

Название организации

Диссертация допущена к защите  
зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ ФИО зав. кафедрой

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 г.

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
**на соискание ученой степени**  
**МАГИСТРА**

Тема: **Тема диссертации**

Направление: 111111 – Название направления

Магистерская программа: 111111 – Название программы

Выполнил студент гр. 1111/1 \_\_\_\_\_ ФИО автора

Научный руководитель,

д. ф.-м. н., ст. н. с. \_\_\_\_\_ ФИО руководителя

Рецензент,

д. ф.-м. н., в. н. с. \_\_\_\_\_ ФИО рецензента

Консультант по вопросам

охраны труда,

к. т. н., доц. \_\_\_\_\_ ФИО консультанта

# Оглавление

<b>Введение</b>	4
<b>Глава 1. Картирование с прямой и обратной моделью сенсора</b>	5
1.1. Картирование с обратной моделью сенсора	5
1.1.1. Обратная модель сенсора	7
1.1.2. Недостатки метода картирования с обратной моделью	8
1.2. Картирование с прямой моделью сенсора	9
1.2.1. Прямая модель сонара Труна	9
1.2.2. Картирование с прямой моделью	11
<b>Глава 2. Картирование методом стохастического градиента</b>	12
2.1. Функционал правдоподобия карты проходимости	12
2.2. Алгоритм картирования стохастическим градиента	14
2.3. Работа в режиме реального времени	16
<b>Глава 3. Картирование методом градиентного спуска</b>	17
3.1. Модель сонара	17
3.1.1. Функция правдоподобия	17
3.1.2. Вычисление весовых коэффициентов	20
3.2. Построение карты проходимости методом градиентного спуска	22
<b>Глава 4. Результаты</b>	25
4.1. Генерация синтетических данных с помощью прямой модели	25
4.2. Детали реализации	26
4.2.1. Область видимости сонара	26
4.2.2. Диаграмма чувствительности сонара	27
4.3. Численные эксперименты и результаты	28
4.3.1. Алгоритм картирования методом градиентного спуска	28

Заключение . . . . .	29
Список литературы . . . . .	30
Приложение А. Заголовок приложения . . . . .	31

# Введение

## Глава 1

# Картирование с прямой и обратной моделью сенсора

В этой главе рассматриваются два ставших уже классическими подхода построения карт проходимости. TODO

## 1.1. Картирование с обратной моделью сенсора

Пусть  $m_i$  - клетка карты проходимости  $m$ . Будем считать, что каждая клетка  $m_i$  - бинарная случайная величина, принимающая два значения: {свободная, занятая}. *Наблюдением* сенсора  $z_t$  будем называть измерение и позу датчика в момент времени  $t$ , где это измерение было сделано. Вместо того, чтобы напрямую решать задачу картирования, будем искать вероятность занятости некоторой карты  $m$  при наблюдениях  $z_1, \dots, z_T$

$$p(m|z_1, \dots, z_T) \equiv p(m|z_{1,T})$$

Основная проблема в том, что карта проходимости  $m$  принадлежит пространству большой размерности. Чтобы обойти эту проблему при оценке  $p(m|z_{1,T})$ , вводится предположение о том, что клетки карты  $m_i$  - случайные, независимые величины. Тогда

$$p(m|z_{1,T}) = \prod_i p(m_i|z_{1,T})$$

Таким образом, достаточно понять, как можно оценить вероятность занятости клетки  $i$  при известных наблюдениях  $z_{1,T}$ . Разложим  $p(m_i|z_t)$  по правилу Байеса:

$$p(m_i|z_{1,t}) = \frac{p(z_t|m_i, z_{1,t-1})p(m_i|z_{1,t-1})}{p(z_t|z_{1,t-1})} \quad (1.1)$$

В предположении статичности окружения, ясно, что наблюдение  $z_t$  не зависит от предыдущих наблюдений, при условии заданной карты проходимости  $m$ :

$$p(z_t|m, z_{1,t-1}) = p(z_t|m)$$

Это действительно верно в предположении о статичности окружения. Однако, в этом методе делается более сильное утверждение: *наблюдение  $z_t$  не зависит от предыдущих измерений при заданном состоянии клетки  $m_i$ , в независимости от состояний соседних клеток.*

$$p(z_t|m_i, z_{1,t-1}) = p(z_t|m_i) \quad (1.2)$$

Подставив в (1.1) формулу выше, снова воспользуемся правилом Байеса

$$p(m_i|z_{1,t}) = \frac{p(z_t|m_i)p(m_i|z_{1,t-1})}{p(z_t|z_{1,t-1})} = \frac{p(m_i|z_t)p(z_t)p(m_i|z_{1,t-1})}{p(m_i)p(z_t|z_{1,t-1})} \quad (1.3)$$

Напомним, что эта формула написана для случая, когда  $m_i$  занята. Похожую формулу можно получить для свободной  $m_i$ :

$$p(\overline{m_i}|z_{1,t}) = \frac{p(\overline{m_i}|z_t)p(z_t)p(\overline{m_i}|z_{1,t-1})}{p(\overline{m_i})p(z_t|z_{1,t-1})} \quad (1.4)$$

