'eau sont respectivement h_1 et h_2 .

Si on néglige q_{y_1} et q_{y_2} perpendiculaires à l'écoulement et si on néglige le débit d'apport latéral

égal à $h_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} - h_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} - u_1 \frac{\partial y_1}{\partial x}$, on obtient alors :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Si on intègre (2.9) entre y_1 et y_2 , on obtient de même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{y_1}^{y_2} h (u^2 - \bar{u}^2) dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u}^2 \int_{y_1}^{y_2} h dy \right) + g \frac{\partial z}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} h dy \\ = -g \int_{y_1}^{y_2} \frac{q_x \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{C^2 h^2} dy \end{aligned} \quad (2.23)$$

où on a introduit la différence entre le carré de la vitesse moyenne sur la verticale u et le carré de la vitesse moyenne sur la section \bar{u} (égale à Q/A). Cette différence, de la même façon qu'avait été traitée la dispersion des vitesses sur une verticale (terme tl de l'équation (2.6) au paragraphe (2.1), est habituellement modélisée par la somme de deux termes :

- un terme comprenant des dérivées secondes que nous négligerons et

2. Les équations des écoulements à surface libre

- un terme exprimé sous la forme $\frac{\partial}{\partial x} \left((\beta - 1) \frac{Q^2}{A} \right)$ où β est un coefficient supérieur ou égal à 1. Dans la suite on prends le cas particulier où $\beta = 1$.

Le terme de frottement est réécrit sous la forme $-g \frac{Q^2}{\tilde{C}^2 A^2} P_e$ où P_e est le périmètre mouillé (longueur du périmètre du fond de la section mouillée A), le coefficient \tilde{C} n'étant strictement égal à C que pour une largeur infinie ; en général, dans un problème de dimension 1, on préfère remplacer cette expression de type Chézy par une expression de type Strickler avec $\tilde{C} = K_s R_h^{1/6}$ en utilisant R_h le rayon hydraulique égal à A/P_e et K_s le coefficient de Strickler constant dans le temps.

L'équation obtenue est alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial z}{\partial x} = -g \frac{Q^2}{K_s^2 A R_h^{4/3}} \quad (2.24)$$

Le système d'équations (2.22) et (2.24) constituent une formulation des équations de Barré de Saint-Venant unidimensionnelles.

Pour un canal prismatique de section rectangulaire, ces équations peuvent aussi s'écrire sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (F(U))}{\partial x} = S(U) \quad (2.25)$$

où $U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}$ est le vecteur écoulement, $F(U) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + g \frac{A^2}{2B} \end{pmatrix}$ est le vecteur flux, B est la largeur du canal et $S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) \end{pmatrix}$ est le vecteur source.

2.2.1. Intégration de lois d'ouvrages

Dans les applications pratiques, il est souvent impossible d'utiliser les équations de Barré de Saint Venant unidimensionnelles pour modéliser de manière convenable l'écoulement sur la totalité du linéaire d'un canal ou d'une rivière. En particulier, le problème d'un autre type de modélisation se pose en présence d'ouvrages (jonctions, seuils, vannes). Classiquement, la modélisation de l'écoulement au droit d'ouvrages repose sur un ensemble de formules essentiellement empiriques qui ont été établies en régime permanent et sont extrapolées en régime transitoire. La plupart de ces formules ou lois d'ouvrages sont associées à une représentation unidimensionnelle de l'écoulement.

Dans le cas des jonctions, chaque branche peut être considérée comme modélisable par les équations unidimensionnelles et la zone de la jonction doit être traitée soit avec une formulation analytique essentiellement empirique lorsque cela est possible soit avec une modélisation bidimensionnelle. Ce point particulier concernant le traitement des jonctions sera examiné aux chapitres 7 et 8.

2.3. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'obtention du système de Barré de Saint de Venant sous forme intégrale et conservative à partir des équations de Navier-Stokes. Ce système décrit les écoulements gravitaires à surface libre avec l'hypothèse de faible profondeur. Nous avons aussi discuté les formules de certains paramètres utilisés dans ce travail.

Comme il est classiquement présenté dans la littérature en ce qui concerne la modélisation hydrodynamique, la forme conservative du système Barré de Saint Venant est une bonne formulation pour le calcul des solutions numériques approchées des équations de conservation de type hyperbolique. Dans ce contexte, nous présentons dans les deux Chapitres suivants une étude bibliographique concernant les méthodes numériques et nous détaillerons deux schémas numériques (le premier de type volume fini et le second de type élément fini discontinu de Galerkin) pour la simulation des équations hyperboliques correspondant aux lois qui contrôlent les écoulements à surface libre.

3

Présentation des méthodes de discrétisation numérique : la méthode des volumes finis

La recherche des méthodes numériques les plus adaptées à la simulation des problèmes d'écoulement de l'eau à surface libre est l'un des sujets les plus actifs en mathématiques appliquées, mécanique des fluides et hydraulique (Hirsch, 1990 ; Toro, 2001 ; Guinot, 2003 et 2008). En utilisant la simulation et l'analyse numérique de quelques modèles simplifiés appropriés, les scientifiques obtiennent de nombreuses informations significatives pour les phénomènes complexes associés aux écoulements à surface libre. Ces dernières années tout particulièrement, de nombreux résultats numériques ont été publiés dans le cadre de problèmes bidimensionnels et tridimensionnels, ces simulations devant être à la fois fiables et répondre aux exigences des services techniques.

De façon schématique, les simulations numériques associées aux équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles peuvent être obtenues par les quatre méthodes suivantes : (1) la méthode des éléments finis (Akanbi et Katopodes, 1988) ; (2) la méthode des différences finies (Fennema et Chaudhry, 1990) et (Garcia et Kahawita, 1986) ; (3) la méthode des caractéristiques

(Katopodes et Strelkoff, 1978) ; et (4) la méthode des volumes finis (Zhao et al., 1994, 1996), (Yoon et Kang, 2004) et Zhou et al., 2004).

La méthode des caractéristiques peut être seulement appliquée aux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et implique de définir les caractéristiques le long de la propagation des perturbations (Cunge et al., 1980). Les caractéristiques peuvent être considérées comme des lignes dans le plan espace-temps, le long desquelles (par définition) certaines propriétés sont constantes.

La méthode des différences finies classiques est une méthode bien connue dans le cadre de l'hydraulique urbaine. Cette méthode consiste à déterminer les valeurs de la fonction recherchée notée f en quelques points particuliers. Dans le cas de la résolution des équations de Barré de Saint Venant, on commence par quadriller le plan (x, y, t) afin d'obtenir des mailles de taille $(\Delta x, \Delta y, \Delta t)$ où $(\Delta x, \Delta y)$ sont les pas d'espace selon x et y , respectivement et Δt est le pas de temps. Les méthodes de type différences finies sont toutes basées sur les développements de Taylor des fonctions continues et dérivables. Lorsque les pas de temps et d'espace sont « petits », les développements limités sont « proches » des valeurs exactes. Selon le type de développements limités utilisés, on obtient des expressions différentes des dérivées qui engendrent trois types de schémas (centré, progressif (ou dit aval) ou régressif (ou dit amont)).

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux deux autres méthodes de discrétisation, à savoir, la méthode des volumes finis et celle des éléments finis et plus particulièrement la méthode des éléments finis discontinus de Galerkin (RKDG) appliquées aux équations de Barré de Saint Venant. Nous commençons par présenter la méthode des volumes finis utilisée dans ce travail. Cette méthode qui est du second ordre en temps et en espace est choisie pour la comparaison avec la méthode développée (RKDG).

3.1 LA METHODE DES VOLUMES FINIS

3.1.1 Synthèse bibliographique

Dans les dernières années, la méthode des volumes finis a attiré une large attention de la communauté des numériciens et a obtenu une série de succès incontestables dans la simulation numérique des problèmes hydrauliques bidimensionnels à surface libre.

En utilisant les solveurs de Riemann (Roe, 1981 ; Osher, 1982, HLL (Harten Lax Leer), 1983), Zhao et al. (1982), Alcrudo et Garcia-Navarro (1993), Anastasiou et Chan (1997), Hu et al. (1998), Chan et Anastasiou (1999), Tseng (1999), Wang et Lui (2000), Caleffi et al. (2003), Yoon et Kang (2004) ont développé des schémas volumes finis de type Godunov-MUSCL (Monotonic Upstream-centered Schemes for Conservation Laws), HLL-MUSCL, Roe-Upwind à haute résolution sur des maillages triangulaires non structurés et ont apporté des résultats impressionnants pour les écoulements graduellement variés à surface libre.

Les méthodes volumes finis ont plusieurs avantages par rapport aux deux approches différences finies et éléments finis. Les méthodes volumes finis combinent la simplicité des méthodes différences finies avec la flexibilité géométrique des méthodes éléments finis. La méthode des volumes finis peut être considérée comme une méthode différences finies appliquée à la forme différentielle conservative des lois de conservation exprimées dans des géométries irrégulières. Ainsi cette méthode peut être appliquée en utilisant un maillage non structuré comme la méthode des éléments finis. Mais généralement la méthode volumes finis a besoin de moins d'effort informatique que la méthode des éléments finis.

Les méthodes de type volume fini sont basées sur la forme intégrale des équations conservatives. Ainsi un schéma basé sur cette forme conservative peut facilement être construit pour capturer les chocs (propriété de capture des chocs). Par la discrétisation de la forme intégrale des équations conservatives, la masse et la quantité de mouvement demeurent conservés (Hirsch, 1988). Le problème principal dans les méthodes volume fini est d'estimer le flux normal aux interfaces des différentes cellules. Il y a différents algorithmes pour estimer ce flux. Différents solveurs approchés de Riemann ont été développés pour calculer le flux numérique au lieu des solveurs de

Riemann exacts car ces derniers sont mathématiquement très difficiles à traiter et sont associés à des temps de calcul prohibitifs. Différents chercheurs en aérodynamique ont développé des solveurs approchés de Riemann pour les équations d'Euler qui peuvent être appliquées aux problèmes hydrauliques. Les solveurs approchés de Riemann les plus efficaces ont été développés par Roe (1981), Van Leer (1977, 1982), Harten (1983), Osher & Solomon (1982), et ont été adaptés plus tard à l'hydraulique par Glaister (1988), Alcrudo et al. (1992), Alcrudo & Garcia Navarro (1993), Nujic (1995) parmi tant d'autres.

Les méthodes les plus récentes de type volumes finis (de type Godunov) fournissent une solution d'ordre supérieur à 1, en reconstruisant les données aux interfaces des cellules et en utilisant des limiteurs de flux ou de pente pour préserver la monotonie. Ainsi la reconstruction linéaire par morceaux basée sur le schéma monotone amont de Van Leer (Van Leer, 1973) conduit à un schéma du second ordre (Alcrudo & Garcia-Navarro, 1993).

3.1.2. Discrétisation spatiale volume fini

La méthode volume fini est basée sur l'écriture des équations mathématiques en forme d'intégrale sur un volume de contrôle élémentaire. Chaque volume élémentaire est représenté par une cellule du maillage, utilisée pour la discrétisation du domaine simulé (Hirsch, 1988 ; Alcrudo et Garcia-Navarro, 1993 ; Liggett, 1994). Afin de simplifier le développement d'un schéma numérique du second ordre sur des géométries irrégulières, une grille non structurée, composée par des cellules triangulaires, est adoptée.

La moyenne des variables conservées est stockée au centre de chaque maille et les côtés de chaque maille définissent un volume de contrôle triangulaire.

En intégrant l'équation (2.14) sur un volume de contrôle T_i , où T_i est un triangle, nous obtenons :

$$\int_{T_i} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla F \right) dT_i = \int_{T_i} S dT_i \quad (3.1)$$

En supposant que U_i est la valeur moyenne sur la maille T_i affectée en son centre, et en utilisant le théorème de Gauss l'équation (3.1) devient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} |T_i| + \oint_{\partial T_i} F \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{T_i} S dT_i \quad (3.2)$$

où $|T_i|$ et ∂T_i représentent respectivement l'aire et le contour de la maille T_i , \vec{n} est le vecteur normal unitaire extérieur à l'interface et $d\Gamma$ est la différentielle du contour.

L'équation (3.2) peut être discrétisée en approchant l'intégrale de contour par une somme du vecteur flux sur chaque côté du volume de contrôle. On obtient alors :

$$\oint_{\partial T_i} F \cdot \vec{n} d\Gamma = \sum_{j=1}^3 F_{ij} \vec{n}_{ij} dl_{ij} \quad (3.3)$$

où l_{ij} est le $j^{ième}$ côté de la maille T_i , dl_{ij} est la longueur du côté l_{ij} et F_{ij} est le flux numérique à travers le côté l_{ij} . L'équation (3.3) devient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = - \frac{1}{|T_i|} \sum_{i=1}^3 F_{ij} \vec{n}_{ij} dl_{ij} + S_i \quad (3.4)$$

La difficulté de cette discrétisation réside en l'évaluation des flux numériques aux interfaces.

À l'interface l_{ij} , selon Godunov (1959), le problème peut être considéré comme un problème de Riemann unidimensionnel local dans la direction normale au côté l_{ij} , et ainsi le flux numérique pourrait être obtenu par un solveur approché de Riemann tel que :

$$F_{ij} = F^* \left((U_L)_{ij}, (U_R)_{ij} \right) \quad (3.5)$$

où F^* est un solveur approché de Riemann, $(U_L)_{ij}$ et $(U_R)_{ij}$ sont les valeurs de U à gauche et à droite du côté l_{ij} . Plusieurs méthodes peuvent être obtenues en utilisant différents solveurs de Riemann.

3.1.3. Problème de Riemann associé au système de Barré de Saint Venant

Le problème de Riemann centré en $(x_0; t_0)$, est un problème aux valeurs initiales discontinues, composé de deux états constants (figure 3.1). La structure de la solution de ce problème appliqué au système de Barré de Saint de Venant, est composée de trois états constants séparés par deux ondes élémentaires : une onde de raréfaction se propageant vers la gauche, et une onde de choc se propageant vers la droite. Godunov (1959), a résolu ces équations de type hyperbolique en supposant que le problème est constitué par une série de problèmes de Riemann locaux.

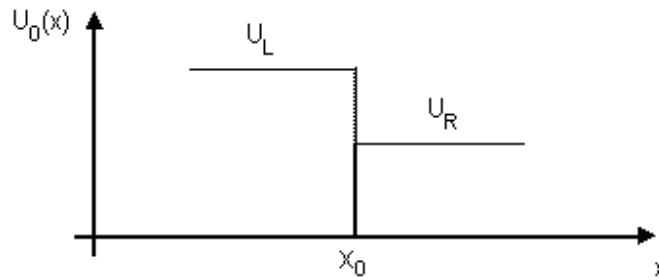


Figure 3.1 : Représentation du problème de Riemann.

$$U(x, t_0) = U_0(x) = \begin{cases} U_L & \text{si } x < x_0 \\ U_R & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

3.1.4. Les solveurs de Riemann

Les flux aux interfaces F^* sont calculés numériquement selon chaque schéma. Il existe plusieurs solveurs permettant de calculer les flux aux interfaces. Ces schémas sont connus sous le nom de solveur de Riemann ou tout simplement schéma de Riemann. Les schémas de Riemann sont attractifs pour les ingénieurs hydrauliciens, puisque ces méthodes sont simples à implémenter, de hautes résolutions pouvant capturer les chocs, préservent la monotonie et vérifient la condition d'entropie. Dans ce paragraphe, nous citons quelques solveurs de Riemann existant dans la littérature.

Solveur de Lax-Friedrich

Le solveur de Lax-Friedrich est le solveur de Riemann le plus simple. Il satisfait la propriété d'entropie désirée et est en même temps simple à mettre en œuvre. Il dépend uniquement de la célérité de l'onde locale la plus rapide et sa forme est donnée par :

$$F^*(U_L, U_R).n = \frac{1}{2} \left[(F(U_L) + F(U_R)).n - a_{\max} (U_R - U_L) \right] \quad (3.7)$$

Où $a_{\max} = \max(|a^1|, |a^2|, |a^3|)$, et les a^k sont les valeurs propres de la matrice jacobienne J_n définie dans l'équation (2.17).

Solveur de Roe

Roe (1981) a résolu le problème de Riemann de manière approchée en remplaçant la matrice jacobienne exacte par une matrice jacobienne approchée. Le problème consiste donc à construire une jacobienne approchée \tilde{J} en terme de U_L et U_R à chaque l'interface. Le flux numérique selon Roe est donné par :

$$F^*(U_L, U_R).n = \frac{1}{2} \left[(F(U_L) + F(U_R)).n - \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}^k \left| \tilde{a}^k \right| \tilde{e}^k \right) \right], \quad (3.8)$$

où \tilde{a}^k et \tilde{e}^k sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice jacobienne approchée \tilde{J}_n .

Avec :

$$\tilde{a}^1 = \tilde{u}.nx + \tilde{v}.nx + \tilde{c}, \quad \tilde{a}^2 = \tilde{u}.nx + \tilde{v}.nx \quad \text{et} \quad \tilde{a}^3 = \tilde{u}.nx + \tilde{v}.nx - \tilde{c}, \quad (3.9)$$

et

$$\tilde{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}.nx \\ \tilde{v} + \tilde{c}.ny \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{c}.ny \\ \tilde{c}.nx \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{e}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}.nx \\ \tilde{v} - \tilde{c}.ny \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Les valeurs des coefficients de pondération introduits par la projection du vecteur écoulement dans la base des vecteurs propres, les vitesses moyennes de Roe (1981) \tilde{u} et \tilde{v} , ainsi que la célérité moyenne \tilde{c} sont données par :

$$\tilde{\alpha}^{1,3} = \frac{\Delta h}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}} \left[\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - (\tilde{u}, \tilde{v}).n\Delta h \right] \quad (3.11)$$

et

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{1}{2\tilde{c}} \left\{ \left[\Delta(hv) - \tilde{v}\Delta h \right] n_x - \left[\Delta(hu) - \tilde{u}\Delta h \right] n_y \right\}, \quad (3.12)$$

où $\Delta = ()_R - ()_L$.

Les valeurs moyennes \tilde{u} , \tilde{v} et \tilde{c} sont données selon Roe (1981) par :

$$\tilde{u} = \frac{u_R \sqrt{h_R} + u_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{v} = \frac{v_R \sqrt{h_R} + v_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{c} = \sqrt{\frac{g(h_R + h_L)}{2}}. \quad (3.13)$$

Solveur HLL

Harten et al. (1983) ont proposé le solveur HLL afin de calculer le flux numérique aux interfaces. Ce solveur suppose l'existence de deux ondes de célérité S_R et S_L où les indices L et R représentent le côté gauche et droit de l'arête de l'élément. Le flux calculé à l'interface s'écrit de la façon suivante :

$$F^*(U_L, U_R).n = \begin{cases} F(U_L).n & \text{si } 0 \leq S_L \\ \frac{S_R F(U_L).n - S_L F(U_R).n + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F(U_R).n & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (3.14)$$

Les célérités d'ondes S_L et S_R sont données par :

$$S_L = \min((u, v)_L.n - \sqrt{gh_L}, u^* - \sqrt{gh^*}) \quad \text{et} \quad S_R = \max((u, v)_R.n + \sqrt{gh_R}, u^* + \sqrt{gh^*}) \quad (3.15)$$

Avec :

$$\sqrt{gh^*} = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4}((u, v)_R.n - (u, v)_L.n) \quad \text{et} \quad u^* = \frac{1}{2}((u, v)_L.n + (u, v)_R.n) + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \quad (3.16)$$

3.1.5. Schéma du second ordre

Pour un schéma du premier ordre, les valeurs des variables à gauche et à droite de l'interface lij du volume de contrôle i , sont $U_L = U_i$, $U_R = U_j$. U_i et U_j sont les solutions de l'état U pour les volumes de contrôle i et j , respectivement (affectées au centre de gravité).

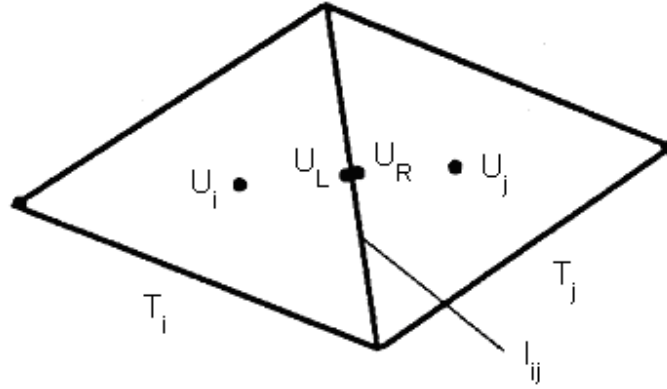


Figure 3.2 : Les cellules et les notations utilisées pour la reconstruction.

Dans les schémas d'ordre supérieur, la reconstruction de U_i sur la maille i , dénotée par $\tilde{U}_i^n(x, y)$ est supposée être une fonction linéaire en espace (linéaire ou d'ordre supérieur). Le profil reconstruit considéré ici est un profil linéaire, menant à un schéma numérique du second ordre en espace (Van Leer, 1977 et 1979).

Le profil de la reconstruction sur la maille i au pas de temps n , $\tilde{U}_i^n(x, y)$, doit satisfaire les contraintes suivantes :

- (1) La valeur moyenne de $\tilde{U}_i^n(x, y)$ dans la maille i doit être égale à la valeur moyenne U_i^n :

$$\frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} \tilde{U}_i^n(x, y) dT_i = U_i^n \quad (3.17)$$

- (2) La valeur de $\tilde{U}_i^n(x, y)$ doit être aussi proche que possible des moyennes U_j^n des mailles voisines :

$$\tilde{U}_i^n(x_j, y_j) \cong U_j^n \quad \forall j \in N(i) \quad (3.18)$$

où $N(i)$ dénote l'ensemble de mailles voisines à la maille i .

Une reconstruction linéaire bidimensionnelle \tilde{U}_i^n d'une variable donnée U sur une maille donnée i est cherchée. La reconstruction \tilde{U}_i^n de U dans la maille i au pas de temps n prend la forme :

$$\tilde{U}_i^n(x, y) = (x - x_i)a_i + (y - y_i)b_i + c_i \quad (3.19)$$

où x_i et y_i sont les coordonnées du centre de gravité de la maille i . La reconstruction \tilde{U}_i^n est déterminée à partir de la valeur moyenne connue U_i^n de U au pas de temps n et des valeurs moyennes connues U_j^n dans chacune des mailles voisines. On explique dans la suite comment déterminer une telle reconstruction \tilde{U}_i^n qui satisfait les contraintes (3.17) et (3.18).

En remplaçant l'équation (3.19) dans l'équation (3.17), on aboutit à la condition suivante sur c_i :

$$c_i = U_i^n \quad (3.20)$$

Les valeurs a_i et b_i sont déterminées en minimisant le carré de la distance entre les valeurs connues et reconstruites. Ceci est fait en minimisant la fonction R_i définie par :

$$R_i(a_i, b_i) = \sum_{j \in N(i)} \left[\tilde{U}_i^n(x_j, y_j) - U_j^n \right]^2 \quad (3.21)$$

Les valeurs optimales de a_i et b_i sont celles pour lesquelles les dérivés $\partial R_i / \partial a_i$ et $\partial R_i / \partial b_i$ sont nulles. En remplaçant les équations (3.19) - (3.20) dans l'équation (3.21) et en différenciant R_i par rapport à a_i et b_i , on obtient les conditions suivantes :

$$\sum_{j \in N(i)} (x_j - x_i)^2 a_i + (x_j - x_i)(y_j - y_i) b_i + (x_j - x_i)(U_i^n - U_j^n) = 0 \quad (3.22)$$

$$\sum_{j \in N(i)} (x_j - x_i)(y_j - y_i) a_i + (y_j - y_i)^2 b_i + (y_j - y_i)(U_i^n - U_j^n) = 0 \quad (3.23)$$

Ce système de deux équations à deux inconnues donne :

$$a_i = \frac{\sum_{j \in N(i)} (U_j^n - U_i^n) x_j \sum_{j \in N(i)} (y_j)^2 - \sum_{j \in N(i)} (U_j^n - U_i^n) y_j \sum_{j \in N(i)} x_j y_j}{\Delta} \quad (3.24)$$

$$b_i = \frac{\sum_{j \in N(i)} (U_j^n - U_i^n) y_j \sum_{j \in N(i)} (x_j)^2 - \sum_{j \in N(i)} (U_j^n - U_i^n) x_j \sum_{j \in N(i)} x_j y_j}{\Delta} \quad (3.25)$$

Où Δ est le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{j \in N(i)} (x_j)^2 & \sum_{j \in N(i)} x_j y_j \\ \sum_{j \in N(i)} x_j y_j & \sum_{j \in N(i)} (y_j)^2 \end{vmatrix}. \quad (3.26)$$

De l'équation (3.19), on peut calculer les valeurs U_L et U_R à l'interface ij comme suit :

$$U_L = U_i + \nabla U_i \cdot \frac{\vec{r}}{2} \quad U_R = U_j + \nabla U_j \cdot \frac{\vec{r}}{2} \quad (3.27)$$

où r est le vecteur du centre de la maille i au centre de la maille j et $\nabla U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

3.1.6. Limitation de pente

Les schémas d'ordre supérieur produisent souvent des oscillations non physiques au voisinage des discontinuités ; il est donc nécessaire de les supprimer en limitant la pente des variables reconstruites. D'après Barth et Jespersen (1989), les pentes sont limitées de sorte que la solution aux points d'intégration (x_i^*, y_i^*) sur le bord de la maille i soit comprise entre la solution minimale et maximale dans les mailles voisines.

La solution modifiée est :

$$\tilde{U}_i^n(x, y) = U_i^n + \alpha((x - x_i)a_i + (y - y_i)b_i) \quad (3.28)$$

Avec

$$\alpha = \min \max(\alpha_i, 0) \quad 1 \leq i \leq K_{\partial T_i} \quad (3.29)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{M - U_i}{U_i(x_i^*, y_i^*) - U_i}, & \text{if } U_i(x_i^*, y_i^*) - M > 0 \\ \frac{M - U_i}{U_i(x_i^*, y_i^*) - U_i}, & \text{if } U_i(x_i^*, y_i^*) - m < 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.30)$$

$K_{\partial T_i}$ est le nombre de points d'intégration sur le bord de la maille i , m et M sont respectivement les valeurs minimale et maximale de U pour les mailles voisines de i .

3.1.7. Discrétisation temporelle

L'équation (2.14) est une équation différentielle ordinaire et peut être intégrée par des méthodes standards. Une approche simple consiste à employer le schéma d'Euler explicite comme intégrateur en temps :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{|T_i|} \left(\sum_{j=1}^3 F_{ij} \vec{n}_{ij} dl_{ij} \right)^n + \Delta t S_i^n \quad (3.31)$$

Cependant, Chavent et Salzano (1982) ont montré que cette approche est inconditionnellement instable pour les schémas numériques d'ordre 2. La discrétisation temporelle du second ordre peut être réalisée en calculant les variables en deux étapes (technique de Runge-Kutta d'ordre 2).

Dans la première étape, les variables sont calculées à l'instant $t^{n+1/2} = t^n + \frac{\Delta t}{2}$ à partir des variables à l'instant t^n . Les flux numériques et le terme source sont alors évalués avec les valeurs de U à $t^{n+1/2}$, pour finalement obtenir U à t^{n+1} .

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2|T_i|} \left(\sum_{j=1}^3 F_{ij} \vec{n}_{ij} dl_{ij} \right)^n + \frac{\Delta t}{2} S_i^n \quad (3.32)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{|T_i|} \left(\sum_{j=1}^3 F_{ij} \vec{n}_{ij} dl_{ij} \right)^{n+1/2} + \Delta t S_i^{n+1/2} \quad (3.33)$$

3.1.8. Stabilité du schéma

Pour tous les schémas numériques de nature explicite se pose le problème du choix du pas de temps à utiliser pour la résolution. De ce choix dépend la stabilité du schéma numérique considéré. Dans le cas de l'étude du système de Barré de Saint Venant bidimensionnel, le pas de temps sera donné par la relation CFL (Courant-Friedrich-Levy) suivante :

$$\Delta t_i = CFL \frac{|T_i|}{\sum_j dl_{ij} \text{abs}(\min(u.nx + v.ny - c, 0))}, \quad \text{avec } 0 < CFL \leq 1. \quad (3.34)$$

Ici u , v et c sont évalués au centre de la maille pour des raisons de simplicité.

3.1.9. Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont imposées à l'interface des mailles aux bords du domaine et les valeurs des variables conservées à l'interface sont extrapolées du centre de la maille. D'après la théorie des caractéristiques (Daubert et Graffe, 1967 ; Katopodes et Strelkoff, 1978 ; Hirsch, 1990 ; Cunge et al., 1980), les invariants de Riemann pour les équations de Barré de Saint Venant unidimensionnelles sont :

$$R^- = u + 2c, \quad R^+ = u - 2c \quad (3.35)$$

En plus, on a :

$$\frac{d}{dt}(u - 2c) = 0 \quad \text{sur} \quad \frac{dx}{dt} = u - c \quad (3.36)$$

$$\frac{d}{dt}(u + 2c) = 0 \quad \text{sur} \quad \frac{dx}{dt} = u + c \quad (3.37)$$

Donc $u \pm 2c$ est constant le long de $u \pm c$, respectivement. Les invariants de Riemann R^- et R^+ représentent respectivement l'état à droite et à gauche de l'interface. Puisque le côté droit de l'interface est en dehors du domaine au niveau de la limite, la condition R^- est remplacée par la condition à la limite elle-même. Pour les équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles, la condition R^- est donnée par :

$$(u, v)_L .n + 2\sqrt{gh_L} = (u, v)_* .n + 2\sqrt{gh_*}, \quad (3.38)$$

où les indices $*$ et L désignent respectivement les variables à l'interface et au centre de la maille.

L'équation (3.38), combinée avec les conditions aux limites, permet d'obtenir une solution pour u_* , v_* et h_* . Le vecteur flux à travers les interfaces peut alors être calculé comme suit :

$$F^* .n = \begin{pmatrix} h_* (u, v)_* .n \\ h_* u_* (u, v)_* .n + \frac{1}{2} gh_*^2 n_x \\ h_* v_* (u, v)_* .n + \frac{1}{2} gh_*^2 n_y \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

D'après la théorie des caractéristiques (Hirsch, 1990 ; Cunge et al., 1980), une condition aux limites est nécessaire quand le régime de l'écoulement est fluvial. Pour un écoulement fluvial, la hauteur d'eau, le débit unitaire ou la vitesse doit être imposé.

Dans le cas où la vitesse d'eau $(u, v)_* .n$ est imposée, h_* est calculé en modifiant l'équation (3.38).

Dans le cas où la hauteur d'eau est imposée, $(u, v)_* .n$ est calculé directement par l'équation (3.38).

En supposant que la vitesse tangentielle à l'interface est égale à celle de la maille, la composante tangentielle de la vitesse à l'interface est donnée par :

$$(u, v)_* .t = (u, v)_L .t \quad (3.40)$$

Une fois $(u, v)_* .n$ et $(u, v)_* .t$ connus, u_* et v_* sont calculés de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u, v)_* .n \\ (u, v)_* .t \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Enfin, le vecteur flux est calculé en injectant les valeurs obtenues dans l'équation (3.39).

Dans le cas où une condition débit est imposée :

$$q_* = h_*(u_*, v_*) .n \quad (3.42)$$

L'équation (3.42) combinée avec la relation $c^2 = gh$ et l'équation (3.38) donne :

$$2c_*^3 - (u_L + 2c_L)c_*^2 + gq_* = 0 \quad (3.43)$$

L'équation (3.43) peut être résolu itérativement pour c_* , et le vecteur flux est calculé par l'intermédiaire de l'équation (3.41).

Dans le cas d'un écoulement torrentiel à l'amont, trois conditions aux limites sont imposées, de sorte que u_* , v_* et h_* sont directement donnés et le vecteur flux est aisément obtenu.

Dans le cas où l'écoulement est torrentiel à l'aval, toutes les variables physiques u_* , v_* et h_* à l'interface sont les mêmes que les variables au centre de la maille.

Et une ultime condition est appliquée pour « les murs », à savoir que la composante normale de la vitesse à l'interface est ici égale à zéro (notion de frontière fermée) :

$$(u, v)_* \cdot n = 0 \quad (3.44)$$

3.2. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode volume fini de second ordre en temps et en espace à capture de chocs pour la résolution des équations de Barré de Saint Venant 2D. Afin de permettre le développement d'un schéma numérique du second ordre sur des géométries irrégulières, une grille non structurée, composée par des cellules triangulaires, est adoptée. Nous avons détaillé les discrétisations spatiale et temporelle ainsi que les conditions de stabilité et les conditions aux limites pour ce type de maillage. La méthode est basée sur l'écriture des équations mathématiques sous forme intégrale sur un volume de contrôle élémentaire. Chaque volume élémentaire est représenté par une cellule du maillage, utilisée pour la discrétisation du domaine simulé. Cette méthode sera comparée à une méthode RKDG (détaillée dans le chapitre suivant) dans le chapitre 5.

4

Présentation des méthodes de discrétisation numérique : la méthode des éléments finis discontinus à discrétisation temporelle de Runge Kutta (RKDG)

Le succès des méthodes Galerkin discontinues en approchant des problèmes physiques divers (notamment les systèmes hyperboliques des lois de conservation) a attiré la communauté des ingénieurs hydrauliciens dans l'exploration des avantages de cette approche (Cockburn et al., 1989 ; Cockburn et Shu, 1998a et 1998b ; Schwanenberg et Harms, 2004). Une propriété favorable des méthodes Galerkin discontinues est qu'elles conservent la masse au niveau de l'élément. Par ailleurs, elles héritent de la flexibilité des éléments finis en manipulant les géométries complexes et exigent un traitement simple pour les conditions aux limites et les termes sources pour notamment obtenir des schémas d'ordre supérieur. La méthode est très largement répandue pour le calcul numérique des solutions des lois de conservation, en particuliers les équations de Barré de Saint Venant. Nous présentons dans ce chapitre une

adaptation de cette méthode au système de Barré de Saint Venant. L'équation hyperbolique sans terme source s'écrit :

$$\frac{d}{dt}U + \nabla F(U) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T], \quad (4.1)$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d .

La méthode Galerkin discontinue a été introduite par Reed et Hill (1973) pour la résolution de l'équation du transport de neutrons. Une analyse mathématique a été menée par LeSaint et Raviart (1974), Johnson et Pitkaranta (1986), Richter (1988) ainsi que Peterson (1991) (pour les cas scalaires hyperboliques linéaires).

Cockburn et al. (1989, 1990) et Cockburn et Shu (1989, 1991a et 1991b, 1998a et 1998b) ont développé et étendu cette méthode aux autres formes d'équations et systèmes non linéaires (advection, dynamique des gaz...etc).

L'idée de base est de choisir un espace d'éléments finis discontinus V_h^k où les solutions approchées sont des polynômes de degré k sur chaque volume T_i tel que $\Omega = \bigcup_{i=1}^M T_i$. La solution approchée est calculée à partir d'une formulation faible du problème à résoudre. Pour se faire, on multiplie l'équation (ou le système) par une fonction test $v(x) \in V_h^k$, et on intègre sur chaque volume T_i .

Dans le cas unidimensionnel ($d = 1$), où T_i est un segment, on choisit comme fonctions tests, les éléments d'une base locale (sur chaque segment), et afin d'obtenir une matrice de masse diagonale, on peut choisir comme base les polynômes de Legendre. A partir du nombre de degrés de liberté fixé, on choisit une formule de quadrature appropriée pour calculer les diverses intégrales.

Le passage au cas multidimensionnel n'est pas trivial, notamment pour le choix des fonctions de base et des formules de quadrature. Si on prend l'exemple du cas bidimensionnel, il est plus aisé de trouver des formules de quadrature sur des triangles que sur n'importe quel autre polygone. Ainsi, le choix du volume d'intégration n'est pas arbitraire. Quant à l'intégration en temps, on utilise un schéma de Runge-Kutta d'ordre $(k+1)$, la méthode est ainsi globalement d'ordre $(k+1)$ (pour les démonstrations voir (Chavent et Cockburn, 1987 ; Cockburn et Shu, 1991b)).

La méthode présente des propriétés de parallélisation intéressantes (étudiées par plusieurs auteurs dont Biswas et al. (1994)). La méthode a été étendue aux équations de Navier-Stokes compressibles par Bassi et Rebay (1997), aux équations de convection-diffusion par Cockburn et Shu (1998a).

4.1. APPROXIMATION NUMERIQUE

La méthode RKDG est très largement répandue pour le calcul numérique des solutions des lois de conservation, en particulier les équations de Barré de Saint Venant. Elle permet de traiter de façon naturelle et robuste les lois de conservation et peut s'appuyer sur des structures à géométrie complexe. Cette méthode utilise une approximation polynômiale d'ordre k discontinue de la solution. Le principe consiste alors à intégrer localement les équations de conservation sur chaque élément, ce qui fait apparaître des flux aux interfaces. Ces flux sont ensuite approchés numériquement en résolvant un problème de Riemann unidimensionnel aux points de discontinuité (Toro, 1997 ; Hirsch, 1990).

Nous considérons ici une discrétisation de type éléments finis du domaine de calcul $\Omega = \bigcup_{i=1}^M T_i$

où T_i est un triangle.

Nous décrivons ci-dessous les approximations spatiales et temporelles, et rappelons les résultats de stabilité.

4.1.1. Discrétisation en espace

Soit $V = L^2(\Omega \times [0, \infty[)$ l'espace des solutions du problème (2.14), et soit l'espace approché $V_h^k \subset V$ défini par :

$$V_h^k = \{v \in V / v|_{T_i} \in P^k, i = 1, \dots, M\}, \quad (4.2)$$

où P^k est l'espace des polynômes de degré k ($k = 1, 2, \dots$). Les solutions v sont ici discontinues d'un triangle à un autre. Dans toute la suite, on fixera $k = 1$. Afin de construire une solution $U_h \in V_h^1$, on multiplie le système (2.14) par une fonction test $\varphi(x, y) \in V_h^1$, et on intègre sur chaque triangle T_i . Le système obtenu s'écrit pour $U_h = U|_{T_i}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} U_h(x, y, t) \varphi(x, y) dT_i + \int_{T_i} \nabla F(U_h(x, y, t)) \varphi(x, y) dT_i = \int_{T_i} S(U_h(x, y, t)) \varphi(x, y) dT_i \quad (4.3)$$

et après intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{T_i} U_h(x, y, t) \varphi(x, y) dT_i &= \int_{T_i} F(U_h(x, y, t)) \nabla \varphi(x, y) dT_i \\ &- \sum_{j \in N(i)} \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} F(U_h(x, y, t)) n_{ij} \varphi(x, y) d\Gamma + \int_{T_i} S(U_h(x, y, t)) \varphi(x, y) dT_i. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$N(i)$ est constitué par les indices des mailles voisines du triangle T_i , n_{ij} est la normale extérieure unitaire (dirigée de T_i vers T_j).

Les fonctions de base

On construit une base locale P^1 sur chaque triangle comme suit :

Soit un triangle T_i de sommets a_1 , a_2 et a_3 . On note m_1 , m_2 et m_3 les points milieux des arêtes (figure 4.1), K le triangle de sommets m_1 , m_2 et m_3 d'aire $|K|$, et on note :

$$m_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad m_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

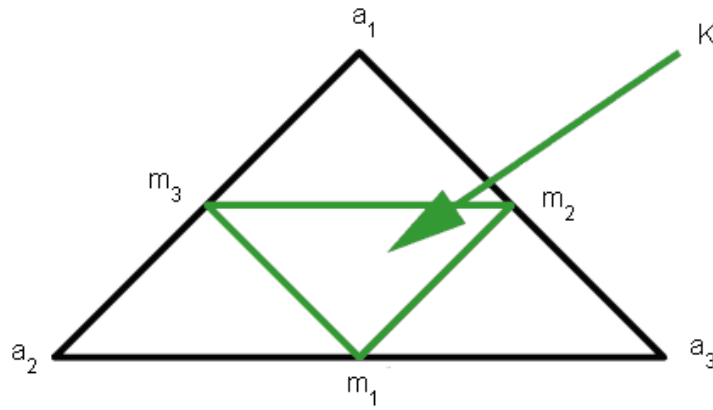


Figure 4.1 : Les degrés de liberté P^1 .

Soient φ_l ($l = 1, \dots, 3$) les fonctions de base (linéaires), telle que $\varphi_l(m_j) = \delta_{lj}$, où :

$$\delta_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = j \\ 0 & \text{si } l \neq j \end{cases} \quad (4.6)$$

Alors les fonctions $(\varphi_l)_l$ sont données par :

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2|K|} \{ (m_{22} - m_{23})x + (m_{13} - m_{12})y + m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13} \}, \\ \varphi_2 = \frac{1}{2|K|} \{ (m_{23} - m_{21})x + (m_{11} - m_{13})y + m_{13}m_{21} - m_{23}m_{11} \}, \\ \varphi_3 = \frac{1}{2|K|} \{ (m_{21} - m_{22})x + (m_{12} - m_{11})y + m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} \}, \end{cases} \quad (4.7)$$

Une fonction U_h de V_h^k peut s'écrire pour $X = (x, y) \in T_i$, en fonction des éléments de la base locale $(\varphi_l)_l$:

$$U_h(X, t) = \sum_{i=1}^3 U_h(m_i, t) \varphi_l(X), \quad (4.8)$$

où $U_h(m_i, t)$ représentent les degrés de liberté de la solution approchée.

Calcul des intégrales

Nous allons approcher les différentes intégrales de la formulation faible (4.4). On note deux types d'intégrales :

Les intégrales sur le triangle

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} U_h(X, t) \varphi_l(X) dT_i,$$

$$\int_{T_i} F(U_h(X, t)) \nabla \varphi_l(X) dT_i,$$

$$\int_{T_i} S(U_h(X, t)) \varphi_l(X) dT_i,$$

et l'intégrale sur le bord

$$\int_{\partial T_i \cap \partial T_j} F(U_h(X, t)) n_{ij} \varphi_l(X) d\Gamma,$$

Pour approcher :

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} U_h(X, t) \varphi_l(X) dT_i,$$

on écrit d'abord U_h en fonction des éléments de la base, et on applique la formule de quadrature de Gauss à trois points donnés par :

$$\int_{T_i} F(x, y) dT_i \simeq \frac{|T_i|}{3} \sum_{j=1}^3 F(m_j), \quad (4.10)$$

(qui est exacte pour les polynômes de degré 2). On obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} U_h(X, t) \varphi_l(X) dT_i \simeq \frac{d}{dt} A \begin{pmatrix} U_h(m_1, t) \\ U_h(m_2, t) \\ U_h(m_3, t) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

Où A est la matrice de masse. La base locale étant orthogonale, la matrice de masse est par conséquent diagonale :

$$A = \frac{|T_i|}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

et pour

$$\int_{T_i} F(U_h(X, t)) \nabla \varphi_l(X) dT_i,$$

on utilise la formule de quadrature (4.10).

Quant à l'intégrale de bord :

$$\int_{\partial T_i \cap \partial T_j} F(U_h(X, t)) \cdot n_{ij} \phi_l(X) d\Gamma,$$

l'approximation se fait en deux étapes ; dans un premier temps, on approche $F(U_h(X, t)) \cdot n_{ij}$ par un flux échangé $F(U_i, U_j) \cdot n_{ij}$ entre T_i et T_j . Ce flux peut être calculé de différentes façons : il est basé sur la résolution locale d'un problème de Riemann (solveur de Riemann).

L'approximation du flux numérique pour la méthode RKDG est identique à la solution approchée d'un problème de Riemann pour les méthodes VF. En utilisant une résolution linéaire (ou plus élevée pour des méthodes RKDG d'ordre supérieur), le schéma numérique RKDG est moins sensible au choix du flux numérique que pour les méthodes VF. Ainsi, un simple flux de Lax-Friedrich donne de bons résultats.

Ensuite, nous appliquons une formule de quadrature de Gauss. On se ramène d'abord à une intégrale sur $[-1, 1]$ par le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \xi &: [r_a, r_b] \rightarrow [-1, 1] \\ r &\rightarrow \xi = \frac{2r - r_a - r_b}{r_b - r_a} \end{aligned}$$

où $[r_a, r_b]$ est un segment quelconque.

La formule de quadrature sur $[-1, 1]$ est donnée par :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad (4.13)$$

(qui est exacte pour les polynômes de degré trois).

Après l'approximation en espace et l'inversion de la matrice de masse, on obtient une E.D.O de la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_h^1 \\ U_h^2 \\ U_h^3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Où R_i dénote la partie à droite de l'équation (4.4).

4.1.2. Discrétisation temporelle

Puisque nous avons choisi une discrétisation spatiale à base de polynômes de degré 1 (ordre 2 en espace), nous devons choisir une discrétisation temporelle d'ordre 2. Ainsi, le choix du schéma de Runge Kutta d'ordre 2 est convenable:

Soit U^n la solution à l'instant n , et U^{n+1} la solution à l'instant $n+1$, le schéma de Runge Kutta d'ordre 2 pour un système d'équations différentielles ordinaires de la forme $\frac{dU}{dt} = L(U)$ est de la forme :

$$U^{(1)} = U^n + dt.L(U^n) \quad (4.15)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2} \left(U^n + U^{(1)} + dt.L(U^{(1)}) \right) \quad (4.16)$$

Après les discrétisations spatiale et temporelle décrites précédemment, on obtient une solution approchée $U_h \in V_h^k$. Elle approche la solution U du problème (2.14) à l'ordre deux (Chavent et

Cockburn (1987) et Cockburn et Shu (1991b)). La stabilité impose un $CFL \leq 1/3$. Cette condition est assez restrictive comparée aux autres méthodes. Par exemple la méthode des différences finies (schéma de Yee) est d'ordre deux pour un $CFL \leq \sqrt{2}/2$, et la méthode des volumes finis est d'ordre deux pour un $CFL \leq 1$. Cette condition de stabilité pour la méthode RKDG se traduit par un surcoût en temps de calcul relativement important à discrétisation spatiale identique.

4.2. LIMITATION DE PENTE

En utilisant des approximations constantes par maille, la méthode RKDG se réduit à une méthode volumes finis (Toro, 1997 ; Hirsch, 1990) sur des maillages non structurés et au schéma des différences finies de Godunov (1959) sur les maillages structurés. La méthode RKDG d'ordre supérieur en espace produit des oscillations à proximité des discontinuités (Chavent et Cockburn, 1987 ; Chavent et Salzano, 1982), ce qui peut mener à des instabilités numériques de la solution. Même si les oscillations sont moins graves, elles produisent des solutions non-physiques, telles que des hauteurs d'eau négatives, ce qui est inacceptable. En ce cas, l'utilisation d'un limiteur de pente est cruciale pour assurer la stabilité du schéma.

Dans le cas d'un problème unidimensionnel en espace, la méthode RKDG est interprétée comme une généralisation des schémas de type différences finies de Godunov (Godunov, 1959 ; Van Leer, 1974 ; Van Leer, 1977 ; Van Leer, 1979). Ces schémas de résolution d'ordre supérieur ($k \geq 1$) sont, en général, stabilisés en employant des limiteurs de pentes assurant le caractère TVD (Total Variation Dominated), (voir Toro, 1997 ; Hirsch, 1990), pour que les oscillations non physiques puissent être évitées sans détruire la précision de l'approximation.

Chavent et Salzano (1982) ont construit une version explicite de la méthode RKDG pour la loi de conservation scalaire unidimensionnelle. Ils ont approché la solution en utilisant des polynômes discontinus et linéaires par morceaux. L'opérateur en temps est discrétisé en utilisant le schéma d'Euler explicite. Cependant, cette méthode est instable quel que soit le pas de temps.

Afin de la stabiliser, Chavent et Cockburn (1989) ont adapté un limiteur de pente en suivant l'idée de Van Leer (1979). En respectant un critère de Courant CFL , le schéma obtenu est stable, et de plus il vérifie la propriété TVD. Par contre, ce schéma est d'ordre un en temps et en espace.

Dans un espace multidimensionnel, la méthode des éléments finis discontinus fait toujours face à des difficultés pour atteindre le même degré de convergence que dans le cas unidimensionnel, particulièrement sur des maillages non structurés. La partie délicate concerne la construction des limiteurs de pentes multidimensionnels qui préservent l'ordre supérieur de la convergence. Néanmoins, il a été montré que n'importe quel schéma combiné avec une limitation de pente qui vérifie la propriété TVD est au plus du premier ordre de convergence (Goodman et LeVeque, 1985). Par conséquent, de nombreux efforts ont été réalisés pour la construction de limiteurs de pentes multidimensionnels qui peuvent éliminer les oscillations non physiques sans ajouter une viscosité numérique excessive. Une approche simple dans le cas d'une discrétisation cartésienne est d'employer la méthode des éléments finis discontinus avec des polynômes d'approximations linéaires (P1) au lieu de polynômes quadratiques (Q1) (Gowda et Jaffré, 1993). Cette approche est considérée comme une technique de séparation dimensionnelle (Toro, 1997). Dans ce cas, la reconstruction du gradient peut être effectuée en appliquant une limitation unidimensionnelle séquentiellement dans chaque direction.

Chavent et Jaffré (1986) ont présenté un limiteur de pente multidimensionnel. Ce limiteur est considéré comme une généralisation du limiteur MUSCL de Van Leer (1979).

Dans le cas unidimensionnel, Gowda (1988) et Gowda et Jaffré (1993) ont analysé ce limiteur et prouvé la stabilité de la méthode des éléments finis discontinus avec la propriété TVD. Shu (1987), Cockburn et al. (1989), Cockburn et Shu (1989) ont fait une extension du limiteur MUSCL de Van Leer (1979) à un limiteur de pente généralisé où une exactitude d'ordre $k+1$ est réalisée dans les régions lisses en utilisant la méthode Galerkin discontinue avec des polynômes de degré k pour la discrétisation spatiale et une méthode explicite Runge-Kutta d'ordre $k+1$ pour la discrétisation temporelle. Le limiteur de pente généralisé n'élimine pas totalement les

oscillations près des chocs, mais il préserve l'exactitude du schéma dans les régions lisses. Ainsi, le schéma résultant n'est pas TVD, mais il satisfait une propriété TVB (Total Variation Bounded).

Hoteit et al. (2004) ont constaté que l'extension proposée par Chavent et Jaffré (1986) et Gowda et Jaffré (1993) du limiteur MUSCL dans un espace multidimensionnel ne donne pas de résultats satisfaisants. Les auteurs ont notamment détecté quelques cas avec des maillages triangulaires et rectangulaires où l'opérateur de limitation ne réussit pas à éliminer complètement les oscillations non physiques. L'origine de cet inconvénient est lié au fait que la reconstruction de la solution aux sommets du maillage n'interdit pas de valeurs non physiques aux milieux des arêtes des mailles. En conséquence, cette approche ne satisfait pas le principe du maximum (Hubbard, 1999). Hoteit et al. (2004) ont concentré leurs efforts sur le limiteur de pente présenté par Chavent et Jaffré (1986) et ont proposé une amélioration de la technique de limitation, qui prend désormais en compte les moyennes de la solution sur les arêtes. L'idée principale de cette nouvelle technique de reconstruction et de limitation suit une approche bien connue où le principe du maximum local est défini en imposant certaines contraintes sur la reconstruction de la solution, comme la conservation de la masse.

Nous détaillerons dans la suite deux limiteurs de pente : le limiteur de Cockburn et Shu (1998b) et le limiteur de Hoteit et al. (2004) et nous présentons une amélioration du limiteur de Cockburn et Shu (1998b) pour des discrétisations triangulaires afin d'éviter l'utilisation d'une constante de limitation qui parfois semble difficile à estimer dans certains problèmes hydrauliques. Le limiteur ainsi modifié améliore l'exactitude de la solution, élimine les oscillations non-physiques au sein des discontinuités et préserve l'ordre supérieur du schéma numérique.

4.2.1. Limiteur de Cockburn et Shu

Pour décrire le limiteur, nous utilisons les mêmes notations que dans Cockburn et Shu (1998b). Pour un triangle arbitraire T_0 et ses voisins, T_i , $i = 1, \dots, 3$, les notations b_i , $i = 0, \dots, 3$ et m_i , $i =$

$1, \dots, 3$ désignent respectivement les centres de gravité des triangles et les milieux des côtés du triangle T_0 (voir la figure 4.2).

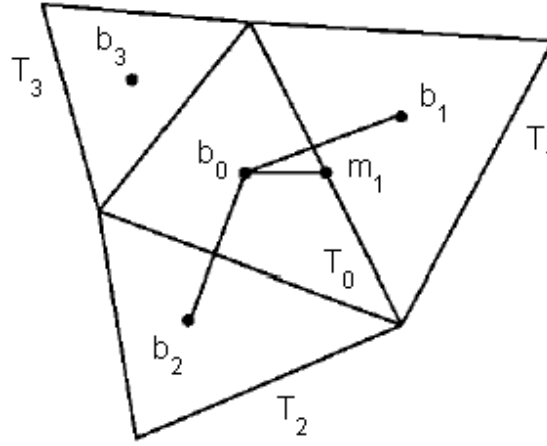


Figure 4.2 : Illustration de la limitation de pente pour les éléments triangulaires.

Choisissant n'importe quel milieu m_1 , on obtient :

$$m_1 - b_0 = \alpha_1 (b_1 - b_0) + \alpha_2 (b_2 - b_0), \text{ pour certains } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+^2}. \quad (4.17)$$

Alors pour n'importe quelle fonction linéaire u_h , on peut définir :

$$\tilde{u}_h(m_1, T_0) = u_h(m_1) - u_h(b_0) \equiv \alpha_1 (u_h(b_1) - u_h(b_0)) + \alpha_2 (u_h(b_2) - u_h(b_0)) = \Delta \bar{u}(m_1, T_0). \quad (4.18)$$

Pour décrire l'opérateur de limitation de pente $\mathcal{A}\Pi_h$, nous considérons n'importe quelle fonction linéaire par morceaux u_h . En utilisant les fonctions de base φ_i , u_h peut être exprimé sur T_0 comme suit :

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_h(m_i) \varphi_i(x, y) = \bar{u}_{T_0} + \sum_{i=1}^3 \tilde{u}(m_i, T_0) \varphi_i(x, y). \quad (4.19)$$

D'abord, nous calculons les quantités :

$$\Delta_i = \tilde{m}(\tilde{u}_h(m_i, T_0), \nu \Delta \bar{u}(m_i, T_0)), \text{ pour certains } \nu > 1, \quad (4.20)$$

où \tilde{m} est la fonction TVB minmod définie par :

$$\tilde{m}(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1 & \text{si } |a_1| \leq M (\Delta x)^2 \\ m(a_1, a_2) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.21)$$

où M est une constante positive donnée ; et m est la fonction minmod, définie par :

$$m(a_1, a_2) = \begin{cases} s \min_{1 \leq n \leq 2} |a_n| & \text{si } s = \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.22)$$

Par conséquent, la reconstruction est effectuée selon les deux cas suivants :

1. Si $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$, on impose :

$$\Lambda \Pi_h u_h = \bar{u}_{T_0} + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \varphi_i(x, y). \quad (4.23)$$

2. Si $\sum_{i=1}^3 \Delta_i \neq 0$, on calcule :

$$pos = \sum_{i=1}^3 \max(0, \Delta_i), \quad neg = \sum_{i=1}^3 \max(0, -\Delta_i), \quad (4.24)$$

et on définit :

$$\theta^+ = \min\left(1, \frac{neg}{pos}\right), \quad \theta^- = \min\left(1, \frac{pos}{neg}\right). \quad (4.25)$$

Ensuite, on impose :

$$\Lambda \Pi_h u_h = \bar{u}_{T_0} + \sum_{i=1}^3 \hat{\Delta}_i \varphi_i(x, y), \quad (4.26)$$

Où

$$\hat{\Delta}_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i). \quad (4.27)$$

Puisque les équations de l'écoulement à surface libre constituent un système d'équations et non pas une équation scalaire, la limitation doit être effectuée dans la base caractéristique des vecteurs propres dans la direction du vecteur $m_i - b_0$. Les variables sont donc transformées par T^{-1} dans la base caractéristique, où T est la matrice des vecteurs propres de la jacobienne suivante :

$$\partial_U \left(E(U(b_0)), G(U(b_0)) \right) \cdot \frac{m_i - b_0}{|m_i - b_0|}. \quad (4.28)$$

4.2.2. Limiteur de Hoteit et al.

Pour décrire la procédure de ce limiteur, on considère un élément triangulaire K_0 entouré par ses voisins T_i , $i = 1, \dots, 3$. (figure 4.2). Le but est de reconstruire les valeurs moyennes $\tilde{u}_h(m_i)$ aux milieux des arêtes. Une condition indispensable, qui doit être satisfaite, est la conservation de la masse sur chaque élément. Pour vérifier le principe du maximum, quelques contraintes sont imposées pour assurer que chaque reconstruction $u_h(m_i)$ est effectuée entre les concentrations moyennes sur les deux éléments adjacents. Pour avoir une limitation moins restrictive, les

reconstructions $u_h(m_i)$ sont tenues le plus proche possible des valeurs initiales $\tilde{u}_h(m_i)$. Le problème d'optimisation résultant à résoudre est donc :

Pour des concentrations initiales $(\tilde{u}_h(m_1), \tilde{u}_h(m_2), \tilde{u}_h(m_3))$, trouver $u_h(b_0)$ comme étant la solution du problème suivant :

$\min_w \|W - \tilde{u}_h(b_0)\|_2$, en satisfaisant les contraintes :

$$W(b_0) = \frac{1}{3}(u_h(m_1) + u_h(m_2) + u_h(m_3)) = u_h(b_0) \quad (4.29)$$

$$\forall \alpha \in [0, 1],$$

$$(1 - \alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \min(\tilde{u}_h(b_1), \tilde{u}_h(b_0)) \leq u_h(m_1) \leq (1 - \alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \max(\tilde{u}_h(b_1), \tilde{u}_h(b_0))$$

$$(1 - \alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \min(\tilde{u}_h(b_2), \tilde{u}_h(b_0)) \leq u_h(m_2) \leq (1 - \alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \max(\tilde{u}_h(b_2), \tilde{u}_h(b_0))$$

$$(1 - \alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \min(\tilde{u}_h(b_3), \tilde{u}_h(b_0)) \leq u_h(m_3) \leq (1 - \alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \max(\tilde{u}_h(b_3), \tilde{u}_h(b_0)) \quad (4.30)$$

Dans Hoteit et al. (2004) la solution de ce problème est complètement détaillée. Les auteurs prouvent que le limiteur de pente élimine complètement les oscillations pour $\alpha = 1$. Il faut remarquer qu'ici le limiteur n'a été abordé que pour une équation scalaire.

4.2.3. Limiteur de pente modifié

Nous avons vu que les limiteurs de pente décrits ci-dessus dépendent de certains nombres positifs

constants. Le choix de ces nombres dépend de la solution du problème et du maillage du domaine. Ceux-ci peuvent rendre difficile le choix de ces nombres pour éliminer les oscillations non-physiques et préserver en même temps l'ordre supérieur du schéma dans les régions « lisses ». Dans cette section, nous présentons une modification simple dans la fonction TVB minmod définie dans l'équation (4.21) pour éviter l'utilisation du nombre constant. Ainsi les pentes sont limitées de sorte que la solution au milieu des arrêtes soit encadrée par les solutions moyennes des mailles voisines :

$$\overline{U}_{T_0}^{min} \leq u_h(m_i) \leq \overline{U}_{T_0}^{max}, \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.31)$$

où $\overline{U}_{T_0}^{min}$, $\overline{U}_{T_0}^{max}$ sont le minimum (respectivement le maximum) des solutions moyennes des mailles voisines de la maille T_0 .

$\overline{U}_{T_0}^{min} = \min(u_h(b_1), u_h(b_2), u_h(b_3))$ et $\overline{U}_{T_0}^{max} = \max(u_h(b_1), u_h(b_2), u_h(b_3))$ et la quantité Δ_i définie dans l'équation (4.20) sera exprimée comme suit:

$$\Delta_i = \begin{cases} u_h(m_i) - u_h(b_0) & \text{si } \overline{U}_{T_0}^{min} \leq u_h(m_i) \leq \overline{U}_{T_0}^{max} \\ m(u_h(m_i) - u_h(b_0), \nu \Delta u(m_i, T_0)) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.32)$$

Par conséquent, le limiteur de pente modifié dépend seulement des solutions dans les mailles voisines et n'exige pas le choix d'une constante pour la limitation, comme dans le cas du limiteur de pente de Cockburn et Shu (1998b) et du limiteur de pente de Hoteit et al. (2004).

4.3. CHOIX DU LIMITEUR DE PENTE

Cette partie est consacrée à la comparaison des limiteurs de pentes présentées dans la section précédente. Celle-ci est faite sur différents problèmes hydrauliques possédant des solutions

analytiques ou associés à des résultats expérimentaux et dont la solution contient des discontinuités. Cette partie du travail a été publiée dans “**International Journal for Numerical Methods in Fluids**” vol. 59(4): 423–442. Les résultats numériques sont présentés dans la liste des publications “An improvement of classical slope limiters for high-order discontinuous Galerkin method”.

4.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté un schéma numérique utilisant l’approximation spatiale de type élément fini discontinu de Galerkin couplé à une discrétisation temporelle de type Runge-Kutta appliqué aux équations de Barré de Saint Venant 2D. Les solutions obtenues sont P^I par morceaux, et approchent la solution exacte à l'ordre deux en temps et en espace. Le caractère discontinu de la méthode et l'utilisation des triangles comme volume d'intégration, nous permet de traiter des problèmes avec des géométries quelconques. La méthode RKDG est conçue avec une procédure de limitation de pente qui permet d’éviter la génération de fausses oscillations aux voisinages des forts gradients. Deux limiteurs de pente ceux de Cockburn et Shu (1998b) et Hoteit et al. (2004) sont aussi présentés et détaillés. Une modification du limiteur de pente de Cockburn et Shu (1998b) est proposée pour des discrétisations triangulaires afin d’éviter l'utilisation d’une constante de limitation qui parfois semble difficile à estimer dans certains problèmes hydrauliques. En se basant sur les résultats de la comparaison des différents limiteurs (liste des publications “An improvement of classical slope limiters for high-order discontinuous Galerkin method”), nous constatons que le limiteur modifié améliore la précision de la solution, élimine les oscillations non-physiques au sein des discontinuités et préserve l’ordre supérieur du schéma numérique. En plus, il évite la difficulté de choisir une constante spécifique pour la limitation qui existe dans les autres limiteurs de pente. On verra dans le chapitre 5 une comparaison de cette méthode avec la méthode volume fini décrite dans le chapitre précédent du point de vue qualitatif et quantitatif.

5

Comparaison des méthodes numériques sur des problèmes hydrauliques stationnaires et transitoires

Dans ce chapitre, nous validons et comparons les schémas numériques décrits dans les deux chapitres 3 et 4, et ceci sur différents problèmes hydrauliques transitoires et stationnaires : le premier test est un problème transitoire concernant l'écoulement de l'eau dans un canal lors de la rupture d'un barrage. Le deuxième est un problème de rupture partiel de barrage dans un canal rectangulaire. Le troisième cas est un problème stationnaire concernant l'écoulement transitionnel passant du régime torrentiel au régime fluvial (ce problème sera dénommé dans la suite sous le nom du problème du ressaut hydraulique oblique). Le quatrième essai est un problème transitoire dans un canal convergent-divergent lors de la rupture d'un barrage. Le cinquième test est un problème stationnaire concernant l'écoulement dans un canal à lit concave. Le sixième cas est un problème stationnaire concernant l'écoulement fluvial dans un canal convergent-divergent. Enfin le septième test est un problème stationnaire concernant un écoulement mixte (fluvial et torrentiel) et un écoulement torrentiel. Le choix de ces problèmes pour la comparaison des deux schémas numériques se justifie pour les raisons suivantes :

5. Comparaison des méthodes numériques

Problème	Solution analytique ou résultats expérimentaux	Terme source	Données 1D ou 2D	Ressaut hydraulique	Stationnaire ou transitoire
Barrage idéal	Analytique	Non	1D	Oui	Transitoire
Rupture partielle d'un barrage	Expérimentaux	Non	2D	Non	Transitoire
Ressaut hydraulique oblique	Analytique	Non	2D	Oui	Stationnaire
Rupture d'un barrage dans un canal convergent divergent	Expérimentaux	Oui	2D	Oui	Transitoire
Ecoulement dans un canal à lit concave	Analytique	Oui	1D	Oui	Stationnaire
Ecoulement fluvial dans un canal convergent divergent	Expérimentaux	Oui	2D	Non	Stationnaire
Ecoulement mixte et torrentiel dans un canal convergent	Expérimentaux	Oui	2D	Oui	Stationnaire

Tableau 5.1 : Caractéristiques des différents cas tests.

- Ces problèmes admettent des solutions analytiques ou disposent des résultats expérimentaux, ce qui permet de comparer la solution simulée avec la solution exacte ou mesurée.
- Certains problèmes sont de type transitoire, où les variables de l'écoulement varient évidemment dans le temps, tandis que les autres problèmes sont de type stationnaire.
- Les solutions de ces problèmes contiennent des chocs et des discontinuités.

Pour plus des détails voir tableau 5.1.

5.1. PROBLEME DU BARRAGE IDEAL

Dans ce problème nous considérons un canal horizontal de largeur, $B = 10 \text{ m}$ et de longueur, $L = 200 \text{ m}$. Le lit du canal est lisse (au sens où il ne génère pas de frottement sur l'écoulement de l'eau). Le barrage se trouve au milieu du canal, et à l'instant $t = 0$, le barrage est totalement supprimé et l'eau se relâche sous forme de deux vagues, l'une se dirige vers l'amont et l'autre vers l'aval (figure 5.1).

