Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Факультет Информационных технологий и прикладной математики
Кафедра Математической кибернетики №805

Лабораторная работа 3
по курсу «Исследование операций»
Тема: «Задачи многокритериальной (векторной) оптимизации»

Работу выполнил
студент группы 8О-404Б
Сорокин Д. М.

Преподаватель:
профессор Короткова Т.И.

Москва
2018

Цель работы и теоретические сведения

Теоретическая справка

Разделы:

Постановка задачи векторной оптимизации

Оптимальность по Парето и Слейтеру

Построение области эффективных векторных оценок

Постановка задачи векторной оптимизации.

Пусть эффективность операции оценивается не одним, а несколькими показателями качества $g_1, g_2, ..., g_n$ (т е *векторным критерием качества* $G = (g_1, g_2, ..., g_n)$), каждый из которых можно представить как функцию стратегии $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$.

Требуется найти стратегию $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, оптимизирующую все показатели качества (векторный критерий качества).

Такая задача называется *задачей векторной оптимизации*.

Не любые решения могут сравниваться по заданным показателям g_i, например, если сравнивать две стратегии x^1 и x^2, то по одним критериям x^1 может оказаться лучше x^2, а по другим – x^2 лучше x^1.

Таким образом, решением задачи векторной оптимизации может быть целое множество стратегий, любые две из которого либо несравнимы между собой, либо эквивалентны.

Для определения этого множества необходимо задать отношение предпочтения на множестве стратегий X.

Теоретическая справка

Разделы:

Постановка задачи векторной оптимизации

Оптимальность по Парето и Слейтеру

Построение области эффективных векторных оценок

Оптимальность по Парето.

Для определенности, будем рассматривать задачу минимизации всех критериев.

Определение 1. Решение x^* называется *эффективным или оптимальным по Парето* при решении задачи минимизации векторного критерия, если на множестве допустимых решений X не существует такого решения x, для которого выполнялись бы неравенства

$$g_i(x) \le g_i(x^*),\ i = \overline{1,n},$$

и хотя бы одно из них было строгим.

Другими словами, никакое другое решение не может улучшить значение некоторых показателей, не ухудшая при этом значений хотя бы одной из оставшихся функций цели.

Определение 2. Решение x^* называется *эффективным или оптимальным по Парето* при решении задачи минимизации векторного критерия, если из выполнения для некоторого x неравенства

$G(x) \le G(x^*)$ (покомпонентно, т е $g_i(x) \le g_i(x^*)$, $i = \overline{1,n}$) следует, что $G(x) = G(x^*)$.

Множество эффективных (или оптимальных по Парето) решений образуют *область Парето* или *область компромиссных решений*.

Оптимальность по Слейтеру.

Определение. Решение x^* называется *оптимальным по Слейтеру* при решении задачи минимизации векторного критерия, если не существует другого такого решения x, что выполняется неравенство $g_i(x) < g_i(x^*)$, $i = \overline{1,n}$.

Построение области эффективных векторных оценок.

Образ множества допустимых решений X в пространстве критериев $g_1, g_2, \ldots, g_n$ называют *множеством векторных оценок*.

Образ области Парето в пространстве критериев называют *областью эффективных векторных оценок*.

Графический метод решения применяется при m=1.
Пусть, эффективность операции оценивается по двум критериям $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

Пример1. Для функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$, заданных графически на рис.1, на промежутке [A,B] найти область Парето и область Слейтера при решении задачи минимизации критериев.

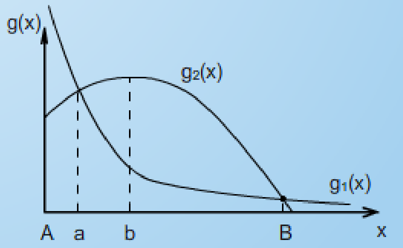


Рис.1

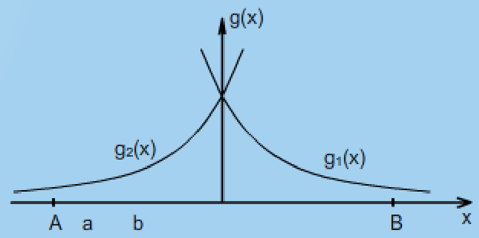


Рис.2

Теоретическая справка

Разделы:

