

Implementazione operazione “saxpy” in ambiente MPI-Docker ($c = \alpha \cdot a + b$)

Denny Caruso¹

1: denny.caruso001@studenti.uniparthenope.it

1. Definizione e analisi del problema

Si vuole realizzare un prodotto software che implementi in *parallelo* l'operazione nota come *saxpy* in ambiente MIMD-DM mediante l'utilizzo della libreria MPI. In particolare, si vuole determinare il vettore risultato c ottenuto come la somma fra il vettore b e il vettore a che viene moltiplicato per uno scalare α . Le operazioni sono elementari dal punto di vista dell'algebra lineare e fondamentalmente consistono nell'effettuare il prodotto di un vettore per uno scalare e successivamente il vettore risultante da questa operazione viene sommato a un altro vettore. Ovviamente i due vettori di input ed il vettore di output sono delle stesse dimensioni.

L'algoritmo sequenziale può essere banalmente realizzato con un singolo *loop* che effettua tante iterazioni quanti sono gli elementi in input in uno dei due vettori in input, all'interno di ognuna delle quali si eseguirà la somma di un vettore con l'altro vettore che viene anticipatamente moltiplicato per uno scalare.

Keywords: MPI, *saxpy*

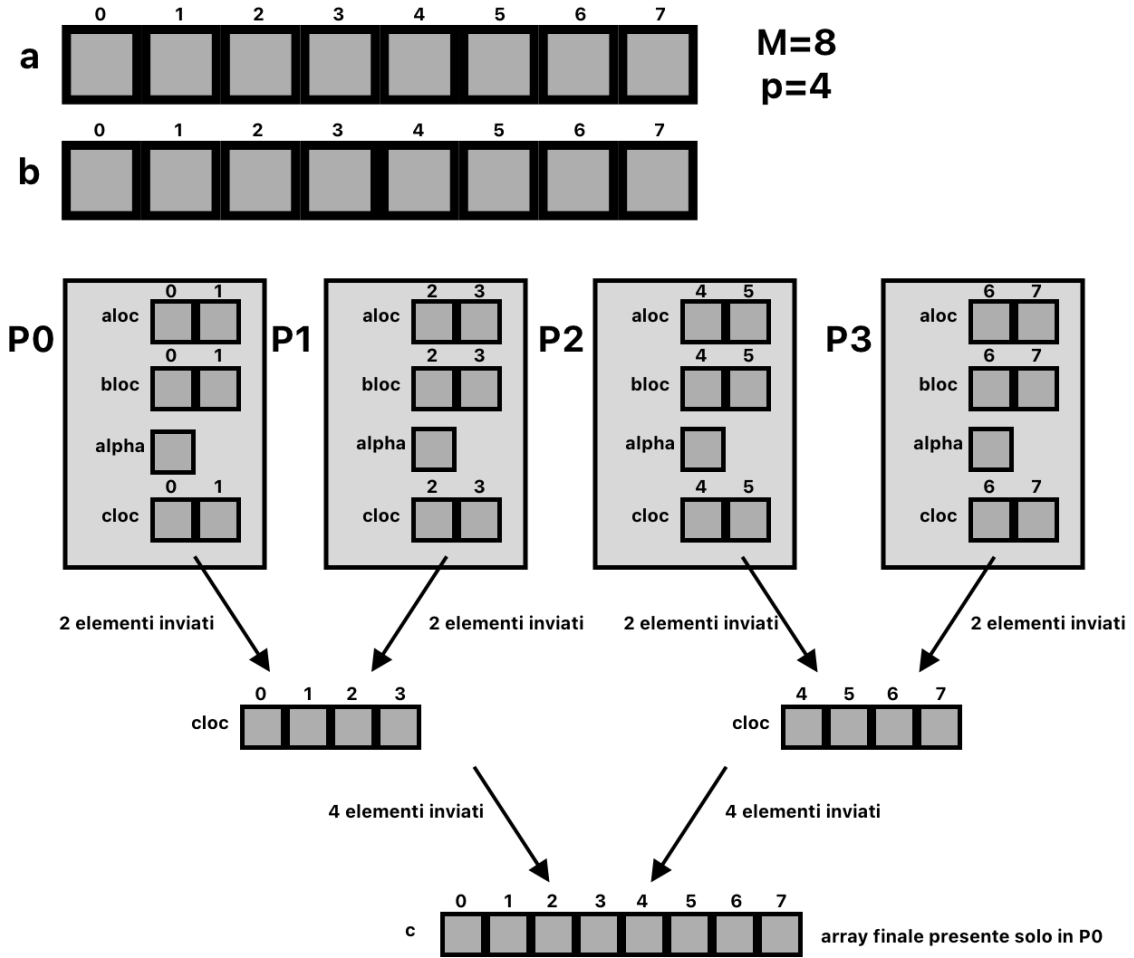
2. Descrizione dell'approccio parallelo

La strategia di parallelizzazione adottata è molto semplice. Dati p processori e due array di dimensione N contenenti i dati di input, è possibile assegnare ad ogni processore del cluster una porzione di $\frac{N}{p}$ elementi di ambedue gli array. Inoltre, ogni processore avrà a disposizione tutto il necessario per effettuare la propria fase di calcolo locale, ovvero lo scalare α coinvolto nell'operazione di *saxpy*, la dimensione della porzione degli array ed eventuali offset da considerare qualora la dimensione del problema, non sia esattamente divisibile per il numero di processori. Una volta terminata la fase di distribuzione delle porzioni dei due array e degli altri dati appena menzionati dal processore *master* a tutti gli altri processori, ogni processore effettua localmente l'operazione di *saxpy* tra le due porzioni di vettori a disposizione e memorizza il risultato nel vettore risultato locale al processore.

Ora non resta che unire in maniera ordinata tutte le porzioni di array locali calcolate da ogni processore e ottenere l'array completo che sarà disponibile solo all'interno del processore *master*. Di fatto, si implementa il *modello di collezione dei risultati ad albero binario*. Questo tipo di approccio è stato scelto, in quanto permette di raggiungere dei risultati migliori rispetto