МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

НГТУ НЭТИ | Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа №2

по дисциплине «Уравнения математической физики»

Решение нелинейных начально-краевых задач

Группа ПМ-92 АРТЮХОВ РОМАН

Вариант 3

Преподаватели ЗАДОРОЖНЫЙ А. Г.

ПАТРУШЕВ И. И.

Новосибирск, 2022

Цель работы

Разработать программу решения нелинейной одномерной краевой задачи методом конечных элементов. Провести сравнение метода простой итерации и метода Ньютона для решения данной задачи.

Задача (вариант 3)

Уравнение:

$$-div\left(\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)gradu\right)+\gamma u=f$$

Базисные функции – линейные. Краевые условия всех типов.

Анализ

Система нелинейных уравнений:

$$A(q)q=b$$, где:

$$A_{ij}=\int_{\Omega}\lambda\left(\frac{\partial u(q)}{\partial x}\right)grad\psi_j grad\psi_i d\Omega+\int_{\Omega}\gamma\psi_j\psi_i d\Omega+\int_{S_3}\beta\psi_j\psi_i dS$$

$$b_i=\int_{\Omega}f\psi_i d\Omega+\int_{S_2}\theta\psi_i dS+\int_{S_3}\beta u_{\beta}\psi_i dS$$

Метод простой итерации

$$u=\sum_{i=1}^{n}q_i\psi_i(x)$$

Поскольку случай одномерный, линейные базисные функции на конечном элементе могут быть записаны в виде:

$$\psi_k=\frac{x_{k+1}-x}{h_k};\ \psi_{k+1}=\frac{x-x_k}{h_k};\ h_k=x_{k+1}-x_k$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=q_1\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x}+q_2\frac{\partial\psi_2(x)}{\partial x}=\frac{q_2-q_1}{h}$$

Получаем: $\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\lambda\left(\frac{q_2-q_1}{h}\right)$

Вид локальной матрицы будет следующим:

$$A_{ij}=\int_{x_1}^{x_2}\lambda\left(\frac{\partial u(q)}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx+\int_{x_1}^{x_2}\gamma_k\psi_i\psi_j dx=G_{ij}+M_{ij}$$

Матрица жесткости (2x2):

$$G_{ij}=\int_{x_1}^{x_2}\lambda\left(\frac{q_2-q_1}{h}\right)\bigg|_{x=x_1}\psi_1(x)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx+\int_{x_1}^{x_2}\lambda\left(\frac{q_2-q_1}{h}\right)\bigg|_{x=x_2}\psi_2(x)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx$$

$$\lambda_i=\lambda\left(\frac{q_2-q_1}{h}\right)\bigg|_{x=x_i}$$

На диагонали матрицы жесткости: $\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}=\frac{1}{h^2}$

Вне диагонали матрицы жесткости: $\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}=-\frac{1}{h^2}$

Остальная часть: $\int_{x_1}^{x_2}\lambda_1\psi_1(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}\lambda_2\psi_2(x)dx=\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$

Следовательно матрица жесткости выглядит следующим образом:

$$G=\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2h}\right)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Матрица масс:

$$M=\frac{\gamma h}{6}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Вектор правой части:

$$b=\frac{h}{6}\begin{pmatrix}2f(x_k)+f(x_{k+1})\\ 2f(x_{k+1})+f(x_k)\end{pmatrix}$$

Метод Ньютона

Метод Ньютона основан на линеаризации нелинейных уравнений нашей системы с использованием разложения в ряд Тейлора. Каждый нелинейный член уравнения представляется в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности вектора весов q^0:

$$A_{ij}(q)\cdot q_j \approx A_{ij}\left(q^0\right)\cdot q_j^0 + \sum_r \frac{\partial\left(A_{ij}\left(q^0\right)\cdot q_j\right)}{\partial q_r}\left(q_r - q_r^0\right)$$

$$b_i(q) \approx b_i\left(q^0\right) + \sum_r \frac{\partial\left(b_i q^0\right)}{\partial q_r}\left(q - q_r^0\right)$$

В результате получаем новую СЛАУ $A^L q = b^L$:

Для нашей задачи матрица и правая часть выглядит следующим образом:

$$A_{ij}^L = A_{ij}\left(q^0\right) + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial\left(A_{ir}\left(q^0\right)\right)}{\partial q_j} q_r^0$$

$$b_i^L = b_i\left(q^0\right) + \sum_{j=1}^{n} q_j^0 \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial\left(A_{ij}\left(q^0\right)\right)}{\partial q_r} q_r^0$$

Выпишем производные:

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1} = \frac{1}{2h}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial q_1}\right); \qquad \frac{\partial A_{12}}{\partial q_1} = -\frac{1}{2h}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial q_1}\right)$$

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2} = \frac{1}{2h}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial q_2}\right); \qquad \frac{\partial A_{12}}{\partial q_2} = -\frac{1}{2h}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial q_2}\right)$$

$$\frac{\partial A_{21}}{\partial q_1} = \frac{\partial A_{12}}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial A_{21}}{\partial q_2} = \frac{\partial A_{12}}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial q_1} = \frac{\partial A_{11}}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial A_{22}}{\partial q_2} = \frac{\partial A_{11}}{\partial q_2}$$

Для выхода из итерационного процесса воспользуемся формулой:

$$\frac{\left\|A\left(q^k\right)q^k - b\left(q^k\right)\right\|}{\|b\|} < \varepsilon$$

Для ускорения процесса сходимости нелинейной задачи, ищем следующие приближения по формуле:

$$q^k = \omega^k \bar{q}^k + \left(1 - \omega^k\right) q^{(k-1)}$$

Учет краевых условий

Для учета первых краевых условий нужно сделать следующее: соответствующий диагональный элемент заменяют единицей, а соответствующую координату вектора правой части значением q_i, где q_i – есть первое краевое условие в узле.

$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{s_2} = \theta$ При учете вторых краевых условий идет добавка значения θ к глобальному вектору.

$\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u - u_\beta \right)\Big|_{S_3} = 0$ При учете третьих краевых условий идет добавка значения β к диагональному элементу глобальной матрицы и значения $\beta \cdot u_\beta$ к глобальному вектору.