Dans ce problème, on s'intéresse à la simulation numérique de l'écoulement de l'eau lors de la rupture du barrage. Les conditions initiales de l'écoulement sont formées d'un débit partout nul dans le canal, et une hauteur d'eau discontinue au barrage. La hauteur à l'amont du barrage est fixée à $h_{\text{amont}} = 10 \text{ m}$, et la hauteur à l'aval du barrage varie pour changer la nature de l'écoulement. Puisque le canal est fermé, l'écoulement est donc « réfléchitif » à l'amont et à l'aval, c'est-à-dire, pour les conditions aux limites aval et amont, la hauteur d'eau est égale à celle du nœud voisin, mais le débit est l'opposé de celui du nœud voisin.

Deux cas sont considérés afin de montrer la robustesse des schémas numériques : Dans le premier cas, l'écoulement est partout fluvial, et le nombre de Froude est donc inférieur à 1. Dans ce cas,

la hauteur aval doit être choisie de sorte que le rapport h_{aval} / h_{amont} soit supérieur ou égal à 0.5 m. Dans ce travail, la hauteur aval est choisie égale à $h_{aval} = 5 \text{ m}$. Dans le deuxième cas, l'écoulement est graduellement varié, il passe donc du régime fluvial au régime torrentiel et inversement. Dans ce cas, la hauteur aval doit être choisie de sorte que le rapport h_{aval} / h_{amont} soit inférieure à 0.5 m. Dans ce travail, la hauteur aval est choisie égale à $h_{aval} = 1 \text{ m}$.

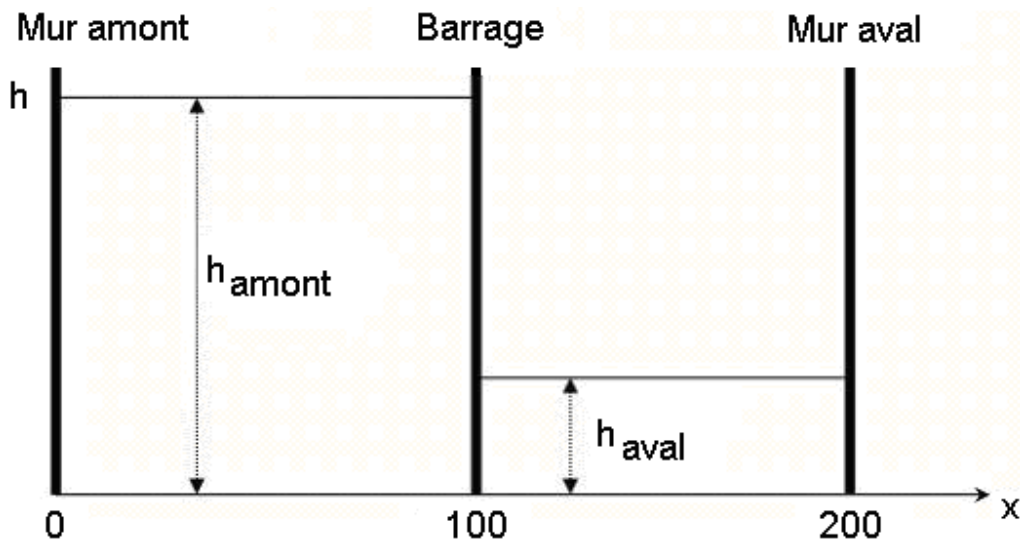


Figure 5.1 : Conditions initiales du problème de barrage.

Le domaine du problème est discrétisé en 672 mailles triangulaires. Nous illustrons dans cette simulation la hauteur d'eau 3 secondes après de la rupture du barrage. La figure 5.2 montre, les résultats de la simulation numérique du problème du barrage idéal avec les deux schémas numériques RKDG et VF pour les deux cas (fluvial et torrentiel). Pour les deux types d'écoulement, on remarque que les solutions analytiques du problème dans les régions lisses sont correctement capturées par les deux méthodes. Cependant on peut remarquer que la formulation RKDG est plus précise dans les régions où il y a des discontinuités.

Comme le problème du barrage admet une solution analytique, une vérification du schéma numérique avec les différents solveurs de Riemann se fait en comparant la solution simulée numériquement et la solution analytique. Dans ce but, nous calculons l'erreur en norme L_2 entre

5. Comparaison des méthodes numériques

la solution analytique et la solution numérique. Cette norme est calculée de la façon suivante : Si $f_0 = (f_0^1; f_0^2; \dots; f_0^N)$ représente la solution analytique dans le canal aux différents centres des mailles $(1; 2; \dots; N)$, et $f = (f^1; f^2; \dots; f^N)$ la solution simulée, alors l'erreur en norme L_2 entre f et f_0 est égale à :

$$\|f - f_0\|_2 = \left((f_0^1 - f^1)^2 + (f_0^2 - f^2)^2 + \dots + (f_0^N - f^N)^2 \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

et l'erreur relative sera définie par :

$$E = \frac{\|f - f_0\|_2}{\|f_0\|_2} \quad (5.2)$$

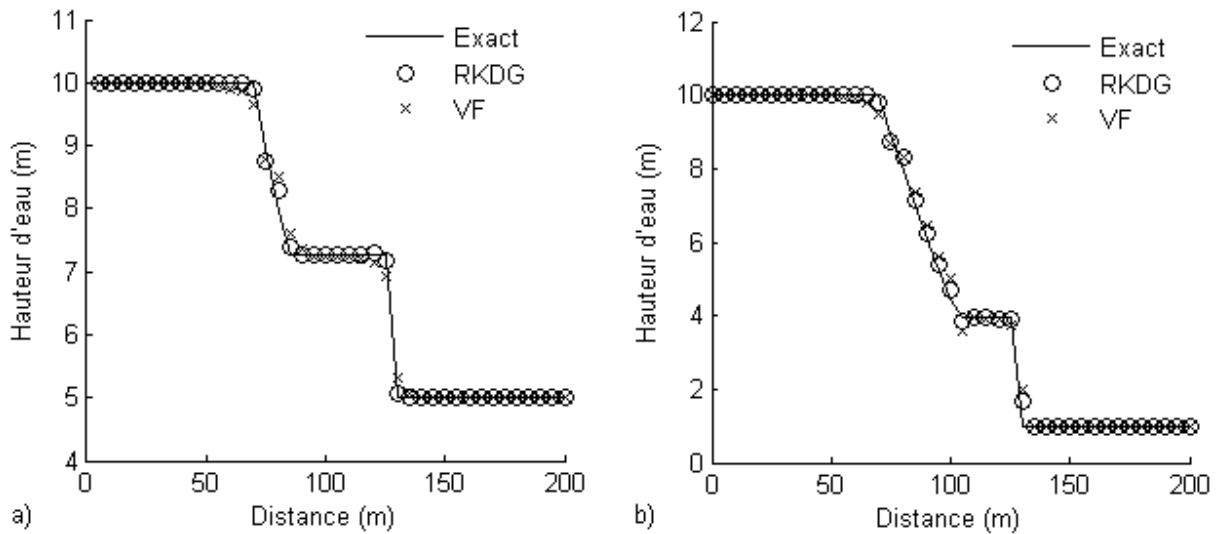


Figure 5.2 : Hauteur d'eau exacte et simulé par les deux méthodes ; a) cas fluvial, b) cas torrentiel.

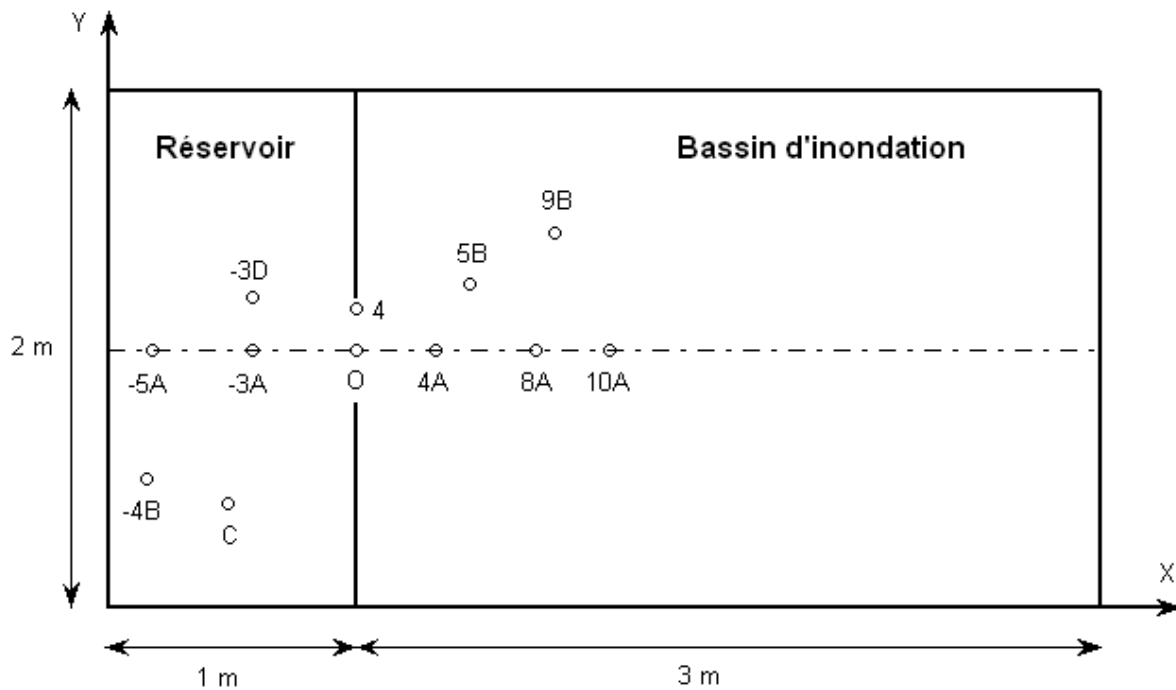
Le tableau 5.2 donne, pour les deux cas (fluvial et torrentiel), les erreurs relatives en norme L_2 entre la hauteur exacte et les hauteurs simulées par les deux méthodes VF et RKDG. Le schéma

5. Comparaison des méthodes numériques

RKDG donne de meilleurs résultats dans les deux types d'écoulement. Le schéma VF donne des résultats satisfaisants mais avec une erreur légèrement plus grande que celle obtenue par le schéma RKDG.

Méthodes	Cas fluvial	Cas torrentiel
RKDG	0.94 %	2.11 %
VF	1.84 %	3.68 %

Tableau 5.2 : Les erreurs relatives en norme L_2 du problème de barrage.



Location	Stations											
	-5A	-3A	-3D	-4B	C	O	4	4A	8A	10A	5B	9B
X (m)	0.18	0.58	0.58	0.155	0.48	1	1	1.322	1.722	2.02	1.454	1.802
Y (m)	1.00	1.00	1.20	0.50	0.40	1	1.16	1	1	1	1.25	1.45

Figure 5.3 : Disposition expérimentale du réservoir et du bassin d'inondation (Fraccarollo et Toro, 1996).

5.2. RUPTURE PARTIELLE D'UN BARRAGE

Les deux schémas numériques (volume fini et élément fini discontinu) sont validés par rapport à des données expérimentales concernant la propagation d'inondation dues à une rupture partielle d'un barrage (Fraccarollo et Toro, 1996).

Le réservoir et le bassin d'inondation expérimentaux sont présentés en figure 5.3 avec les stations d'observation (les noms des stations sont les mêmes que dans Fraccarollo et Toro (1996)). Le réservoir est de 1 m de longueur et de 2 m de largeur, alors que le bassin d'inondation est de 3 m de longueur et de 2 m de largeur. Les frontières du bassin d'inondation sont toutes ouvertes. La rupture partielle de 0.4 m est localisée au milieu du barrage. Le lit du canal est horizontal. La hauteur initiale dans le réservoir à l'amont du barrage est de 0.6 m. Le bassin d'inondation est initialement sec. Les valeurs de la hauteur d'eau ont été obtenues en convertissant des lectures d'indicateur de pression. En outre, quelques stations ont été également équipées d'une lecture directe des mesures de hauteur. On trouvera dans Fraccarollo et Toro (1996) tous les détails sur les données expérimentales.

Les schémas numériques présentés dans ce travail ne peuvent pas considérer une hauteur d'eau absolument nulle (celle qui existe au début dans le bassin d'inondation). Nous considérons ainsi une hauteur d'eau de 0.00001 m dans le bassin d'inondation au début de la simulation. Bien que le schéma RKDG fonctionne correctement dans cette configuration, le schéma VF du second ordre a des difficultés à simuler les fonds secs. Ce dernier ne fonctionne pas si le rapport de la hauteur d'eau dans le bassin d'inondation sur la hauteur d'eau dans le réservoir est inférieur à 0.005 (Jha et al., 1995). Cette restriction signifie que le schéma VF du second ordre ne peut pas être appliqué tant que la hauteur d'eau dans toute maille n'excède pas 0.003 m. Ainsi nous appliquons le schéma VF du premier ordre tant que la hauteur d'eau reste inférieure à 0.003 m puis nous appliquons le schéma VF du second ordre au delà de cette hauteur.

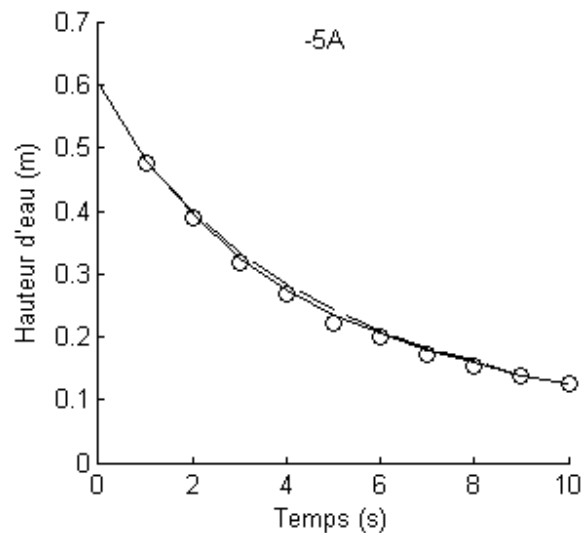
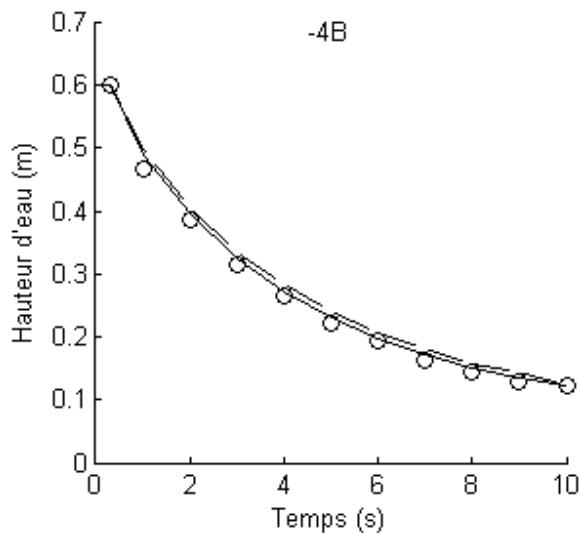
Le réservoir et le bassin d'inondation sont discrétisés en 1400 mailles triangulaires. Les figures 5.4 et 5.5 comparent les hauteurs d'eau (respectivement les vitesses) calculées dans le réservoir

5. Comparaison des méthodes numériques

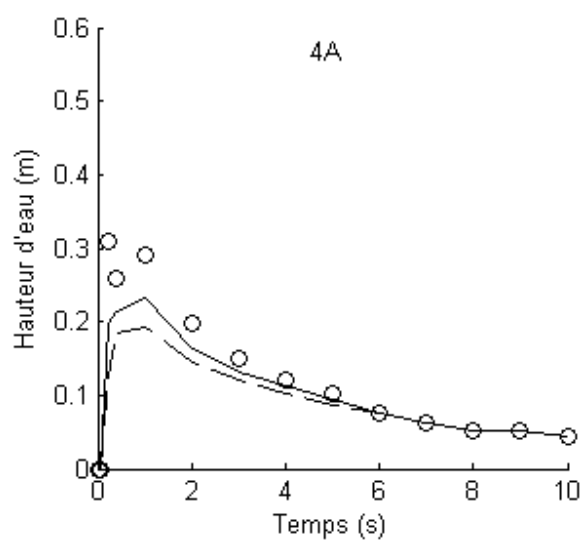
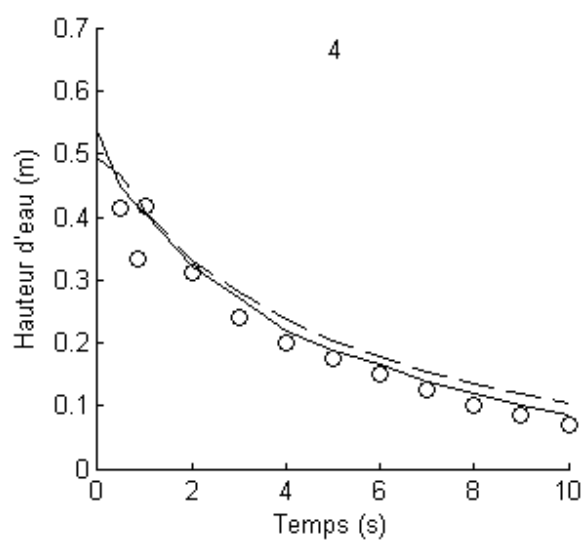
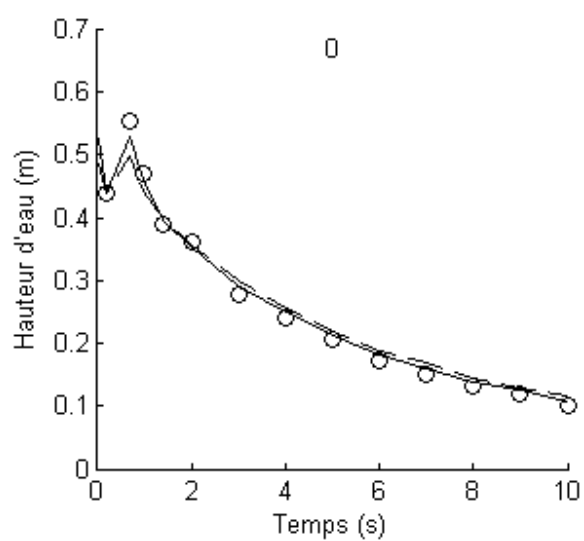
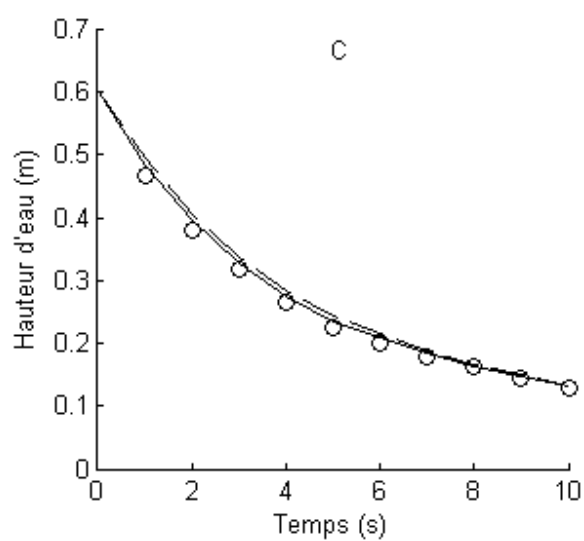
avec les données observées. D'après les figures 5.4 et 5.5, il apparaît que les hauteurs d'eau et les vitesses simulées sont en bon accord avec les données expérimentales. L'évolution de la hauteur d'eau et de la vitesse est assez bien décrite avec les deux schémas numériques, avec un léger avantage pour la méthode RKDG.

Ce qui précède démontre clairement que les modèles présentés dans ce mémoire reproduisent correctement la profondeur et les vitesses observées suivant la rupture d'un barrage.

Les modèles sont encore vérifiés afin de tester leur capacité à prédire la variation de la surface libre sur des autres problèmes hydrauliques dans la suite de ce chapitre.



5. Comparaison des méthodes numériques



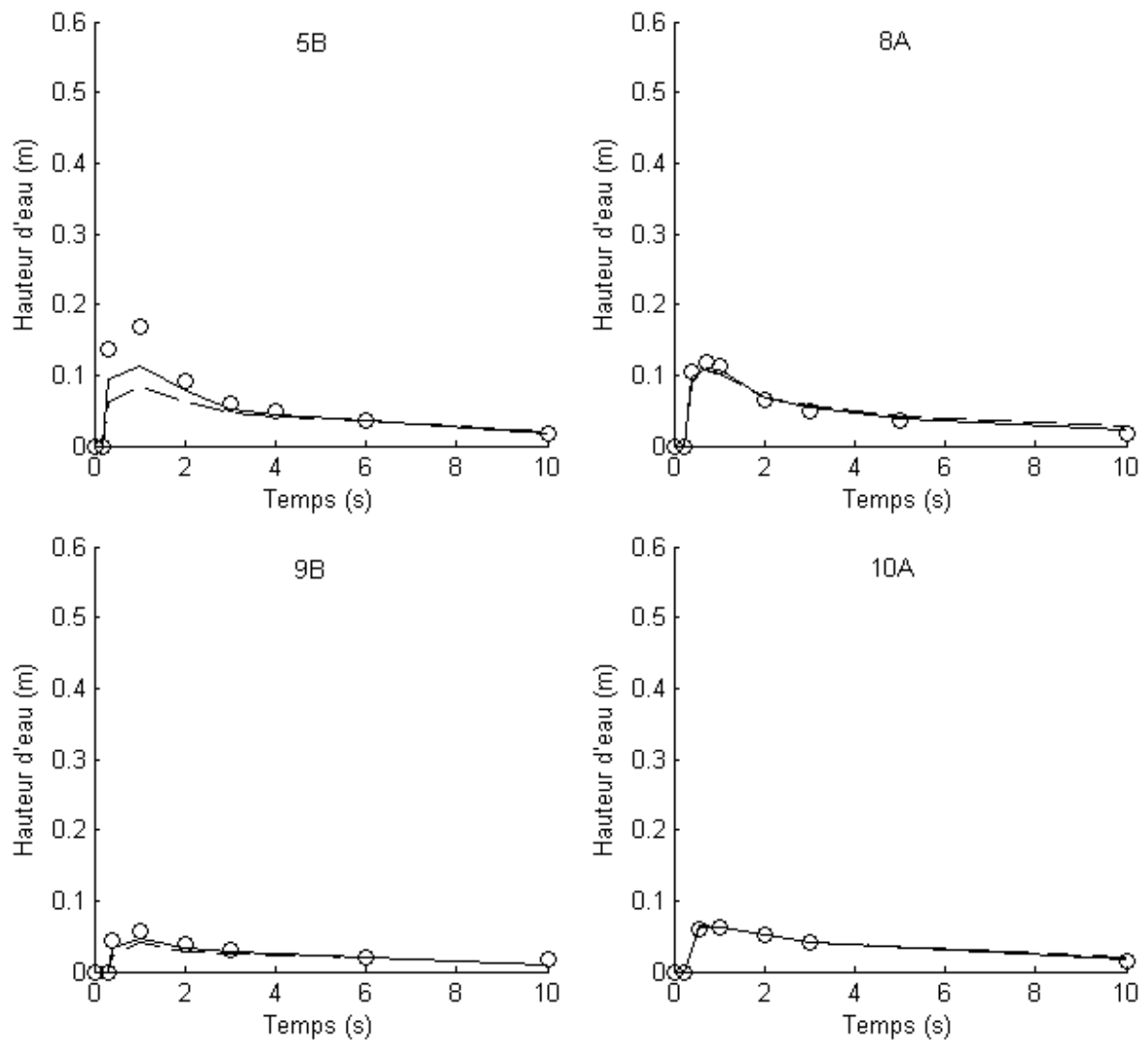


Figure 5.4 : Hauteurs d'eau calculées et observées sur les différentes stations. — RKDG ; -- VF ; o observée.

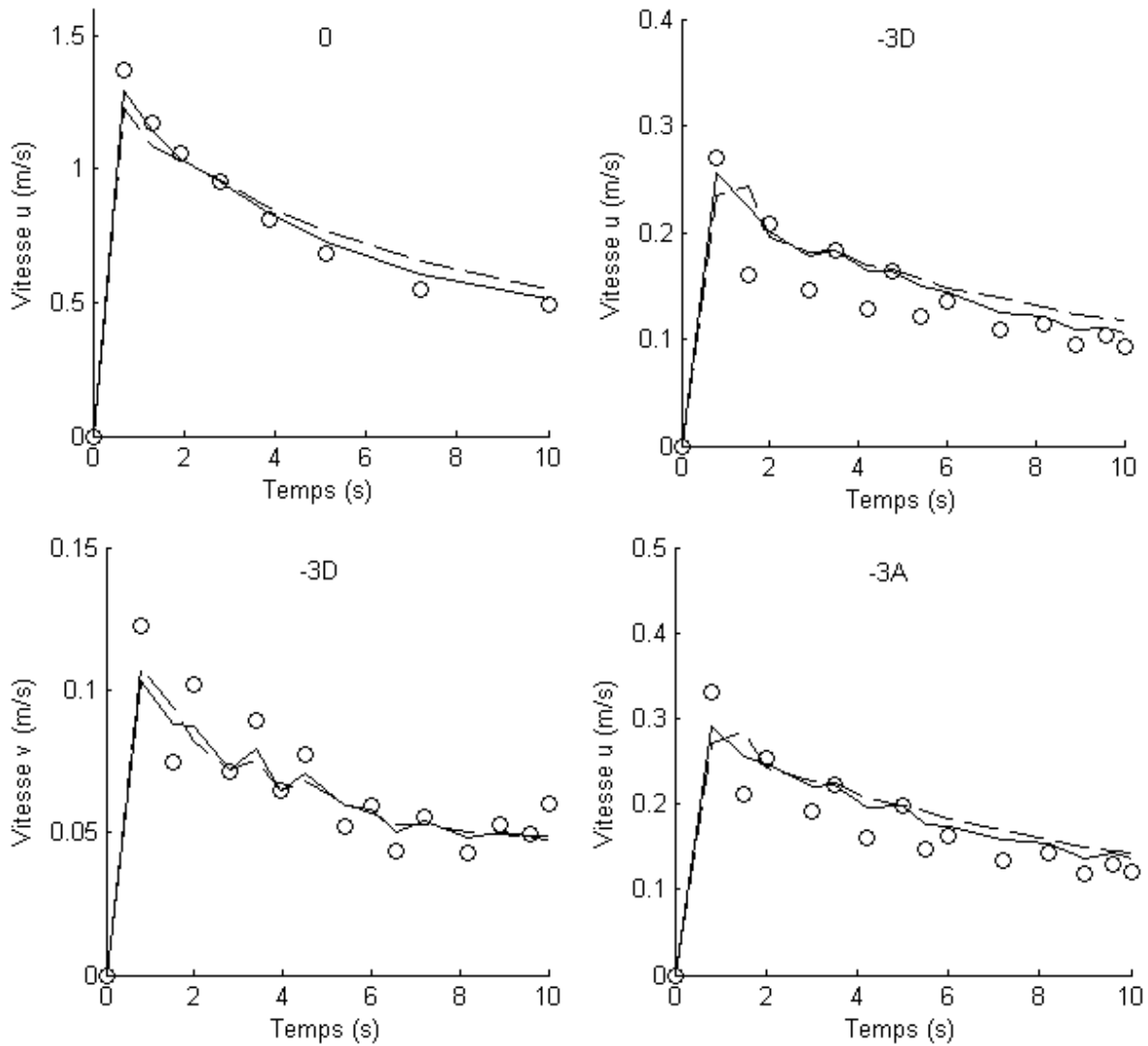


Figure 5.5 : Vitesses calculées et observées sur certaines stations. — RKDG ; -- VF ; o observée.

5.3. RESSAUT HYDRAULIQUE OBLIQUE

Le ressaut hydraulique oblique est induit au moyen d'une interaction entre un écoulement torrentiel et un mur convergent dévié selon un angle $\alpha = 8.95^\circ$. L'onde du choc est formée avec un angle β . La définition du domaine physique du problème et un diagramme schématique de

5. Comparaison des méthodes numériques

l'onde du choc sont présentés en figure 5.6a. Le domaine est discrétisé en 1200 mailles triangulaires (Figure 5.6b).

Les conditions initiale et amont sont la hauteur d'eau $h_0 = 1\text{ m}$, les vitesses $u_0 = 8.57\text{ m/s}$ et $v_0 = 0\text{ m/s}$ (correspondant à un nombre de Froude de 2.74). Ces conditions aux limites sont appliquées à l'amont du canal. Une sortie libre est imposée à l'aval et une vitesse normale égale à 0 est imposée sur les « murs » du canal. L'écoulement stationnaire résultant doit être divisé en deux régions séparées par un ressaut hydraulique oblique sous un angle $\beta = 30^\circ$ avec la direction amont de l'écoulement. A l'aval de ce ressaut, la solution exacte est donnée par $h = 1.5\text{ m}$ et $|V| = 7.9556\text{ m/s}$ (Alcrudo et al., 1992).

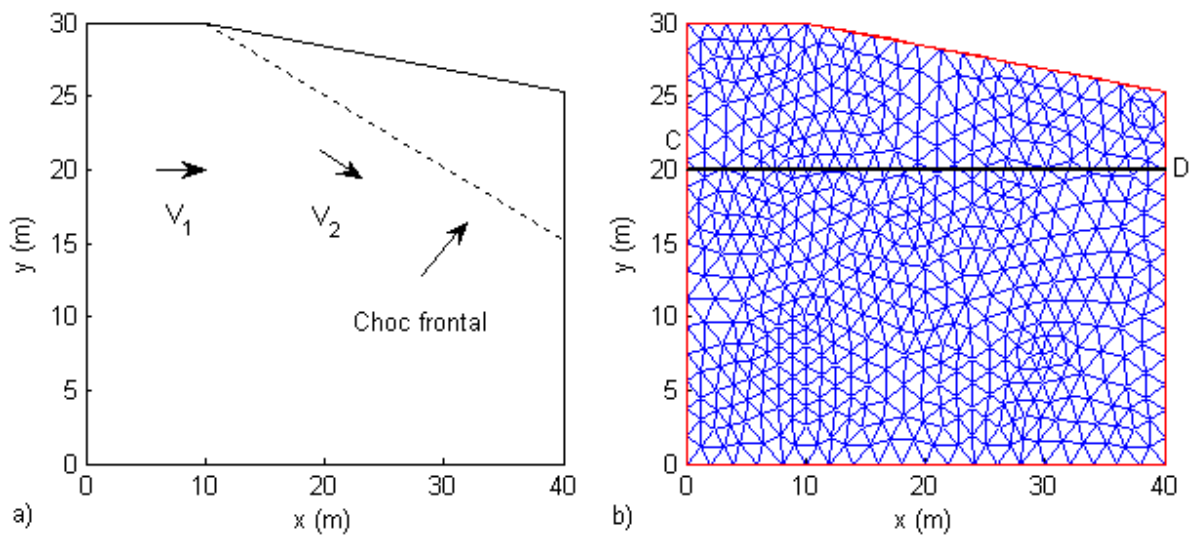


Figure 5.6 : a) Définition du problème du ressaut hydraulique oblique ; b) le maillage non-structuré du problème.

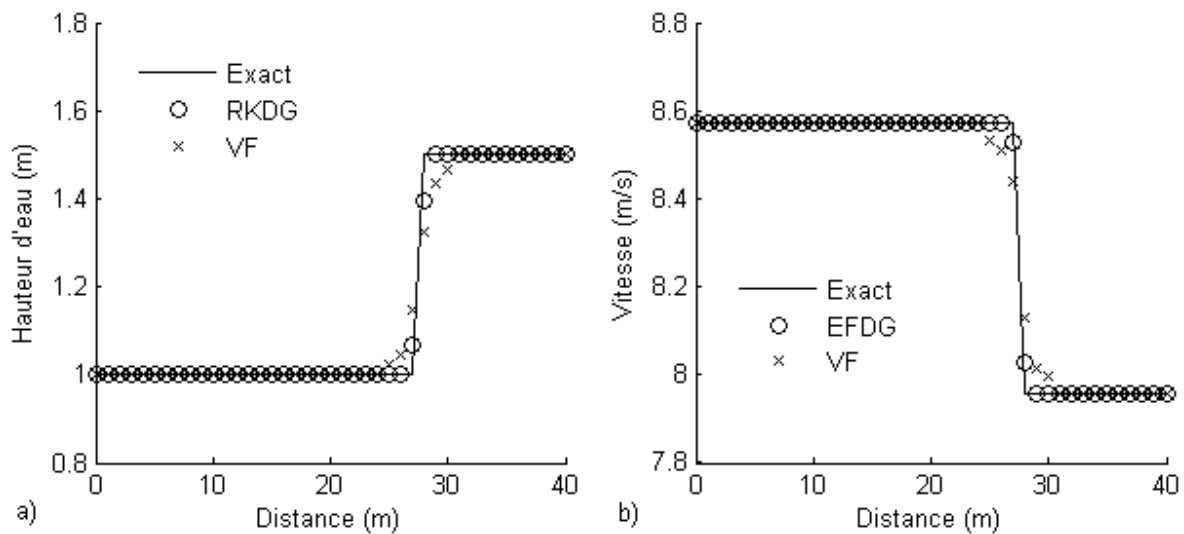


Figure 5.7 : a) Hauteurs d'eau exactes et simulées ; b) vitesses exactes et simulées.

Les comparaisons du profil de la hauteur d'eau et de la vitesse suivant la ligne longitudinale ('CD' montrée dans la figure 5.6b) sont représentées dans les figures 5.7a et 5.7b respectivement. De façon analogue au problème de rupture du barrage, les résultats obtenus par la méthode RKDG sont légèrement « supérieurs » que ceux obtenus par la méthode VF surtout au niveau des chocs et discontinuités où on peut remarquer l'avantage de la méthode RKDG pour la capture du ressaut hydraulique. On constate aussi que dans les régions « lisses », les deux méthodes donnent des résultats similaires. La comparaison quantitative des erreurs relatives en norme L_2 entre les résultats simulés et la solution analytique sont montrées dans le tableau 5.3.

Méthodes	Hauteur d'eau	Vitesse
RKDG	1.69 %	0.15 %
VF	3.25 %	0.45 %

Tableau 5.3 : Les erreurs relatives en norme L_2 du problème du ressaut hydraulique oblique.

5.4. RUPTURE D'UN BARRAGE DANS UN CANAL CONVERGENT DIVERGENT

5. Comparaison des méthodes numériques

Ce cas test ainsi que les données expérimentales ont été fournis par Bento (1996). Dans cet exemple, une propagation d'onde due à une rupture de barrage dans un canal convergent-divergent est étudiée. L'onde se propageant vers l'avant est partiellement reflétée par les murs de la contraction produisant une onde « douce » à l'aval du canal. Des écoulements fluviaux et torrentiels sont produits le long du canal. La géométrie du domaine est détaillée sur la figure 5.8. Elle se compose d'un canal rectangulaire (de longueur 19.3 m, de largeur 0.5 m).

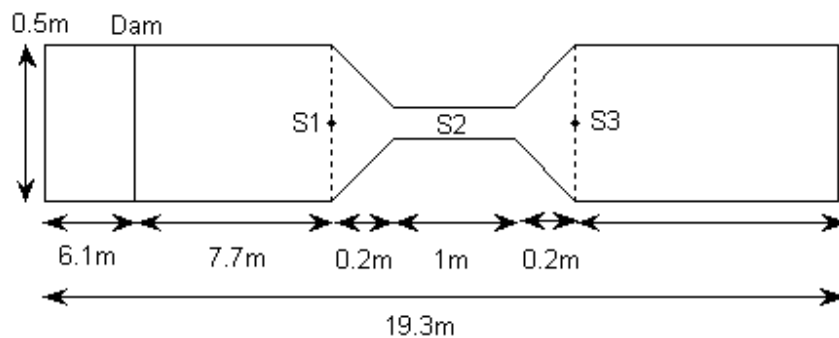


Figure 5.8 : La géométrie du modèle physique.

Le barrage est localisé 6.1 m à l'aval de la première section du canal. La première section de la contraction est située à 7.7 m à l'aval du barrage. La contraction est de 1 m de longueur et de 0.1 m de largeur et forme un angle de 45° avec les murs du canal. Le lit du canal est horizontal.

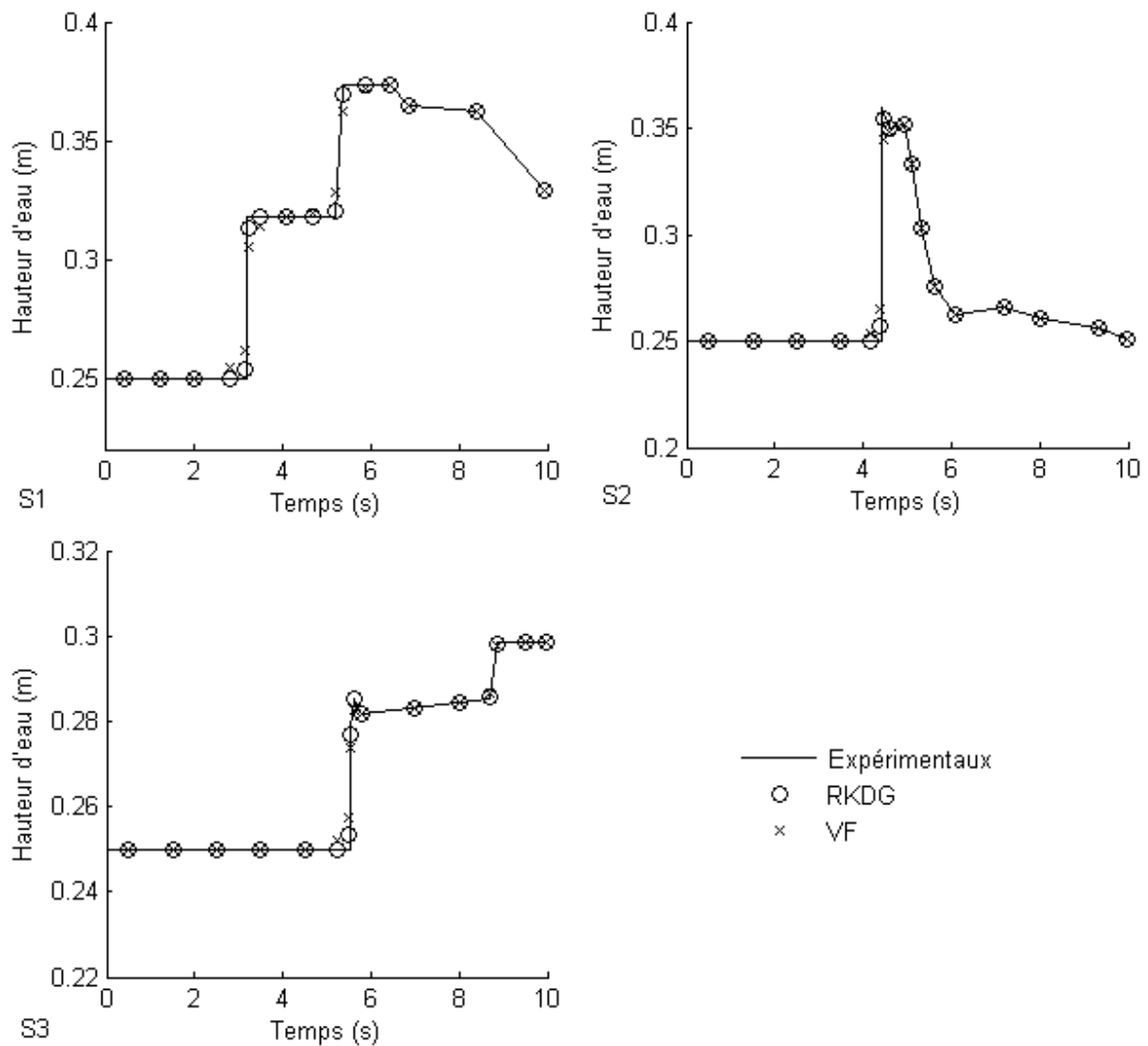


Figure 5.9 : Comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques obtenus 10 s après la rupture du barrage : a) au point de mesure S1, b) au point de mesure S2, c) au point de mesure S3.

Les conditions initiales consistent en un écoulement stationnaire avec une hauteur d'eau de 0.3 m à l'amont du barrage et de 0.25 m à l'aval. Les conditions aux limites sont des conditions de type murs partout excepté à la sortie qui est considérée libre. Le coefficient de frottement de Manning est de 0.01. Le maillage utilisé est formé de 10578 mailles triangulaires.

La figure 5.9 montre la comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques concernant l'évolution temporelle de la hauteur d'eau pendant 10 s aux trois points $S1$, $S2$ et $S3$. Comme montré dans la figure 5.8, $S1$ est situé avant la contraction et nous observons l'arrivée d'une onde provoquée par la rupture du barrage et d'une onde réfléchie produite par les murs de la contraction. $S2$ est à l'intérieur du réservoir et là nous pouvons seulement voir l'arrivée d'une onde « lisse » et enfin, $S3$ est situé après la contraction. Les erreurs relatives en norme L_2 entre les résultats obtenus par les deux schémas numériques et les données expérimentales sont présentées dans le tableau 5.4.

Méthodes	Point de mesure (S1)	Point de mesure (S2)	Point de mesure (S3)
RKDG	0.65 %	0.76 %	0.34 %
VF	1.92 %	1.86 %	0.88 %

Tableau 5.4 : Les erreurs relatives en norme L_2 du problème de la rupture du barrage dans un canal convergent-divergent.

Comme on l'observe en figure 5.9, la méthode VF a un peu plus de mal à bien représenter les fortes discontinuités et l'ordre supérieur du schéma n'est pas préservé au niveau des discontinuités. Au contraire, la méthode RKDG donne le meilleur accord avec les données expérimentales. Elle élimine les oscillations au niveau des chocs et discontinuités et garantit l'exactitude et l'ordre supérieur du schéma dans ces régions.

5.5. ECOULEMENT DANS UN CANAL A LIT CONCAVE

Dans cette section, nous considérons le problème de l'écoulement dans un canal prismatique rectangulaire où le lit possède une forme géométrique non régulière. Le lit du canal est concave, il a la forme d'une bosse comme l'indique la figure 5.10.

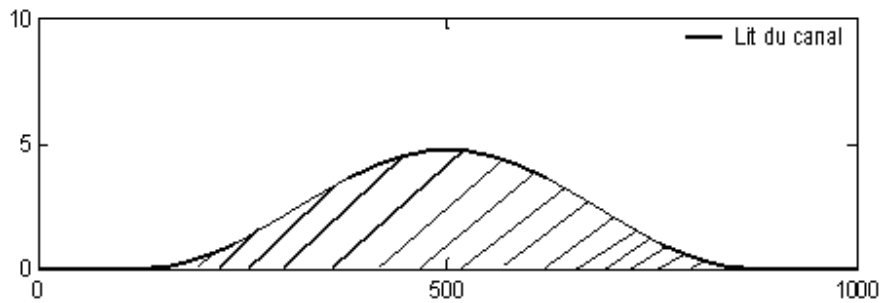


Figure 5.10 : Lit concave du canal.

La longueur du canal est de 1000 m, et sa largeur est 1 m. Dans cet exemple, il n'y a pas d'effets de frottements. La bosse du lit commence en $x=125\text{ m}$ et se termine en $x=875\text{ m}$. L'expression algébrique du lit est donnée par :

$$z(x) = 4.75 \sin^2\left(\frac{x-125}{750}\pi\right) \quad (5.3)$$

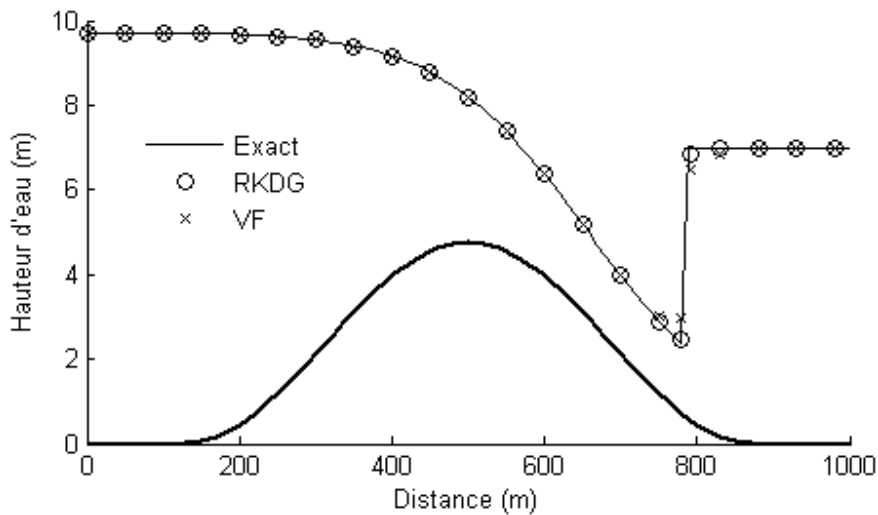


Figure 5.11 : Comparaison entre les hauteurs d'eau simulées et la solution analytique.

Où z représente le niveau du lit par rapport à une altitude constante fixe, et x la distance longitudinale. Dans cet exemple, l'écoulement démarre en régime fluvial, atteint son régime

critique au sommet de la bosse, passe en régime torrentiel et se termine en régime fluvial à travers un ressaut hydraulique localisé juste avant la fin de la bosse.

Méthodes	Hauteurs d'eau
RKDG	0.54 %
VF	2.21 %

Tableau 5.5 : Erreurs relatives en norme L_2 du problème du canal à lit concave.

Pour les conditions aux limites, nous imposons un débit $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ à l'amont du canal et une hauteur d'eau $h = 7 \text{ m}$ à l'aval du canal. Le domaine physique est discrétisé en 3422 mailles triangulaires. Les profils des hauteurs d'eau calculés le long de la ligne centrale du canal sont comparés à la solution analytique du problème (Garcia-Navarro et al. 1992) sur la Figure 9. Dans le tableau 5.5, les erreurs relatives en norme L_2 des deux schémas numériques sont listées. On peut remarquer que les solutions simulées se comparent bien à la solution exacte et qu'elles sont de même qualité dans les régions lisses. Cependant, on remarque que le schéma RKDG s'est montré capable de bien représenter la discontinuité de la solution (au niveau du ressaut hydraulique) où on peut notamment apprécier la supériorité de RKDG par rapport au VF.

5.6. ECOULEMENT FLUVIAL DANS UN CANAL CONVERGENT DIVERGENT

Dans ce paragraphe, la qualité des schémas numériques au sein d'un écoulement fluvial est vérifiée en les comparant aux mesures disponibles de Soulis (1997). Un tel écoulement a été développé dans une canalisation convergente-divergente. Figure 5.12 montre la vue schématique dans le plan et la géométrie de la canalisation examinée. Dans la région amont de l'écoulement, la largeur est égale à 0.25 m. Ensuite la canalisation converge (à une distance axiale de 0.5 m) et à la distance axiale de 1.15 m la largeur prend la moitié de la valeur à l'entrée c'est à dire 0.125 m avec un angle de contraction de 10.88° . La région de contraction a une longueur de 0.30 m où la

largeur garde une valeur constante de 0.125 m. À une distance axiale de 0.95 m à partir du point de la convergence initiale, la paroi latérale de canalisation diverge avec un angle d'expansion de 21.037° . Par la suite, à 1.275 m du point de la convergence initiale, la largeur reprend de nouveau la valeur de 0.25 m. La valeur du coefficient de frottement de l'écoulement (coefficient de Chezy) est fixée à 120.0. Un maillage de 1200 mailles triangulaires a été utilisé pour la simulation de la géométrie de la canalisation, avec des conditions aux limites correspondant à des écoulements fluviaux.

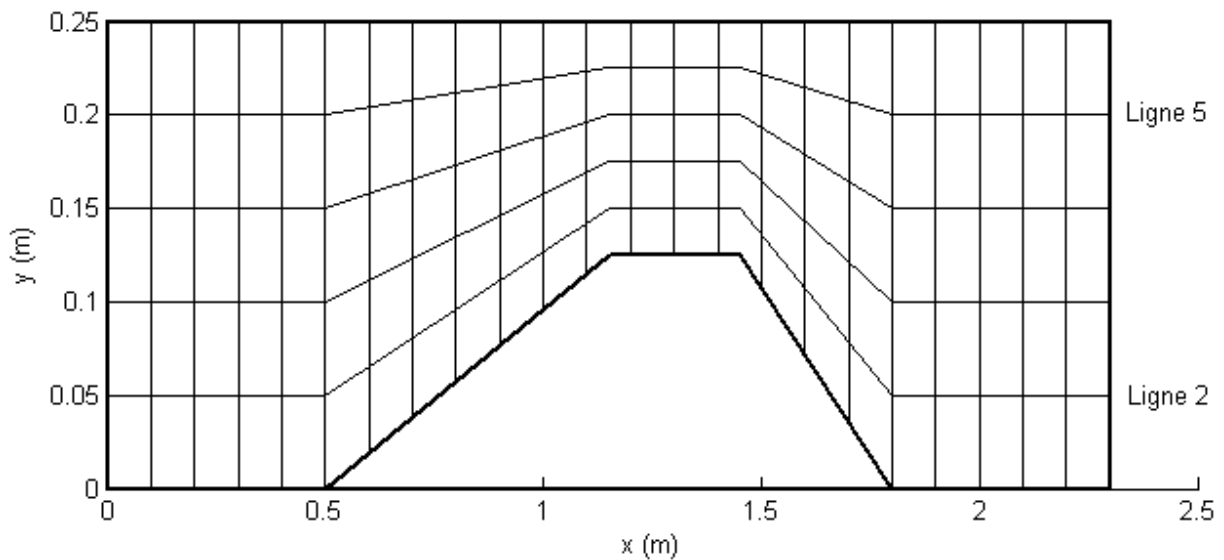


Figure 5.12 : Géométrie du canal convergent-divergent avec les lignes de mesures 2 et 5.

Un débit de 20.58 L/s a été appliquée à l'amont, alors que la hauteur d'eau à l'aval est de 0.286 m et les pentes S_{0x} , S_{0y} sont nulles. Les vitesses et les hauteurs d'eau ont été mesurées dans différentes positions dans tout le champ d'écoulement (Soulis (1997)). Dans les figures 5.13 et 5.14, les résultats calculés des hauteurs d'eau et des vitesses axiales le long des lignes 2 et 5, respectivement, sont comparés aux résultats expérimentaux.

La comparaison est satisfaisante en particulier dans la partie convergente de la canalisation aussi bien que dans la région étroite de l'écoulement. En outre, les résultats numériques obtenus par les deux méthodes VF et RKDG se calent bien avec les résultats expérimentaux (à la fois en hauteurs

5. Comparaison des méthodes numériques

d'eau et en vitesses). Il n'y a qu'une petite différence entre les deux méthodes car il n'y a pas de grandes discontinuités dans ce problème.

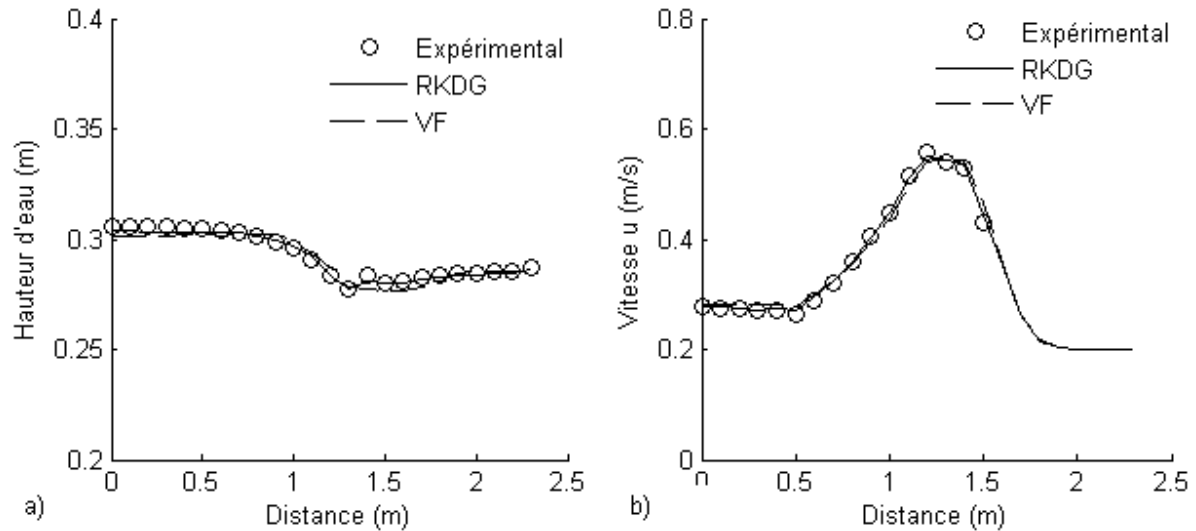


Figure 5.13 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés le long de ligne 2 ; a) hauteur d'eau ; b) vitesse.

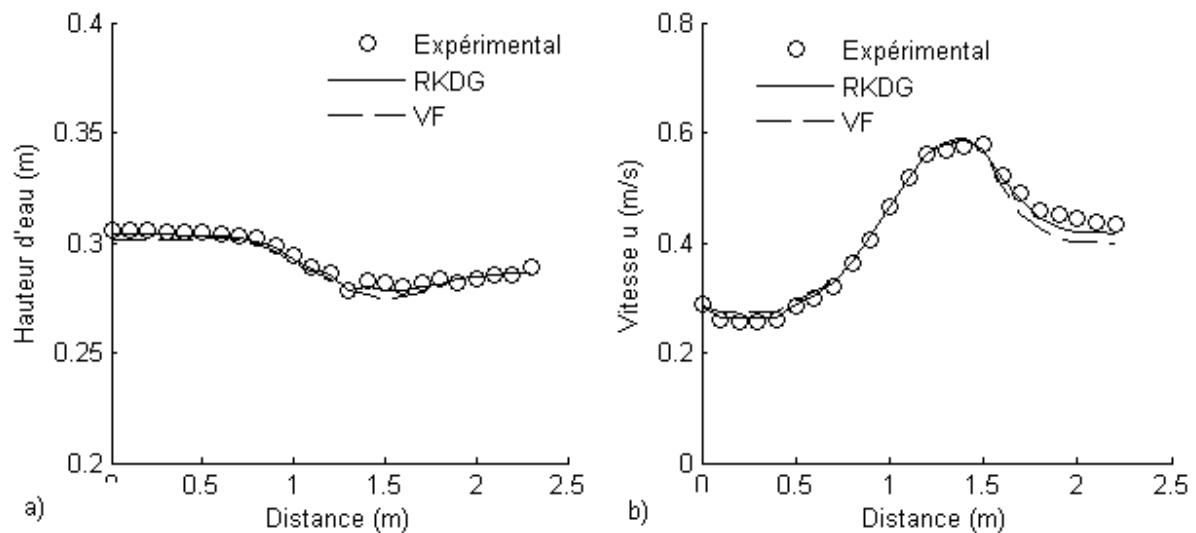


Figure 5.14 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés le long de ligne 5 ; a) hauteur d'eau ; b) vitesse.

Le tableau 5.6 liste les erreurs relatives en normes L_2 pour les deux méthodes comparées aux résultats expérimentaux. On remarque que les erreurs calculées pour les deux méthodes sont faibles pour les hauteurs d'eau et aussi pour les vitesses. Cependant, on peut noter aussi que l'erreur produite par la méthode RKDG est plus faible.

Méthodes	Hauteur d'eau (ligne 2)	Vitesse (ligne 2)	Hauteur d'eau (ligne 5)	Vitesse (ligne 5)
RKDG	0.45 %	1.27 %	0.59 %	2.70 %
VF	1.08 %	3.45 %	1.21 %	5.23 %

Tableau 5.6 : Erreurs relatives en norme L_2 du problème d'un écoulement fluvial dans un canal convergent-divergent.

5.7. ECOULEMENT MIXTE ET TORRENTIEL DANS UN CANAL CONVERGENT

Dans cette section, un écoulement torrentiel et un écoulement mixte (fluvial et torrentiel) dans une contraction sont étudiés. L'écoulement mixte est fluvial ($Fr = 0.32$) à l'amont et dans toute la partie majeure de la contraction ; cependant, à la sortie l'écoulement est « faiblement » torrentiel. Le cas de l'écoulement torrentiel est particulièrement intéressant de part la formation de vagues au sein du canal.

Les données expérimentales utilisées pour valider les modèles numériques ont été obtenues par Coles et Shintaku (1943) à l'université de Lehigh. Ils ont obtenu les profondeurs d'eau dans une contraction droite-murée et ont présenté leurs données sous forme de contours en hauteurs d'eau ; malheureusement, les vitesses dans le canal n'ont pas été mesurées. Les données, présentées en figures 5.16 et 5.17, ont été obtenus pour un écoulement mixte (fluvial et torrentiel) et pour un écoulement torrentiel dans une contraction respectivement. Le canal est composé de deux sections rectangulaires droites de longueur 1.49 m jointives avec une contraction droite-murée. L'angle des parois latérales de la contraction est de 6° . La section amont est de 0.629 m de large,

et la section aval est de 0.314 m de large. Les pentes du canal S_{0x} et S_{0y} sont nulles. La géométrie et le maillage du canal sont illustrés dans la figure 5.15.

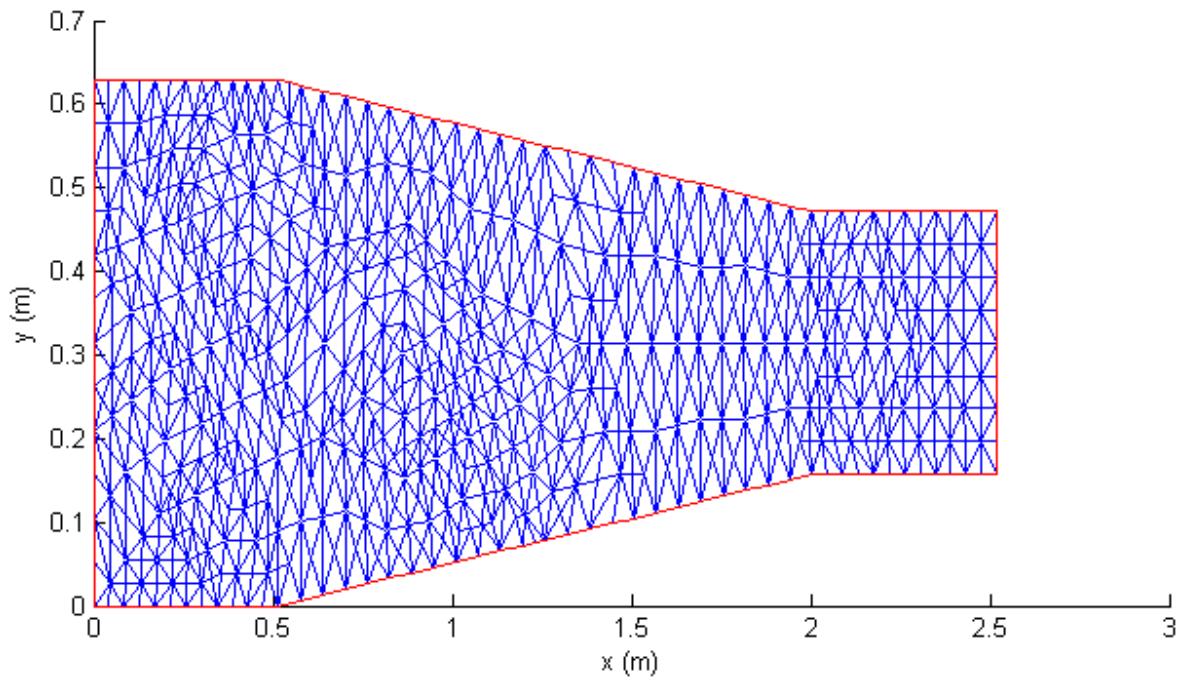


Figure 5.15 : Géométrie et maillage du canal convergent.

Les conditions d'écoulement incluent un débit d'écoulement $Q = 0.0451 \text{ m}^3 / \text{s}$, des tirants d'eau amont et aval constants $h_1 = 0.1762 \text{ m}$, $h_2 = 0.1132 \text{ m}$, respectivement. Coles et Shintaku (1943) n'ont pas fourni le coefficient de rugosité de Chezy pour la contraction du canal. Cependant, Molls et Chaudhry (1995) après une expérimentation numérique ont trouvé une valeur optimale de 84.1. Pour la simulation du problème, un maillage de 1252 cellules a été utilisé.

La figure 5.16 montre la hauteur d'eau le long de la ligne centrale par rapport à la distance longitudinale du canal. En comparant les résultats expérimentaux et calculés du problème dans le cas de l'écoulement torrentiel et de l'écoulement mixte (fluvial et torrentiel) dans la contraction, il apparaît que les solutions calculées par les deux méthodes ressemblent étroitement aux données expérimentales. La hauteur d'eau est constante à travers le canal et décroît dans la direction

5. Comparaison des méthodes numériques

longitudinale. Dans ce cas, il n'y a pas de discontinuités le long de la ligne centrale et on remarque que les résultats calculés par les deux méthodes sont similaires : on remarque toutefois que le profil simulé par la méthode RKDG est meilleur.

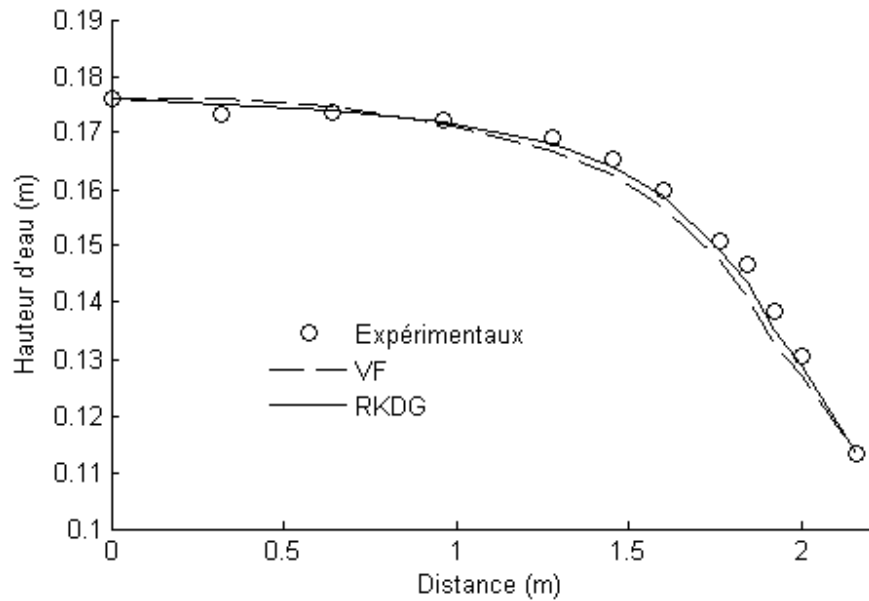


Figure 5.16 : Profil des hauteurs d'eau mesurées et calculées le long de la ligne centrale (Ecoulement mixte).

Le tableau 5.7 présente les erreurs relatives en normes L_2 pour les deux méthodes comparées aux résultats expérimentaux.

Méthodes	Hauteurs d'eau
RKDG	1.11 %
VF	2.10 %

Tableau 5.7 : Erreurs relatives en norme L_2 du problème de l'écoulement torrentiel et mixte dans un canal convergent.

Le cas torrentiel est plus complexe que l'écoulement mixte dû à la formation de vagues à travers la contraction du canal. De la frontière amont à, approximativement, le milieu de la contraction

5. Comparaison des méthodes numériques

($x \approx 1.3 \text{ m}$), l'accord entre les données expérimentales et calculées est satisfaisant. Cependant, au voisinage de la fin de la contraction, les résultats expérimentaux et calculés diffèrent.

La figure 5.17 compare les résultats expérimentaux et ceux obtenus par les deux méthodes RKDG et VF. Celles-ci produisent des résultats semblables à l'amont (et dans la plupart de la partie) de la contraction ; cependant, la méthode RKDG est plus proche des données expérimentales au niveau de la paroi latérale à proximité de la contraction (et de la sortie du canal).

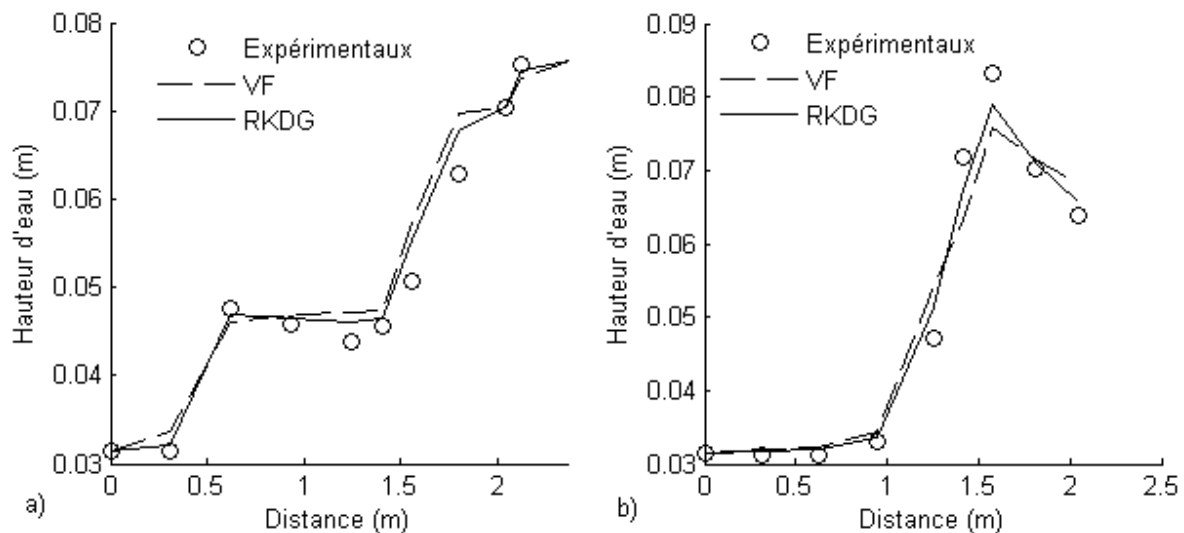


Figure 5.17 : Profil des hauteurs d'eau mesurées et calculées ; a) le long de la paroi latérale ; b) le long de la ligne centrale (Ecoulement torrentiel).

