

Softwareparadigmen

Dieses Skriptum basiert auf der Softwareparadigmen Übung im
Sommersemester 2012 und dem Vorlesungsskriptum 2007.
Vorlesung von Alexander Felfernig

Übungsskriptum verfasst von Daniel Gruß. Version 25. Juni 2014.
Fehlerfunde bitte melden an daniel@gruss.cc.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Syntax | 1 |
| 1.1 | Grundlegende Definitionen | 1 |
| 1.2 | Grammatiken und Sprachen | 2 |
| 1.3 | Chomsky-Sprachhierarchie | 4 |
| 1.4 | Parser | 5 |
| 1.5 | Compilerbau | 6 |
| 1.6 | Lexikalische Analyse | 7 |
| 1.7 | Grammatikalische Analyse | 8 |
| 1.8 | LL(1)-Grammatiken | 10 |
| 1.9 | LL(1)-Tabellen | 13 |
| 2 | Semantik von Programmiersprachen | 23 |
| 2.1 | Sprache \mathcal{A} - einfache arithmetische Ausdrücke | 24 |
| 2.2 | Sprache \mathcal{V} - arithmetische Ausdrücke mit Variablen | 27 |
| 2.3 | Datentypen | 28 |
| 2.4 | Sprache der Terme \mathcal{T} | 31 |
| 2.5 | Sprache der Konditionale COND (\mathcal{C}) | 35 |
| 2.6 | Rekursionen - Sprache der Ausdrücke EXP (\mathcal{E}) | 36 |
| 2.7 | Datentyp der Listen \mathcal{L} | 41 |
| 2.8 | Kodierung von Datentypen | 49 |
| 2.9 | Kodierung von \mathcal{E} in den Datentyp der Listen | 54 |
| 2.10 | Ein \mathcal{E} -Interpreter in \mathcal{E} | 55 |
| 2.11 | Das Halteproblem | 57 |
| 2.12 | Sprache der Prädikatenlogischen Ausdrücke PL (\mathcal{P}) | 58 |
| 2.13 | Assignmentsprachen / Sprache AL (\mathcal{A}) | 63 |
| 2.14 | Die Sprache LP (\mathcal{L}) | 68 |

Kapitel 1

Syntax

Dieses Skriptum versucht einen kompakten und übersichtlichen Zugang zu den Themen dieser Lehrveranstaltung zu schaffen. Wir haben uns dabei stark am Vorlesungsskriptum orientiert. Das Vorlesungsskriptum und folglich auch dieses Skriptum bezieht die angeführten Sprachen und Konzepte größtenteils aus dem Skriptum “Einführung in die Theorie der Informatik” von A. Leitsch, TU Wien, 1989.

In der Informatik stehen wir oft vor dem Problem, dass wir eine Art Text auf Fehler überprüfen wollen und in eine andere Darstellungsform übersetzen wollen. Ein Webbrowser prüft beispielsweise HTML-Dokumente auf Fehler und übersetzt diese sofern möglich in eine praktische visuelle Darstellung.

Dieses Problem wollen wir auch lösen können. Dazu brauchen wir zunächst einige grundlegende Definitionen. Die Definitionen in diesem Skriptum unterscheiden sich teilweise von denen im Vorlesungsskriptum. Das Übungsskriptum versucht an vielen Stellen exaktere Formulierungen zu bieten oder solche die man weniger leicht durcheinander bringt. Für Übung und Prüfung sind beide Varianten zulässig. Es sollte jedoch vermieden werden Definitionen aus Übungsskriptum und Vorlesungsskriptum zu vermischen.

1.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1 (Alphabet): Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge von Symbolen.

Binärzahlen haben das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Eine einfache Variante der Markup-Sprache HTML hat das Alphabet $\Sigma = \{<, /, >, \dots, a, b, c, \dots\}$.

Definition 1.2: Σ^* ist die Menge aller beliebigen Konkatenationen von Symbolen aus Σ . Ein Element aus Σ^* nennen wir Wort.

Für $\Sigma = \{0, 1\}$ ist $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$.

Definition 1.3 (Sprache): Eine Sprache \mathcal{L} ist eine Teilmenge (\subseteq) von Σ^* .

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Definieren wir die Sprache der Binärzahlen \mathcal{B} , müssen wir zu jedem Wort aus Σ^* entscheiden ob dieses Wort in \mathcal{B} enthalten ist. Im Fall der Binärzahlen könnten wir z.B. ε herausnehmen, dann ist die Sprache $\mathcal{B} = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Würden wir die Programmiersprache \mathcal{C} als formale Sprache definieren, so wäre ein gesamtes (gültiges) \mathcal{C} -Programm ein Wort der Sprache, also ein Element der Menge \mathcal{C} .

Definition 1.4 (Compiler): Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Programmiersprachen. Ein Compiler ist ein Programm, welches Programme von \mathcal{A} nach \mathcal{B} übersetzt.

Ein einfacher Compiler würde beispielsweise Binärzahlen zu Dezimalzahlen übersetzen.

1.2 Grammatiken und Sprachen

Oft möchte man nur prüfen ob ein Wort in einer Sprache enthalten ist. Es ist umständlich die Menge aller Wörter einer Sprache aufzuschreiben und darin zu suchen. Daher wollen wir eine kürzere Beschreibung für Sprachen finden um diese Überprüfung durchzuführen.

Über Automaten (FSM) ist dies möglich. Für Binärzahlen könnte man dies wie in Abbildung 1.1 machen.

Wir haben eine Eingabe (mglw. Wort der Sprache) und beginnen im Zustand S . Beide Übergänge von Zustand S führen zu Zustand A . Es muss also entweder eine 0 oder eine 1 gelesen werden (auch “gematcht” bzw. “geparst”). Andernfalls gibt es keinen gültigen Übergang und da S kein Endzustand ist wäre die Eingabe nicht gültig. Im Zustand A wurde bereits eine 0 oder 1 gelesen, also ist $w \in \mathcal{B}$. Die Übergänge von A zu A erlauben weitere Zeichen zu lesen und so längere Wörter zu erhalten, die in der Sprache enthalten sind.

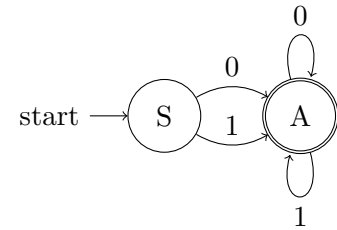


Abb. 1.1: Binärzahl FSM

Eine ähnliche Herangehensweise stellen Grammatiken dar:

Definition 1.5 (Grammatik): Eine Grammatik ist ein 4-Tupel (V_N, V_T, S, Φ) .

- V_N ist eine endliche Menge von Nonterminalen (entsprechen Zuständen der FSM),
- V_T ist eine endliche Menge von Terminalen (entsprechen Alphabet der Sprache),
- $S \in V_N$ das Startsymbol (wie Initialzustand der FSM),
- $\Phi = \{\alpha \rightarrow \beta\}$ eine endliche Menge von Produktionsregeln (Zustandsübergänge).

α ist hierbei eine beliebige Aneinanderreihung von Terminalen und Nonterminalen, die zumindest ein Nonterminal enthält, also $(V_N \cup V_T)^* V_N (V_N \cup V_T)^*$.

β ist eine beliebige Aneinanderreihung von Terminalen und Nonterminalen, einschließlich der leeren Menge, also $(V_N \cup V_T)^*$.

Anhand der Binärzahlen wollen wir nun genauer betrachten wie die Produktionsregeln funktionieren. Bei den Zustandsübergängen des Automaten hatten wir beispielsweise ein Wort $w = AB$ mit $A \in \{0, 1\}$ und $B \in \{0, 1\}^*$. Mit dem Zustandsübergang würden wir nun das A weglassen und hätten für das verbleibende zu lesende Wort $w' = B$. Wir ersetzen also AB durch B . Bei den Produktionsregeln der Grammatik halten wir ganz konkret fest was wir ersetzen.

Um die Grammatik der Binärzahlen G_B zu definieren müssen wir die Elemente des oben definierten 4-Tupels beschreiben. Die Menge der Terminale ist das Alphabet $\{0, 1\}$. Den Startzustand nennen wir S . In Abbildung 1.2 versuchen wir Produktionsregeln anzugeben um B zu definieren. Wir müssen nun zuerst definieren was eine Ableitung ist, um zu verifizieren wann ein Wort von einer Grammatik erzeugt werden kann.

$$S \rightarrow 0$$

$$S \rightarrow 1$$

$$S \rightarrow 0S$$

$$S \rightarrow 1S$$

Abb. 1.2: Binärzahl Grammatik

Definition 1.6: Sei (V_N, V_T, S, Φ) eine Grammatik und $\alpha, \beta \in (V_N \cup V_T)^*$. Wenn es 2 Zeichenfolgen τ_1, τ_2 gibt, so dass $\alpha = \tau_1 A \tau_2$, $\beta = \tau_1 B \tau_2$ und $A \rightarrow B \in \Phi$, dann kann β direkt (in einem Schritt) von α abgeleitet werden ($\alpha \rightarrow \beta$).

Diese Definition ist nur geeignet um eine Aussage darüber zu treffen was in genau einem Schritt abgeleitet werden kann. Wir definieren daher die reflexive Hülle dieses Operators.

Definition 1.7: Sei (V_N, V_T, S, Φ) eine Grammatik und $\alpha, \beta \in (V_N \cup V_T)^*$. Wenn es $n \in \mathbb{N}$ Zeichenfolgen τ_1, τ_n gibt, so dass $\alpha \rightarrow \tau_1, \tau_1 \rightarrow \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \rightarrow \tau_n, \tau_n \rightarrow \beta$, dann kann β von α (in n Schritten) abgeleitet werden ($\alpha \xrightarrow{+} \beta$).

Diese Definition ist für $n \geq 1$ geeignet. Wenn $\alpha = \beta$ ist, wäre $n = 0$. Wir definieren die reflexive, transitive Hülle durch eine Verknüpfung dieser beiden Fälle.

Definition 1.8: Es gilt $\alpha \xrightarrow{*} \beta$, genau dann wenn $\alpha \xrightarrow{+} \beta$ oder $\alpha = \beta$ (reflexive, transitive Hülle).

Mit dieser Definition können wir alle Wörter ableiten die diese Grammatik produziert.

Definition 1.9: Sei (V_N, V_T, S, Φ) eine Grammatik G . G akzeptiert die Sprache $L(G) = \{w \mid S \xrightarrow{*} w, w \in V_T^*\}$, d.h. die Menge aller Wörter w die in beliebig vielen Schritten aus dem Startsymbol S ableitbar sind und in der Menge aller beliebigen Konkatenationen von Terminalsymbolen V_T enthalten sind.

Definition 1.10: Zwei Grammatiken G und H sind **äquivalent** wenn die von den Grammatiken akzeptierten Sprachen gleich sind, d.h. $L(G) = L(H)$.

Die Äquivalenz von zwei Sprachen (bzw. zwei Grammatiken) zu zeigen ist im Allgemeinen nicht trivial. Wenn wir also versuchen eine Sprache \mathcal{L} durch eine Grammatik G zu beschreiben ist es im Allgemeinen nicht trivial zu zeigen, dass $L(G) = \mathcal{L}$.

An dieser Stelle möchten wir festzuhalten: Um die Gleichheit zweier Mengen (Sprachen) M, N zu zeigen muss gezeigt werden, dass jedes Element (Wort) aus M in N enthalten ist und jedes Element (Wort) aus N in M enthalten ist. Ungleichheit ist viel leichter zu zeigen, da es genügt ein Element (Wort) zu finden welches in genau einer Menge (Sprache) also nicht in beiden Mengen (Sprachen) enthalten ist. Der geneigte Leser kann probieren die Gleichheit oder Ungleichheit der Sprache unserer oben definierten Grammatik und der Sprache der Binärzahlen zu zeigen.

Definition 1.11: Ein Programm $P_{\mathcal{L}}$ welches für ein Wort w entscheidet ob es in der Sprache \mathcal{L} enthalten ist (d.h. `true` dann und nur dann zurückliefert wenn es enthalten ist), nennen wir **Parser**.

1.3 Chomsky-Sprachhierarchie

Durch die Grammatik können wir entscheiden ob ein Wort in einer Sprache enthalten ist. Im Falle der Binärzahlen haben wir eine kurze und einfache Grammatik und können einen Parser schreiben welches entscheidet ob ein Eingabewort in der Sprache enthalten ist. Definieren wir eine Programmiersprache wie \mathcal{C} formal, so wird nicht nur die Anzahl der Produktionsregeln höher sein sondern auch die Komplexität der Produktionsregeln ($\alpha \rightarrow \beta$ mit komplexen Ausdrücken für α und β). Es ist dann erheblich schwieriger einen Parser zu schreiben. Wir haben also Interesse daran möglichst einfache Grammatiken zu finden. Dazu müssen wir Grammatiken nach ihrer Komplexität vergleichen können.

Wir haben Produktionsregeln definiert durch $\alpha \rightarrow \beta$, wobei α zumindest ein Nonterminal enthält.

Definition 1.12: Eine Grammatik ist nach der Chomsky-Sprachhierarchie:

- allgemein/uneingeschränkt (unrestricted)

Keine Restriktionen

- Kontext-sensitiv (context sensitive): $|\alpha| \leq |\beta|$

Es werden nicht mehr Symbole gelöscht als produziert.

- Kontext-frei (context free): $|\alpha| \leq |\beta|$, $\alpha \in V_N$

Wie Kontext-sensitiv; außerdem muss α genau **ein** Non-Terminal sein

- regulär (regular): $|\alpha| \leq |\beta|$, $\alpha \in V_N$, $\beta = aA$, $a \in V_T \cup \{\varepsilon\}$, $A \in V_N \cup \{\varepsilon\}$

Wie Kontext-frei; außerdem ist $\beta = aA$ wobei a ein Terminal oder ε ist und A ein Nonterminal oder ε . (Anmerkung: $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$)

Es gilt $\mathbb{L}_{\text{regular}} \subset \mathbb{L}_{\text{context free}} \subset \mathbb{L}_{\text{context sensitive}} \subset \mathbb{L}_{\text{unrestricted}}$ (\mathbb{L}_x Menge aller Sprachen der Stufe x).

Nicht alle Grammatiken können in eine äquivalente Grammatik einer stärker eingeschränkten Stufe umgewandelt werden. Um zu zeigen, dass es sich um echte Teilmengen ($A \subset B$) handelt müssen wir zeigen, dass alle Elemente aus A in B enthalten sind und mindestens ein Element aus B nicht in A enthalten ist. Eine Beweisskizze dazu findet sich im Vorlesungsskriptum auf Seite 12. Dort wird unter anderem gezeigt, dass es für $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ keine äquivalente reguläre Grammatik G gibt, d.h. $\nexists G \in \mathbb{L}_{\text{regular}} : L(G) = L$.

Die Chomsky-Sprachhierarchie unterscheidet Sprachen anhand der Komplexität der produzierten Sprache.

1.4 Parser

Wir überspringen an dieser Stelle den BPARSE-Algorithmus (siehe Vorlesungsskriptum) und betrachten stattdessen einen Recursive Descent Parser (RDP).

Bei einem RDP werden alle Nonterminale in Funktionen übersetzt und diese Funktionen behandeln die verschiedenen Produktionsregeln. Die Eingabe wird in die Terminale unterteilt (auch Tokens genannt). Wir verwenden im Pseudo-Code die Variable `token`, die immer das aktuelle Token enthält, sowie die Funktion `nextToken()`, die `token` auf das nächste Token setzt. Der Parser ruft die Startfunktion auf und gibt `true` zurück wenn `token` leer ist (d.h. das Ende der Eingabe erreicht wurde). `ERROR` führt dazu, dass der Parser die Eingabe (das Wort) nicht akzeptiert.