Поделив (1.3) на (1.4) получим

$$\frac{p(m_i|z_{1,t})}{p(\overline{m_i}|z_{1,t})} = \frac{p(m_i|z_t) p(\overline{m_i}) p(m_i|z_{1,t-1})}{p(\overline{m_i}|z_t) p(m_i) p(\overline{m_i}|z_{1,t-1})} \quad (1.5)$$

Заметим, что  $p(\overline{m_i}) = 1 - p(m_i)$ . Поэтому, переписав (1.5) в виде log-odds  $l(p(m_i)) = \log \frac{p(m_i)}{1-p(m_i)}$ , окончательно получаем формулу позволяющую рекурсивно вычислять  $l(m_i|z_{1,t})$

$$l(m_i|z_{1,t}) = l(m_i|z_t) - l(m_i) + l(m_i|z_{1,t-1}) \quad (1.6)$$

## Алгоритм 1: Картирование с обратной моделью сенсора

*Инициализация*

**for** *all*  $m_i$  *in*  $m$  **do**

$l_i = \log \frac{p(m_i)}{1-p(m_i)}$

**end**

*Рекурсивное обновление log-odds*

**for** *all*  $z_t$  **do**

**for** *all*  $m_i$  *in*  $m$  **do**  
         $l_{i+} = \log \frac{p(m_i|z_t)}{1-p(m_i|z_t)} - \log \frac{p(m_i)}{1-p(m_i)}$   
    **end**

**end**

*Получение вероятностей из log-odds*

**for** *all*  $m_i$  *in*  $m$  **do**

$p(m_i|z_{1:T}) = 1 - e^{-l_i}$

**end**

В (1.5) вероятность  $p(m_i)$  выражает наши априорные представления о карте, обычно её полагают равной 0.5, считая что какой-либо информации о занятости всей карты в целом нам ничего определенного неизвестно.

### 1.1.1. Обратная модель сенсора

Величину  $p(m_i|z_t)$  называют *обратной моделью сенсора (inverse sensor model)*, выражающую вероятность занятости клетки  $m_i$  при известном наблюдении  $z_t$ . Эта модель называется обратной, так как она обратна процессу измерения – расстояние до объекта в такой модели определяется показанием сонара, хотя в реальности наблюдение сонара определяется расстоянием до препятствия. Пример того как выглядит эта вероятность можно увидеть на рисунке TODOInverseModelExample.

Заметим, что обратная модель *напрямую не содержит в себе зависимость от соседних клеток*. Это очень важное допущение, которое предпола-

гает, что о состоянии клетки можно сделать выводы основываясь только на *наблюдениях*, независимо от соседних клеток карты. В этом заключается основной проблема этого метода, когда гипотеза о независимости клеток не работает.

### 1.1.2. Недостатки метода картирования с обратной моделью

Важное предположение о независимости клеток, необходимое для разложения вероятности  $p(m)$  на произведение всех  $p(m_i)$ , является в некоторых случаях существенным. Рассмотрим в качестве примера ситуацию, когда для картирования используются идеальные сонары (без ошибки измерений). В отличие от лазерного дальномера, сонар имеет достаточно широкую область видимости, которая часто представляется в виде конуса, пересекающий множество клеток (см рис `TODOInverseSonarsExample`). Измерение сонара говорит о следующем - на конце конуса должно находиться препятствие, которое должно хорошо объяснять полученное измерение.

На рисунке `TODOInverseSonarsExample` изображены два сонара, области видимости которых пересекаются в нескольких клетках. Для левого сонара эти клетки принадлежат области препятствия, а для правого - области свободной от препятствия. В результате работы алгоритма мы получим, противоречивую информацию о занятости этих клеток: одно измерение говорит о том, что эти клетки должны быть заняты, другое - что свободны. Легко понять, что эти клетки должны быть свободны, так как есть другие клетки хорошо объясняющие эти 2 измерения (Рис `TODOInverseSonarsExample`). Однако эта важная дополнительная информация не используется методом, в силу предположения о независимости клеток.

В случае идеальных лазерных дальномеров, у которых очень узкая область видимости, эта проблема практически не касается.

Таким образом, можно сделать вывод, что по крайней мере в случае сонаров, использовать этот метод с предположением о независимости клеток нельзя. Но напрямую вычислить вероятность  $p(m|z_{1-t})$  не представляется возможным,



так как пространство всевозможных карт огромно.

Себастьян Трун (Sebastian Thrun) в работе TODOThrun предложил другой метод картирования, лишенный проблем выше.

## 1.2. Картирование с прямой моделью сенсора

Величина  $p(z|m)$  представляет собой вероятностное распределение наблюдения сенсора  $z$  при некоторой заданной карте проходимости  $m$ , которую будем называть *прямой моделью (forward model)* по аналогии с обратной моделью  $p(m|z)$ . Интуитивно прямая модель показывает на сколько хорошо наблюдение  $z$  объясняет карту проходимости  $m$ . Далее приведено подробное описание прямой модели сонара Себастьяна Труна, так как в дальнейшем оно будет использовано в работе.