Постановка задачи векторной оптимизации

Оптимальность по Парето и Слейтеру

Построение области эффективных векторных оценок

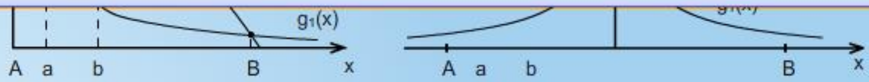


Рис.1

Рис.2

Решение. Для построение области Парето и области Слейтера выделим характерные точки, каковыми могут быть точки пересечения функций, локальные экстремумы и др. В настоящем примере таковыми являются точки a(точка пересечения функций) и b(максимум функции $g_2(x)$ на [A,B]).

Выделим промежутки одновременного убывания или возрастания обоих показателей качества. Таким промежутком будет отрезок [b,B]. Очевидно, что значения обеих функций в точке B будут меньше, чем в любой точке отрезка [b,B). Следовательно, множество решений промежутка [b,B) ни в область Парето, ни в область Слейтера не войдет.

Рассмотрим интервал [A,a]. Значения функций в этих точках несравнимы между собой, т к $g_1(x^1) > g_1(x^2)$, $g_2(x^1) < g_2(x^2)$.

Но, значения функций в точке B соответственно меньше, чем в любой точке $x^2 \in$[A,a], т е $g_1(B) < g_1(x^2)$, $g_2(B) < g_2(x^2)$.

Аналогично для отрезка [a,b].

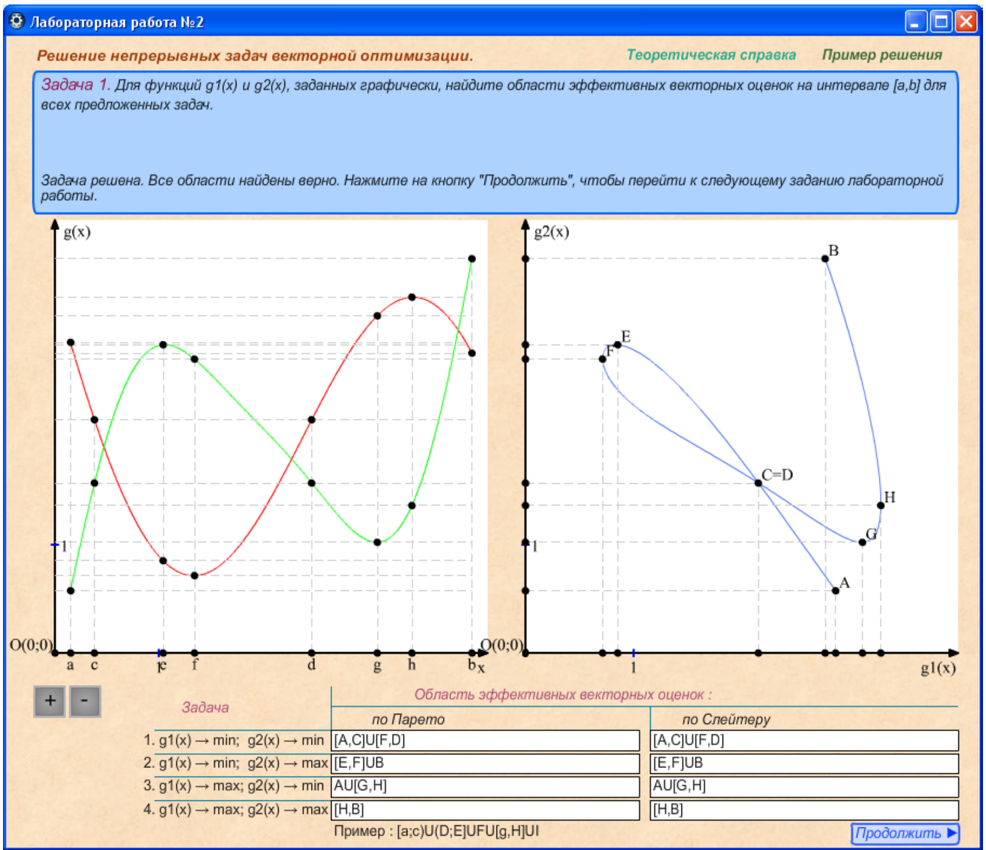
Таким образом, и область Парето P, и область Слейтера S состоят из единственного решения – точки B.