Beispiel 1.1: Sei $G_{b1} = (\{S, T\}, \{0, 1\}, S, \{S \rightarrow 0, S \rightarrow 1T, T \rightarrow 0T, T \rightarrow 1T, T \rightarrow \varepsilon\})$. Der Pseudo-Code des RDP zu dieser Grammatik könnte so aussehen:

| | |
|---|---|
| <pre> FUNC S() IF token == 0 nextToken() ELSE IF token == 1 nextToken() T() ELSE ERROR </pre> | <pre> FUNC T() IF token == 0 nextToken() T() ELSE IF token == 1 nextToken() T() ELSE IF token != epsilon ERROR </pre> |
|---|---|

Beispiel 1.2: Sei $G_{b2} = (\{S, T\}, \{0, 1\}, S, \{S \rightarrow 0, S \rightarrow 1T, T \rightarrow T0, T \rightarrow T1, T \rightarrow \varepsilon\})$. Wir wissen $L(G_{b1}) = L(G_{b2})$ (ohne Beweis) und versuchen auch hier einen einfachen rekursiven Parser zu schreiben.

| | |
|---|---|
| <pre> FUNC S() IF token == 0 nextToken() ELSE IF token == 1 nextToken() T() ELSE ERROR </pre> | <pre> FUNC T() IF token == 0 T() // Endlos-Rekursion nextToken() ELSE IF token == 1 T() // Endlos-Rekursion nextToken() ELSE IF token != epsilon ERROR </pre> |
|---|---|

Wir erhalten hier im Parser eine Endlos-Rekursion, da in $T \rightarrow T0, T \rightarrow T1$ ein Nonterminal ganz links steht. Wir nennen dies “Linksrekursion”.

Definition 1.13 (Mehrdeutig, Eindeutig): Sei $G = (V_N, V_T, S, \Phi)$ eine Grammatik. Wenn es für ein Wort $w \in L(G)$ mehrere unterschiedliche Ableitungssequenzen α, β gibt, d.h. $S \rightarrow \alpha_1, \alpha_1 \rightarrow \dots, \dots \rightarrow \alpha_n, \alpha_n \rightarrow w$ und $S \rightarrow \beta_1, \beta_1 \rightarrow \dots, \dots \rightarrow \beta_k, \beta_k \rightarrow w$, wobei $\exists \beta_i : \beta_i \neq \alpha_i$, ist es mehrdeutig. Eine Grammatik ist genau dann eindeutig, wenn sie nicht mehrdeutig ist.

Definition 1.14 (Linksrekursiv): Eine Grammatik ist direkt linksrekursiv wenn sie eine Produktion der Form $A\alpha \rightarrow A\beta$ enthält, wobei A ein Nonterminal ist. Eine Grammatik ist indirekt linksrekursiv wenn sie Produktionen der Form $A\alpha \rightarrow A_1\beta_1, A_1\alpha_1 \rightarrow A_2\beta_2, \dots, A_n\alpha_n \rightarrow A\beta_n$ enthält, wobei A, A_i Nonterminale sind. Eine Grammatik ist linksrekursiv wenn sie direkt oder indirekt linksrekursiv ist.

Nun können wir mit Sprachen und Grammatiken umgehen und diese nach ihrer Komplexität einstufen.

1.5 Compilerbau

Wir wollen uns nun damit beschäftigen wie wir Compiler für Programmiersprachen bauen können. Wir hatten definiert, dass ein Compiler ein Wort w einer Sprache \mathcal{L} entgegennimmt und die Übersetzung des Wortes w' in einer Sprache \mathcal{L}' zurückgibt. Konkreter erhält unser Compiler beispielsweise einen ASCII-String, wobei unser Alphabet $\Sigma_{\mathcal{L}}$ meist nicht dem ASCII-Alphabet entspricht. Betrachten wir beispielsweise die Programmiersprache \mathcal{C} so können wir auch Schlüsselwörter wie `int` in $\Sigma_{\mathcal{C}}$ haben. Außerdem gibt es eventuell Whitespaces (Leerzeichen, Tabulatoren, Zeilenumbrüche, etc.; je nach dem positionsabhängig), die keinen Einfluss darauf haben ob das Eingabewort ein Wort der Sprache \mathcal{C} ist, d.h. ein \mathcal{C} -Programm ist. Auch Variablen- oder Funktionsnamen werden abgesehen von einer gewissen Form die sie einhalten müssen (z.B. “dürfen nicht nur aus Zahlen bestehen”) keinen Einfluss darauf haben ob das Programm in der Sprache enthalten ist. Wenn wir dies berücksichtigen, verkürzen wir die Grammatik und vereinfachen so unseren Parser sowie eventuelle weitere Rechenschritte.

1.6 Lexikalische Analyse

Wir haben bereits in Abschnitt 1.4 von Tokens geredet. Von Tokens spricht man insbesondere bei einer Sprache die durch Whitespaces getrennt werden. Ein Token ist hierbei die kleinste Sequenz von Zeichen die für die Grammatik eine Bedeutung hat. Der erste Schritt der Kompilervorgangs ist es die Eingabe in eine Sequenz von Tokens umzuwandeln (dies kann natürlich wie bei unserem rekursiven Parser während dem Parsen passieren).

Wir wollen z.B. den C-Code `int main() { printf("helloworld"); return 123; }` in die Sequenz von Tokens `INT ID () { ID (STRING) ; RETURN NUM ; }` umwandeln. Wir nennen dies “Lexikalische Analyse”. Es fällt auf, dass in der Token-Sequenz keine Namen oder Zahlen mehr vorkommen außerdem sind nun die Tokens voneinander getrennt. Es ist üblich zur lexikalischen Analyse nur reguläre Grammatiken zu verwenden. Diese sind mächtig genug um beispielsweise nur gewisse Variablennamen zu erlauben und können andererseits sehr schnell berechnet werden. Eine reguläre Grammatik kann auch über einen regulären Ausdruck (Regular Expression/Regex) kompakt dargestellt werden.

Definition 1.15: Ein regulärer Ausdruck A ist wie folgt rekursiv definiert (mit regulären Ausdrücken Q und R):

$$A = \begin{cases} \varepsilon & \text{Leerstring} \\ t & \text{ein Terminal, d.h. } t \in V_T \\ Q|R & \text{entweder } A = Q \text{ oder } A = R \\ QR & \text{Konkatenation zweier regulärer Ausdrücke} \\ Q? & \text{entspricht } Q|\varepsilon, \text{ d.h. } Q \text{ ist optional} \\ Q* & \text{beliebige Konkatenation von } Q \text{ mit sich selbst, d.h. } A \in \{\varepsilon, Q, QQ, \dots\} \\ Q+ & \text{entspricht } QQ*, \text{ d.h. mindestens ein } Q \\ (Q) & \text{Klammerung des Ausdrucks } Q \end{cases}$$

Die Sprache der Binärzahlen hatten wir bereits in Abschnitt 1.4 durch die Grammatik $G_{b1} = (\{S, T\}, \{0, 1\}, S, \{S \rightarrow 0, S \rightarrow 1T, T \rightarrow 0T, T \rightarrow 1T, T \rightarrow \varepsilon\})$ beschrieben. Wir können nun diese Grammatik in einen regulären Ausdruck übersetzen indem wir uns nach und nach überlegen welche Werte folgen können. Beginnend bei S erhalten wir den Teilausdruck $0|(1\tau)$. Für τ müssen wir noch einen regulären Ausdruck einsetzen: $\tau = (0|1)*$. Damit erhalten wir den Ausdruck $0|(1(0|1)*)$.

Zur Vereinfachung erlauben wir Variablen (Bezeichner) in regulären Ausdrücken:

Definition 1.16: Sei B die Menge aller Variablen (Bezeichnungen). Ein regulärer Ausdruck der eine Variable b aus B enthält ist ein erweiterter regulärer Ausdruck. Wenn E ein erweiterter regulärer Ausdruck ist und c eine Variable aus B , dann ist $c := E$ eine reguläre Definition.

Die Sprache der natürlichen Zahlen inkl. Null beschreiben wir durch den Ausdruck $0|(1|2|3|4|5|6|7|8|9)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)^*$. Durch die Definition erweiterter regulärer Ausdrücke können wir nun komplexe Ausdrücke in die einzelnen Bestandteile kapseln und so besser lesbare Ausdrücke schaffen. Diesen Ausdruck können wir nun aufteilen indem wir die Teilausdrücke $\text{digit_not_null} := (1|2|3|4|5|6|7|8|9)$ und $\text{digit} := 0 | \text{digit_not_null}$ definieren. Dann erhalten wir den wesentlich leichter verständlichen Ausdruck $0|(\text{digit_not_null digit}^*)$.

Mit erweiterten regulären Ausdrücken können wir nun einfach den Eingabestring in eine Token-Sequenz aufteilen. Übersetzen wir dazu den erweiterten regulären Ausdruck zu einer Funktion so beobachten wir:

- Terminale werden zu `if`-Abfragen,
- Q^* wird zu einem Schleifenkonstrukt,
- $Q|R$ wird zu einer `if, else if, else`-Abfrage wobei der `else` Fall zu einem Ablehnen der Eingabe führt,
- QR bedeutet, dass zuerst Q überprüft wird, danach R .

1.7 Grammatikalische Analyse

Der letzte Schritt der Syntaxanalyse ist die grammatikalische Analyse. In diesem Schritt wollen wir anhand der Token-Sequenz prüfen ob das Eingabewort in der Sprache der Grammatik enthalten ist. Die Verarbeitung einschließlich diesen Schrittes nennen wir "Parsing". Als Nebenprodukt wird oft ein Parse-Baum aufgebaut, der zusätzlich zur Reihenfolge der Tokens auch die Kapselung im Programm ausdrückt. Hierzu verwenden wir das Beispiel aus dem Vorlesungsskriptum und werden uns auch weitgehend an diesem orientieren. Wir entwerfen eine Grammatik für einfache arithmetische Ausdrücke, bestehend aus Zahlen, Operatoren (Addition und Multiplikation) und Klammern. Die Bindungsstärke von Operatoren behandeln wir auf Syntax-Ebene nicht.

Bei kontext-freien oder regulären Grammatiken werden wir fortan nur noch die Produktionsregeln mit unterstrichenen Nonterminalen anschreiben, da die Grammatik dadurch vollständig definiert wird:

- V_N ist die Vereinigung über alle Symbole auf der linken Seite der Produktionsregeln (d.h. alle Nonterminale),
- V_T ist die Vereinigung aller unterstrichenen Zeichenfolgen (d.h. alle Terminale),
- S , das Startsymbol ist (soweit nicht anders festgehalten) das erste aufgeführte Nonterminal,
- Φ wird explizit angegeben.

Wir definieren nun die Sprache der einfachen arithmetischen Ausdrücke durch:

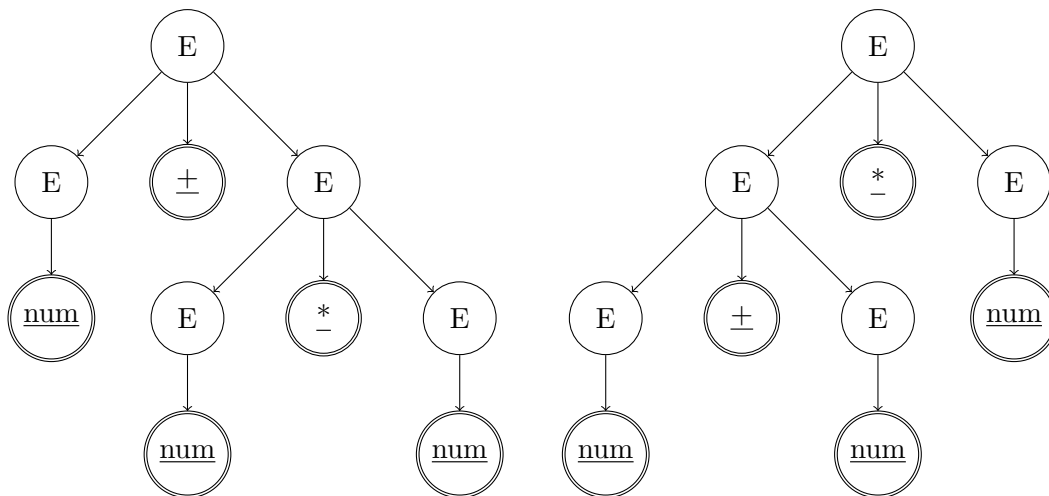
1. $E \rightarrow E \pm E$
2. $E \rightarrow E * E$
3. $E \rightarrow (E)$
4. $E \rightarrow \text{num}$

Wir sehen, dass diese Grammatik eine kontext-freie Grammatik ist. Außerdem sehen wir anhand von Regel 1 und 2, dass die Grammatik linksrekursiv ist. Weiters können wir für den Satz num + num * num zwei mögliche Ableitungen finden. Wir verwenden dazu eine verkürzte Form der Darstellung aus Abschnitt 1.4. Die Vorgehensweise dabei nennt man auch Top-Down-Parsing.

1. $E \rightarrow E * E \rightarrow E * E \pm E \rightarrow \text{num} + E * E \rightarrow \text{num} + \text{num} * E \rightarrow \text{num} + \text{num} * \text{num}$
2. $E \rightarrow E \pm E \rightarrow E \pm E * E \rightarrow \text{num} + E * E \rightarrow \text{num} + \text{num} * E \rightarrow \text{num} + \text{num} * \text{num}$

Dies zeigt, dass die Grammatik mehrdeutig ist.

Eine weitere Möglichkeit dies anschaulich darzustellen sind Parse-Trees. Ein Parse-Tree stellt einen konkreten Parse-Vorgang dar. Der Wurzel-Knoten das Startsymbol. Die Kinder jedes Knotens sind die einzelnen Terminale und Nonterminale die dieser Knoten produziert (von links nach rechts entsprechend der Grammatik). Die obigen Parse-Sequenzen lassen sich so darstellen:



Das geparsete Wort kann in den Blättern des Baumes von links nach rechts abgelesen werden. Hier ist die Mehrdeutigkeit ebenfalls sehr gut erkennbar.

Eine weitere Beobachtung ist, dass es ungünstig ist wenn es für unseren Parser nicht genügt, dass aktuelle Token zu kennen sondern für das Parsing auch weitere nachfolgende Tokens ermittelt werden müssen. Ist das Eingabewort num, so haben wir 3 Regeln die alle zutreffen könnten (ohne Kenntnis der nachfolgenden Tokens).

1.8 LL(1)-Grammatiken

Definition 1.17 (LL(1)-Grammatik): Eine kontextfreie Grammatik G ist eine LL(1)-Grammatik (ist in LL(1)-Form) wenn sie

- keine Linksrekursionen enthält (z.B. $L \rightarrow L\underline{a}$)
- keine Produktionen mit gleichen Präfixen für die selbe linke Seite enthält (z.B. $A \rightarrow \underline{a}B$ und $A \rightarrow \underline{a}C$)
- ermöglicht immer in einem Schritt (d.h. nur mit Kenntnis des nächsten Tokens) zu entscheiden, welche Produktionsregel zur Ableitung verwendet werden muss.

LL(1) steht für “Left to right”, “Leftmost derivation”, “1 Token Look-ahead”.