### 1.2.1. Прямая модель сонара Труна

Предполагается, что сонар выдает измерения  $r$  принадлежащие  $[R_{min}, R_{max}]$ . Измерение  $r$  может быть получено в результате двух сценариев:

1. **Случайный выброс.** С вероятностью  $p_{rand}$  сонар выдает случайное значение дальности, распределенное равномерно на  $[R_{min}, R_{max}]$ . Этот случай описывает возможные ошибочные измерения сенсора, которые могут получиться в результате переотражений, зашумлений другими сонарами и т.д.
2. **Обычный случай.** С вероятностью  $p_{hit}$  некоторое препятствие, которое находится в области видимости сонара, может отразить волну, таким образом сонар измерит дистанцию до этого препятствия с некоторой гауссовой ошибкой. С вероятностью  $1 - p_{hit}$  препятствие волну не отразит, но волна может отразиться от либо следующего препятствия, либо сонар в качестве измерения вернет максимальное  $R_{max}$ .

В качестве примера рассмотрим случай на Рис Сонар3Препятствия. Видно что самое близкое препятствие не лежит в конусе видимости сонара, поэтому при обычном сценарии работы сонара оно не влияет на  $p(z|m)$ . С вероятностью  $p_{rand}$  сонар выдаст ошибочное измерение. Пусть  $d_1$  и  $d_2$  расстояния до первого и второго препятствия в области видимости сонара соответственно. С вероятностью  $(1 - p_{rand})p_{hit}$  сонар обнаружит первое препятствие и вернёт  $d_1 + e$ , где  $e$  - гауссова ошибка. Однако с вероятностью  $(1 - p_{rand})(1 - p_{hit})$  первое препятствие не будет замечено сенсором. Аналогично с вероятностью  $(1 - p_{rand})(1 - p_{hit})p_{hit}$  будет обнаружено второе препятствие. С вероятностью  $(1 - p_{rand})(1 - p_{hit})(1 - p_{hit})$  сенсор вернет максимальное измерение  $R_{max}$ .

Теперь опишем эту модель формально. Пусть внутри области видимости сонара находятся  $K$  препятствий, отсортированных в порядке возрастания дистанции  $d_k$ . Через  $\{c_*, c_0, c_{1,K}\}$  будем обозначать множество различных сценариев работы сонара, через  $c_*$  - случайный выброс,  $c_0$  - измерение  $R_{max}$ .

1. Пусть реализовался случай, когда измерение было порождено событием  $c_k$ ,  $k \in \{0, \dots, K\}$

$$p(z|m, c_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z-d_k)^2}{\sigma^2}} \quad (1.7)$$

2. Если реализовался случай  $c_*$ , то

$$p(z|m, c_*) = \frac{1}{R_{max}} \quad (1.8)$$

Таким образом, распределение  $p(z|m)$  является смесью распределений

$$p(z|m) = \sum_{c_i \in \{c_*, c_0, K\}} p(z|m, c_i) p(c_i) \quad (1.9)$$

Из рассуждений выше запишем априорную вероятность  $p(c_k)$

$$p(c_k) = \begin{cases} p_{rand}, & k = * \\ (1 - p_{rand})(1 - p_{hit})^K, & k = 0 \\ (1 - p_{rand})(1 - p_{hit})^{k-1}p_{hit}, & k > 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} p(z|m) = & \frac{1}{R_{max}}p_{rand} \\ & + \sum_{i \in \{1, \dots, K\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z-d_k)^2}{\sigma^2}} (1 - p_{rand})(1 - p_{hit})^{k-1}p_{hit} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z-R_{max})^2}{\sigma^2}} (1 - p_{rand})(1 - p_{hit})^K \end{aligned} \quad (1.11)$$

### 1.2.2. Картирование с прямой моделью

Придумать какие-то слова про картирование с помощью ЕМ алгоритма и какой-нибудь ещё метод. БЛАБЛА

По сравнению с методами картирования, которые используют обратную модель, алгоритмы с прямой моделью сохраняют зависимости между клетками карты, что позволяет лучше восстанавливать карту проходимости. На Рис ОбрПрямДверь видно, что метод из работы РаботаТрун восстановила дверной проем, в отличии от метода обратной модели.

Основной недостаток этих методов заключается в том, что они не работают в режиме реального времени и требуют больших вычислительных ресурсов для поиска оптимальной карты.

## Глава 2

# Картирование методом стохастического градиента

Используя прямую модель Труна, мы предлагаем метод картирования, который использует преимущества прямой модели, при этом допускает реализацию, работающую в режиме реального времени. Как и раньше, через  $m$  будем обозначать карту проходимости. Через  $S$  - множество сонаров  $s$ . Через  $o(m_i)$  будем обозначать занятость клетки  $m_i$ :  $o(m_i) = 0$  - клетка проходима,  $o(m_i) = 1$  - клетка непроходима.

Вначале введем функционал, состоящий из прямой модели сенсора и априорных представлений об окружении. Затем случайным градиентным спуском будем максимизировать величину этого функционала.