Les erreurs relatives en normes L_2 pour les deux méthodes comparées aux résultats expérimentaux sont présentées dans le tableau 5.8.

Méthodes	Ligne centrale	Parois latérale
RKDG	4.09 %	4.71 %
VF	5.96 %	8.59 %

Tableau 5.8 : Erreurs relatives en norme L_2 du problème d'un écoulement torrentiel dans un canal convergent.

5.8. CONCLUSION

Les deux méthodes VF et RKDG ont été confrontées dans le cadre de différentes applications, qu'il s'agisse aussi bien du calcul des hauteurs d'eau que des vitesses, notamment dans des problèmes présentant des discontinuités dues à des ressauts hydrauliques. Des comparaisons à la fois d'ordre quantitatives et qualitatives montrent que les deux méthodes donnent des résultats de bonne qualité. Bien que la formulation VF soit moins coûteuse du fait d'une condition CFL moins restrictive, la méthode RKDG est supérieure notamment dans des problèmes avec chocs et fortes discontinuités (pour un maillage identique). Dans les régions « lisses », on remarque que les résultats obtenus par les deux méthodes sont très similaires. Il est donc intéressant de poursuivre le développement de l'approche RKDG, notamment au niveau du temps de calcul (utilisant par exemple un pas de temps local (Local Time Stepping) pour réduire le temps de calcul et peut également de se pencher sur la méthode des lignes pour discrétiser en temps l'équation différentielle ordinaire obtenus (une fois les équations de Barré de Saint Venant discrétisées en espace avec les éléments finis discontinus) avec des solveurs dédiés (tels que DASPK (Brown et al., 1994, 1998)). La méthode RKDG permet de considérer plus naturellement des phénomènes incluant des chocs et des ressauts hydrauliques. En addition, cette méthode a besoin moins de mailles que la méthode VF pour donner des résultats très satisfaisants (Zhou et al., 2001). Nous verrons dans la suite une autre comparaison entre les deux méthodes sur les inondations urbaines au sein des carrefours.

6

Synthèse bibliographique sur les jonctions

Les jonctions de canaux se retrouvent très fréquemment dans la nature : par exemple au sein des réseaux sanguins ou hydrographiques, auxquels s'ajoutent les jonctions de canaux artificiels utilisés depuis fort longtemps dans des domaines tels que l'irrigation, employée en agriculture depuis des millénaires. Deux types de jonction sont à distinguer de par les formes d'écoulement très différentes qui y ont lieu (figure 6.1) : les confluences correspondant à deux canaux amont se réunissant dans un même canal aval (très courant en réseau hydrographique ou tout autre système de collecte au sein d'une zone étendue vers un point de regroupement) et les séparations (ou déffluence) d'un canal amont vers deux canaux aval (ce qui se trouve par exemple en irrigation ou dans le réseau des vaisseaux sanguins) pour les systèmes de distribution.

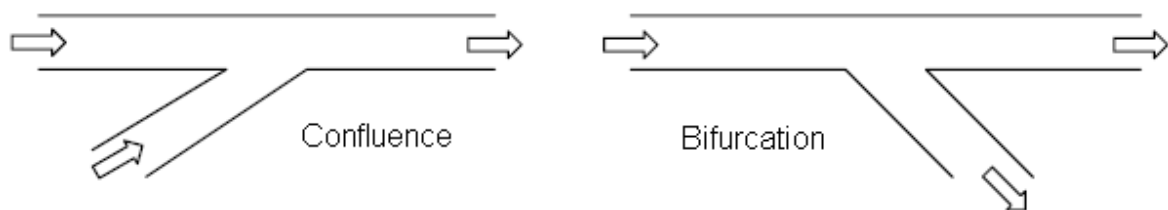


Figure 6.1 : Schéma simple d'une confluence et d'une bifurcation.

Bien que les jonctions dans les canaux à surface libre soient présentes dans de nombreux systèmes hydrauliques, une recherche limitée a été faite sur ce sujet. Dans ces dernières années,

plus d'importance a été donnée au problème de combinaisons de jonction. Les études précédentes se sont concentrées sur l'approximation mathématique simplifiée (les équations de Barré de Saint Venant unidimensionnelles) de différentes caractéristiques d'écoulement à travers les jonctions avec des données expérimentales pour valider les modèles théoriques de jonction.

La difficulté liée au problème de la jonction est qu'il y a de nombreux facteurs qui influencent les caractéristiques de l'écoulement à travers les jonctions. Un premier ensemble de variables peut être envisagé pour décrire la géométrie, telles que la taille, la forme, la pente, et l'angle entre les branches. De nombreuses combinaisons de ces quatre variables sont possibles. Un deuxième ensemble est constitué par les variables de l'écoulement, telles que le nombre de Froude dans la branche aval, la rugosité du canal, le rapport du débit entre les différentes branches. Il est tout à fait évident qu'un modèle mathématique simplifié 1D est incapable de décrire complètement les conditions complexes de l'écoulement dans une jonction. La difficulté à bien décrire ces écoulements avec les modèles mathématiques simplifiés 1D nous conduit à envisager l'utilisation d'un code 2D pour décrire ces écoulements.

Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse bibliographique sur les écoulements à travers les jonctions (de type confluence ou bifurcation). Nous détaillerons les travaux des différents auteurs sur trois types d'écoulements (fluvial, transcritique et torrentiel).

6.1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

6.1.1. Confluence fluviale

Une confluence fluviale génère un écoulement fluvial dans les trois canaux renfermant la jonction. Les premières études concernant les confluences ont d'ailleurs été menées pour cette configuration. L'une des premières études répertoriées concernant la confluence est due à Taylor (1944) qui considère les hypothèses suivantes :

- i. Les largeurs des trois branches sont égales.
- ii. La pente du canal est nulle.

- iii. Les frottements sont négligeables.
- iv. La répartition des pressions est hydrostatique et la distribution des vitesses est uniforme.
- v. Les lignes de courants sont parallèles aux parois latérales autour du volume de contrôle.
- vi. Les hauteurs d'eau sont égales dans les branches amont et latérale.
- vii. Les forces de pression latérales sont négligeables.

Taylor (1944) utilise le principe fondamental de la dynamique selon lequel la variation de la quantité de mouvement d'un élément de fluide est égale à la somme des forces qui agissent sur celui-ci. Il développe un modèle permettant de définir le comportement de l'hydraulique à la confluence. Taylor vérifie ce modèle expérimentalement. La corrélation des résultats expérimentaux avec la théorie est correcte pour un angle de confluence de 45° mais s'avère mauvaise pour un angle de 135° . Il montre que les simplifications iii et vi sont vérifiées et que l'erreur provient en premier lieu de la simplification v. Taylor conclut que la généralisation des résultats est impossible et qu'on ne peut pas espérer un tel traitement mathématique applicable à tous les types de jonctions de canaux.

Webber et Greated (1966) ont étudié également le comportement d'un écoulement à la jonction de deux canaux rectangulaires en fluvial. Ils étendent les résultats obtenus par Taylor (1944) en considérant trois autres angles de jonction et analysent l'effet d'une confluence de forme arrondie. Ils utilisent la même relation que celle utilisée par Taylor et observent une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et théoriques dans le cas de petits angles de confluence et d'un petit rapport débit amont sur débit aval. En général, le rapport des hauteurs d'eau observées (hauteur amont sur hauteur aval) est inférieur au rapport calculé. Le décalage est attribué à une mauvaise prise en compte de la réaction du mur. Un facteur correctif empirique a été proposé qui procure une meilleure corrélation entre théorie et expérience. Les configurations ont été étudiées pour des nombres de Froude inférieurs à 0.6 et un rapport entre le débit dans le canal amont et celui du canal aval compris entre 0 et 1.

Milano et Sassoli (1977) ont considéré une jonction d'angle 60° avec trois canaux de largeurs différentes. Les résultats obtenus ont montré une différence entre les hauteurs d'eau à la jonction.

Lin et Soong (1979) ont étudié la perte de l'énergie à travers une confluence d'angle 90° . En utilisant la relation de Manning, ils ont conclu que la perte de l'énergie et la perte due aux frottements sont du même ordre.

Carballada et al. (1981) ont étudié l'écoulement dans les jonctions symétriques de forme Y. En supposant que les hauteurs d'eau aux points de la jonction pour les deux branches sont égales et que le coefficient de correction de la quantité de mouvement dans la branche à l'aval de la jonction soit de 1.15, leur approche est en accord avec les observations et l'effet du nombre de Froude s'est avéré important.

Best et Reid (1984) ont analysé expérimentalement la géométrie de la zone de séparation au niveau de la jonction. Les résultats ont inclus des données pour la longueur et la largeur maximale de la zone de séparation. Ils ont trouvé que la largeur et la longueur de la zone de séparation augmentent avec l'augmentation de l'angle de jonction et le débit de la branche latérale. L'indicateur de la forme de la zone de séparation a été défini comme un rapport de la largeur maximale de la zone de recirculation et de sa longueur. Pour un écoulement de jonction droite, l'indicateur de forme a approximativement la même valeur pour différents rapports de débits avec une valeur moyenne de 0.19.

En discutant l'approche expérimentale de Best et Reid (1984), Hager (1987) a présenté un modèle simple dans lequel la distribution de pression sur la paroi latérale et la contribution latérale de la quantité de mouvement ont été prises en considération. Il a cherché à prédire la largeur de la zone de séparation par une approche unidimensionnelle.

Ramamurthy et al. (1988) ont étudié les écoulements à travers les jonctions droites en se basant sur le transfert de la quantité de mouvement à partir de la branche latérale à la branche principale. Ils ont appliqué les équations de la quantité de mouvement séparément pour l'écoulement dans les branches latérales et principales. Ils ont trouvé que la contribution latérale de la quantité de mouvement augmente comme le rapport du débit latéral sur le débit aval.

Gurram et al. (1997) ont étudié les caractéristiques de l'écoulement latéral et de la contraction de l'écoulement et ont déterminé des expressions pour le coefficient de correction de la quantité de mouvement et la force de pression latérale sur le mur. Une équation pour le rapport des hauteurs d'eau amont-aval a été également fournie.

Hsu et al. (1998a et 1998b) ont appliqué la conservation de la masse et de l'énergie dans la jonction et la conservation de la quantité de mouvement sur deux volumes de contrôle dans la jonction et ont calculé un coefficient de perte d'énergie et le rapport des hauteurs d'eau. Toutes ces études sont considérées pour des écoulements à travers des jonctions où les branches ont la même largeur et en supposant l'égalité des hauteurs d'eau amont et latérale à la jonction.

Plus récemment, Shabayek et al. (2002) ont développé un modèle de jonction théorique unidimensionnel en appliquant le principe de la conservation de la quantité de mouvement sur deux volumes de contrôle dans la jonction et le principe de conservation de la masse. Ce modèle est formé de deux équations, fonction de plusieurs paramètres hydrauliques et géométriques ainsi que de deux paramètres empiriques qui sont le coefficient de cisaillement et le coefficient de la zone de séparation. Ce modèle a été validé expérimentalement par comparaison aux résultats expérimentaux existant dans la littérature.

6.1.2. Confluence torrentielle

Dans les coursiers à pente importante ou dans les conduites de vidange de fond, on peut rencontrer des jonctions dans lesquelles l'écoulement est torrentiel dans les trois branches. Comparé à un écoulement fluvial dans la conduite d'approche, l'écoulement torrentiel fait apparaître des ondes croisées sur des courbes bien définies. Cette forte variation de la hauteur d'eau peut engendrer de gros problèmes dans les conduites fermées en raison de l'apparition de phénomènes tels que les pulsations, l'entraînement d'air, la transition vers une mise en charge ou l'apparition de ressauts hydrauliques. Les configurations qui font apparaître un ressaut hydraulique dans la confluence sont à éviter en raison du risque d'érosion considérable.

C'est Bowers (1950) qui le premier analyse un écoulement torrentiel dans une jonction de canaux. En fonction de la géométrie de la jonction et de la valeur du nombre de Froude dans le canal amont, un ressaut hydraulique apparaît ou non dans l'un des confluent. Dans le cas où aucun ressaut n'est présent, des ondes croisées similaires à celles présentes dans les rétrécissements apparaissent. Dans tous les cas, Bowers (1950) conseille pour le dimensionnement d'adopter des hauteurs de canaux bien plus grandes que les hauteurs usuelles pour dimensionner ce genre de confluences.

Une autre étude associée aux écoulements est due à Schnitter et al (1955). Elle a étudié une configuration dans laquelle l'angle de la jonction est pratiquement nul mais pour laquelle la branche latérale a une pente très forte. Il constate la présence d'ondes croisées très fortes dans la branche aval qui sont encore amplifiées dans le cas où les deux branches amont ont des nombres de Froude différents. Néanmoins, l'installation d'un mur de séparation, dont l'une des extrémités se situe au niveau du point de confluence, permet de faire quasiment disparaître les ondes croisées.

Behlke et Pritchett (1966) ont effectué une analyse des écoulements torrentiels dans les jonctions avec des branches trapézoïdales et rectangulaires pour des angles des jonctions de 15° , 30° et 45° et nombres de Froude s'étendant entre 2 et 7. Ils ont observé deux ressauts obliques dont les origines se trouvent au niveau de la jonction. La taille de ces deux ressauts à proximité du point de la jonction est la même. Ils ont supposé que l'effet de la branche latérale sur l'écoulement dans la branche principale est comparable à la perturbation provoquée par la présence d'un mur oblique. Ainsi, ils ont déterminé les angles des ressauts comparés à la direction principale de l'écoulement mais ils n'ont pas essayé de déterminer la hauteur maximale de ces ressauts.

Gildea et Wong (1967) ont présenté des directives de calcul de dimensionnement. Ils ont recommandé un écart de hauteur d'eau entre les branches le plus faible possible et une configuration dans lesquelles l'angle d'incidence des branches n'excède pas 12° . En supposant que l'angle est nul, on dimensionne la branche de sorte que la largeur au niveau de la jonction soit égale à la somme des largeurs des confluences augmentée de l'épaisseur du mur de séparation.

Un modèle pour la prévision de l'angle de la vague principale dans une jonction simple est dû à Greated (1968) qui a étudié un écoulement dans une jonction horizontale avec un angle de 60° pour des nombres de Froude variant entre 6 et 11. En supposant une vitesse uniforme et une distribution hydrostatique de pression, Greated (1968) trouve une relation entre les hauteurs d'eau amont et latérale.

Rice (1985) a étudié l'influence des divers paramètres géométriques et les caractéristiques des écoulements sur l'angle du plan de séparation dans la jonction. Il a développé des critères pour prévoir la hauteur maximale de la surface de l'eau dans le secteur de la jonction et le profil de la surface de l'eau dans la branche aval.

Hager (1989a) a présenté une étude théorique et expérimentale d'une jonction de deux branches de largeur égale avec des écoulements torrentiels. L'auteur a suggéré un critère pour la formation d'un ressaut hydraulique à la jonction. Ses résultats expérimentaux ont été faits pour des angles de jonction de 45° et de 22.5° .

Christodoulou (1993) a présenté quelques résultats expérimentaux pour des angles de jonction égaux à 90° et à 17° , d'un écoulement fluvial dans la branche latérale et d'écoulement « légèrement » torrentiel dans la branche amont (avec un nombre de Froude amont s'étendant de 1.5 à 2). Il fournit un critère général pour la formation du ressaut hydraulique dans une jonction avec des branches rectangulaires quand l'écoulement amont est torrentiel.

Dans le cadre d'une étude des écoulements torrentiels dans une jonction de conduites fermées, Gisonni et Hager (2002) prouvent que quatre grands types d'écoulement peuvent avoir lieu : 1) écoulement complètement torrentiel dans les branches amont et latéral, 2) écoulement torrentiel dans la branche principale et fluvial dans la branche latérale, 3) écoulement fluvial dans la branche principale et écoulement torrentiel dans la branche latérale et 4) écoulement fluvial dans les deux branches amont et latérale.

6.1.3. Confluence transcritique

Une confluence transcritique est une confluence où l'écoulement est fluvial dans les canaux situés avant la jonction, suivi d'une transition vers un écoulement torrentiel dans le canal situé après la jonction. On trouve très peu d'études concernant le problème de la confluence dans ce cas transitionnel.

Ramamurthy et al. (1988) ont étudié les deux types d'écoulement, fluvial et transcritique, à travers une confluence pour un angle de jonction droit. Le modèle de jonction développé dans ce travail est basé sur le transfert de la quantité de mouvement du canal latéral au canal principal. Ils ont appliqué séparément les équations de la quantité de mouvement pour l'écoulement dans les canaux latéral et amont.

Hager (1989b) a montré que l'écoulement transcritique peut exister si le débit latéral est au moins égal à 15 % du débit total. Il a effectué une étude expérimentale détaillée avec une analyse théorique unidimensionnelle de l'écoulement transitionnel avec des angles de jonction égaux à 90° , 45° et 22.5° . Hager (1989b) définit une équation pour le coefficient de contraction de la zone de séparation. Il a ainsi développé un modèle pour la jonction définissant le rapport des hauteurs d'eau à la jonction, en fonction des débits et de l'angle de jonction. La validation expérimentale de ce modèle est cependant moins satisfaisante pour un angle de jonction égal à 90° que pour les autres angles.

Gurram (1994) a prouvé que certaines hypothèses considérées par Hager ne sont pas acceptables et il développe un modèle pour la jonction qui reproduit plus fidèlement les résultats expérimentaux de Hager.

6.1.4. Bifurcation

La première étude expérimentale détaillée des écoulements à travers une bifurcation dans un canal à surface libre a été faite par Taylor (1944). Dans son étude, la branche principale et la

branche latérale sont de même largeur. Il étudie le problème de la division de l'écoulement en analysant des données expérimentales et propose une solution graphique pour des cas spécifiques de jonction à angles droits.

Milne-Thomson (1949), Tanaka (1957) et Murota (1958) ont résolu le problème de la bifurcation analytiquement et ils ont trouvé que l'hypothèse de la hauteur d'eau constante dans tous les canaux rend l'usage de leur modèle peu réaliste dans la pratique.

Grace et Priest (1958) ont observé la division de l'écoulement pour différents angles de jonction et différents rapports de largeur du canal et ont présenté leurs données sous forme de graphique en utilisant des paramètres adimensionnels. Le rapport des hauteurs aval et amont et le rapport des hauteurs latéral et amont sont presque égaux à l'unité. Ils ont aussi remarqué que les rapports de hauteurs diminuent modérément, tandis que les rapports de débits augmentent. Cependant, la supposition d'une hauteur d'eau constante dans toutes les branches rend peu réaliste cette formulation pour un usage pratique.

La division des écoulements avec un écoulement fluvial dans la branche principale et un écoulement torrentiel dans les branches latérales (avec pente) a été également étudiée par différents auteurs (Pattabhiramiah, 1960 ; Krishnappa et Seetharamiah, 1963 ; Lakshmana et Sridharan, 1967 ; Rajaratnam, 1967). Dans ces études, l'écoulement dans la branche latérale est traité comme traversant un déversoir latéral de hauteur nulle afin d'obtenir un coefficient expérimental.

Des investigations analytiques et expérimentales sur le problème de la division des écoulements dans les jonctions à angles droits ont été faites par Law et Reynolds (1966). Ils ont conclu que l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, avec une supposition appropriée sur la force de pression hydrostatique décrit correctement l'écoulement.

Pemaiah (1977) a présenté un traitement mathématique pour le comportement de l'écoulement à travers une bifurcation. Négligeant l'effet de la distribution non uniforme des vitesses, il rapporte

le problème au cas unidimensionnel. Il suppose aussi que la distribution de la pression est hydrostatique, et il obtient un modèle permettant de relier les hauteurs d'eau à la jonction.

Ramamurthy et Satish (1988) ont étudié le problème de la bifurcation dans des canaux à surface libre avec des branches courtes, où le nombre de Froude dans la branche latérale est supérieur à 0.35. Ramamurthy (1990) développe un modèle de bifurcation, pour une jonction à angle droit. Ce modèle est fonction du rapport des débits aval amont, du nombre de Froude dans la branche amont, et du rapport des hauteurs amont-aval.

Hager (1989) a obtenu une expression pour le coefficient de perte d'énergie à travers une bifurcation. Il simplifie l'écoulement dans la zone de contraction et conclut que le coefficient latéral du débit dans la branche latérale est simplement une fonction de nombre de Froude amont et du rapport des débits aval amont.

Chocat (1997) a fait des études sur l'hydrologie urbaine et sur les réseaux d'assainissement.

Hsu et al. (2002) proposent une relation hauteur débit et un coefficient de perte d'énergie pour un écoulement fluvial dans les canaux de même largeur pour un angle de jonction droit. Avec des débits amont et latéral et une hauteur aval connus, la hauteur amont est déterminée à partir de considérations énergétiques. Le coefficient de perte d'énergie dû à la division de l'écoulement est exprimé en fonction du nombre de Froude amont, du rapport des débits aval amont et du rapport des hauteurs d'eau amont aval. Le coefficient de contraction est déterminé en utilisant des mesures de vitesse.

Récemment, Lhomme (2006) a cherché à transposer le modèle de bifurcation à des carrefours en X, puis à développer des relations empiriques de répartition des débits au niveau des carrefours en X.

Plus récemment, Rivière et al. (2007) ont étudié les écoulements transcritiques dans les bifurcations et ont développé des modèles unidimensionnels pour la prédiction de la répartition du débit amont dans les branches aval.

6.2. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a rassemblé un certain nombre de connaissances disponibles dans la littérature concernant les écoulements dans les jonctions de canaux à surface libre. Ceux-ci peuvent être considérés comme étant similaires aux écoulements qui se développent dans les carrefours de rue lors de crues urbaines. La plupart des études portent sur les jonctions mettant en jeu trois canaux, soit en confluence soit en bifurcation. Ces configurations sont très répandues naturellement ou artificiellement pour ce qui concerne les rivières, les systèmes d'irrigation, de collecte d'eaux usées ainsi que les réseaux sanguins par exemple. Cependant très peu d'études traitent des configurations de jonction à quatre branches ou plus (Rivière et al., 2006).

Dans ce contexte, nous présentons dans les deux chapitres suivants une étude numérique concernant les écoulements à travers les jonctions. Nous comparons les résultats obtenus par les deux approches 1D et 2D avec ceux obtenus par des études expérimentales menées par différents auteurs que nous avons trouvées dans la littérature.

7

Simulation numérique des confluences

Dans la conception des écoulements dans les réseaux urbains, un des problèmes hydrauliques les plus importants est l'analyse des conditions d'écoulement dans les jonctions à surface libre. Des exemples typiques de ces jonctions se produisent dans les réseaux urbains, les canaux d'irrigation et de drainage, et les réseaux hydrographiques naturels de surface. La plupart des problèmes en ressources en eau, en hydraulique environnementale exige la description précise des paramètres caractéristiques du régime d'écoulement de ces réseaux à surface libre.

Un système de réseau à surface libre peut se composer d'un certain nombre de branches jointives reliées ensemble par un certain nombre de jonctions. Pour le cas monodimensionnel, la présence de jonctions internes dans un tel système pose des difficultés dans la résolution numérique parce que ces jonctions agissent en tant que conditions aux limites internes pour chaque canal jointif à une jonction (Yen, 1979). Les valeurs des paramètres d'écoulement (hauteur et vitesse) à ces nœuds internes sont une fonction de la solution, et elles changent avec le temps.

Comme le rappelle (Buyer, 2002), l'étude de dispositifs hydrauliques peut avoir lieu suivant deux axes :

- soit par une approche monodimensionnelle adaptée à chaque configuration d'écoulement, empirique et/ou analytique. Cette méthode est généralement accompagnée d'une phase expérimentale permettant de valider les relations théoriques.
- soit par une approche prenant en compte le caractère bidimensionnel de l'écoulement dans la jonction en utilisant les équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles résolues numériquement pour décrire le comportement du système.

La simulation unidimensionnelle d'écoulement dans les réseaux à surface libre est beaucoup plus complexe que la simulation dans un canal simple, particulièrement pour les systèmes de réseaux à grande échelle (Akan et Yen, 1981 ; Yen et Osman, 1976). Le système entier est considéré comme un ensemble de branches dans lesquelles les équations de Barré de Saint Venant unidimensionnelles sont appliquées et liées par différents modèles hydrauliques de jonction. Les conditions hydrauliques à une jonction peuvent être modélisées par l'équation de la conservation de la masse et l'équation de conservation de l'énergie ou l'équation de la conservation de la quantité de mouvement à la jonction. Différents modèles de jonction existent dans la littérature, et sont développés pour relier les variables d'écoulement à la jonction. Ces modèles sont de nature empirique car certains paramètres associés y sont donnés grâce à des résultats expérimentaux et ils présentent souvent un champ de validité réduit.

Dans ce chapitre, nous simulons et comparons l'approche unidimensionnelle aux résultats numériques obtenus par la résolution numérique des équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles. Pour l'étude unidimensionnelle, les équations de Barré Saint Venant unidimensionnelles couplées à un modèle de jonction et à la méthode des caractéristiques sont utilisées pour trouver la solution dans le réseau. Au contraire, pour le cas bidimensionnel, le système entier (les branches et la jonction) est considéré comme un seul système et discrétisé avec des cellules triangulaires formant un maillage non structuré. Ainsi, nous appliquons simplement les équations de Saint Venant bidimensionnelles sans recours à des équations supplémentaires semi-empiriques. Les résultats obtenus sont montrés dans la simulation de

l'écoulement à travers les jonctions et comparés aux résultats expérimentaux existant dans la littérature pour trois types d'écoulement (fluvial, transcritique et torrentiel).

7.1. TYPES D'ÉCOULEMENTS DANS UNE CONFLUENCE

Dans la simulation de l'écoulement à travers une confluence, divers types d'écoulements peuvent exister à la jonction et ces types sont caractérisés par les trois nombres de Froude calculés aux points de jonction dans les trois canaux. Les six cas possibles selon les conditions de l'écoulement sont liés au type d'écoulement dans les canaux, amont, latéral et aval respectivement :

1. L'écoulement est entièrement fluvial dans les trois branches respectivement amont, latéral et aval (FLUV-FLUV-FLUV).
2. L'écoulement est fluvial dans les branches amont et latérale et devient torrentiel à l'aval (FLUV-FLUV-TOR).
3. L'écoulement est torrentiel dans l'une des branches amont ou latérale, et est fluvial dans la branche aval (FLUV-TOR-FLUV).
4. L'écoulement est fluvial dans l'une des branches amont ou latérale mais devient torrentiel à l'aval (FLUV-TOR-TOR).
5. L'écoulement est torrentiel dans les branches amont et latérale et devient fluvial dans la branche aval (TOR-TOR-FLUV).
6. L'écoulement est torrentiel dans les trois branches (TOR-TOR-TOR).

Dans ce travail, on va s'intéresser aux cas 1, 2 et 6 puisqu'ils existent des résultats expérimentaux correspondant à ces trois cas qui nous permettront de comparer les résultats obtenus avec les résultats de la simulation numérique.

7.2. MODELISATION UNIDIMENSIONNELLE

Il est bien connu que les équations de Barré de Saint Venant unidimensionnelles ne sont pas applicables aux points correspondant à la jonction, ceci étant due au caractère essentiellement bidimensionnel de la jonction. Par conséquent, pour l'étude unidimensionnelle, les jonctions sont considérées comme des conditions aux limites internes et un traitement spécial est nécessaire. Pour trouver la solution dans un réseau, les équations de Barré de Saint Venant unidimensionnelles sont appliquées dans les branches et liées par un modèle de jonction basé sur la conservation de la quantité de mouvement ou d'énergie. Différents modèles de jonction ont été développés pour relier les différentes variables d'écoulement à la jonction. L'inconvénient de ces modèles est qu'ils sont de nature empirique et ils présentent souvent un champ de validité réduit. Par exemple, ils sont développés pour un écoulement fluvial (ou transitionnel ou torrentiel) et pour un système de réseau composé de trois branches rectangulaires liées par une jonction.

Nous citons ici quelques modèles :

- Modèle d'égalité des hauteurs d'eau
- Modèle de Taylor (1944)
- Modèle de Ramamurthy et al. (1988)
- Modèle de Hager (1989a et 1989b)
- Modèle de Rice (1985)
- Modèles de Gurram et al. (1994, 1997)
- Modèles de Hsu et al. (1998a et 1998b)
- Modèle de Shabayek et al. (2002)

Plus de détails sur ces modèles sont proposés en Annexe 2.

7.2.1. Couplage dans le cas d'une confluence

Pour trouver la solution aux points internes enfermés la jonction, nous devons trouver six variables d'inconnus : la hauteur d'eau et le débit à l'aval de la branche située avant la jonction (h_u, Q_u), la hauteur d'eau et le débit à l'aval de la branche latérale (h_L, Q_L) et la hauteur d'eau et le débit à l'amont de la branche située après la jonction (h_d, Q_d) (voir figure 7.1). Par conséquent, nous avons besoin de six équations pour résoudre le problème de la jonction en 1D.

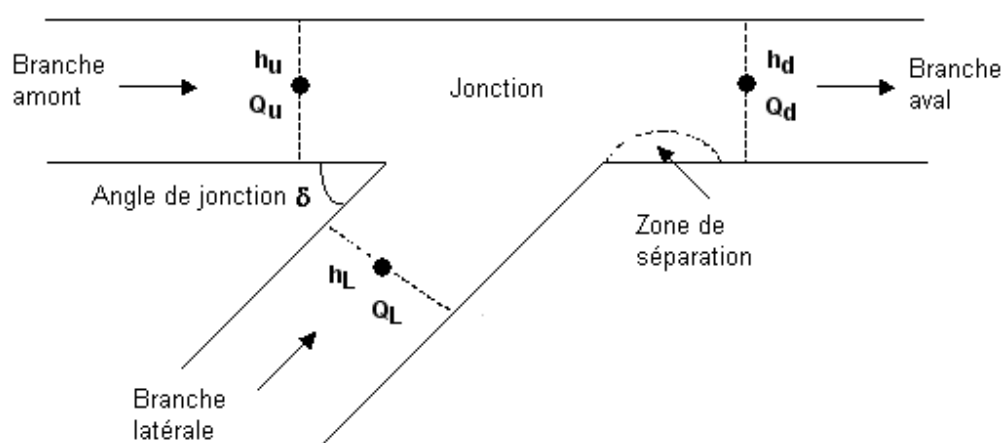


Figure 7.1 : Problème de la jonction.

Description dans le cas d'une confluence fluvial

Nous disposons, dans le cas où l'écoulement est fluvial dans les trois branches de la confluence, de trois relations provenant des caractéristiques (voir Annexe 1). Ces trois relations sont : C_u^+ dans la branche amont, C_L^+ dans la branche latérale et C_d^- dans la branche aval.

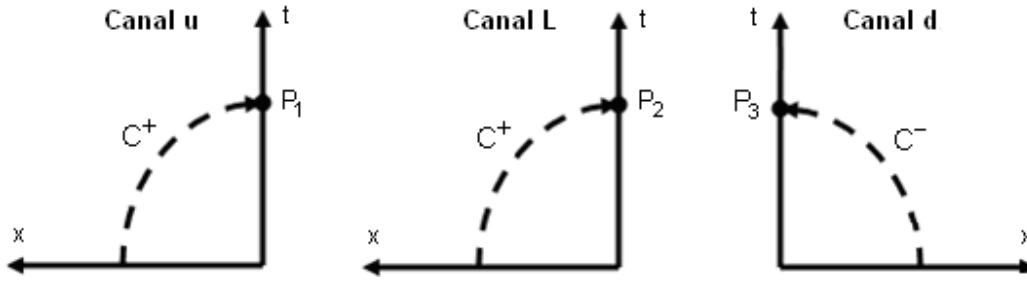


Figure 7.2 : Ligne des caractéristiques dans le plan (x, t) . Écoulement fluvial dans les trois branches renfermant la confluence.

Ces trois relations relient le débit de l'écoulement comme une fonction de la hauteur d'eau :

$$\begin{cases} Q_u = K_u B_u h_u + C_u \\ Q_L = K_L B_L h_L + C_L \\ Q_d = K_d B_d h_d + C_d \end{cases} \quad (7.1)$$

La conservation de la masse à la jonction donne :

$$Q_u + Q_L = Q_d \quad (7.2)$$

Les deux autres équations sont dérivées d'un modèle de jonction. Dans ce mémoire, nous utilisons le modèle de Shabayek et al. (2002) qui est le modèle le plus précis dans le cas d'une confluence fluviale.

Le système de ces six équations est non linéaire et sa résolution est obtenue par une méthode de Newton-Raphson.

Déscription dans le cas d'une confluence transcritique

Nous disposons, dans le cas où l'écoulement dans les deux branches amont et latérale est fluvial, mais devient torrentiel dans la branche aval, de deux relations provenant des caractéristiques. Ces deux relations sont : C_u^+ dans la branche amont et C_L^+ dans la branche latérale.

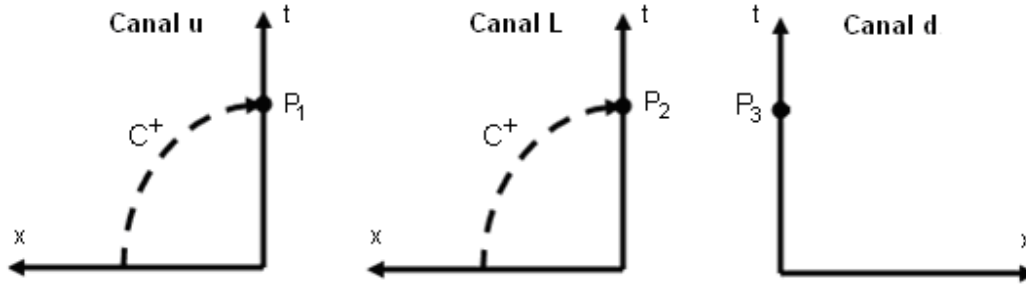


Figure 7.3 : Ligne des caractéristiques dans le plan (x, t) . Écoulement fluvial dans les branches amont et latérale et torrentiel dans la branche aval.

Les deux équations provenant de la méthode des caractéristiques sont :

$$\begin{cases} Q_u = K_u B_u h_u + C_u \\ Q_L = K_L B_L h_L + C_L \end{cases} \quad (7.3)$$

La conservation de la masse à la jonction donne :

$$Q_u + Q_L = Q_d \quad (7.4)$$

En supposant que l'écoulement est critique à l'entrée de la branche aval (passant du régime fluvial en régime torrentiel), on aura le nombre de Froude aval égal à 1 :

$$\frac{Q_d^2}{g B_d^2 h_d^3} = 1 \quad (7.5)$$

Les deux autres équations sont dérivées d'un modèle de jonction. Nous utilisons le modèle de Gurram et al. (1994) qui est le modèle le plus précis dans le cas d'une confluence transcritique.

Déscription dans le cas d'une confluence torrentielle

7. Simulation numérique à travers les confluences

Nous disposons, dans le cas où l'écoulement est torrentiel dans les trois branches de la confluence, de quatre relations provenant des caractéristiques. Ces quatre relations sont : C_u^+ et C_u^- dans la branche amont, C_L^+ et C_L^- dans la branche latérale.

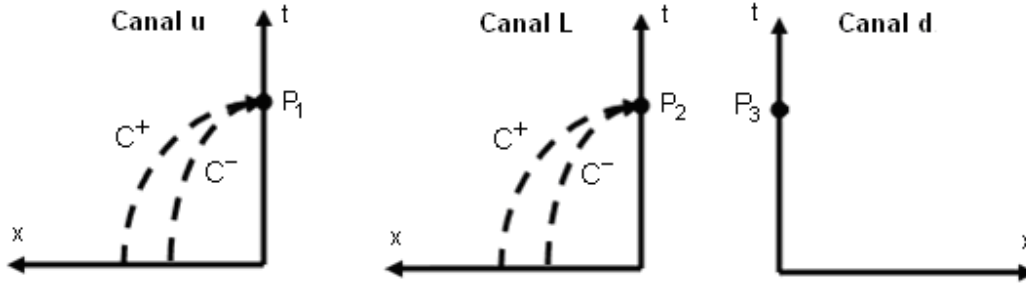


Figure 7.4 : Forme des caractéristiques pour le cas d'un écoulement torrentiel dans les trois branches.

Les quatre équations provenant de la méthode des caractéristiques sont :

$$\begin{cases} Q_u = K_u B_u h_u + C_u \\ Q_u = K'_u B_u h_u + C'_u \\ Q_L = K_L B_L h_L + C_L \\ Q_L = K'_L B_L h_L + C'_L \end{cases} \quad (7.6)$$

La conservation de la masse à la jonction donne :

$$Q_u + Q_L = Q_d \quad (7.7)$$

La dernière équation est dérivée d'un modèle de jonction. Nous utilisons le modèle de Rice (1985).

7.3. RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION

Dans ce paragraphe, nous donnerons les résultats de la simulation numérique unidimensionnelle et bidimensionnelle des équations de Barré de Saint Venant à travers les jonctions. Pour la modélisation unidimensionnelle, le système entier est considéré comme un ensemble de branches dans lesquelles les équations de Barré de Saint Venant 1D sont appliquées et liées par un modèle de jonction (Kesewani et al., 2008).

Au contraire pour le cas bidimensionnel, le système entier (les branches et la jonction) est considéré comme un seul système qui est discrétisé en cellules triangulaires formant un maillage non structuré. Nous appliquons ainsi simplement les équations de Barré de Saint Venant 2D, qui sont résolues par la méthode RKDG. Les résultats expérimentaux obtenus par des différents auteurs (Hsu et al., 1998a et 1998b ; Hager, 1989a et 1989b ; Rice, 1985) sont utilisés pour valider et comparer les deux approches 1D et 2D dans la simulation des écoulements à travers les confluences.

7.3.1. Confluence fluviale

Dans cette section, les résultats expérimentaux obtenus par Hsu et al. (1998a et 1989b) sont utilisés pour la comparaison et la validation des deux approches (1D et 2D). Les expériences ont été effectuées dans une canalisation rectangulaire, avec un lit horizontal et lisse. La canalisation principale et la branche latérale sont de 12 m et 4 m de longueur, respectivement. Les trois branches sont de même largeur 0.155 m avec des angles de jonction, δ égaux à 30°, 45°, 60° et 90°. Pour l'angle de 90°, la canalisation principale et la branche latérale sont respectivement de 6 m et 1.5 m de longueur.

Les parois de la jonction sont « lisses » afin de réduire les effets de frottement aux frontières de la canalisation ; le lit et les murs latéraux de la canalisation expérimentale ont été enduits d'une feuille de plastique. Le débit d'eau a été réglé par deux réservoirs amont munis de vannes, qui ont été calibrées avec un réservoir aval. La figure 7.5 montre une disposition schématique de l'installation expérimentale avec les sections de mesure (AB, CD et EF) pour les angles 30°, 45° et 60° et la figure 7.6 pour l'angle 90°.

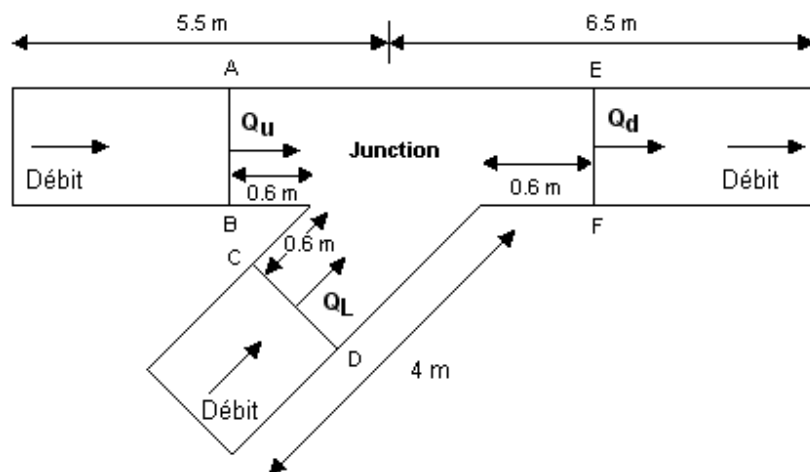


Figure 7.5 : Schéma de l'installation expérimentale pour les angles 30°, 45° et 60°.

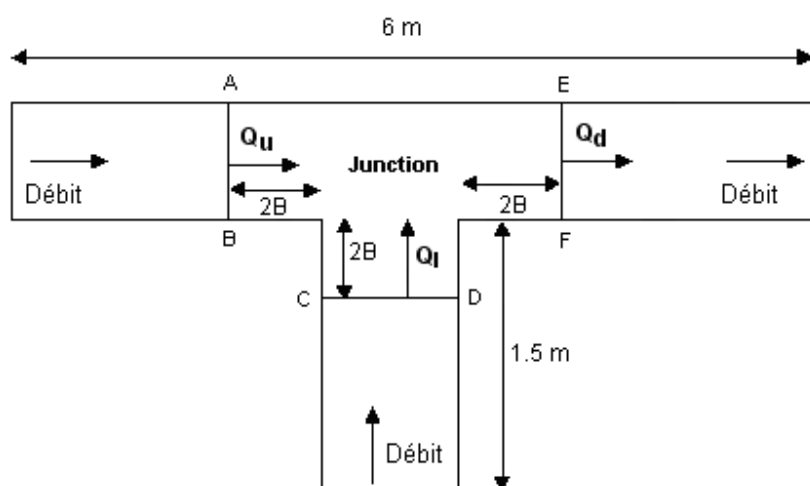


Figure 7.6 : Schéma de l'installation expérimentale pour l'angle 90°.

Dans toutes les simulations, chaque branche est discrétisée en 20 mailles pour le cas unidimensionnel. Tandis que pour le cas bidimensionnel, le domaine physique est discrétisé en 1314 mailles triangulaires, formant un maillage non-structuré (figure 7.7).

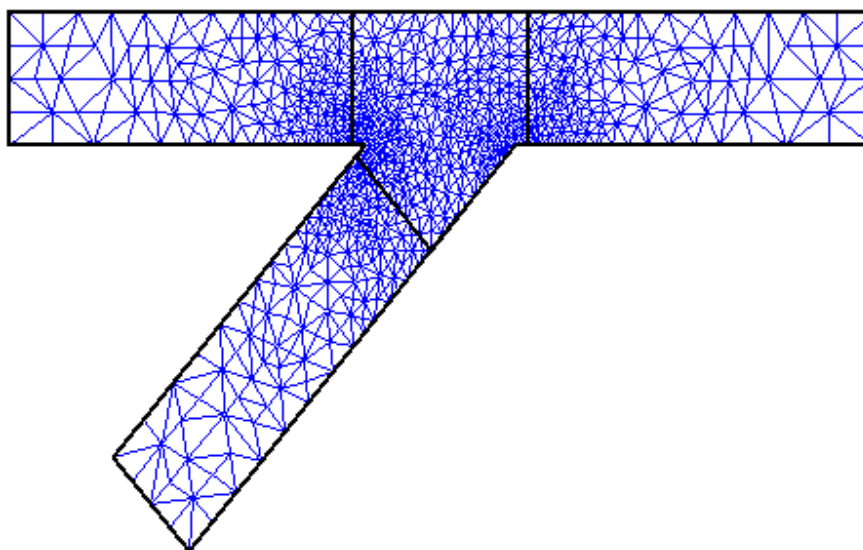


Figure 7.7 : Le maillage 2D non-structuré de la jonction.

Connaissant les débits amont Q_u , latéral Q_L et la hauteur d'eau aval h_d , le rapport entre la hauteur d'eau amont et la hauteur d'eau aval Y_u et le rapport entre la hauteur d'eau latérale et la hauteur d'eau aval Y_L sont calculés en utilisant les deux approches 1D et 2D et sont comparés aux données expérimentales de Hsu et al. (1998a et 1998b). Les différents paramètres de l'écoulement pour les quatre angles (30° , 45° , 60° et 90°) sont énumérés dans les tableaux 7.1, 7.2, 7.3 et 7.4, respectivement.

Débit amont Q_u (l/s)	Débit latéral Q_L (l/s)	Débit aval Q_d (l/s)	Hauteur amont h_u (cm)	Hauteur latérale h_L (cm)	Hauteur aval h_d (cm)
0.48	5.35	5.83	8.74	8.83	8.08
1.13	4.86	5.99	9.09	9.17	8.24
1.82	4.41	6.23	9.54	9.57	8.43
2.56	3.98	6.54	9.82	9.85	8.515
3.31	3.56	6.87	10.06	10.095	8.73
4.12	2.98	7.10	10.41	10.41	9.115

7. Simulation numérique à travers les confluences

4.62	2.18	6.80	10.02	10.08	8.875
5.21	1.34	6.55	9.58	9.58	8.65
5.61	0.60	6.21	8.95	8.94	8.35

Tableau 7.1 : Paramètres des écoulements (d'après Hsu et al. (1998a)) pour l'angle 30°.

Débit amont Q_u (l/s)	Débit latéral Q_L (l/s)	Débit aval Q_d (l/s)	Hauteur amont h_u (cm)	Hauteur latérale h_L (cm)	Hauteur aval h_d (cm)
0.56	5.27	5.83	8.93	9.00	8.05
1.16	4.91	6.07	9.23	9.30	8.14
1.89	4.41	6.30	9.61	9.66	8.35
2.50	3.93	6.43	9.87	9.93	8.52
3.43	3.43	6.86	10.155	10.269	8.77
4.11	2.98	7.09	10.49	10.49	9.11
4.73	2.16	6.89	10.11	10.18	8.89
5.33	1.36	6.69	9.62	9.69	8.59
5.63	0.57	6.20	8.84	8.93	8.24

Tableau 7.2 : Paramètres des écoulements (d'après Hsu et al. (1998a)) pour l'angle 45°.

Débit amont Q_u (l/s)	Débit latéral Q_L (l/s)	Débit aval Q_d (l/s)	Hauteur amont h_u (cm)	Hauteur latérale h_L (cm)	Hauteur aval h_d (cm)
0.52	5.27	5.79	9.26	9.21	8.09
1.05	4.92	5.97	9.53	9.43	8.18
1.85	4.25	6.10	9.83	9.78	8.36
2.45	3.99	6.44	10.05	9.98	8.54
3.28	3.43	6.71	10.25	10.23	8.73
4.04	2.99	7.03	10.52	10.48	9.00
4.60	2.17	6.77	10.16	10.15	8.78

7. Simulation numérique à travers les confluences

5.19	1.40	6.59	9.694	9.70	8.638
5.65	0.61	6.26	9.115	9.05	8.51

Tableau 7.3 : Paramètres des écoulements (d'après Hsu et al. (1998a)) pour l'angle 60°.

Débit amont Q_u (l/s)	Débit latéral Q_L (l/s)	Débit aval Q_d (l/s)	Hauteur amont h_u (cm)	Hauteur latérale h_L (cm)	Hauteur aval h_d (cm)
0.386	3.443	3.829	7.10	6.91	5.70
0.863	3.443	4.306	7.61	7.45	6.01
1.821	4.249	6.07	9.89	9.82	7.52
2.218	3.327	5.545	8.97	9.02	7.08
3.327	3.327	6.654	9.93	10.02	7.99
3.677	2.451	6.128	9.28	9.43	7.56
3.884	1.665	5.549	8.73	8.79	7.50
3.552	0.881	4.433	7.09	7.15	6.10
4.702	0.522	5.224	7.78	7.83	7.00

Tableau 7.4 : Paramètres des écoulements (d'après Hsu et al. (1998b)) pour l'angle 90°.

Les figures 7.8, 7.9, 7.10 et 7.11 présentent l'évolution des rapports de hauteur d'eau Y_u et Y_L mesurés et calculés, pour les quatre angles d'intersection (30°, 45°, 60° et 90°) en fonction du rapport des débits $q = \frac{Q_u}{Q_d}$.

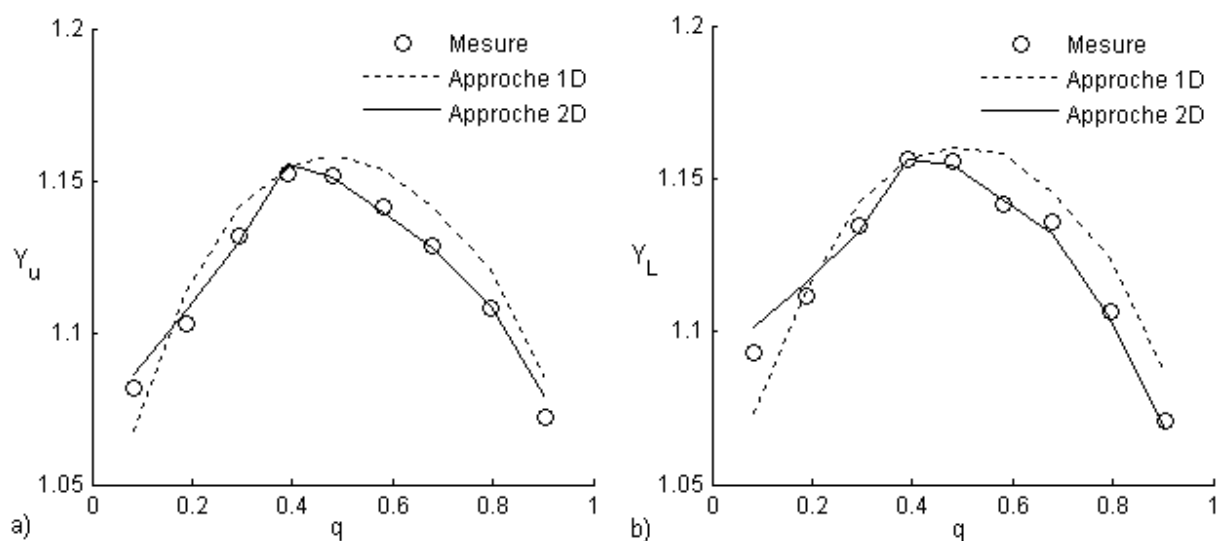


Figure 7.8 : Comparaison des résultats simulés et mesurés par Hsu et al. (1998a) (angle 30°) : a) Y_u en fonction du débit amont, b) Y_L en fonction du débit amont.

Nous pouvons constater que pour l'angle 30° , les résultats de l'approche 1D sont acceptables et un très bon accord entre les résultats de l'approche 2D et les données expérimentales est obtenu. Pour l'angle 45° , une différence comparable est exhibée entre l'approche 1D et les résultats expérimentaux. L'écart entre cette approche et les données expérimentales augmente pour les angles de 60° et 90° et devient très significatif. Les résultats obtenus par le modèle 2D de Barré de Saint Venant sont toujours supérieurs aux résultats 1D et se superposent de façon remarquable aux données expérimentales.

7. Simulation numérique à travers les confluences

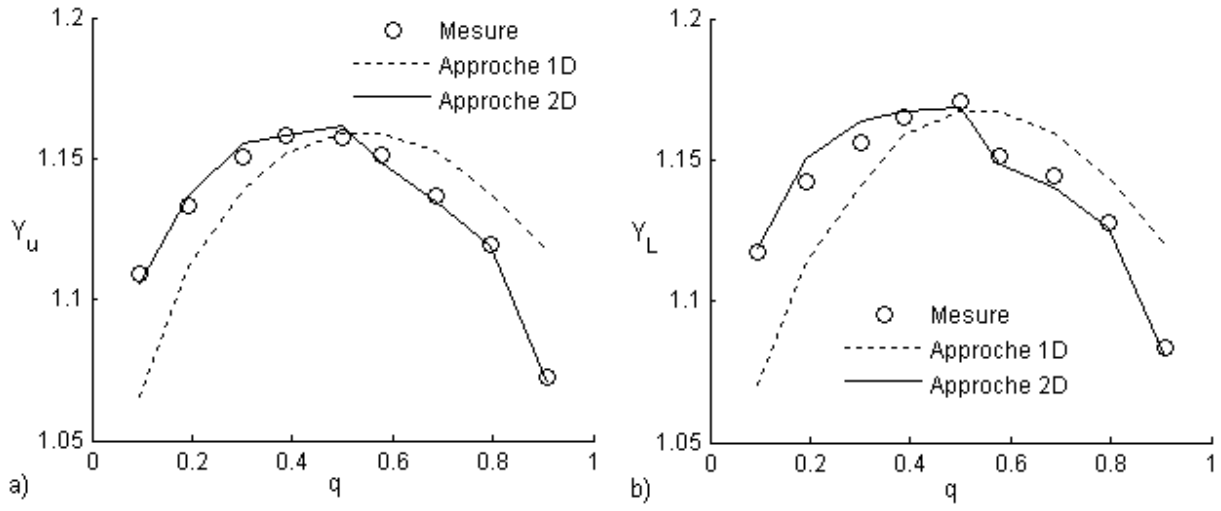


Figure 7.9 : Comparaison des résultats simulés et mesurés par Hsu et al. (1998a) (angle 45°) : a) rapport du débit amont Y_u , b) rapport du débit latéral Y_L .

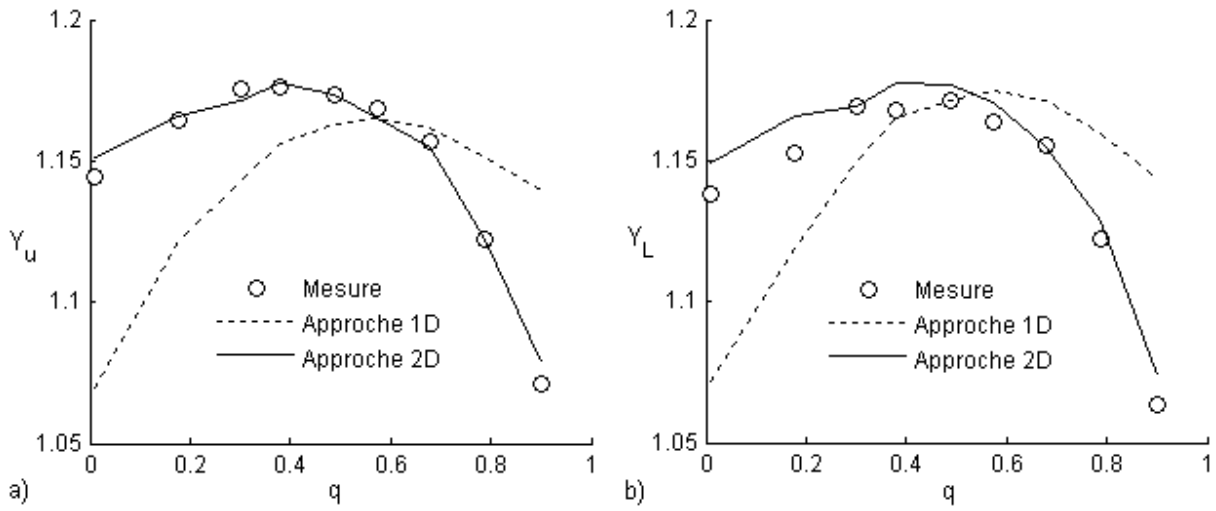


Figure 7.10 : Comparaison des résultats simulés et mesurés par Hsu et al. (1998a) (angle 60°) : a) rapport du débit amont Y_u , b) rapport du débit latéral Y_L .

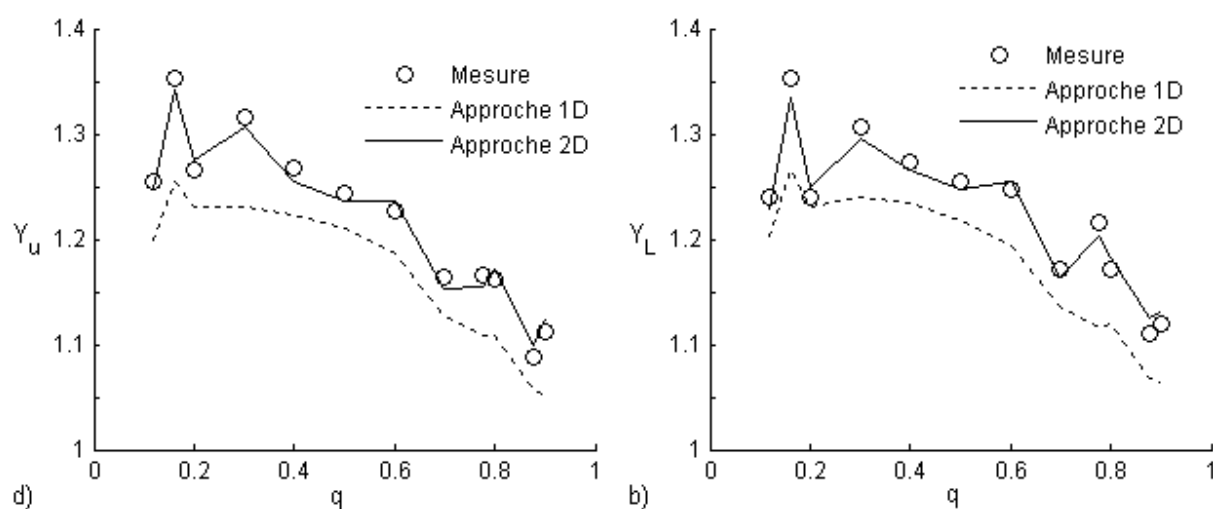


Figure 7.11 : Comparaison des résultats simulés et mesurés par Hsu et al. (1998b) (angle 90°) :
a) rapport du débit amont Y_u , b) rapport du débit latéral Y_L .

Pour une étude plus précise de la prévision des rapports des hauteurs d'eau Y_u et Y_L , nous introduisons un estimateur de qualité E_y défini comme suit :

$$E_y = 100 \cdot \max \left| \frac{Y_c - Y_m}{Y_m} \right| \quad (7.8)$$

où Y_c et Y_m sont les rapports des hauteurs d'eau calculés et mesurés, respectivement.

Angle	E_{Y_u} (1D)	E_{Y_u} (2D)	E_{Y_L} (1D)	E_{Y_L} (2D)
30°	1.32	0.62	1.81	0.79
45°	4.17	0.45	4.26	0.75
60°	6.51	0.64	7.55	0.99
90°	7.26	0.91	8.18	1.26

Tableau 7.5 : Erreurs calculées d'après l'équation (7.8) entre les résultats mesurés par Hsu et al. (1998a et 1998b) et simulés par les deux approches (1D et 2D).

Le tableau 7.5 montre les erreurs par l'équation (7.8) entre les deux approches 1D et 2D et les données expérimentales.

Dans tous les cas étudiés, l'approche 2D donne le meilleur accord avec les données expérimentales. L'erreur de cette approche est de moins de 1 % dans tous les cas. Par ailleurs, ces résultats ont été obtenus avec un effort raisonnable et donc un temps de calcul raisonnable. Au contraire, pour l'approche 1D, l'erreur est acceptable pour l'angle de 30° , mais celle-ci augmente avec l'angle de jonction et atteint 7.55 % pour l'angle 90° .

7.3.2. Confluence transcritique

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de notre simulation numérique d'un écoulement transcritique à travers une jonction obtenus par les deux approches 1D et 2D.

Les données expérimentales obtenues par Hager (1989b) sont comparées aux résultats numériques obtenus par les deux approches.

Les observations ont été conduites dans des branches horizontales et lisses. Il n'y a donc pas d'effet de frottements dans l'installation. Les canaux ont une largeur de 0.096 m et trois angles de jonction de $\delta = 22.5^\circ$, $\delta = 45^\circ$, et $\delta = 90^\circ$ ont été étudiés. Le débit total de l'écoulement Q_d varie entre 0.002 et 0.013 m³/s, et le rapport du débit amont sur le débit aval varie entre 0 et 1. En supposant que l'écoulement est critique à l'entrée de la branche aval, cela conduit à un nombre de Froude égal à 1. Une fois qu'un certain débit Q_d est en place, la distribution du débit Q_u peut être changée pour la valeur désirée de $q = \frac{Q_u}{Q_d}$. Les hauteurs d'eau h_u , et h_L , ont été mesurées.

Les auteurs ont constaté que les hauteurs d'eau dans les branches amont et latérale sont presque égales.

7. Simulation numérique à travers les confluences

Pour la simulation numérique, les débits de l'écoulement sont fixés dans les deux branches amont et latérale. Puisque l'écoulement passe en régime torrentiel dans la branche aval, une sortie libre est considérée.

Débit amont Q_u (l/s)	Débit latéral Q_L (l/s)	Débit aval Q_d (l/s)
0	7.8	7.8
0.3845	7.4155	7.8
0.1170	1.8830	2
0.7059	7.0941	7.8
0.2390	1.7610	2
1.1099	6.6901	7.8
1.9956	9.6544	11.65
1.6567	6.1433	7.8
1.8938	5.9062	7.8
2.5108	5.2892	7.8
4.2289	7.4211	11.65
3.0560	4.7440	7.8
3.2815	4.5185	7.8
5.1679	6.4821	11.65
5.7516	5.8984	11.65
1.0726	0.9274	2
1.2032	0.7968	2
7.5038	4.1462	11.65
5.4389	2.3611	7.8
8.5476	3.1024	11.65
6.1136	1.6864	7.8
6.5036	1.2964	7.8

Tableau 7.6 : Paramètres des écoulements (d'après Hager, 1989b) pour l'angle 22.5°.

7. Simulation numérique à travers les confluences

Les tableaux 7.6, 7.7 et 7.8 listent les différents paramètres de l'écoulement pour les trois angles 22.5°, 45° et 90°, respectivement.

Débit amont Q_u (l/s)	Débit latéral Q_L (l/s)	Débit aval Q_d (l/s)
0	4.9	4.9
0.3034	7.4966	7.8
0.5413	7.2587	7.8
1.4797	6.3203	7.8
2.1676	5.6324	7.8
2.7604	5.0396	7.8
3.6137	4.1863	7.8
4.0646	3.7354	7.8
1.1182	0.8818	2.0
1.3338	0.6662	2.0
1.4280	0.5720	2.0
3.6696	1.2304	4.9
3.9891	0.9109	4.9
1.7040	0.2960	2.0
7.1200	0.6700	7.8

Tableau 7.7 : Paramètres des écoulements (d'après Hager et al., 1989b) pour l'angle 45°.

Débit amont Q_u (l/s)	Débit latéral Q_L (l/s)	Débit aval Q_d (l/s)
0	5.9	5.9
0.6084	7.1916	7.8
0.6786	7.1214	7.8
0.8213	6.9787	7.8
1.4915	4.4085	5.9

7. Simulation numérique à travers les confluences

2.0779	5.7221	7.8
3.6535	4.1465	7.8
2.9695	2.9305	5.9
5.4764	2.3236	7.8
4.4374	1.4626	5.9
6.6706	1.1294	7.8
6.8827	0.9173	7.8
7.0364	0.7636	7.8
7.3663	0.4337	7.8

Tableau 7.8 : Paramètres des écoulements (d'après Hager et al., 1989b) pour l'angle 90°.

L'étude est organisée autour de la prédiction du rapport entre les hauteurs d'eau amont et aval

$Y_u = \frac{h_u}{h_d}$ dans la jonction. Connaissant le débit amont et le débit latéral de l'écoulement, le rapport

des hauteurs d'eau Y_u est calculé en utilisant les deux approches 1D et 2D et comparé aux données expérimentales de Hager (1989b).

La comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques obtenus avec les deux approches 1D et 2D est montrée. La figure 7.12 représente les rapports des hauteurs d'eau Y_u en fonction du rapport des débits q pour les trois angles d'intersection (22.5°, 45° et 90°). Les résultats expérimentaux sont bien reproduits par l'approche 2D. Les figures indiquent un excellent accord entre les données expérimentales et les résultats obtenus par l'approche 2D. La prédiction de cette approche se corrèle bien avec les données mesurées et donne de meilleurs résultats que ceux fournis par l'approche 1D. Un écart remarquable entre les résultats obtenus par l'approche 1D et les données expérimentales est observé.