Wir definieren einfache Regeln zwecks Auflösung von:

- **Indirekten Linksrekursionen**

Gibt es Produktionen der Form $A \rightarrow \alpha B \beta$ sowie $B \rightarrow \gamma$, dann kann man die Produktion $A \rightarrow \alpha \gamma \beta$ einfügen. Wenn $\alpha = \varepsilon$ ist können so indirekte Linksrekursionen **gefunden**, d.h. in direkte Linksrekursionen umgeformt werden. Diese Umformung kann auch in anderen Fällen die Produktionen vereinfachen.

- **Direkten Linksrekursionen**

Gibt es Produktionen der Form $A \rightarrow A\alpha$ und $A \rightarrow \beta$, dann kann man diese in Produktionen der Form $A \rightarrow \beta R$ sowie $R \rightarrow \alpha R | \varepsilon$ umwandeln.

- **Linksfaktorisierungen**

Gibt es Produktionen der Form $A \rightarrow \alpha B$ sowie $A \rightarrow \alpha C$, wobei α der größte gemeinsame Präfix von αB und αC ist, so können wir diese Produktion durch $A \rightarrow \alpha R$ und $R \rightarrow B | C$ ersetzen. Der größte gemeinsame Präfix einer Sequenz von Terminalen und Nonterminalen ist die größte gemeinsame Zeichenkette dieser Sequenzen. Der größte gemeinsame Präfix von if E then E else E und if E then E ist if E then E.

Mit diesen Regeln können wir oftmals Grammatiken in äquivalente LL(1)-Grammatiken umformen. Es gibt natürlich Grammatiken bei denen dies nicht möglich ist. In diesem Fall bleibt nur die Möglichkeit eine andere Parsing-Methode zu verwenden oder die Sprache zu verändern.

Beispiel 1.3:

Überlegen wir uns einmal anhand eines kleineren Beispiels was eine direkte Linksrekursion eigentlich bedeutet und wie man diese intuitiv auflöst. Wir werden anhand dieses Beispiels eine Herleitung der Regel für die direkte Linksrekursion skizzieren.

Wir erkennen auf den ersten Blick, dass jedes Wort der Sprache dieser Grammatik wohl mit \underline{b} beginnen muss. Dann folgen eine beliebige Anzahl von \underline{a} . Als regulären Ausdruck könnte man schreiben $\mathbf{ba^*}$. Versuchen wir nun die Sprache intuitiv umzubauen. Dazu ändern wir zunächst wie folgt die 2. Regel um:

1. $A \rightarrow \underline{b}$
2. $A \rightarrow \underline{Aa}$

1. $A \rightarrow \underline{b}$
2. $A \rightarrow \underline{aA}$

Jetzt haben wir $\mathbf{a^*b}$ gebaut, also bauen wir ein neues Non-Terminal für die Produktionen der \underline{a} , die man erst nach einem \underline{b} produzieren können sollte.

1. $A \rightarrow \underline{b}$
2. $B \rightarrow \underline{aB}$

Nun können wir nur noch \mathbf{b} produzieren, daher fügen wir ein B in die 1. Produktion ein. Außerdem würde die Rekursion von B nie terminieren.

1. $A \rightarrow \underline{bB}$
2. $B \rightarrow \underline{aB}$

Nun produzieren wir zuerst ein \underline{b} und dann beliebig viele \underline{a} , allerdings terminiert die Rekursion nie. Wir fügen also eine Regel $B \rightarrow \varepsilon$ ein und erhalten die richtig umgeformte Grammatik:

1. $A \rightarrow \underline{bB}$
2. $B \rightarrow \underline{aB} \mid \varepsilon$

Es ist auffällig, dass unsere Umformung der Form entspricht die in den Regeln beschrieben wurde.

Beispiel 1.4:

In diesem Beispiel möchten wir nun auch die Regeln der Linksfaktorisierung und indirekte Linksrekursion durch intuitive Herangehensweise herleiten. Gegeben sei die folgende Grammatik die arithmetische Ausdrücken einer bestimmten Form beschreibt:

1. $E \rightarrow G$
2. $G \rightarrow E \pm E$
3. $G \rightarrow E * E$
4. $E \rightarrow (E)$
5. $E \rightarrow \underline{\text{num}}$
6. $E \rightarrow \underline{(G)} / \underline{(G)}$

Versuchen wir nun zu Bestimmen: Gibt es Linksrekursionen oder gemeinsame Präfixe? Gibt es weitere Probleme bei dieser Grammatik?

In der Grammatik sind keine direkten Linksrekursionen. Regeln 2, 5 und 6 haben einen gemeinsamen Präfix $(($). Man sieht auch recht schnell, dass durch die Produktionen $E \rightarrow G \rightarrow E * E$ eine indirekte Linksrekursion entsteht.

Wenn wir uns überlegen wie man die gemeinsamen Präfixe entfernen kann wird man intuitiv auf die gleiche Idee kommen die oben in den Regeln festgehalten wurde: Wir führen ein neues Non-Terminal ein welches die Produktion von $(($) übernimmt und anschließend einen der Reste produziert. Wir erhalten dann die nebenstehende Grammatik.

1. $E \rightarrow G$
2. $G \rightarrow E \pm E$
3. $G \rightarrow E * E$
4. $\underline{E} \rightarrow \underline{(B}$
5. $\underline{B} \rightarrow \underline{E)}$
6. $\underline{B} \rightarrow \underline{\text{num}}$
7. $\underline{B} \rightarrow \underline{(G)} / \underline{(G)}$

Wie können wir nun die indirekte Linksrekursion lösen? Wir hatten sie durch die Produktionen $E \rightarrow G \rightarrow E * E$ erkannt. Versuchen wir nun diesen Zwischenschritt zu eliminieren. Dazu können wir die Regel G einfach "einsetzen" - d.h. aus Regel 1 werden 2 neue Regeln, aus Regel 7 werden sogar 4 neue Regeln (alle Kombinationen).

1. $E \rightarrow E \underline{+} E$
2. $E \rightarrow E \underline{*} E$
3. $E \rightarrow (B$
4. $B \rightarrow \underline{\bar{E}})$
5. $B \rightarrow \underline{\text{num}})$
6. $B \rightarrow \underline{E \underline{+} \bar{E}} / \underline{(E \underline{*} E)}$
7. $B \rightarrow \underline{E \underline{+} E} / \underline{(E \underline{+} E)}$
8. $B \rightarrow \underline{E \underline{*} E} / \underline{(\bar{E} \underline{*} E)}$
9. $B \rightarrow \underline{E \underline{*} E} / \underline{(E \underline{+} \bar{E})}$

Lösen wir zunächst wieder die gemeinsamen Präfixe (Regeln 6-9). Dadurch entstehen wieder neue gemeinsame Präfixe die dann gelöst werden müssen (Regeln 7-10):

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $E \rightarrow E \underline{+} E$ | 1. $E \rightarrow E \underline{+} E$ | 1. $E \rightarrow E \underline{+} E$ |
| 2. $E \rightarrow E \underline{*} E$ | 2. $E \rightarrow E \underline{*} E$ | 2. $E \rightarrow E \underline{*} E$ |
| 3. $E \rightarrow (B$ | 3. $E \rightarrow (B$ | 3. $E \rightarrow (B$ |
| 4. $B \rightarrow \underline{\bar{E}})$ | 4. $B \rightarrow \underline{\bar{E}})$ | 4. $B \rightarrow \underline{EF}$ |
| | | 5. $F \rightarrow \underline{)}$ |
| 5. $B \rightarrow \underline{\text{num}})$ | 5. $B \rightarrow \underline{\text{num}})$ | 6. $B \rightarrow \underline{\text{num}})$ |
| 6. $B \rightarrow \underline{EC}$ | 6. $B \rightarrow \underline{EC}$ | 7. $F \rightarrow \underline{C}$ |
| 7. $C \rightarrow \underline{+E} / \underline{(E \underline{*} E)}$ | 7. $C \rightarrow \underline{+E} / \underline{(ED}$ | 8. $C \rightarrow \underline{+E} / \underline{(ED}$ |
| 8. $C \rightarrow \underline{+E} / \underline{(E \underline{+} \bar{E})}$ | 8. $C \rightarrow \underline{*E} / \underline{(ED}$ | 9. $C \rightarrow \underline{*E} / \underline{(ED}$ |
| 9. $C \rightarrow \underline{*E} / \underline{(E \underline{*} E)}$ | 9. $D \rightarrow \underline{+E}$ | 10. $D \rightarrow \underline{+E}$ |
| 10. $C \rightarrow \underline{*E} / \underline{(E \underline{+} \bar{E})}$ | 10. $D \rightarrow \underline{*E}$ | 11. $D \rightarrow \underline{*E}$ |

Nun haben wir nur noch die direkte Linksrekursionen (Regeln 1 und 2). Wir wissen aus dem vorherigen Beispiel bereits wie wir diese auflösen und erhalten die nebenstehende Grammatik. Wir sehen, dass die Regeln genau unser intuitives Vorgehen festhalten und verallgemeinern. Außerdem garantieren korrekte Anwendungen der Regeln, dass die Grammatik nach der Umformung noch die gleiche Sprache beschreiben.

1. $E \rightarrow (BR$
2. $R \rightarrow \underline{+E}$
3. $R \rightarrow \underline{*E}$
4. $R \rightarrow \underline{\varepsilon}$
5. $B \rightarrow EF$
6. $F \rightarrow \underline{)}$
7. $B \rightarrow \underline{(\text{num})}$
8. $F \rightarrow \underline{C}$
9. $C \rightarrow \underline{+E} / \underline{(ED}$
10. $C \rightarrow \underline{*E} / \underline{(ED}$
11. $D \rightarrow \underline{+E}$
12. $D \rightarrow \underline{*E}$

1.9 LL(1)-Tabellen

LL(1)-Tabellen ermöglichen es einen generischen LL(1)-Parser zu schreiben, der mit einer beliebigen LL(1)-Tabelle (und damit Sprache) arbeiten kann. Wir werden uns nun erarbeiten wie eine solche LL(1)-Tabelle berechnet werden kann. Für die Definition der FIRST- und FOLLOW-Mengen stellen wir uns Nonterminale wieder als Zustände in einem Graph oder eine Maschine vor.

Definition 1.18 (FIRST-Menge): Die FIRST-Menge eines Nonterminals X ist die Menge aller Terminalsymbole die im Zustand X **als erstes** geparkt werden können. Die FIRST-Menge eines Terminals x ist immer das Terminalsymbol selbst.

Formal bedeutet dies:

1. Wenn x ein Terminal ist: $\text{FIRST}(x) = \{x\}$
2. Wenn die Grammatik Produktionsregeln enthält, so dass $X \rightarrow \dots \rightarrow \varepsilon$, dann ist: $\varepsilon \in \text{FIRST}(X)$
3. Für jede Produktionsregel der Form $X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_n$ ist $x \in \text{FIRST}(X)$, wenn $x \in \text{FIRST}(Y_i)$ und für alle Y_j mit $j < i$ gilt, dass $\varepsilon \in \text{FIRST}(Y_j)$.

Für aufeinanderfolgende Terminal- bzw. Nonterminalsymbole $X_1 X_2 \dots X_n$:

1. Wenn $x \in \text{FIRST}(X_i)$ und für alle X_j mit $j < i$ gilt, dass $\varepsilon \in \text{FIRST}(X_j)$, dann ist $x \in \text{FIRST}(X_1 X_2 \dots X_n)$.
2. Wenn für alle X_i $\varepsilon \in \text{FIRST}(X_i)$ ist, dann ist auch $\varepsilon \in \text{FIRST}(X_1 X_2 \dots X_n)$.

Aus dieser Definition folgt beispielsweise für einfache Regeln $A \rightarrow B$, dass die FIRST-Menge $\text{FIRST}(A) = (\text{FIRST}(B) \setminus \{\varepsilon\}) \cup \dots$ ist.

Definition 1.19: Wir definieren die FIRST*-Menge als FIRST-Menge ohne ε (zwecks Übersichtlichkeit):

$$\text{FIRST}^*(X) = \text{FIRST}(X) \setminus \{\varepsilon\}.$$

Beispiel 1.5: Betrachten wir folgendes Beispiel:

| | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| $A \rightarrow \underline{b}$ | $A \rightarrow \varepsilon$ |
| $A \rightarrow A\underline{a}$ | $B \rightarrow \underline{b}q$ |
| $A \rightarrow ABC$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ |

Für diese Grammatik berechnen wir nun die FIRST- und FOLLOW-Mengen.

$$\begin{aligned}
 \text{FIRST}(\underline{b}) &= \{\underline{b}\} && \text{(wird meist nicht aufgeschrieben da trivial)} \\
 \text{FIRST}(A) &= \{\underline{b}\} && \text{(durch die 1. Produktion)} \\
 &\cup \text{FIRST}^*(A) && \text{(durch die 2. Produktion)} \\
 &\cup \{\underline{a}\} && \text{(2. Produktion kann wegfallen d.h. } \varepsilon \text{ werden)} \\
 &\cup \text{FIRST}^*(A) && \text{(durch die 3. Produktion)} \\
 &\cup \text{FIRST}^*(B) && \text{(3. Produktion, wenn } A \text{ wegfällt)} \\
 &\cup \{\varepsilon\} && \text{(durch die 3. Produktion)}
 \end{aligned}$$

Wir wissen aus der Mengenlehre, dass $M \cup M' = M$ mit $M' \subseteq M$ und können daher $\text{FIRST}^*(A)$ weglassen:

$$\begin{aligned}
 &= \{\underline{b}\} \cup \{\underline{a}\} \cup \text{FIRST}^*(B) \cup \{\varepsilon\} \\
 &= \{\underline{b}, \underline{a}, \varepsilon\} \cup \text{FIRST}^*(B)
 \end{aligned}$$

Um $\text{FIRST}^*(B)$ zu erhalten müssen wir also zuerst $\text{FIRST}(B)$ ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \text{FIRST}(B) &= \{\underline{b}\} \cup \{\underline{q}\} \\
 &= \{\underline{b}, \underline{q}\} \\
 \text{FIRST}(A) &= \{\underline{b}, \underline{a}, \varepsilon\} \cup \{\underline{b}, \underline{q}\} \\
 &= \{\underline{b}, \underline{a}, \varepsilon, \underline{q}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{FIRST}(C) &= \text{FIRST}^*(A) \cup \{\underline{c}\} && \text{(da } A \rightarrow \varepsilon \text{ werden kann)} \\
 &= \{\underline{b}, \underline{a}, \underline{q}\} \cup \{\underline{c}\} \\
 &= \{\underline{b}, \underline{a}, \underline{q}, \underline{c}\}
 \end{aligned}$$

Definition 1.20: Jede Eingabe des Parsers endet mit dem “End of Input” Symbol \$.

Definition 1.21 (FOLLOW-Menge): Die FOLLOW-Menge eines Nonterminals X ist die Menge aller Terminalsymbole die direkt auf Zustand X **folgen** können. Das heißt, alle Terminalsymbole die nach Abarbeitung des Zustands X als erstes geparkt werden können.

Formal bedeutet dies:

1. Wenn X das Startsymbol ist, dann ist $\$ \in \text{FOLLOW}(X)$
2. Für alle Regeln der Form $A \rightarrow \alpha B \beta$ ist $\text{FIRST}^*(\beta) \subseteq \text{FOLLOW}(B)$
3. Für alle Regeln der Form $A \rightarrow \alpha B$ bzw. $A \rightarrow \alpha B \beta$ mit $\varepsilon \in \text{FIRST}(\beta)$ ist $\text{FOLLOW}(A) \subseteq \text{FOLLOW}(B)$

An dieser Stelle ist anzumerken, dass ε nie in einer FOLLOW-Menge enthalten sein kann.