## 2.1. Функционал правдоподобия карты проходимости

Введем следующий функционал от  $m$  при заданных наблюдениях  $S$ :

$$\Phi(m, S) = \phi_{sonars}(m, S) + \phi_{occupancy}(m) + \phi_{borders}(m), \quad (2.1)$$

Рассмотрим составляющие функционала (2.1)

1.  $\phi_{sonars}$  - распределение наблюдений сонаров  $z_s$  при заданной карте проходимости  $m$ .

$$\phi_{sonars}(m, S) = p(z_1, \dots, z_S | m) = \prod_{s \in S} p(z_s | m) \quad (2.2)$$

Эта часть функционала (2.1) показывает на сколько хорошо карта  $m$  объясняет показание сонаров  $s \in S$ . В работе в качестве модели сонара

$p(z_s|m)$  используется прямая модель Труна. Вместо (2.2) в окончательной формуле используется логарифм правдоподобия:

$$\phi_{sonars}(m, S) = \log p(z_1, \dots, z_S|m) = \sum_{s \in S} \log p(z_s|m) \quad (2.3)$$

2.  $\phi_{occupancy}(m)$  отвечает за априорные знания о проходимости карты

$$\phi_{occupancy}(m) = \sum_{m_i} w_o o(m_i) \quad (2.4)$$

В зависимости от значения весового коэффициента  $w_o$  можно регулировать наше первоначальное представление о карте, без учета наблюдений сонаров. Например, при  $w_o < 0$  и  $\phi_{sonars}(m, S) = const$  пустая карта будет максимизировать  $\Phi(m, S)$ .

3.  $\phi_{borders}(m)$  является суммой штрафов для каждой клетки, пропорциональный квадрату числа границ между проходимой и непроходимой областью этой ячейки

$$\phi_{borders}(m) = \sum_{m_i} w_b n^2(m_i) \quad (2.5)$$

Функционал (2.5), как и (2.4), отвечает за наши априорные знания о окружении и имеет простую интерпретацию. Естественнo считать что, если большинство соседей заняты, то и рассматриваемая клетка, скорее всего, непроходима. Аналогичную гипотезу можно сформулировать и для незанятых клеток. Поэтому, считая  $w_b < 0$ , за каждого соседа, который не согласуется с проходимостью, мы штрафует. Абсолютная величина коэффициента  $w_b$  позволяет регулировать относительный вклад в функционал (2.1).

Таким образом задача картирования сводится к задаче максимизации (2.1) по всем возможным картам проходимости

$$m^*(S) = \underset{m}{\operatorname{argmax}} \left( \phi_{sonars}(m, S) + \phi_{occupancy}(m) + \phi_{borders}(m) \right) \quad (2.6)$$

## 2.2. Алгоритм картирования стохастическим градиента

Оптимизационная задача (2.6) решается методом стохастического градиента. Каждый оптимизационный шаг состоит из следующих действий:

1. Случайным образом выбирается клетка  $m_i$  и значение проходимости  $o(m_i)$  инвертируется

$$o^*(m_i) = 1 - o(m_i)$$

2. Для нового значения проходимости клетки  $m_i$  пересчитываются  $\phi_{sonars}(m, S)$ ,  $\phi_{occupancy}(m)$  и  $\phi_{borders}(m)$ .

В слагаемом  $\phi_{sonars}(m, S) = \prod_{s \in S} p(z_s | m)$  меняются только те члены произведения, для которых инвертированная клетка лежит в области видимости сенсора. Поэтому можно достаточно быстро пересчитать новое значение  $\phi_{sonars}^*(m, S)$ .

В силу того, что слагаемые  $\phi_{occupancy}(m)$  и  $\phi_{borders}(m)$  являются суммами слагаемых, величина которых зависит только значения проходимости самой клетки и её ближайших соседей, поэтому ясно, что при инвертировании одной клетки можно быстро и понятным способом пересчитать новые значения  $\phi_{occupancy}^*(m)$  и  $\phi_{borders}^*(m)$ .

3. Если  $\Phi_{new}(m, S) = \phi_{sonars}^*(m, S) + \phi_{occupancy}^*(m) + \phi_{borders}^*(m) > \Phi(m, S)$ , то сохраняем новое значение  $o^*(m_i)$  сохраняя новое состояние, иначе возвращаемся в предыдущее состояние.

Для того чтобы избежать застревания в локальных минимумах, добавляется рандомизация сохранения нового состояния: инвертирование сохраняется с вероятностью  $p_{rand}$ , вне зависимости от величины  $\Phi_{new}(m, S)$ .

**Алгоритм 2:** Оффлайн версия картирования методом стохастического градиента

**Data:**  $m^0$  - начальное состояние карты,  $S$  - множество наблюдений

сонаров,  $k$  - число оптимизационных шагов

**Result:**  $m$  - карта проходимости

*инициализация;*

**begin**

$m = m^0;$

$\phi_{sonars}(m, S), \phi_{occupancy}(m), \phi_{borders}(m);$

$\Phi(m, S) = \phi_{sonars}(m, S) + \phi_{occupancy}(m) + \phi_{borders}(m);$

**end**

**for**  $i = 0; i < k; i = i + 1$  **do**

случайным образом выбирается клетка карты  $m_i$ ;

$o^*(m_i) = 1 - o(m_i);$

пересчитать  $\phi_{sonars}^*(m, S), \phi_{occupancy}^*(m), \phi_{borders}^*(m);$

$\Phi^*(m, S) = \phi_{sonars}^*(m, S) + \phi_{occupancy}^*(m) + \phi_{borders}^*(m) > \Phi(m, S);$

**if**  $\Phi^*(m, S) > \Phi(m, S)$  *или*  $rand(0, 1) < p_{rand}$  **then**

$m = m^* \quad \phi_{sonars}(m, S) = \phi_{sonars}^*(m, S);$

$\phi_{occupancy}(m) = \phi_{occupancy}^*(m);$

$\phi_{borders}(m) = \phi_{borders}^*(m);$

$\Phi(m, S) = \Phi^*(m, S);$

**end**

**end**

В этой работе имплементирована оффлайн версия алгоритма 2, которая на вход получает сразу все наблюдения сонаров, и затем оптимизирует карту проходимости.