alla collezione puramente sequenziale dei risultati. Alternativamente, si può fare in modo che il vettore risultante sia disponibile a tutte le unità processanti del cluster. Fare ciò però, avrebbe comportato un approccio algoritmico differente rispetto a quello illustrato nella sezione seguente, oppure un'operazione di *broadcast* finale dal processore *master* a tutti gli altri processori del vettore risultante ottenuto.

Ora si passa alla valutazione dell'approccio parallelo utilizzato. Nel caso più semplice in cui non è richiesto ricevere il vettore risultato in unico vettore, ma basta aver effettuato l'operazione di *saxpy* sulle varie porzioni di array distribuite, allora l'approccio parallelo risulta rientrare nella classe degli algoritmi paralleli perfetti, ovvero con speed-up pari a p , efficienza pari a 1 e overhead pari a 0. Diversamente, se necessario ottenere il vettore risultato per intero, allora la situazione cambia. In ogni caso, si precisa che nelle dimostrazioni che seguono si assume che i dati di input siano già distribuiti ai processori del cluster.

Prima di procedere, si allega di seguito un'illustrazione dell'approccio parallelo adottato quando necessario ottenere l'array finale.



Si consideri M come la dimensione del singolo vettore a e del vettore b . Di conseguenza la somma delle due dimensioni vale $2M$ che indichiamo con N . La complessità computazionale con $p = 1$ dell'algoritmo sequenziale è pari a $T_1(N) = N \cdot t_{calc} = M \cdot t_{addizione} + M \cdot t_{moltiplicazione}$. Siccome il tempo per fare un'addizione o una moltiplicazione asintoticamente risulta essere simile, allora si possono raggruppare le due quantità.

Nel caso in cui non si consideri la necessità di riunire i dati in unico vettore di output, allora si ottiene:

$$T_p(N) = \frac{N}{p} \cdot t_{calc} = \frac{2M}{p} \cdot t_{calc}$$

Da cui segue lo che lo speed-up è modellato come:

$$S_p(N) = \left(\frac{N}{\frac{N}{p}} \right) = p$$

quindi l'overhead è:

$$O_p(N) = \left(p \cdot \frac{N}{p} - N \right) \cdot t_{calc} = 0$$

E l'efficienza risulta essere:

$$E_p(N) = \frac{p}{p} = 1$$

L'isoefficienza risultante in tal caso è la forma indeterminata $\left(\frac{0}{0}\right)$, e quindi qualsiasi dimensione del problema si sceglie, risulta ottimale. Infine, dall'applicazione della forma base della legge di Ware-Amdhal (viste le circostanze), si ottiene che:

$$S_p(N) = \frac{1}{\alpha - \left(\frac{1-\alpha}{p}\right)} = p$$

dal momento che:

$$\left\{ (1-\alpha) = \left(p \cdot \frac{\frac{N}{p}}{N} \right) = 1 \right\} \Leftrightarrow \{\alpha = 0\}$$