Beispiel 1.6: Betrachten wir das gleiche Beispiel wie zuvor:

$$\begin{array}{ll}
 A \rightarrow \underline{b} & A \rightarrow \varepsilon \\
 A \rightarrow A\underline{a} & B \rightarrow \underline{b}|q \\
 A \rightarrow ABC & C \rightarrow A\underline{c}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{FOLLOW}(A) &= \{\$ \} && \text{(da } A \text{ das Startsymbol ist)} \\
 &\cup \{\underline{a}\} && \text{(durch die 2. Produktion)} \\
 &\cup \text{FIRST}^*(B) && \text{(durch die 3. Produktion)} \\
 &\cup \{\underline{c}\} && \text{(durch die 6. Produktion)} \\
 &= \{\$, \underline{a}\} \cup \{\underline{b}, \underline{q}\} \cup \{\underline{c}\} \\
 &= \{\$, \underline{a}, \underline{b}, \underline{q}, \underline{c}\} \\
 \text{FOLLOW}(B) &= \text{FIRST}^*(C) && \text{(durch die 3. Produktion)} \\
 &= \{\underline{b}, \underline{a}, \underline{q}, \underline{c}\} \\
 \text{FOLLOW}(C) &= \text{FOLLOW}(A) && \text{(durch die 3. Produktion)} \\
 &= \{\$, \underline{a}, \underline{b}, \underline{q}, \underline{c}\}
 \end{aligned}$$

Algorithmus (Parse-Table): Der Parse-Table Algorithmus berechnet aus einer Grammatik eine Parse-Table (auch LL(1)-Tabelle) M .

1. Für jede Produktion $X \rightarrow \alpha$:
 - (a) Für jedes Element $y \in \text{FIRST}^*(\alpha)$ bzw. wenn $\alpha = y$:
 - i. Füge $X \rightarrow \alpha$ in $M(X, y)$ ein.
 - (b) Wenn $\varepsilon \in \text{FIRST}(\alpha)$:
 - i. Für alle $y \in \text{FOLLOW}(X)$:
 - A. Füge $X \rightarrow \alpha$ in $M(X, y)$ ein.

Leere Einträge in der LL(1)-Tabelle sind Fehlerfälle. Diese können auch explizit mit ERROR beschriftet werden.

Beispiel 1.7: Betrachten wir das gleiche Beispiel wie zuvor:

$$A \rightarrow \underline{b}$$

$$A \rightarrow A\underline{a}$$

$$A \rightarrow ABC$$

$$A \rightarrow \varepsilon$$

$$B \rightarrow \underline{b}|q$$

$$C \rightarrow A\underline{c}$$

Wir haben bereits die FIRST- und FOLLOW-Mengen berechnet, wir können also gleich den Algorithmus ausführen.

| | FIRST | FOLLOW |
|-----|--|--|
| A | $\{\underline{b}, \underline{a}, \varepsilon, \underline{q}\}$ | $\{\$, \underline{a}, \underline{b}, \underline{q}, \underline{c}\}$ |
| B | $\{\underline{b}, \underline{q}\}$ | $\{\underline{b}, \underline{a}, \underline{q}, \underline{c}\}$ |
| C | $\{\underline{b}, \underline{a}, \underline{q}, \underline{c}\}$ | $\{\$, \underline{a}, \underline{b}, \underline{q}, \underline{c}\}$ |

Wir beginnen mit der leeren LL(1)-Tabelle. Wir haben eine Zeile pro Non-Terminal und eine Spalte je Terminal sowie eine Spalte für “End of Input”. Ausführung für $A \rightarrow \underline{b}$:

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|----|
| A | | | | | |
| B | | | | | |
| C | | | | | |

→

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|-----|----------|-------------------------------|----------|----------|----|
| A | | $A \rightarrow \underline{b}$ | | | |
| B | | | | | |
| C | | | | | |

Schritt 1b trifft auf diese Produktionsregel nicht zu. Ausführung für $A \rightarrow A\underline{a}$ und für $A \rightarrow ABC$ (auch hier wird die Bedingung aus Schritt 1b noch nicht erfüllt):

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|----------|--------------------------------|----|
| A | $A \rightarrow A\underline{a}$ | $A \rightarrow \underline{b}$ | | $A \rightarrow A\underline{a}$ | |
| B | | $A \rightarrow A\underline{a}$ | | | |
| C | | | | | |

→

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|-----|---|--|----------|---|----|
| A | $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ | $A \rightarrow \underline{b}$ $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ | | $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ | |
| B | | | | | |
| C | | | | | |

Ausführung für $A \rightarrow \varepsilon$ (Schritt 1b):

→

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|-----|--|---|-----------------------------|--|-----------------------------|
| A | $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow \underline{b}$ $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow \varepsilon$ |
| B | | | | | |
| C | | | | | |

Ausführung für $B \rightarrow \underline{b|q}$ und $C \rightarrow A\underline{c}$

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|---------------|--|---|--------------------------------|--|-----------------------------|
| \rightarrow | $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow \underline{b}$ $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow A\underline{a}$ $A \rightarrow ABC$ $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow \varepsilon$ |
| B | | $B \rightarrow \underline{b}$ | | $B \rightarrow \underline{q}$ | |
| C | $C \rightarrow A\underline{c}$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ | |

Definition 1.22: Eine Grammatik ist eine LL(1)-Grammatik, wenn die berechnete LL(1)-Tabelle keine Mehrfacheinträge hat.

Definition 1.23: Eine Parsing-Tabelle stellt einen vollständigen Parse-Vorgang dar. Jede Zeile entspricht einem Bearbeitungsschritt im Parse-Vorgang. In Spalten werden Stack, Eingabe und die angewandte Produktionsregel aufgetragen.

Algorithmus (Parsing mit Parsing-Tabelle und LL(1)-Tabelle): Sei X das oberste Stack-Element, t das aktuelle Token der Eingabe w und \mathcal{L} die von der Grammatik akzeptierte Sprache.

1. Wenn X ein Non-Terminal ist:
 - (a) Nimm den Wert von $M(X, t)$
 - (b) Ist der Eintrag leer oder ein Fehlereintrag: Abbruch ($w \notin \mathcal{L}$).
 - (c) Sonst: Ersetze das oberste Stack-Element X durch Produktion in umgekehrter Reihenfolge (WVU wenn $M(X, t) = X \rightarrow UVW$).
2. Andernfalls (X ist ein Terminal):
 - (a) Wenn $X = t = \$$: Parsing erfolgreich ($w \in \mathcal{L}$).
 - (b) Sonst, wenn $X = t \neq \$$, dann nimm X vom Stack und gehe zum nächsten Token im Input.
 - (c) Sonst: Abbruch ($w \notin \mathcal{L}$).

Diese Definition kann für andere Parser leicht angepasst werden.

Beispiel 1.8: Gegeben sei die folgende Grammatik (ähnlich der Grammatik aus dem vorherigen Beispiel):

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow A\underline{a} & B \rightarrow \underline{b}|q \\ A \rightarrow ABC & C \rightarrow A\underline{c} \\ A \rightarrow \varepsilon & \end{array}$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass das Wort \underline{abbqa} von der Grammatik akzeptiert wird. Zeigen oder widerlegen Sie, dass das Wort \underline{abc} von der Grammatik akzeptiert wird.

Lösung: Wir formen die Grammatik zu einer LL(1)-Grammatik um, berechnen dann die LL(1)-Tabelle und beweisen mittels einer Parsing-Tabelle, dass das gegebene Wort von der Grammatik akzeptiert wird.

$$\begin{array}{lll} \begin{array}{l} A \rightarrow A\underline{a} \\ A \rightarrow ABC \\ A \rightarrow \varepsilon \\ B \rightarrow \underline{b}|q \\ C \rightarrow A\underline{c} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} A \rightarrow R \\ R \rightarrow \underline{a}R \\ R \rightarrow BCR \\ R \rightarrow \varepsilon \\ B \rightarrow \underline{b}|q \\ C \rightarrow A\underline{c} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A \rightarrow \underline{a}A \\ A \rightarrow \underline{B}CA \\ A \rightarrow \varepsilon \\ B \rightarrow \underline{b}|q \\ C \rightarrow A\underline{c} \end{array} \end{array}$$

Anhand der FIRST- und FOLLOW-Mengen ist bereits erkennbar, dass die Mehrdeutigkeiten behoben sind.

$$\begin{array}{lll} \text{FIRST}(B) = & \{\underline{b}, \underline{q}\} & \\ \text{FIRST}(A) = & \{\underline{a}\} \cup \text{FIRST}^*(B) \cup \{\varepsilon\} & = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{q}, \varepsilon\} \\ \text{FIRST}(C) = & \text{FIRST}^*(A) \cup \{\underline{c}\} & = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{q}, \underline{c}\} \\ \text{FOLLOW}(A) = & \{\$ \} \cup \text{FOLLOW}(A) \cup \{\underline{c}\} & = \{\$, \underline{c}\} \\ \text{FOLLOW}(B) = & \text{FIRST}^*(C) & = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{q}, \underline{c}\} \\ \text{FOLLOW}(C) = & \text{FIRST}^*(A) \cup \text{FOLLOW}(A) & = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{q}, \$, \underline{c}\} \end{array}$$

Wir können nun die LL(1)-Tabelle berechnen. Dazu führen wir im ersten Schritt die Regeln für die FIRST-Menge des Non-Terminals A durch:

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|---|----------|----------|----------|----------|----|
| A | | | | | |
| B | | | | | |
| C | | | | | |

 \rightarrow

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|---|--------------------------------|---------------------------------|----------|---------------------------------|----|
| A | $A \rightarrow \underline{a}A$ | $A \rightarrow \underline{B}CA$ | | $A \rightarrow \underline{B}CA$ | |
| B | | | | | |
| C | | | | | |

Da ε in der FIRST-Menge ist, führen wir im zweiten Schritt die Regeln für die FOLLOW-Menge des Non-Terminals A durch:

 \rightarrow

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|---|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| A | $A \rightarrow \underline{a}A$ | $A \rightarrow \underline{B}CA$ | $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow \underline{B}CA$ | $A \rightarrow \varepsilon$ |
| B | | | | | |
| C | | | | | |

Nun noch B und C :

$$\rightarrow$$

| | <u>a</u> | <u>b</u> | <u>c</u> | <u>q</u> | \$ |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| A | $A \rightarrow \underline{a}A$ | $A \rightarrow BC A$ | $A \rightarrow \varepsilon$ | $A \rightarrow BC A$ | $A \rightarrow \varepsilon$ |
| B | | $B \rightarrow \underline{b}$ | | $B \rightarrow \underline{q}$ | |
| C | $C \rightarrow A\underline{c}$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ | |

Diesmal haben wir keine Mehrfach-Einträge. Diese Grammatik ist also eine LL(1)-Grammatik. Die Parsing-Tabelle für abbqa sieht dann wie folgt aus:

| Stack | Input | Produktion |
|---|-----------------|--------------------------------|
| \$A | <u>abbqa</u> \$ | $A \rightarrow \underline{a}A$ |
| \$A <u>a</u> | <u>abbqa</u> \$ | |
| \$A | <u>bbqa</u> \$ | $A \rightarrow BC A$ |
| \$AC <u>B</u> | <u>bbqa</u> \$ | $B \rightarrow \underline{b}$ |
| \$AC <u>b</u> | <u>bbqa</u> \$ | |
| \$AC | <u>bqa</u> \$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ |
| \$A <u>c</u> A | <u>bqa</u> \$ | $A \rightarrow BC A$ |
| \$A <u>c</u> AC <u>B</u> | <u>bqa</u> \$ | $B \rightarrow \underline{b}$ |
| \$A <u>c</u> AC <u>b</u> | <u>bqa</u> \$ | |
| \$A <u>c</u> AC | <u>qa</u> \$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ |
| \$A <u>c</u> A <u>c</u> A | <u>qa</u> \$ | $A \rightarrow BC A$ |
| \$A <u>c</u> A <u>c</u> AC <u>B</u> | <u>qa</u> \$ | $B \rightarrow \underline{q}$ |
| \$A <u>c</u> A <u>c</u> AC <u>q</u> | <u>qa</u> \$ | |
| \$A <u>c</u> A <u>c</u> AC | <u>a</u> \$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ |
| \$A <u>c</u> A <u>c</u> A <u>c</u> A | <u>a</u> \$ | $A \rightarrow \underline{a}A$ |
| \$A <u>c</u> A <u>c</u> A <u>c</u> A <u>a</u> | <u>a</u> \$ | |
| \$A <u>c</u> A <u>c</u> A <u>c</u> A | \$ | $A \rightarrow \varepsilon$ |
| \$A <u>c</u> A <u>c</u> A <u>c</u> | \$ | FAIL |

Wir haben somit **widerlegt**, dass die gegebene Grammatik das Wort abc akzeptiert.

| Stack | Input | Produktion |
|----------------|---------------|--------------------------------|
| \$A | <u>abc</u> \$ | $A \rightarrow \underline{a}A$ |
| \$A <u>a</u> | <u>abc</u> \$ | |
| \$A | <u>bc</u> \$ | $A \rightarrow BC A$ |
| \$AC <u>B</u> | <u>bc</u> \$ | $B \rightarrow \underline{b}$ |
| \$AC <u>b</u> | <u>bc</u> \$ | |
| \$AC | <u>c</u> \$ | $C \rightarrow A\underline{c}$ |
| \$A <u>c</u> A | <u>c</u> \$ | $A \rightarrow \varepsilon$ |
| \$A <u>c</u> | <u>c</u> \$ | |
| \$A | \$ | $A \rightarrow \varepsilon$ |
| \$ | \$ | ACCEPT |

Mit dieser Parsing-Tabelle wurde **gezeigt**, dass die Grammatik das Wort abc akzeptiert.

Das folgende Beispiel ist ein Prüfungsbeispiel aus dem Jahr 2011.

Beispiel 1.9: Erstellen Sie FIRST- und FOLLOW-Mengen aller Non-Terminalen der folgenden Grammatik:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow A \\
 A &\rightarrow AB \\
 A &\rightarrow \underline{a} \\
 B &\rightarrow CA \\
 B &\rightarrow \underline{b} \\
 C &\rightarrow \underline{c}D \\
 C &\rightarrow \underline{c} \\
 C &\rightarrow \varepsilon \\
 D &\rightarrow \underline{c} \\
 D &\rightarrow \underline{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{FIRST}(S) &= \text{FIRST}^*(A) = \{\underline{a}\} \\
 \text{FIRST}(A) &= \{\underline{a}\} \\
 \text{FIRST}(B) &= \{\underline{b}\} \cup \text{FIRST}^*(C) \cup \text{FIRST}^*(A) = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\} \\
 \text{FIRST}(C) &= \{\underline{c}, \varepsilon\} \\
 \text{FIRST}(D) &= \{\underline{c}, \underline{b}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{FOLLOW}(S) &= \{\$ \} \\
 \text{FOLLOW}(A) &= \text{FOLLOW}(S) \cup \text{FIRST}^*(B) \cup \text{FOLLOW}(B) = \{\$, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\} \\
 \text{FOLLOW}(B) &= \text{FOLLOW}(A) = \{\$, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\} \\
 \text{FOLLOW}(C) &= \text{FIRST}^*(A) = \{\underline{a}\} \\
 \text{FOLLOW}(D) &= \text{FOLLOW}(C) = \{\underline{a}\}
 \end{aligned}$$

Diese Grammatik ist nicht LL(1) aufgrund von Mehrdeutigkeiten und einer Linksrekursion ($A \rightarrow AB$).