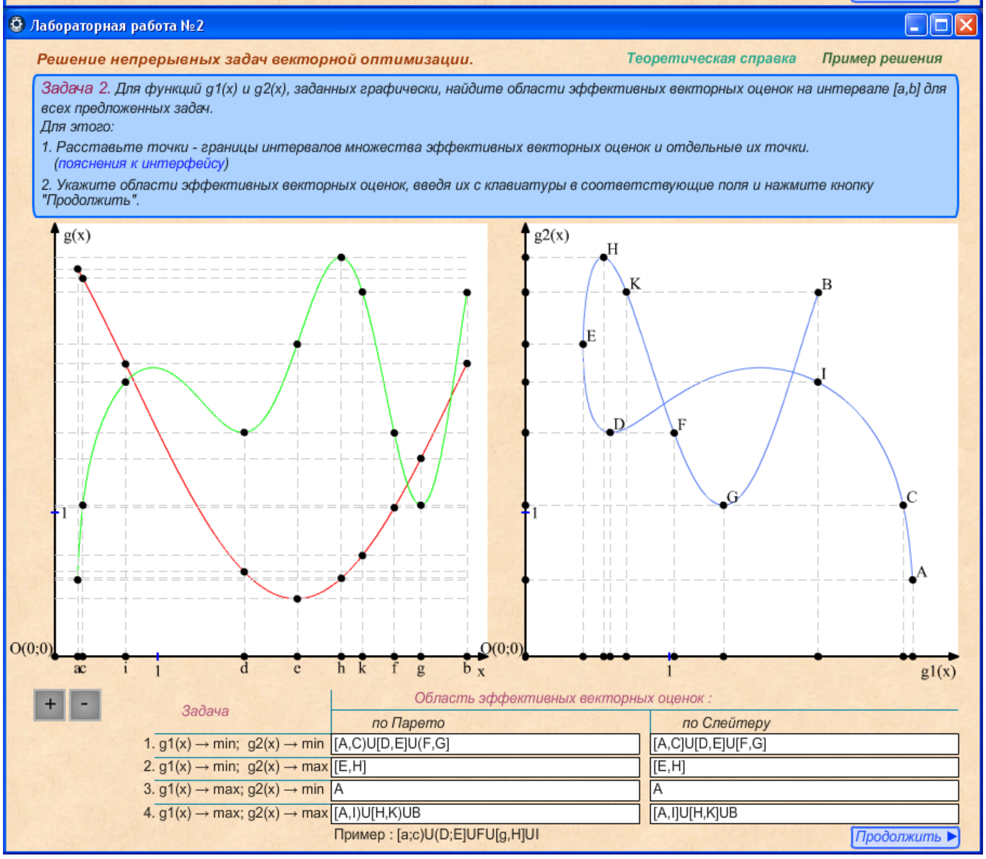
Пример 2. Для функций $g_1(x) = e^x$ и $g_2(x) = e^{-x}$ найти области Парето и Слейтера на интервале [a,b] при решении задачи минимизации критериев.

Решение. Изобразим эти функции графически (рис. 2). Область Парето P=[a,b], область Слейтера S=[a,b].

