МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НГТУ НЭТИ | Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа №1

по дисциплине «Уравнения математической физики»

РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Группа ПМ-92 АРТЮХОВ РОМАН

Вариант 7

Преподаватели ЗАДОРОЖНЫЙ А. Г.

ПАТРУШЕВ И. И.

Новосибирск, 2022

Цель работы:

Разработать программу решения эллиптической краевой задачи методом конечных разностей. Протестировать программу и численно оценить порядок аппроксимации.

Задача (вариант 7):

Область имеет Г-образную форму. Предусмотреть учет первых и вторых краевых условий.

Уравнение: $-div\left(\lambda grad u\right)+\gamma u=f$

Краевые условия:

$$u\big|_{S_1}=u_g$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_2}=\theta$$

Анализ:

Производные первого порядка, аппроксимированные следующими конечными разностями первого порядка:

$$\nabla_h^+ u_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{h_i},->\text{правая разность}$$

$$\nabla_h^- u_i=\frac{u_i-u_{i-1}}{h_{i-1}},->\text{левая разность}$$

$$\overline{\nabla}_h u_i=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{h_i+h_{i-1}},->\text{двусторонняя разность}$$

Пусть область Ω двумерная и определена прямоугольная сетка Ω_h как совокупность точек. Тогда для двумерного оператора Лапласа:

$$Vu=\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$$

Дискретный аналог на неравномерной прямоугольной сетке может быть определен пятиточечным разностным выражением:

$$V_h u_{i,j}=\frac{2u_{i-1,j}}{h_{i-1}^x\left(h_i^x+h_{i-1}^x\right)}+\frac{2u_{i,j-1}}{h_{j-1}^y\left(h_j^y+h_{j-1}^y\right)}+\frac{2u_{i+1,j}}{h_i^x\left(h_i^x+h_{i-1}^x\right)}+\frac{2u_{i,j+1}}{h_j^y\left(h_j^y+h_{j-1}^y\right)}-\left(\frac{2}{h_{i-1}^x h_i^x}+\frac{2}{h_{j-1}^y h_j^y}\right)u_{i,j}$$

Подставив в уравнение, получим:

$$\frac{-2\lambda u_{i-1,j}}{h_{i-1}^x\left(h_i^x+h_{i-1}^x\right)}+\frac{-2\lambda u_{i,j-1}}{h_{j-1}^y\left(h_j^y+h_{j-1}^y\right)}+\frac{-2\lambda u_{i+1,j}}{h_i^x\left(h_i^x+h_{i-1}^x\right)}+\frac{-2\lambda u_{i,j+1}}{h_j^y\left(h_j^y+h_{j-1}^y\right)}-\left(\frac{-2\lambda}{h_{i-1}^x h_i^x}+\frac{-2\lambda}{h_{j-1}^y h_j^y}\right)u_{i,j}=f_{i,j}$$

Учет краевых условий:

Для узлов, расположенных на границе **S_1**, на которых заданы краевые условия первого рода, соответствующие разностные уравнения заменяются соотношениями, точно передающими краевые условия, т.е. диагональные элементы матрицы, соответствующие этим узлам, заменяются на **1**, а соответствующий элемент вектора правой части заменяется на значение $\mathbf{u_g}$ функции в этом узле.

Если расчетная область представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, то направление нормали к границе $\mathbf{S_2}$, на которых заданы краевые условия второго рода, совпадает с одной из координатных линий, и тогда методы аппроксимации производной по нормали $\frac{\partial u}{\partial n}$ (которая в этом случае будет равна либо $\pm\frac{\partial u}{dx}$, либо $\pm\frac{\partial u}{dy}$) сводятся к одномерным.