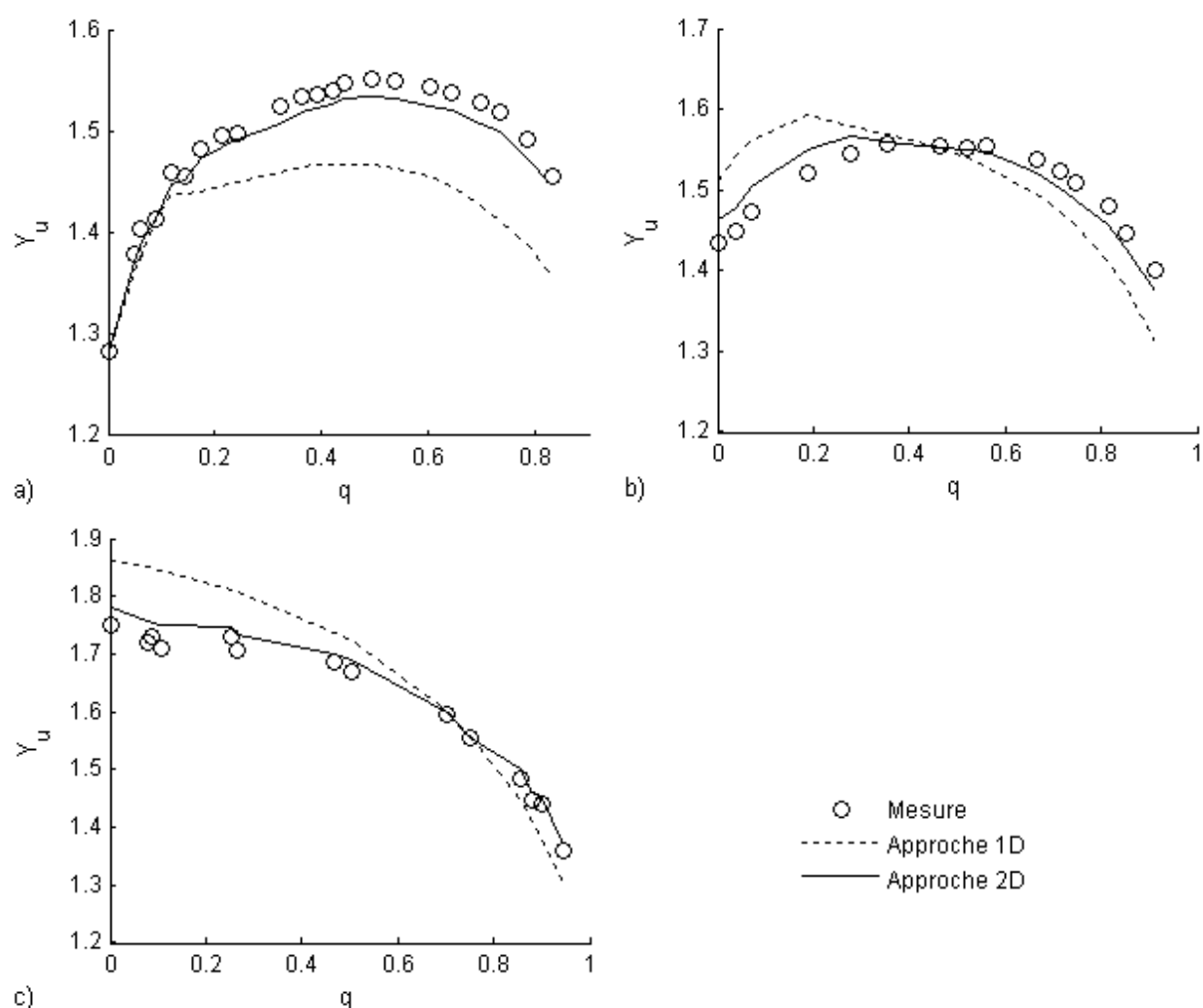


Figure 7.12 : Comparaison des résultats simulés par les deux approches et les résultats mesurés par Hager (1989b) : a) angle 22.5° , b) angle 45° et c) angle 90° .

Le tableau 7.9 présente les erreurs comme définies dans l'équation (7.8) entre les données mesurées et le rapport des hauteurs d'eau calculés les deux approches 1D et 2D.

Selon le tableau 7.9, et dans tous les cas étudiés, l'approche 2D donne le meilleur accord avec les données expérimentales. L'erreur de cette approche est d'environ 2 % dans tous les cas. Au contraire, l'erreur de l'approche 1D est environ de 7 % et augmente avec l'angle de la jonction. Cette erreur atteint 8 % pour l'angle de 90° .

Angle	E_{Y_u} (1D)	E_{Y_u} (2D)
22.5°	7.06	1.43
45°	6.55	2.19
90°	8.03	2.21

Tableau 7.9 : Erreurs calculées d'après l'équation (7.8) entre les résultats mesurés par Hager (1989b) et simulés par les deux approches (1D et 2D).

7.3.3. Confluence torrentielle

Les résultats expérimentaux obtenus par Rice (1985) sont utilisés pour la validation des deux approches 1D et 2D durant un écoulement torrentiel dans les trois branches. Les deux approches 1D et 2D ont été utilisées pour évaluer leurs capacités à prédire les hauteurs d'eau au sein d'une confluence torrentielle.

Les mesures de la hauteur d'eau ont été prises sur deux stations : la station aval à la jonction (h_d) c'est-à-dire à l'amont de la branche aval et la station située à l'extrémité de la branche aval (h_e).

Pour chaque cas, la géométrie de chaque branche est fixée (pente, largeur...). Les écoulements tests sont réalisés et des conditions d'écoulement dans le système sont imposées pour atteindre l'équilibre. Des mesures ont été prises pour déterminer les hauteurs d'eau. En général, les procédures des cas tests consistent à : fixer un débit principal à l'amont du système ; prendre les lectures et les observations appropriées ; introduire un faible débit latéral (en répétant les lectures et les observations) ; augmenter les débits latéraux jusqu'à ce que les données désirées soient obtenues. Une valeur constante du coefficient de Manning (égal à 0.0086) est fixée et trois angles de jonction ont été étudiés (30°, 60° et 90°). Les différentes caractéristiques de l'écoulement pour les trois angles (30°, 60° et 90°) sont énumérées dans les tableaux 7.10, 7.11 et 7.12, respectivement, où S_m et S_L sont les pentes de la branche principale et de la branche latérale, respectivement.

7. Simulation numérique à travers les confluences

L'étude est organisée autour de la prédiction des hauteurs d'eau h_d et h_e . Pour les conditions aux limites, les débits amont et latéral sont connus, et les hauteurs d'eau h_d et h_e sont calculés en utilisant les deux approches 1D et 2D. Les résultats obtenus sont ensuite comparés aux données expérimentales de Rice (1985).

Q_u (l/s)	h_u (cm)	Q_L (l/s)	h_L (cm)	B_u (cm)	B_L (cm)	B_d (cm)	S_m	S_L
11.3	3.63	2.3	3.63	20.42	20.42	30.48	0.0198	0.0105
11.3	3.6	5.7	2.62	20.42	20.42	30.48	0.0198	0.0105
33.9	8.56	6.8	9.20	20.42	20.42	30.48	0.0198	0.0105
11.2	3.66	8.6	3.44	20.42	20.42	30.48	0.0198	0.0105
42.4	10.33	12.7	12.62	20.42	20.42	30.48	0.0198	0.0105
21.1	5.88	17.4	6.43	20.42	20.42	30.48	0.0198	0.0105
42.6	14.17	25.5	15.30	20.42	20.12	30.48	0.0198	0.0105
42.5	14.36	29.8	16.98	20.42	20.12	30.48	0.0198	0.0105

Tableau 7.10 : Caractéristiques des écoulements étudiés par Rice (1985) pour l'angle 30°.

Q_u (l/s)	h_u (cm)	Q_L (l/s)	h_L (cm)	B_u (cm)	B_L (cm)	B_d (cm)	S_m	S_L
11.3	3.57	1.4	3.44	20.42	20.12	30.48	0.0198	0.00887
11.3	3.75	2.8	4.79	20.42	20.12	30.48	0.0198	0.00887
11.3	3.72	5.7	5.58	20.42	20.12	30.48	0.0198	0.00887
2.12	7.99	8.6	8.38	15.24	20.12	30.48	0.0198	0.00887
4.23	13.62	10.6	11.95	15.24	20.12	30.48	0.0198	0.00887
3.42	11.25	14.1	13.59	20.42	20.12	30.48	0.0198	0.00887
4.23	14.26	17.0	14.69	15.24	20.12	30.48	0.0198	0.00887

Tableau 7.11 : Caractéristiques des écoulements étudiés par Rice (1985) pour l'angle 60°.

Q_u (l/s)	h_u (cm)	Q_L (l/s)	h_L (cm)	B_u (cm)	B_L (cm)	B_d (cm)	S_m	S_L
42.3	6.43	3.5	7.32	20.42	30.48	30.48	0.0198	0.0105

7. Simulation numérique à travers les confluences

42.4	10.12	6.9	10.79	20.42	30.48	30.48	0.0198	0.0105
42.0	10.24	12.4	14.63	20.42	30.48	30.48	0.0198	0.0105

Tableau 7.12 : Caractéristiques des écoulements étudiés par Rice (1985) pour l'angle 90°.

Les figures 7.13, 7.14 et 7.15 comparent les hauteurs d'eau mesurées et calculées h_d et h_e par les deux approches pour les trois angles de jonction, par rapport au débit latéral.

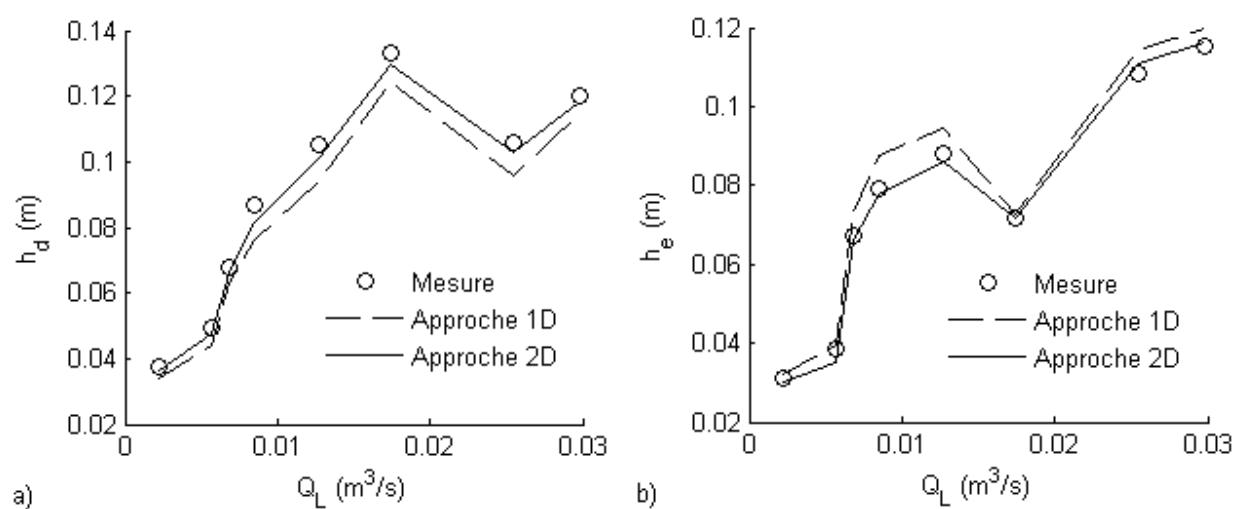


Figure 7.13 : Comparaison des résultats simulés et mesurés par Rice (1985) (angle 30°) : a) hauteur à l'amont de la branche aval h_d , b) hauteur à l'extrémité de la branche aval h_e .

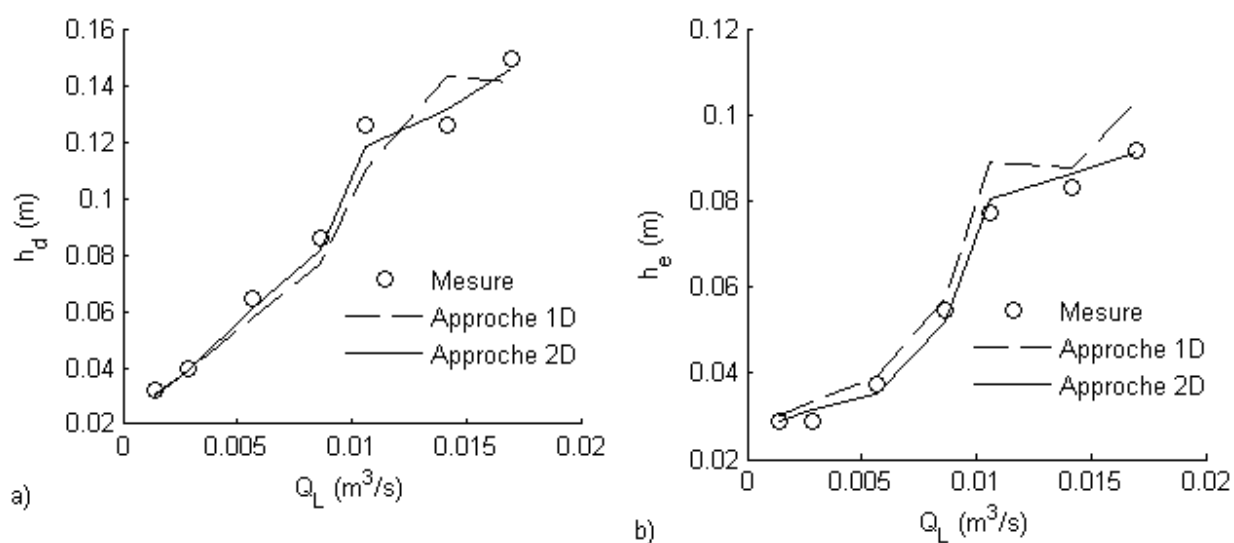


Figure 7.14 : Comparaison des résultats simulés et mesurés par Rice (1985) (angle 60°) : a) hauteur à l'amont de la branche aval h_d , b) hauteur à l'extrémité de la branche aval h_e .

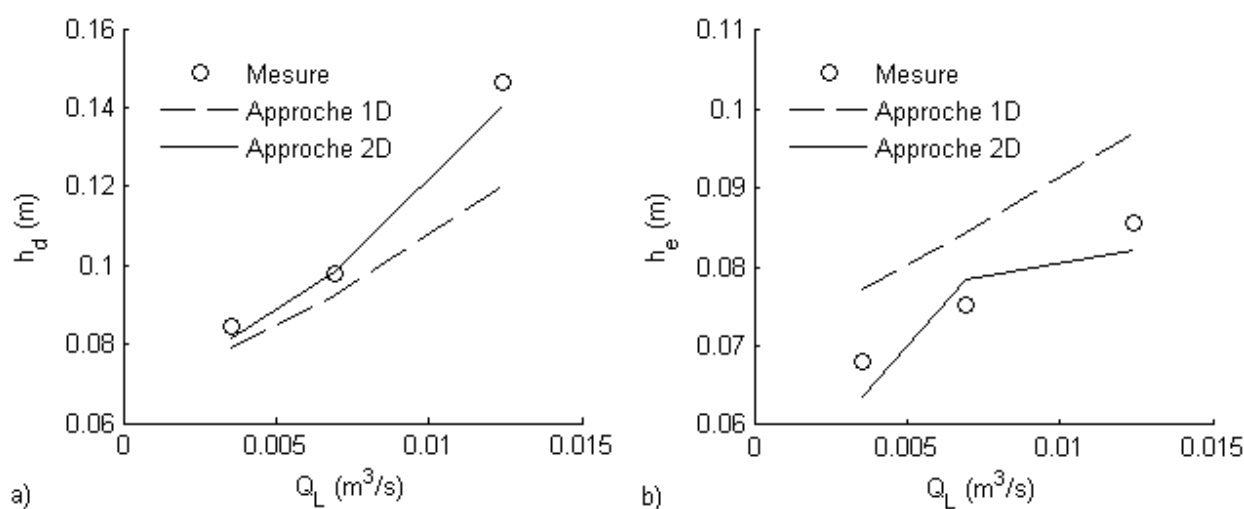


Figure 7.15 : Comparaison des résultats simulés et mesurés par Rice (1985) (angle 90°) : a) hauteur à l'amont de la branche aval h_d , b) hauteur à l'extrémité de la branche aval h_e .

Nous pouvons constater que l'approche 1D ne donne pas toujours des résultats acceptables. On observe une différence nette qui est plus importante que dans les autres types d'écoulement (fluvial et transcritique), notamment pour l'angle de 90° . Nous pouvons voir également que

l'écart entre l'approche de 1D et les données expérimentales augmente avec l'angle de jonction. Cependant un très bon accord entre l'approche 2D et les données expérimentales est trouvé. Cette approche s'est montrée capable de prédire correctement les hauteurs d'eau et ceci bien mieux que l'approche 1D.

Pour une étude plus précise de la prédiction de la hauteur d'eau h_d et la hauteur d'eau h_e , nous présentons dans les tableaux 7.13 et 7.14 l'erreur en norme L_2 entre les données mesurées et les hauteurs d'eau h_d et h_e , respectivement, calculées par les deux approches.

Approche	Angle 30°	Angle 60°	Angle 90°
1D	8.60 %	10.64 %	14.16 %
2D	3.36 %	4.62 %	3.57 %

Tableau 7.13 : Erreur en norme L_2 entre les résultats simulés et mesurés de la hauteur d'eau h_d .

Approche	Angle 30°	Angle 60°	Angle 90°
1D	6.30 %	10.86 %	12.92 %
2D	2.17 %	3.78 %	4.78 %

Tableau 7.14 : Erreur en norme L_2 entre les résultats simulés et mesurés de la hauteur d'eau h_e .

Pour le cas torrentiel, le comportement est globalement le même. L'approche 2D donne le meilleur accord avec les données expérimentales. L'erreur de cette approche est de moins de 5 % dans tous les cas. L'approche 1D n'est pas toujours acceptable, l'erreur de cette approche augmente avec l'angle de la jonction et atteint même 14.16 % pour l'angle 90°.

7.4. CONCLUSION

Au cours des dernières années, la recherche sur les écoulements au sein de jonction s'est focalisée sur des approches monodimensionnelles menant à des développements théoriques et de

nombreuses études expérimentales. En utilisant cette connaissance théorique et expérimentale, nous avons manipulé les conditions aux limites internes afin de propager l'information de l'écoulement dans toutes les branches.

Dans ce chapitre, la simulation numérique de l'écoulement de l'eau dans les confluences, et ceci pour plusieurs types d'écoulement (fluvial, transcritique et torrentiel), a été présentée pour les deux approches 1D et 2D et validée par des mesures expérimentales.

Dans la simulation numérique unidimensionnelle des écoulements à travers les jonctions, la plupart des modélisateurs utilisent le concept d'égalité des hauteurs d'eau à la jonction ou des modèles non-linéaires basés sur la conservation de la quantité de mouvement pour obtenir l'ensemble du traitement des conditions aux limites. Ces modèles peuvent être acceptables dans le cas d'un écoulement fluvial mais sont plus problématiques dans d'autres types d'écoulement (transcritique et torrentiel). Ces modèles sont en effet développés sous certaines hypothèses et simplifications. On peut ainsi dire que ces modèles sont de nature empirique due aux certains paramètres fournis par l'expérience et ils présentent souvent un champ de validité réduit. Ces modèles sont couplés aux équations de Barré de Saint Venant unidimensionnelles pour résoudre le problème de la jonction. Au contraire, pour le cas bidimensionnel, le système entier (les branches et la jonction) est considéré comme un seul système et discrétisé avec des cellules triangulaires formant un maillage non structuré. Nous avons ainsi appliqué simplement les équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles sans recours à des équations supplémentaires empiriques.

Les résultats de la simulation numérique montrent que l'approche 1D est acceptable pour des petits angles de jonction et un faible nombre de Froude (écoulement fluvial). Une fois que l'angle de jonction et le nombre de Froude augmentent (régime transcritique ou torrentiel), on remarque un écart net entre cette approche et les résultats expérimentaux. Au contraire, l'approche 2D fonctionne « bien » pour tous les types d'écoulement et les différents angles de jonction. En conclusion, il apparaît clairement que le traitement bidimensionnel de la jonction est indispensable notamment dans le cas de réseau de rues en milieu urbain où la multiplication des

7. Simulation numérique à travers les confluences

carrefours rend l'erreur inacceptable dans le cas monodimensionnel. Le prix à payer est évidemment un certain coût informatique.

Dans le chapitre 8, une comparaison similaire est faite pour des écoulements à travers une bifurcation d'angle 90° où l'on s'intéresse cette fois-ci à la répartition du débit amont dans les branches aval.

8

Simulation numérique à travers les bifurcations

Ce chapitre porte sur la modélisation des écoulements à travers une déffluence de canaux formant un angle de 90° avec une comparaison entre les approches 1D et 2D. Pour la modélisation 1D, les modèles existants sont de nature empirique, dépendant de la nature du régime d'écoulement, et donc peu pratique dans le cas transitoire. D'autre part, les modèles théoriques de bifurcation sont fortement non linéaires, ce qui peut poser problème lors du couplage avec le modèle de Barré de Saint Venant. En introduisant explicitement le modèle mathématique du seuil latéral dans le terme source de la forme conservative du système de Barré de Saint Venant, la bifurcation de l'écoulement peut être aussi représentée en considérant une hauteur de crête nulle pour le modèle du déversoir latéral. Par cette approche, la forme conservative 1D du système de Barré de Saint Venant permet de simuler la séparation d'écoulement et peut gérer le comportement transitoire (et discontinue) des propagations. L'approximation numérique du modèle est effectuée par un schéma implicite Upwind du premier ordre (Delis et al., 2000) et testée à travers un problème hydraulique pour illustrer l'effet du déversement latéral. Au contraire, la modélisation bidimensionnelle est effectuée simplement par le système de Barré de Saint Venant 2D qui ne nécessite pas l'utilisation d'équations supplémentaires ni bien sûr du concept de seuil latéral. Les résultats de la technique proposée (1D avec seuil latéral) sont comparés à l'approche 2D et sont validés par des données expérimentales. Les comparaisons sont effectuées pour des bifurcations en régimes fluvial, transcritique et torrentiel, respectivement, montrant l'intérêt de l'approche 2D

dans la jonction. Nous nous intéressons dans cette comparaison à la répartition du débit amont dans les branches aval.

8.1. LE MODELE MATHEMATIQUE 1D

L'écoulement à travers les déversoirs latéraux est l'un des écoulements les plus complexes à simuler dans une analyse unidimensionnelle. Une solution analytique complète pour les équations régissant les écoulements au niveau d'un déversoir latéral (Durgo, 2008 ; Lee et Holly, 2008) est très complexe. Dans les applications réelles, le comportement hydraulique des débordements latéraux rencontre fréquemment une évolution discontinue de la ligne d'eau (avec la présence d'un ressaut hydraulique) avec des évolutions très rapides du régime d'écoulement. Nous croyons, ainsi, que l'utilisation de la forme conservative transitoire 1D du système hyperbolique de Barré de Saint Venant associée avec le modèle latéral de déversoir de Hager (1987) avec une hauteur de crête nulle fournit un outil efficace et simple pour la simulation dans une bifurcation d'angle droit. Ainsi le modèle proposé prend la forme suivante :

$$U_t + F_x = S \quad (8.1)$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} Q \\ Q^2 / A + gI_1 \end{pmatrix}, \quad S(U) = \begin{pmatrix} Q_{dev} \\ gA(S_o - S_f) + QQ_{dev} / A \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

où :

$Q_{dev} = -\frac{dQ}{dx}$ est le terme d'apport qui, pour nous, correspond au débit déversé par l'intermédiaire du déversoir latéral. Ce terme de déversement est explicité par la relation de Hager (1987). L'établissement du débit latéral est basé sur la constatation que les profils d'écoulement sur un déversoir frontal et sur un déversoir latéral sont semblables. Souvent, on utilise la relation de Poléni, qui est valable pour le déversoir frontal. Celle-ci est donnée par :

$$\frac{dQ}{dx} = C_d \sqrt{2g} (h - w)^{3/2} \quad (8.3)$$

où w est la hauteur de la crête et C_d , appelé coefficient de débit, dépend de la hauteur et de la forme de la crête.

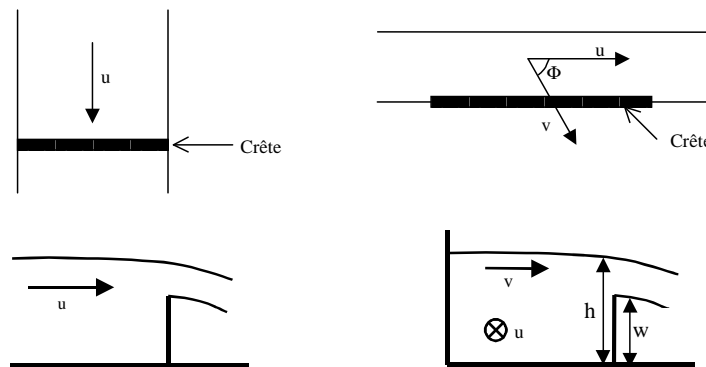


Figure 8.1 : Comparaison des profils d'écoulement sur un déversoir frontal et latéral

Ainsi, le déversoir latéral est considéré comme une succession de déversoirs latéraux de longueur dx . Hager a travaillé sur les déversoirs latéraux et a établi une loi de déversement basée sur la loi de Poléni (Hager, 1987). Celui-ci l'a corrigé pour tenir compte du déversement latéral. Hager (1987) a adapté cette relation au cas du déversoir latéral en affectant à la loi de Poléni une série de coefficients qui permettent de tenir compte des effets de :

- La pente de fond du déversoir
- De la vitesse latérale (v)
- De la direction de la vitesse latérale (Φ)
- De l'effet d'un entonnement éventuel dans le déversoir.

On utilise donc une formule de type Poléni et on ajoute des coefficients permettant de prendre en compte l'effet de la vitesse latérale, de sa direction (ω_v), ainsi que de l'effet d'entonnement du déversoir (ω_Φ).

$$Q_{dev} = -\frac{dQ}{dx} = -0.6n^* \cdot c_w \sqrt{gH^3} (y-W)^{3/2} \times \omega_u \times \omega_\phi \quad (8.4)$$

Après quelques approximations (Buyer, 2002), la relation du débit déversé est donnée par la relation :

$$\frac{dQ}{dx} = -0.6n^* c_w \sqrt{gH^3} (y-W)^{3/2} \times \sqrt{\frac{1-W}{3-2y-W}} \times \left[1 - \theta \left(\frac{3(1-y)}{y-W} \right)^{1/2} \right] \quad (8.5)$$

Avec : $y = \frac{h}{H}$, $W = \frac{w}{H}$.

x : Variable adimensionnelle de distance suivant la longueur du déversoir.

y : Variable adimensionnelle de hauteur d'eau.

θ : Angle associé au changement longitudinal de largeur.

W : Variable adimensionnelle de hauteur de crête.

H : Energie spécifique.

c_w : coefficient de forme du déversoir ($c = 1$ dans le cas ou le déversoir a une paroi mince)

n^* : nombre de parois déversantes ($n^* = 1$ dans ce travail).

8.2. EVALUATION ET DISCUSSION

Dans cette section, les deux approches 1D et 2D sont utilisées pour traiter les écoulements à surface libre à travers des bifurcations. La simulation unidimensionnelle est utilisée en considérant simplement une hauteur de crête égale à zéro. Les résultats représentés des deux approches numériques 1D et 2D sont validés à l'aide des résultats expérimentaux obtenus à l'INSA de Lyon. Toutes les branches sont rectangulaires de même longueur (2.54 m) et même largeur (0.3 m). La répartition du débit amont dans les branches latérale et aval est étudiée. En

supposant la continuité du débit de l'écoulement à travers la jonction, on obtient l'égalité suivante :

$$Q_u = Q_L + Q_d. \quad (8.4)$$

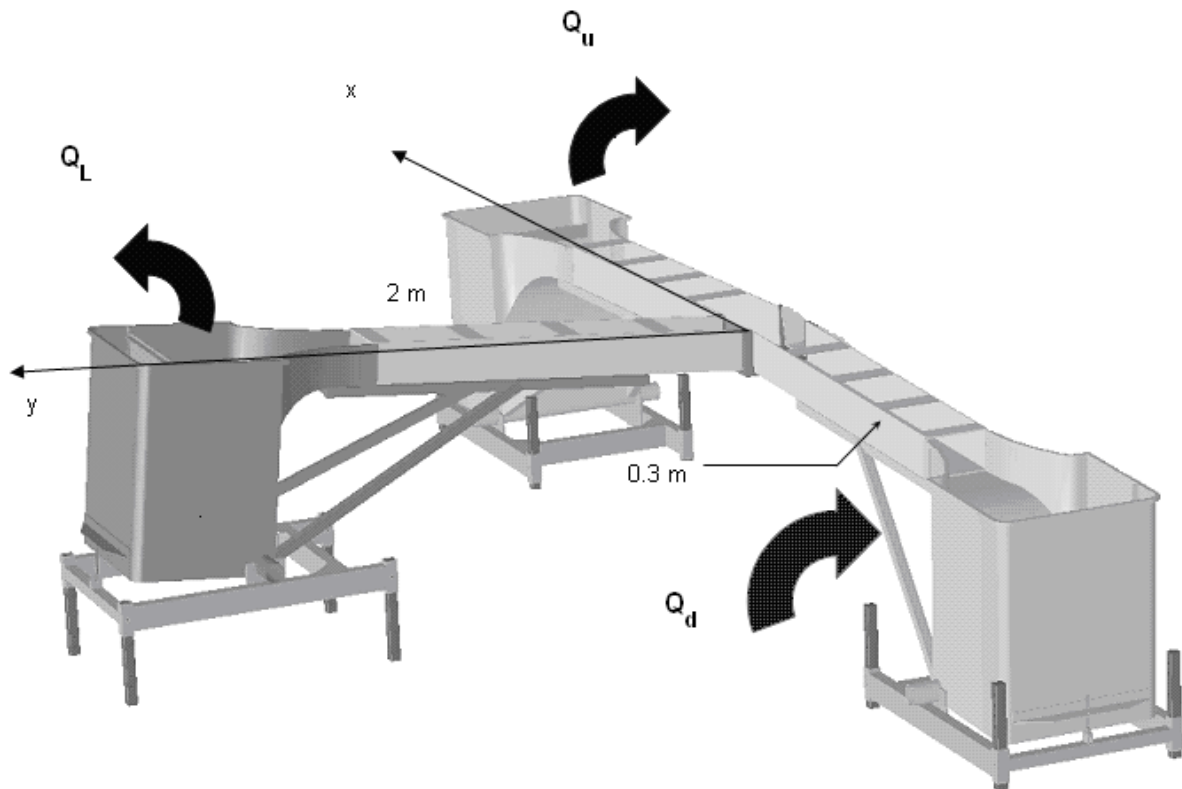


Figure 8.2 : Vue schématique du pilote expérimental à l'INSA de Lyon.

Le pilote expérimental utilisé pour représenter les données expérimentales est illustré sur la figure 8.2. Les débits sont mesurés par des sondes électromagnétiques avec une erreur de mesure de moins de 1%. Pour des raisons techniques, le croisement est non pas un carré de 300×300 mm, mais une croix, de 370×370 mm comme montré sur la figure 8.3. Il y a également une rupture de pente du fond dans les régions de l'intersection comme noté sur la figure 8.3. L'ensemble des trois mesures est effectué afin d'examiner les deux approches 1D et 2D en considérant des écoulements fluviaux, transcritiques et torrentiels dans une bifurcation. Dans la sous-section

8. Simulation numérique à travers les bifurcations

suivante, les deux approches numériques sont évaluées et les résultats numériques obtenus sont comparés avec les résultats expérimentaux.

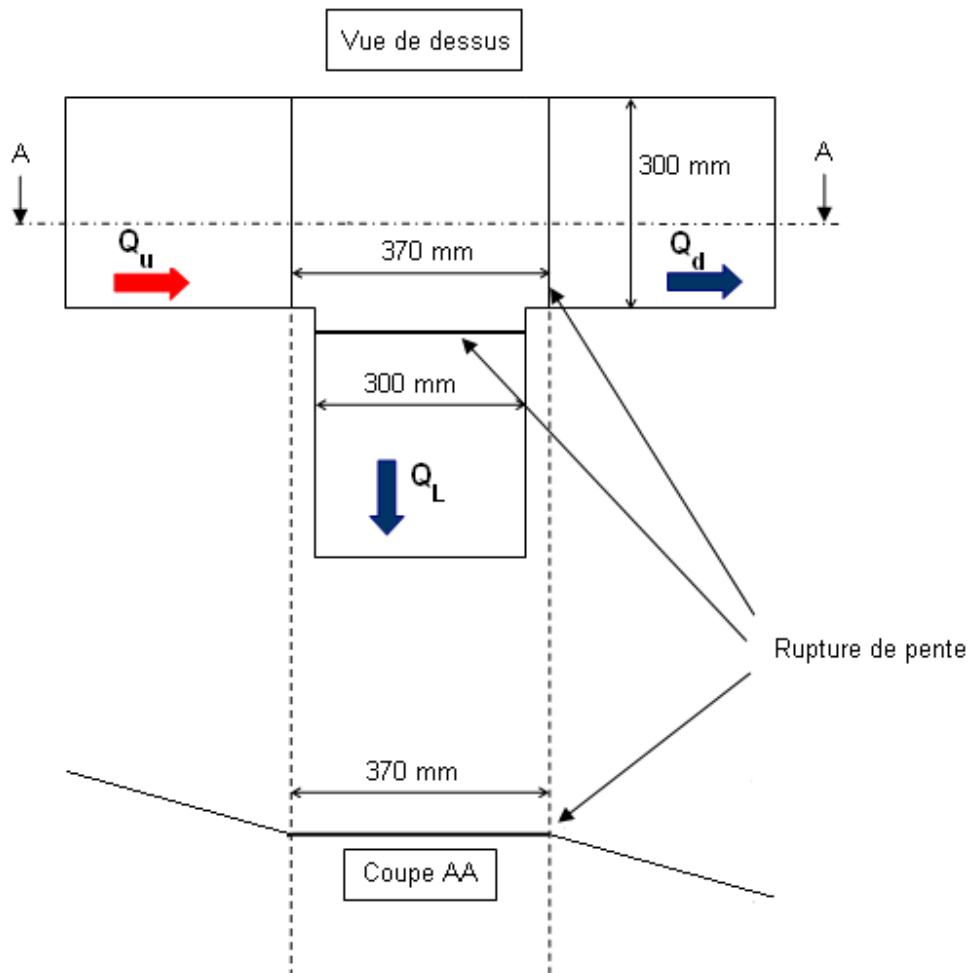


Figure 8.3 : Vue de dessus de l'installation expérimentale.

Dans tous les cas, dans la simulation numérique de ce problème, nous avons décomposé le canal en 31 nœuds de calcul pour l'approche 1D et 1607 mailles triangulaires pour l'approche 2D.

8.2.1. Écoulement torrentiel

L'écoulement torrentiel est maintenu à l'amont, à l'aval et à la sortie latérale (figure 8.4). Trois cas de base sont considérés correspondants à trois choix divers de pente de lit égaux, respectivement, à 1 %, à 3 % et à 5.75 %. La pièce centrale est à pente nulle.

Les parois sont en verre et l'écoulement est hydrauliquement lisse. Cependant, on peut considérer un coefficient de Strickler équivalent à $K_s = 120$ ($n_M = 1/K_s$). Puisque l'écoulement est torrentiel, une hauteur d'eau h_u et un débit d'écoulement Q_u sont imposés à l'amont. Pour chaque cas de pentes de lit, un choix des variables d'entrée de l'écoulement (énumérées dans le tableau 8.1) est considéré. Ainsi le nombre de Froude varie entre $1.70 < Fr_u < 2.00$, $3.17 < Fr_u < 3.53$, et $4.19 < Fr_u < 4.92$ pour les trois configurations de pente, 1%, 3% et 5.75%, respectivement.

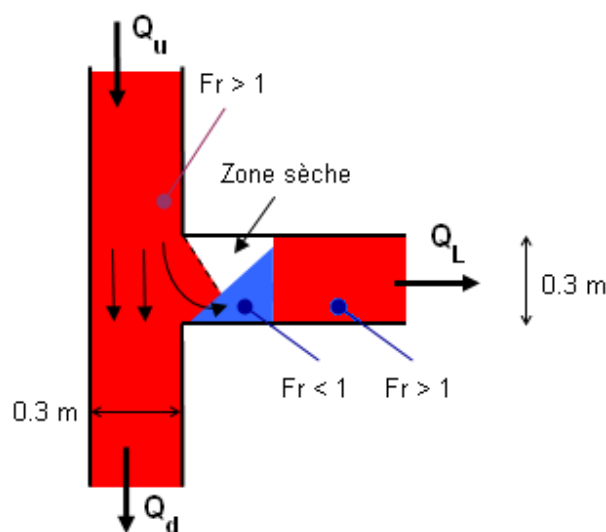


Figure 8.4 : Écoulement torrentiel dans la bifurcation.

Le tableau 8.1 récapitule tous les cas tests considérés et présentent les débits sortants obtenus expérimentalement et numériquement (par les approches 1D et 2D). Pour une compréhension informative du modèle de l'écoulement, les figures 8.4, 8.5 et 8.6 montrent l'évolution du jet torrentiel à travers l'intersection.

8. Simulation numérique à travers les bifurcations

Pente	Q_u (l/s)	h_u (cm)	Q_L (l/s) mesuré	Q_d (l/s) mesuré	Q_L (l/s) 1D	Q_d (l/s) 1D	Q_L (l/s) 2D	Q_d (l/s) 2D
1 %	2.014	1.166	0.2934	1.7206	0.417	1.597	0.3192	1.7052
1 %	2.993	1.483	0.4114	2.5816	0.587	2.406	0.442	2.5631
1 %	4.02	1.773	0.543	3.477	0.76	3.26	0.5687	3.464
1 %	4.99	2.022	0.676	4.314	0.921	4.069	0.6869	4.3162
1 %	9.123	2.916	1.146	7.977	1.579	7.544	1.1558	7.9648
3 %	3.498	1.113	0.256	3.242	0.4005	3.0975	0.2848	3.2205
3 %	4.003	1.207	0.294	3.709	0.4491	3.5539	0.3194	3.6913
3 %	4.512	1.297	0.313	4.199	0.4974	4.0146	0.354	4.1661
3 %	5.012	1.382	0.352	4.66	0.5445	4.4675	0.3878	4.6327
3 %	5.491	1.459	0.386	5.105	0.5886	4.9024	0.4197	5.08
5.75 %	4.047	0.971	0.194	3.853	0.328	3.719	0.2411	3.8111
5.75 %	5	1.101	0.238	4.762	0.392	4.608	0.2884	4.7182
5.75 %	7.03	1.35	0.339	6.691	0.525	6.505	0.3874	6.6526
5.75 %	8.48	1.63	0.46	8.02	0.677	7.803	0.4933	7.9924
5.75 %	10.65	1.94	0.569	10.081	0.868	9.782	0.5659	10.0862

Tableau 8.1 : Mesures des débits dans la branche amont et les branches aval de la bifurcation pour les différentes configurations de pente 1 %, 3 % et 5.75 % (écoulement torrentiel).

Les figures 8.7, 8.8 et 8.9 montrent la distribution de débit dans les branches aval pour les trois configurations de pente, respectivement. Ces figures confirment que la distribution de débit est correctement prédite par l'approche 2D. Cependant, l'approche 1D ne donne pas toujours des résultats satisfaisants. On remarque que les débits sont parfois mal estimés par cette approche.

Pour une comparaison quantitative, on introduit l'estimateur de qualité E_{QT} (estimateur de qualité de prédiction de répartition de débit) suivant :

$$E_{QT} = 100 * \max(abs(Q_c - Q_m) / Q_T) \quad (8.5)$$

8. Simulation numérique à travers les bifurcations

où Q_c est le débit calculé, Q_m est le débit mesuré et Q_T est le débit total mis en jeu ($Q_T = Q_u$).

Le tableau 8.2 liste les erreurs entre les valeurs simulées et les valeurs expérimentales suivant l'équation (8.5).

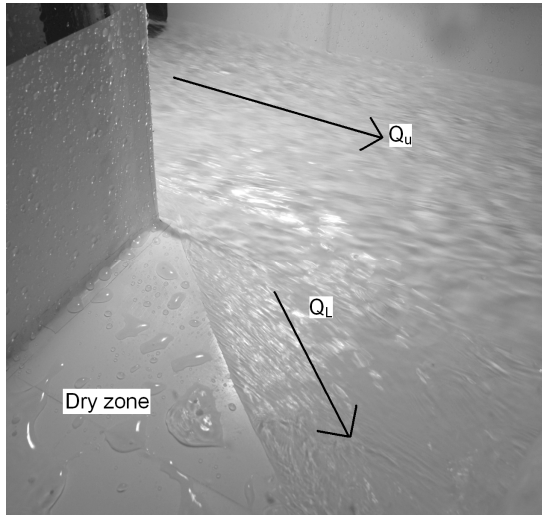


Figure 8.5 : Photo du modèle d'écoulement torrentiel dans une bifurcation.

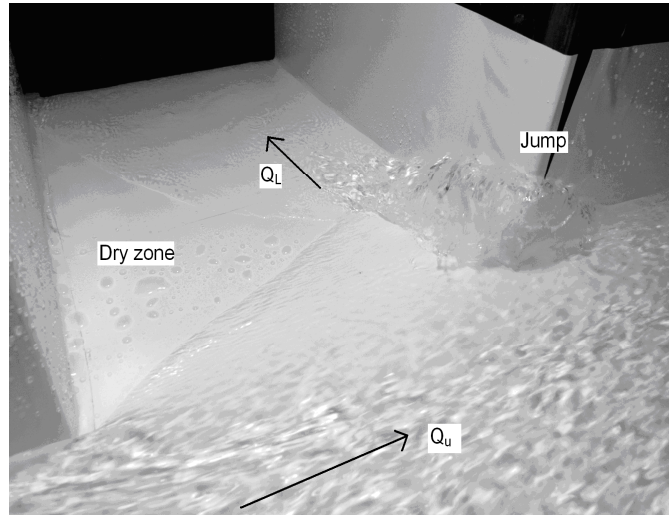


Figure 8.6 : Zone sèche et occurrence de ressaut hydraulique.

L'erreur moyenne de l'approche 1D pour les différentes configurations de pente est de 4.35 % avec un minimum de 2.56 % et un maximum de 6.14 %. Alors que pour l'approche 2D, l'erreur moyenne est négligeable et n'atteint même pas 1 % (0.66 %) avec un minimum de 0.04 % et un maximum de 1.28 %. On peut conclure que les résultats obtenus par l'approche 2D sont très bons avec des erreurs « très faibles ».

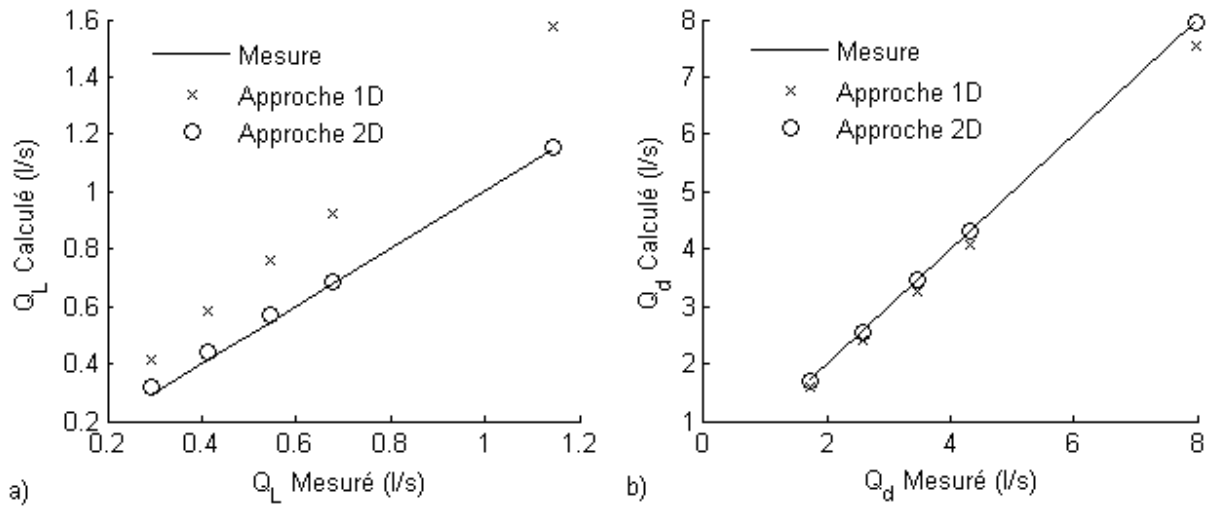


Figure 8.7 : Comparaison des débits mesurés et calculés avec les approches 1D et 2D pour la configuration de pente 1 % (écoulement torrentiel) ; a) débits latéral, b) débits aval.

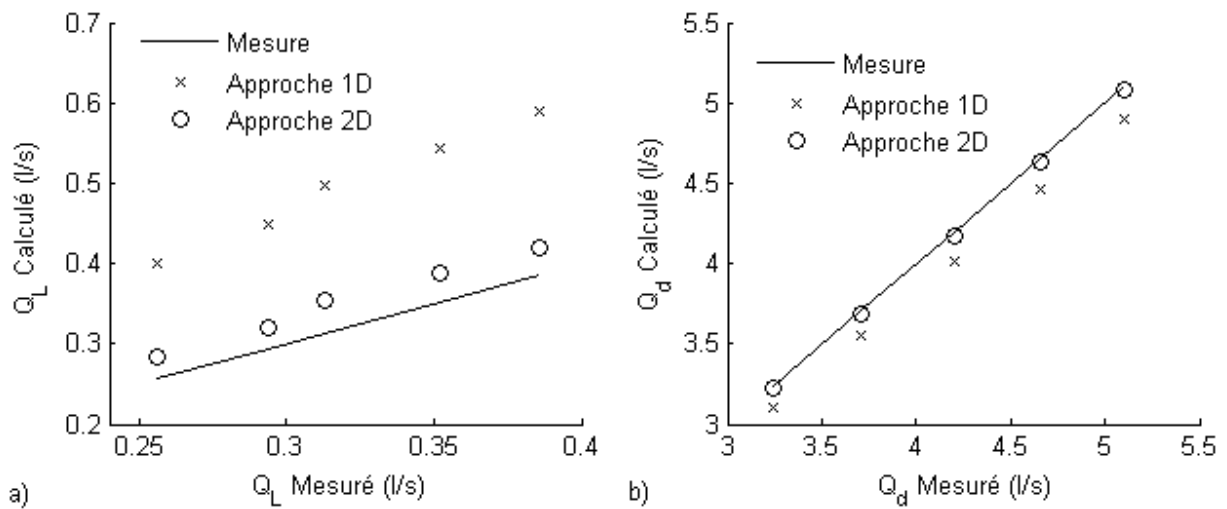


Figure 8.8 : Comparaison des débits mesurés et calculés avec les approches 1D et 2D pour la configuration de pente 3 % (écoulement torrentiel) ; a) débits latéral, b) débits aval.

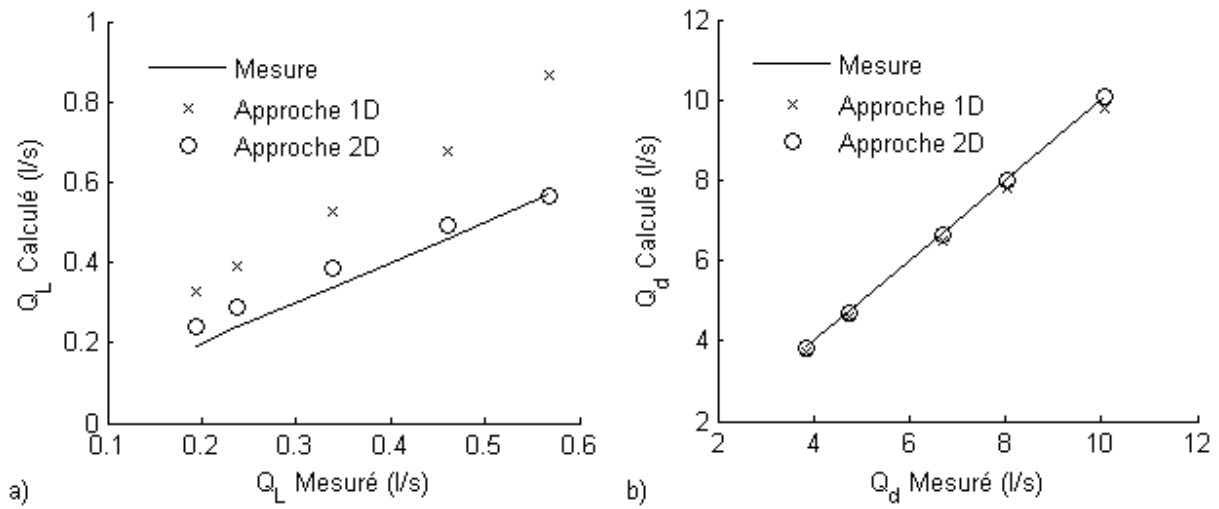


Figure 8.9 : Comparaison des débits mesurés et calculés avec les approches 1D et 2D pour la configuration de pente 5.75 % (écoulement torrentiel) ; a) débits latéral, b) débits aval.

Approche	Pente 1 %		Pente 3 %		Pente 5.75 %	
	E_{QT_L}	E_{QT_d}	E_{QT_L}	E_{QT_d}	E_{QT_L}	E_{QT_d}
1D	6.14	4.75	4.13	3.69	3.31	2.56
2D	1.28	0.04	0.91	0.44	1.16	0.05

Tableau 8.2 : Valeurs des indicateurs de qualité de répartition du débit par les deux approches 1D et 2D pour le cas torrentiel en fonction des différentes configurations de pente des canaux.

8.2.2. Ecoulement transcritique

L'écoulement est fluvial dans les branches amont et aval. On a une section critique dans le canal latéral qui fait passer l'écoulement de fluvial à torrentiel. L'écoulement reste en revanche fluvial selon l'axe (x). Pour cette expérience, les pentes des branches amont et aval sont égales à zéro aussi bien que la pente latérale du déversoir. Pour permettre un meilleur contrôle à la fin de la branche aval, un déversoir frontal réglable de longueur w_d est placé à 2.54 m après l'intersection des branches (figure 8.10).

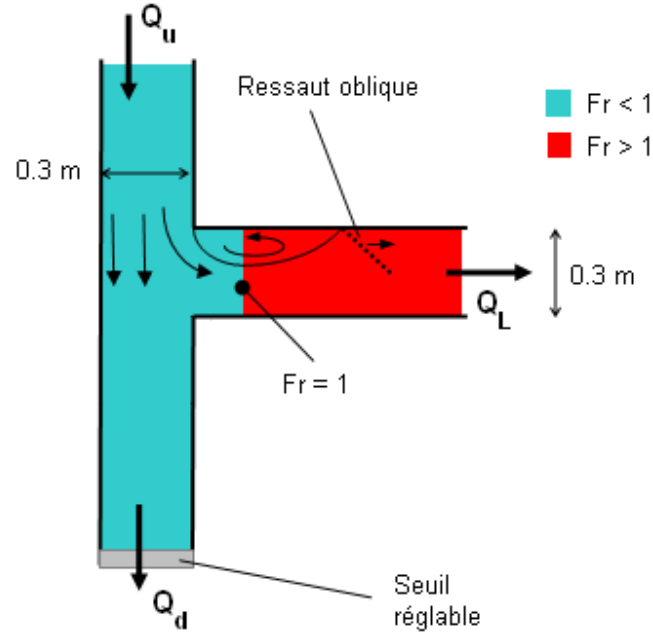


Figure 8.10 : Ecoulement transcritique dans une bifurcation.

En raison de la nature fluviale de l'écoulement, une condition au limite amont (Q_u) est fixée à l'amont et une condition au limite aval (h_d) doit être supposé à la sortie de la branche aval (h_d). Plusieurs cas test sont considérés, avec un nombre de Froude fluvial à l'amont qui varie entre $0.49 < Fr_u < 0.92$. La condition au limite amont (Q_u) a été placée selon les valeurs énumérées dans le tableau 8.3. La condition au limite aval (h_d) est fixée selon la formule suivante (correspondant à la loi d'un déversoir submergé) :

$$h_d = w_d + \left(\frac{Q_d}{gb_d} \right)^{1/3} \left[1 + 0.793 \left(\frac{w_d}{b_d} \right)^{0.731} \right] \quad (8.6)$$

Q_d est le débit aval, qui est mis à jour numériquement et b_d correspond à la largeur du fond du canal aval.

8. Simulation numérique à travers les bifurcations

Le tableau 8.3 récapitule tous les cas tests considérés avec les valeurs expérimentales et les valeurs calculées de Q_L et Q_d par les deux approches 1D et 2D.

Q_u (l/s)	w_d (mm)	Q_L (l/s) mesuré	Q_d (l/s) mesuré	Q_L (l/s) 1D	Q_d (l/s) 1D	Q_L (l/s) 2D	Q_d (l/s) 2D
17.03	99.6	15.51	1.52	16.52	0.51	15.9853	1.0444
14.03	85.3	12.6	1.43	13.41	0.62	12.9772	1.052
18.02	99.6	16.12	1.9	17.255	0.765	16.6349	1.3751
19.03	99.6	16.6	2.43	17.927	1.103	17.1706	1.8493
19.99	99.6	17.15	2.84	18.51	1.4796	17.6318	2.3579
13	75	11.16	1.84	12.018	0.982	11.5108	1.4902
16.03	85.3	13.617	2.413	14.696	1.334	13.9437	2.086
15.08	75	12.14	2.94	13.1655	1.9145	12.4952	2.5844
18.03	85.3	14.63	3.4	15.95	2.08	15.0412	2.9876
17	75	13	4	13.99	3.01	13.4667	3.5327

Tableau 8.3 : Valeurs des débits dans la branche amont et les branches aval de la bifurcation pour un écoulement transcritique.

La figure 8.11 montre la distribution de débit dans les branches aval par les deux approches dans le cas d'un écoulement transcritique. Les résultats présentés montrent que, de manière générale, la répartition de débit est raisonnablement prédite par l'approche 2D. Au contraire, un écart important s'observe entre les résultats de l'approche 1D et les mesures expérimentales. Le tableau 8.4 indique les valeurs des indicateurs de qualité de répartition du débit par les deux approches 1D et 2D. L'erreur moyenne de l'approche 1D est de 6.55 %, alors que pour l'approche 2D, l'erreur moyenne est de 2.52 %.

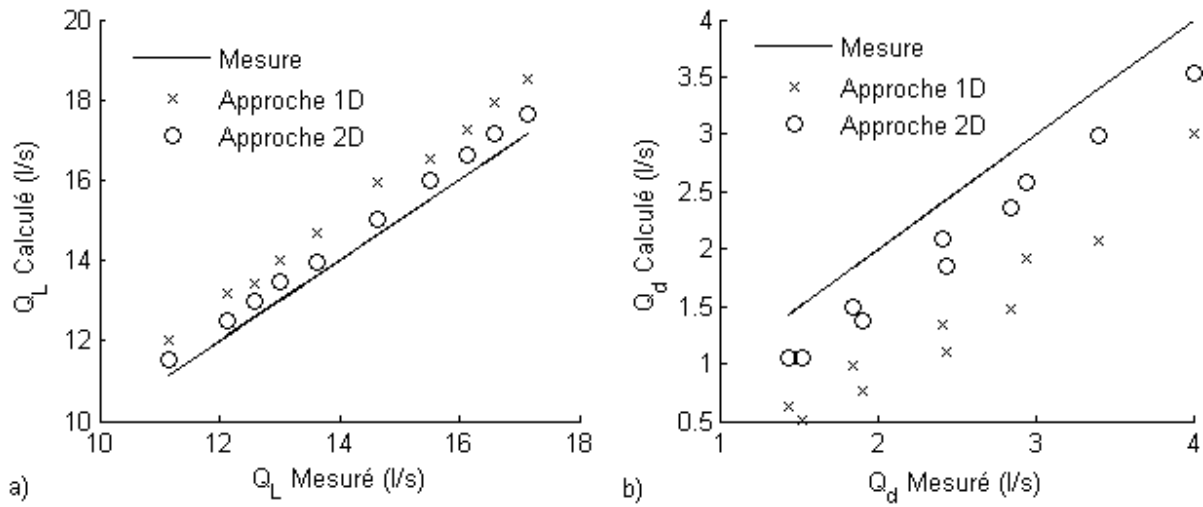


Figure 8.11 : Comparaison des débits mesurés et calculés avec les approches 1D et 2D (écoulement transcritique) ; a) débits latéral, b) débits aval.

Approche	E_{Qr_L}	E_{Qr_d}
1D	7.32	5.77
2D	3.00	2.04

Tableau 8.4 : Valeurs des indicateurs de qualité de répartition du débit par les deux approches 1D et 2D pour le cas transcritique.

8.2.3. Ecoulement fluvial

L'écoulement est fluvial dans toutes les branches. Pour cette expérience, les pentes des branches amont et aval sont égales à zéro ainsi que la pente latérale du déversoir. Deux déversoirs frontaux sont fixés à la fin de la branche latérale et la branche aval permettant de régler l'écoulement dans le canal principal et au niveau de la sortie latérale (figure 8.12). Les déversoirs sont placés à 2.54 m après l'intersection avec des hauteurs réglables w_L et w_d .

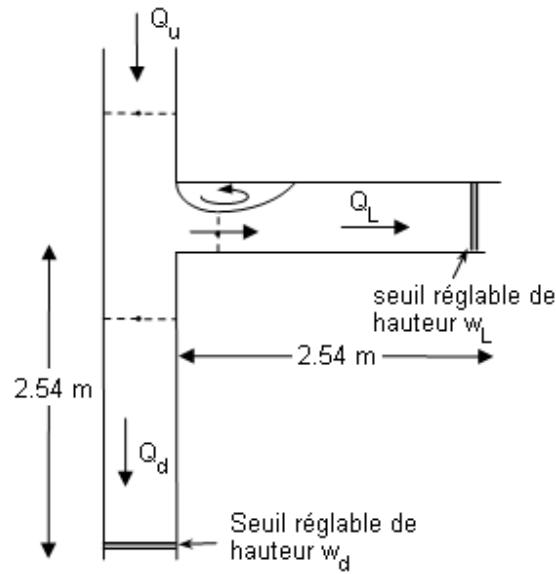


Figure 8.12 : Ecoulement fluvial dans une bifurcation.

Les conditions aux limites de l'écoulement dans la branche principale sont semblables au cas précédent. Le débit latéral est déduit numériquement. Cependant, puisque dans ce cas nous avons un écoulement submergé au-dessus d'un déversoir latéral, le débit latéral Q_L est calculé par la relation de Brater et King (1976) :

$$Q_L^{\text{Sub}} = Q_L \cdot \left(1 - \left(\frac{y \cdot H}{h_L} \right)^{1.5} \right)^{0.385} \quad (8.7)$$

Où h_L est la hauteur l'eau à l'aval de la branche latérale et est exactement calculé comme dans l'équation (8.6). Dans le but de développer la gamme maximale des conditions aux limites, deux ensembles d'essais sont effectués, avec notamment $w_d = w_L$ et $w_d \neq w_L$.

Le tableau 8.5 liste les différents cas tests et les résultats de la simulation numérique obtenus par les deux approches 1D et 2D et les expériences pour un écoulement fluvial. Les débits aval Q_L et Q_d prédits par les calculs sont comparés aux débits aval mesurés expérimentalement sur la figure

8. Simulation numérique à travers les bifurcations

8.13. Les résultats présentés sur la figure 8.13 montrent que la répartition des débits dans les branches aval est correctement prédite par les deux approches 1D et 2D pour le cas d'un écoulement fluvial. Le tableau 8.6 indique les valeurs des indicateurs de qualité de répartition du débit par les deux approches 1D et 2D (calculés selon l'équation (8.5)). L'erreur moyenne de l'approche 1D est de 3.63 %, alors que pour l'approché 2D, l'erreur moyenne est de 1.29 %. On remarque que les erreurs sont faibles avec un petit avantage pour l'approche 2D. Ces erreurs sont moins significatives que celles obtenues pour les deux autres types d'écoulement (torrentiel et transcritique).

Q_u (l/s)	w_L (mm)	w_d (mm)	Q_L (l/s) mesuré	Q_d (l/s) mesuré	Q_L (l/s) 1D	Q_d (l/s) 1D	Q_L (l/s) 2D	Q_d (l/s) 2D
2.02	120.4	120.4	0.965	1.028	1.004	1.016	0.9814	1.019
5.016	120.4	120.4	2.064	2.971	1.9442	3.0718	1.9675	2.9869
18.96	120.4	120.4	7.2	11.76	6.86	12.1	6.9921	11.9703
9.66	120.4	120.4	3.276	6.366	2.7828	6.8772	2.9812	6.1007
4.004	120.4	120.4	1.3	2.7	1.1796	2.8244	1.2445	2.7668
6.008	49.3	70.2	1.369	4.65	1.1429	4.8651	1.2786	4.7405
6.01	35.2	12.17	4.099	1.897	3.902	2.108	3.9522	1.9463
10.07	35.2	15	5.55	4.47	5.1727	4.8973	5.3874	4.6423
10.05	35.2	18.1	5.37	4.66	5.0295	5.0205	5.2088	4.8309
9.976	60.2	12.6	8.197	1.794	7.7966	2.1794	8.0182	1.9709

Tableau 8.5 : Mesures des débits dans la branche amont et les branches aval de la bifurcation pour écoulement fluvial.

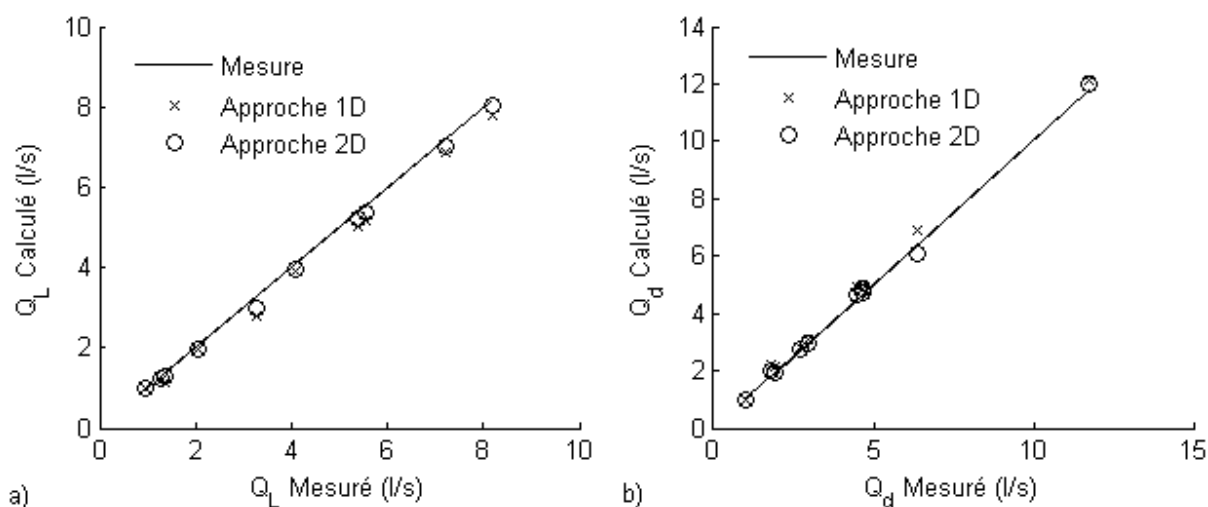


Figure 8.13 : Comparaison des débits mesurés et calculés avec les approches 1D et 2D (écoulement fluvial) ; a) débits latéral, b) débits aval.

Approche	E_{Qr_L}	E_{Qr_d}
1D	1.96	5.30
2D	0.82	1.77

Tableau 8.6 : Valeurs des indicateurs de qualité de répartition du débit par les deux approches 1D et 2D pour le cas fluvial.

8.3. CONCLUSION

Au cours des dernières années, la compréhension et la modélisation de l'hydraulique des jonctions ont fait des avancées. Comparées aux études sur les problèmes de confluence, les études sur la division d'écoulement et la bifurcation sont moins nombreuses. La plupart de ces études sont concentrées sur les modèles théoriques 1D de division d'écoulement dans une jonction d'angle 90° , sur des relations empiriques, sur des études expérimentales et récemment sur des simulations numériques 3D. Typiquement, l'écoulement dans une bifurcation peut être prédit par des formules empiriques qui, malheureusement, dépendent du régime d'écoulement et qui sont, par conséquent, peu pratiques. D'autre part, adopter les modèles de division théoriques

1D, avec la forme caractéristique des équations de Barré de Saint Venant 1D, pour la gestion des conditions aux limites internes peut également être employé. Cependant, la plupart des modèles de division, sont développés pour une jonction d'angle 90° , et sont limitées aux écoulements fluviaux. En outre, une procédure itérative pour résoudre des équations non-linéaires est exigée.

Dans ce chapitre, nous proposons une technique numérique unidimensionnelle pour estimer la distribution d'écoulements dans une bifurcation d'angle 90° . Le modèle mathématique est basé sur la forme conservatrice des équations à surface libre couplées explicitement avec le modèle latéral du déversoir de Hager (1987), en considérant une hauteur de crête nulle pour le modèle du déversoir latéral comme outil pour tenir compte du déversement latéral. L'avantage de cette méthode provient du fait qu'il permet le calcul numérique direct des distributions d'écoulement dans une bifurcation pour les différents régimes d'écoulement. La discrétisation du modèle proposé a été effectuée avec un schéma implicite Upwind de premier ordre (Delis et Skeels, 2000).

D'autre part une comparaison entre les approches 1D et 2D est aussi réalisée. Au contraire, la modélisation bidimensionnelle est effectuée tout simplement par le système de Barré de Saint Venant 2D qui ne nécessite pas l'utilisation des équations supplémentaires ni le concept du seuil latéral. Les résultats des deux approches 1D et 2D sont validés par des données expérimentales effectuées à l'INSA de Lyon. Les comparaisons sont effectuées pour des bifurcations latérales en régimes fluvial, transcritique et torrentiel, respectivement.

Les résultats numériques ont été évalués et comparés aux données expérimentales concernant la répartition de débit amont dans les branches aval. Les résultats représentés confirment l'avantage de l'approche 2D qui parvient à des résultats similaires aux données expérimentales dans tous les types d'écoulement. L'erreur maximale de cette approche est de 3 %, alors que l'erreur de l'approche 1D est satisfaisante pour le cas fluvial et devient de plus en plus significative et remarquable pour les deux types d'écoulement (transcritique et torrentiel) et atteint 7.32 %.