Supponiamo che sia necessario raccogliere le porzioni del vettore c calcolate localmente da ogni processore del cluster in un unico vettore. In tal caso e considerando anche la non esatta divisibilità della dimensione del problema per il numero dei processori del cluster, si ottiene che:

$$T_p(N) = \left[2 \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil \cdot c \cdot \left(\sum_{i=1}^{\log_2(p)} \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil^i \right) \right] \cdot t_{calc}$$

Questa relazione è valida dal momento che dopo aver terminato le operazioni relative al *saxpy*, se si immagina un albero binario invertito per la collezione dei risultati, ad ogni passo vengono inviati da ogni processore attivo in quel passo il doppio degli elementi inviati al passo precedente dai processori attivi in quel passo. Cioè i processori attivi man mano che ci si avvicina alla radice (processore *master*) si dimezzano e si raddoppia la lunghezza dell'array inviato da ciascun processore attivo per quel passo. Inoltre, $c \in [2, 3] \in \mathbb{R}$.

Da questa relazione segue che lo speed-up è:

$$S_p(N) = \left(\frac{2M \cdot t_{calc}}{\left[2 \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil \cdot c \cdot \left(\sum_{i=1}^{\log_2(p)} \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil^i \right) \right] \cdot t_{calc}} \right) < p$$

Infatti, il termine:

$$\left(\sum_{i=1}^{\log_2(p)} \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil^i \right) > 0 \text{ se } \{M > 0 \wedge p > 1\}$$

Segue che l'overhead è:

$$O_p(N) = \left(\left(p \cdot \left[2 \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil \cdot c \cdot \left(\sum_{i=1}^{\log_2(p)} \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil^i \right) \right] \cdot t_{calc} \right) - (2M \cdot t_{calc}) \right) = \left(c \cdot \left(\sum_{i=1}^{\log_2(p)} \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil^i \right) \cdot t_{calc} \right)$$

E l'efficienza risulta essere:

$$E_p(N) = \left[\frac{\left(\frac{2M \cdot t_{calc}}{\left[2 \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil \cdot c \cdot \left(\sum_{i=1}^{\log_2(p)} \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil^i \right) \right] \cdot t_{calc}} \right)}{p} \right] = \left[\left(\frac{2M \cdot t_{calc}}{p \cdot \left[2 \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil \cdot c \cdot \left(\sum_{i=1}^{\log_2(p)} \left\lceil \frac{M}{p} \right\rceil^i \right) \right] \cdot t_{calc}} \right) \right] < 1$$

L'isoefficienza risultante in questo caso risulta essere:

$$I(N_0, p_0, p_1) = \frac{\left(c \cdot \left(\sum_{i=1}^{\log_2(p_1)} \left\lceil \frac{M_1}{p_1} \right\rceil^i \right) \cdot t_{calc} \right)}{\left(c \cdot \left(\sum_{i=1}^{\log_2(p_0)} \left\lceil \frac{M_0}{p_0} \right\rceil^i \right) \cdot t_{calc} \right)} \cdot 2M_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\log_2(p_1)} \left\lceil \frac{M_1}{p_1} \right\rceil^i \right) \cdot t_{calc}}{\left(\sum_{i=1}^{\log_2(p_0)} \left\lceil \frac{M_0}{p_0} \right\rceil^i \right) \cdot t_{calc}} \cdot 2M_0$$

Infine, dall'applicazione della forma generalizzata della legge di Ware-Amdhal (viste le circostanze), si ottiene che:

$$S_p(N) = \frac{1}{\alpha_1 + \left(\sum_{k=2}^{p-1} \left(\frac{\alpha_k}{k} \right) \right) + \frac{\alpha_p}{p}} = ?$$

3. Descrizione dell'algoritmo parallelo

Descrivere il proprio algoritmo nel dettaglio, riportando possibilmente i passi salienti in pseudo-codice e spiegando le scelte implementative (es. come assegnare dimensioni del sotto-problema, come gestire i processori/core, se e quando è necessario effettuare controlli, ecc.).