### 2.3. Работа в режиме реального времени

Как уже говорилось ранее можно реализовать алгоритм, который работает в режиме реального времени. Далее предлагаются способы того, каким образом это можно сделать.

В режиме реального времени оптимизация ведется одновременно с получением новых данных. Ясно, что если при долгом и непрерывном сборе данных, в определенный момент времени количество наблюдений превысит тот их объем, который возможно обрабатывать в режиме реального времени. Поэтому необходимо выбирать лишь ту часть данных, которые будут алгоритмом в процессе оптимизации. Здесь предлагаются следующие способы выбора наблюдений для использования в оптимизации:

- Использовать скользящее окно и рассматривать последние  $N_{max}$  измерений - таким образом мы гарантируем, что каждый пересчет  $\phi_{sonars}(m, S)$  не превысит  $T_{max} = \Delta_t N_{max}$ , где  $\Delta_t$  - время пересчета одного сонара.
- Для каждой клетки хранить номера измерений сонаров, которые содержат её в поле зрения. Ограничение числа привязанных к каждой ячейке измерений значением  $N_{max}$  гарантирует, что для каждой ячейки пересчет  $\phi_{sonars}(m, S)$  будет занимать времени не более  $T_{max} = \Delta_t N_{max}$ . Предлагается выбирать  $N_{max}$  последних наблюдений.
- Будем использовать трехмерную сетку пространства  $(x, y, \phi)$ , каждый узел этой сетки хранит список наблюдений, которые принадлежат области пространства  $(\Delta x, \Delta y, \Delta \phi)$ , соответствующей этому узлу. Тогда в каждом узле можно хранить  $N_{max}$  последних измерений или даже эти измерения некоторым образом фильтровать. При этом масштаб этой сетки, может не совпадать с масштабом карты проходимости.



## Глава 3

# Картирование методом градиентного спуска

В этой главе предлагается другой метод построения карты проходимости. В отличие от других методов картирования с прямой моделью, в которых задача сводится к задаче оптимизации в конечномерных пространствах большой размерности, предлагаемый метод решает эту задачу в бесконечномерном пространстве. Для этого нужно переформулировать задачу картирования.

Представим клетки карты проходимости  $m$  как переменные  $x_i$ , которые принимают значения от 0 до 1 - это значение характеризует степень занятости ячейки. Как и раньше будем искать такую карту  $m^*$ , которая наилучшим образом объясняет наблюдения сонаров, и для этого введем функцию, которая описывает, насколько хорошо карта  $m$  объясняет измерения сонаров. В этом методе используется прямая модель сонара, отличная от модели Труна. Далее следует описание используемой модели.

### 3.1. Модель сонара

#### 3.1.1. Функция правдоподобия

Измерение сонара  $r$  несет в себе не только информацию о том, что на расстоянии  $r$  скорее всего находится препятствие, но и о том, что на расстоянии меньше  $r$  препятствия маловероятны. Поэтому каждое наблюдение сонара  $r$  можно интерпретировать следующим образом:

- В некоторой области, расположенной на расстоянии примерно  $r$  от сонара, располагается препятствие такого размера, чтобы сонар получил от него отражение на таком расстоянии.
- В области перед сонаром на расстоянии меньше  $r$ , препятствия определен-

ных размеров, которые могли стать причиной показания сонара с меньшим  $r$ , отсутствуют.

Через  $\Omega_{free}(m, z)$  будем обозначать множество переменных  $x_i$ , которые соответствуют клеткам карты, находящимся в области видимости сонара, где не должно быть препятствий в соответствии с наблюдением  $z = (x, y, \phi, r)$ . Множество переменных  $x_i$ , которые соответствуют ячейкам карты, располагающимся в луче сонара там, где должно находиться препятствие, будем обозначать как  $\Omega_{occ}(m, z)$ .

В работе предполагается, что показание сонара определяется только суммарной (как будет показано ниже, взвешенной) площадью препятствий внутри областей  $\Omega_{free}$  и  $\Omega_{occ}$ , и не зависит от взаимного расположения занятых клеток в них. Ясно, что на самом деле, на измерение сонара сильно влияет направление нормали к поверхности препятствия. Действительно, легче всего обнаружить то препятствие, поверхность которого перпендикулярна лучу сонара. Кроме того, сонары легче детектируют одно препятствие, расположенное в его поле зрения, чем несколько препятствий аналогичной формы и суммарной площади, которые рассредоточены в области луча. Данные эффекты в работе не рассматриваются.