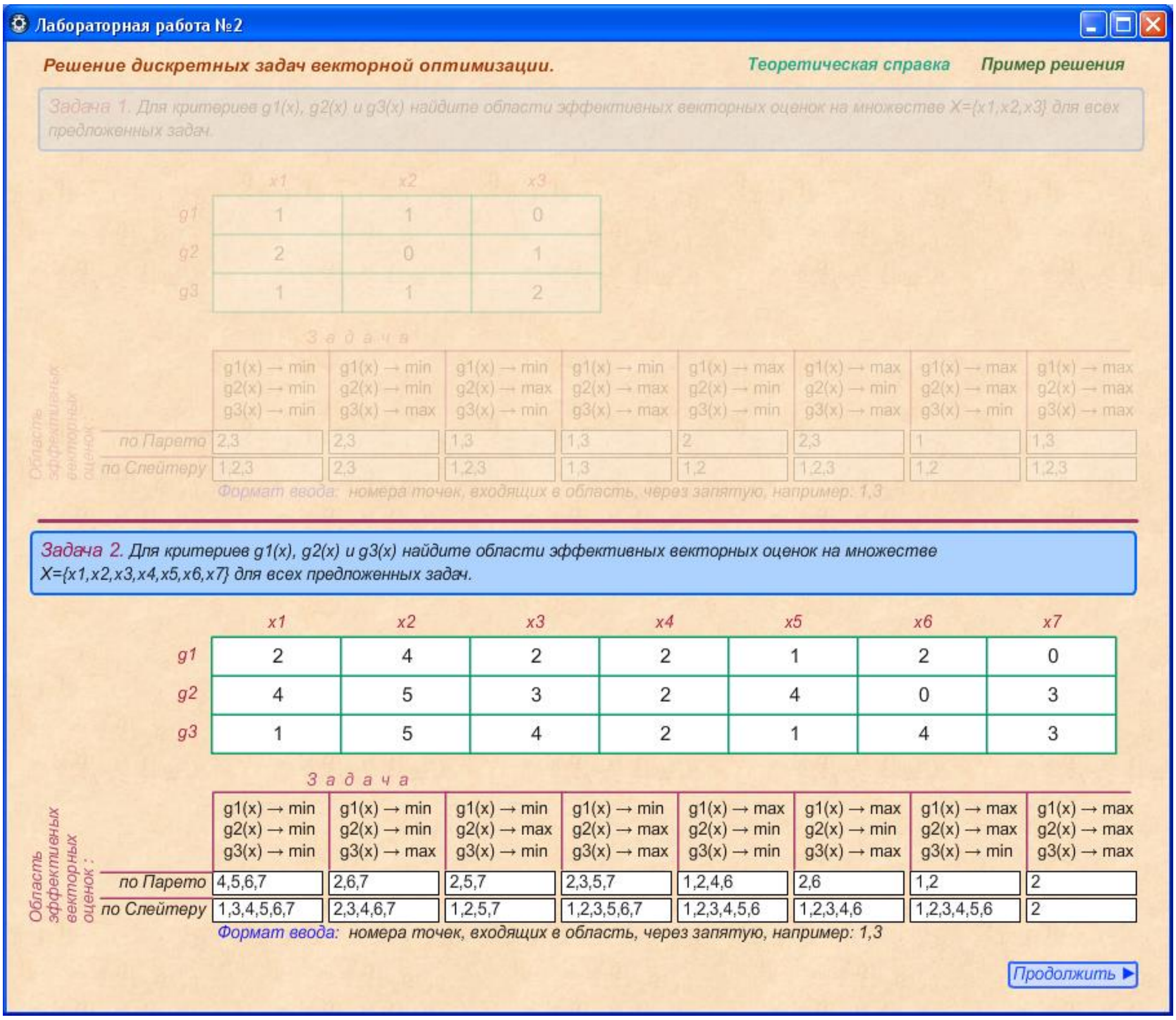
Ход работы

1. Расставить на графике точки (границы интервалов), характеризующие области эффективных векторных оценок на интервале [a,b] для предложенных ниже задач. Для этого определить экстремумы функций.





2. Найти области эффективных векторных оценок на множестве $X = \{x1, x2, x3\}$ и $X = \{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7\}$. Для этого сравнить значения критериев в каждом столбце.



Лабораторная работа №2

Решение дискретных задач векторной оптимизации. — Теоретическая справка — Пример решения

Задача 1. Для критериев g1(x), g2(x) и g3(x) найдите области эффективных векторных оценок на множестве X={x1,x2,x3} для всех предложенных задач.

	x1	x2	x3
g1	1	1	0
g2	2	0	1
g3	1	1	2

Задача

Область эффективных векторных оценок:	g1(x) → min g2(x) → min g3(x) → min	g1(x) → min g2(x) → min g3(x) → max	g1(x) → min g2(x) → max g3(x) → min	g1(x) → min g2(x) → max g3(x) → max	g1(x) → max g2(x) → min g3(x) → min	g1(x) → max g2(x) → min g3(x) → max	g1(x) → max g2(x) → max g3(x) → min	g1(x) → max g2(x) → max g3(x) → max
по Парето	2,3	2,3	1,3	1,3	2	2,3	1	1,3
по Слейтеру	1,2,3	2,3	1,2,3	1,3	1,2	1,2,3	1,2	1,2,3