4. Input e Output

Il software realizzato, il codice, i file di configurazione e i file contenenti i dati di input e di output sono organizzati nel seguente modo. La cartella principale è "saxpy_mpi", all'interno della quale è possibile trovare le seguenti cartelle:

- la cartella "src" contiene i codici sorgenti, le librerie, il makefile, il file di configurazione shell per il setup dell'ambiente Docker-MPI (setup.sh), il file di configurazione shell per avviare il software parallelo sui vari nodi del cluster di processori ed il "machinefile" per la configurazione dei nodi del cluster;
- la cartella "doc" contiene la documentazione esterna;
- la cartella "conf" contiene i file di configurazione. In ogni file di configurazione sono presenti le seguenti informazioni divise dal carattere *newline*: tipologia di operazione *saxpy* da eseguire (se in sequenziale (0) oppure in parallelo (1)), percorso relativo del file contenente i dati di input e percorso relativo del file contenente i dati di output;
- la cartella "data" contiene i files contenenti i dati di input e di output, in cui ogni singolo dato è separato dagli altri dal carattere *newline*. Si precisa che all'interno del file contenente i dati di input sono presenti le seguenti informazioni: lunghezza del singolo vettore *arraySize* (così facendo verranno letti $(2 \cdot \text{arraySize})$ elementi), *arraySize* scalari rappresentanti gli elementi appartenenti al vettore *a*, *arraySize* scalari rappresentanti gli elementi appartenenti al vettore *b*, e infine lo scalare α . Nel file contenente i dati di output invece, sono presenti i soli valori appartenenti al vettore *c*.

Si precisa che gli elementi dei due vettori e lo scalare sono di tipo *float*.

A questo punto una volta preparati il file di configurazione (.conf), il file contenente i dati di input (.dat) e una volta compilato i sorgenti mediante il *makefile* fornito, è possibile avviare il software parallelo in ambiente MPI-Docker mediante lo script *employ.sh*. Sarà necessario fornire due parametri: il percorso relativo del file di configurazione scelto e l'identificativo del processore *master*.

In output verrà prodotto il file *outputData.dat* nel path specificato opportunamente nel file di configurazione usato. Inoltre, verrà mostrato a video le seguenti informazioni: la dimensione dei vettori utilizzata in input, lo scalare α utilizzato e il tempo massimo di esecuzione impiegato fra i vari tempi di esecuzione dei differenti processori appartenenti al cluster. Si precisa che non sono previste interazioni dell'utente durante la fase di calcolo, né durante l'intera esecuzione del software stesso. In questo modo, si evitano i tempi e i ritardi dovuti all'I/O.

Si segnala che in output potrebbero essere presenti dei *warning* in caso di dimensioni del problema molto elevate. Nonostante ciò, gli output prodotti risultano essere tutti corretti. Infine, si precisa che sono state gestite tutte (a meno di errore umano) le situazioni possibili di errore generate da tutte le routine e operazione rispettivamente invocate ed effettuate. In caso di mancato inserimento di opportuni file di configurazione, di dati di input, di parametri da passare da linea di comando, di dimensioni dell'array negative o pari a zero, il software segnalerà l'errore e terminerà l'esecuzione.

5. Routine implementate

Il software potrà essere composto da una o più routine. Alcune implementate dal programmatore, altre predefinite e appartenenti a librerie non standard del C, come API di MPI o OpenMP. È necessario illustrarle.

6. Analisi delle performance del software

Prendere i tempi d'esecuzione e riportarli in tabelle e grafici significativi, al variare della dimensione dell'input e del numero di processori/core impiegati. Corredare lo studio anche con grafici di speed-up ed efficienza.

7. Esempi d'uso

Riportare esempi di esecuzione del software, così come appare a video. Se ci sono casi particolari o casi limite, riportare almeno un esempio.

8. Bibliografia e sitografia

- “MPICH – Model MPI Implementation Reference Manual”, William Groop, Ewing Lusk, Nathan Doss, Anthony Skjellum - January 13, 2003
- “MPICH User's Guide” – Pavan Balaji Sudheer Chunduri William Gropp Yanfei Guo Shintaro Iwasaki Travis Koehring Rob Latham Ken Raffenetti Min Si Rajeev Thakur Hui Zhou – 7 April, 2022
- “Richiami di Calcolo Parallelo”, Livia Marcellino, Luigia Ambrosio
- mpich.org/static/docs/
- stackoverflow.com, Jonathan Dursi
- mpi-forum.org/docs/mpi-1.1/mpi-11-html/node70.html#Node70
- valgrind.org

9. Appendice

Riportare il codice scritto, compresa la DOCUMENTAZIONE INTERNA: commentate opportunamente il codice perché sia di facile lettura e comprensione per chi lo analizza, che ne potrà dare così migliore valutazione. Per un eventuale approfondimento, si consiglia di consultare il sito:

<http://www.nag.co.uk/numeric/FD/manual/html/FDlibrarymanual.asp>

dove sono disponibili documentazioni esterne delle routine di una libreria (parallela) commerciale.