Далее рассмотрим функцию правдоподобия  $\psi(m, z)$ , которая показывает, насколько хорошо карта  $m$  объясняет показание сонара  $z$ .  $\psi(m, z)$  состоит из двух слагаемых:  $\psi_{free}(m, z)$  отвечает за отсутствие препятствий в области  $\Omega_{free}(m, z)$ , за наличие препятствий в области  $\Omega_{occ}(m, z)$  —  $\psi_{occ}(m, z)$ . Далее для наблюдения сонара  $z_s$  и карты  $m$  будем коротко записывать

$$\psi^s = \psi_{free}^s + \psi_{occ}^s \quad (3.1)$$

Пусть  $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$  - множество всех наблюдений сонаров. Тогда  $\Psi(m, Z)$  - функция правдоподобия всех измерений сонаров. В этом алгоритме считается, что  $\Psi(m, Z)$  является аддитивной относительно каждого наблюдения  $z_s$ , все

показания датчиков имеют одинаковую достоверность и входят в  $\Psi(m, Z)$  с равным весом. Поэтому значение функции правдоподобия  $\psi^s$  должно принимать одинаковые максимальные и минимальные значения для различных сонаров. Постулируется, что для всех  $s \in \{1, \dots, n\}$  значения  $\psi_{free}^s$  и  $\psi_{occ}^s$  принимают значения от 0 до 1. Таким образом

$$\Psi(m, Z) = \sum_{s \in Z} \psi_{free}^s + \psi_{occ}^s \quad (3.2)$$

Теперь рассмотрим, каким образом должно формироваться значение  $\psi_{free}^s$  для области  $\Omega_{free}^s$ . Ясно, что занятые клетки внутри  $\Omega_{free}^s$  противоречат наблюдению сонара. Однако, если чувствительность датчика низкая, то одна занятая ячейка не является достаточным основанием полагать, что показание сенсора не объяснено картой  $m$ . Таким образом внутри  $\Omega_{free}^s$  может быть некоторое количество занятых клеток, которое зависит от чувствительности сонара. При этом не все ячейки в  $\Omega_{free}^s$  являются равнозначными: состояние тех клеток, которые лежат ближе к сонару, должно вносить больший вклад в  $\psi_{free}^s$ , так как отражение импульса от них более вероятно, чем от более удаленных занятых клеток. Поэтому, чтобы получить оценку эффективного количества препятствий в  $\Omega_{free}^s$ , рассмотрим взвешенную сумму

$$X = \sum_{x_i \in \Omega_{free}^s} x_i \omega_i \quad (3.3)$$

где  $\omega_i$  - вес, определяющий, насколько важной является ячейка  $x_i$ . Если взвешенная сумма  $X$  меньше некоторого порогового значения  $X_{free}^s$ , то наблюдение  $z_s$  считается хорошо объясненным. Если же сумма  $X$  превышает  $X_{free}^s$ , то начисляется штраф, увеличивающийся с возрастанием  $X$ . Будем считать, что  $\psi_{free}^s$  является кусочно линейной функцией вида

$$\psi_{free}^s = \begin{cases} \alpha_{free} X, & X < X_{free}^s \\ \alpha_{free} X_{free}^s + \beta_{free} (X - X_{free}^s), & X \geq X_{free}^s \end{cases} \quad (3.4)$$

Учитывая ограничение  $\psi_{free}^s(1) = 1$ , получаем

$$\beta_{free} = \frac{1 - \alpha_{free} X_{free}^s}{1 - X_{free}^s} \quad (3.5)$$

Параметр  $\alpha_{free} > 0$  должен быть достаточно малым, но отличным от нуля. Это нужно для того, чтобы был ненулевой штраф при значениях  $X \leq X_{free}^s$ , когда измерение сонара хорошо объяснено в области  $\Omega_{free}^s$ , и, таким образом, метод градиентного спуска мог бы сойтись.

Аналогичным образом, будем считать, что, при ограничении  $\psi_{occ}^s(1) = 0$  и малом  $\alpha_{occ} > 0$ ,  $\psi_{occ}^s$  является кусочно линейной функцией вида

$$\psi_{occ}^s = \begin{cases} 1 - \beta_{occ} X, & X < X_{occ}^s \\ 1 - \beta_{occ} X_{occ}^s - \alpha_{occ} (X - X_{occ}^s), & X \geq X_{occ}^s \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\beta_{occ} = \frac{1 - \alpha_{occ} + \alpha_{occ} X_{occ}^s}{X_{occ}^s} \quad (3.7)$$

### 3.1.2. Вычисление весовых коэффициентов

Далее через  $X_{threshold}$  будем обозначать  $X_{occ}$  и  $X_{free}$ . Для расчета порогов  $X_{threshold}$  и весов  $\omega_i$  необходимо знать чувствительность сонара. Обычно эта информация предоставляется в спецификации производителя, которая получается следующим образом: используется набор столбов различного диаметра, каждый из столбов помещается в разные точки области видимости сенсора. Таким образом для каждого из столбов определяется геометрическое место точек, в которых этот столб детектируется сонаром. Пример такой спецификации, использованный в данной работе, приведен в TODO\_specification. Можно обобщить это определение чувствительности сонара. *Диаграммой чувствительности сонара* назовем функцию  $d(x, y)$ , определённую следующим образом: для каждой точки  $(x, y)$  в системе координат сонара,  $d(x, y)$  задает минимальный диаметр препятствия  $d$ , которое обнаруживается датчиком в этой точке. Для реального сонара диаграмма чувствительности  $d(x, y)$  может быть построена

эмпирически, либо приближенно на основе спецификации. В этой работе в качестве диаграммы чувствительности используется  $s(x, y)$  - минимальная площадь препятствия, обнаруживаемая сонаром в точке  $(x, y)$ , построенная на основе `TODO_specification`.