9

Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

Lors des fortes inondations en zone urbaine (figure 9.1), l'eau dans les rues peut atteindre une hauteur de un mètre ou plus, causant des pertes économiques énormes voire des pertes en vies humaines. Nous devons donc prédire la propagation d'inondation dans les zones urbanisées, afin de créer une protection appropriée (probablement en dirigeant les eaux inondées vers des zones sacrificatoires précédemment identifiées) et développer une planification réaliste des secours. Il est alors crucial de connaître les hauteurs et les vitesses de l'eau pour le contrôle des inondations et la réduction de dommages. En raison de la complexité du problème, et du grand nombre de situations qui doivent être considérées, l'approche la plus appropriée est la simulation numérique, habituellement par la résolution des équations de Barré de Saint Venant. En général, les équations de Barré de Saint Venant 1D fournissent un modèle raisonnable pour les écoulements dans les rues, mais elles ne s'appliquent pas à l'écoulement dans des intersections de rue où l'écoulement est fortement bidimensionnel ou tridimensionnel. Les intersections représentent le point le plus délicat pour la simulation numérique et l'approche numérique choisie doit obligatoirement modéliser convenablement les écoulements dans les carrefours.

Pour ce qui concerne les travaux rencontrés dans la littérature traitant de la modélisation

numérique d'écoulements dans des jonctions de canaux à surface libre, les principales références disponibles semblent concerner des écoulements en régime fluvial dans des jonctions ou bifurcation à trois branches. Ainsi, Khan et al. (2000) et Shettar et Murthy (1996) utilisent des modèles numériques résolvant les équations de Barré de Saint Venant 2D associées à différents modèles de turbulence afin de calculer les écoulements au sein des jonctions. Ces auteurs montrent alors que les codes de calcul permettent de bien représenter la répartition des débits dans les branches aval en bifurcation, les vitesses moyennées sur la verticale, les dimensions des zones de recirculation mesurés expérimentalement. Cependant, des erreurs apparaissent lors du calcul de la distribution de la vitesse dans la branche latérale. Pour leur part, Huang et al. (2002) utilisent un modèle tridimensionnel afin de modéliser les écoulements mesurés dans une jonction à angle droit et montrent que la majorité des détails des structures d'écoulements sont bien représentées par le code de calcul. Rivière et al. (2006) se sont concentrés sur la distribution du débit dans une intersection à quatre branches, semblable à un carrefour dans une ville. Les auteurs ont développé un modèle simple pour prédire la distribution du débit dans l'intersection. Une comparaison avec les données expérimentales prouve que ce modèle fonctionne bien pour la gamme limitée dans les conditions expérimentales étudiées. Récemment, Mignot et al. (2008a) ont utilisé le code Rubar20 (2D) développé par Paquier (1995) pour modéliser les inondations dans les milieux urbains. Le code est basé sur une méthode volume fini sur un maillage non structurée et utilise un schéma explicite de Van Leer du second ordre en temps et en espace. Ce code de calcul a ensuite été utilisé pour modéliser numériquement (Mignot et al., 2008a) les écoulements dans les carrefours en régime torrentiel étudiés expérimentalement par Mignot et al. (2008b). Les résultats se sont avérés satisfaisants même si certaines caractéristiques de l'écoulement, telle la largeur des ressauts obliques, ne sont pas finement représentées.

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

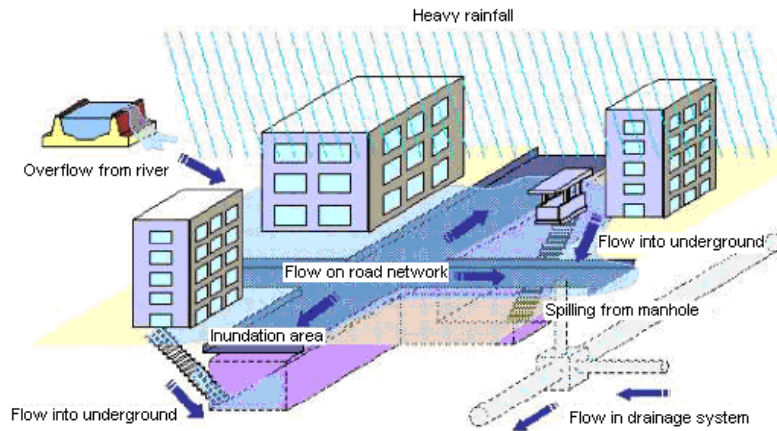


Figure 9.1 : Ecoulement de l'eau en ville suite à une pluie intense.

L'objectif de ce chapitre est de vérifier les capacités de la méthode RKDG (résolvant les équations de Barré de Saint Venant 2D et présenté au chapitre 4) à simuler les écoulements qui se développent au sein des carrefours de la ville, dans les conditions expérimentales étudiées par Mignot et al. (2008b). Suite à l'établissement d'une topologie des événements d'inondation en ville, le choix des événements à étudier spécifiquement s'est porté sur les inondations violentes ayant lieu dans des zones fortement urbanisées. Cette vérification s'organise alors autour de trois aspects : la prédiction des structures d'écoulement observées, le calcul des champs de hauteur d'eau dans la jonction et enfin le calcul de répartition des débits dans les branches aval. La comparaison des écoulements calculés par la méthode RKDG avec les écoulements mesurés expérimentalement dans des conditions maîtrisées à la fois au niveau de la géométrie du domaine et des conditions hydrauliques (conditions aux limites, frottement au fond...) est en effet particulièrement adaptée afin de caractériser précisément les capacités de la méthode à modéliser les écoulements. Les champs de hauteur d'eau, la répartition des débits dans les branches aval prédits par la méthode sont alors comparés avec les caractéristiques correspondantes des écoulements mesurées expérimentalement. Cette comparaison est aussi menée avec la méthode VF détaillée dans le chapitre 3 et FLUENT 3D (Fluent, 2002).

Le code de calcul FLUENT est un logiciel CFD aux volumes finis 3D résolvant les équations dites dans le jargon anglo-saxon de Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS). Le modèle de turbulence le plus classiquement utilisé pour l'hydraulique est de type $k-\varepsilon$ (Kouyi et al., 2005

et Vazquez et al., 2006). La détection de la surface libre se fait par l'utilisation du modèle de la fraction volumique (VOF) (Versteeg et Malalasekera, 1995).

9.1. DESCRIPTION DE L'ETUDE EXPERIMENTALE

L'installation expérimentale mise en place au LMFA (Laboratoire des Mécaniques de Fluides et Acoustiques) à Lyon afin d'étudier les écoulements aux carrefours (figures 9.2 et 9.3) est similaire à celle utilisée précédemment par Nania et al. (2004) avec des dimensions plus restreintes. Le modèle du LMFA est en effet composé de quatre canaux identiques de même largeur $B = 30 \text{ cm}$ et de longueur $L = 2 \text{ m}$. Les canaux sont en verre, ce qui permet un accès optique par les cotés, le dessus et le fond des canaux. Chacun des canaux se termine par un réservoir qui peut servir soit à l'alimentation en eau, soit à la récupération des débits en sortie. Ces réservoirs sont montés sur des chassies inclinables qui permettent de faire varier la pente de chacun des canaux indépendamment entre -5% et $+5 \%$. Au centre du dispositif, les canaux se rejoignent en une jonction carrée horizontale de 30 cm de coté.



Figure 9.2 : Photo de l'installation expérimentale au LMFA.

Une pompe puise l'eau dans le réservoir du laboratoire et fournit les deux tuyaux d'alimentation. Une vanne ainsi qu'un débitmètre électromagnétique sont situés sur chacun de ses tuyaux afin de

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

pouvoir régler les deux débits d'entrée de manière indépendante. Les alimentations sont alors reliées au réservoir de deux canaux amont. Pour cela, les tuyaux remplissent les bacs réservoirs par le bas, ce qui fait monter les niveaux d'eau dans les réservoirs et les débits débordant sont dirigés vers les entrées des deux canaux amont. Une grille en nid d'abeille est positionnée à l'entrée de chaque canal amont perpendiculairement à son axe afin de stabiliser l'écoulement. Enfin, une vanne guillotine est positionnée juste à l'aval de la grille de stabilisation afin de régler la hauteur d'eau amont requise. Les deux écoulements amont Q_{ux} et Q_{uy} s'écoulent alors dans les canaux amont, se rejoignent à la jonction et ressortent par les deux canaux aval Q_{dx} et Q_{dy} (figure 9.4). A l'aval de chacun des canaux de sortie, l'eau est récoltée au sein d'un bac de réception qui se vide à travers un tuyau partant du bas de celui-ci. Deux débitmètres électromagnétiques identiques aux débitmètres d'entrée sont utilisés pour mesurer les débits sortant des bacs de réception; l'eau est ensuite renvoyée vers le réservoir général du laboratoire.

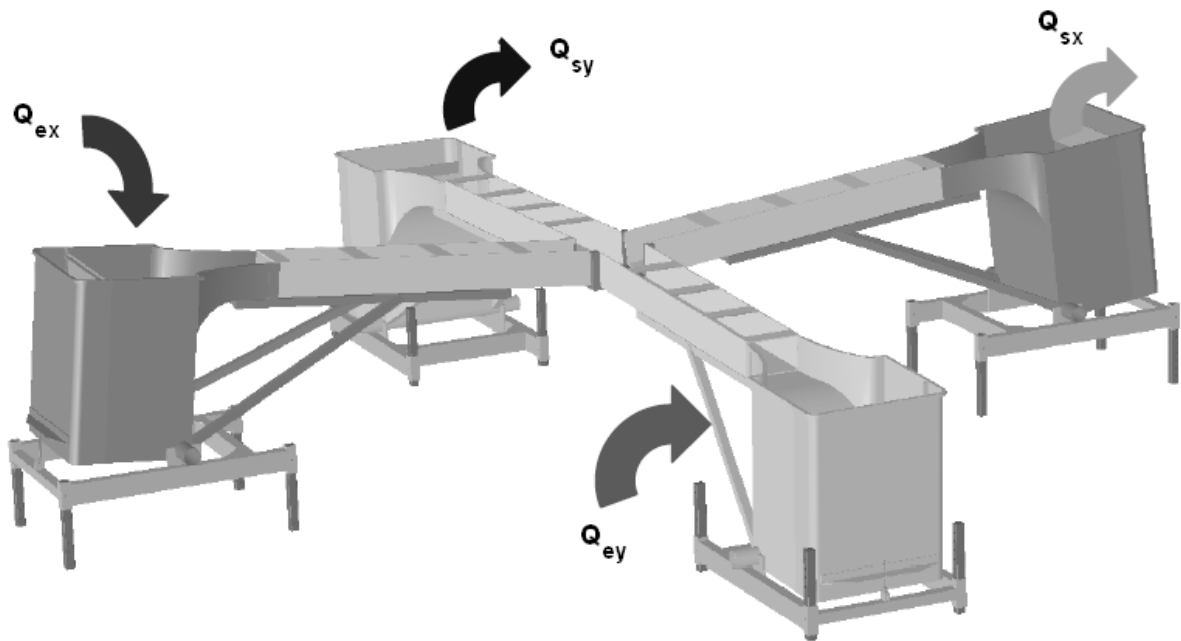


Figure 9.3 : Schéma du modèle physique.

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

Pour une configuration d'écoulement, les deux débits d'entrée sont fixés grâce aux vannes des tuyaux d'alimentation. Les vannes guillotine à l'entrée des canaux amont sont alors réglées pour obtenir une hauteur amont égale à la hauteur normale de l'écoulement dès l'amont du canal.

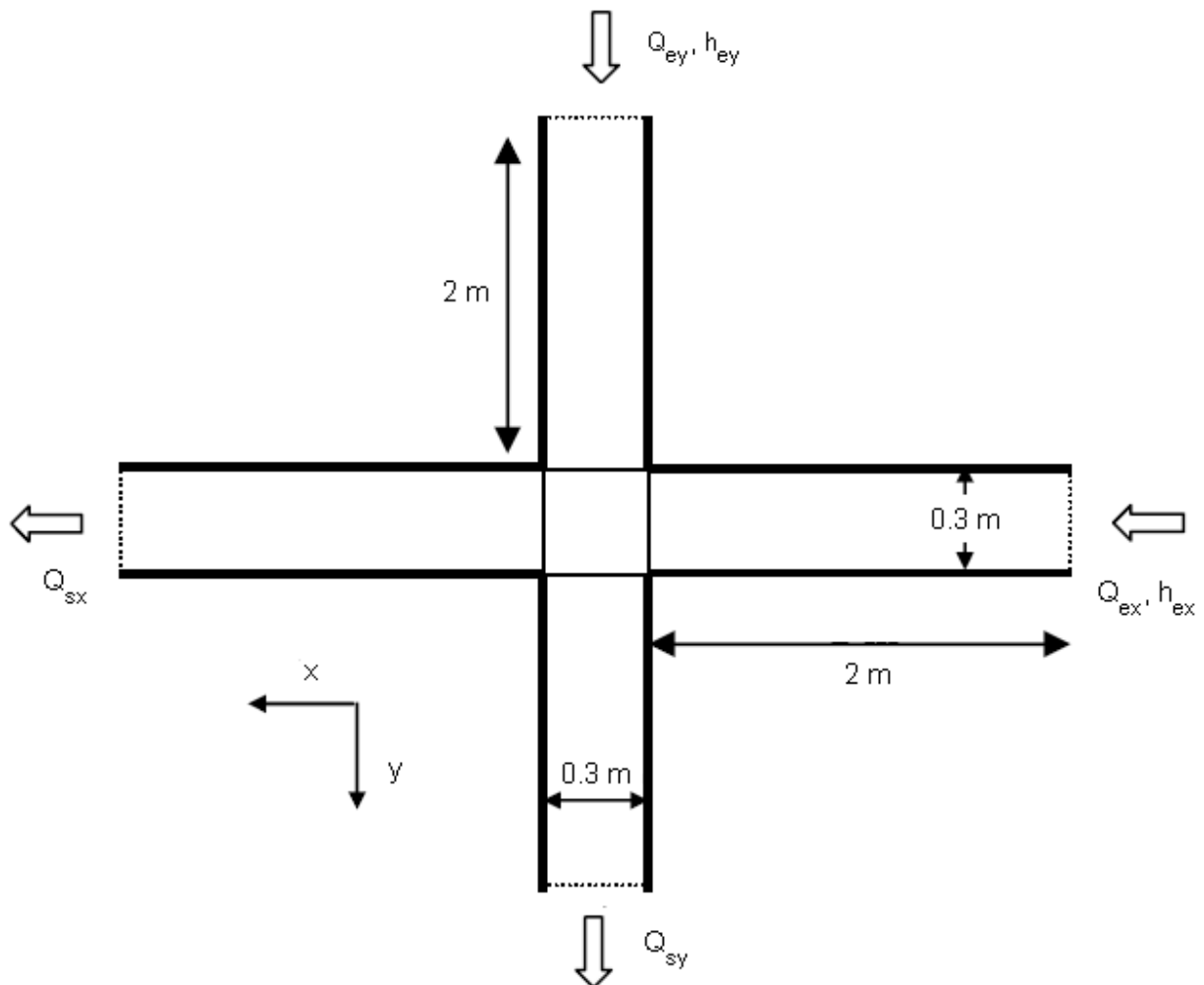


Figure 9.4 : Disposition schématique du carrefour.

Indices

x et y sont les directions du plan

e correspond à une entrée

s correspond à une sortie

Q correspond à un débit

h correspond à une hauteur d'eau

Une vérification de la hauteur d'eau est de plus effectuée en utilisant un limnimètre à affichage digital (précision ± 0.15 mm). Par ailleurs, pour l'établissement des cartographies de hauteur d'eau sur le domaine, une sonde résistive est utilisée pour mesurer en chaque point la hauteur d'eau. Le déplacement de cette sonde est assuré par un chariot roulant sur des rails le long des canaux et pouvant se déplacer perpendiculairement aux canaux. Des règles graduées accolées aux canaux permettent alors de déterminer la position précise de la sonde. La sonde est reliée au logiciel LABVIEW et pour chaque mesure, le positionnement de la sonde est noté manuellement. L'incertitude due à la mesure de hauteur incluant la formation d'un sillage, la présence éventuelle de bulles d'air et la perpendicularité des tiges est estimée à ± 0.15 mm. Par ailleurs, la distance entre les deux tiges de la sonde est d'environ 1cm et l'incertitude liée à sa position dans le plan est estimée à ± 1 mm.

En outre, les quatre débitmètres sont reliés à un ordinateur. L'acquisition de ces débits est effectuée en continu à une fréquence de 100 Hz et les valeurs de débit sont communiquées à un logiciel d'acquisition de mesures LABVIEW.

9.2. DESCRIPTION DES TYPES D'ÉCOULEMENT

Du fait des pentes et débits fixés expérimentalement, les écoulements uniformes amont sont en régime torrentiel et devraient le rester jusqu'aux extrémités aval des canaux si aucune singularité n'était introduite. Cependant, en atteignant la jonction, les deux écoulements se rencontrent et se devient l'un l'autre soudainement par rapport à leur direction initiale, créant deux ressauts hydrauliques qui peuvent être obliques et confinés dans la jonction ou droits et détachés dans les branches amont. Des zones de recirculation apparaissent au sein de chacun des canaux aval. Par ailleurs, des ondes gravitationnelles apparaissent dans les branches aval et se réfléchissent sur les parois des canaux de sorties jusqu'à l'extrémité de ces canaux. Enfin, après une distance importante à l'aval de la jonction, les écoulements tendent à redevenir unidimensionnels. Plusieurs formes d'écoulement peuvent apparaître en fonction des pentes et des débits utilisés :

ces écoulements peuvent être séparés en 3 types. Les deux premiers types (Type I et Type II) ont été répertoriés par Nania et al. (2004) et le troisième (Type III) par Mignot et al. (2008b).

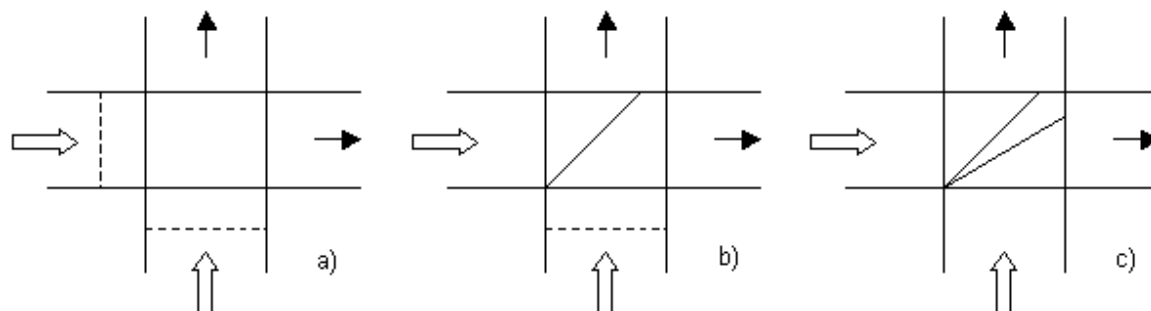


Figure 9.5 : Présentation de Type I(a), Type II(b), Type III(c).

Type I : il correspond à un écoulement avec un ressaut droit au sein de chaque branche amont (figure 9.5a). Les écoulements qui sont en régime torrentiel à l'entrée du dispositif (système), passent alors en régime fluvial au sein des canaux d'entrée. L'écoulement au sein de la jonction est en régime fluvial mais les écoulements tendent à retrouver le régime torrentiel au sein des branches aval.

Type II : il correspond à un écoulement pour lequel un ressaut droit a lieu au sein de la branche aval minoritaire et un ressaut oblique a lieu au sein de la jonction (figure 9.5b). L'écoulement majoritaire atteint donc la jonction en régime torrentiel alors que l'écoulement minoritaire atteint la jonction en régime fluvial. A l'aval du ressaut oblique, l'écoulement majoritaire reste généralement en régime torrentiel mais peut devenir fluvial en fonction de la déviation et du nombre de Froude amont. Dans les branches aval, le régime des deux écoulements tend à redevenir torrentiel.

Type III : c'est un type d'écoulement pour lequel deux ressauts obliques apparaissent dans la jonction (figure 9.5c). Les deux écoulements amont atteignent donc la jonction en régime torrentiel et deux ressauts obliques y apparaissent. Les écoulements à l'aval de ces ressauts restent généralement torrentiels.

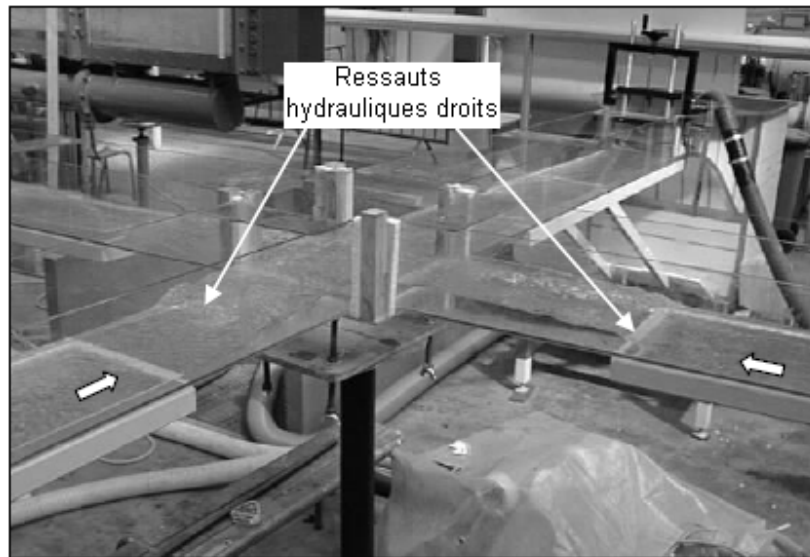


Figure 9.6 : détail d'un écoulement en Type I (Mignot et al., 2008b).

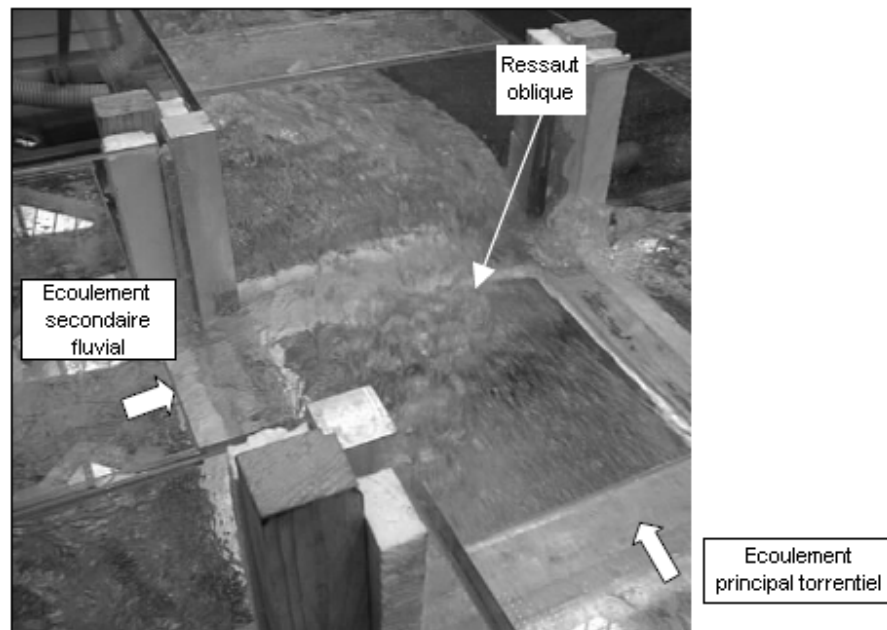


Figure 9.7 : détail d'un écoulement en Type II (Mignot et al., 2008b).

9.3. DONNEES EXPERIMENTALES DISPONIBLE

Lors de l'étude expérimentale globale ayant eu lieu au LMFA entre les années 2001 et 2004, deux groupes de configurations ont été étudiés : des configurations comprenant deux canaux d'entrée et deux canaux de sortie (Mignot et al., 2008b) et des configurations considérant un canal d'entrée et trois canaux de sortie provenant des travaux de Rivière et Perkins (2004).

Dans ce travail, nous nous intéressons à des configurations comprenant deux canaux d'entrée et deux canaux de sortie et deux groupes de données sont disponibles :

1. 6 champs de hauteurs mesurés et présentés au tableau 9.1 correspondant aux différents types d'écoulement observés expérimentalement.
2. un grand nombre de mesures de répartition de débit dans les deux branches aval pour plusieurs configurations de pentes.

Cas	Q_{ex} (l/s)	h_{ex} (cm)	Q_{ey} (l/s)	h_{ey} (cm)	Pentes
C_1	3.50	1.10	3.55	1.11	1 %
C_{21}	5.16	1.15	3.49	0.92	5 %
C_{22}	5.00	1.15	2.00	0.66	5 %
C_{23}	5.11	1.15	1.01	0.44	5 %
C_{31}	5.02	1.15	3.99	1.00	5 %
C_{32}	2.09	0.55	2.15	0.57	0 %

Tableau 9.1 : Les caractéristiques des 6 cas d'écoulement.

Les figures 9.8, 9.9, 9.10, 9.11, 9.12 et 9.13 présentent les champs de hauteur d'eau mesurés pour ces 6 cas.

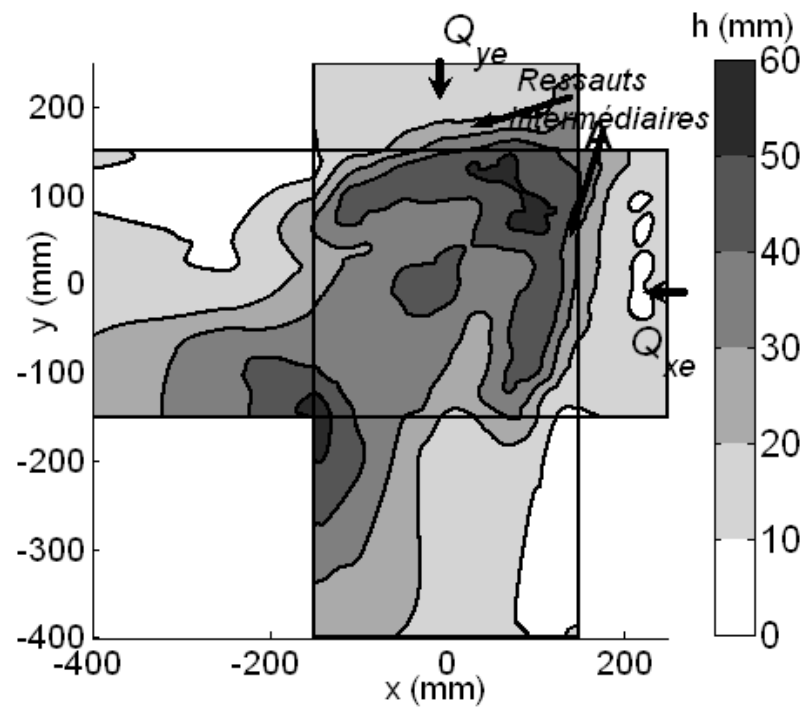


Figure 9.8 : Champ de hauteur d'eau mesuré pour le cas C1 (Mignot et al., 2008b).

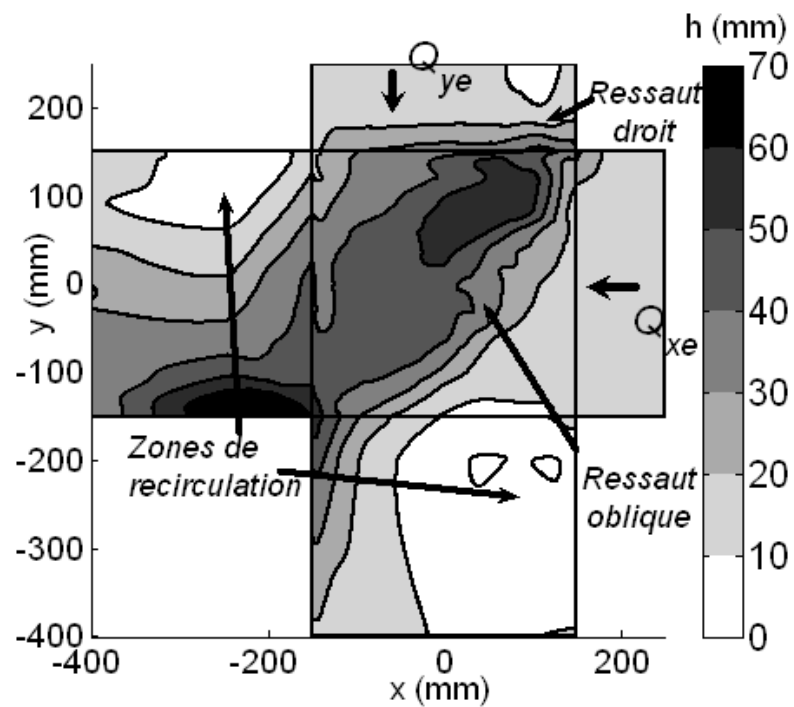


Figure 9.9 : Champ de hauteur d'eau mesuré pour le cas C21 (Mignot et al., 2008b).

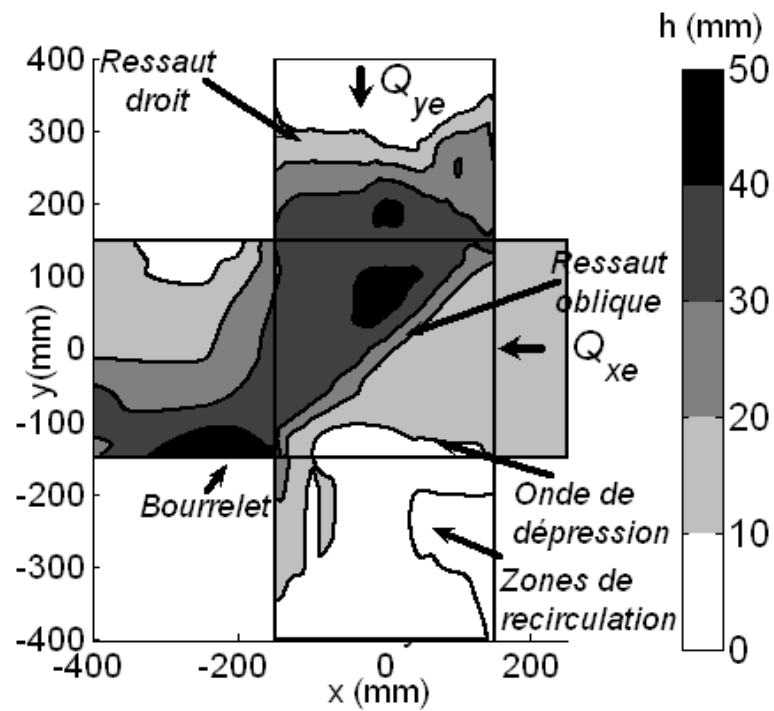


Figure 9.10 : Champ de hauteur d'eau mesuré pour le cas C22 (Mignot et al., 2008b).

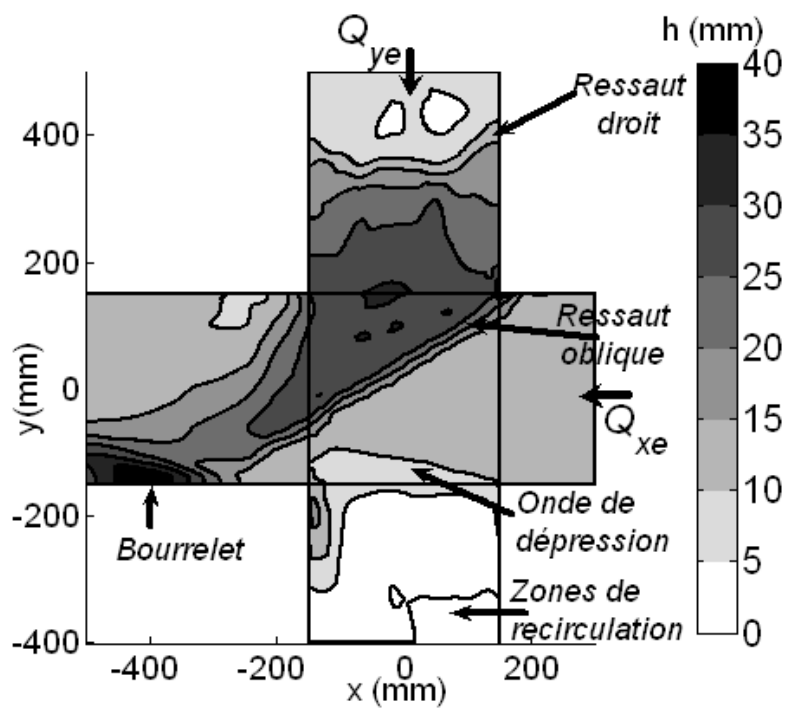


Figure 9.11 : Champ de hauteur d'eau mesuré pour le cas C23 (Mignot et al., 2008b).

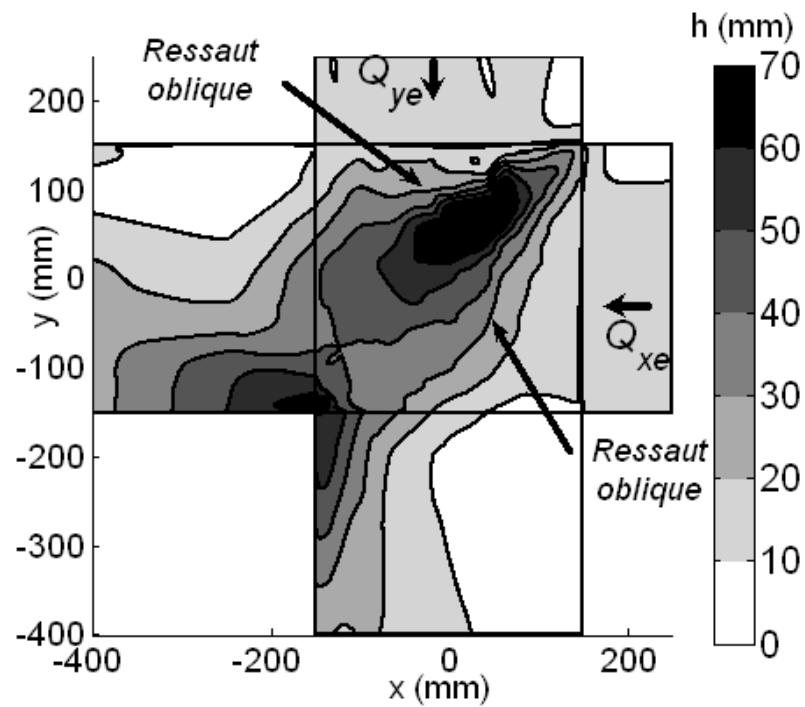


Figure 9.12 : Champ de hauteur d'eau mesuré pour le cas C31 (Mignot et al., 2008b).

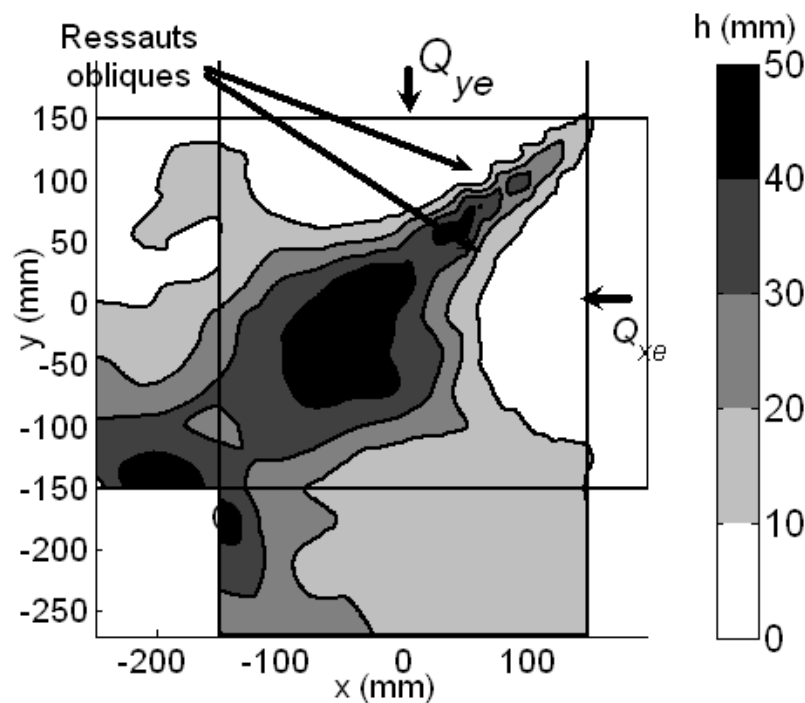


Figure 9.13 : Champ de hauteur d'eau mesuré pour le cas C32 (Mignot et al., 2008b).

9.4. QUALITE DE PREDICTION DE LA REPARTITION DES DEBITS DANS LES BRANCHES AVAL DU CARREFOUR

Afin de comparer les différentes méthodes de simulation (VF, RKDG et FLUENT 3D) et étudier leurs capacités à prédire la répartition des débits dans les branches aval du carrefour, chacune des configurations expérimentales est modélisée à l'aide des trois méthodes. La liste des configurations expérimentales étudiées est présentée dans le tableau 9.2. Ces configurations sont calculées numériquement en utilisant la méthode RKDG sur 1920 mailles, la méthode VF sur 2740 mailles et FLUENT sur 82440 mailles.

Pentes amont	Pentes aval	Nombres de configurations	Types d'écoulements observés
1 %	1 %	8	Types I et II
3 %	3 %	10	Types I, II et III
5 %	5 %	10	Types II et III
7.4 %	3.5 %	8	Type III

Tableau 9.2 : Liste des configurations expérimentales sélectionnées pour lesquelles la répartition des débits dans les branches aval est comparée avec les modèles numériques.

Les débits aval Q_{sx} et Q_{sy} prédits par les calculs sont comparés aux débits aval Q_{sx} et Q_{sy} , respectivement, mesurés expérimentalement pour chaque configuration. Les résultats présentés sur les figures 9.14 et 9.15 en fonction des valeurs des pentes des canaux montrent que la méthode RKDG donne les meilleurs résultats. La répartition des débits est correctement prédite par cette méthode pour chacune des pentes étudiées.

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

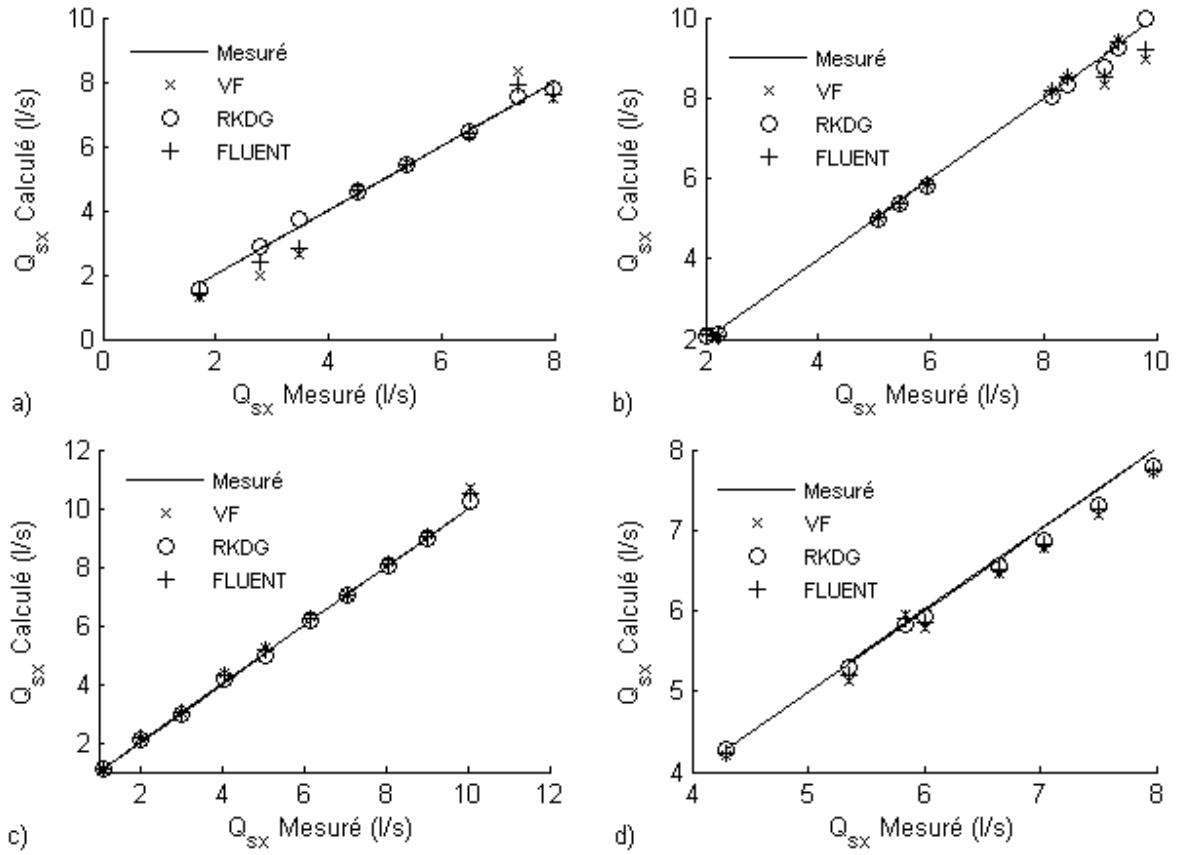


Figure 9.14 : Comparaison des débits aval Q_{sx} calculés et mesurés par configurations de pente : a) 1 % - 1 %, b) 3 % - 3%, c) 5 % - 5% et d) 7.4 % - 3.5 %.

Afin d'étudier plus finement les qualités de prédiction de la répartition des débits à la jonction par les différentes méthodes, nous introduisons deux estimateurs de qualité : E_{QT} (estimateur de qualité de prédiction de répartition de débit) et E_{QXY} (estimateur de qualité de prédiction des débits dans les branches aval) comme suit :

$$E_{QT} = \text{abs} \left(\frac{Q_{sx_c} - Q_{sx_m}}{Q_t} \right) \text{ avec } Q_{sx} \text{ le débit sortant suivant l'axe } x, Q_{sx_c} \text{ étant le débit } Q_{sx} \text{ calculé}$$

et Q_{sx_m} le débit Q_{sx} mesuré. Q_t est le débit total mis en jeu ($Q_t = Q_{ex} + Q_{ey}$).

$$E_{Q_{XY}} = \max \left(\text{abs} \left(\frac{Q_{sx_c} - Q_{sx_m}}{Q_{sx_m}} \right); \text{abs} \left(\frac{Q_{sy_c} - Q_{sy_m}}{Q_{sy_m}} \right) \right).$$

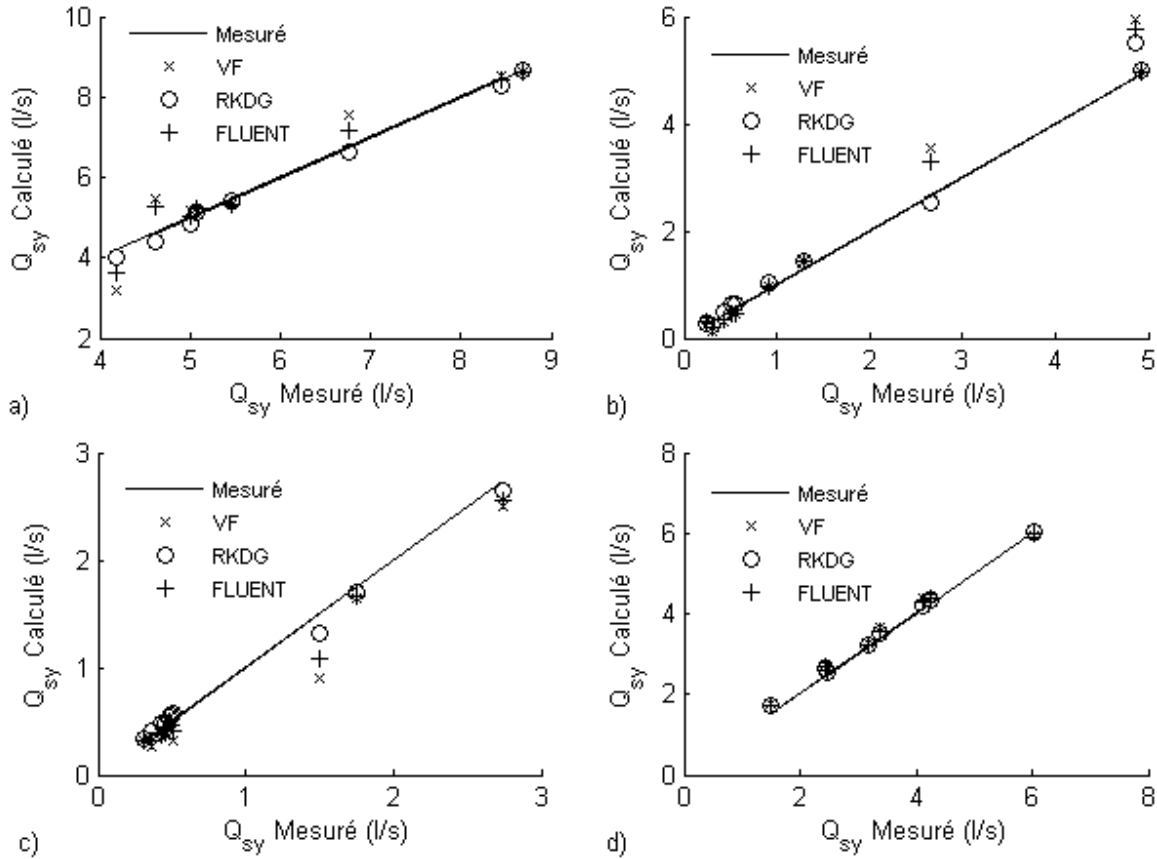


Figure 9.15 : Comparaison des débits aval minoritaires Q_{sy} calculés et mesurés par configurations de pente : a) 1 % - 1 %, b) 3 % - 3%, c) 5 % - 5% et d) 7.4 % - 3.5 %.

En appliquant les deux indicateurs précédents à l'ensemble des écoulements étudiés puis en les moyennant pour les 4 configurations de pente, il apparaît que l'erreur moyenne ne dépend que peu des pentes des canaux (tableau 9.3). En effet, l'erreur moyenne de la méthode RKDG $E_{QT} = 1.15 \%$, celle de la méthode VF est 2.78 % et celle de FLUENT est 2.29 %. En ce qui concerne l'erreur d'estimation des débits dans les branches aval $E_{Q_{XY}}$, du fait de la formule utilisée, la valeur de cette erreur est fortement augmentée par rapport à E_{QT} car le débit aval

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

minoritaire Q_{sy_m} est plus faible que le débit total Q_t . L'erreur moyenne de la méthode RKDG $E_{Q_{XY}} = 7.35 \%$, celle de la méthode VF est 15.04 % et celle de FLUENT est 11.52 %. Les deux estimateurs de qualité montrent clairement que la méthode RKDG est capable de prédire correctement la répartition des débits amont dans les branches aval (et ceci étant mieux réalisé qu'avec les deux autres méthodes).

Pentes	RKDG		FLUENT		VF	
	E_{QT}	$E_{Q_{XY}}$	E_{QT}	$E_{Q_{XY}}$	E_{QT}	$E_{Q_{XY}}$
1 % - 1 %	1.16 %	3.66 %	3.19 %	9.25 %	4.80 %	14.08 %
3 % - 3 %	1.53 %	13.15 %	2.29 %	17.79 %	2.95 %	22.70 %
5 % - 5 %	0.97 %	8.40 %	1.55 %	11.13 %	2.15 %	17.27 %
7.4 % - 3.5 %	0.96 %	4.19 %	2.14 %	7.93 %	1.58 %	6.12 %

Tableau 9.3 : Valeurs des indicateurs de qualité de répartition des débits par les différentes méthodes en fonction des configurations de pente des canaux.

Comme déjà observé par Mignot et al. (2008b), en étudiant les valeurs des moyennes des indicateurs de qualité de prédiction de répartition de débit par type d'écoulement (tableau 9.4), on note que les erreurs les plus importantes concernent les types d'écoulement pour lesquels le (ou les) angle(s) de ressaut sont primordiaux (Types II et Types III). En revanche, la répartition des écoulements dans les configurations où les ressauts obliques n'ont pas lieu (Type I), est mieux prédite par les différentes méthodes.

Type	RKDG		FLUENT		VF	
	E_{QT}	$E_{Q_{XY}}$	E_{QT}	$E_{Q_{XY}}$	E_{QT}	$E_{Q_{XY}}$
Type I	0.98 %	1.17 %	1.13 %	2.26 %	1.28 %	2.91 %
Type II	1.03 %	9.86 %	1.59 %	13.16 %	2.01 %	16.59 %
Type III	1.79 %	7.43 %	3.34 %	10.52 %	4.12 %	13.94 %

Tableau 9.4 : Valeurs des indicateurs de qualité de répartition des débits par les différentes méthodes en fonction des types d'écoulement.

9.5. CAPACITES DE LA METHODE RKDG A CALCULER LES CHAMPS DE HAUTEUR D'EAU MESUREE

L'objectif de cette partie est de vérifier la capacité de la méthode RKDG à simuler les écoulements qui se développent au sein des carrefours. Cette vérification s'organise alors autour de deux aspects : le calcul des champs de hauteur d'eau dans la jonction et le calcul de répartition des débits amont dans les branches aval.

Les résultats expérimentaux obtenus par Mignot et al. (2008b) sont utilisés pour vérifier l'exactitude et la robustesse de la méthode à simuler l'écoulement torrentiel avec la jonction. En outre, une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode RKDG et ceux obtenus par la méthode VF et par FLUENT en ce qui concerne la répartition des débits aval (lorsqu'elles sont disponibles) est aussi faite.

Les 6 cas du tableau 9.1 sont calculés numériquement à l'aide des 3 méthodes (RKDG, VF et FLUENT) avec les mêmes maillages que précédemment et une fois le régime permanent obtenu, les répartitions des débits prédits sont comparés aux répartitions des débits mesurés. La figure 9.16 présente les champs de hauteur d'eau calculés par la méthode RKDG pour ces 6 cas, respectivement. Les figures 9.17, 9.18, 9.19, 9.20, 9.21 et 9.22 montrent les cartes des vecteurs vitesse des 6 cas, respectivement.

Il apparaît sur la figure 9.16 que l'ensemble des structures observées expérimentalement (voir les figures 9.2 à 9.7) peut être reproduit numériquement. En effet, à la fois les ressauts droits dans les branches amont, les ressauts obliques au sein du carrefour ; les bourrelets à l'approche du coin aval du carrefour et les zones de recirculation sont clairement identifiés avec les résultats du calcul numérique. La localisation de ces structures est par ailleurs satisfaisante et l'on peut conclure que la méthode RKDG est capable de simuler fidèlement les écoulements ayant lieu au sein des carrefours.

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

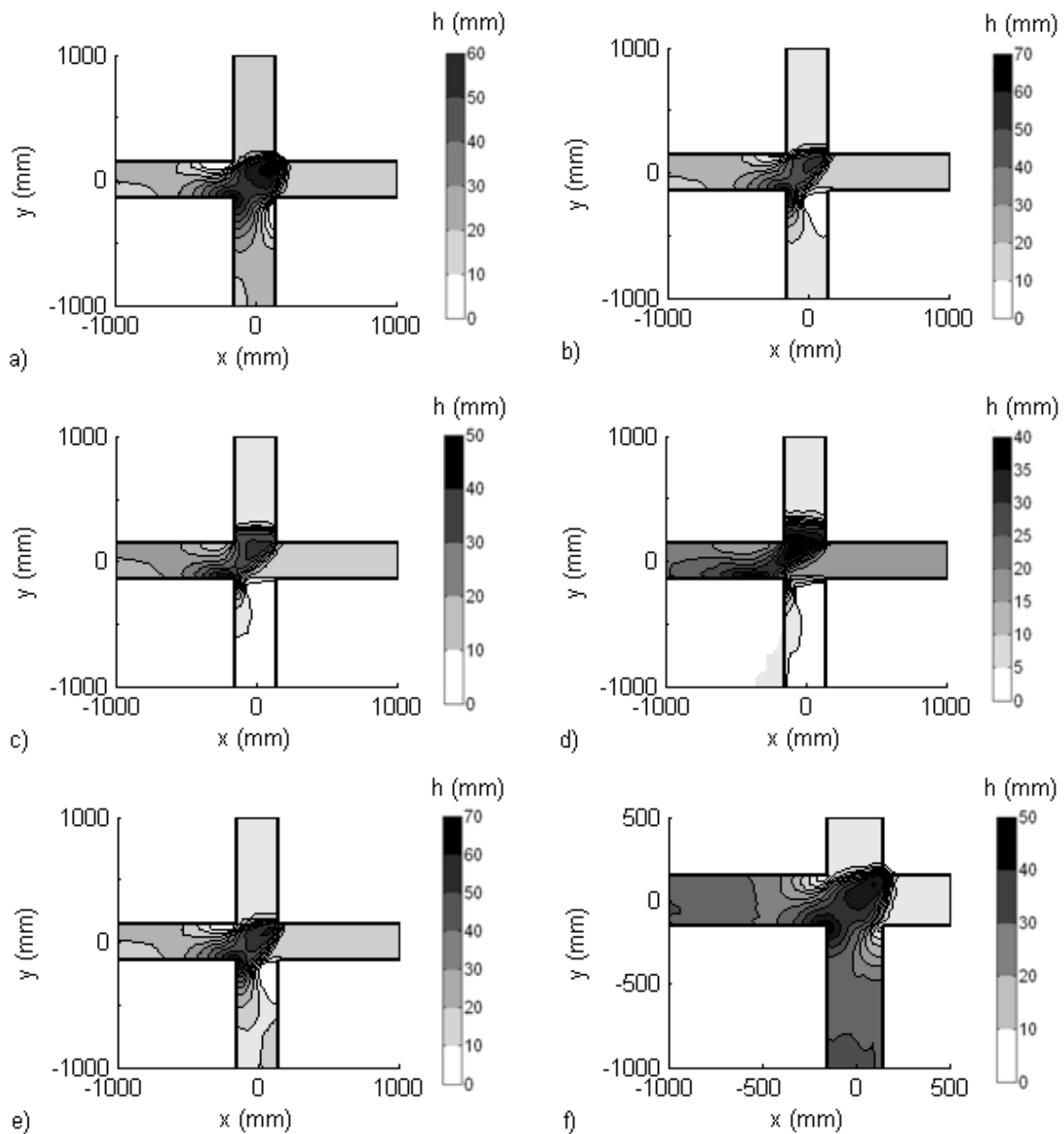


Figure 9.16 : Champs de hauteurs d'eau calculés avec la méthode RKDG ; a) cas C1, b) cas C21, c) cas C22, d) cas C23, e) cas C31, f) cas C32.

De plus, les différences de répartition des débits dans les branches aval entre les calculs et les valeurs mesurées (lorsqu'elles sont disponibles) sont présentées sur le tableau 9.5. Et les valeurs des indicateurs de qualité de répartition des débits par les différentes méthodes sont présentées sur le tableau 9.6. En se basant sur les tableaux 9.5 et 9.6, on peut remarquer que, comme dans les

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

cas précédents (les tableaux 9.3 et 9.4) les répartitions des débits aval obtenues par la méthode RKDG sont les meilleures parmi les trois méthodes. De plus, elles sont légèrement plus proches de celles obtenues avec les mesures.

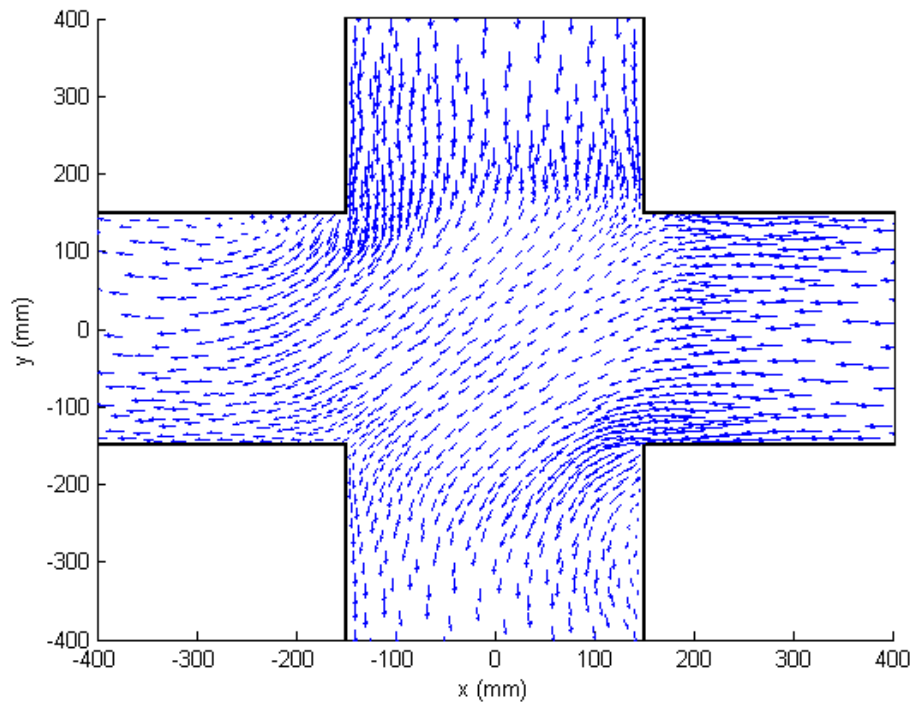


Figure 9.17 : Carte des vecteurs vitesse : cas C1.

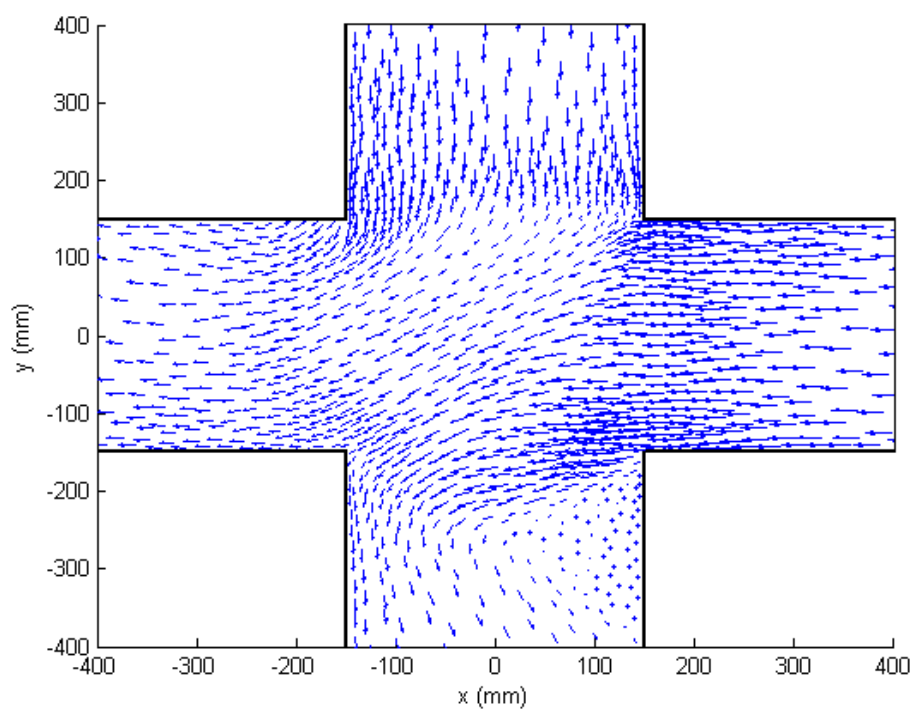


Figure 9.18 : Carte des vecteurs vitesse : cas C21.

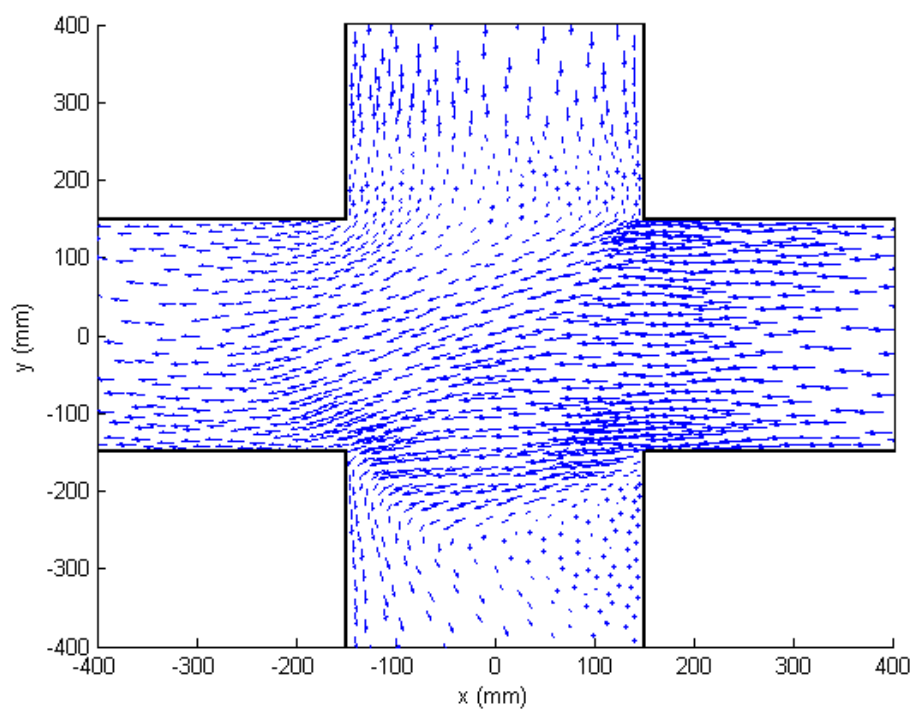


Figure 9.19 : Carte des vecteurs vitesse : cas C22.

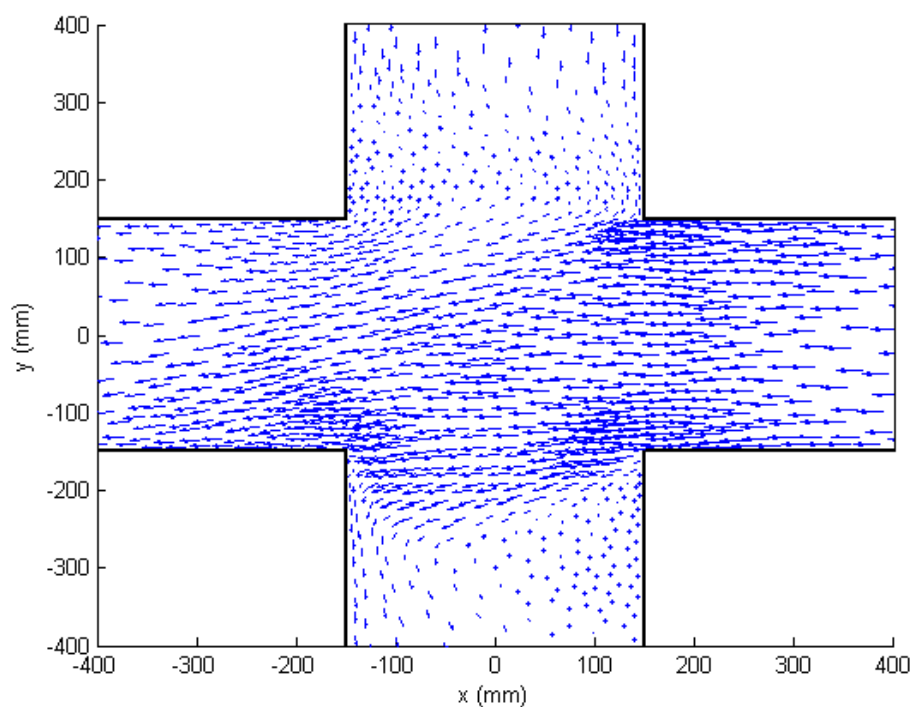


Figure 9.20 : Carte des vecteurs vitesse : cas C23.

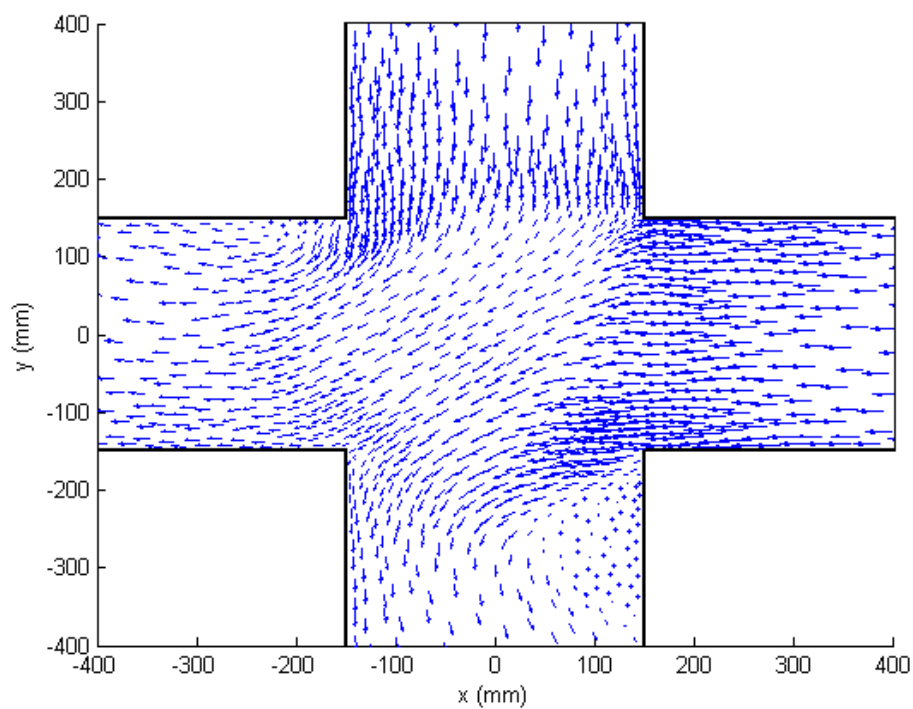


Figure 9.21 : Carte des vecteurs vitesse : cas C31.

