Question 1
(i) ¬ (A ∨ X)
≡ {Substitution}
¬ (True ∨ False)
≡ {∨}
¬ True
≡ { ¬ }
False

(ii) ¬ (A ∨ X) ∧ ¬ (A ∨ Y)
≡ {Substitution}
¬ (True ∨ False) ∧ ¬ (True ∨ False)
≡ {∨}
¬ True ∧ ¬ True
≡ { ¬ }
False ∧ False
≡ {Constants}
True

(iii) [(X ∧ Y) ⇒ A] ⇒ [X ⇒ (Y ⇒ A)]
≡ {Substitution}
[(False ∧ False) ⇒ True] ⇒ [False ⇒ (False ⇒ True)]
≡ {∧}
[False ⇒ True] ⇒ [False ⇒ (False ⇒ True)]
≡ { ⇒ }
[False ⇒ True] ⇒ [False ⇒ True]
≡ { ⇒ }
True ⇒ True
≡ { ⇒ }
True

Question 2
(i) p ⇒ ¬p

p	¬p	p ⇒ ¬p
t	f	f
f	t	t

This is a contingent.

(ii) (¬p ∧ q) ∧ (q ⇒ p)

p	q	¬p	¬p ∧ q	q ⇒ p	(¬p ∧ q) ∧ (q ⇒ p)
t	t	f	f	t	f
t	f	f	f	t	f
f	t	t	t	f	f
f	f	t	f	t	f

This is contradictory statement.

Question 3
(a) X ∨ (Y ∨ X) ∨ ¬Y
≡ {Associativity}
X ∨ Y ∨ X ∨ ¬Y
≡ {Commutativity}
X ∨ X ∨ Y ∨ ¬Y
≡ {Law of Exclude Middle}
X ∨ X ∨ True
≡ {Constants}
True

(b) (X ∨ Y) ∧ (X ∨ ¬Y) ∧ (¬ X ∨ Y) ∧ (¬ X ∨ ¬ Y)
≡ {Distribution}
X ∨ (Y ∧ ¬Y) ∧ (¬ X ∨ Y) ∧ (¬ X ∨ ¬ Y)
≡ {Distribution}
X ∨ (Y ∧ ¬Y) ∧ ¬ X ∨ (Y ∨ ¬ Y)
≡ {Contradiction}
X ∨ False ∧ ¬ X ∨ False
≡ {Constants}
X ∧ ¬ X
≡ {Contradiction}
False

(c) ¬ X ⇒ (¬ X ⇒ (¬ X ∧ Y))
≡ {⇒ X 2}
¬¬ X ∨ (¬¬ X ∨ (¬ X ∧ Y))
≡ {¬¬}
X ∨ (X ∨ (¬ X ∧ Y))
≡ {Distribution}
X ∨ ((X ∨ ¬ X) ∧ (X ∨ Y))
≡ {Law of Exclude Middle}
X ∨ (True ∧ (X ∨ Y))
≡ {Constants}
X ∨ (X ∨ Y)
≡ {Associativity}
X ∨ X ∨ Y
≡ {Constants}
X ∨ Y

Question 4

(a) [P ∧ (P ⇒ Q)] ⇒ Q

≡ {⇒}

[P ∧ (¬P ∨ Q)] ⇒ Q

≡ {Distribution}

[P ∧ ¬P) ∨ (P ∧ Q)] ⇒ Q

≡ {Contradiction}

[False ∨ (P ∧ Q)] ⇒ Q

≡ {Constants}

(P ∧ Q) ⇒ Q

≡ {⇒}

¬ (P ∨ Q) ∨ Q

≡ De Morgan's Law}

¬ P ∨ ¬ Q ∨ Q

≡ {Law of Exclude Middle}

¬ P ∨ True

≡ {Constants}

True

(b) [(P ⇒ Q) ∧ ¬ Q] ⇒ ¬ P

≡ {⇒}

[(¬ P ∨ Q) ∧ ¬ Q] ⇒ ¬ P

≡ {Distribution}

[(¬ Q ∧ ¬ P) ∨ (¬ Q ∧ Q)] ⇒ ¬ P

≡ {Contradiction}

[(¬ Q ∧ ¬ P) ∨ False] ⇒ ¬ P

≡ {Constants}

(¬ Q ∧ ¬ P) ⇒ ¬ P

≡ {⇒}

¬ (¬ Q ∧ ¬ P) ∨ ¬ P

≡ De Morgan's Law}

Q ∨ P ∨ ¬ P

≡ {Law of Exclude Middle}

Q ∨ True

≡ {Constants}

True

(c) [(P ⇒ Q) ⇒ Q] ⇒ Q
≡ {⇒}
[¬ (¬ P ∨ Q) ∨ Q] ⇒ Q
≡ De Morgan's Law}
[P ∧ ¬ Q ∨ Q] ⇒ Q
≡ {Law of Exclude Middle}
[P ∧ True] ⇒ Q
≡ {Implication}
P ⇒ Q
≡ { ⇒ }
¬ P ∨ Q

Question 5
(a) (P ∨ Q) ∧ Q ≡ Q
≡ {Absorption}
Q

(b) [(P ∧ Q) ∨ (¬ P ∧ Q) ∨ (P ∧ ¬ Q)] ≡ P ∨ Q
≡ {Associativity}
[(P ∧ Q) ∨ (P ∧ ¬ Q) ∨ (¬ P ∧ Q)]
{Distribution}
P ∧ (Q ∨ ¬ Q) ∨ (¬ P ∧ Q)
≡ {Law of Exclude Middle}
P ∧ True ∨ (¬ P ∧ Q)
≡ {Constants}
P ∨ (¬ P ∧ Q)
{Distribution}
(P ∨ ¬ P) ∧ (P ∨ Q)
≡ {Law of Exclude Middle}
True ∧ (P ∨ Q)
≡ {Constants}
P ∨ Q

Question 6

∀xP(x)

≡ {Substitution}

2 mod 2 = 0 ∧ 4 mod 2 = 0 ∧ 6 mod 2 = 0

≡ {Arithmetic}

True ∧ True ∧ True

≡ {Constants}

True

∃xP(x)

≡ {Substitution}

2 mod 2 = 0 ∨ 4 mod 2 = 0 ∨ 6 mod 2 = 0

≡ {Arithmetic}

True ∨ True ∨ True

≡ {Constants}

True

Question 7

(i) ∀x[x > 0]

U = {1, 2, 3 , 4, …}

(ii) ∀x[x = 3]

U = {3}

(iii) ∃x∀x[x + y < 0]

U = {-1, -2, -3 , -4, …}

Question 8

(i) x is a multiple of k

∃x ∀k [x = k * t], t ∈ N

(ii) x is a power of 2

x > 0 ∧ (x - 1) = 0

(iii) x is divisible by 3

x > 0 ∧ x mod 3 = 0

Question 9

(i) All elements of A are in the range 1..100

$\forall x: 0 \le x < N : A.x > 0 \land A.x \le 100$

(iii) A[j..k] contains an even integer value

$0 \le j < N \land 0 \le k < N \land \forall x: j \le x < k: A.x \bmod 2 = 0$

(v) Max is the largest value in A

$\forall x: 0 \le x < N : A.x \le Max$

(vii) j = index of smallest element in A

$0 \le i < N \land 0 \le j < N \land \forall x: i \le x < N: A.x \ge A.j$