Теперь опишем, каким образом находятся веса  $\omega_i$ , при известной диаграмме чувствительности  $d(x, y)$ . Пусть площадь одной клетки равна  $s$ . Тогда для расчёта весов  $\omega_i$  и порога  $X_{threshold}$  можно использовать следующий алгоритм:

1. Сначала происходит расчет предварительных весов: для каждой ячейки  $x_i$  выбирается вес

$$\omega_i^0 = \min\left(\frac{s}{s(x, y)}, 1\right) \quad (3.8)$$

То есть вес равен отношению площади клетки к минимальной обнаруживаемой сонаром площади в этой точке, но если площадь ячейки больше, чем эта минимальная площадь, то вес берётся равным 1. Тогда можно сказать, что сонар обнаружит препятствие, если  $X = \sum_{x_i \in \Omega} x_i \omega_i$  будет не меньше 1.

2. Чтобы значения функций  $\psi_{free}$  и  $\psi_{occ}$  были заключены между 0 и 1, необходимо чтобы  $X$  принимала значения от 0 до 1. Для этого мы проводим нормировку

$$\omega_i = \frac{\omega_i^0}{\sum \omega_i^0} \quad (3.9)$$

Тогда порог  $X_{threshold}$  берётся равным

$$X_{threshold} = \frac{1}{\sum \omega_i^0} \quad (3.10)$$

Теперь у нас есть все составляющие для того чтобы построить карту проходимости.

### Алгоритм 3: Алгоритм вычисления весов

**Data:**  $z_s$  -наблюдение,  $s(x, y)$  и  $s$  - диаграмма чувствительности и

площадь одной клетки карты

**Result:**  $(\vec{\omega}_{free}^s, \vec{\omega}_{occ}^s, X_{free}^s, X_{occ}^s)$ , где  $\vec{\omega}_{free}^s, \vec{\omega}_{occ}^s$  - вектора весов

переменных  $x_i$  в соответствии с наблюдением  $z_s$ ,  $X_{free}^s, X_{occ}^s$  -

пороговые значения

**for**  $al\ k \in \{free, occ\}$  **do**

$\vec{\omega}_{free}^s = \vec{0};$

$\vec{\omega}_{occ}^s = \vec{0};$

**for**  $all\ x_i\ in\ \Omega_k^s$  **do**

$\vec{\omega}_k^s[x_i] = \min\left(\frac{s}{s(x,y)}, 1\right);$

**end**

$S = \sum_{x_i} \vec{\omega}_k^s[x_i];$

$X_k = \frac{1}{S};$

**for**  $all\ x_i\ in\ \Omega_k^s$  **do**

$\vec{\omega}_k^s[x_i] = \frac{\omega_i^0}{S};$

**end**

**end**

## 3.2. Построение карты проходимости методом градиентного спуска

Для восстановления карты проходимости минимизируется  $\Psi(m, Z)$ , используя метод градиентного спуска. Обратим внимание, что все наши рассуждения о модели сонаров касались карт проходимости, в которых переменные  $x_i$  принимают только значения 0 или 1. Оптимизация без ограничений может привести

к значительным искажениям карты проходимости, когда  $x_i$  принимают значения больше 1 или меньше 0. Поэтому, вводятся дополнительные члены регуляризации в  $\Psi(m, Z)$ , ограничивающие значения переменных  $x_i$  между 0 и 1. Похожий способ борьбы с артефактами может быть найден, например, в статье TODO\_Nikolaev.

Чтобы заключить значения проходимости клеток карты между 0 и 1 вводится следующая регуляризация ( $c_1 > 0$ )

$$R_1^i(x_i) = \begin{cases} c_1(x_i - 1), & x_i > 1 \\ 0, & x_i \in [0, 1] \\ -c_1x_i, & x_i < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Ещё одно регуляризационное слагаемое, которое штрафует за близость значения переменной к 0.5, вводится для того, чтобы  $x_i$  принимали значения ближе к 0 или 1 ( $c_2 > 0$ )

$$R_2^i(x_i) = \begin{cases} c_2x_i, & x_i \in [0, 0.5] \\ c_2(1 - x_i), & x_i \in [0.5, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (3.12)$$

Таким образом, получаем регуляризацию

$$R^i(x_i) = R_1^i(x_i) + R_2^i(x_i) = \begin{cases} c_1(x_i - 1), & x_i > 1 \\ c_2x_i, & x_i \in [0, 0.5] \\ c_2(1 - x_i), & x_i \in [0.5, 1] \\ -c_1x_i, & x_i < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Доопределим производные для всех  $z_s$  и  $x_i$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{free}^s(X_{free}^s) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{occ}^s(X_{occ}^s) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x_i} R^i(0) &= \frac{\partial}{\partial x_i} R^i(1) = \frac{\partial}{\partial x_i} R^i(0.5) = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Предположим что начальное приближение  $m^0$  такое, что все  $x_i = 0.5$ , тогда из-за  $\frac{\partial}{\partial x_i} R^i(0.5) = 0$ , те клетки, которые не попали в область видимости ни одного сонара, соответствующие им  $x_i$  останутся равны 0.5.

