(1)

Probleem:

Minimaliseer

$$\delta[G,H,C] = \sum_{k=1}^{K} tr\,[Z_k - G C_k H']'\,[Z_k - G C_k H']$$

over alle

$n \times s$ matrices G die voldoen aan $G'G = I$

$m \times t$ matrices H die voldoen aan $H'H = I$

$s \times t$ matrices C_k $(k = 1, .., K)$.

Vraag 1: Bestaat er een ~~unieke~~ $(\hat{G}, \hat{H}, \hat{C})$ die

δ minimaliseert, ~~wanneer~~ als rang G $\cancel{s} \leq$ rang A

rang H $\cancel{t} <$ rang

Antwoord: ja.

Bewijs: Twee stappen

$$\inf_{G,H,C} \delta(G,H,C) = \inf_{G,H} \left[\min_{C} \delta(G,H,C) \right]$$

(minimum wordt aangenomen volgens Penrose voor

$\hat{C}_k = G' Z_k H$, is bovendien uniek).

Dus

Vraag 0: a) Bestaat er een perfecte oplossing,
b) en hoe kunnen we die vinden?

Antwoord: Een procedure om een oplossing te vinden als er een oplossing bestaat beantwoord beide vragen.

Identificatie (laat zien dat dit mag)

$$\sum_{k=1}^{K} C_k' C_k = \Psi$$ (diagonaal) (niet negatief, decreasing lang diag)

$$\sum_{k=1}^{K} C_k C_k' = \Phi$$ (diagonaal) (idem)

Als $Z_k = G C_k H'$ dan

$$\left(\sum_{k=1}^{K} Z_k Z_k'\right) = G \Phi G'$$ $\Rightarrow$ dit geeft G en Φ (uniek als Φ ongelijk)

$$\left(\sum_{k=1}^{K} Z_k' Z_k\right) = H \Psi H'$$ $\Rightarrow$ dit geeft H en Ψ (uniek als Ψ ongelijk)

als de gevonden $\hat{G}$ en $\hat{H}$ voldoen aan

$$Z_k = \hat{G}\hat{G}' Z_k \hat{H}\hat{H}'$$

dan zijn we klaar.

②

$$\inf_{G,H,C} \sigma(G,H,C) = \inf_{G,H} \sum_{k=1}^{K} tr[Z_k - GG'Z_k HH']'[Z_k - GG'Z_k HH'].$$

Definieer

$$\rho(G,H) = \sum_{k=1}^{K} tr\ Z_k' GG' Z_k HH'$$

$$= tr\ G'\left[\sum_{k=1}^{K} Z_k HH' Z_k'\right] G.$$

$$= tr\ H'\left[\sum_{k=1}^{K} Z_k' GG' Z_k\right] H.$$

Dan

G,H contin. transformaties

a) $\rho(G,H)$ is kontinu in (G,H)

$\{G \mid G'G = I\}$.

b) $P = \{(G,H) \mid G'G = H'H = I\}$ is ~~kompakt~~ gesloten en begrensd.

c) $\rho(G,H)$ is naar boven begrensd.

$\rho(G,H)$ is een kont. begrensd funktie op een kompakte verz. ⇒ dat $\rho(G,H)$ heeft een ~~max~~ sup ~~max~~ op P ~~dat~~ wordt aangenomen dus een max is.

Dus

$$\inf_{G,H,C} \sigma(G,H,C) = \sum_{k=1}^{K} tr(Z_k' Z_k) - \underset{G,H}{\cancel{\max}\ \sup}\ \rho(G,H)$$

min. ~~tot~~ ~~inf~~ $\sigma(G,H,C)$ heeft een minimum G,H,C.

ad c : We kunnen bewijzen dat

$$\max_{G,H} \rho(G,H) \leq \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \left[\sum_{k=1}^{K} z_k z_k' \right] = \cancel{\sigma(U^{(t,s)}, D^{(s,t)}, V^{(t)})}$$

$$\max_{G,H} \rho(G,H) \leq \sum_{\rho=1}^{t} \lambda_\rho \left[\sum_{k=1}^{K} z_k' z_k \right] = \cancel{\sigma(U^{(k,s)}, D^{(s,t)}, V^{(t)})}$$

Vraag 2: Is het minimum uniek?

Antwoord: Niet noodzakelijk. In de eerste plaats is er rotatievrijheid. Wel is voor gegeven G het minimum in H, C uniek en voor gegeven H het minimum in G, C uniek.

Vraag 3 : Bestaan er locale minima, buigpunten, etc.

Antwoord : Ja.

Hint: Voor gegeven optimale $\hat{H}$ en $\hat{C}$ kunnen verschillende sets van eigenvectoren gekozen worden voor G die stationaire waarden opleveren.

Algoritmen:

Vraag 1: Wat mogen we van een algoritme verwachten.

Antwoord: een oplossing die voldoet aan de 1e orde voorwaarden voor een stationair punt. Eventueel kan dmv. 2e orde informatie nagegaan worden of dit een lokaal maximum, minimum, of buigpunt is. Nooit of het een globaal optimale oplossing is.

Vraag 2: Is er een goede aanvangsschatting voor G en H.

Antwoord: ja Eerste s/t eigenvectoren van $\sum_{k=1}^{K} g_k g_k'$ en $\sum_{k=1}^{K} h_k' h_k$. Als een perfecte oplossing bestaat, dan hebben we deze gelijk.

Twee ping-pong algorithmes

A: een concepteel algorithme

Begin met $H^{(0)}$

Ping: Vindt $G^{(s)}$ als de maximizer over G van $\rho(G, H^{(s)})$

Pong: Vindt $H^{(s+1)}$ als de maximizer over H van $\rho(G^{(s)}, H)$

Iedere stap is een eigenwaarde probleem. Konceptueel omdat in principe een oneindig iteratief proces binnen iedere stap

Beweren kan worden

a) Als $(G^{(s+1)}, H^{(s+1)}) \neq (G^{(s)}, H^{(s)})$ dan

$$\rho(G^{(s+1)}, H^{(s+1)}) > \rho(G^{(s)}, H^{(s)})$$

b) De transformatie $(G^{(s)}, H^{(s)}) \longrightarrow (G^{(s+1)}, H^{(s+1)})$ is kontinu.

c) Als $(G^{(s)}, H^{(s)}) = (G^{(s+1)}, H^{(s+1)})$ dan is $(G^{(s)}, H^{(s)})$ een stationair punt.

Hieruit volgt: $(G^{(s)}, H^{(s)})$ konvergent naar stationair punt (Stelling van d'Esopo - Zangwill).

B Een praktisch algorithme

Begin met $H^{(0)}, G^{(0)}$.

Prim: Definieer: $U^{(s)} = \sum_{k=1}^{K} Z_k H^{(s)} H^{(s)\prime} Z_k'$

$$G^{(s+1)} = U^{(s)} G^{(s)} \left(G^{(s)\prime} \left(U^{(s)}\right)^2 G^{(s)} \right)^{-1/2}$$

Conj. Definieer: $V^{(s)} = \sum_{k=1}^{K} Z_k' G^{(s+1)} G^{(s+1)\prime} Z_k$

$$H^{(s+1)} = V^{(s)} H^{(s)} \left(H^{(s)\prime} \left(V^{(s)}\right)^2 H^{(s)} \right)^{-1/2}$$

Hetzelfde konvergentie bewijs gaat nu op.