Wir werden zunächst die Grammatik vereinfachen indem wir D einsetzen. Dann lösen

wir die Linksrekursion.

$$\begin{array}{cccc}
 S \rightarrow A & S \rightarrow A & S \rightarrow A & A \rightarrow \underline{a}R \\
 A \rightarrow AB & A \rightarrow AB & A \rightarrow \underline{a}R & R \rightarrow BR \\
 A \rightarrow \underline{a} & A \rightarrow \underline{a} & R \rightarrow \underline{a}R & R \rightarrow \varepsilon \\
 B \rightarrow CA & B \rightarrow CA & R \rightarrow \varepsilon & B \rightarrow CA \\
 B \rightarrow \underline{b} & B \rightarrow \underline{b} & B \rightarrow CA & B \rightarrow \underline{b} \\
 C \rightarrow \underline{c}D & \Rightarrow C \rightarrow \underline{c}c & \Rightarrow B \rightarrow \underline{b} & \Rightarrow B \rightarrow \underline{b} \\
 C \rightarrow \underline{c} & C \rightarrow \underline{c}b & C \rightarrow \underline{c}c & C \rightarrow \underline{c}c \\
 C \rightarrow \varepsilon & C \rightarrow \underline{c} & C \rightarrow \underline{c}b & C \rightarrow \underline{c}b \\
 D \rightarrow \underline{c} & C \rightarrow \varepsilon & C \rightarrow \underline{c} & C \rightarrow \underline{c} \\
 D \rightarrow \underline{b} & & C \rightarrow \varepsilon & C \rightarrow \varepsilon
 \end{array}$$

Im letzten obigen Schritt haben wir hier $S \rightarrow A$ gestrichen und A stattdessen zum Startsymbol machen.

Wir setzen nun C ein und anschließend A (die Regel bleibt trotzdem erhalten, da sie nur verschwindet wenn sie gar nicht mehr verwendet wird, hier ist A allerdings das Startsymbol).

$$\begin{array}{ccc}
 A \rightarrow \underline{a}R & A \rightarrow \underline{a}R & A \rightarrow \underline{a}R \\
 R \rightarrow BR & R \rightarrow BR & R \rightarrow \underline{a}RR \\
 R \rightarrow \varepsilon & R \rightarrow \varepsilon & R \rightarrow \underline{b}R \\
 \Rightarrow B \rightarrow A & \Rightarrow B \rightarrow \underline{a}R & \Rightarrow R \rightarrow \underline{c}cRR \\
 B \rightarrow \underline{b} & B \rightarrow \underline{b} & R \rightarrow \underline{c}baRR \\
 B \rightarrow \underline{c}cA & B \rightarrow \underline{c}caR & R \rightarrow \underline{c}aRR \\
 B \rightarrow \underline{c}bA & B \rightarrow \underline{c}baR & R \rightarrow \varepsilon \\
 B \rightarrow \underline{c}A & B \rightarrow \underline{c}aR &
 \end{array}$$

Im mittleren obigen Schritt hat die Grammatik noch immer Mehrdeutigkeiten. Wir können über $R \rightarrow BR$ beliebig viele B produzieren. Jedes B kann selbst aber weitere R produzieren. Um uns diesem Problem weiter anzunähern wollen wir B aus R eliminieren. Dazu setzen wir im letzten obigen Schritt B in R ein.

Wir erhalten Konstrukte der Form $R \rightarrow \alpha RR | \varepsilon$. Das ist äquivalent zu $R \rightarrow \alpha R$. Anschließend lösen wir den gemeinsamen Präfix \underline{c} auf.

$$\begin{array}{ccc}
 A \rightarrow \underline{a}R & A \rightarrow \underline{a}R & \\
 R \rightarrow \underline{a}R & R \rightarrow \underline{a}R & \\
 R \rightarrow \underline{b}R & R \rightarrow \underline{b}R & \\
 \Rightarrow R \rightarrow \underline{c}caR & \Rightarrow R \rightarrow \underline{c}CR & \\
 R \rightarrow \underline{c}baR & R \rightarrow \varepsilon & \\
 R \rightarrow \underline{c}aR & C \rightarrow \underline{ca} & \\
 R \rightarrow \varepsilon & C \rightarrow \underline{ba} & \\
 & C \rightarrow \underline{a} &
 \end{array}$$

Damit haben wir eine LL(1)-Grammatik erhalten.

Kapitel 2

Semantik von Programmiersprachen

Im ersten Kapitel haben wir uns damit beschäftigt wie ein Wort (Programm) einer Sprache eindeutig geparst werden kann. Die Wörter (Programme) haben jedoch noch keine Bedeutung. Wir wollen uns nun damit beschäftigen Sprachen eine Bedeutung zu geben und Sprachen anhand der Bedeutung der Wörter zu unterscheiden. Im Kontext der Semantik verwenden wir vermehrt den Begriff “Programm einer Programmiersprache” anstatt “Wort einer Sprache”.

Im zweiten Kapitel betrachten wir nur noch syntaktisch korrekte Eingaben, d.h. wir betrachten den Fall nachdem der Parser bereits entschieden hat, dass eine Eingabe ein syntaktisch gültiges Programm ist.

Wir teilen dazu Sprachen hauptsächlich in funktionale, imperative und logische Sprachen. Zu jedem dieser drei Sprachparadigmen werden wir Sprachen konstruieren und deren Semantik definieren.

Sowohl für die Definition der Semantik als auch für die Interpretation eines konkreten Programms in einer Sprache, werden wir mathematische Funktionen definieren: die Interpretationsfunktion sowie weitere Hilfsfunktionen. Diese mathematische Definition wird es uns erlauben die Korrektheit unserer Programme zu beweisen.

Um Syntax und Semantik zu unterscheiden werden wir Programme einer Sprache wie bisher unterstreichen. Die Beschreibung der Semantik ist kein Programm und wird daher auch keinesfalls unterstrichen.

Beispiel 2.1: Was drückt der Ausdruck $a = b + c$ aus? (vgl. Vorlesungsskriptum Seite 42)

Es gibt einige mögliche Interpretationen, hier eine Auswahl davon:

1. Imperative Interpretation: Eine Zuweisung wie in C . a hat nach der Ausführung

des Ausdrucks den Wert der Summe der Werte von \underline{b} und \underline{c} . Andere Variante: Der Wert von \underline{a} ist nach der Zuweisung die Zeichenfolge $\underline{b + c}$.

2. Funktionale Interpretation: Eine Funktion \underline{a} wird mit den 4 Parametern $\underline{= b + c}$ aufgerufen.
3. Logische Interpretation: Ein logischer Ausdruck, beispielsweise ist der Ausdruck Wahr wenn der Wert von \underline{a} gleich der Summe der Werte von \underline{b} und \underline{c} ist. Andere Variante: Der Wert von 2 der 3 Variablen ist bekannt, der Wert der 3. Variable wird so festgelegt.

Wir sehen anhand dieses Beispiels, dass es wichtig ist exakt zu definieren wie ein Ausdruck zu interpretieren ist.

In funktionalen Programmiersprachen besteht jedes Programm aus einer oder mehreren Funktionen.

Definition 2.1 (Funktion): Eine Funktion ist eine Relation zwischen einer Menge A und einer Menge B . Jedem Element aus der Menge A wird genau ein Element der Menge B zugeordnet. Das heißt: Für jeden möglichen Eingabewert gibt es genau einen Ausgabewert.

2.1 Sprache \mathcal{A} - einfache arithmetische Ausdrücke

Arithmetische Ausdrücke sind Funktionen. Wir können beispielsweise die Funktionen Addition, Subtraktion und Multiplikation von zwei Zahlen in \mathbb{R} definieren mit einem Eingabewert in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und einen Ausgabewert in \mathbb{R} . Auch die Division können wir als Funktion definieren von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Division durch 0 schließen wir damit aus, da die Division in diesem Fall nicht als Funktion definiert ist) auf Ausgabewerte in \mathbb{R} .

Definition 2.2: Die Sprache \mathcal{A} definieren wir mit Alphabet $\Sigma = \{\underline{0}, \dots, \underline{9}, \underline{()}, \underline{+}, \underline{-}\}$. Zwecks Einfachheit definieren wir Ziffern (D, digits) und Zahlen:

- $\mathcal{A}_D = \{\underline{0}, \dots, \underline{9}\}$
- $\text{ZAHL} = (\mathcal{A}_D \setminus \{\underline{0}\} \mathcal{A}_D^*) \cup \{\underline{0}\}$

Wir definieren die Sprache \mathcal{A} nun nicht mehr über eine Grammatik sondern durch eine induktive Beschreibung (Basisfall und allgemeine Fälle):

1. $\text{ZAHL} \subset \mathcal{A}$
2. Wenn $x, y \in \mathcal{A}$, dann ist auch $\underline{(x) \pm (y)} \in \mathcal{A}$.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass wir x, y nicht unterstreichen dürfen, da sie keine Sprachelemente sind sondern Platzhalter, mathematisch würde man sie auch als Variablen bezeichnen. Wir wollen nun mit unserer Sprache \mathcal{A} Ausdrücke

berechnen können. Dazu definieren wir eines unserer mächtigsten Werkzeuge im zweiten Kapitel: Die Interpretationsfunktion I (auch genannt Semantikfunktion). Man kann sich diese Funktion vorstellen wie einen Interpreter einer Scriptsprache: Wir geben ein Programm ein und führen es aus, abhängig vom aktuellen Zustand liefert uns der Interpreter ein Ergebnis zurück. Genau so soll unsere Interpretationsfunktion arbeiten. Wir erwarten einen Eingabewert aus \mathcal{A} und bilden auf \mathbb{N}_0 ab, d.h. geben einen Wert aus \mathbb{N}_0 zurück. Genau wie die Syntax werden wir nun die Semantik induktiv durch die Interpretationsfunktion definieren.

Definition 2.3: Die Semantik der Sprache \mathcal{A} definieren wir durch:

1. $I_{\mathcal{A}}(x) = \langle x \rangle$ wenn $x \in \mathcal{A}_N$. x ist dabei eine Zeichenkette im Programm, $\langle x \rangle$ die entsprechende Repräsentation in \mathbb{N}_0 .
2. $I_{\mathcal{A}}(\underline{(x)} + \underline{(y)}) = I_{\mathcal{A}}(x) + I_{\mathcal{A}}(y)$ wenn $x, y \in \mathcal{A}$.

Beispiel 2.2: Das Programm $\underline{((10) + (9)) + (3)}$ (vgl. Vorlesungsskriptum S.45) können wir wie folgt interpretieren:

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{A}}(\underline{((10) + (9)) + (3)}) &= I_{\mathcal{A}}(\underline{(10) + (9)}) + I_{\mathcal{A}}(\underline{3}) \quad (\text{entsprechend 2. Fall der Definition}) \\ &= I_{\mathcal{A}}(\underline{10}) + I_{\mathcal{A}}(\underline{9}) + 3 \quad (\text{beim } \underline{3} \text{ nun der 1. Fall der Definition}) \\ &= 10 + 9 + 3 = 22 \end{aligned}$$

Auch hier sehen wir wieder deutlich die Unterscheidung zwischen Zeichenketten im Programmcode (unterstrichen) und den Werten auf der semantischen Ebene (nicht unterstrichen). Um den Unterschied weiter zu verdeutlichen definieren wir nun die Sprache der einfachen arithmetischen Ausdrücke von Binärzahlen \mathcal{B} .

Die Sprache \mathcal{B} definieren wir mit Alphabet $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{(}, \underline{)}, \underline{+}\}$.

1. $(\underline{1} \{\underline{0}, \underline{1}\}^*) \cup \{\underline{0}\} \subset \mathcal{B}$
2. Wenn $x, y \in \mathcal{B}$, dann ist auch $\underline{(x)} \underline{+} \underline{(y)} \in \mathcal{B}$.

Die Semantik der Sprache \mathcal{B} definieren wir durch:

1. $I_{\mathcal{B}}(x) = \langle x \rangle$ wenn $x \in \mathcal{B}_N$. $\langle x \rangle \in \mathbb{N}_0$ ist nun die durch die Binärzahl (exakt: die Binärziffernfolge) dargestellte Zahl auf semantischer Ebene, in diesem Fall also im mathematischen Sinne.
2. $I_{\mathcal{B}}(\underline{(x)} + \underline{(y)}) = I_{\mathcal{B}}(x) + I_{\mathcal{B}}(y)$ wenn $x, y \in \mathcal{B}$.

Beispiel 2.3: $I(\underline{1001}) = 9$ aber $\underline{1001} \neq 9$.

Betrachten wir das Beispiel wie zuvor, nun in Binärdarstellung $\underline{((1010) + (1001)) + (11)}$:

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{B}}(\underline{((1010) + (1001)) + (11)}) &= I_{\mathcal{B}}(\underline{(1010) + (1001)}) + I_{\mathcal{B}}(\underline{11}) \\ &= I_{\mathcal{B}}(\underline{1010}) + I_{\mathcal{B}}(\underline{1001}) + 3 \\ &= 10 + 9 + 3 = 22 \end{aligned}$$

Wir versuchen nun der Sprache \mathcal{A} eine zweite Funktion, die Multiplikation hinzuzufügen.

Die Sprache \mathcal{D} ist definiert durch:

1. $\text{ZAHL} \subset \mathcal{D}$
2. $\underline{(x)} + \underline{(y)} \in \mathcal{D}$, wenn $x, y \in \mathcal{D}$.
3. $\underline{(x)} * \underline{(y)} \in \mathcal{D}$, wenn $x, y \in \mathcal{D}$.

Die Semantik der Sprache \mathcal{D} definieren wir durch:

1. $I_{\mathcal{D}}(x) = \langle x \rangle$ wenn $x \in \mathcal{D}_N$.
2. $I_{\mathcal{D}}(\underline{(x)} * \underline{(y)}) = I_{\mathcal{D}}(x) \cdot I_{\mathcal{D}}(y)$ wenn $x, y \in \mathcal{A}$.
3. $I_{\mathcal{D}}(\underline{(x)} + \underline{(y)}) = I_{\mathcal{D}}(x) + I_{\mathcal{D}}(y)$ wenn $x, y \in \mathcal{A}$.

Mit dieser Definition ist $I_{\mathcal{D}}$ keine Funktion.

Beweis: Laut Definition 2.1 ist eine Relation eine Funktion wenn es für jeden möglichen Eingabewert genau einen Ausgabewert gibt.

Möchte man eine Aussage über “alle” Werte bzw. “jeden” Wert widerlegen so gestaltet sich ein Beweis oft relativ einfach. In so einem Fall müssen wir nur ein Gegenbeispiel finden, denn dann gilt die Aussage offensichtlich nicht für alle Werte, wir haben ja einen gefunden für den es nicht gilt. Diese Beweistechnik nennt man “Beweis durch Widerspruch”.

Wir werden nun zeigen, dass $I_{\mathcal{D}}$ für das Programm $\underline{1+2*3}$ verschiedene Interpretationsmöglichkeiten zulässt da nicht festgelegt ist ob der 2. oder 3. Fall der Definition die höhere Priorität hat.

$$\begin{aligned}
 I_{\mathcal{D}}(\underline{1+2*3}) &= I_{\mathcal{D}}(\underline{1+2}) \cdot I_{\mathcal{D}}(\underline{3}) && \text{(2. Fall der Definition)} \\
 &= (I_{\mathcal{D}}(\underline{1}) + I_{\mathcal{D}}(\underline{2})) \cdot 3 && \text{(3. Fall der Definition)} \\
 &= (1 + 2) \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9 \\
 I_{\mathcal{D}}(\underline{1+2*3}) &= I_{\mathcal{D}}(\underline{1}) \cdot I_{\mathcal{D}}(\underline{2*3}) && \text{(3. Fall der Definition)} \\
 &= 1 + (I_{\mathcal{D}}(\underline{2}) \cdot I_{\mathcal{D}}(\underline{3})) && \text{(2. Fall der Definition)} \\
 &= 1 + (2 \cdot 3) = 1 + 6 = 7 \neq 9
 \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass für einen Eingabewert 2 unterschiedliche Ausgabewerte möglich sind. Folglich gibt es nicht für jeden Eingabewert genau einen Ausgabewert, daher kann $I_{\mathcal{D}}$ keine Funktion sein. \square

Wir müssten also die Interpretationsfunktion $I_{\mathcal{D}}$ anders definieren. Eine Lösung wäre beispielsweise zu definieren, dass der 3. Fall der Interpretationsfunktion nur angewendet werden darf wenn in den beiden Operanden x und y kein $*$ vorkommt.