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

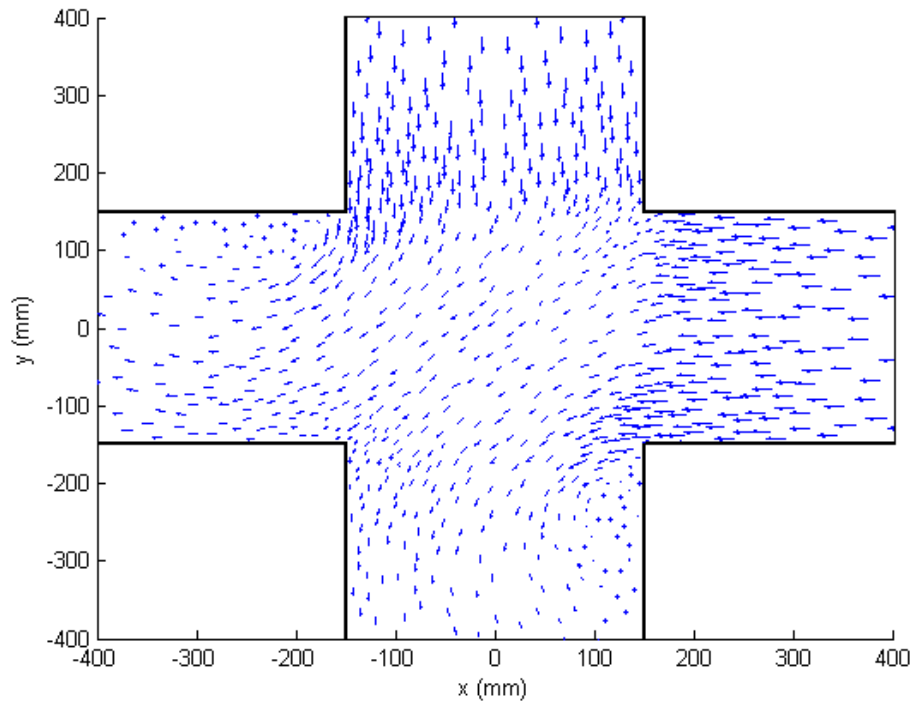


Figure 9.22 : Carte des vecteurs vitesse : cas C32.

Cas	Mesure		VF		RKDG		FLUENT	
	$Q_{sx} \text{ (l/s)}$	$Q_{sy} \text{ (l/s)}$	$Q_{sx} \text{ (l/s)}$	$Q_{sy} \text{ (l/s)}$	$Q_{sx} \text{ (l/s)}$	$Q_{sy} \text{ (l/s)}$	$Q_{sx} \text{ (l/s)}$	$Q_{sy} \text{ (l/s)}$
C_{22}	6.26	0.71	6.40	0.60	6.22	0.76	6.15	0.82
C_{23}	5.73	0.39	5.83	0.31	5.75	0.36	5.76	0.35
C_{31}	5.42	3.59	5.73	3.28	5.59	3.50	5.70	3.37

Tableau 9.5 : Valeur des débits aval mesurés (Mignot e al., 2008b) et calculés avec les 3 méthodes pour les 6 cas étudiés.

9. Simulation numérique des inondations à travers les carrefours

Cas	VF		RKDG		FLUENT	
	E_{QT}	E_{QXY}	E_{QT}	E_{QXY}	E_{QT}	E_{QXY}
C_{22}	2.01 %	15.49 %	0.57 %	7.04 %	1.58 %	15.49 %
C_{23}	4.55 %	20.51 %	0.33 %	7.69 %	0.49 %	10.26 %
C_{31}	3.44 %	8.64 %	1.89 %	2.51 %	3.11 %	6.13 %

Tableau 9.6 : Valeurs des indicateurs de qualité de répartition des débits par les différentes méthodes.

9.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, le travail a été inscrit dans la problématique de la modélisation d'inondations urbaines dans les carrefours. Suite à l'établissement d'une topologie des événements d'inondation en ville, le choix des événements à étudier s'est porté sur les inondations violentes ayant lieu dans des zones fortement urbanisées. Dans ces cas, des écoulements en régime torrentiel peuvent avoir lieu et lorsqu'ils se rejoignent aux carrefours, les formes d'écoulements observées deviennent particulièrement complexes. Une étude expérimentale a été menée au laboratoire des Mécanique de Fluides et Acoustiques à Lyon (Mignot et al., 2008b) afin de mieux comprendre les processus d'écoulement qui se développent à l'intersection de deux écoulements torrentiels perpendiculaires dans une jonction en croix.

La résolution des équations de Barré de Saint Venant 2D par les deux méthodes VF et RKDG et la résolution des équations de Navier Stokes 3D par FLUENT sont proposées afin de simuler de tels événements et comparées avec les résultats expérimentaux de Mignot et al. (2008b). Une comparaison entre les trois méthodes utilisées (RKDG, VF et FLUENT) et les résultats mesurés est effectuée afin de vérifier les capacités de ces trois méthodes à modéliser des écoulements torrentiels au sein des carrefours. Cette vérification s'organise autour de trois aspects : la prédiction des structures d'écoulement observées, le calcul des champs de hauteur d'eau dans la jonction et enfin le calcul de répartition des débits dans les branches aval.

La comparaison des écoulements calculés et mesurés dans des conditions parfaitement maîtrisées à la fois en ce qui concerne la topographie du domaine et les conditions aux limites amont et aval montre que les trois méthodes sont aptes à représenter de manière satisfaisante l'ensemble des structures d'écoulements observées expérimentalement : le développement du jet torrentiel, les ressauts droits et obliques, la ligne de séparation des écoulements, le bourrelet au coin aval ou dans une des branches aval et les zones de recirculations. Les champs de hauteurs d'eau calculés se sont donc avérés en accord avec ceux mesurés expérimentalement.

Concernant la distribution des débits amont dans les branches aval, nous avons montré que les modèles sont aptes à prédire de manière satisfaisante les répartitions des débits mesurées expérimentalement pour les différentes configurations de pente et les différents types d'écoulement étudiés. On note cependant que les résultats de la méthode RKDG donnent de meilleurs résultats (que ce soit en terme de hauteurs d'eau ou de répartition des débits).

En conclusion, on peut déduire d'après les comparaisons faites dans ce chapitre que la méthode RKDG est une très bonne méthode pour modéliser les inondations au sein des carrefours. Cette méthode s'est montrée capable de prédire l'ensemble des structures d'écoulements observées expérimentalement et ceci mieux que les autres méthodes surtout en ce qui concerne la répartition des débits dans les branches aval où on peut remarquer nettement l'avantage de cette méthode.

Conclusion générale et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'étude de différentes méthodes numériques pour la résolution des équations bidimensionnelles de Barré de Saint Venant et tout particulièrement la méthode des éléments finis discontinus de Galerkin. Par ailleurs, nous avons focalisé une partie de notre recherche sur l'application de cette méthode à la simulation des écoulements à surface libre au sein des carrefours dans la ville. La plupart des schémas que nous avons considérés sont basés sur une intégration spatiale locale et afin de bien représenter les géométries irrégulières, nous avons choisi un maillage triangulaire non-structuré comme volume d'intégration.

Nous avons tout d'abord implémenté et testé une méthode de volumes finis ; celle-ci est basée sur une discrétisation de type Upwind en espace et une intégration temporelle de type Runge-Kutta. Cette méthode permet d'obtenir des schémas d'ordre élevé et nous avons constaté qu'elle était bien adaptée à la résolution de notre problème.

Nous avons également adapté une méthode de type éléments finis Galerkin discontinus (RKDG) associée à une limitation de pente. Notre schéma est ainsi basée sur une discrétisation de type éléments finis discontinus de Galerkin en espace et une intégration temporelle de type Runge-Kutta. Cette méthode permet également d'obtenir des schémas d'ordre élevé basés sur le choix d'une base locale et des formules de quadrature. La méthode RKDG est conçue avec une procédure de limitation de pente qui permet d'éviter la génération de fausses oscillations aux voisinages des forts gradients. Deux limiteurs de pente, ceux de Cockburn et Shu (1998b) et Hoteit et al. (2004) sont aussi présentés et détaillés. Une modification du limiteur de pente de Cockburn et Shu (1998b) est proposée pour des discrétisations triangulaires afin d'éviter

l'utilisation d'une constante de limitation qui parfois semble difficile à estimer dans certains problèmes hydrauliques. Les différents cas tests ont montré que cette méthode répondait aux attentes. En effet, nous avons retrouvé les résultats obtenus expérimentalement ou encore les résultats analytiques.

Nous avons par ailleurs comparée le schéma RKDG à la méthode volumes finis dans le cadre de plusieurs problèmes hydrauliques stationnaires et transitoires admettant des solutions analytiques ou des résultats expérimentaux. Nous avons constaté que dans les régions « lisses », les deux méthodes donnent des résultats similaires. Cependant on peut remarquer que la formulation éléments finis discontinus de Galerkin est plus précise dans les régions où il y a des discontinuités.

Néanmoins, une différence réside dans le temps de calcul (CPU) où nous avons constaté que la méthode volumes finis est moins coûteuse que la méthode Galerkin discontinu, mais cette dernière a l'avantage d'obtenir des bons résultats avec moins de mailles que la méthode volumes finis.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la simulation numérique des écoulements à travers les jonctions (soit confluence ou bifurcation). Une comparaison entre la modélisation unidimensionnelle et la modélisation bidimensionnelle est ainsi faite. Les résultats de la simulation numérique montrent que l'approche 1D est acceptable pour des petits angles de jonction et un faible nombre de Froude (écoulement fluvial). Une fois que l'angle de jonction et le nombre de Froude augmentent (régime transcritique ou torrentiel), on remarque un écart net entre cette approche et les résultats expérimentaux. Au contraire, l'approche 2D fonctionne « bien » pour tous les types d'écoulement et les différents angles de jonction. Bien que les temps de calcul de l'approche 2D sont plus importants que pour l'approche 1D, cette dernière présente d'une part la possibilité de représenter les structures urbaines ou obstacles explicitement présents au sein de la topographie de la zone urbaine, et d'autre part, la possibilité de calculer directement les écoulements dans les jonctions, ce qui ne nécessite plus d'équations supplémentaires. De plus,

les résultats des calculs bidimensionnels sont plus précis et plus informatifs, et permettent d'établir des cartes de risque plus détaillées.

Finalement, nous avons vérifié les capacités de la méthode RKDG à simuler les écoulements qui se développent au sein des carrefours de la ville, dans les conditions expérimentales étudiées par Mignot et al. (2008b). Une comparaison « sur la répartition des débits aval » est aussi menée avec la méthode VF et FLUENT 3D (Fluent, 2002). D'après les comparaisons faites, nous avons constaté que la méthode RKDG est une très bonne méthode pour modéliser les inondations au sein des carrefours. Cette méthode s'est montrée capable de prédire l'ensemble des structures d'écoulements observées expérimentalement et ceci mieux que les autres méthodes surtout en ce qui concerne la répartition des débits dans les branches aval où on peut remarquer nettement l'avantage de cette méthode.

L'une des perspectives de ce travail est de poursuivre le développement de l'approche RKDG, notamment au niveau du temps de calcul (en utilisant par exemple un pas de temps local (Local Time Stepping) pour réduire le temps de calcul. On pourra aussi se pencher sur la méthode des lignes pour discrétiser en temps l'équation différentielle ordinaire obtenue (une fois les équations de Barré de Saint Venant discrétisées en espace avec les éléments finis discontinus) avec des solveurs dédiés (tels que DASPK (Brown et al., 1994, 1998)), ce qui devrait aboutir à des diminutions importantes du temps de calcul.

Ce travail montre aussi que l'idée de coupler une approche 1D dans les branches à une approche 2D pour les jonctions dans une situation pratique est une bonne méthodologie quand nous avons observé la qualité des résultats de la simulation bidimensionnelle. Par conséquent, un futur travail consiste à développer un code basé sur le couplage des équations de Barré de Saint Venant 1D à appliquer dans les branches et des équations de Barré de Saint Venant 2D à appliquer au sein des jonctions.

Les annexes

Annexe 1

La méthode des caractéristiques

La question de ce qu'à faire aux calculs des variables aux bords fait appel à la théorie des caractéristiques. Toutes les caractéristiques qui entrent dans le domaine devraient déjà avoir des valeurs prescrites sur elles. En conséquence, il est nécessaire de fournir ces informations d'une façon quelconque, ou bien le problème n'est pas bien posé. A la frontière aval, toutes les caractéristiques partant du domaine devraient contenir l'information des variables d'écoulement par l'intermédiaire de la solution numérique. Le résultat est celui pour n'importe quelle frontière, le nombre d'informations qui doivent être indiquées se relie au nombre de caractéristiques entrant/sortant cette région.

Considérons la frontière amont. Si l'écoulement est fluvial, une des variables d'écoulement (typiquement Q) doit être spécifiée, dont une valeur de A peut être calculée à l'aide de la théorie caractéristique. Si l'écoulement est torrentiel, les valeurs de A et Q doivent être indiquées. Pour la frontière aval, l'écoulement fluvial exige la spécification d'une variable (généralement A) comme dans le cas amont. Si l'écoulement est torrentiel, les variables aux bords sont les mêmes que les valeurs de la maille avant. Réciproquement, une frontière de mur peut être imposée par lequel l'écoulement ne puisse pas continuer à l'aval et soit reflété en arrière dans la direction amont. Une condition de transmission peut être appliquée. Garcia-Navarro et Saviron (1992) ont donné des détails comment appliquer la théorie de caractéristiques aux conditions aux limites des problèmes d'écoulement de l'eau dans des canaux à surface libre, comme mentionnés ci-dessous.

Les équations de Barré de Saint Venant 1D pour un canal prismatique écrites en forme caractéristique sont données par :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial Q}{\partial x} + (-u \pm c) \left[\frac{\partial A}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial A}{\partial x} \right] = gA(S_0 - S_f). \quad (A1)$$

Dénotons par C^+ et C^- les équations des ondes propageant vers l'aval et l'amont, respectivement, ces équations sont définies par :

$$\begin{cases} C^+ : \frac{dx}{dt} = u + c \\ C^- : \frac{dx}{dt} = u - c \end{cases} \quad (A2)$$

Notons par A_I^n , Q_I^n , A_N^n et Q_N^n , la section mouillée et le débit d'écoulement aux nœuds I et N au pas de temps n , et A_I^{n+1} , Q_I^{n+1} , A_N^{n+1} et Q_N^{n+1} , au pas de temps $n+1$. La figure A1 montre les caractéristiques dans le cas d'un écoulement fluvial, où les variables des nœuds 1 et N sont influencées par ceux des points R et L dans le canal. Une estimation de la position x_R est obtenue à partir :

$$\begin{cases} x_R = x_I - (u - c)_I^n \Delta t \\ x_L = x_N - (u - c)_N^n \Delta t \end{cases} \quad (A3)$$

Supposant que $x_I < x_R < x_2$, les valeurs de Q et A aux points R et L sont trouvés en utilisant l'interpolation linéaire :

$$\begin{cases} A_R = A_2^n - (A_2^n - A_I^n) \frac{(x_2 - x_R)}{\Delta x} & Q_R = Q_2^n - (Q_2^n - Q_I^n) \frac{(x_2 - x_R)}{\Delta x} \\ A_L = A_N^n - (A_N^n - A_{N-1}^n) (x_N - x_L) & Q_L = Q_N^n - (Q_N^n - Q_{N-1}^n) (x_N - x_L) \end{cases} \quad (A4)$$

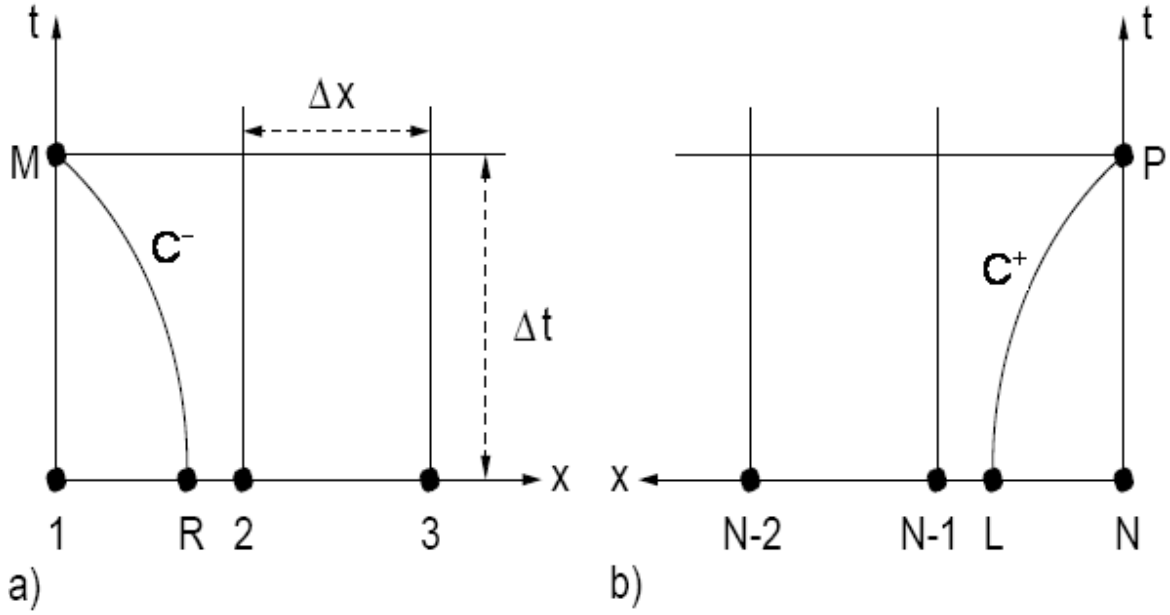


Figure A1 : Calcul des valeurs aux bords.

De l'équation (A1), les variables aux points I et N au pas de temps $n+1$ et les variables aux points R et L au pas de temps n , sont reliées par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} Q_I^{n+1} - Q_R^n + (-u - c)_R^n (A_I^{n+1} - A_R^n) = \Delta t \left[gA(S_0 - S_f) \right]_R^n \\ Q_N^{n+1} - Q_L^n + (-u + c)_L^n (A_N^{n+1} - A_L^n) = \Delta t \left[gA(S_0 - S_f) \right]_L^n \end{cases} \quad (A5)$$

Par conséquent, à l'amont et à l'aval du canal, les caractéristiques permettent de trouver les variables inconnues, prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} Q_I^{n+1} = K_I A_I^{n+1} + C_I \\ Q_N^{n+1} = K_N A_N^{n+1} + C_N \end{cases} \quad (A6)$$

avec

$$\begin{cases} K_I = (u+c)_R^n & C_I = Q_R^n - (u+c)_R^n A_R^n + \Delta t \left[gA(S_0 - S_f) \right]_R^n \\ K_N = (u-c)_L^n & C_N = Q_L^n - (u-c)_L^n A_L^n + \Delta t \left[gA(S_0 - S_f) \right]_L^n \end{cases} \quad (A7)$$

Annexe 2

Les modèles de jonctions

INTRODUCTION

Les modèles de jonctions qui sont dérivés dans la littérature sont basés sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement et sur la conservation de la masse, ou sur la conservation de l'énergie, mais, les différents paramètres complexes et inconnus de la jonction, rendent difficile à dériver ces modèles d'une façon théorique. Tous les modèles de jonctions sont donc de nature empirique et plusieurs paramètres sont estimés expérimentalement.

Dans cette annexe, nous décrivons le principe de la conservation de la quantité de mouvement qui s'applique au voisinage de la jonction, les différents paramètres inconnus qui interviennent, et les différents modèles dérivés dans la littérature pour la confluence et la bifurcation.

A2.1. DESCRIPTION ET NOTATION DE LA JONCTION DANS LE CAS D'UNE CONFLUENCE

Dans cette section, nous définissons les différents paramètres utiles pour la compréhension de différents modèles dérivés pour la confluence, et ceci dans le cas de trois canaux rectangulaires. Nous désignons par le canal u, le canal principal situé à l'amont de la jonction, le canal L, le canal latéral à la jonction et le canal d, le canal principal situé à l'aval de la jonction. Nous notons par h_u , h_L et h_d ; Q_u , Q_L et Q_d ; B_u , B_L et B_d ; u_u , u_L et u_d ; P_u , P_L et P_d ; β_u , β_L et β_d ; α_u , α_L et α_d ; Fr_u , Fr_L et Fr_d les hauteurs d'eau, les débits, les largeurs, les vitesses de

l'écoulement, les forces de pression hydrostatique agissant sur le volume de contrôle ; les coefficients de correction de la quantité du mouvement , les facteurs de correction de l'énergie, les nombres de Froude respectivement dans les sections voisines à la jonction des trois canaux u , L et d . Soit δ_u ; δ_L et α , les angles que font respectivement les canaux amont et latéral avec la direction de l'écoulement et l'angle du canal principal avec l'horizontale. W , R et P_f désignent respectivement, le poids de l'eau dans le volume de contrôle, la réaction exercée par le mur du canal latéral dans la direction amont et la résultante de toutes les forces de frottement dans la jonction.

A2.1.1. Principe de la conservation de la quantité de mouvement à la jonction

Le principe de conservation de la quantité de mouvement, connu sous le nom de la deuxième loi de Newton, s'énonce pour les mouvements de la façon suivante : La variation, dans un volume de contrôle, de la quantité de mouvement pendant un intervalle de temps unitaire, est égale à la somme des forces extérieures agissant sur ce volume de contrôle. La figure A2.1, montre les forces agissant sur le volume de contrôle à la jonction. La résultante de toutes les forces agissant dans la direction horizontale est donnée par :

$$\sum F_{ext} = P_u \cos \delta_u + P_L \cos \delta_L + W \sin \alpha - P_f - P_d - R \quad (A2.1)$$

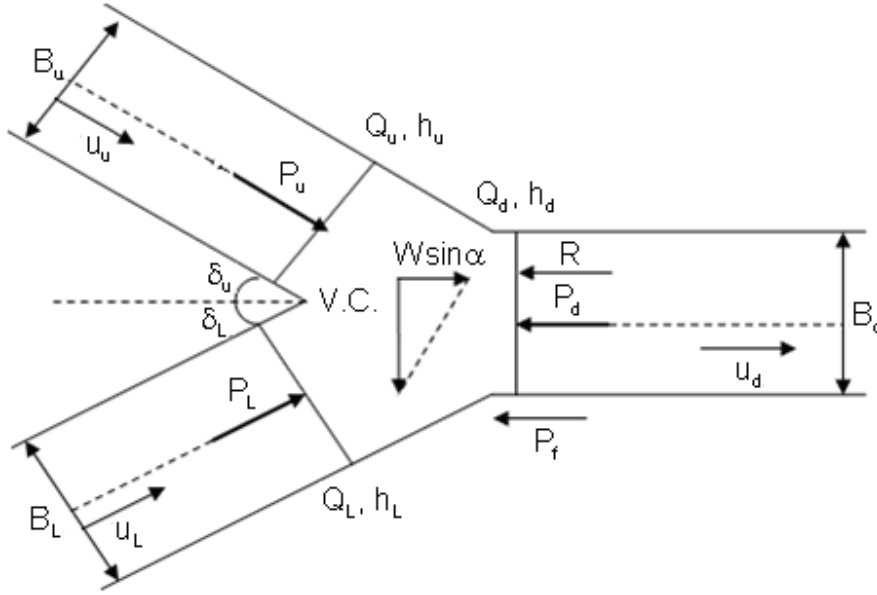


Figure A2.1 : Les différents paramètres d'une confluence.

La variation de la quantité du mouvement dans la direction horizontale est donnée par :

$$Variation_{QM} = \beta_d Q_d u_d - \beta_u Q_u u_u \cos \delta_u - \beta_L Q_L u_L \cos \delta_L \quad (A2.2)$$

En égalisant les équations (A2.1 et A2.2), nous obtenons le modèle de la jonction basé sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement :

$$(P_u + \beta_u Q_u u_u) \cos \delta_u + (P_L + \beta_L Q_L u_L) \cos \delta_L + W \sin \alpha - P_f - R = P_d + \beta_d Q_d u_d \quad (A2.3)$$

L'équation (A2.3) est le modèle théorique qui peut décrire une confluence, mais l'impossibilité de définir théoriquement les différents paramètres de ce modèle le rend un modèle inutilisable dans le domaine de l'hydraulique fluvial. Tous les modèles développés dans la littérature, et basés sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement, sont développés avec des suppositions de simplification.

A2.2. LES MODELES DE CONFLUENCE

Un modèle de confluence est un système d'équations permettant de coupler les hauteurs d'eau h_u , h_L et h_d . Dans la suite, nous allons citer les différents modèles basés sur ce principe. Ces modèles sont de nature empirique due à certains paramètres donnés à partir des résultats expérimentaux.

A2.2.1. Le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau

Le modèle le plus facile pour simuler la confluence, est le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau à la jonction. Ce modèle est employé par plusieurs applications dans la technologie hydraulique. Dans ce modèle, les hauteurs amont, latérale et aval sont supposées égales comme suit :

$$\text{Egalité des hauteurs d'eau à la jonction : } \begin{cases} h_u = h_L \\ h_L = h_d \end{cases} \quad (\text{A2.4})$$

A2.2.2. Les modèles de confluence fluviale

Une confluence fluviale est une confluence où l'écoulement est partout fluvial dans les trois canaux renfermant la jonction. Les modèles développés et les plus utilisés pour la confluence fluviale sont : Taylor (1944), Ramamurthy et al. (1988), Gurram et al. (1997), et Hsu et al.

(1998a et 1998b). Les notations suivantes sont utilisées dans ces modèles. $Y_u = \frac{h_u}{h_d}$, désigne le

rapport des hauteurs d'eau amont et aval ; $Y_L = \frac{h_L}{h_d}$ le rapport des hauteurs d'eau latérale et aval ;

$Y = Y_u = Y_L = \frac{h_u}{h_d} = \frac{h_L}{h_d}$ quand $h_u = h_L$; $q_u = \frac{Q_u}{Q_d}$, le rapport des débits amont et aval ; $q_L = \frac{Q_L}{Q_d}$, le

rapport des débits latéral et aval ; δ est l'angle de la confluence, et γ est l'angle aérodynamique

tel que $\gamma = \frac{8}{9} \delta$. Pour chaque hauteur d'eau aval h_d , les hauteurs latérale et amont sont solutions

d'un polynôme de troisième degré. Les modèles de Taylor (1944), de Gurram et al. (1997), de Hsu et al. (1998a) et de Ramamurthy et al. (1988) sont :

$$\text{Modèle de Taylor : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - (1 + 2Fr_d^2)Y + Fr_d^2 (q_u^2 + q_L \cos \delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.5})$$

$$\text{Modèle de Ramamurthy : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - \left(1 + 2\frac{\beta_d}{\alpha_d} Fr_d^2\right)Y + 2\frac{Fr_d^2}{\alpha_d} q_u = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.6})$$

$$\text{Modèle de Gurram : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - (1 + 2Fr_d^2)Y + Fr_d^2 (q_u^2 + q_L \cos \gamma) = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.7})$$

$$\text{Modèle Hsu : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - \left(1 + 2\frac{\beta_d}{\alpha_d} Fr_d^2\right)Y + 2\frac{\beta_d}{\alpha_d} Fr_d^2 (q_u^2 + \cos \delta (1 - q_u^2)) = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.8})$$

Une valeur moyenne de α_d et β_d pour le modèle de Hsu est $\alpha_d = 1.27$ et $\beta_d = 1.12$. Les valeurs de α_d et β_d dépendent de plusieurs facteurs, tels que l'angle de jonction, le rapport de débit.

Un modèle plus général conduit par Shabayek et al. (2002) ne suppose pas l'égalité des hauteurs d'eau des canaux amont à la jonction, ni l'égalité des largeurs. Shabayek et al. (2002) a développé un modèle théorique unidimensionnel pour des écoulements fluviaux en appliquant le principe de la conservation de la quantité de mouvement à deux volumes de contrôle dans la

jonction. Les notations suivantes sont utilisées dans ce modèle : $w_l = \frac{B_u}{B_d}$ le rapport des largeurs

amont et aval ; $w_2 = \frac{B_L}{B_d}$ le rapport des largeurs latérale et aval ; S_0 est la pente longitudinal de la

jonction ; C est le coefficient adimensionnel de Chézy ; L_1 et L_2 sont les longueurs externes des

deux volumes de contrôle. K^* est le coefficient de cisaillement ; K est le coefficient de la zone de séparation. En utilisant aussi la conservation de la quantité de mouvement deux volumes de contrôle, Shabayek a dérivé deux équations, qui sont fonctions de plusieurs paramètres définis précédemment. Ce modèle est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_u - \frac{q_u^2}{w_1 Y_u} - \frac{1}{8F_d^2} \left[w_1 (3Y_u^2 - 2Y_u Y_L - Y_L^2) + q_u (Y_u^2 + 2Y_u Y_L + Y_L^2 - 4) \right] \\ - \frac{1}{2F_d^2} \left(\frac{L_1 S_0}{h_d} \right) (w_1 Y_u + q_u) + K^* \left(\left[\frac{q_u}{w_1 Y_u} \right]^2 - \left[\frac{q_L}{w_2 Y_L} \right]^2 \right) (Y_u + Y_L) [2q_L q_u] \\ + \frac{L_1}{B_d C_*^2} \left(1 + \frac{B_d}{h_d} q_u \right) = 0 \\ \\ q_L - \frac{q_L^2}{w_2 Y_L} - \frac{1}{8F_d^2} \left[w_2 (3Y_L^2 - 2Y_u Y_L - Y_u^2) + q_L (Y_L^2 + 2Y_u Y_L + Y_u^2 - 4) \right] \\ - \frac{1}{2F_d^2} \left(\frac{L_2 S_0}{h_d} \right) (w_2 Y_L + q_L) - K^* \left(\left[\frac{q_u}{w_1 Y_u} \right]^2 - \left[\frac{q_L}{w_2 Y_L} \right]^2 \right) (Y_u + Y_L) [2q_L q_u] \\ + \frac{L_2}{B_d C_*^2} \left(1 + \frac{B_d}{h_d} q_L \right) + K \frac{q_L^3}{w_2^2 Y_L} = 0 \end{array} \right. \quad (A2.9)$$

Les valeurs de K^* et K sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^* = -0.0015\delta + 0.3 \\ K = 0.0092\delta - 0.1855 \end{array} \right. \quad (A2.10)$$

A2.2.3. Modèles de confluence transcritique

Les modèles développés pour la confluence transitionnelle sont le modèle de Hager (1989) et de Gurram (1994). Ces modèles assument l'égalité des hauteurs d'eau dans les canaux situés avant la jonction, et l'égalité des largeurs des canaux. Hager (1989b) a dérivé deux équations à deux

inconnus : le coefficient de contraction μ , et le rapport des hauteurs d'eau Y , en termes du débit q_u et l'angle de jonction δ . Le modèle de Hager (1989b) est :

$$\text{Modèle de Hager : } \begin{cases} h_u = h_L \\ (1 - \cos \delta) Y^3 + 3(\cos \delta - \mu) Y + 2\mu^2 q_u^2 \\ + 2 \cos \delta (\mu^2 (1 - q_u)^2) - (1 - 2q_u + 2q_u^2) = 0 \\ \mu = (2Y^2 - 3)Y + 2(1 - 2q_u + 2q_u^2)Y^{-3} \\ h_d = h_c \end{cases} \quad (\text{A2.11})$$

avec h_c la hauteur critique.

$$\text{Modèle de Gurram : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - 3Y + 2(q_u^2 + q_L \cos \delta) = 0 \\ h_d = h_c \end{cases} \quad (\text{A2.12})$$

A2.2.4. Modèles de confluence torrentielle

Une confluence torrentielle est une confluence où l'écoulement est partout torrentielle dans les trois canaux renfermant la jonction. Le modèle de Rice (1985) prend la forme suivante :

$$\left(\frac{B_u h_u^2}{2} + \frac{Q_u^2}{g B_u h_u} \right) \cos \delta_u + \frac{Q_L^2}{g B_L h_L} \cos \delta_L - \frac{B_d h_d^2}{2} - \frac{Q_d^2}{g B_d h_d} = 0 \quad (\text{A2.13})$$

A2.3. LES MODELES DE BIFURCATION

Les notations utilisées dans cette section sont similaires à celles de la section précédente. Les modèles développés pour la bifurcation sont consacrés à la bifurcation fluviale, c'est-à-dire, lorsque l'écoulement qui arrive à la jonction est fluvial, et se divise après en deux écoulements de

type fluvial. Les modèles développés et utilisés dans ce travail sont : le modèle de Pemaiah (1977), de Ramamurthy et al. (1988), Ramamurthy et al. (1990), et de Hsu et al. (2002).

A2.3.1. Modèles de bifurcation fluviale

Ces modèles sont :

$$\text{Modèle de Pemaiah : } \begin{cases} h_u = h_L \\ \frac{1}{Y^3} + 2 \left(Fr_u^2 \frac{Q_L}{Q_u} - 2 Fr_u^2 \right) \frac{1}{Y} + 2 Fr_d^2 \left(1 - \frac{Q_L}{Q_u} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.14})$$

Modèle de Ramamurthy (1988) :

$$\begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - \frac{1}{4q_u} (1+Y)^2 Y - (2 Fr_u^2 + 1) \left(1 - \frac{1}{q_u} \right) Y + 2 Fr_u^2 \left(1 - \frac{1}{q_u} \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.15})$$

$$\text{Modèle de Ramamurthy (1990) : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 + 2 Y^2 Fr_u^2 \left(1 - k \frac{Q_L}{Q_u} \right) - 1 - 2 Fr_u^2 = 0 \\ k = \frac{5}{6} - \frac{Fr_u^2}{40} \end{cases} \quad (\text{A2.16})$$

$$\text{Modèle de Hsu : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - \left(1 + \frac{1}{2} Fr_d^2 \right) Y^2 + Fr_d^2 \frac{q_u^2}{2} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.17})$$

Références

- Akan AO, Yen BC. Diffusion wave flood routing in channel network. *Journal of Hydraulic Division* 1981; 107(6):719–732.
- Akanbi AA, Katopodes ND. Model for flood propagation on initial dry land. *Journal of Hydraulic Engineering* 1988; 114(7):689–706.
- Alcrudo F, Garcia-Navarro P. A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1993; 16:489–505.
- Alcrudo F, Garcia-Navarro P, Saviron JM. Flux Difference Splitting for 1D Open Channel Flow Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1992; 14:1009–1018.
- Anastasiou K, Chan CT. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1997; 24:1225–1245.
- Barth TJ, Jespersen DC. *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. AIAA Paper 89-0366, 1989.
- Bassi F, Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics* 1997; 131:267.
- Behlke CE, Pritchett HD. *Design of supercritical flow control junctions*. Highway Research Record No. 123. Highway Research Board, National Research Council, Washington, D. C., 1966.
- Bento FA. Modelacao computacional e experimental de escoamentos provocados por roturas de barragens, Ph.D. Thesis, Univ. Técnica de Lisboa, 1996.
- Best JL, Reid I. Separation zone at open-channel junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 1984; 110(11):1588–1594.
- Biswas R, Devine KD, Flaherty J. Parallel, adaptative finite element method for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics* 1994; 14:255.

- Bowers CE. *Hydraulic model studies for whiting field naval air station*. Part V; Studies of open channel junctions. Saint Anthony Falls Hydraulic Laboratory, University of Minnesota, Project Report No. 24, 1950.
- Brater EF, King HW. *Handbook of hydraulics for the solution of hydraulic engineering problems*; McGraw-Hill, 1976.
- Brezzi F, Douglas J, Marini D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numerical Mathematic* 1985; 47:217–235.
- Brown PN, Hindmarsh AC, Petzold LR. Consistent Initial Condition Calculation for Differential-Algebraic Systems. *SIAM Journal on Scientific Computing* 1998; 19:1495–1512.
- Brown PN, Hindmarsh AC, Petzold LR. Using Krylov Methods in the Solution of Large-Scale Differential-Algebraic Systems. *SIAM Journal on Scientific Computing* 1994; 15:1467–1488.
- Burguete J, García-Navarro P. Implicit schemes with large time step for non-linear equations: application to river flow hydraulics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2004; 46(6):607–636.
- Buyer M. *Transport de flux en réseau d'assainissement : Modèle 1D pour l'hydraulique des collecteurs et déversoirs avec prise en compte des discontinuités*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur de Strasbourg, 2002.
- Caleffi V, Valiani A, Zanni A. Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels. *Journal of Hydraulic Research* 2003; 41(2):167–177.
- Carballada L, Quach TT, Marche C, Ramamurthy AS. *Modèle de jonction des rivières*. Proceedings, XIX Congress of International Association for Hydraulic Research (IAHR), 273–280, India, 1981.
- Chan CT, Anastasiou K. Solution of incompressible flows with or without a free surface using the finite volume method on unstructured triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1999; 29:35–57.
- Chavent G, Cockburn B. *Consistance et stabilité des schémas LRG*. Rapport INRIA, No 710, (1987).
- Chavent G, Cockburn B. The local projection P^0P^l -discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws. *M2AN* 1989; 23:565–592.

- Chavent G, Jaffré J. *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*. Elsevier Science Publishers, Netherlands, (1986).
- Chavent G, Salzano G. A finite element method for the 1D water flooding problem with gravity. *Journal of Computational Physics* 1982; 45:307–344.
- Chocat B. *Encyclopédie de l'hydrologie urbaine et de l'assainissement*. B. Chocat éd., Lavoisier, 1997.
- Christodoulou GC. Energy dissipation on stepped spillways. *Journal of Hydraulic Engineering* 1993; 119(5):644–650. Discussions: 121(1):80–87.
- Cockburn B, Hou S, Shu CW. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case. *Mathematics of Computation* 1990; 54:545–581.
- Cockburn B, Lin SY, Shu CW. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems. *Journal of Computational Physics* 1989; 84(1):90–113.
- Cockburn B, Shu CW. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1998a, 35(6):2440–2463.
- Cockburn B, Shu CW. *The P^1 -RKDG Method for Two-dimensional Euler Equations of Gas Dynamics*. ICASE Report 91-32, 1991a.
- Cockburn B, Shu CW. The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation laws V, Multidimensional systems. *Journal of Computational Physics* 1998b; 141:199–224.
- Cockburn B, Shu CW. The Runge-Kutta local projection P^1 -discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 1991b; 25(3):337–361.
- Cockburn B, Shu CW. TVB Runge Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II: General framework. *Mathematics of Computation* 1989; 52:411–435.
- Coles D, Shintaku T. Experimental relation between sudden wall angle changes and standing waves in supercritical flow. B.S. thesis, Lehigh University, Bethlehem, Palestine, 1943.
- Cunge J, Holly F, Verwey A. *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman Publishing Ltd, 1980.

- Daubert A, Graffe O. Quelques aspects des écoulements Presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents. *La Houille Blanche* 1967; 8:847–860.
- Delis AI, Skeels CP, Ryrie SC. Implicit high-resolution methods for modelling one-dimensional open channel Flow. *Journal of Hydraulic Research* 2000; 38(5):369–382.
- Durgo Rao KHV, Pillai CRS. Study of flow over side weirs under supercritical conditions. *Water Resource Management* 2008; 22(1):131–143.
- Falconer RA, George DG, Hall P. Three-dimensional numerical modelling of wind-driven circulation in a shallow homogeneous lake. *Journal of Hydrology* 1991; 124:59–79.
- Fennema RT, Chaudhry MH. Explicit methods for 2D transient free-surface flow. *Journal of Hydraulic Engineering* 1990; 116(11):1013–1014.
- Fluent, 2002. Fluent User's guide, USA: Fluent Inc.
- Fraccarollo L, Toro EF. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems. *Journal of Hydraulic Research* 1996; 33(6):843–864.
- Garcia-Navarro P, Alcrudo F, Saviron J. 1D open channel flow simulation using MacCormack scheme. *Journal of Hydraulic Engineering* 1992; 118:1359–1372.
- Garcia-Navarro P, Saviron J. MacCormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow. *Journal of Hydraulic Research* 1992; 30:95–105.
- Garcia R, Kahawita RA. Numerical solution of the St. Venant equations with Maccormack finite difference scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1986; 6:507–527.
- Gildea AP, Wong RF. *Flood control channel hydraulics*. Proceedings, XII Congress of International Association for Hydraulic Research (IAHR), 1:330–337, USA, 1967.
- Gisonni C, Hager WH. Supercritical flow in the 90° junction manhole. *Urban water* 2002; 4:363–372.
- Glaister P. Approximate Riemann Solutions of the Shallow Water Equations. *Journal of Hydraulic Research* 1983; 26(3):293–306.
- Godunov S. Finite difference methods for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mathematicheskii Sbornik* 1959; 47:271–306.
- Goodman J, LeVeque R. On the accuracy of stable schemes for 2D conservation laws, *Mathematics of Computation* 1985; 45:15–21.

- Gowda V. *Discontinuous finite elements for nonlinear scalar conservation laws*. PhD Thesis, Université Paris IX, 1988.
- Gowda V, Jaffré J. *A discontinuous finite element method for scalar nonlinear conservation laws*. Rapport de recherche INRIA, No. 1848, 1993.
- Grace JL, Priest MS. *Division of flow in open channel junctions*. Bulletin No. 31, Engineering Experiment Station, Alabama Polytechnic Institute 1958.
- Greated CA. Supercritical flow through a junction. *La Houille Blanche* 1968; 8:693–695.
- Guinot V. *Godunov-type schemes: an introduction for engineers*. Elsevier: Amsterdam, 2003.
- Guinot V. *Wave Propagation in Fluids: Models and Numerical Techniques*. John Wiley & Sons, Chichester, England and New York, 2008.
- Gurram SK. *A study of subcritical and transitional combining flow in open channel junctions*. PhD thesis, Banaras Hindu University, Varanasi, India, 1994.
- Gurram SK, Karki KS, Hager WH. Subcritical junction flow. *Journal of Hydraulic Engineering* 1997; 123(5):447–455.
- Hager WH. Lateral outflow over side weirs. *Journal of Hydraulic Engineering* 1987; 113(4):491–504.
- Hager WH. Supercritical flow in channel junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 1989a; 115(5):595–616.
- Hager WH. Transitional flow in channel junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 1989b; 115(2):243–259.
- Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics* 1983; 49:357–393.
- Harten A, Lax PD, Van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review* 1983; 25:35–61.
- Herouin E. *Modélisation des écoulements complexes à surface libre en milieu naturel (étude bibliographique)*. Rapport de DEA de Mécaniques des Fluides. Université Claude Bernard de Lyon 1, 1991.
- Hirsch C. *Numerical computation of internal and external flows, computational methods for inviscid and viscous flows*. John Wiley & Sons, Chichester, England and New York, Vol. II, 1990.

- Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows – Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, Chichester, England and New York, Vol. I, 1988.
- Hoteit H, Ackerer Ph, Mosé R, Erhel J, Philippe B. New two-dimensional slope limiters for discontinuous Galerkin methods on arbitrary meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2004; 61(14):2566–2593.
- Hsu CC, Lee WJ, Chang CH. Subcritical open channel junction flow. *Journal of Hydraulic Engineering* 1998a; 124(8), 847–855.
- Hsu CC, Lee WJ, Shieh MY, Tang CJ. Subcritical 90° Equal-Width Open-Channel Dividing Flow. *Journal of Hydraulic Engineering* 2002; 128(7):716–720.
- Hsu CC, Wu FS, Lee WJ. Flow at 90° equal-width open-channel junction. *Journal of Hydraulic Engineering* 1998b; 124(2), 186–191.
- Hu K, Mingham CG, Causon DM. A bore-capturing finite volume method for open-channel flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1998; 28:1241–1261.
- Huang JC, Webber LJ, Lai YG. Three-dimensional numerical study of flows in open-channel junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 2002; 128(3):268–280.
- Hubbard ME. Multidimensional Slope Limiters for MUSCL-Type Finite Volume Schemes on Unstructured Grids *Journal of Computational Physics* 1999; 155:54–74.
- Jha AK, Akiyama J, Ura M. First and second-order flux difference splitting schemes for dam-break problem. *Journal of Hydraulic Engineering* 1995; 121(12):877–884.
- Johnson C, Pitkäranta J. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Mathematics of Computation* 1986; 48:1.
- Katopodes ND, Strelkoff T. Computing two-dimensional dam-break flood waves. *Journal of Hydraulic Division* 1978; 104(9):1269–1288.
- Kessewani G, Ghostine R, Vazquez J, Ghenaim A, Mosé R. Application of a second-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin scheme for the shallow water equations with source terms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2008; 56(7):805–821.
- Khan AA, Paquier A, Wang SY. Simulation of channel confluence and bifurcation using the CCHE2D model. *Water and Maritime Engineering* 2000; 142:97–102.
- Kouyi GL, Vazquez J, Poulet JB. Methodology of using 3D modelling of storm overflows for self-monitoring. *La Houille Blanche* 2005; 6:59–67.

- Krishnappa G, Seetharamiah K. A new method for predicting the flow in a 90° branch channel. *La Houille Blanche* 1963; 18(7):775–778.
- Lakshmana Rao NS, Sridharan K. Division of flow in open channels. *Irrigation and Power* 1967; 393–407.
- Law SW, Reynolds AJ. Dividing flow in open channel. *Journal of Hydraulic Division* 1966; 92(2):207–231.
- Lee KL, Holly ER. *Physical modeling of side channel weirs*. University of Texas at Austin, CRWR Online Report 02-2 (<http://www.crwr.utexas.edu/online.shtml>), 2002.
- LeSaint P, Raviart PA. *On a finite element method for solving the neutron transport equation, Mathematical aspects of finite element in partial diffenrtial equations*. (Carl de Boor, Education), Academic Press, 89, 1974.
- Lhomme J. Modélisation des inondations en milieu urbain. Approches unidimensionnelle, bidimensionnelle et macroscopique. Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2006.
- Liggett JA. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Inc., 1994.
- Lin JD, Soong HK. Junction losses in open channel flows. *Water Resources Research* 1979; 15(2):414–418.
- Mignot E, Paquier A, Riviere N. Experimental and numerical modeling of symmetrical four-branch supercritical cross junction flow. *Journal of Hydraulic Research* 2008a; 46(6):723–738.
- Mignot E, Riviere N, Perkins RJ, Paquier A. Flow patterns in a four-branch junction with supercritical flow. *Journal of Hydraulic Engineering* 2008b; 134(6):701–713.
- Milano V, Sassoli F. Ricerca sperimentale sulle confluenze fluviali in regime permanente. *L'Energia Elettrica* 1977; Milan, Italy, 54(11):497–508.
- Milne-Thomson M. *Theoretical hydrodynamics*. Macmillan and Co. Ltd., London, U.K., 1949.
- Murota A. *On the flow characteristics of a channel with a distributory*. Technology Reports of the Osaka University, Japan, 6(198), 1958.
- Nania LS, Gomez M, Dolz J. Experimental study of the dividing flow in steep street crossings. *Journal of Hydraulic Research* 2004; 42(4): 406–412.
- Nujic M. Efficient Implementation of Non-oscillatory Schemes for the Computation of Free Surface Flow. *Journal of Hydraulic Research* 1995; 33(1):101–111.

- Osher S, Solomone F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Mathematics of Computation* 1982; 38:339–374.
- Paquier, A. *Modélisation et simulation de la propagation de l'onde de rupture de barrage*. PhD Thesis, Université Jean Monnet de Saint Etienne, 1995.
- Pattabhiramiah KR. *Some characteristics of branch channel flow*. Ph.D. thesis presented to the Indian Institute of Science, Bangalore, India, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science, 1960.
- Pemaiah V. Divided flow in channels with bottom openings. *Journal of Hydraulic Division* 1977; 103(HY2):190–193.
- Peterson T. A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *SIAM J Numer. Anal* 1991; 28:133.
- Rajaratnam N. Constant velocity concept for supercritical branch channel flow. *Irrigation and Power* 1967; 19(1):17–21.
- Ramamurthy AS, Carballada LB, Tran DM. Combining open channel flow at right angled junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 1988; 114(12):1449–1460.
- Ramamurthy AS, Satish MG. Division of flow in short open channel branches. *Journal of Hydraulic Engineering* 1988; 114(4):428–438.
- Ramamurthy AS, Tran DM, Carballada LB. Dividing flow in open channels. *Journal of Hydraulic Engineering* 1990; 116(3):449–455.
- Raspopin GA, Kovalyov EA. *River stream dynamics mathematical modelling in river bed and flood plain*. XXIII Congress of International Association for Hydraulic Research (IAHR), B195–B201, Canada, 1989.
- Reed WH, Hill TR. *Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation*. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-479, 1973.
- Rice CE. *Open channel junctions with supercritical flow*. US Department of Agriculture, Agricultural Research Service, ARS-14; 1985.
- Richer GR. An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method. *Mathematics of Computation* 1988; 50:75.

- Rivière N, Perkins RJ. *Supercritical flow in channel intersections*. Proceedings of the 2nd international conference on fluvial hydraulics. Grecco, Carravetta and Della Morte Eds, River flow, 1073–1077, Italy, 2004.
- Rivière N, Perkins RJ, Chocat B, Lecus A. Flooding flows in city crossroads: experiments and 1D modelling. *Water Science and Technology* 2006; 54(6-7):75–82.
- Rivière N, Travin G, Perkins RJ. *Transcritical flows in open channel intersections*. Proceedings of the 32nd International Association for Hydraulic Research (IAHR) Congress, Di Silvio G, Lanzoni S Eds., paper SS05-11, Venice, Italy, 2007.
- Roe PL. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics* 1981; 43:357–372.
- Schnitter G, Müller R, Crpez V, Bisaz E. Modellversuche fuer Kraftwerkbauten im Wallis, ausgefuehrt an der Hydraulischen Abteilung der Versuchsanstalt fuer Wasserbau und Erdbau an der ETH. *Wasser-und Energie-wirtschaft* 1955; 47:5–7.
- Schwanenberg D and Harms M. Discontinuous Galerkin Finite-Element Method for Transcritical Two-Dimensional Shallow Water Flows. *Journal of Hydraulic Engineering* 2004; 130(5):412–421.
- Shabayek S, Steffler P, and Hicks F. Dynamic model for subcritical combining flows in channel junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 2002; 128(9) :821–828.
- Shettar AS, Murthy KK. A numerical study of division of flow in open channels. *Journal of Hydraulic Research* 1996; 34(5):651–675.
- Shu CW. TVB uniformly high order schemes for conservation laws. *Mathematics of Computation* 1987; 49:105-121.
- Soulis JV. *Prediction Performance of Quasi-2D and 2D Free-Surface Flow Algorithms*. VII Pan-Hellenic Congress of the Greek Hydrotechnical Association, Patras, 1997.
- Tanaka K. *The improvement of the inlet of the power canal*. Transactions Seventh General Meeting of International Association for Hydraulic Research (IAHR), 1, C:20.1–20.16, Portugal, 1957.
- Taylor EH. Flow characteristics at rectangular open-channel junctions. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 1944; 109:893–912.
- Toro EF. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1997.

- Toro EF. *Shock-capturing methods for free surface flows*. John Wiley & Sons, Chichester, England and New York, 2001.
- Tseng MS. Explicit finite volume non-oscillatory schemes for 2D transient free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1999; 30:831–843.
- Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme: I. The Quest of Monotonicity. *Lecture notes in Physics* 1973; 18:163–168.
- Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Scheme: II. *Journal of Computational Physics* 1974; 14:361–376.
- Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme: III. *Journal of Computational Physics* 1977; 23:263–275.
- Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Scheme: IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics* 1977; 23:276–299.
- Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Scheme: V. A second order Godunov's method. *Journal of Computational Physics* 1979; 32:101–136.
- Vazquez J, Kouyi GL, Zug M. Modelling and instrumentation of the storm overflows of the combined sewer system of Sélesat. *Urban Water* 2006; 3(2):91–110.
- Versteeg HK, Malalasekera W. *An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method*. Prentice Hall, 1995.
- Wang JW, Liu RX. A comparative study of finite volume methods on unstructured meshes for simulation of 2D shallow water wave problems. *Mathematics and Computers in Simulation* 2000; 53:171–184.
- Wang JW, Liu RX. The composite finite volume method on unstructured triangular meshes for 2D shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2001; 37(8):933–949.
- Webber NB, Greated CA. *An investigation of flow behaviour at the junction of rectangular channels*. Proceedings, Institute Civil Engineers 34:321–334, London, 1966.
- Yee HC. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. *Journal of Computational Physics* 1987; 68(1):151–179.
- Yee HC, Warming RF, Harten A. Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations. *Journal of Computational Physics* 1985; 57(3):327–360.

- Yen BC. Unsteady flow mathematical modelling techniques. *Modelling of Rivers*. Shen HW, ed., Wiley-Interscience: New York, 1979; 13(1), 13–33.
- Yen BC, Osman A. (1976). Flood routing through river junctions. *Rivers '76* 1976; American Society of Civil Engineers, New York, 1:212–231.
- Yoon TH, Kang SK. Finite volume method for two-dimensional shallow water flows on unstructured grids. *Journal of Hydraulic Engineering* 2004; 130(7):678–688.
- Zhao DH, Shen HW, Lai JS, Tabios GQ. Approximate Riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave problems. *Journal of Hydraulic Engineering* 1996; 122:692–702.
- Zhao DH, Shen HW, Tabios GQ, Lai JS, Tan WY. A finite volume two-dimensional unsteady flow model for river basins. *Journal of Hydraulic Engineering* 1994; 20(7):863–883.
- Zhou JG, Causon DM, Mingham CG, Ingram DM. Numerical prediction of dam-break flows in general geometries with complex bed topography. *Journal of Hydraulic Engineering* 2004; 130(4):332–340.
- Zhou T, Li Y, Shu CW. Numerical comparison of WENO finite volume and Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods. *Journal on Scientific Computing* 2001; 16(2):145–171.

Les publications

An improvement of classical slope limiters for high-order discontinuous Galerkin method

R. Ghostine^{1,*},[†], G. Kesserwani¹, R. Mosé¹, J. Vazquez¹ and A. Ghenaim²

¹*U.P.R. Systèmes Hydrauliques Urbains, Ecole Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg,
1 quai Koch BP 61039 F, 67070 Strasbourg Cedex, France*

²*INSA, Institut National des Sciences Appliquées, 24 boulevard de la Victoire, 67084 Strasbourg Cedex, France*

SUMMARY

In this paper, we describe some existing slope limiters (Cockburn and Shu's slope limiter and Hoteit's slope limiter) for the two-dimensional Runge–Kutta discontinuous Galerkin (RKDG) method on arbitrary unstructured triangular grids. We describe the strategies for detecting discontinuities and for limiting spurious oscillations near such discontinuities, when solving hyperbolic systems of conservation laws by high-order discontinuous Galerkin methods. The disadvantage of these slope limiters is that they depend on a positive constant, which is, for specific hydraulic problems, difficult to estimate in order to eliminate oscillations near discontinuities without decreasing the high-order accuracy of the scheme in the smooth regions. We introduce the idea of a simple modification of Cockburn and Shu's slope limiter to avoid the use of this constant number. This modification consists in: slopes are limited so that the solution at the integration points is in the range spanned by the neighboring solution averages. Numerical results are presented for a nonlinear system: the shallow water equations. Four hydraulic problems of discontinuous solutions of two-dimensional shallow water are presented. The idealized dam break problem, the oblique hydraulic jump problem, flow in a channel with concave bed and the dam break problem in a converging–diverging channel are solved by using the different slope limiters. Numerical comparisons on unstructured meshes show a superior accuracy with the modified slope limiter. Moreover, it does not require the choice of any constant number for the limiter condition. Copyright © 2008 John Wiley & Sons, Ltd.

Received 23 November 2007; Revised 12 March 2008; Accepted 13 March 2008

KEY WORDS: discontinuous Galerkin method; two-dimensional shallow water equations; slope limiter; steady; transient; unstructured grids

1. INTRODUCTION

The success of the discontinuous Galerkin methods in approximating various physical problems, notably hyperbolic systems of conservative laws, has attracted the hydraulic engineering

*Correspondence to: R. Ghostine, U.P.R. Systèmes Hydrauliques Urbains, Ecole Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg, 1 quai Koch BP 61039 F, 67070 Strasbourg Cedex, France.

[†]E-mail: rabih.ghostine@engees.u-strasbg.fr

communities to explore the benefits of this approach [1–4]. One favorable property of the discontinuous Galerkin methods is that they conserve mass at the element level in a finite element framework. Consequently, they inherit the flexibility of finite elements in handling complicated geometries and require a simple treatment of boundary conditions and source terms to obtain high-order accuracy.

First-order schemes are the only approaches that maintain a monotonic solution structure at discontinuities. Moreover, numerical diffusion due to upwinding is big enough to keep the scheme stable [5–7]. Unfortunately, these schemes represent the solution with an excessive amount of dissipation. High-order numerical schemes produce spurious oscillations near discontinuities, which may lead to numerical instabilities and unbounded computational solutions. Even if the oscillations are less severe, they produce non-physical solutions, such as negative water depths, which is unacceptable. In such a case, the use of an appropriate slope limiter is crucial to ensure the stability of the method.

In one-dimensional space, discontinuous finite elements can be interpreted as a generalization of high-order Godunov finite differences [8–11]. Such high resolution schemes are usually stabilized using some form of TVD limiters [12, 13] so that spurious oscillations can be avoided without destroying the high-order accuracy of the schemes. One commonly used technique is the Van Leer's MUSCL slope limiter [11].

In multi-dimensional spaces, the Runge–Kutta discontinuous Galerkin (RKDG) method is still facing difficulties to attain the same degree of accuracy as in the one-dimensional case, especially on unstructured meshes. The troublesome part is the construction of appropriate multi-dimensional slope limiters that preserve the accuracy of the scheme. Consequently, a great deal of effort has been oriented for the construction of genuine multi-dimensional slope limiters that can eliminate unphysical oscillations without adding excessive numerical viscosity.

Cockburn and Shu [1, 2, 14, 15] extended the Van Leer's MUSCL slope limiter to the so-called generalized slope limiter where a $(k+1)$ th-order of accuracy is achieved in smooth regions by using the DG method with polynomials of degree k for the spatial discretization and a special $(k+1)$ th-order explicit Runge–Kutta method for temporal discretization. The generalized slope limiter does not totally smear oscillations near shocks, but it preserves the accuracy of the scheme in smooth regions. Thus, the resulting scheme is not TVD; however, it satisfies a TVB property.

Hoteit [16] and Hoteit *et al.* [17] concentrated on a genuinely multi-dimensional slope limiter in the sense that it does not require any operator splitting. This slope limiting operator was introduced by Chavent and Jaffré [18] as a generalization of Van Leer's MUSCL limiter [11]. The main idea of this new reconstructing and limiting technique follows a well-known approach where local maximum principle is defined by enforcing some constraints on the reconstruction of the solution, as the mass conservation.

In this work, we introduce a simple modification of Cockburn and Shu's slope limiter for the solution to the two-dimensional shallow water equations on arbitrary unstructured triangular grids. The main idea of this modification and limiting technique is to change the limiter condition to avoid the use of a constant positive number, which can be difficult to fix for specific hydraulic problems. Therefore, slopes are limited so that the solution at the integration points is in the range spanned by the neighboring solution averages. Numerical tests on the idealized dam break problem, the oblique hydraulic jump problem, flow in a channel with concave bed and the dam break problem in a converging–diverging channel show that the modified slope limiter can eliminate unphysical oscillations and that the high order of the scheme is preserved in the smooth regions.

The outline of the remainder of the paper is as follows. In Sections 2 and 3, we describe the mathematical model and the numerical scheme, respectively. Section 4 presents some existing slope limiter and the modified slope limiter. Computational results on a variety of test cases are presented in Section 5 with conclusions following in Section 6.

2. MATHEMATICAL MODEL

The two-dimensional depth-integrated shallow water equations are obtained by integrating the Navier–Stokes equations over the flow depth with the following assumptions: uniform velocity distribution in the vertical direction, incompressible fluid, hydrostatic pressure distribution and small bottom slope. The continuity and momentum equations are

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (1)$$

in which

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}$$

and

$$S = S_0 + S_f = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{0x} \\ ghS_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix} \quad \text{is the source term}$$

where u and v are the velocity components in the x and y directions, respectively; h is the water depth; g is the acceleration due to gravity; (S_{0x}, S_{0y}) are the bed slopes in the x and y directions and (S_{fx}, S_{fy}) are the friction slopes in the x and y directions, respectively. In this study, the friction slopes are estimated by using Manning's formula:

$$S_{fx} = \frac{n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}$$

where n_M is Manning's roughness coefficient.

3. NUMERICAL APPROXIMATION

We consider a finite element discretization of the field of calculation $\Omega = \bigcup_{i=1}^M K_i$, where K_i is a triangular element. We describe the space and temporal approximations below, and the results of stability.

3.1. Space discretization

Let $V = L^2(\Omega \times [0, \infty[)$ be the space of the solutions of Equation (1), and let the approximate space $V_h^k \subset V$ be defined by

$$V_h^k = \{v \in V / v|_{T_i} \in P^k, i = 1, \dots, M\}$$

where P^k is the space of the polynomials of degree k ($k = 1, 2, \dots$). Consequently, the solutions v are discontinuous from a triangle to another. Subsequently, we will fix $k = 1$. In order to build a solution $U_h \in V_h^1$, we multiply Equation (1) by a test function $v_h(x, y) \in V_h^1$, and we integrate on each triangle K . The obtained system is written for $U_h = U/K$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K U_h(x, y, t) v_h(x, y) dK + \int_K \nabla F(U_h(x, y, t)) v_h(x, y) dK \\ = \int_K S(U_h(x, y, t)) v_h(x, y) dK \end{aligned} \quad (2)$$

where $F = (E, G)$ and after integration by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K U_h(x, y, t) v_h(x, y) dK &= \int_K F(U_h(x, y, t)) \cdot \nabla v_h(x, y) dK \\ &\quad - \int_{\partial K} F(U_h(x, y, t)) \cdot n_k v_h(x, y) d\Gamma \\ &\quad + \int_K S(U_h(x, y, t)) v_h(x, y) dK \end{aligned} \quad (3)$$

Here $n_k = (n_x, n_y)$ is the unit vector outward normal to the element boundary Γ of the finite element K .

The approximated variable U_h can be expressed as a sum of the products of discrete variables U_i and shape functions φ_i

$$U_h(x, y) = \sum_i U_i \varphi_i(x, y) \quad (4)$$

Using the standard Galerkin approach, shape functions and test functions are identical. Rewriting Equation (3), the discontinuous Galerkin space discretization can be summarized by a system of ordinary differential equations as

$$\frac{d}{dt} M U_h = L_{h,U}(U_h) \quad (5)$$

where M is the mass matrix and L_h is an operator describing the spatial discretization.

By using orthogonal shape functions, the mass matrix M in the linear equation system (5) becomes diagonal. For triangular elements, a linear shape function can be obtained by choosing a function that takes the value of 1 at the midpoint m_i of the i th edge of a triangle and the value of 0 at the midpoints of the other two edges. Thus, the diagonal mass matrix can be expressed as follows:

$$M = |K| \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (6)$$

The integrals are approximated by a three-midpoint rule for the triangles and a two-point Gauss integration for the line integrals [19].

3.2. Numerical flux

The approximation of the numerical flux for the discontinuous Galerkin method is identical to the approximated solution to a Riemann problem according to finite-volume methods. By using linear or higher subcell resolution for higher-order discontinuous Galerkin methods, the scheme gets less sensitivity to the choice of the numerical flux than the Godunov-type methods. In that case, a simple Lax–Friedrich flux gives good results:

$$F(U_L, U_R) \cdot n = \frac{1}{2}[(F(U_L) + F(U_R)) \cdot n - a_{\max}(U_R - U_L)] \quad (7)$$

where $a_{\max} = \max(|a^1|, |a^2|, |a^3|)$, and a^k ($k = 1, \dots, 3$) are the eigenvalues of the Jacobian matrix:

$$\tilde{A} = \frac{\partial(F \cdot n)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ (c^2 - u^2)n_y - uvn_x & vn_x & un_x + 2vn_y \end{bmatrix}$$

and $c = \sqrt{gh}$ is the wave celerity.

3.3. Time integration

The second-order accurate, two-stage TVD Runge–Kutta schemes of Cockburn and Shu [2] are employed in this work. An optimal second-order TVD Runge–Kutta method is given by

$$\begin{aligned} U_h^1 &= U_h^n + dt \cdot L_{h,U}(U_h^n) \\ U_h^{n+1} &= \frac{1}{2}(U_h^n + U_h^1 + dt \cdot L_{h,U}(U_h^1)) \end{aligned} \quad (8)$$

Since the TVD Runge–Kutta method is an explicit scheme, the time step dt must be selected based on the Courant–Friedrich–Lewy stability criterion. The maximum allowable time step is limited in this paper by the following criteria:

$$dt = \text{CFL} \frac{|K|}{\sum_{j=1}^3 l_j \min(u \cdot n_x + v \cdot n_y - c, 0)} \quad (9)$$

where l_j is the length of the edge of the cell K and $0 < \text{CFL} \leq 1$ is the Courant number.