Формат ввода: номера точек, входящих в область, через запятую, например: 1,3

Задача 2. Для критериев g1(x), g2(x) и g3(x) найдите области эффективных векторных оценок на множестве X={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7} для всех предложенных задач.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
g1	2	4	2	2	1	2	0
g2	4	5	3	2	4	0	3
g3	1	5	4	2	1	4	3

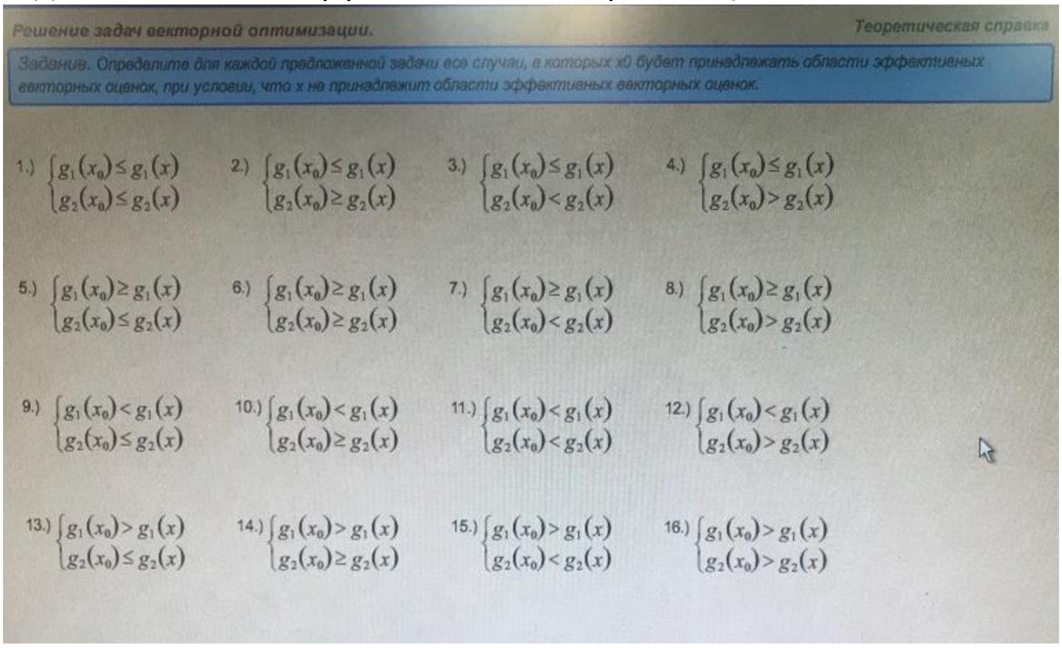
Задача

Область эффективных векторных оценок:	g1(x) → min g2(x) → min g3(x) → min	g1(x) → min g2(x) → min g3(x) → max	g1(x) → min g2(x) → max g3(x) → min	g1(x) → min g2(x) → max g3(x) → max	g1(x) → max g2(x) → min g3(x) → min	g1(x) → max g2(x) → min g3(x) → max	g1(x) → max g2(x) → max g3(x) → min	g1(x) → max g2(x) → max g3(x) → max
по Парето	4,5,6,7	2,6,7	2,5,7	2,3,5,7	1,2,4,6	2,6	1,2	2
по Слейтеру	1,3,4,5,6,7	2,3,4,6,7	1,2,5,7	1,2,3,5,6,7	1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,6	1,2,3,4,5,6	2