2.2 Sprache \mathcal{V} - arithmetische Ausdrücke mit Variablen

Wir erweitern die Sprache \mathcal{A} durch Variablen und schaffen so eine mächtigere Sprache \mathcal{V} . Um mit Variablen umgehen zu können brauchen wir nun einerseits eine Menge zulässiger Variablennamen und andererseits eine Funktion die von Variablennamen auf eine Wertemenge der semantischen Ebene (z.B. \mathbb{N}_0) abbildet. Die Menge der zulässigen Variablennamen nennen wir IVS (Individuenvariablensymbole).

Definition 2.4: Zwecks Einfachheit erlauben wir nur wenige Variablennamen und definieren daher

$$\text{IVS} = \{\underline{a}, \underline{b}, \dots, \underline{z}\} \cup \{\underline{x1}, \underline{x2}, \dots\}.$$

Die Funktion die von Variablennamen auf eine Wertemenge abbildet nennen wir ω -Environment, (Variablen-)Umgebung. Man kann sich diese Funktion auch als Tabelle vorstellen bzw. in einem Interpreter als Tabelle implementieren.

Definition 2.5: Die Menge aller Environments sei

$$\text{ENV} = \{x \mid x \in \mathbb{P}(\text{IVS} \times \Lambda)\}, \forall (a, b), (a', b') \in x : a = a' \rightarrow b = b',$$

das heißt, die Potenzmenge des kartesischen Produkts der Variablennamen und der Werte, wobei es keine Tupel gibt, bei denen der gleiche Variablenname mit unterschiedlichen Werten verknüpft ist.

$\text{IVS} \times \Lambda$ wäre hierbei die Menge die alle möglichen Variablennamen mit allen möglichen Werten verknüpft. Die Potenzmenge dieser Menge enthält alle Teilmengen, das heißt auch jedes spezielle Environment (und ungültige) ist in dieser Menge enthalten. Mit der zusätzlichen Bedingung am Ende der Definition wird die Einschränkung auf gültige Environments getroffen. Für die Sprache \mathcal{V} ist $\Lambda = \mathbb{N}_0$.

Definition 2.6: Die Syntax der Sprache \mathcal{V} ist definiert durch:

1. $\text{ZAHL} \subset \mathcal{V}$
2. $\text{IVS} \subset \mathcal{V}$
3. $\underline{(x)} + \underline{(y)} \in \mathcal{V}$, wenn $x, y \in \mathcal{V}$.

Die Interpretation eines Programms hängt nun nicht mehr allein vom Programm selbst ab, sondern auch von den Werten der Variablen im ω -Environment.

Definition 2.7: Die Interpretationsfunktion $I_{\mathcal{V}} : \text{ENV} \times \mathcal{V} \rightarrow \Lambda$ weist jedem Tupel aus Environment und Programm einen Wert in Λ zu.

1. $I_{\mathcal{V}}(\omega, k) = \langle k \rangle$ wenn $k \in \text{ZAHL}$, $\omega \in \text{ENV}$.
2. $I_{\mathcal{V}}(\omega, v) = \omega(v)$ wenn $v \in \text{IVS}$, $\omega \in \text{ENV}$.
3. $I_{\mathcal{V}}(\underline{(x)} + \underline{(y)}) = I_{\mathcal{V}}(\omega, x) + I_{\mathcal{V}}(\omega, y)$ wenn $x, y \in \mathcal{V}$, $\omega \in \text{ENV}$.

Beispiel 2.4: Gegeben sei das Environment $\omega(\underline{x}) = 0$, $\omega(\underline{y}) = 1$, $\omega(\underline{z}) = 2$. Interpretieren Sie das Programm $((\underline{(x)} + (2)) + (\underline{y})) + (\underline{z})$.

$$\begin{aligned}
 I_V(\omega, ((\underline{(x)} + (2)) + (\underline{y})) + (\underline{z})) &= I_V(\omega, (\underline{(x)} + (2)) + (\underline{y})) + I_V(\omega, \underline{z}) \\
 &= I_V(\omega, \underline{(x)} + (2)) + I_V(\omega, \underline{y}) + \omega(\underline{z}) \\
 &= I_V(\omega, \underline{x}) + I_V(\omega, \underline{2}) + \omega(\underline{y}) + 2 \\
 &= \omega(\underline{x}) + 2 + 1 + 2 \\
 &= 0 + 2 + 1 + 2 = 5
 \end{aligned}$$

Beachten Sie auch, dass nach wie vor $I_V(\omega, \underline{2}) = 2$. Es ist ein bei den Übungen weit verbreiteter Fehler $I_V(\omega, \underline{2}) = \omega(\underline{2})$ zu schreiben. Die Interpretationsfunktion wurde so nicht definiert und außerdem ist $\underline{2}$ auch kein gültiger Variablenname.

2.3 Datentypen

Bisher haben wir eine Sprache nur für einen Datentypen definiert. Dieser war implizit in der Definition der Sprache drin (beispielsweise die natürlichen Zahlen). Derartige Definitionen erlauben kein Ersetzen des Datentyps ohne die Definition der Sprache wesentlich zu überarbeiten. Da wir dies aber häufig wollen werden wir nun zuerst Datentypen auf der semantischen Ebene und anschließend die Repräsentation von Datentypen auf der syntaktischen Ebene definieren.

Definition 2.8 (Datentyp): Ein Datentyp ist ein Tupel $\Psi = (A, F, P, C)$ mit

- A : Grundmenge (Wertebereich)
- F : Menge von Funktionen $f_i : A^{k_i} \rightarrow A^{l_i}$.
 f_i ist die i -te Funktion in der Menge, k_i die Dimension vom Urbild (Dimension des Inputs, Anzahl der Funktionsargumente) und l_i die Dimension vom Bild der i -ten Funktion (Dimension des Outputs, Anzahl der Funktionsrückgabewerte).
- P : Menge von Prädikaten $p_i : A^{k_i} \rightarrow \{T, F\}$.
 p_i ist die i -te Funktion in der Menge und k_i die Dimension vom Urbild (Dimension des Inputs, Anzahl der Funktionsargumente) der i -ten Funktion.
- C : Menge von Konstanten c_i wobei $c \subseteq A$.

Die Mengen F^Σ , P^Σ und C^Σ enthalten die entsprechenden Symbole für die syntaktische Repräsentation:

- Funktionssymbole F^Σ : je ein Symbol f_i^Σ (z.B. Name der Funktion) für jede Funktion f_i
- Prädikatensymbole P^Σ : je ein Symbol p_i^Σ (z.B. Name des Prädikats) für jedes Prädikat p_i

- Konstantensymbol C^Σ : je ein Symbol c_i^Σ (z.B. ausgeschriebene Form der Konstante) für jede Konstante c_i

Konstanten sind eigentlich nur spezielle Funktionen (0 Argumente) und wir unterscheiden nur zwecks Übersicht.

Beispiel 2.5: Definieren Sie den Datentyp Integer mit Funktionen für Addition, Subtraktion und Multiplikation sowie Prädikaten für “kleiner” und Gleichheit.

Lösung: Im Fall der Integer ist die Definition der Funktionen und Prädikate trivial, da alle Funktionen und Prädikate durch die entsprechenden Operationen auf den ganzen Zahlen \mathbb{Z} definiert sind. Daher genügt es zu definieren welche Funktion welcher Operation entspricht.

- Grundmenge $A = \mathbb{Z}$
- Funktionen $f_1 : +$, $f_2 : -$, $f_3 : *$

Die Funktionen $+$, $-$, $*$ sind auf \mathbb{Z} definiert. Auf der syntaktischen Ebene definieren wir: $f_1^\Sigma : \text{plus}$, $f_2^\Sigma : \text{minus}$, $f_3^\Sigma : \text{mult}$.

- Prädikate $p_1 : <$, $p_2 :=$

Die Prädikate $<$, $=$ sind auf \mathbb{Z} definiert. Syntaktische Ebene: $p_1^\Sigma : \text{lt?}$, $p_2^\Sigma : \text{eq?}$.

- Konstanten $c_1 : 0$, $c_2 : 1$

Syntaktische Ebene: $c_1^\Sigma : \text{null}$, $c_2^\Sigma : \text{eins}$.

Hinzunahme von Division ist problematisch / da das Ergebnis nicht unbedingt $\in A$ ist.

Wir können bei der Definition eines Datentyps oft (z.B. bei den verschiedenen Datentypen für Zahlen) auf bekannte algebraische Strukturen (Halbgruppen, etc.) zurückgreifen.

Beispiel 2.6: Definieren Sie den Datentyp String mit der Funktion Konkatenation und dem Prädikat “Präfix”.

Lösung: Hier können wir nun nicht mehr auf eine vorhandene mathematische Definition zurückgreifen.

- Grundmenge $A = V^*$ mit V einem endlichen Alphabet $\{v_1, \dots, v_n\}$ (z.B. dem ASCII-Alphabet).
- Funktionen

1. $f_1 : \circ$ (Konkatenation)

- Wenn $x \in V^*$ ist, dann ist $x \circ \varepsilon = x$
- Wenn $x \in V^*$ und $a \in V$ ist, dann ist $x \circ a = xa$
- Wenn $x, y \in V^*$ und $a \in V$ ist, dann ist $x \circ (y \circ a) = (x \circ y) \circ a$

- Prädikate

1. $p_1 : <<$ (Präfix)

- Wenn $x \in V^*$ ist, dann ist $\varepsilon << x$
- Wenn $x \in V^*$ ist, dann ist $x << x$
- Wenn x Präfix von y ist, dann ist x auch Präfix von $y \circ z$ ($(x << y) \rightarrow (x << (y \circ z))$).

- Konstanten $c_i : v_i$, $c_{n+1} : \varepsilon$ (eine Konstante für jeden Buchstaben des Alphabets und ε für den Leerstring).

Die syntaktische Ebene überlassen wir dem Leser.

Beispiel 2.7: Definieren Sie den Datentyp des binären Stacks mit Funktionen um Elemente auf den Stack zu legen oder herunterzunehmen, sowie Prädikaten zur Überprüfung des obersten Elementes.

Lösung:

- Grundmenge $A = \{0, 1\}^* \cup \{\varepsilon\}$, d.h. Ziffernfolgen aus 0 und 1 oder ε (leerer Stack).

- Funktionen

1. $f_1 : \text{add0}$ liefert den Stack mit einer 0 daraufgelegt.

- $\text{add0}(\varepsilon) = 0$
- $\text{add0}(x) = 0x$ (mit $x \neq \varepsilon$)

2. $f_2 : \text{add1}$ liefert den Stack mit einer 1 daraufgelegt.

- $\text{add1}(\varepsilon) = 1$
- $\text{add1}(x) = 1x$ (mit $x \neq \varepsilon$)

3. $f_3 : \text{sub}$ liefert den Stack ohne das oberste Element.

- $\text{sub}(\varepsilon) = \varepsilon$
- $\text{sub}(ax) = x$ (mit $a \neq \varepsilon$)

- Prädikate

1. $p_1 : \text{ist0?}$ testet ob das oberste Element 0 ist.

- $\text{ist0?}(x) \Leftrightarrow \exists z : x = 0z$

2. $p_2 : \text{ist1?}$ testet ob das oberste Element 1 ist.

- $\text{ist1?}(x) \Leftrightarrow \exists z : x = 1z$

3. $p_3 : \text{istLeer?}$ testet ob das oberste Element ε ist.

$$- \text{istLeer?}(x) \Leftrightarrow x = \varepsilon$$

- Konstanten $c_1 : \varepsilon$.

Auf der syntaktischen Ebene werden die gleichen Bezeichnungen wie auf der semantischen Ebene verwendet.

Beispiel 2.8: Berechnen Sie den Ausdruck $\text{add0}(\text{add1}(\text{sub}(011)))$ im Datentyp des binären Stacks.

Lösung:

$$\text{add0}(\text{add1}(\text{sub}(011))) = \text{add0}(\text{add1}(11)) = \text{add0}(111) = 0111$$

$$\text{ist0?}(0111) = T$$

$$\text{ist1?}(0111) = F$$

$$\text{istLeer?}(0111) = F$$

2.4 Sprache der Terme \mathcal{T}

Wir müssen nun um den Datentyp verwenden zu können eine grundlegende Sprache definieren die diesen Datentyp verwendet. Auf dieser Sprache können dann weitere Sprachen aufgebaut werden.

Definition 2.9 (Sprache der Terme \mathcal{T}): Sei $\Psi = (A, F, P, C)$ ein Datentyp. Das Alphabet Σ ist dann eine Vereinigung aus den Mengen der

- IVS (Individuenvariablensymbole)
- Funktionssymbole F^Σ
- Prädikatensymbole P^Σ
- Konstantensymbol C^Σ
- $(,)$ und $_{\cdot}$
- Sondersymbole (Keywords): if, then, else, begin, end, ...

Die Syntax von $\mathcal{T} \subseteq \Sigma$ über einem beliebigen Datentypen ist dann definiert durch:

1. $C^\Sigma \subseteq \mathcal{T}$, d.h. Konstantensymbole sind Terme
2. $\text{IVS} \subseteq \mathcal{T}$, d.h. Individuenvariablensymbole sind Terme
3. Wenn f_i^Σ ein n -stelliges Funktionssymbol ist und t_1, \dots, t_n Terme, dann ist auch $f_i^\Sigma(t_{1_{\cdot}}, \dots, t_{n_{\cdot}})$ ein Term (Unterstreichungen beachten!).

Die Semantik von \mathcal{T} definieren wir durch die Interpretationsfunktion $I_{\mathcal{T}} : \text{ENV} \times \mathcal{T} \rightarrow A$.

1. $I_{\mathcal{T}}(\omega, c_i^{\Sigma}) = c_i$ mit $c_i \in C$ (Semantik-Ebene), $c_i^{\Sigma} \in C^{\Sigma}$ (Syntax-Ebene) und $\omega \in \text{ENV}$.
2. $I_{\mathcal{T}}(\omega, v) = \omega(v)$ mit $v \in \text{IVS}$ und $\omega \in \text{ENV}$.
3. $I_{\mathcal{T}}(\omega, f_i^{\Sigma}(t_1, \dots, t_n)) = f_i(I_{\mathcal{T}}(\omega, t_1), \dots, I_{\mathcal{T}}(\omega, t_n))$ mit $f_i \in F$ (Semantik-Ebene), $f_i^{\Sigma} \in F^{\Sigma}$ (Syntax-Ebene) und $\omega \in \text{ENV}$.

