M2 CSMI EDP hyperboliques TP1

S1

Résolution numérique de l'équation de transport

1. calculer la solution du problème suivant (c est une constante > 0)

$$\begin{aligned} \partial_t u + c\partial_x u &= 0, \quad x \in]0, L[, \quad t \in]0, T[, \\ u(0,t) &= e^{-t}, \quad t \in]0, T[, \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in]0, L[. \end{aligned} \tag{1}$$

2. montrer que le problème n'admet pas de solution lorsque $c < 0$.

3. écrire un programme qui résout l'équation de transport par la méthode de Godunov.

4. vérifier la validité de votre programme sur l'exemple (1). On pourra par exemple tracer le logarithme de l'erreur en norme L^1 entre la solution exacte à l'instant T de (1) et la solution numérique en fonction de $\ln(\Delta x)$ où Δx est le pas de la subdivision (étude de taux de convergence).

5. Vérifier numériquement que le schéma devient instable lorsque la condition de CFL n'est pas satisfaite. Tracer un exemple lorsque $c\Delta t/\Delta x > 1$ et proche de 1.

Résolution numérique de l'équation de Burgers

1. Calculer la solution de Lax du problème suivant

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x (u^2/2) &= 0, \quad x \in]-1, 2[\\ u(0,t) &= 1, \\ u(x,0) &= \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x < 0 \\ 1 - x \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{2}$$

   Justifier tous les calculs.

2. Résoudre le problème de Riemann pour l'équation de Burgers

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x (u^2/2) &= 0, \\ u(x,0) &= \left\{ \begin{array}{l} u_L \text{ si } x < 0 \\ u_R \text{ si } x > 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

3. écrire un programme qui résout le problème (2) par la méthode de Godunov. Comparer la solution exacte et la solution approchée aux instants $t = 1/2$, $t = 1$, $t = 2$ pour diverses finesses de maillage Δx. Effectuer une étude de taux de convergence.

4. Décrire et programmer la correction MUSCL de van Leer. Vérifier que la précision du schéma est amélioré grâce à une étude de taux de convergence.