4. EXISTING SLOPE LIMITERS

In this section, we briefly review two slope limiters introduced by Cockburn and Shu [2] and by Hoteit [16] and Hoteit *et al.* [17] for triangular grids. We restrict the presentation for P^1 piecewise approximation functions on triangular elements. The degrees of freedom are the state values at the midpoints of the grid edges.

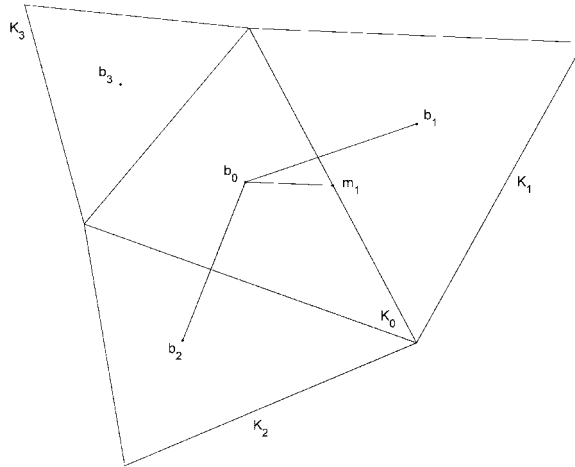


Figure 1. Slope limiting for triangular elements.

4.1. Slope limiter of Cockburn and Shu

To describe the limiter, we use the same notations as in Cockburn and Shu [2]. For an arbitrary triangle K_0 and its surrounding neighbors K_i , $i = 1, \dots, 3$, the notations b_i , $i = 0, \dots, 3$, and m_i , $i = 1, \dots, 3$, refer, respectively, to the barycenters of the triangles and the midpoints of the edges within K_0 (Figure 1).

Choosing any edge midpoint m_1 , we obtain

$$m_1 - b_0 = \alpha_1(b_1 - b_0) + \alpha_2(b_2 - b_0) \quad \text{for some } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+2} \quad (10)$$

For any linear function u_h , the mean gradient can be expressed as

$$\Delta \bar{u}(m_1, K_0) = \alpha_1(u_h(b_1) - u_h(b_0)) + \alpha_2(u_h(b_2) - u_h(b_0)) \quad (11)$$

By using the basis functions φ_i , u_h can be expressed over K_0 as follows:

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_h(m_i) \varphi_i(x, y) = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 (u_h(m_i) - u_h(b_0)) \varphi_i(x, y) \quad (12)$$

First, we compute the quantities:

$$\Delta_i = \tilde{m}(u_h(m_i) - u_h(b_0), v \Delta \bar{u}(m_i, K_0)) \quad \text{for some } v > 1 \quad (13)$$

where v is a positive constant number equal to 1.5 and \tilde{m} is the TVB minmod function defined as follows:

$$\tilde{m}(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_1| \leq M(\Delta x)^2 \\ m(a_1, a_2) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

where M is a given positive constant; and m is the minmod function, defined as follows:

$$m(a_1, a_2) = \begin{cases} s \min_{1 \leq n \leq 2} |a_n| & \text{if } s = \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

Consequently, reconstruction is carried out according to the following two cases:

1. If $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$, the new midpoint value is given by

$$u_h(m_i) = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \varphi_i(x, y) \quad (16)$$

2. If $\sum_{i=1}^3 \Delta_i \neq 0$, we compute

$$\text{pos} = \sum_{i=1}^3 \max(0, \Delta_i), \quad \text{neg} = \sum_{i=1}^3 \max(0, -\Delta_i) \quad (17)$$

and define

$$\theta^+ = \min\left(1, \frac{\text{neg}}{\text{pos}}\right), \quad \theta^- = \min\left(1, \frac{\text{pos}}{\text{neg}}\right) \quad (18)$$

Finally, the new midpoint value is given by

$$u_h(m_i) = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 \hat{\Delta}_i \varphi_i(x, y) \quad (19)$$

where

$$\hat{\Delta}_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i) \quad (20)$$

Since the shallow water equations are a system of equations, the limiting must be performed in the local characteristic variables in the direction of vector $m_1 - b_0$. The variables are therefore transformed by T^{-1} into the characteristic space, where T is the matrix of right eigenvectors of the following Jacobian:

$$\partial_U (E(U(b_0)), G(U(b_0))) \cdot \frac{m_i - b_0}{|m_i - b_0|} \quad (21)$$

4.2. Modified slope limiter of Cockburn and Shu

We have seen that the TVB minmod function defined in Equation (14) depends on the constant positive number M . The choice of this number depends on the solution to the problem and the mesh of the domain. This can make it difficult to choose this number to eliminate unphysical oscillations and preserve the high-order accuracy of the scheme in the smooth regions. In our work, we introduce here a simple modification in the TVB minmod function to avoid the use of the constant number M . Slopes are limited so that the solution at the midpoints of the edges is in the range spanned by the neighboring solution averages:

$$\overline{U}_{K_0}^{\min} \leq u_h(m_i) \leq \overline{U}_{K_0}^{\max} \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (22)$$

where $\overline{U}_{K_0}^{\min}$, $\overline{U}_{K_0}^{\max}$ are the minimum and maximum element averaged solution on the elements sharing faces with the cell K_0 , respectively.

$\bar{U}_{K_0}^{\min} = \min(u_h(b_1), u_h(b_2), u_h(b_3))$ and $\bar{U}_{K_0}^{\max} = \max(u_h(b_1), u_h(b_2), u_h(b_3))$ and the quantity Δ_i defined in Equation (13) is expressed as follows:

$$\Delta_i = \begin{cases} u_h(m_i) - u_h(b_0) & \text{if } \bar{U}_{K_0}^{\min} \leq u_h(m_i) \leq \bar{U}_{K_0}^{\max} \\ m(u_h(m_i) - u_h(b_0), v\Delta\bar{u}(m_i, K_0)) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23)$$

Therefore, the modified slope limiter depends only on the solutions at the neighboring cells and does not require any choice of specific constant for the limitation, as it is the case in Cockburn and Shu [2].

4.3. Slope limiter of Hoteit et al.

To describe the slope limiting procedure, let us consider a triangular element K_0 surrounded by its neighborhoods K_i , $i = 1, \dots, 3$ (Figure 1). The aim is to reconstruct the average values $\tilde{u}_h(m_i)$ at the midpoints of the edges. An indispensable condition that must be satisfied is the local mass conservation. To obey a local maximum principle, some constraints are imposed to ensure that each reconstruction $u_h(m_i)$ is between the cell averages of the two adjacent elements. To have a less restrictive limiting, the reconstructions $u_h(m_i)$ are kept as close as possible to the initial state values $\tilde{u}_h(m_i, K_0)$. The resulting optimization problem to solve is therefore as follows.

For given initial state values $(\tilde{u}_h(m_1), \tilde{u}_h(m_2), \tilde{u}_h(m_3))$, find $u_h(b_0)$ the solution to the problem:

$\min_W \|W - \tilde{u}_h(b_0)\|_2$, subject to the linear constraints:

$$W(b_0) = \frac{1}{3}(u_h(m_1) + u_h(m_2), u_h(m_3)) = u_h(b_0) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \min(\tilde{u}_h(b_1), \tilde{u}_h(b_0)) &\leq u_h(m_1) \leq (1-\alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \max(\tilde{u}_h(b_1), \tilde{u}_h(b_0)) \\ (1-\alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \min(\tilde{u}_h(b_2), \tilde{u}_h(b_0)) &\leq u_h(m_2) \leq (1-\alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \max(\tilde{u}_h(b_2), \tilde{u}_h(b_0)) \\ (1-\alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \min(\tilde{u}_h(b_3), \tilde{u}_h(b_0)) &\leq u_h(m_3) \leq (1-\alpha)\tilde{u}_h(b_0) + \alpha \max(\tilde{u}_h(b_3), \tilde{u}_h(b_0)) \end{aligned} \quad (25)$$

See Hoteit et al. [16, 17] for the solution to this problem. The author shows that the slope limiter eliminates completely spurious oscillations with minimal numerical smearing for $\alpha = 1$.

5. NUMERICAL RESULTS

In this section, we validate and compare the different slope limiters described in the previous section and this on four hydraulic flow problems: the first and the fourth problems are transient problems in a channel during the break of a dam. The second and the third are steady problems, which pass from supercritical flow to subcritical flow through a hydraulic jump. The choice of these four problems for the comparison of the various slope limiters is justified by the following reasons:

- The four problems admit analytical solutions or have experimental data, which makes it possible to compare the simulated solution with the exact solution or the experimental data of the problem.
- The flow in the dam break problems is transient; therefore, the variables vary in time, whereas the flow in the other two problems is steady.
- The solution to these problems contains shocks and discontinuities.

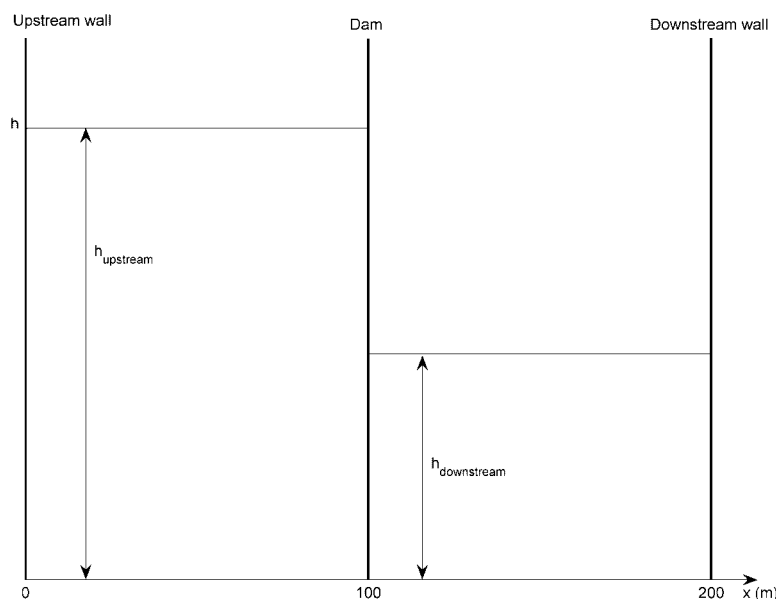


Figure 2. Definition of the dam break problem.

5.1. Test case 1: dam break problem

We consider a horizontal channel of width $B = 10\text{m}$ and length $L = 200\text{m}$. The bed of the channel is smooth; therefore, there is no friction effect on the flow. The dam is located at the middle of the channel, and at instant $t = 0$, the dam is completely removed and water is slackened in the form of two waves; one moves upstream and the other towards the downstream (Figure 2). The problem domain was triangulated into 672 cells and the computational model was run up to 3 s after the dam break.

In this problem, we are interested in the simulation of the flow during the break of the dam. The initial conditions of the flow are zero flow discharge everywhere in the channel, and a discontinuous water depth at the dam. The water depth at the upstream of the dam is fixed at $h_{\text{upstream}} = 10\text{m}$, and the water depth at the downstream of the dam varies in order to change the nature of the flow. Since the channel is closed, the flow is reflective at the upstream and the downstream of the channel.

Two cases are considered in order to show the robustness of the slope limiters. In the first case, the flow is subcritical everywhere and therefore the Froude number is lower than 1. In this case, the downstream water depth must be selected so that the depth ratio $h_{\text{downstream}}/h_{\text{upstream}}$ is equal to or greater than 0.5 m ($h_{\text{downstream}} = 5\text{m}$). Figure 3 shows the water depth results obtained by the different slope limiters.

In the second case, the flow is gradually varied; therefore, it passes from subcritical flow to supercritical flow and inversely. In this case, the downstream water depth must be selected so that the depth ratio $h_{\text{downstream}}/h_{\text{upstream}}$ is lower than 0.5 m ($h_{\text{downstream}} = 1\text{m}$). Figure 4 shows the water depth results obtained by the different slope limiters.

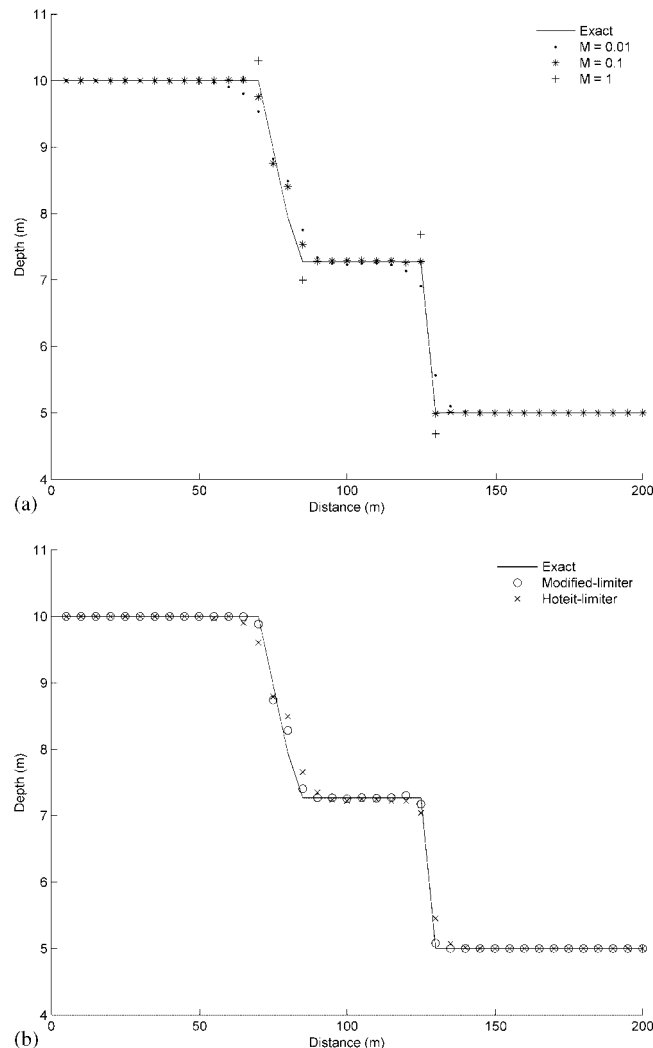


Figure 3. Water depth predicted for the dam break problem (subcritical case): (a) Cockburn and Shu's slope limiter and (b) Hoteit's slope limiter and the modified slope limiter.

Table I shows the relative error in $L2$ norm between the solutions obtained by the different slope limiters and the exact solution for the two cases (subcritical and supercritical). According to Figures 3 and 4, we note that the different slope limiters give similar results in the smooth regions, but notable differences in accuracy are exhibited between these limiters in the regions where the solution is discontinuous. Regarding the results obtained by Cockburn and Shu's slope limiter, it appears that it is not easy to estimate the constant parameter M for the limitation in order to obtain high-order accuracy of the scheme. For a small value of M ($M=0.01$) the slope limiter eliminates oscillations without preserving the high-order accuracy of the scheme. While for a large value of M ($M=1$) the solution is in good agreement in the smooth regions, oscillations appear in the

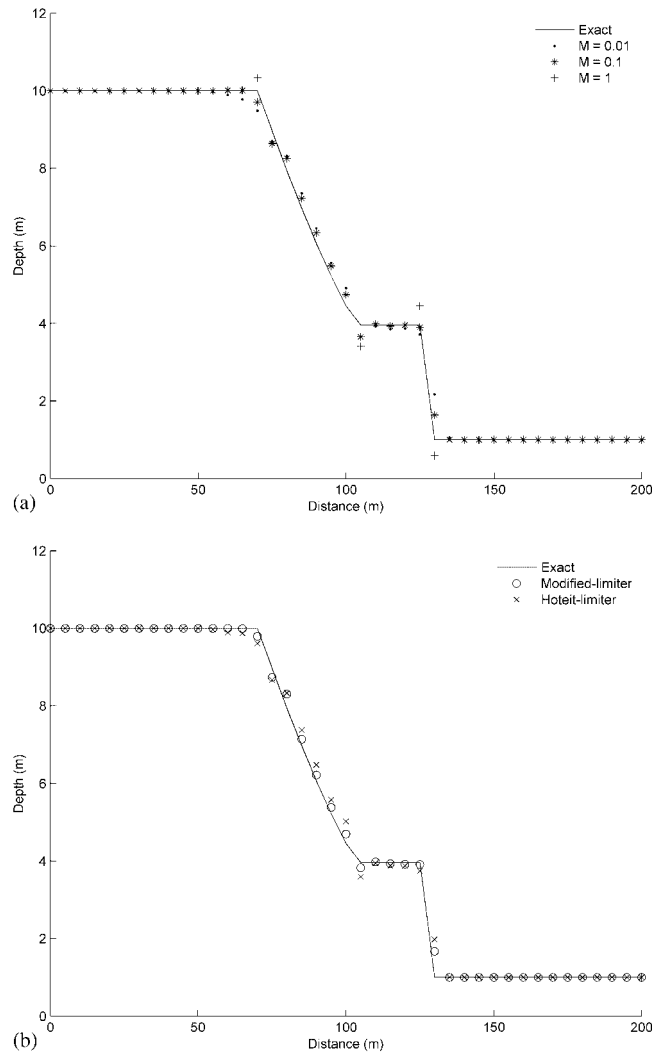


Figure 4. Water depth predicted for the dam break problem (supercritical case): (a) Cockburn and Shu's slope limiter and (b) Hoteit's slope limiter and the modified slope limiter.

discontinuity regions. For $M = 0.1$, the slope limiter gives better results. On the other hand, the modified slope limiter performs almost as well. It eliminates the oscillations near discontinuities and preserves the high-order accuracy of the scheme. Moreover, it avoids the difficulty of choosing a constant parameter for limitation. The slope limiter of Hoteit *et al.* gives satisfactory results.

5.2. Test case 2: oblique hydraulic jump problem

The oblique hydraulic jump is induced by means of an interaction between a supercritical flow and a converging wall deflected through an angle $\alpha = 8.95^\circ$. The shock wave is formed with

Table I. Test case 1: L_2 relative errors of water depth.

Slope limiter	L_2 error in %	
	Subcritical case	Supercritical case
Cockburn's limiter ($M=0.01$)	2.29	3.81
Cockburn's limiter ($M=0.1$)	1.26	2.41
Cockburn's limiter ($M=1$)	1.68	2.66
Hoteit's limiter	1.93	3.56
Modified limiter	0.94	2.11

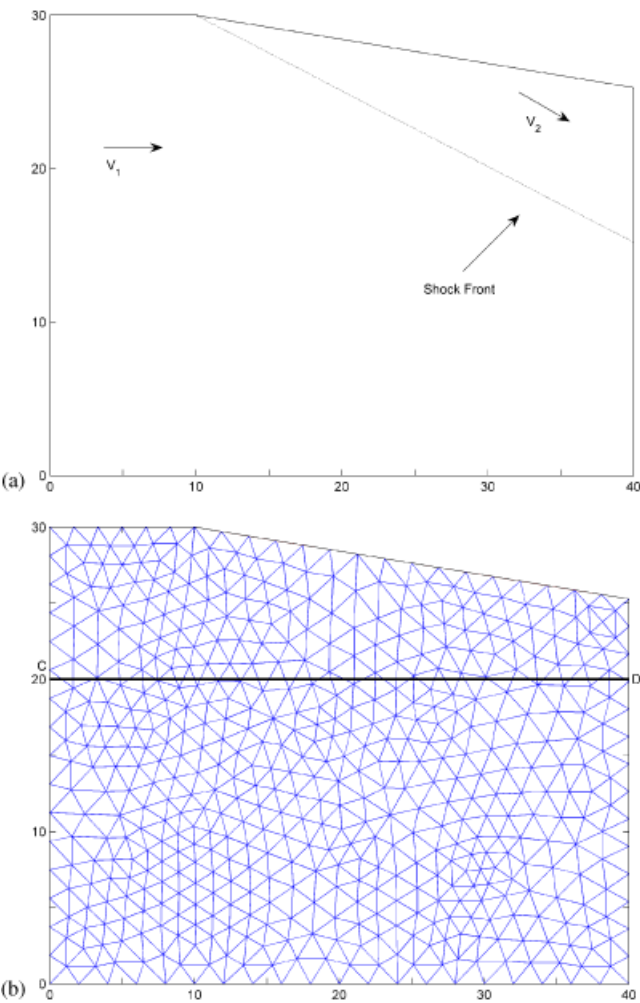


Figure 5. (a) Definition of problem domain for oblique hydraulic jump and (b) the unstructured mesh for oblique hydraulic jump.

Table II. Test case 2: L_2 relative errors of water depth and velocity.

Slope limiter	L_2 error in %	
	Water depth	Velocity
Cockburn's limiter ($M=0.01$)	4.15	0.61
Cockburn's limiter ($M=0.1$)	2.12	0.26
Cockburn's limiter ($M=1$)	2.42	0.39
Hoteit's limiter	3.20	0.42
Modified limiter	1.69	0.19

an angle β . The definition of the problem domain and a schematic diagram of the induced shock front appear in Figure 5(a). The computational domain was triangulated into 1200 cells (Figure 5(b)).

The initial and inflow conditions are the height $h_0 = 1$ m, velocity $u_0 = 8.57$ m/s and $v_0 = 0$ m/s (corresponding to a Froude number of 2.74). Fixed boundary conditions are applied at the upstream boundary. Transmissive boundary conditions are imposed at the downstream boundary and slip no-pass boundary conditions at the channel walls. The resulting steady-state flow should be purely supercritical and divided into two regions by an oblique hydraulic jump at an angle of $\beta = 30^\circ$ to the upstream flow. Downstream of this jump, the exact solution is given by $h = 1.5$ m, $|V| = 7.9556$ m/s [20].

The quantitative comparison of relative errors in L_2 norm between the computed results and the analytical solution is shown in Table II. The comparisons of water surface profile and velocity plot along the longitudinal section line ('CD' shown in Figure 5(b)) are represented in Figures 6 and 7, respectively. In the same manner as for the dam break problem, the results indicate that Cockburn and Shu's slope limiter requires a good estimation of the constant parameter M in order to obtain high-order accuracy. On the other hand, the results obtained by the modified slope limiter are slightly better than the others. Moreover, the modified slope limiter avoids the difficulty of choosing any constant parameter.

5.3. Test case 3: flow in a rectangular channel with concave bed

In this section, we consider a hydraulic problem of a flow in a rectangular prismatic channel where the bed has a non-regular geometrical form. The bed of the channel is concave; it has the shape of a bump as indicated in Figure 8.

The length of the channel is 1 km and its width is 1 m. In this example, there are no friction effects. The bump of the bed starts at $x = 125$ m and finishes at $x = 875$ m. The mathematical expression of the bed is given by

$$z(x) = 4.75 \sin^2 \left(\frac{x - 125}{750} \pi \right) \quad (26)$$

where z represents the level of the bed compared with a fixed constant altitude, and x is the longitudinal distance. In this example, the flow is subcritical at the upstream, reaches its critical mode at the top of the bump, passes to supercritical mode and finishes in subcritical mode through a hydraulic jump just before the end of the bump.

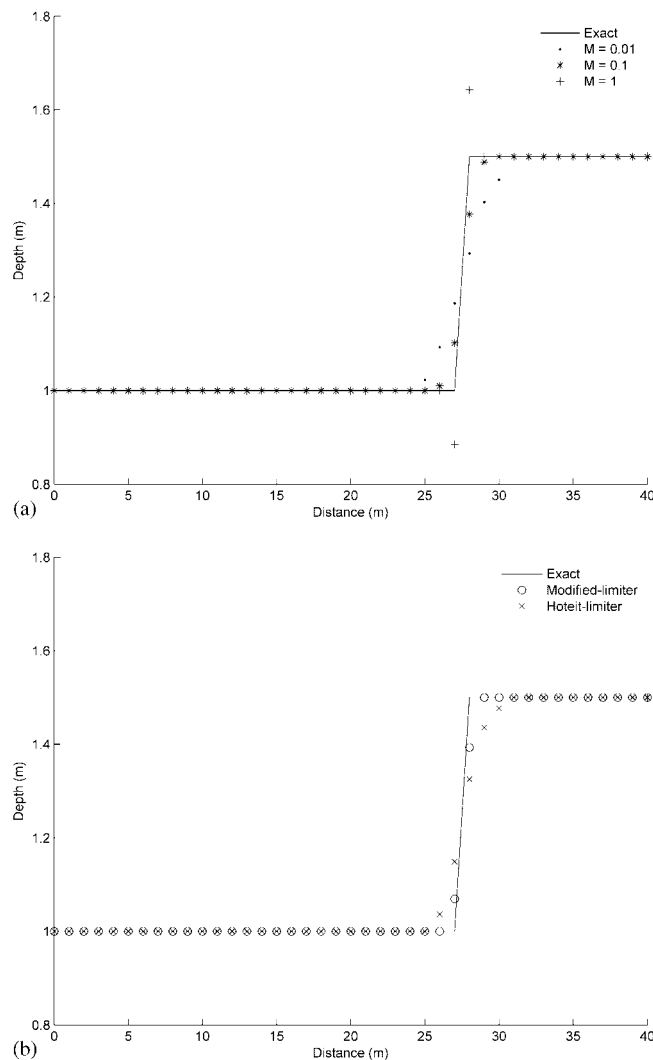


Figure 6. Comparison of the water depth profiles along the longitudinal section line ('CD' shown in Figure 5): (a) Cockburn and Shu's slope limiter and (b) Hoteit's slope limiter and the modified slope limiter.

For the boundary conditions, we imposed a flow discharge $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ at the upstream of the channel and a water depth $h = 7 \text{ m}$ at the downstream of the channel. The physical domain is discretized into 3422 triangular cells. The calculated steady-state water surface profiles along the channel centerline are compared with the analytical solution to the problem [21] in Figure 9. In Table III, the relative errors in $L2$ norm of the different slope limiters are compared.

The different slope limiters give similar results in the regions where the solution is smooth but a notable difference in accuracy is exhibited between these limiters in the discontinuity regions.

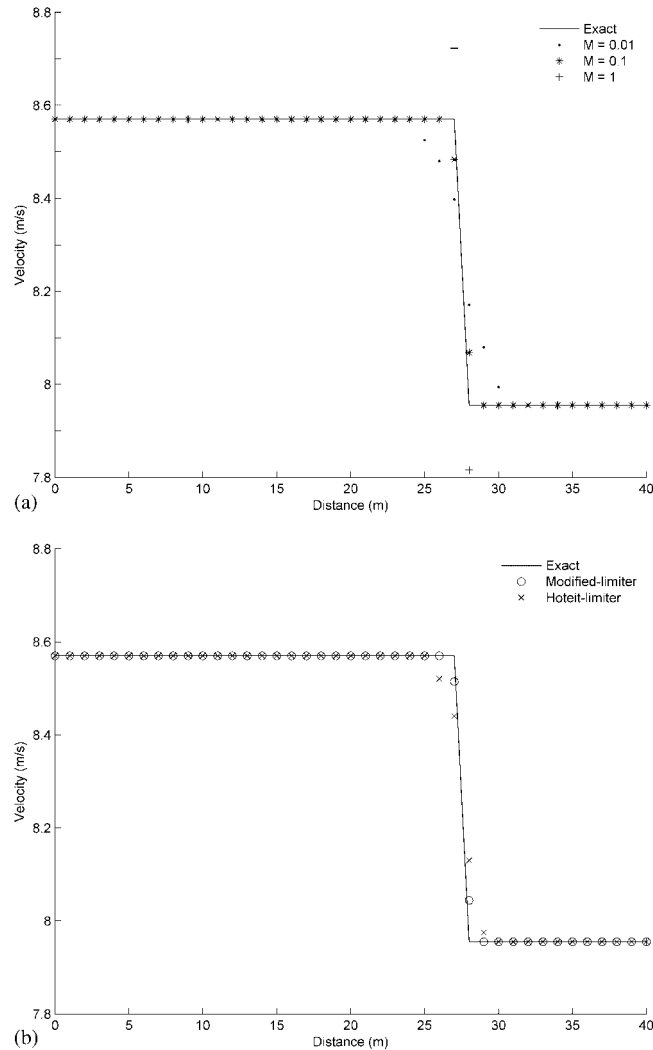


Figure 7. Comparison of the velocity profiles along the longitudinal section line ('CD' shown in Figure 5): (a) Cockburn and Shu's slope limiter and (b) Hoteit's slope limiter and the modified slope limiter.

For Cockburn and Shu's slope limiter, the constant parameter M is difficult to choose in order to obtain good results. In this example, we can see that Cockburn and Shu's slope limiter does not give good results for $M=0.1$ as in the above examples. The high order of the scheme is not preserved in the discontinuity regions. It is also quite the same case for the slope limiter of Hoteit *et al.* For $M=1$, the results obtained by Cockburn and Shu's slope limiter are very close to the analytical solution to the problem. The slope limiter eliminates oscillations near discontinuities and preserves the high-order accuracy of the scheme. By choosing M too large ($M=2$), oscillations appear in the discontinuity regions. The results obtained by the modified slope limiter are also in

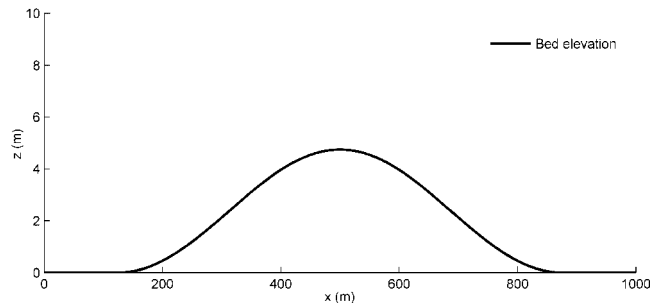


Figure 8. Concave bed of the channel.

good agreement with the analytical solution. The advantage of this modified slope limiter is that it gives high-order accuracy and does not require the estimation of any constant number.

5.4. Test case 4: dam break in a converging–diverging channel

In this example, a dam break wave propagation through a channel constriction is studied. The advancing front is partially reflected by the walls of the contraction producing a smooth front downstream of the channel. Subcritical and supercritical flows are produced along the channel. The geometry of the model is detailed in Figure 10. It consists of a rectangular channel (19.3 m long, 0.5 m wide). The dam is located 6.1 m downstream of the first section of the channel. The first constriction section is situated 7.7 m downstream of the dam. The constriction is 1 m long and 0.1 m wide and forms a 45° angle with the channel walls. The bottom is flat.

Initial conditions are still water steady state with 0.3 m water depth upstream the dam and 0.25 m downstream. Boundary conditions are solid walls except at the outlet that is considered free. Manning coefficient is 0.01. The mesh uses 10 578 triangular cells.

Figure 11 shows the comparison between the experimental data and the numerical results of the water depth time evolution during 10 s at the three gauging points S_1 , S_2 and S_3 . As shown in Figure 10, S_1 is situated before the constriction and we will see the arrival of the dam break front and the reflected front produced in the walls of the constriction. S_2 is at the middle of the constriction and there we can only see the arrival of a smoother front and finally S_3 is after the constriction. The relative errors in L_2 norm between the results obtained by the different slope limiters and the experimental data are listed in Table IV.

According to Figure 11, the slope limiter of Cockburn and Shu is not able to deal with strong discontinuities for a small value of M ($M=0.1$) and the high order of the scheme is not preserved. By choosing $M=1$, we find that the results are in good agreement with the experimental data. For large value of M ($M=2$), oscillations appear in the discontinuity regions. However, the modified slope limiter gives the best agreement compared with the experimental data. It is clear that the results obtained by the modified slope limiter are also close to those obtained by Cockburn and Shu's slope limiter for the value of M equal to 1, but as said previously, the advantage of this limiter is that it avoids the difficulty of choosing the constant parameter M . The slope limiter of Hoteit *et al.* eliminates oscillations without preserving the high-order accuracy of the scheme as the modified slope limiter does.

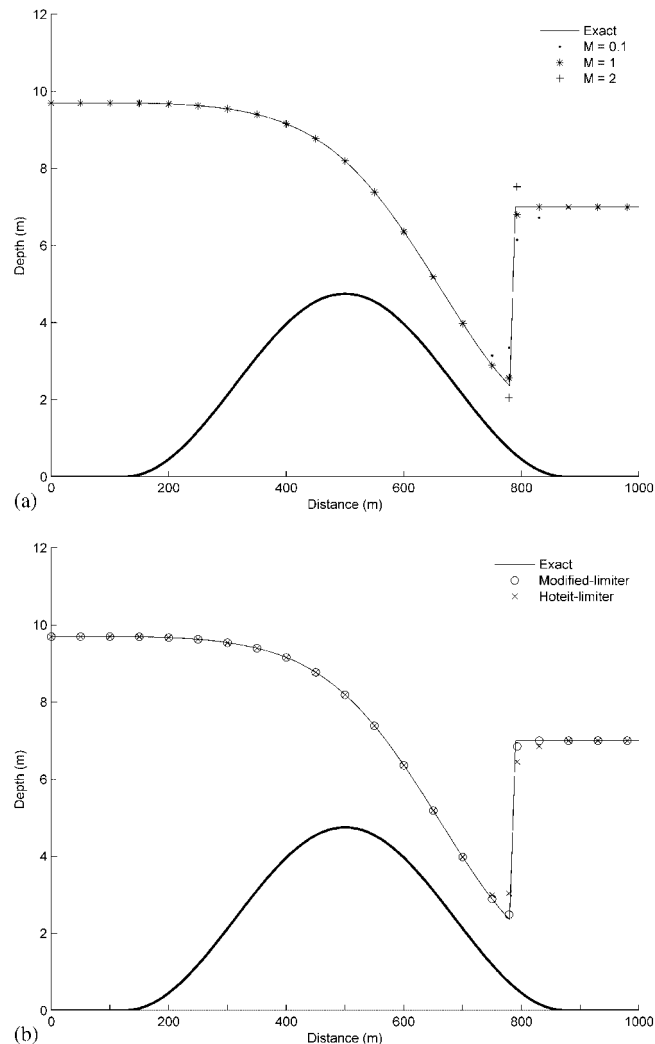


Figure 9. Comparison between the analytical solution and the numerical solution of the water depth: (a) Cockburn and Shu's slope limiter and (b) Hoteit's slope limiter and the modified slope limiter.

Table III. Test case 3: L_2 relative errors of water depth.

Slope limiter	L_2 error in %
Cockburn's limiter ($M=0.1$)	3.68
Cockburn's limiter ($M=1$)	0.77
Cockburn's limiter ($M=2$)	1.63
Hoteit's limiter	2.42
Modified limiter	0.54

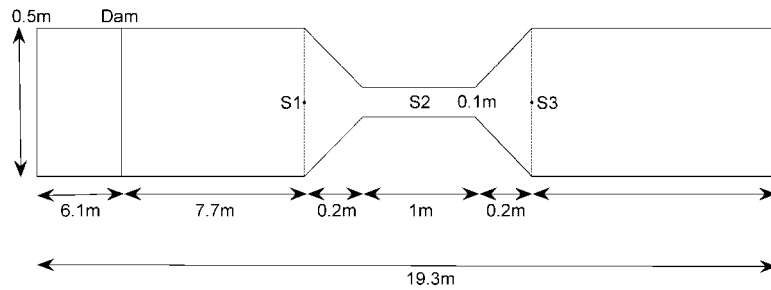


Figure 10. Geometry of the physical model.

Table IV. Test case 4: L_2 relative errors of water depth at the three gauging points S_1 , S_2 and S_3 .

Slope limiter	L_2 error in %		
	S_1	S_2	S_3
Cockburn's limiter ($M=0.1$)	3.26	3.31	1.39
Cockburn's limiter ($M=1$)	0.93	0.88	0.46
Cockburn's limiter ($M=2$)	1.29	1.48	1.48
Hoteit's limiter	2.19	2.45	1.08
Modified limiter	0.65	0.76	0.34

6. CONCLUSION

In this paper, two existing slope limiters for a two-dimensional, high-order RKDG method on unstructured triangular meshes (Cockburn's slope limiter and Hoteit's slope limiter) are described. The disadvantage of these slope limiters is that the limiter condition depends on a constant number. The choice of this number is sometimes not simple to completely eliminate oscillations near discontinuities and preserve the high-order accuracy of the scheme. A simple modification of Cockburn's slope limiter is introduced to avoid the use of this number. Therefore, the limiter condition depends only on the neighboring solution averages. Four hydraulic problems of discontinuous solutions of two-dimensional shallow water are solved by the RKDG method with the different slope limiters quoted above. Verifications of all the numerical results are made by comparison with analytical solutions or experimental data. Based on solving the idealized dam break problem, the oblique hydraulic jump problem, flow in a channel with concave bed and the dam break problem in a converging-diverging channel, it can be concluded that the results of the different slope limiters perform almost well in the regions where the solution is smooth but a remarkable difference in accuracy is exhibited between these limiters in the discontinuity regions. On the other hand, it is not easy to choose the constant number needed in the limitation for Cockburn and Shu's slope limiter in order to obtain good results. We have seen that this limiter and the modified slope limiter perform equally well for such specific value of M . However, if M is chosen too small, Cockburn and Shu's slope limiter eliminates oscillations without preserving the high-order accuracy of the scheme; however, if M is chosen too large, oscillations will appear. In the meantime, the presented modified slope limiter gives almost the best results, avoids all oscillations and preserves the

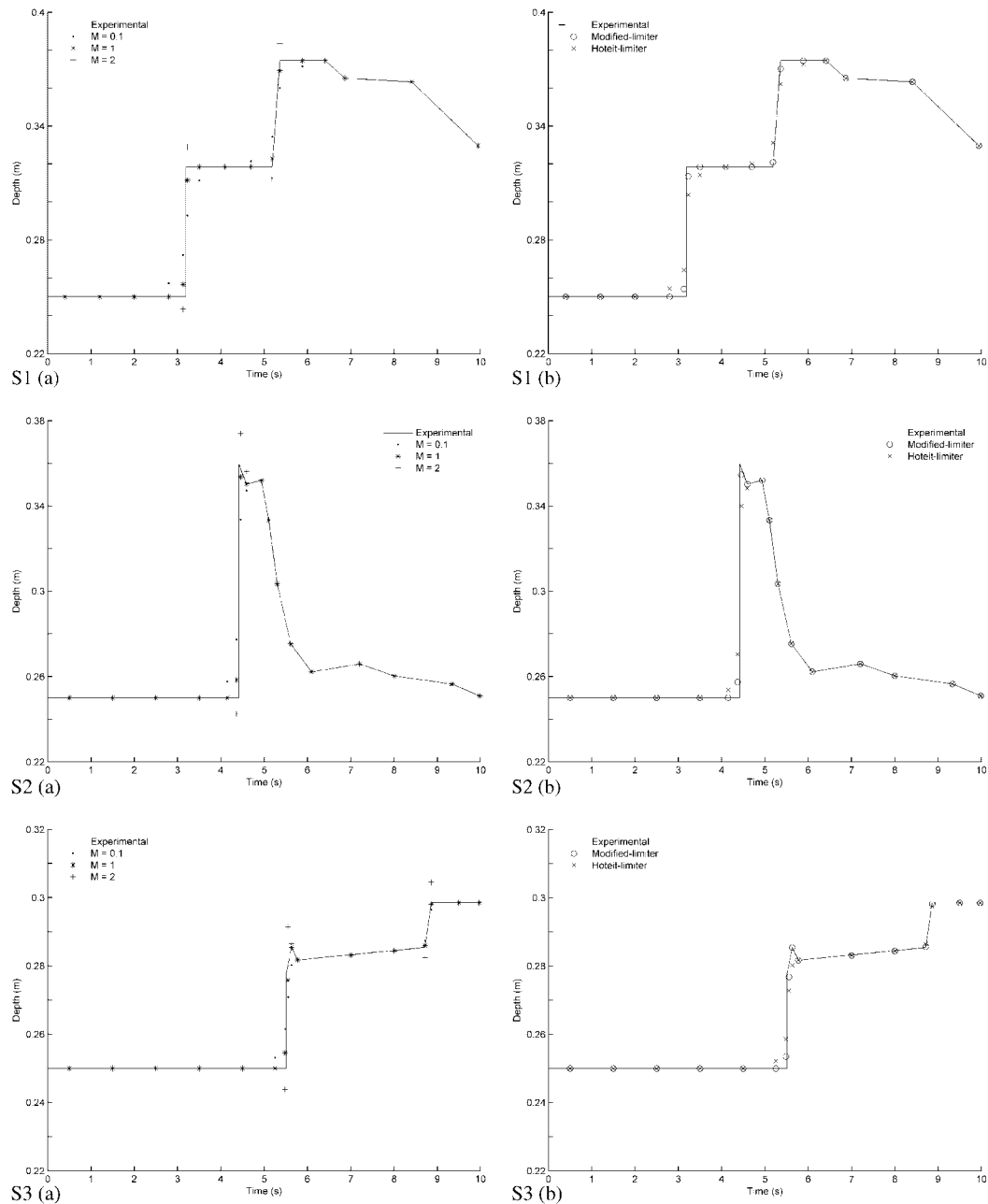


Figure 11. Comparison between the experimental data and the numerical results on the time evolution during 10 s of the water depth at the gauging points S1, S2 and S3: (a) Cockburn and Shu's slope limiter and (b) Hoteit's slope limiter and the modified slope limiter.

high-order accuracy of the scheme. Moreover, it avoids the difficulty of choosing a specific constant for the limitation, as it is the case with the other slope limiters.

REFERENCES

1. Cockburn B, Hou S, Shu CW. TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one-dimensional systems. *Journal of Computational Physics* 1989; **84**:90–113.
2. Cockburn B, Shu CW. The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservative laws V: multidimensional systems. *Journal of Computational Physics* 1998; **141**:199–224.
3. Kessewani G, Ghostine R, Vazquez J, Ghenaim A, Mosé R. Application of a second-order Runge–Kutta discontinuous Galerkin scheme for the shallow water equations with source terms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2008; **56**:805–821.
4. Schwanenberg D, Harms M. Discontinuous Galerkin finite-element method for transcritical two-dimensional shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering* 2004; **130**(5):412–421.
5. Goodman J, LeVeque R. On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws. *Mathematics of Computation* 1985; **45**:15–21.
6. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics* 1983; **49**:357–393.
7. Harten A, Hyman J, Lax P. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 1976; **29**:297–322.
8. Godunov S. Finite difference methods for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mathematics of the USSR—Sbornik* 1959; **47**:271–306.
9. Van Leer B. Towards the ultimate conservative scheme: II. *Journal of Computational Physics* 1974; **14**:361–376.
10. Van Leer B. Towards the ultimate conservative scheme: IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics* 1977; **23**:276–299.
11. Van Leer B. Towards the ultimate conservative scheme: V. A second order Godunov's method. *Journal of Computational Physics* 1979; **32**:101–136.
12. Hirsh C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Wiley Interscience: New York, 1990.
13. Toro E. *Riemann solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer: Berlin, 1997.
14. Cockburn B, Shu CW. TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework. *Mathematics of Computation* 1989; **52**:411–435.
15. Shu CW. TVB uniformly high order schemes for conservation laws. *Mathematics of Computation* 1987; **49**:105–121.
16. Hoteit H. Simulation d'écoulements et de transports de polluants en milieu poreux: Application à la modélisation de la sureté des dépôts de déchets radioactifs. *Thesis*, Rennes University, France, 2002.
17. Hoteit H, Ackerer Ph, Mosé R, Erhel J, Philippe B. New two-dimensional slope limiters for discontinuous Galerkin methods on arbitrary meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2004; **61**(14):2566–2593.
18. Chavent G, Jaffré J. *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*. Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier: Amsterdam, 1986.
19. Schwanenberg D. Die Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methode zur Lösung konvektionsdominierter tiefengemittelter Flachwasserprobleme. *Thesis*, Aachen University, Germany, 2003.
20. Alcrudo F, Garcia-Navarro P. A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1993; **16**:489–505.
21. Garcia-Navarro P, Alcrudo F, Saviron JM. 1-D open channel flow simulation using TVD–MacCormack scheme. *Journal of Hydraulic Engineering* 1992; **118**:1359–1372.



Simulation of supercritical flow in crossroads: Confrontation of a 2D and 3D numerical approaches to experimental results

Rabih Ghostine^{a,*}, Georges Kesserwani^a, José Vazquez^a, Nicolas Rivière^b, Abdellah Ghenaïm^c, Robert Mose^a

^a U.P.R. Systèmes Hydrauliques Urbains, Ecole Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg, 1 quai Koch BP 61039 F, 67070 Strasbourg cedex, France

^b INSA-Lyon, LMFA, Bat Jacquard, 20 av. A. Einstein, 69621 Villeurbanne, France

^c INSA-Strasbourg, Institut National des Sciences Appliquées, 24 boulevard de la Victoire, 67084 Strasbourg cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 9 January 2008

Received in revised form 17 May 2008

Accepted 19 May 2008

Available online 18 July 2008

ABSTRACT

This work deals with the modeling of a flood in an urban environment. Among the various types of urban flood events, it was decided to study specifically the severe surface flooding events, which take place in highly urbanized areas. This work concerns particularly the numerical resolution of the two-dimensional Saint Venant equations for the study of the propagation of flood through the crossroads in the city. A discontinuous finite-element space discretization with a second-order Runge–Kutta time discretization is used to solve the two-dimensional Saint Venant equations. The scheme is well suited to handle complicated geometries and requires a simple treatment of boundary conditions and source terms to obtain high-order accuracy. The explicit time integration, together with the use of orthogonal shape functions, makes the method for the investigated flows computationally more efficient than comparable second-order finite volume methods. The scheme is applied to several supercritical flows in crossroads, which are investigated by Mignot. The experimental results obtained by the author are used to verify the accuracy and the robustness of the method. The results obtained are compared to those obtained by a second-order finite volume method (Rubar20 (2D)) and by FLUENT (3D). A very good agreement between the numerical solution obtained by the Runge–Kutta discontinuous Galerkin (RKDG) method and the experimental measured data were found. The method is then able to simulate the flow patterns observed experimentally and able to predict well the water depths, the discharge distribution in the downstream branches of the crossroad and the location of the hydraulic jumps and other flow characteristics more than the other methods.

© 2008 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

As population and urbanization processes rapidly increase, more and more people and properties are being concentrated in floodplains, which results in the decreasing capacities of transportation and the adjustment of rivers. In addition, over-exploitation of natural resources has brought about imbalances originally existing among the environmental, ecological and other resources. As a result, abnormal weather conditions occur leading to the emergence of natural disasters varying not only in their frequencies but also in their scales. As for the severity of flooding, Berz [2] gave us general ideas in his worldwide statistic reports of natural disasters in recent years. He reports that the number of flooding that occurred from 1990 to 1998 had been more than the total from 1950 to 1985; that economic losses increased more than seven times reaching 199.6 billion US dollars, in which China suffered 31.0 billion US dollars in losses due to the flooding in 1998; and

that people who died from catastrophic flood numbered approximately 230 thousands.

It is very important to know the inundated water depths and velocities for flood control and damage mitigation. Through an analysis of the characteristics of flooding waves, we can find out that area of flooding is generally much larger than the inundated water depth, that the variations of flooding waves in the vertical direction can be ignored, and that the water pressure is hydrostatic, i.e., the flooding wave has the characteristics of shallow water waves [19]. Therefore, 2D shallow water equations were used to describe the transportation of flooding waves in the temporal and in the spatial domains.

In general, numerical simulations of 2D shallow water equations can be carried out by the following four methods: (1) finite-element method [1]; (2) finite difference method [4] and [6]; (3) characteristic method [10]; and (4) finite volume method [22–25]. The finite volume method is widely used to solve the 2D shallow water equations and to simulate the flood in an urban environment. Recently, Mignot [12] used the code Rubar20 (2D) developed by Paquier [14] for modeling the flood in urban area.

* Corresponding author. Tel.: +33 3 88248272.

E-mail address: rabih.ghostine@engees.u-strasbg.fr (R. Ghostine).

Nomenclature

\tilde{A}	flux Jacobian	n	unit vector outward to the boundary
a	eigenvalue of the flux Jacobian	n_M	Manning's roughness coefficient
B	channel width	P^k	space of the polynomials of degree k
b	barycenter of a triangle	Q	flow discharge
c	wave celerity	R^-, R^+	Riemann invariants
CFL	Courant number	S	vector of source terms
dt	time step	S_{fx}, S_{fy}	friction slope in the x and y direction
(E, G)	flux vector	S_{0x}, S_{0y}	bed slope in the x and y direction
E_{QT}, E_{QXY}	estimators of quality	T	matrix of right eigenvectors
g	gravity acceleration	t	time
h	water depth	U	vector of conserved variables
K	triangle	(u, v)	velocity in the x and y direction
k	order of shape function	u_h	linear function
L	channel length	V	space of solutions
l	length of an edge	v_h	arbitrary smooth test function
L_h	operator of spatial discretization	(x, y)	Cartesian coordinates
M	element mass matrix	α_1, α_2	non-negative parameters
M	total variation bounded parameter	φ_i	element shape function
m	minmod function	Γ	boundary of the finite element
m	midpoint on an edge	$\mathcal{A}[\cdot]_h$	slope limiting operator
\tilde{m}	total variation bounded corrected minmod function	Ω	field of calculation

The code is based on a finite volume method on unstructured grid and uses an explicit scheme of Van Leer with second-order accuracy in time and space.

Schwanenberg and Harms [15] were the first who applied the Runge–Kutta discontinuous Galerkin (RKDG) method on the shallow water equations. The authors studied especially different dam break problems and flow in channel contraction. The authors did not test the method for hydraulic problems with oblique jumps and discharge distribution. The method retains the advantages of the finite-element method, e.g., easy implementation of boundary conditions and source terms. Based on comparisons with unstructured 2D grids, the high-order RKDG methods are at least as efficient as the state-of-the-art finite volume schemes [16]. Recently, Xing and Shu [20,21] developed a well-balanced high-order discontinuous Galerkin method for solving hyperbolic systems, which is non-oscillatory, well-balanced (satisfying the exact C-property) for still water, and genuinely high order in smooth regions. Typical example considered extensively in the literature for balance laws is the shallow water equations with a non-flat bottom topology. In our work, the bottom topology is flat and does not require a special treatment in order to have a well-balanced scheme. Therefore, traditional RKDG method gives very good results.

Concerning the 3D simulation, many codes exist, which solve the Reynolds-averaged Navier–Stokes (RANS) equations. The most classical approach for this kind of codes is a 3D finite volume method associated with a $k - \varepsilon$ turbulence model [11,17]. In our work, the code FLUENT [5] is used with a calculation of the free surface by the volume of fluid (VOF) model [18].

In this paper, we present the RKDG method in order to study the propagation of flood through the crossroads in the city. The study is organized around three aspects: the prediction of the water depths, the location of the right and oblique hydraulic jumps in the crossing and especially the distribution of the flow discharges in the downstream branches. The idea is to compare a very complicated 3D model, which takes into account more variables (pressure and turbulence model for examples) with a 2D approach and to show that we can obtain very good results with a 2D approach based on the RKDG method. Therefore, a comparison between the results obtained by this RKDG model and those obtained by a

comparable second-order finite volume method Rubar20 (2D model) and by FLUENT (3D model) is also done. The experimental results obtained by Mignot [12] are used to compare and validate the different calculations.

2. Mathematical model

The two-dimensional depth integrated shallow water equations are obtained by integrating the Navier–Stokes equations over the flow depth with the following assumptions: uniform velocity distribution in the vertical direction, incompressible fluid, hydrostatic pressure distribution, and small bottom slope. The continuity and momentum equations are

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S, \quad (1)$$

in which

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix},$$

and

$$S = S_0 + S_f = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{0x} \\ ghS_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix} \text{ is the source term,}$$

where u and v are the velocity components in the x and y directions, respectively; h is the water depth; g is the acceleration due to gravity; (S_{0x}, S_{0y}) are the bed slopes in the x and y directions, and (S_{fx}, S_{fy}) are the friction slopes in the x and y directions, respectively. In this study, the friction slopes are estimated by using the Manning's formula:

$$S_{fx} = \frac{n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}},$$

where n_M is the Manning's roughness coefficient. In our work, as we are in a rough turbulent flow, the viscosity (turbulence) and the bed roughness are approximated by the empirical Manning formula with Manning's roughness coefficient n_M .

3. Numerical approximation

We consider a finite-element discretization of the field of calculation $\Omega = \bigcup_{i=1}^M K_i$ where K_i is a triangle. We describe the space and temporal approximations below, and the results of stability.

3.1. Space discretization

Let $V = L^2(\Omega \times [0, \infty])$ be the space of the solutions of Eq. (1), and let the approximate space $V_h^k \subset V$ defined by

$$V_h^k = \{v \in V / v|_{T_i} \in P^k\},$$

where P^k is the space of the polynomials of degree k ($k = 1, 2, \dots$). Consequently, the solutions v are discontinuous from a triangle to another. Subsequently, we will fix $k = 1$. In order to build a solution $U_h \in V_h^1$, we multiply Eq. (1) by a test function $v_h(x, y) \in V_h^1$, and we integrate on each triangle K . The obtained system is written for $U_h = U/K$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K U_h(x, y, t) v_h(x, y) dK + \int_K \nabla F(U_h(x, y, t)) v_h(x, y) dK \\ = \int_K S(U_h(x, y, t)) v_h(x, y) dK, \end{aligned} \quad (2)$$

where $F = (E, G)$ and after integration by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K U_h(x, y, t) v_h(x, y) dK = \int_K F(U_h(x, y, t)) \cdot \nabla v_h(x, y) dK \\ - \int_{\partial K} F(U_h(x, y, t)) \cdot n_k v_h(x, y) d\Gamma \\ + \int_K S(U_h(x, y, t)) v_h(x, y) dK. \end{aligned} \quad (3)$$

Here $n_k = (n_x, n_y)$ is the unit vector outward normal to the element boundary Γ of the finite element K .

The approximated variable U_h can be expressed as a sum over the products of discrete variables U_i and shape functions φ_i ,

$$U_h(x, y) = \sum_i U_i \varphi_i(x, y). \quad (4)$$

Using the standard Galerkin approach, shape functions and test functions are identical. Rewriting Eq. (3), the discontinuous Galerkin space discretization can be summarized by a system of ordinary differential equations as

$$\frac{d}{dt} M U_h = L_h U_h, \quad (5)$$

where M is the mass matrix and L_h is an operator describing the spatial discretization.

By using orthogonal shape functions, the mass matrix M in the linear equation system (5) becomes diagonal. For triangular elements, a linear shape function can be obtained by choosing a function that takes the value of 1 at the midpoint m_i of the i th edge of a triangle, and the value of 0 at the midpoints of the other two edges. Thus, the diagonal mass matrix can be expressed as follows:

$$M = |K| \text{diag} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \quad (6)$$

The integrals are approximated by a three-midpoint rule for the triangles and a two-point Gauss integration for the line integrals.

3.2. Numerical flux

The approximation of the numerical flux for the RKDG method is identical to the approximated solution of a Riemann problem according to finite volume methods. By using linear or higher sub-cell resolution for higher-order RKDG methods, the scheme gets

less sensitivity to the choice of the numerical flux than the Godunov type methods [8]. In that case, a simple Lax–Friedrich flux gives good results.

$$F(U_L, U_R) \cdot n = \frac{1}{2} [(F(U_L) + F(U_R)) \cdot n - a_{\max}(U_R - U_L)], \quad (7)$$

where $a_{\max} = \max(|a^1|, |a^2|, |a^3|)$, and a^k ($k = 1, \dots, 3$) are the eigenvalues of the Jacobian matrix

$$\tilde{A} = \frac{\partial(F \cdot n)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ (c^2 - u^2)n_y - uvn_x & vn_x & un_x + 2vn_y \end{bmatrix}$$

and $c = \sqrt{gh}$ is the wave celerity.

3.3. Time integration

The second-order accurate two-stage TVD Runge–Kutta schemes of Cockburn and Shu [3] is employed in this work. An optimal second-order TVD Runge–Kutta method is given by

$$\begin{aligned} U_h^1 &= U_h^n + dt \cdot L_{h,U}(U_h^n), \\ U_h^{n+1} &= \frac{1}{2} (U_h^n + U_h^1 + dt \cdot L_{h,U}(U_h^1)). \end{aligned} \quad (8)$$

Since the TVD Runge–Kutta method is an explicit scheme, the time step dt must be selected based on the Courant Friedrich Lewy stability criterion. The maximum allowable time step is limited in this paper by the following:

$$dt = \text{CFL} \frac{|K|}{\sum_{j=1}^3 l_j \min(u \cdot n_x + v \cdot n_y - c, 0)}, \quad (9)$$

where l_j is the length of the edge of the cell K and $0 < \text{CFL} \leq 1$ is the Courant number.

4. Slope limiter

By using constant approximations by triangle, the RKDG method is reduced to the finite volume method on unstructured grids and to the finite difference method of Godunov [8] on structured grids. The discontinuous finite-element method of a higher order in space produces non-physical oscillations. In this work, we concentrate on the limiting presented by Cockburn and Shu [3].

To describe the limiter, we use the same notations as in Cockburn and Shu [3]. For an arbitrary triangle K_0 and its surrounding neighbors K_i , $i = 1, \dots, 3$, the notations b_i , $i = 0, \dots, 3$ and m_i , $i = 1, \dots, 3$ refer respectively to the barycenters of the triangles and the midpoints of the edges within K_0 (see Fig. 1).

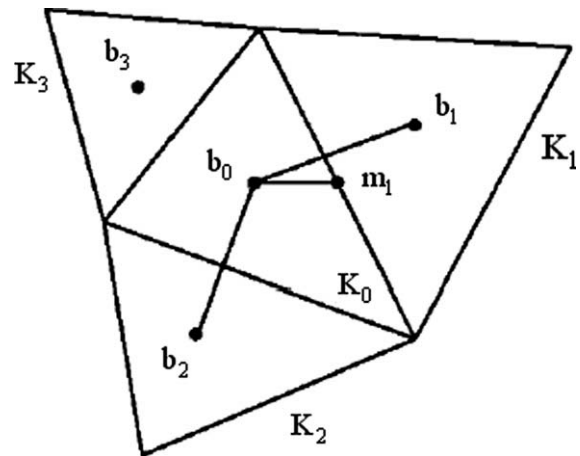


Fig. 1. Slope limiting for triangular elements.

Choosing any edge midpoint m_1 , we get

$$m_1 - b_0 = \alpha_1(b_1 - b_0) + \alpha_2(b_2 - b_0), \quad \text{for some } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^2. \quad (10)$$

Then, for any linear function u_h , we can write

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(m_1, K_0) &= u_h(m_1) - u_h(b_0) \\ &\equiv \alpha_1(u_h(b_1) - u_h(b_0)) + \alpha_2(u_h(b_2) - u_h(b_0)) \\ &= \Delta \tilde{u}(m_i, K_0). \end{aligned} \quad (11)$$

To describe the slope limiting operator $\mathcal{A}[\Pi]h$, we consider any piecewise linear function u_h . By using the basis functions ϕ_i , u_h can be expressed over K_0 as follows:

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_h(m_i) \phi_i(x, y) = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 \tilde{u}(m_i, K_0) \phi_i(x, y). \quad (12)$$

First, we compute the quantities:

$$\Delta_i = \tilde{m}(\tilde{u}_h(m_i, K_0), v \Delta \tilde{u}(m_i, K_0)), \quad \text{for some } v > 1, \quad (13)$$

where \tilde{m} is the TVB minmod function defined as follows:

$$\tilde{m}(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_1| \leq M(\Delta x)^2, \\ m(a_1, a_2) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (14)$$

where M is a given positive constant; and m is the minmod function, defined as follows:

$$m(a_1, a_2) = \begin{cases} s \min_{1 \leq n \leq 2} |a_n| & \text{if } s = \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

Consequently, reconstruction is carried out according to the following two cases:

1. If $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$, we set:

$$\mathcal{A} \prod_h u_h = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \phi_i(x, y). \quad (16)$$

2. If $\sum_{i=1}^3 \Delta_i \neq 0$, we compute:

$$pos = \sum_{i=1}^3 \max(0, \Delta_i), \quad neg = \sum_{i=1}^3 \max(0, -\Delta_i) \quad (17)$$

and define:

$$\theta^+ = \min\left(1, \frac{neg}{pos}\right), \quad \theta^- = \min\left(1, \frac{pos}{neg}\right). \quad (18)$$

Finally, we set:

$$\mathcal{A} \prod_h u_h = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 \hat{\Delta}_i \phi_i(x, y), \quad (19)$$

where

$$\hat{\Delta}_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i). \quad (20)$$

Since the shallow water equations are a system of equations, the limiting must be performed in the local characteristic variables in the direction of the vector $m_1 - b_0$. The variables are therefore transformed by T^{-1} into the characteristic space, where T is the matrix of right eigenvectors of the following Jacobian

$$\partial_U(E(U(b_0)), G(U(b_0))) \cdot \frac{m_i - b_0}{|m_i - b_0|}. \quad (21)$$

5. Boundary conditions

Boundary conditions are imposed at the face of the cell and the values of the conserved variables at the face are extrapolated from the cell center. According to the theory of characteristics [9], the Riemann invariants of the one-dimensional shallow water equations are

$$R^- = u + 2c, \quad R^+ = u - 2c, \quad (22)$$

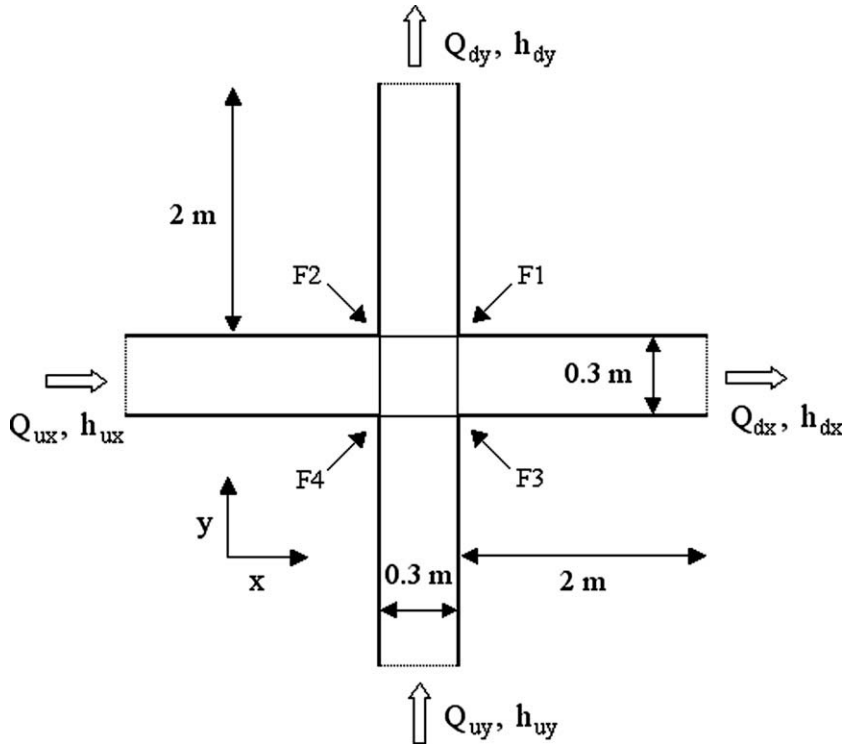


Fig. 2. Schematic layout of the crossroad.

which are conserved along $dx/dt = u + c$ and $dx/dt = u + c$, respectively, when the contribution of the source terms are neglected. R^- and R^+ denote the state to the right and left of a face, respectively. Since the right side of a boundary is outside the domain, the R^- condition is replaced by the boundary condition itself. For two-dimensional shallow water equations the R^+ condition is given as

$$(u, v)_L \cdot n + 2\sqrt{gh}_L = (u, v)_* \cdot n + 2\sqrt{gh_*}, \quad (23)$$

where the subscripts $*$ and L denote the variables at the boundary and the left side, respectively. Eq. (23) is combined with the boundary condition to compute the normal flux at the boundary. The normal flux at the boundary is given as

$$F^* \cdot n = \begin{pmatrix} h_*(u, v)_* \cdot n \\ h_* u_*(u, v)_* \cdot n + \frac{1}{2} gh_*^2 n_x \\ h_* v_*(u, v)_* \cdot n + \frac{1}{2} gh_*^2 n_y \end{pmatrix}. \quad (24)$$

According to the theory of characteristics [9], two boundary conditions are needed when the flow regime is subcritical. For a subcritical flow, a boundary condition is imposed in the form of flow depth, unit discharge, or velocity.

In the case of a depth boundary condition, h^* is given and $(u, v)^* \cdot n$ is computed directly from Eq. (23).

In the case of a velocity boundary condition, $(u, v)^* \cdot n$ is given and h^* is computed by modifying Eq. (23).

Finally, the normal flux in Eq. (24) can be computed by using h^* , u^* and v^* .

In the case of a supercritical flow, three boundary conditions are needed, so that h^* , u^* and v^* are directly given and the normal flux is readily obtained.

In the case of free outfall condition, which makes waves pass the boundary without reflection, all physical variables h^* , u^* and v^* at the boundary face are the same as the internal variables.

A free slip condition is applied at the solid boundary, i.e., the normal velocity component at the face is set to zero.

$$(u, v)_* \cdot n = 0 \quad (25)$$

and h^* is computed by using Eq. (23).

6. Numerical results and discussion

In this section, the experimental results obtained by Mignot [12] are used to verify the accuracy and the robustness of the RKDG method to simulate supercritical flow in crossroads. In addition, a comparison between the results obtained by the method and those obtained by Rubar20 and FLUENT is done.

We consider a system including four identical branches of the same width $B = 0.3$ m and length $L = 2$ m (two entries and two exits) as indicated in Fig. 2. Q_{ux} , Q_{uy} , h_{ux} and h_{uy} are the flow discharges and the water depths at the upstream branches, respectively. Q_{dx} , Q_{dy} , h_{dx} and h_{dy} are the flow discharges and the water depths at the downstream branches, respectively.