Beispiel 2.9: Führen Sie das Programm plus(plus(x,y),plus(eins,z)) mit dem Environment $\omega(\underline{x}) = 0$, $\omega(\underline{y}) = 1$, $\omega(\underline{z}) = 2$ aus.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 & I_{\mathcal{T}}(\omega, \text{plus}(\text{plus}(\underline{x}, \underline{y}), \text{plus}(\text{eins}, \underline{z}))) \\
 &= I_{\mathcal{T}}(\omega, \text{plus}(\underline{x}, \underline{y})) + I_{\mathcal{T}}(\omega, \text{plus}(\text{eins}, \underline{z})) \\
 &= (I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{x}) + I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{y})) + (I_{\mathcal{T}}(\omega, \text{eins}) + I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{z})) \\
 &= \omega(\underline{x}) + \omega(\underline{y}) + 1 + \omega(\underline{z}) \\
 &= 0 + 1 + 1 + 2 = 4
 \end{aligned}$$

Laut Definition von \mathcal{T} gibt es nur die Konstanten 0 und 1. Variablen können natürlich jeden beliebigen Wert in \mathbb{Z} annehmen. Es kann aber auch gezeigt werden, dass alle ganzen Zahlen durch einen variablenfreien Term dargestellt werden können. Daher ist es nicht nötig, dass es für jede Zahl eine Konstante gibt. Terme sind rekursiv definiert. Die **vollständige Induktion** (ab hier auch Induktion genannt) ist die übliche Beweistechnik für Beweise über rekursive bzw. rekursiv definierte Ausdrücke.

Versuchen wir zunächst die **vollständige Induktion** ganz allgemein zu verstehen.

Beispiel 2.10: Dazu macht es Sinn sich ein kleines Beispiel zu überlegen. Dazu definieren wir, dass folgende Aussagen wahr sind:

- Aussage A : An Tag n regnet es genau dann, wenn es an Tag $n - 1$ geregnet hat.
- Aussage T_1 : An Tag 1 regnet es.

Wir sehen sofort, dass es wohl immer regnet. Dies wollen wir nun auch beweisen: An jedem Tag regnet es. Man könnte auch schreiben: An jedem Tag i regnet es. Zwecks Übersichtlichkeit bezeichnen wir die Aussage “Es regnet an Tag i ” mit T_i und können dann sehr kompakt schreiben: $\forall i : T_i$.

Wir erbringen nun zunächst den Beweis für die ersten Tage einzeln.

- Tag 1: T_1 war schon gegeben und ist wahr.
- Tag 2: $A \wedge T_1 \rightarrow T_2$
- Tag 3: $A \wedge T_1 \wedge T_2 \rightarrow T_3$

- Tag 4: $A \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \rightarrow T_4$

Wir würden so allerdings nie fertig werden da es in unserem Beispiel so viele Tage wie natürliche Zahlen gibt. Was uns aber auffällt: Für den Beweis von jedem T_i müssen wir auf den Beweis für T_{i-1} zurückgreifen. Eine Induktion verkürzt hier unsere Arbeit wesentlich. Wir zeigen einfach die Korrektheit für einen allgemeinen Fall (z.B. T_{n+1}) aus seinen Vorgängern (T_i mit $i \leq n$) folgt.

Dazu müssen wir zunächst allgemein beschreiben was für jedes einzelne Element bis zu einem gewissen (beliebigen) n gilt: $\forall i \leq n : T_i$. Wir nennen dies **Induktionshypothese**. Diese Aussage ist allerdings nicht bewiesen, es ist lediglich eine Annahme darüber was für jedes Element gilt.

Den entscheidenden Schritt im Beweis führen wir jetzt durch, indem wir von n auf das nachfolgende Element (in unserem Fall $n+1$) springen und zeigen, dass der Beweis für das nachfolgende Element erbracht werden kann. Dabei müssen wir unbedingt die Annahme (die Induktionshypothese) verwenden, sonst handelt es sich bei unserem Beweis nicht um eine vollständige Induktion und sehr wahrscheinlich ist der Beweis dann auch nicht fehlerfrei.

Wir wollen nun also beweisen: $\forall i \leq n+1 : T_i$. Laut Induktionshypothese gilt: $\forall i \leq n : T_i$. Es bleibt daher nur zu beweisen übrig: T_{n+1} . Dazu versuchen wir nun umzuformen:

$$T_{n+1} \leftrightarrow T_n \quad (\text{laut Aussage } A)$$

T_n gilt laut Induktionshypothese, der Beweis ist damit erbracht: Wir haben bewiesen, dass $\forall i : T_i$. Diesen Teil der Induktion nennen wir **Induktionsschritt**. Meist ist hier mehr Arbeit erforderlich als bei diesem kleinen Beispiel. Wir werden das auch beim nächsten Beispiel sehen.

Halten wir fest: Die **vollständige Induktion** besteht aus 3 Einzelschritten: In der **Induktionsbasis** werden ein oder mehrere Basisfälle direkt bewiesen. In der **Induktionshypothese** wird versucht eine allgemeine Aussage (eine Hypothese) zu treffen von der angenommen wird, dass sie bis zum n -ten Fall gilt. Im **Induktionsschritt** gehen wir einen Schritt weiter, also in den Fall $n+1$ und versuchen diesen zu beweisen. Hier muss unbedingt auf die Induktionshypothese zurückgegriffen werden, sonst wurde keine vollständige Induktion durchgeführt. Um eine Induktion durchführen zu können müssen die Elemente unbedingt aufzählbar sein (d.h. man muss eine eindeutige Reihenfolge/-Sortierung für die Elemente angeben können).

Beispiel 2.11: Wir wollen zeigen, dass alle ganzen Zahlen durch einen variablenfreien Term dargestellt werden können.

Bevor wir die Induktion durchführen versuchen wir ein Muster zu erkennen.

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{null}}) = 0 \quad (\text{trivial})$$

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{eins}}) = 1 \quad (\text{trivial})$$

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{plus}(\text{eins}, \text{eins})}) = 2 \quad (\text{eine Addition})$$

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{plus}(\text{eins}, \text{plus}(\text{eins}, \text{eins}))}) = 3 \quad (\text{verschachtelte Addition})$$

Wir erkennen das Muster: Alle Zahlen $\in \mathbb{N}$ können durch rekursive Addition von 1 dargestellt werden. Diese Rekursion kann beliebig tief werden, wir bauen sie allerdings immer in der gleichen Form (nur rechter Ast rekursiv). Wir definieren uns einen Platzhalter t_k um beliebig lange solcher Ausdrücke einfach darzustellen:

$$t_2 = \underline{\text{plus}(\text{eins}, \text{eins})}$$

$$t_3 = \underline{\text{plus}(\text{eins}, \text{plus}(\text{eins}, \text{eins}))}$$

$$\vdots$$

$$t_{k+1} = \underline{\text{plus}(\text{eins}, t_k)}$$

k entspricht der Anzahl der eins im Ausdruck.

- **Induktionsbasis:** In der Induktionsbasis beweisen wir einen oder mehrere Basisfälle. Das sind in unserem Fall die beiden Konstanten sowie der Fall t_2 :

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{null}}) = 0$$

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{eins}}) = 1$$

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, t_2) = I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{plus}(\text{eins}, \text{eins})}) = 2$$

- **Induktionshypothese:** $I_{\mathcal{T}}(\omega, t_n) = n$
- **Induktionsschritt:**

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, t_{n+1}) = n + 1 \quad (\text{Einsetzen von } t_{n+1})$$

$$I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{plus}(\text{eins}, t_n)}) = n + 1 \quad (\text{Interpretationsfunktion durchführen})$$

$$+ (I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{eins}}), I_{\mathcal{T}}(\omega, t_n)) = n + 1$$

$$+ (1, I_{\mathcal{T}}(\omega, t_n)) = n + 1$$

Unter Verwendung der Induktionshypothese (d.h. wir setzen die Induktionshypothese $I_{\mathcal{T}}(\omega, t_n) = n$ ein):

$$+ (1, n) = n + 1$$

Damit ist der Beweis erbracht.

2.5 Sprache der Konditionale COND (\mathcal{C})

Wir hatten in der Sprache der Terme \mathcal{T} noch nicht die Möglichkeit Prädikate zu nutzen obwohl Datentypen über Prädikate verfügen. Dazu definieren wir die Sprache der Konditionale **COND**. Wir schreiben in diesem Skriptum großteils nur \mathcal{C} zwecks Übersichtlichkeit - \mathcal{C} gesprochen "COND".

Definition 2.10 (Die Sprache COND (\mathcal{C})): Die Syntax von \mathcal{C} ist wie folgt definiert:

1. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$, d.h. alle Terme sind Konditionale.
2. Wenn p_i^Σ ein n -stelliges Prädikatsymbol ist und $u_1, \dots, u_n, t_1, t_2$ Konditionale, dann ist auch $\text{if } p_i^\Sigma(u_1, \dots, u_n) \text{ then } t_1 \text{ else } t_2$ ein Konditional.

Die Semantikfunktion $I_{\mathcal{C}}$ definieren wir durch:

1. $I_{\mathcal{C}}(\omega, t) = I_{\mathcal{T}}(\omega, t)$, wenn $t \in \mathcal{T}$ und $\omega \in \text{ENV}$.
2. Für jedes Prädikat p_i gilt:
 - Wenn $p_i(I_{\mathcal{C}}(\omega, u_1), \dots, I_{\mathcal{C}}(\omega, u_n)) = T$, dann gilt:

$$I_{\mathcal{C}}\left(\omega, \text{if } p_i^\Sigma(u_1, \dots, u_n) \text{ then } t_1 \text{ else } t_2\right) = I_{\mathcal{C}}(\omega, t_1)$$

- Sonst ist $p_i(I_{\mathcal{C}}(\omega, u_1), \dots, I_{\mathcal{C}}(\omega, u_n)) = F$ und dann gilt:

$$I_{\mathcal{C}}\left(\omega, \text{if } p_i^\Sigma(u_1, \dots, u_n) \text{ then } t_1 \text{ else } t_2\right) = I_{\mathcal{C}}(\omega, t_2)$$

Beispiel 2.12: Interpretieren Sie $\text{if ist0?}(\text{sub}(\underline{x})) \text{ then add0}(\underline{x}) \text{ else sub}(\underline{x})$ in \mathcal{C} über dem Datentyp der binären Stacks mit dem Environment $\omega(\underline{x}) = 101$.

Wir beginnen wie auch schon in der Sprache der Terme.

$$I_{\mathcal{C}}\left(\omega, \text{if ist0?}(\text{sub}(\underline{x})) \text{ then add0}(\underline{x}) \text{ else sub}(\underline{x})\right)$$

NR: An dieser Stelle müssen wir nun eine Nebenrechnung (NR) durchführen um zu bestimmen ob der *then*- oder der *else*-Zweig ausgeführt wird.

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{C}}\left(\omega, \text{ist0?}(\text{sub}(\underline{x}))\right) &= \text{ist0?}\left(I_{\mathcal{C}}\left(\omega, \text{sub}(\underline{x})\right)\right) = \text{ist0?}(\text{sub}(I_{\mathcal{C}}(\omega, \underline{x}))) \\ &= \text{ist0?}(\text{sub}(I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{x}))) = \text{ist0?}(\text{sub}(\omega(\underline{x}))) = \text{ist0?}(\text{sub}(101)) = \text{ist0?}(01) = T \end{aligned}$$

trivial \rightarrow meist nicht angeschrieben

$$\begin{aligned} &= I_{\mathcal{C}}\left(\omega, \text{add0}(\underline{x})\right) && \text{(folgt aus der NR)} \\ &= \text{add0}(I_{\mathcal{C}}(\omega, \underline{x})) = \text{add0}(\omega(\underline{x})) = \text{add0}(101) = 0101 \end{aligned}$$

Bei Verschachtelungen von Prädikaten in \mathcal{C} ist zu beachten, dass Prädikate direkt kein Teil der Sprache sind. Daher ist auch der Ausdruck $\text{if ist0?}(\text{ist1?}(\underline{x})) \text{ then } \underline{x} \text{ else add0}(\underline{x})$ nicht in \mathcal{C} ! Allerdings ist $\text{if ist0?}(\text{if ist1?}(\underline{x}) \text{ then } 110 \text{ else } 010) \text{ then } \underline{x} \text{ else add0}(\underline{x})$ in \mathcal{C} .

2.6 Rekursionen - Sprache der Ausdrücke EXP (\mathcal{E})

Bisher war es nicht möglich Funktionen (insbesondere rekursive) zu definieren. Wir müssen das Konzept “Funktionsname” ähnlich wie die Variablennamen (IVS, Individuenvariablensymbole) zuerst einführen. Der Wert der einem Funktionsnamen zugeordnet wird ist dabei ein Programm. Wir definieren nun die Sprache **EXP** (\mathcal{E}). Wie schon bei **COND** kürzen wir auch hier **EXP** durch \mathcal{E} ab - \mathcal{E} gesprochen “EXP”.

Definition 2.11: Die Menge der Funktionsvariablensymbole (FVS) enthält “Namen” aller Funktionen.

Definition 2.12: Die Menge der Funktionsenvironments bezeichnen wir mit FENV. Jedes Funktionsenvironment $\delta : \text{FVS} \rightarrow \mathcal{E}$ liefert für ein Funktionsvariablensymbol die Implementation in EXP (\mathcal{E}) zurück. $\delta \underline{X}$ bezeichne die Implementation der Funktion mit dem Namen \underline{X} .

Es muss unbedingt unterschieden werden zwischen

- Funktionen des Datentyps (+, −, etc.) sowie den dazugehörigen Funktionssymbolen (plus, minus, etc.)
- und “benutzerdefinierten Funktionen”, d.h. Unterprogramme die auch in der Sprache implementiert werden. Diese bezeichnen wir als Funktionsvariablensymbole.

Definition 2.13 (Syntax von EXP (\mathcal{E})): Die Syntax von \mathcal{E} ist definiert wie folgt:

- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$, d.h. alle Konditionale sind Ausdrücke (d.h. $\in \mathcal{E}$).
- Wenn f eine n -stellige Funktionsvariable ($\in \text{FVS}$) ist und t_1, \dots, t_n sind Ausdrücke (d.h. $\in \mathcal{E}$), dann ist $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Ausdruck (d.h. $\in \mathcal{E}$).

Eine Funktion kann also über die Parameter hinaus keine weiteren Variablen haben. Beim Funktionsaufruf werden Parameter übergeben. Wir behandeln dabei zunächst nur call-by-value. Hierbei werden die als Parameter übergebenen Ausdrücke **vor** Ausführung der Funktion berechnet (interpretiert) und die Variablen der Funktion werden in einem neuen Variablenenvironment auf die entsprechenden Werte initialisiert.