Формат ввода: номера точек, входящих в область, через запятую, например: 1,3

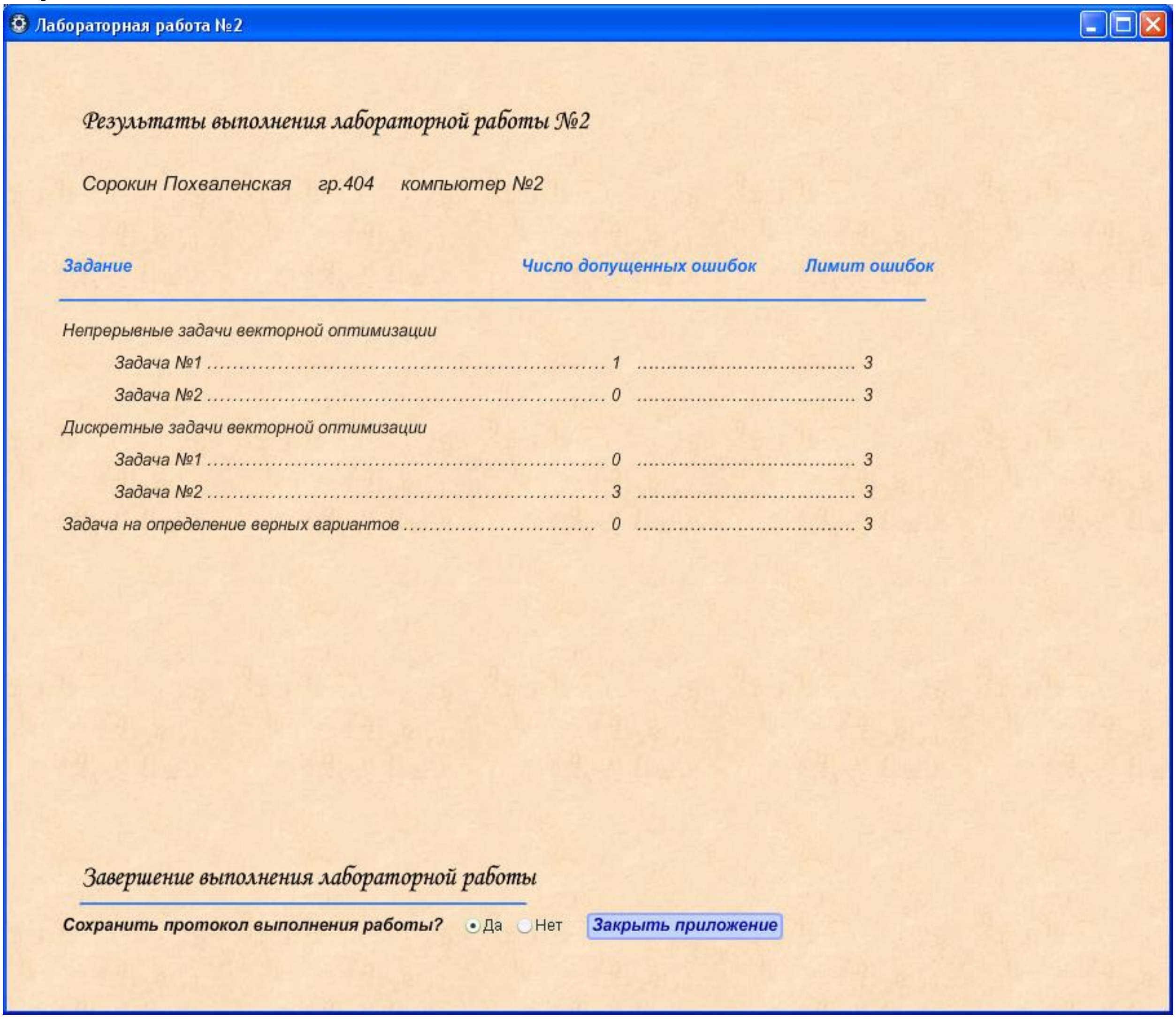
Продолжить ▶

3. Определить для каждой задачи все случаи, в которых x_0 будет принадлежать области эффективных оценок, при условии, что x_0 не принадлежит области эффективных векторных оценок.



К сожалению, к данной задаче скриншот сделать забыли (фото взято у одногруппников). Но задача решена нами верно, что можно видеть в отчете по результатам.

Результаты



Выводы

В данной лабораторной работе мы научились решать задачи векторной (многокритериальной) оптимизации. Узнали, как применяется оптимальность по Парето и Слейтеру. Строили области эффективных векторных оценок.