Due to the slopes and the experimental fixed flow discharges, the uniform flows are in supercritical mode and should remain it until the ends of the downstream branches if any singularity was introduced. However, by reaching the junction, the two flows meet and deviate suddenly each other compared to their initial direction creating two hydraulic jumps which can be oblique and confined in the junction or right and can be located in the upstream branches. Zones of recirculation appear within each of the two downstream branches. In addition, gravitational waves appear in the downstream branches and reflect on the walls of the output branches until the end of these branches. Several forms of flow can appear according to the slopes and of the flow discharges used.

These flows can be separate in three types already indexed by Gis-sonni and Hager [7] in junctions of conduits. Concerning junctions at open channels, only two types were observed by Nania et al. [13]. The three types are named Type I, Type II and Type III in Fig. 3.

Type I corresponds to a flow with a right hydraulic jump within each upstream branch (Fig. 3a). The flows, which are in supercritical mode at the entry of the system, pass then in subcritical mode within the input branches. The flow within the junction is subcritical but the flows tend to find the supercritical mode within the downstream branches.

Type II corresponds to a flow for which a right hydraulic jump takes place in the upstream branch minority and an oblique hydraulic jump takes place within the junction

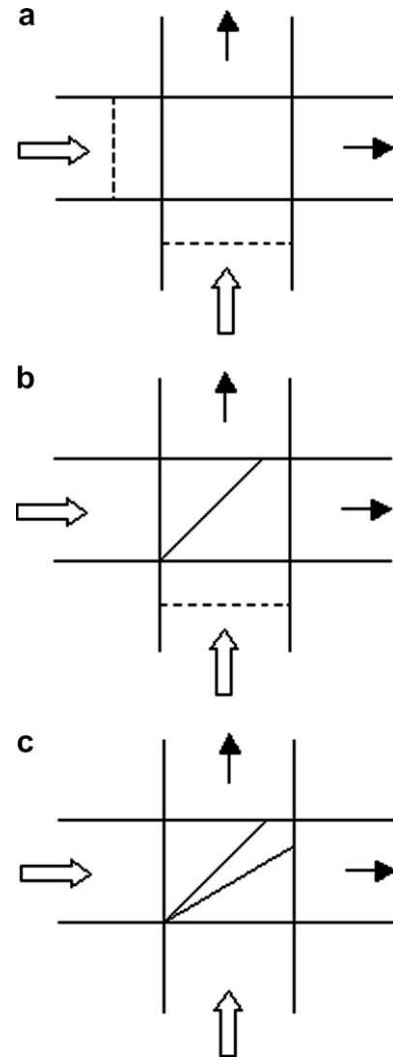


Fig. 3. Presentation of Type I (a), Type II (b) and Type III (c).

Table 1
Characteristics of the three types of flow

	Q_{ux} (l/s)	h_{ux} (cm)	Q_{uy} (l/s)	h_{uy} (cm)	Slopes of the branches [%]
Type I	4.52	1.99	1.96	1.19	1
Type II.1	4.98	1.16	1.99	0.66	5
Type II.2	5.11	1.15	1.01	0.44	5
Type III	5.02	1.15	3.99	1.00	5

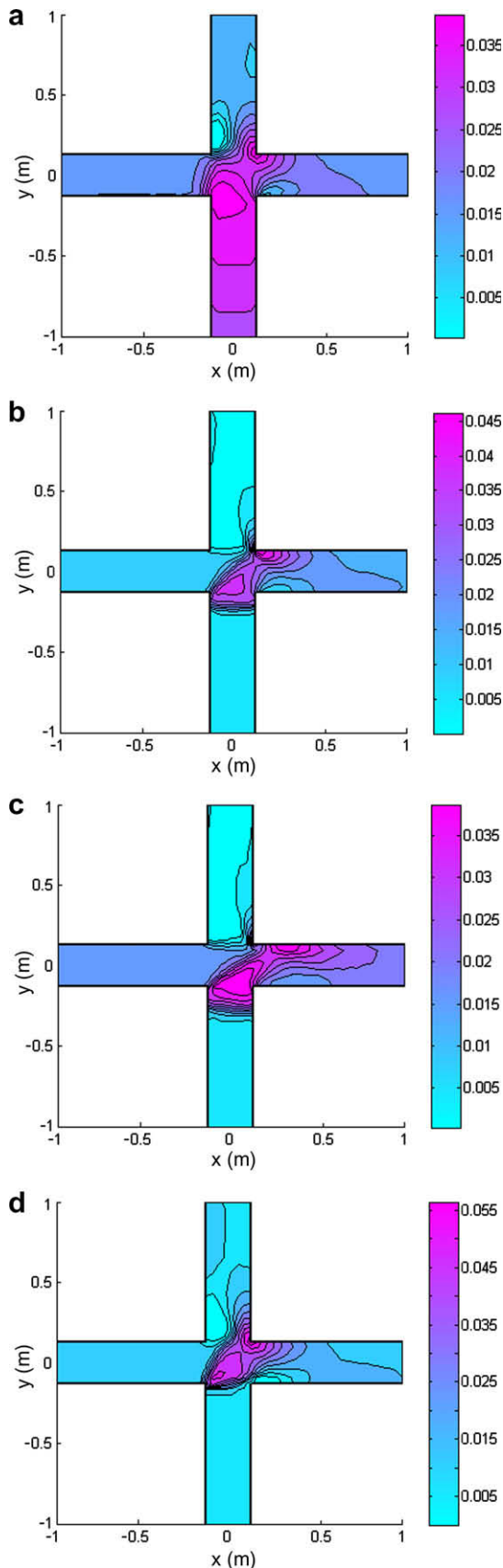


Fig. 4. Contour plots of water depth calculated by the RKDG method: (a) Type I; (b) Type II.1; (c) Type II.2; (d) Type III.

(Fig. 3b). Thus, the majority flow reaches the junction in supercritical mode whereas the minority flow reaches the junction in subcritical mode. At the downstream of the oblique hydraulic jumps, the majority flow generally remains in supercritical mode but can become subcritical according to the deviation and the upstream Froude number. In the downstream branches, the two flows tend to become again supercritical.

Type III is a type of flow for which two oblique hydraulic jumps appear in the junction. The two upstream flows reach the junction in supercritical mode and two oblique hydraulic jumps appear there (Fig. 3c). The flows at the downstream of these jumps remain generally supercritical.

The characteristics of these flows are presented in Table 1.

The three types of flow are calculated numerically using the RKDG method on 1920 cells, the finite volume method (Rubar20) on 2740 cells and FLUENT (3D) on 52,560 cells. The study is organized around three aspects: the prediction of the water depths, the location of the right and oblique hydraulic jumps in the crossing and especially the distribution of the flow discharges in the downstream branches.

Fig. 4 presents the contour of the water depth calculated by the RKDG method for the three types quoted above. The comparisons of water surface profiles along the longitudinal section lines

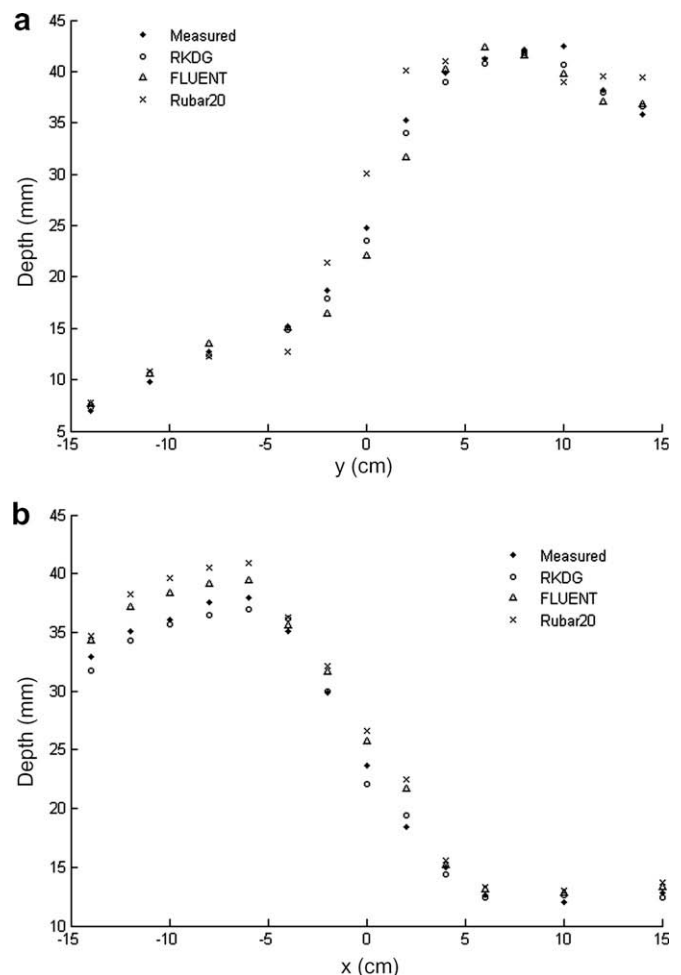


Fig. 5. Water surface profiles along the longitudinal section lines for the Type II.1: (a) $x = 0$; (b) $y = 0$.

('x = 0' and 'y = 0') for the Type II.1, Type II.2 and Type III are presented in Figs. 5–7, respectively. The L^2 errors norm for the water depths are shown in Table 2.

According to Figs. 5–7, the water depth predicted by the RKDG method and the location of the hydraulic jump are in close agreement with the experimental results obtained by Mignot [12]. The figures demonstrate excellent applicability of the method on supercritical flow in crossroads.

Concerning the flow discharges, the differences in the distribution of the flow discharges in the downstream branches between measured and predicted values are presented in Table 3. For a more accurate study of the distribution of the flow discharges in the downstream branches, we introduce two estimators of quality E_{QT} and E_{QXY} defined as follows:

$$E_{QT} = \frac{Q_{dx} - Q_{dxm}}{Q_t}, \quad (26)$$

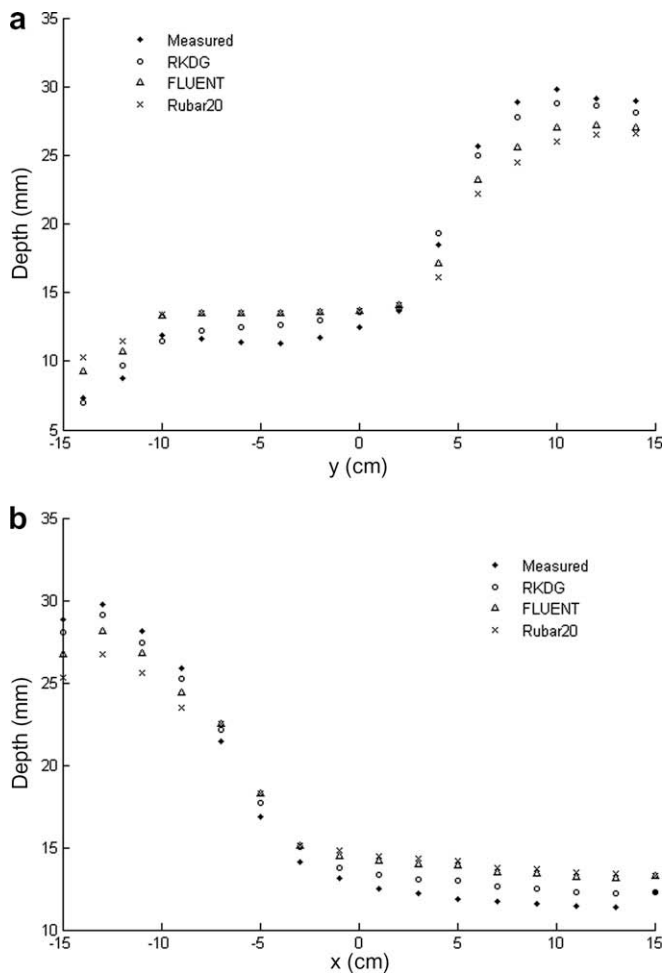


Fig. 6. Water surface profiles along the longitudinal section lines for the Type II.2: (a) $x = 0$; (b) $y = 0$.

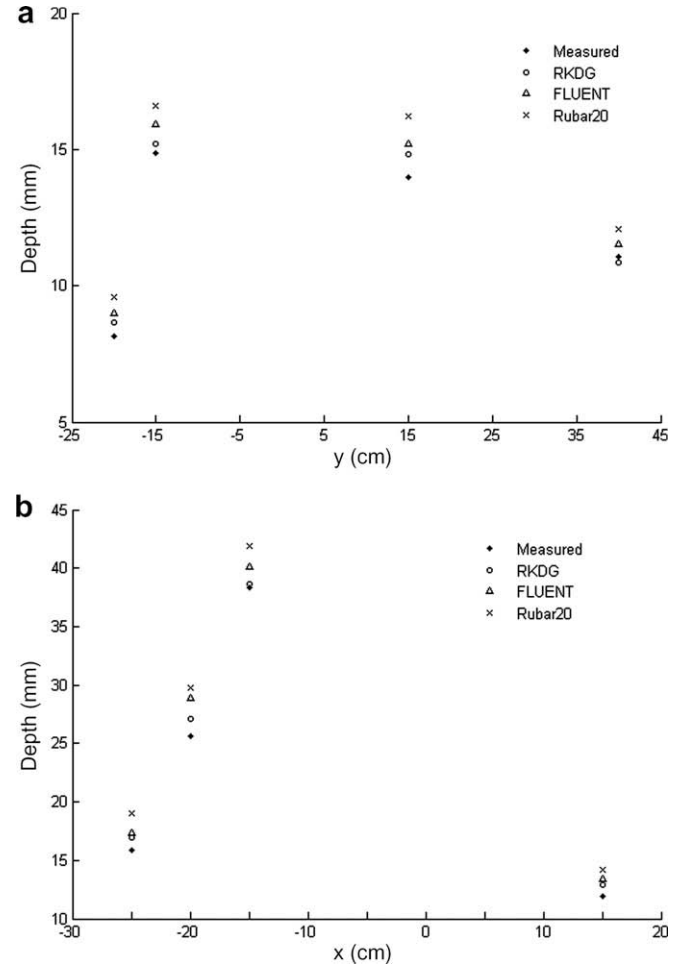


Fig. 7. Water surface profiles along the longitudinal section lines for the Type III: (a) $x = 0$; (b) $y = 0$.

Table 2
 L^2 Error of water depth

Type of flow	RKDG (2D) [%]	FLUENT (3D) [%]	Rubar20 (2D) [%]
Type II.1	2.98	5.73	8.75
Type II.2	4.47	9.62	12.51
Type III	4.29	8.06	13.53

Table 3
Values of the downstream flow discharges measured and calculated

	Measure		RKDG (2D)		Rubar20 (2D)		FLUENT (3D)	
	Q_{dx}	Q_{dy}	Q_{dx}	Q_{dy}	Q_{dx}	Q_{dy}	Q_{dx}	Q_{dy}
Type I	3.92	2.56	3.84	2.61	3.71	2.79	3.77	2.72
Type II.1	6.26	0.71	6.22	0.76	6.40	0.60	6.13	0.79
Type II.2	5.73	0.39	5.75	0.36	5.83	0.31	5.76	0.35
Type III	5.42	3.59	5.59	3.50	5.73	3.28	5.70	3.32

Table 4
Values of the indicators of quality of the distribution of the flow discharges in the downstream branches for the three types of flow

Type of flow	$Abs(E_{QT})$			E_{QXY}		
	RKDG (2D) [%]	Rubar20 (2D) [%]	FLUENT (3D) [%]	RKDG (2D) [%]	Rubar20 (2D) [%]	FLUENT (3D) [%]
Type I	1.23	3.10	2.31	2.04	8.98	6.25
Type II.1	0.58	2.01	1.86	7.04	14.06	11.27
Type II.2	0.33	1.64	0.49	7.69	20.51	10.25
Type III	1.88	3.44	3.11	3.13	8.63	7.52

where Q_{dx} is the downstream discharge in the x direction, Q_{dx_c} being the calculated discharge and Q_{dx_m} the measured discharge. Q_t is the total upstream flow discharge ($Q_t = Q_{lux} + Q_{liy}$).

$$E_{QXY} = \max \left(\text{abs} \left(\frac{Q_{dx_c} - Q_{dx_m}}{Q_{dx_m}} \right); \text{abs} \left(\frac{Q_{dy_c} - Q_{dy_m}}{Q_{dy_m}} \right) \right). \quad (27)$$

The values of the indicators $Abs(E_{QT})$ and E_{QXY} are given in Table 4. The test cases indicate an excellent performance of the RKDG method to predict also well the distribution of the flow discharges in the downstream branches and show the advantage of this method via Rubar20 and FLUENT. Moreover, the RKDG method requires notably less computational cells than the other two methods require.

7. Conclusions

A high-order Runge–Kutta discontinuous Galerkin finite-element scheme is proposed for the two-dimensional simulation of supercritical flow in an urban area. The test cases indicate an excellent performance of the scheme.

The comparison between the flows calculated and those measured by Mignot under conditions perfectly controlled at the same time with regard to the topography of the field and the boundary conditions upstream and downstream shows that the scheme is able to represent satisfactorily the set of the flow structures observed in the experiments: the prediction of the water depths, the location of the right and the oblique hydraulic jumps, the line of separation of the flows, and zones of recirculation. We then showed that the scheme is able to predict satisfactorily the distributions of the flow discharges measured in experiments for the various configurations of slope and the various studied types of flow. A comparison between this RKDG model and a comparable second-order finite volume scheme Rubar20 (2D) and FLUENT (3D) is also done. The results show a superior accuracy of the method to predict well the different flow characteristics more than the two other methods. Moreover, the method needs less computational cells to obtain high-order accuracy.

References

- [1] Akanbi AA, Katopodes ND. Model for flood propagation on initial dry land. *J Hydraul Eng ASCE* 1988;114(7):689–706.
- [2] Berz G. Flood disaster: Lessons from the past-worries for the future. *J Water Maritime Eng* 2000;142(1):1–10.
- [3] Cockburn B, Shu CW. The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservative laws V: multidimensional systems. *J Comput Phys* 1998;141:199–224.
- [4] Fennema RT, Chaudhry MH. Explicit methods for 2D transient free-surface flow. *J Hydraul Eng ASCE* 1990;116(11):1013–4.
- [5] Fluent. Fluent user's guide. USA: Fluent Inc.; 2002.
- [6] Garcia R, Kahawita RA. Numerical solution of the St. Venant equations with McCormack finite difference scheme. *J Numer Methods Fluids* 1986;6:507–27.
- [7] Gisonni C, Hager WH. Supercritical flow in the 90° junction manhole. *Urban Water* 2002;4:363–72.
- [8] Godunov SK. A difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations. *Matemsticheskiy Sbornik* 47 (US Joint Publications Research Service); 1959.
- [9] Hirsch C. Numerical computational of internal and external flows. In computational methods for inviscid and viscous flows. Chichester: Wiley; 1990.
- [10] Katopodes ND, Strelkoff R. Computing two-dimensional dam-break flood waves. *J Hydraul Div* 1978;104(9):1269–88.
- [11] Kouyi GL, Vazquez J, Poulet JB. Methodology of using 3D modelling of storm overflows for self-monitoring. *La Houille Blanche* 2005;6:59–67.
- [12] Mignot E. Experimental and numerical study of a flood in an urban area: Specific analysis of the flows in the crossroads. PhD thesis submitted at Cemagref, Lyon; 2005.
- [13] Nania LS, Gomez M, Dolz J. Experimental study of the dividing flow in steep street crossings. *J Hydraul Res* 2004;42(4):406–12.
- [14] Paquier A. Modelling and simulating the propagation of dam-break wave. PhD thesis submitted at Jean Monnet University, Saint Etienne; 1995.
- [15] Schwanenberg D, Harms M. Discontinuous Galerkin finite-element method for transcritical two-dimensional shallow water flows. *J Hydraul Eng ASCE* 2004;130(5):412–21.
- [16] Shu CW. High order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD. *Int J Comput Fluid Dyn* 2003;17:107–18.
- [17] Vazquez J, Kouyi GL, Zug M. Modelling and instrumentation of the storm overflows of the combined sewer system of Sélestat. *Urban Water* 2006;3(2):91–110.
- [18] Versteeg HK, Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method. Prentice-Hall; 1995. 257 p.
- [19] Weiyan T. Computational shallow water hydrodynamics. Beijing: Tsinghua University Press; 1998 [in Chinese].
- [20] Xing Y, Shu CW. High order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms. *J Comput Phys* 2006;214:567–98.
- [21] Xing Y, Shu CW. A new approach of high order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms. *Commun Comput Phys* 2006;1:100–34.
- [22] Yoon TH, Kang SK. Finite volume method for two-dimensional shallow water flows on unstructured grids. *J Hydraul Eng ASCE* 2004;130(7):678–88.
- [23] Zhao DH, Shen HW, Tabios GQ, Lai JS, Tan WY. A finite volume two-dimensional unsteady flow model for river basins. *J Hydraul Eng ASCE* 1994;20(7):863–83.
- [24] Zhao DH, Shen HW, Lai JS, Tabios GQ. Approximate Riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave problems. *J Hydraul Eng ASCE* 1996;122:692–702.
- [25] Zhou JC, Causon DM, Mingham CG, Ingram DM. Numerical prediction of dam-break flows in general geometries with complex bed topography. *J Hydraul Eng ASCE* 2004;130(4):332–40.

A confrontation of 1D and 2D RKDG numerical simulation of transitional flow at open-channel junction

R. Ghostine^{1,*}, G. Kesserwani¹, R. Mosé¹, J. Vazquez¹, A. Ghenaim²
and C. Grégoire³

¹*IMFS, UMR 7507 UDS-ENGEEES-CNRS, 2 rue Boussingault, 67000 Strasbourg, France*

²*INSA de Strasbourg, 24 boulevard de la Victoire, 67084 Strasbourg cedex, France*

³*LHYGES, UMR 7517 UDS-ENGEEES-CNRS, 1 rue Blessig, 67084 Strasbourg cedex, France*

SUMMARY

In this study, a comparison between the 1D and 2D numerical simulation of transitional flow in open-channel networks is presented and completely described allowing for a full comprehension of the modeling water flow. For flow in an open-channel network, mutual effects exist among the channel branches joining at a junction. Therefore, for the 1D study, the whole system (branches and junction) cannot be treated individually. The 1D Saint Venant equations calculating the flow in the branches are then supplemented by various equations used at the junction: a discharge flow conservation equation between the branches arriving and leaving the junction, and a momentum or energy conservation equation. The disadvantages of the 1D study are that the equations used at the junction are of empirical nature due to certain parameters given by experimental results and moreover they often present a reduced field of validity. On the contrary, for the 2D study, the entire network is considered as a single unit and the flow in all the branches and junctions is solved simultaneously. Therefore, we simply apply the 2D Saint Venant equations, which are solved by a second-order Runge–Kutta discontinuous Galerkin method. Finally, the experimental results obtained by Hager are used to validate and to compare the two approaches 1D and 2D. Copyright © 2009 John Wiley & Sons, Ltd.

Received 29 May 2008; Revised 14 October 2008; Accepted 8 November 2008

KEY WORDS: open channel junctions; Saint Venant equations; discontinuous Galerkin method; momentum conservation; transitional flow; steady flow

1. INTRODUCTION

The junction of two open channels is a common occurrence in many hydraulic structures ranging from wastewater treatment facilities to fish passage conveyance structures. While open-channel

*Correspondence to: R. Ghostine, Systèmes Hydrauliques Urbains, Ecole Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg, France.

†E-mail: rabih.ghostine@engees.u-strasbg.fr

junctions are present in many hydraulic systems, only limited research has been conducted on the topic. In recent years more focus has been given to the combining open-channel junction problem. Prior studies have focused on simplified 1D mathematical approximation of different junction flow characteristics with limited data collected to validate the theoretical models.

The difficulty in addressing the problem theoretically is that there are numerous factors that influence flow characteristics at the junction of two open channels. One set of variables can be described as geometry variables, such as the size, shape, slope, and angle between the combining branches. Many combinations of these four variables are possible. A second set are flow variables, such as the Froude number in the downstream flow, the channel roughness, the ratio of discharge between the two tributary branches, and the variation of fluid properties. It is readily apparent that a simplified 1D mathematical model is incapable of fully describing the complex flow conditions present at a junction. The difficulty of adequately describing this flow with simplified mathematical models leads to the possibility of using a 2D code to describe the flow conditions in a combining open-channel junction.

In this work, we simulate and compare the 1D approach with the numerical results obtained by the 2D Saint Venant equations. For the 1D study, the presence of internal junctions in such a system poses difficulties in numerical solution and routing of unsteady flow through the system because these junctions act as internal boundary conditions for each channel joined at the junction [1]. Therefore, 1D flow simulation in open-channel network is much more complicated than single channel solutions, especially for large-scale network systems [2, 3]. The whole system is considered as a set of branches in which the 1D Saint Venant equations are applied and linked by different hydraulic models of junction. The hydraulic conditions at a junction can be modeled by the mass conservation equation and either the energy conservation equation or the momentum equation. In this work, we use the model developed by Gurram [4]. While for the 2D case, the whole system (branches and junction) is considered as one system and discretized into triangular cells forming an unstructured computational mesh. Therefore, we simply apply the 2D Saint Venant equations, which are solved by a second-order Runge–Kutta discontinuous Galerkin (RKDG) method [5–7]. The experimental results obtained by Hirsh [8] are used to validate and to compare the two approaches 1D and 2D in simulation of transitional steady flow through the combining junction.

The objective of this paper is to show that the 1D approximation is not acceptable in all cases and that with a 2D approach we can obtain very accurate results with a reasonable space discretization and therefore a reasonable CPU time.

The organization of this paper is as follows. In Section 2, we present the review of literature. In Sections 3 and 4, we describe in detail the equations and the numerical methods used for the two approaches 1D and 2D. In Section 5, we provide numerical examples to compare the two approaches. Concluding remarks are given in Section 6.

2. REVIEW OF LITERATURE

Previous studies on combining open-channel flows proposed theoretical approaches based on the mass and momentum conservation for determining the upstream-to-downstream depth ratio. Taylor [9] presented the first study on junction flow and referred to the complexity of the problem. He

conducted experiments in horizontal rectangular channels of junction angles 45 and 135°. For a given downstream flow depth h_d and upstream-to-downstream discharge ratio $q = Q_u/Q_d$, he derived an equation for the relative upstream flow depth $Y = h_u/h_d$. A comparison with data showed fair agreement for $\delta = 45^\circ$ and poor agreement for $\delta = 135^\circ$. A second systematic study on junction flow was presented by Webber and Greated [10]. A small model with junction angles $\delta = 30^\circ$, $\delta = 60^\circ$, and $\delta = 90^\circ$ was used. Modi *et al.* [11] investigated open-channel junction using conformal mapping (based on a complex variable theory) and therefore did not take into account energy losses. Best and Reid [12] analyzed experimentally the geometry of the separation zone at sharp-edged open-channel junctions. The results included data for the length and the maximum width of the separation zone. They found that both the width and length of the separation zone increase with an increase in junction angle and discharge of the lateral channel. The shape index of the separation zone was defined as the ratio of the maximum recirculation width and its length. For a right-angled junction flow, the shape index has approximately the same value for various discharge ratios with a mean value of 0.19. By discussing the experimental approach of Best and Reid [12], Hager [13] introduced a simple model in which the pressure distribution on the lateral sidewall and the lateral momentum contribution were taken into account. He aimed at predicting the width of the separation zone by a 1D approach. Ramamurthy *et al.* [14] studied combining open-channel flow at right-angled junction based on the momentum transfer from the lateral to main branch. He applied separate momentum equations for the flow in the lateral and main channels. The lateral momentum contribution was found to increase as the lateral discharge ratio increases. Gurram *et al.* [15] studied the characteristics of the lateral flow and the flow contraction in the tail water channel and determined expressions for the momentum correction coefficient and the lateral wall pressure force. An equation for the ratio of flow depths in the lateral and upstream branches was also provided. Hsu *et al.* [16, 17] applied overall mass and energy conservation to the junction and momentum conservation to two control volumes in the junction and computed an energy loss coefficient and the depth ratio. All these studies were for equal-width junction flows and equality of the upstream flow depths was assumed. Recently, Shabayek *et al.* [18] developed a 1D model providing the necessary internal boundary equations for combining subcritical open-channel junctions. The advantage of this model is that it does not assume equal upstream flow depths. The model is based on the momentum principle together with mass continuity through the junction.

Very few studies concerning the problem of the junction in the transitional case is found. Ramamurthy *et al.* [14] studied the two types of flow, subcritical and transitional, through a junction for a right-angled junction. The model of junction developed in this work is based on the conservation of the momentum of the lateral branch to the main channel. It separately applied the equations of the momentum for the flow in the lateral and upstream branches.

Hager [19] showed that the transitional flow can exist if the discharge lateral flow is at least equal to 15% of the total flow. The author carried out a detailed experimental study with a 1D theoretical analysis of the transitional flow with angles of junction equal to 90, 45, and 22.5°. Hager derived an equation for the coefficient of contraction of the zone of separation. The author thus developed a model for the junction defining the water depths ratio at the junction, as a function of the flow discharge and the junction angle. The experimental validation of this model was less satisfactory for an angle of junction equal to 90° than for the other angles.

Gurram [4] proved that certain assumptions considered by Hager are not acceptable, and he developed a model for the junction which reproduces more accurately the experimental results of Hager [19].

3. 1D STUDY

It is well known that the 1D Saint Venant equations are not available at the points enclosing the junction due to the 2D phenomenon of the junction. Therefore, for the 1D study, the junction acts as an internal boundary condition and a special treatment is necessary. To find the solution in a network system, the 1D Saint Venant equations are applied in branches and linked by a junction model based on momentum or energy conservation. Different junction models are developed in the literature to relate the different flow variables at the junction. The inconvenience of these models is that they are of empirical nature due to certain parameters given by the experimental results and they often present a reduced field of validity. For example, they are developed in case of subcritical or transitional or supercritical flow and for a network system composed of three rectangular branches linked by one combining junction.

3.1. 1D junction model

To describe briefly the 1D junction model used in this work, let us consider a network system composed of three rectangular branches of same width B and linked by one combining junction. We note by branch u , branch L and branch d , the main channel located before the junction, the lateral channel branching to the main channel and the main channel located after the junction, respectively (Figure 1). The water depths and discharges at the upstream, lateral and downstream points to the junction are denoted by h_u , h_L , h_d , Q_u , Q_L and Q_d . The junction angle is denoted by δ .

The developed model for transitional flow junction and used in this work is Gurram's model [15]. This model assumes the equality of the water depth in the upstream branches and critical flow at the entrance of the downstream branch.

The model derived by Gurram *et al.* [15] is:

$$h_u = h_L \quad (1)$$

$$Y^3 - 3Y + 2[q^2 + (1 - q)\cos\delta] = 0$$

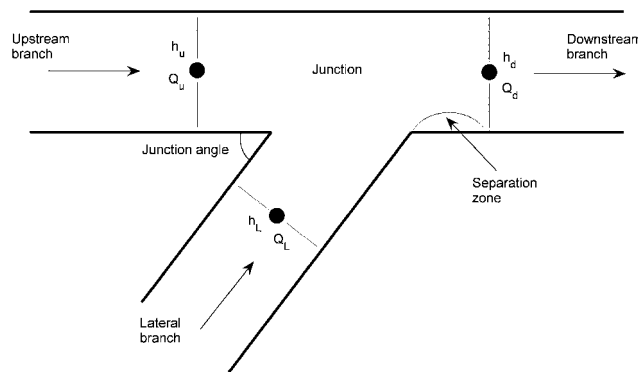


Figure 1. 1D junction problem.

3.2. Coupling the channel solution with the junction model

To find the solution at the internal points enclosing the junction, we have to find six unknown variables: the water depths and the flow discharges at the downstream of the branches located before the junction, the water depth and the flow discharge at the upstream of the branch located after the junction (Figure 1). Therefore, we need six equations to solve the 1D junction problem.

Since the flow is subcritical in the upstream branches, only two equations come from the branches' solutions through the characteristic equations. These equations relate the flow discharge as a function of the water depth:

$$\begin{aligned} Q_u &= f_u(h_u) \\ Q_L &= f_L(h_L) \end{aligned} \quad (2)$$

For more information about the method of characteristics, see [8].

The conservation of mass gives at the junction is given as follows:

$$Q_u + Q_L = Q_d \quad (3)$$

Critical flow at the entrance of the downstream branch indicates that the downstream Froude number is equal to 1:

$$\frac{Q_d^2}{gB^2h_d^3} = 1 \quad (4)$$

The last two equations come from the model quoted above (Equation (1)).

The system of these six equations is non-linear and its resolution is obtained by a Newton–Raphson method.

4. 2D STUDY

4.1. 2D Saint Venant equations

The unsteady, 2D Saint Venant equations can be written in the following conservative form as:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (5)$$

in which

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}$$

and

$$S = S_0 + S_f = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{0x} \\ ghS_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix} \text{ is the source term}$$

where u and v are the velocity components in the x and y directions, respectively; h is the water depth; g is the acceleration due to gravity; (S_{0x}, S_{0y}) are the bed slopes in the x and y directions and (S_{fx}, S_{fy}) are the friction slopes in the x and y directions, respectively. In this study, the friction slopes are estimated by using Manning's formula:

$$S_{fx} = \frac{n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}$$

where n_M is Manning's roughness coefficient. In our work, as we are in a rough turbulent flow, the viscosity (turbulence) and the bed roughness are approximated by the empirical Manning formula with Manning's roughness coefficient n_M .

4.2. Numerical method

The DG finite element formulation is written for each element K . Equation (5) is first multiplied with test function $v_h(x, y)$ and the flux integrals are further integrated by parts. The whole process yields:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_K U_h(x, y, t) v_h(x, y) dK &= \int_K F(U_h(x, y, t)) \cdot \nabla v_h(x, y) dK \\ &\quad - \int_{\partial K} F(U_h(x, y, t)) \cdot n_k v_h(x, y) d\Gamma \\ &\quad + \int_K S(U_h(x, y, t)) v_h(x, y) dK \end{aligned} \quad (6)$$

where $F = (E, G)$ and $n_k = (n_x, n_y)$ is the outward unit normal of the element boundary surface.

In this paper, linear triangular elements are used to discretize the 2D spatial domain. Hence, the solution at any point in each element can be represented in terms of the midpoint solutions U_i and the shape functions φ_i at each midpoint:

$$U_h(x, y) = \sum_i U_i \varphi_i(x, y) \quad (7)$$

Using the standard Galerkin approach, shape functions and test functions are identical. Rewriting Equation (6), the discontinuous Galerkin space discretization can be summarized by a system of ordinary differential equations as follows:

$$\frac{d}{dt} M U_h = L_{h,U}(U_h) \quad (8)$$

where M is the mass matrix and L_h is an operator describing the spatial discretization.

By using orthogonal shape functions, the mass matrix M in the linear equation system (8) becomes diagonal. For triangular elements, a linear shape function can be obtained by choosing a function that takes the value of 1 at the midpoint m_i of the i th edge of a triangle, and the value of 0 at the midpoints of the other two edges. Thus, the diagonal mass matrix can be expressed as follows:

$$M = |K| \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (9)$$

The integrals are approximated by a three-midpoint rule for the triangles and a two-point Gauss integration for the line integrals [18].

4.3. Numerical flux

The approximation of the numerical flux for the discontinuous Galerkin method is identical to the approximated solution of a Riemann problem according to finite-volume methods. By using linear or higher subcell resolution for higher-order discontinuous Galerkin methods, the scheme gets less sensitive to the choice of the numerical flux than the Godunov [20] type methods. In that case, a simple Lax–Friedrich flux gives good results.

$$F(U_L, U_R) \cdot n = \frac{1}{2}[(F(U_L) + F(U_R)) \cdot n - a_{\max}(U_R - U_L)] \quad (10)$$

where $a_{\max} = \max(|a^1|, |a^2|, |a^3|)$, and a^k ($k = 1, \dots, 3$) are the eigenvalues of the Jacobian matrix:

$$\tilde{A} = \frac{\partial(F \cdot n)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ (c^2 - u^2)n_y - uvn_x & vn_x & un_x + 2vn_y \end{bmatrix}$$

and $c = \sqrt{gh}$ is the wave celerity.

4.4. Slope limiter

The following slope limiter is presented for a scalar quantity u_h . Its extension to systems is outlined. For further information, see Cockburn and Shu [5]. To describe the limiter, we use the same notations as in Cockburn and Shu [5]. For an arbitrary triangle K_0 and its surrounding neighbors K_i , $i = 1, \dots, 3$, the notations b_i , $i = 0, \dots, 3$, and m_i , $i = 1, \dots, 3$, refer, respectively, to the barycenters of the triangles and the midpoints of the edges within K_0 (Figure 2).

Choosing any edge midpoint m_1 , we obtain:

$$m_1 - b_0 = \alpha_1(b_1 - b_0) + \alpha_2(b_2 - b_0) \quad \text{for some } \alpha_1, \alpha_2 \in R^{+2} \quad (11)$$

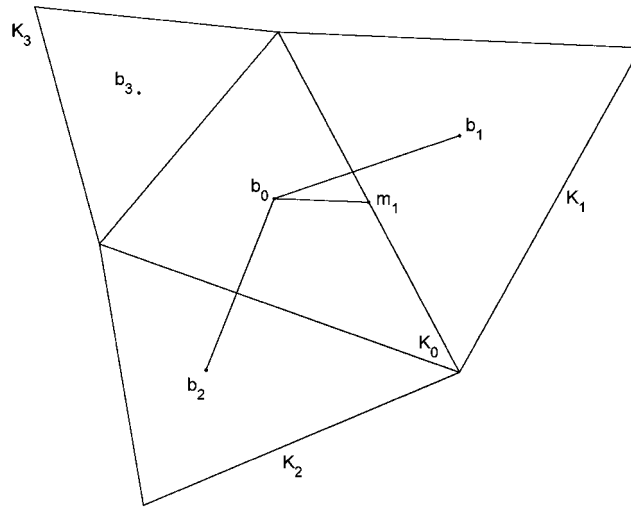


Figure 2. Slope limiting for triangular elements.

For any linear function u_h , the mean gradient can be expressed as:

$$\Delta \bar{u}(m_1, K_0) = \alpha_1(u_h(b_1) - u_h(b_0)) + \alpha_2(u_h(b_2) - u_h(b_0)) \quad (12)$$

By using the basis functions φ_i , u_h can be expressed over K_0 as follows:

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_h(m_i) \varphi_i(x, y) = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 (u_h(m_i) - u_h(b_0)) \varphi_i(x, y) \quad (13)$$

First, we compute the quantities:

$$\Delta_i = \tilde{m}(u_h(m_i) - u_h(b_0), v \Delta \bar{u}(m_i, K_0)) \quad \text{for some } v > 1 \quad (14)$$

where v is a positive constant number equal to 1.5 and \tilde{m} is the TVB minmod function defined as follows:

$$\tilde{m}(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_1| \leq M(\Delta x)^2 \\ m(a_1, a_2) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

where M is a given positive constant; and m is the minmod function, defined as follows:

$$m(a_1, a_2) = \begin{cases} s \min_{1 \leq n \leq 2} |a_n| & \text{if } s = \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

Consequently, reconstruction is carried out according to the following two cases:

1. If $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$, the new midpoint value is given by:

$$u_h(m_i) = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \varphi_i(x, y) \quad (17)$$

2. If $\sum_{i=1}^3 \Delta_i \neq 0$, we compute:

$$\text{pos} = \sum_{i=1}^3 \max(0, \Delta_i), \quad \text{neg} = \sum_{i=1}^3 \max(0, -\Delta_i) \quad (18)$$

and define:

$$\theta^+ = \min\left(1, \frac{\text{neg}}{\text{pos}}\right), \quad \theta^- = \min\left(1, \frac{\text{pos}}{\text{neg}}\right) \quad (19)$$

Finally, the new midpoint value is given by:

$$u_h(m_i) = u_h(b_0) + \sum_{i=1}^3 \hat{\Delta}_i \varphi_i(x, y) \quad (20)$$

where

$$\hat{\Delta}_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i) \quad (21)$$

Since the shallow water equations are a system of equations, the limiting must be performed in the local characteristic variables in the direction of the vector $m_1 - b_0$. The variables are therefore transformed by T^{-1} into the characteristic space, where T is the matrix of right eigenvectors of the following Jacobian:

$$\partial_U (E(U(b_0)), G(U(b_0))) \cdot \frac{m_i - b_0}{|m_i - b_0|} \quad (22)$$

4.5. Time integration

The second-order accurate two-stage TVD Runge–Kutta schemes of Cockburn and Shu [5] is employed in this work. According to Cockburn and Shu [5], the optimal two-stage, second-order accurate TVD Runge–Kutta scheme is expressed as:

$$\begin{aligned} U_h^1 &= U_h^n + \Delta t \cdot L_{h,U}(U_h^n) \\ U_h^{n+1} &= \frac{1}{2}(U_h^n + U_h^1 + \Delta t \cdot L_{h,U}(U_h^1)) \end{aligned} \quad (23)$$

The time step for a 2D element i is determined according to [RKDG formulation], namely,

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{|K_i|}{\sum_{j=1}^3 l_j \min(u \cdot n_x + v \cdot n_y - c, 0)} \quad (24)$$

Here u , v and c are evaluated at the barycenter of the element, j is the index of the faces surrounding the element, l_j is the length of the face and $0 < \text{CFL} \leq 1$ is the Courant number.

5. NUMERICAL RESULTS

In this section, we present the results of our numerical simulation of transitional flow at a combining junction obtained by the two approaches 1D and 2D. For the 1D simulation, we use the 1D Saint Venant equations in branches and linked by Gurram's model [4], the characteristics equations and the conservation of the flow discharge equation to calculate the flow variables at the junction (Figure 3). Oppositely, for the 2D simulation, the whole system (branches and junction) is considered as one system and we simply apply the 2D Saint Venant equations on unstructured triangular grids (Figure 4). Therefore, these equations do not require complementary equations to treat the junction as it is in the 1D case.

The experimental data obtained by Hager [19] will be compared with the computational results obtained by the two approaches. The data were analyzed, and information was developed that provides guidance for the design of open channel junctions with transitional flows. The 1D and 2D approaches were applied to evaluate its ability to predict flow depths in open-channel junctions with transitional flows.

The observations were conducted in a 0.5 m wide, horizontal rectangular branch of which one side had a glass wall. Three angles of confluence, $\delta = 22.5^\circ$, $\delta = 45^\circ$, and $\delta = 90^\circ$, were used. The width of each branch amounted to $B = 0.096$. The total flow discharge Q_d ranged between 0.002 and 0.013 m³/s, and the upstream to downstream discharge ratio ranged between 0 and 1. Assuming critical flow at the entrance of the downstream branch leads to a Froude number equal to 1. Once a certain discharge Q_d was set, the discharge distribution could be varied to the desired

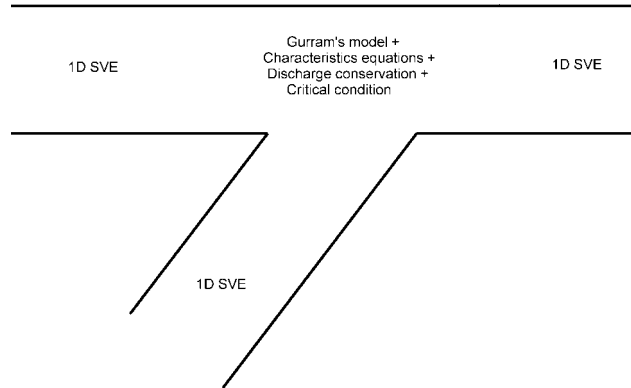


Figure 3. Treatment of the junction problem for the 1D case.

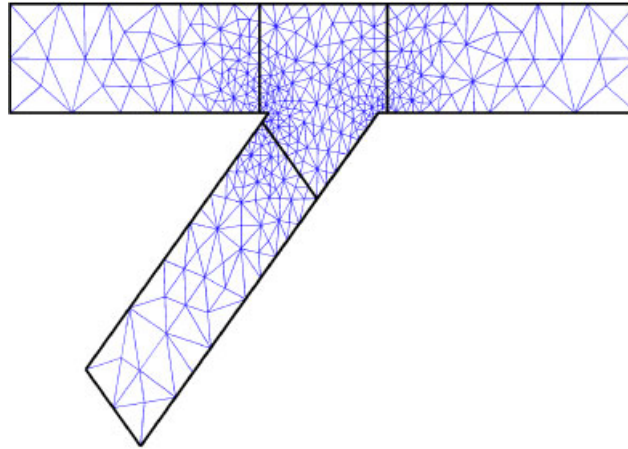


Figure 4. Definition of problem domain and the unstructured mesh for the 2D case.

value of q . The flow depths h_u and h_L were measured. It is found that the flow depths in the upstream and the lateral branches are nearly equal.

For the numerical simulation, flow discharges are fixed at the upstream branches and a free outfall condition is considered at the downstream branch, which makes waves pass the boundary without reflection. A free slip condition is applied at the solid boundary, i.e. the normal velocity component at the face is set to zero. The different flow parameters for the three angles (22.5, 45 and 90°) are listed in Tables I–III, respectively.

The study is organized around the prediction of the upstream to downstream depth ratio Y at the junction. Under a known upstream and lateral flow discharges, the upstream to downstream depth ratio Y is computed using the 1D approach and the 2D approach and compared with the experimental data of Hager [19].

Table I. Flow parameters for the angle $\delta=22.5^\circ$.

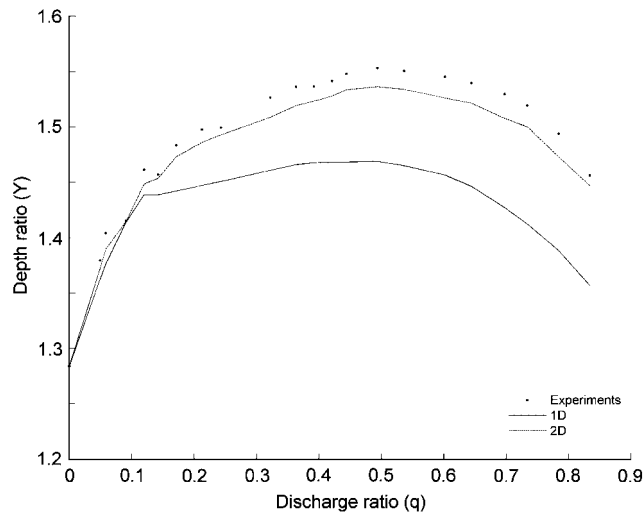
Discharge ratio q	Main channel inflow Q_u (L/s)	Branch channel inflow Q_L (L/s)	Main channel outflow Q_d (L/s)
0	0	7.8	7.8
0.0493	0.3845	7.4155	7.8
0.0585	0.1170	1.8830	2
0.0905	0.7059	7.0941	7.8
0.1195	0.2390	1.7610	2
0.1423	1.1099	6.6901	7.8
0.1713	1.9956	9.6544	11.65
0.2124	1.6567	6.1433	7.8
0.2428	1.8938	5.9062	7.8
0.3219	2.5108	5.2892	7.8
0.3630	4.2289	7.4211	11.65
0.3918	3.0560	4.7440	7.8
0.4207	3.2815	4.5185	7.8
0.4436	5.1679	6.4821	11.65
0.4937	5.7516	5.8984	11.65
0.5363	1.0726	0.9274	2
0.6016	1.2032	0.7968	2
0.6441	7.5038	4.1462	11.65
0.6973	5.4389	2.3611	7.8
0.7337	8.5476	3.1024	11.65
0.7838	6.1136	1.6864	7.8
0.8338	6.5036	1.2964	7.8

Table II. Flow parameters for the angle $\delta=45^\circ$.

Discharge ratio q	Main channel inflow Q_u (L/s)	Branch channel inflow Q_L (L/s)	Main channel outflow Q_d (L/s)
0	0	4.9	4.9
0.0389	0.3034	7.4966	7.8
0.0694	0.5413	7.2587	7.8
0.1897	1.4797	6.3203	7.8
0.2779	2.1676	5.6324	7.8
0.3539	2.7604	5.0396	7.8
0.4633	3.6137	4.1863	7.8
0.5211	4.0646	3.7354	7.8
0.5591	1.1182	0.8818	2.0
0.6669	1.3338	0.6662	2.0
0.7140	1.4280	0.5720	2.0
0.7489	3.6696	1.2304	4.9
0.8141	3.9891	0.9109	4.9
0.8520	1.7040	0.2960	2.0
0.9141	7.1200	0.6700	7.8

Table III. Flow parameters for the angle $\delta=90^\circ$.

Discharge ratio q	Main channel inflow Q_u (L/s)	Branch channel inflow Q_L (L/s)	Main channel outflow Q_d (L/s)
0	0	5.9	5.9
0.0780	0.6084	7.1916	7.8
0.0870	0.6786	7.1214	7.8
0.1053	0.8213	6.9787	7.8
0.2528	1.4915	4.4085	5.9
0.2664	2.0779	5.7221	7.8
0.4684	3.6535	4.1465	7.8
0.5033	2.9695	2.9305	5.9
0.7021	5.4764	2.3236	7.8
0.7521	4.4374	1.4626	5.9
0.8552	6.6706	1.1294	7.8
0.8824	6.8827	0.9173	7.8
0.9021	7.0364	0.7636	7.8
0.9444	7.3663	0.4337	7.8

Figure 5. Comparison of water depth ratio Y as a function of the discharge flow ratio q for the junction angle ($\delta=22.5^\circ$).

Comparison between experimental data and numerical results obtained with the 1D approach and the 2D approach is shown. Figures 5–7 represent, respectively, the water depth ratios Y plotted against the discharge ratios for the three angles of intersection (22.5° , 45° , and 90°) that Hirsh [8] investigated. Experimental results are well reproduced by the 2D approach. The figures indicate an excellent agreement between the experimental data and the results obtained by the 2D approach. The 2D approach's prediction correlates well to the measured data and gives better accuracy than

1D AND 2D RKDG NUMERICAL SIMULATION

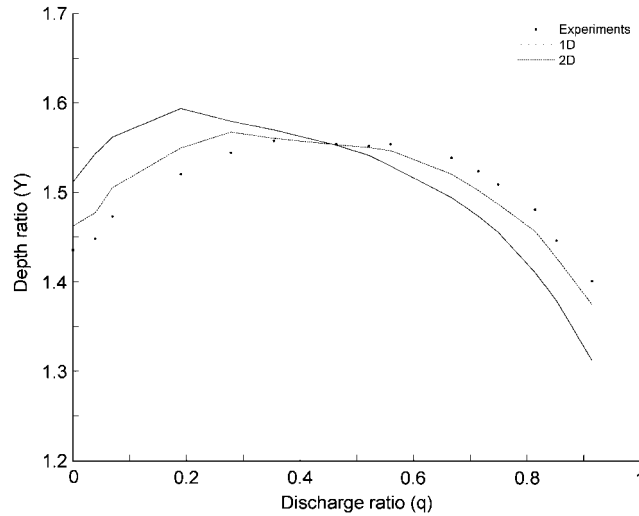


Figure 6. Comparison of water depth ratio Y as a function of the discharge flow ratio q for the junction angle ($\delta=45^\circ$).

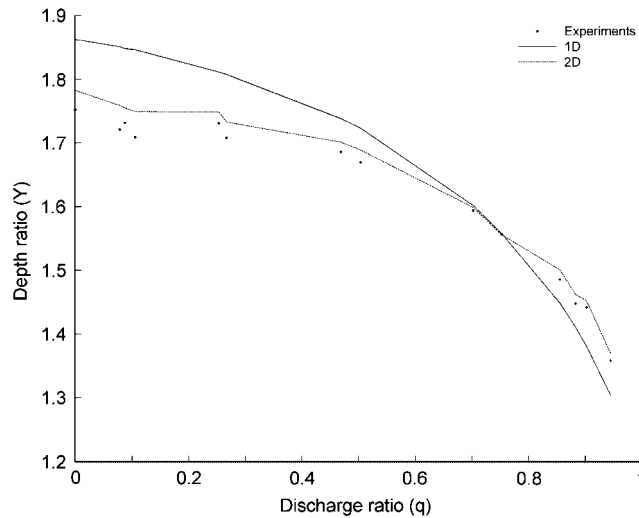


Figure 7. Comparison of water depth ratio Y as a function of the discharge flow ratio q for the junction angle ($\delta=90^\circ$).

the ones provided by the 1D approach, which does not always achieve a very good agreement. A notable deviation between the results obtained by the 1D approach and the experimental data is found.

Table IV. Errors of the water depths as defined in Equation (25).

Angle (deg.)	1D error in %	2D error in %
$\delta=22.5$	7.06	1.43
$\delta=45$	6.55	2.19
$\delta=90$	8.03	2.21

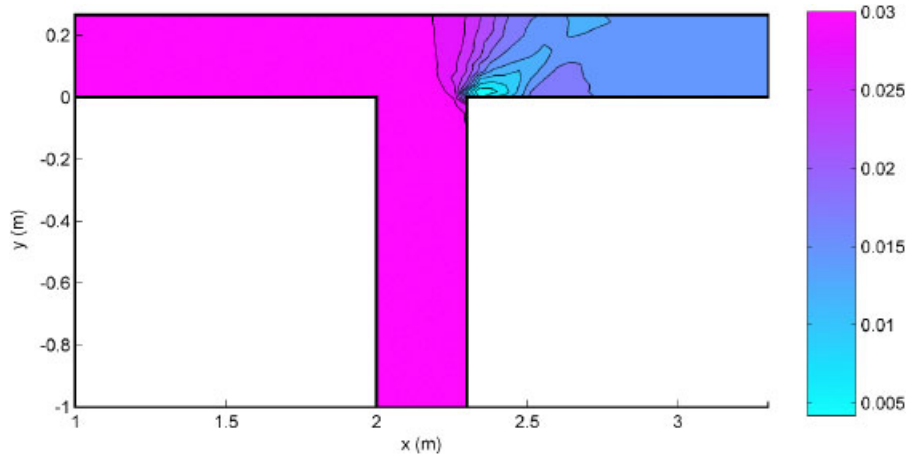


Figure 8. Contour of water depths in channel junction.

For a more accurate study of the water depth ratios' prediction, we introduce an estimator of quality defined as follows:

$$E = 100 \cdot \max \left| \frac{Y_p - Y_m}{\min(Y_m)} \right| \quad (25)$$

where Y_p and Y_m is the predicted and measured water depth ratios, respectively.

Table IV presents the errors as defined in Equation (25) between the measured data and the water depth ratio predicted by the two approaches 1D and 2D.

According to Table IV, and in all the investigated tests, the 2D approach gives the best agreement with the experimental data. The error of this approach is about 2% in all cases. Moreover, these good agreements were obtained with a reasonable effort. Whereas, the error with the 1D approach is not sufficiently acceptable and reaches 8%.

In spite of the fact that the computing time for the 2D approach is much more significant than for the 1D approach, the reasons of this choice are on the one hand the possibility of representing the different urban structures, and on the other hand, the 2D approach allows to directly calculate the flows in the junctions. Thus, they do not have recourse to additional empirical equations. Moreover, the results of the 2D calculations are more accurate and more informative.

The following example illustrates the 2D computational procedure of transitional flow at open-channel junction: Consider a junction of two channels at a confluence angle $\delta=90^\circ$. The upstream and lateral bottom slopes are $S_0=0.001$, the downstream bottom slope is $S_0=0.01$, and the

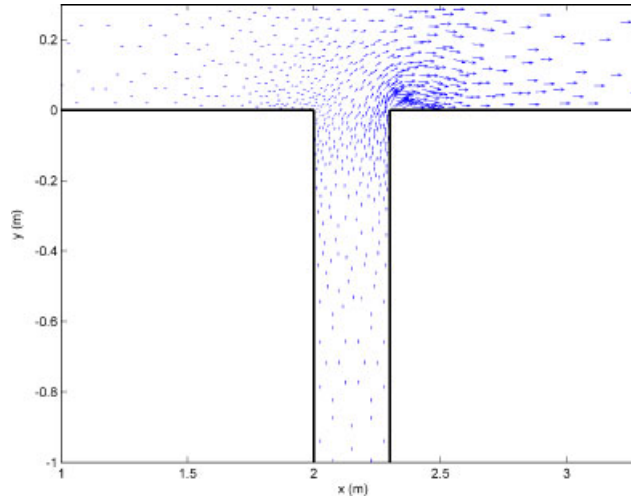


Figure 9. 2D plot of velocity field in channel junction.

roughness coefficient according to Manning's formula amounts to 0.012. Find the upstream flow depths h_u and h_L for a downstream discharge $Q_d = 4$ L/s if the channels are $L = 2$ m length and $B = 0.3$ m wide, and the lateral discharge $Q_L = 2$ L/s.

The contour of water depths and the vectors of horizontal flow velocities are shown in Figures 8 and 9, respectively. The uniform flow depth in the downstream channel is $h_N = 0.0155$ m, whereas the critical flow depth is $h_c = [0.004^2 / (9.81 \cdot 0.3^2)]^{1/3} = 0.0263$ m $> h_N$. Therefore, supercritical flow establishes in the downstream branch. In the upstream branches $h_N = 0.03$ m $> h_c = 0.0165$ m, so subcritical flow takes place in the upstream branches. This example indicates that the following conditions are satisfied: subcritical inflow and supercritical flow immediately downstream of the junction. Therefore, transitional flow from subcritical flow in the upstream branches to supercritical flow in the downstream branch will be established as assumed.

6. CONCLUSION

In this study, a 1D and 2D approach has been applied for steady transitional flow at open-channel junction.

For the 1D study, the 1D Saint Venant equations coupled with the method of characteristics and a junction model based on momentum conservation are used to find the solution in the network system (branches and junction). While for the 2D case, the whole system is discretized into triangular cells forming an unstructured computational mesh. Therefore, we simply apply the 2D Saint Venant equations, which are solved by a second-order RKDG method. The numerical results have been validated by comparison with experimental data. In all the considered cases, the 2D approach gives the best agreement with respect to the experimental data. The 1D approach does not achieve a very good agreement, while the 2D approach performs almost well in all the cases and for the different junction angles that Hager had investigated. Moreover, these good agreements were obtained with a reasonable space discretization and therefore a reasonable CPU time.

This work shows therefore that the idea of combining a 1D approach in branches to a 2D approach for the junctions in practical situation is fully satisfied when we observed the quality of the 2D simulation results. It is clear that in certain complex flows such as supercritical flow in which hydraulic jumps may occur, the coupling of the 1D and 2D models may not be so simple. Therefore, the use of TVD schemes with shock capturing when solving the 1D and 2D Saint Venant equations is necessary to correctly represent the hydraulic jumps. Future work will focus on this point and will consist of developing a framework based on coupling:

- The 1D Saint Venant equations to be applied in branches.
- The 2D Saint Venant equations to be applied at the junction area.

REFERENCES

1. Yen BC. *Unsteady Flow Mathematical Modeling Techniques, Modeling of Rivers*, Shen HW (ed.), vol. 13(1). Wiley Interscience: New York, 1979; 13–33.
2. Akan AO, Yen BC. Diffusion wave flood routing in channel network. *Journal of Hydraulic Division* 1981; **107**(6):719–723.
3. Yen BC, Osman A. Flood routing through river junctions. *ASCE Rivers '76*, vol. 1. New York, 1976; 212–231.
4. Gurram SK. A study of subcritical and transitional combining flow in open channel junctions. *Ph.D. Thesis*, Banaras Hindu University, Varanasi, India, 1994.
5. Cockburn B, Shu CW. The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservative laws V: multidimensional systems. *Journal of Computational Physics* 1998; **141**:199–224.
6. Schwanenberg D. Die Runge–Kutta discontinuous Galerkin Methode zur Lösung konvektionsdominierter tiefengemittelter Flachwasserprobleme. *Ph.D. Thesis*, Aachen University, Germany, 2003.
7. Schwanenberg D, Harms M. Discontinuous Galerkin finite-element method for transcritical two-dimensional shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering* 2004; **130**(5):412–421.
8. Hirsh C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. A Wiley Interscience Publication: New York, 1990.
9. Taylor EH. Flow characteristics at rectangular open-channel junctions. *Transactions (ASCE)* 1944; **109**:893–912.
10. Webber NB, Greated CA. An investigation of flow behaviour at the junction of rectangular channels. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, London, vol. 34, 1966; 321–334.
11. Modi PN, Ariel PD, Dandekar MM. Conformal mapping for channel junction flow. *Journal of Hydraulic Division* 1981; **107**(12):1713–1733.
12. Best JL, Reid I. Separation zone at open-channel junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 1984; **110**(11):1588–1594.
13. Hager WH. Discussion of ‘Separation zone at open-channel junctions’ by Best JL and Reid I. *Journal of Hydraulic Engineering* 1987; **113**(4):539–543.
14. Ramamurthy AS, Carballada LB, Tran DM. Combining open channel flow at right angled junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 1988; **114**(12):1449–1460.
15. Gurram SK, Karki KS, Hager WH. Subcritical junction flow. *Journal of Hydraulic Engineering* 1997; **123**(5):447–455.
16. Hsu CC, Lee WJ, Chang CH. Subcritical open channel junction flow. *Journal of Hydraulic Engineering* 1998; **124**(8):847–855.
17. Hsu CC, Wu SF, Lee WJ. Flow at 90° equal-width open-channel junction. *Journal of Hydraulic Engineering* 1998; **124**(2):186–191.
18. Shabayek S, Steffler P, Hicks F. Dynamic model for subcritical combining flows in channel junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 2002; **128**(9):821–828.
19. Hager WH. Transitional flow in channel junctions. *Journal of Hydraulic Engineering* 1989; **115**(2):243–259.
20. Godunov S. Finite difference methods for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Matematicheskii Sbornik* 1959; **47**:271–306.

Contribution à la résolution numérique des équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelle par une méthode de type éléments finis discontinus : application à la simulation des écoulements au sein des carrefours dans la ville

Résumé: L'objectif scientifique de ce travail de thèse est la gestion hydraulique de l'inondation dans la ville. La maîtrise des volumes et hauteurs générés par les événements pluvieux passe par une connaissance fine des carrefours. En effet, les débits vont se distribuer au sein de la ville à travers ces nœuds. Le travail concerne tout particulièrement l'étude de la résolution numérique des équations bidimensionnelles de l'hydraulique à surface libre (équations de Barré de Saint Venant).

L'outil privilégié pour répondre aux demandes des services techniques des agglomérations est la simulation numérique, seul outil permettant de faire des prévisions pour des événements exceptionnels. L'objectif est ainsi de mettre au point un outil de simulation robuste permettant de faire des choix en fonction d'objectifs. Le schéma numérique considéré est de type éléments finis discontinus de Galerkin associés à une limitation de pente. Le travail vise tout particulièrement à mettre en œuvre ce type de schéma et à étudier la robustesse et la stabilité de ce nouveau schéma de discrétisation notamment lors de l'utilisation de maillage non-structuré des carrefours de la ville à partir d'éléments triangulaires.

Dans un premier temps, le schéma numérique est comparé favorablement par rapport à un schéma volume fini mis en œuvre avec les mêmes propriétés sur différents problèmes hydrauliques transitoire et stationnaire. Un banc d'essai numérique est effectué montrant l'intérêt du schéma développé.

Dans un deuxième temps, le schéma numérique est comparé par rapport à l'approche unidimensionnelle pour la prédiction des écoulements fluviaux, torrentiels et transcritiques à travers les jonctions.

Nous terminons ce mémoire en vérifiant les capacités du schéma numérique à simuler les écoulements qui se développent au sein des carrefours de la ville, dans les conditions expérimentales étudiées par Mignot et al. (2008b). Ainsi, les résultats prédits par le schéma numérique sont comparés avec les caractéristiques correspondantes des écoulements mesurés expérimentalement ainsi qu'avec les résultats prédits par la méthode des volumes finis 2D et un logiciel basé sur la méthode des volumes finis pour la résolution des équations tridimensionnelles de Navier Stokes (FLUENT 3D).

Mots clés : Equations de Saint Venant ; Méthode des volumes finis ; Méthode discontinue de Galerkin ; Jonction des canaux ; Inondations urbaines.

Contribution to the numerical resolution of the two-dimensional Saint Venant equations with a method of type discontinuous finite element: application to the simulation of flows within the crossroads in the city

Abstract: The scientific objective of this work of thesis is the hydraulic management of the flood in the city. The control of volumes and water depths generated by the rainy events passes by a fine knowledge of the crossroads. In fact, the flows will be distributed within the city through these nodes. The work concerns particularly the study of the numerical resolution of the two-dimensional equations of hydraulics at open channel (Saint Venant equations).

The tool privileged to answer to the requests of the engineering departments of the agglomerations is the numerical simulation, only tool making it possible to make forecasts for exceptional events. The objective is thus to develop a tool for simulation robust making it possible to make choices according to objectives. The considered numerical scheme is based on the discontinuous Galerkin finite elements method associated with a slope limitation. The work will aim particularly to implements this type of scheme and to study the robustness and the stability of this new scheme of discretization in particular during the use of unstructured mesh of the crossroads of the city starting from triangular element.

In the first time, the numerical scheme is favourably compared to a finite volume scheme implemented with the same properties on various hydraulic problems transient and steady. Numerical results of several flow problems show the interest of the developed method.

In the second time, the numerical scheme is compared to the one-dimensional approach for the prediction of the subcritical, supercritical and transcritical flows through the junctions.

We finish this memory by checking the capacities of the numerical scheme to simulate the flows which develop within the crossroads of the city, under the experimental conditions studied by Mignot et al. (2008b). Thus, the results predicted by the numerical scheme are then compared with the corresponding characteristics of the flows measured in experiments as well as with the results predicted by a 2D finite volume method and a software based on the finite volume method for the resolution of the three-dimensional equations of Navier stokes (FLUENT 3D).

Key words: Saint Venant equations; Finite volume method; Discontinuous Galerkin method; Open channel junction; Urban flooding.