Таким образом, задача построения оптимальной карты переходит в следующую задачу минимизации

$$m^*(Z) = \underset{m}{\operatorname{argmin}} \left( \sum_{x_i} R^i(x_i) + \sum_{z_s \in Z} (\psi_{free}^s + \psi_{occ}^s) \right) \tag{3.15}$$

В работе предложенный алгоритм использовался только для обработки уже собранных данных. Скорость работы алгоритма позволяет использовать его в режиме реального времени, однако для работы в таком режиме (и для работы в течение неограниченного времени) необходимо осуществлять фильтрацию измерений, например, используя методы из [2.3](#).



## Глава 4

# Результаты

### 4.1. Генерация синтетических данных с помощью прямой модели

В процессе разработки алгоритма картирования необходим некоторый массив данных, который позволит эффективно исследовать свойства алгоритма и сравнивать его с другими методами в одних и тех же сценариях. Однако сбор таких данных с реального робота представляет большие трудности:

- Необходимо знать положение робота в пространстве в каждый момент времени, и следовательно определение положения робота каждый раз при измерении, требует либо специального полигона, либо наличие инструментов, которые позволят быстро и точно это сделать. Ясно, что это не всегда возможно.
- Свойства сонара сильно отличаются в зависимости от окружения, поэтому для полноты исследования того или иного метода картирования требуется возможность проводить эксперименты в различных условиях. На реальном роботе это далеко не всегда возможно.

В этой работе предлагается простой метод, который позволяет быстро получать экспериментальные синтетические данные. Ядром этого метода является прямая модель сонара (1.11).

На вход алгоритму подаётся некоторая карта проходимости, например в формате картинки, с заданным масштабом. Затем можно задать траекторию движения робота и параметры прямой модели сонара, которые позволяют простым образом моделировать различные сценарии работы сонара. Каждая клетка на входной картинке является препятствием определенного размера. Задавая

положение робота на этой карте, мы имитируем измерение сонара следующим образом:

1. С вероятностью  $p_{rand}$  сонар выдает случайное значение дальности, распределенное равномерно на  $[R_{min}, R_{max}]$ .
2. Находим в области видимости ближайшее не рассмотренное препятствие. С вероятностью  $p_{hit}$  препятствие считается замеченным сонаром, дистанция от сонара до этой клетки с нормальным шумом выдается в качестве измерения.
3. С вероятностью  $1 - p_{hit}$  препятствие считается незамеченным сонаром, оно помечается как рассмотренное и алгоритм возвращается к предыдущему шагу.
4. Если все препятствия остались незамеченными, то выдается максимальное измерение  $R_{max}$ .

Таким образом, наш метод решает указанные выше проблемы и позволяет быстро создать необходимый массив наблюдений сонаров.

## 4.2. Детали реализации

### 4.2.1. Область видимости сонара

При реализации области видимости сонара использовалось предположение о том, что она является выпуклой областью. В качестве приближения реальной области видимости используется выпуклый многоугольник, заданный множеством координат своих вершин  $V = \{(x_v, y_v)\}$ , упорядоченных таким образом, что контур, который они образуют, является правильно ориентированной кривой. Тогда алгоритм определения того, лежит ли точка  $(x, y)$  внутри луча сенсора выглядит следующим образом

1. пусть нужно проверить лежит ли точка  $P$  внутри области видимости сонара
2. для каждой вершины из  $V$ , кроме первой из этого множества, обозначив за  $a = V_i - V_0$  и  $b = P - V_i$ , по порядку проверяем выполнение следующего условия

$$a_x b_y - b_x y_a \geq 0$$

Если условие выше выполняется, продолжаем проверку. Не выполнение этого условия означает, что точка  $P$  не принадлежит области видимости датчика.

3. На последнем шаге проверяем это же условие, считая что  $a = V_0 - V_{last}$  и  $b = P - V_{last}$

#### 4.2.2. Диаграмма чувствительности сонара

Диаграмма чувствительности, которая используется в алгоритме, описанном в Главе 3, была получена из `TODO_specification`. Вследствии дискретности карты проходимости, можно дискретизировать функцию  $s(x, y)$ . На рисунке `image_specification` видно, что представляет из себя  $d(x, y)$ .

Рассмотрим пару  $(\Omega, s)$ , где  $\Omega$  - некоторой области, а  $s$  - минимальная площадь препятствия, которое обнаруживается сонаром в этой области. Таким образом,  $s(x, y)$  можно представить как множество пар  $\tilde{s} = \{(\Omega_i, s_i)\}$ . Будем считать, что  $\Omega_i$  может быть представлена таким же образом, как и область видимости. В зависимости от масштаба карты, можно строить различные приближения  $\tilde{s}$  для диаграммы чувствительности. На рисунке `image_sensitive_diagram` можно увидеть  $\tilde{s}$ , которое используется в работе.

### **4.3. Численные эксперименты и результаты**

В этой части главы описаны проведенные численные эксперименты и результаты разработанных в данной работе алгоритмов. Результаты сравниваются с результатами картирования методом с обратной моделью сенсора.

#### **4.3.1. Алгоритм картирования методом градиентного спуска**

## Заключение

## Список литературы

## Приложение А

### **Заголовок приложения**