Definition 2.14 (Semantik von EXP (\mathcal{E})): Die Semantikfunktion $I_{\mathcal{E}}$ definieren wir durch:

1. $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, c) = I_{\mathcal{C}}(\omega, c)$, wenn $c \in \mathcal{C}$ und $\omega \in \text{ENV}$.
2. $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, F(t_1, \dots, t_n))$ mit $F \in \text{FENV}$. Funktionsaufruf mit call-by-value:
 - (a) Definiere ω' als neues Environment mit $\omega'(x_i) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, t_i)$ (für $1 \leq i \leq n$) wobei x_i die Parameter der Funktion δF sind. Im Normalfall ist $x_i = \underline{xi}$, d.h. $x_1 = \underline{x1}$, $x_2 = \underline{x2}$, usw.
 - (b) $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, F(t_1, \dots, t_n)) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \delta F)$

Anmerkung: Mit den Definitionen 2.9, 2.10 und 2.14 halten wir zwecks Übersicht fest:

1. $I_{\mathcal{T}}(\omega, c_i^{\Sigma}) = c_i$ mit $c_i \in C$ (Semantik-Ebene), $c_i^{\Sigma} \in C^{\Sigma}$ (Syntax-Ebene) und $\omega \in \text{ENV}$.
2. $I_{\mathcal{T}}(\omega, v) = \omega(v)$ mit $v \in \text{IVS}$ und $\omega \in \text{ENV}$.
3. $I_{\mathcal{T}}(\omega, f_i^{\Sigma}(t_1, \dots, t_n)) = f_i(I_{\mathcal{T}}(\omega, t_1), \dots, I_{\mathcal{T}}(\omega, t_n))$ mit $f_i \in F$ (Semantik-Ebene), $f_i^{\Sigma} \in F^{\Sigma}$ (Syntax-Ebene) und $\omega \in \text{ENV}$.
4. $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, t) = I_{\mathcal{T}}(\omega, t)$, wenn $t \in \mathcal{T}$ und $\omega \in \text{ENV}$ und $\delta \in \text{FENV}$.
5. Für jedes Prädikat p_i gilt:

- Wenn $p_i(I_C(\omega, u_1), \dots, I_C(\omega, u_n)) = T$, dann gilt:

$$I_C\left(\omega, \text{if } p_i^{\Sigma}(u_1, \dots, u_n) \text{ then } t_1 \text{ else } t_2\right) = I_C(\omega, t_1)$$

- Sonst ist $p_i(I_C(\omega, u_1), \dots, I_C(\omega, u_n)) = F$ und dann gilt:

$$I_C\left(\omega, \text{if } p_i^{\Sigma}(u_1, \dots, u_n) \text{ then } t_1 \text{ else } t_2\right) = I_C(\omega, t_2)$$

6. $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, F(t_1, \dots, t_n))$ mit $F \in \text{FENV}$. Funktionsaufruf mit call-by-value:

- (a) Definiere ω' als neues Environment mit $\omega'(x_i) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, t_i)$ (für $1 \leq i \leq n$) wobei x_i die Parameter der Funktion δF sind. Im Normalfall ist $x_i = \underline{x_i}$, d.h. $x_1 = \underline{x1}$, $x_2 = \underline{x2}$, usw.
- (b) $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, F(t_1, \dots, t_n)) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \delta F)$

Wir definieren eine Funktion func in \mathcal{E} durch $\delta \text{func} = \dots$. Im Rahmen der Übung ist es auch zulässig bei der Funktionsdefinition explizit andere Parameter anzugeben ($\delta \text{func}(\underline{x}, \underline{v}) = \dots$) um die Parameternamen festzulegen. In unserem Fall wäre dann $x_1 = \underline{x}$ und $x_2 = \underline{v}$. Die Komplexität des \mathcal{E} -Interpreters wird dadurch nicht wesentlich beeinflusst.

Beispiel 2.13: Interpretieren Sie das Programm F(sub(x)) in \mathcal{E} über dem Datentyp der Stacks, wobei $\delta F = \text{if ist0?}(x1) \text{ then sub}(x1) \text{ else add1}(x1)$ und $\omega(\underline{x}) = 100$.

Lösung:

$$I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \text{F}(\text{sub}(\underline{x})))$$

Neues Environment (NE): $\omega'(\underline{x1}) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \text{sub}(\underline{x})) = \text{sub}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x})) = \text{sub}(\omega(\underline{x})) = \text{sub}(100) = 00$

$$= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \text{if ist0?}(x1) \text{ then sub}(x1) \text{ else add1}(x1))$$

$$\begin{aligned}
\text{NR: } I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{ist0?}(\underline{x1})} \right) &= \text{ist0?}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \underline{x1})) = \text{ist0?}(\omega'(\underline{x1})) = \text{ist0?}(00) = T \\
&= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{sub}(\underline{x1})} \right) \\
&= \text{sub}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \underline{x1})) \\
&= \text{sub}(\omega'(\underline{x1})) \\
&= \text{sub}(00) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Im Vorlesungsskriptum findet sich außerdem auf Seite 59 die Definition für Funktionsaufrufe mittels Call-by-Name sowie obiges Beispiel für Call-by-Name durchgerechnet. Außerdem wird demonstriert, dass es Funktionen gibt (die in Teilbereichen undefiniert sind) die je nach Verfahren ein unterschiedliches Verhalten zeigen.

Wir haben bereits die vollständige Induktion kennengelernt. Mittels vollständiger Induktion können wir auch die Korrektheit von Programmen in \mathcal{E} beweisen.

Beispiel 2.14: Gegeben sei der Datentyp der nicht-negativen Integer der nur die Funktionen Inkrement um 1 (inc) und Dekrement um 1 (dec), sowie die bereits bekannten Prädikate eq? und gt?. Implementieren Sie die Addition zweier Zahlen in \mathcal{E} .

Lösung: Um eine Funktion zu schreiben macht es oft Sinn sich zunächst mathematisch aufzuschreiben wie die Funktion definiert ist.

$$\text{add}(x, y) = \begin{cases} y & \text{wenn } x = 0 \\ \text{add}(\text{dec}(x), \text{inc}(y)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus dieser Darstellung kann direkt das \mathcal{E} Programm implementiert werden:

$$\underline{\delta\text{add}} = \underline{\text{if eq?}(\underline{x}, 0) \text{ then } y \text{ else } \text{add}(\text{dec}(\underline{x}), \text{inc}(\underline{y}))} \quad (\text{mit Parametern } x_1 = \underline{x}, x_2 = \underline{y})$$

Um einen Beweis zu führen brauchen wir nun noch ein “Golden Device”, eine mathematische Funktion die das geforderte Verhalten korrekt berechnet. Diese kann für den Beweis einfach als gegeben angenommen werden. In unserem Fall ist es der Operator $+$ über \mathbb{N}_0 .

Zu zeigen ist also: $\forall \omega : I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})} \right) = \omega(\underline{x}) + \omega(\underline{y})$

- Induktionsbasis: Sei $\omega(\underline{x}) = 0$ und $\omega(\underline{y}) = m$ (m beliebig).

$$I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})} \right)$$

Neues Environment? $\omega'(\underline{x}) = \omega(\underline{x})$, $\omega'(\underline{y}) = \omega(\underline{y})$, d.h. es wäre $\omega' = \omega$. Es gilt Gleichheit, daher ist es völlig egal ob hier ω' eingeführt wird oder nicht. Dieser Fall tritt immer dann auf wenn die Aufruf-Parameter gleich den Funktionsparametern aus der Definition sind. In diesen Fällen führen wir in diesem Skriptum zwecks Übersichtlichkeit keine neuen Environments ein.

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(\underline{x}, 0) \text{ then } y \text{ else add}(\text{dec}(\underline{x}), \text{inc}(\underline{y}))} \right)$$

$$\text{NR: } I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{eq?}(\underline{x}, 0)} \right) = \text{eq?}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x}), I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{0})) = \text{eq?}(\omega(\underline{x}), 0) = \text{eq?}(0, 0) =$$

T

$$\begin{aligned} &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{y}) \\ &= \omega(\underline{y}) \\ &= m \\ &= \omega(\underline{x}) + \omega(\underline{y}) \end{aligned}$$

Der Basisfall wurde damit bewiesen.

- Induktionshypothese: $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})}) = \omega(\underline{x}) + \omega(\underline{y})$ gilt für $\omega(\underline{x}) = n$ und $\omega(\underline{y}) = m$ (m beliebig)
- Induktionsschritt: Zu zeigen ist $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})}) = \omega(\underline{x}) + \omega(\underline{y})$ für $\omega(\underline{x}) = n + 1$ und $\omega(\underline{y}) = m$ (m beliebig):

$$I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})}) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(\underline{x}, 0) \text{ then } y \text{ else add}(\text{dec}(\underline{x}), \text{inc}(\underline{y}))})$$

$$\text{NR: } I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{eq?}(\underline{x}, 0)}) = \text{eq?}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x}), I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{0})) = \text{eq?}(\omega(\underline{x}), 0) = \text{eq?}(n + 1, 0) = F, \text{ da } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und folglich } n + 1 \geq 1$$

$$= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\text{dec}(\underline{x}), \text{inc}(\underline{y}))})$$

$$\begin{aligned} \text{NE: } \omega'(\underline{x}) &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{dec}(\underline{x})}) = \text{dec}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x})) = \text{dec}(\omega(\underline{x})) = \text{dec}(n + 1) = n, \\ \omega'(\underline{y}) &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{inc}(\underline{y})}) = \text{inc}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{y})) = \text{inc}(\omega(\underline{y})) = \text{inc}(m) = m + 1 \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})}) \quad (\text{Wir ersetzen zunächst nur } \omega!)$$

Für diesen Fall ($\omega'(\underline{x}) = n$) gilt die Induktionshypothese! Wir sehen, dass der obige Aufruf der Interpretationsfunktion exakt so aussieht wie in der Induktionshypothese. Unter Verwendung der Induktionshypothese (d.h. wir setzen die Induktionshypothese $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})}) = \omega(\underline{x}) + \omega(\underline{y})$ ein):

$$\begin{aligned} &= \omega'(\underline{x}) + \omega'(\underline{y}) \\ &= n + m + 1 \\ &= \omega(\underline{x}) + \omega(\underline{y}) \end{aligned}$$

Wir haben also bewiesen $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})}) = \dots = \omega(\underline{x}) + \omega(\underline{y})$. Das ist exakt die Gleichheit die wir für den Beweis der Korrektheit zeigen mussten.

Im obigen Beweis haben wir folgende Umformung durchgeführt:

$$I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\text{dec}(\underline{x}), \text{inc}(\underline{y}))})$$

NE: $\omega'(\underline{x}) = n, \omega'(\underline{y}) = m + 1$

$$= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})})$$

Diese Abkürzung ist im Rahmen der Übung durchaus erwünscht. Sie ist zulässig da die Interpretationsfunktion $I_{\mathcal{E}}$ entsprechend definiert wurde. Laut Definition ist

$$I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})}) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \underline{\text{if eq?}(\underline{x}, 0) \text{ then } \underline{y} \text{ else } \underline{\text{add}(\text{dec}(\underline{x}), \text{inc}(\underline{y}))}}).$$

Daher können wir umformen:

$$\begin{aligned} &I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{add}(\text{dec}(\underline{x}), \text{inc}(\underline{y}))}) \\ &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \underline{\text{if eq?}(\underline{x}, 0) \text{ then } \underline{y} \text{ else } \underline{\text{add}(\text{dec}(\underline{x}), \text{inc}(\underline{y}))}}) \\ &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \underline{\text{add}(\underline{x}, \underline{y})}) \end{aligned}$$

Dies ist exakt die Umformung die wir gemacht haben.

Ein Vorteil in dieser Variante liegt darin, dass einfach gesehen werden kann wenn die Induktionshypothese zutrifft.

Die Sprache \mathcal{E} ist von uns konstruiert und in der Praxis nicht relevant. Funktionale Sprachen (Lisp, Haskell, OCaml, etc.) im Allgemeinen sind allerdings durchaus relevant - und auch angenehmer zu verwenden als \mathcal{E} . Dadurch, dass wir \mathcal{E} genau verstehen wird es uns auch leicht fallen neue Sprachen zu erlernen. Hier ein Vergleich eines rekursiven Programms zum Ermitteln der n -ten Fibonacci-Zahl in verschiedenen funktionalen Sprachen:

- EXP:

```
fib(n) = if eq?(n,0) then 1
        else plus(fib(minus(n,1)),fib(minus(n,2)))
```

- Erlang:

```
fib(0) -> 1;
fib(n) -> fib(n-1) + fib(n-2)
```

- Haskell:

```
fib 0 = 1
fib n = fib(n-1) + fib(n-2)
```

2.7 Datentyp der Listen \mathcal{L}

Der Datentyp der Listen kommt in vielen Sprachen vor. Wir verwenden dazu die Darstellung mit eckigen Klammern und groß geschriebenen Wörtern ([APE BEE CAT]).

Definition 2.15 (Atom): Etwas ist ein Atom genau dann wenn kein [und kein] darin vorkommt.

Listenelemente die keine “echten” Listen sind (APE, BEE, CAT, etc.) werden Atom genannt. Alle anderen Listen sind keine Atome.

Definition 2.16 (Datentyp der Listen \mathcal{L}):

- Grundmenge A :
 - $ATOM \subseteq A$, d.h. alle Atome sind Listen
 - $[] \subseteq A$, d.h. die leere Liste ist eine Liste
- Funktionen
 1. f_1 : first (liefert das erste Element einer Liste)
 - Wenn $a \in ATOM$, dann ist $first(a) = []$.
 - $first([]) = []$.
 - Wenn $\forall i, \quad 1 \leq i \leq k : \quad \ell_i \in L$, dann ist $first([\ell_1 \dots \ell_k]) = \ell_1$
 2. f_2 : rest (liefert die Liste ohne das erste Element)
 - Wenn $a \in ATOM$, dann ist $rest(a) = []$.
 - $rest([]) = []$.
 - Wenn $\ell \in L$, dann ist $rest([\ell]) = []$

- Wenn $\forall i, \quad 1 \leq i \leq k : \quad \ell_i \in L$ und $k > 1$, dann ist $\text{rest}([\ell_1 \ell_2 \dots \ell_k]) = [\ell_2 \dots \ell_k]$
- 3. $f_3 : \text{build}$ (nimmt 2 Listen entgegen und fügt die eine als erste Element in die andere ein)
 - Wenn $a \in \text{ATOM}$ und $\ell \in L$, dann ist $\text{build}(\ell, a) = a$.
 - Wenn $\ell \in L$, $\text{build}(\ell, []) = [\ell]$.
 - Wenn $\ell \in L$ und $\forall i, \quad 1 \leq i \leq k : \quad \ell_i \in L$, dann ist $\text{build}(\ell, [\ell_1 \dots \ell_k]) = [\ell \ell_1 \dots \ell_k]$
- Prädikate
 1. $p_1 : \text{atom?}$
 - $\text{atom?}(x) = T$, genau dann wenn $x \in \text{ATOM}$
 2. $p_2 : \text{eq?}$
 - $\text{eq?}(x, y) = T$, genau dann wenn $x = y$
- Konstanten: Die leere Liste ($c_1 = []$ mit $c_1^\Sigma = \underline{\text{nil}}$), sowie je eine Konstante für jedes Atom

Die Symbole auf der syntaktischen Ebene werden entsprechend der zuvor verwendeten Bezeichnungen gewählt (z.B. $p_1^\Sigma = \underline{\text{atom?}}$).

Beispiel 2.15: Definieren Sie eine Funktion second in \mathcal{E} welches immer das 2. Element einer Liste zurückliefert. Interpretieren Sie ihre Funktion für den Parameter [FIR SEC THI].

Lösung: Zuerst trennen wir das erste Element von der Liste, anschließend geben wir das neue erste Element zurück:

$$\delta \underline{\text{second}} = \underline{\text{first}(\text{rest}(x))}$$

$$I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{second}(x)} \right)$$

Environment bleibt gleich: $\omega(\underline{x}) = [\text{ FIR SEC THI }]$

$$\begin{aligned}
 &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{first}(\text{rest}(x))} \right) \\
 &= \text{first} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{rest}(x)} \right) \right) \\
 &= \text{first} (\text{rest} (I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega, \underline{x}))) \\
 &= \text{first} (\text{rest} (\omega(\underline{x}))) \\
 &= \text{first} (\text{rest} ([\text{ FIR SEC THI }])) \\
 &= \text{first} ([\text{ SEC THI }]) \\
 &= \text{SEC}
 \end{aligned}$$

Beispiel 2.16: Definieren Sie eine Funktion `reverse` in \mathcal{E} welches eine Liste elementweise umgedreht zurückliefert. Interpretieren Sie ihre Funktion für den Parameter `[FIR SEC THI]`.

Lösung: Bei der Konstruktion rekursiver Programme versuchen wir meist von einem Basisfall ausgehend komplexere Fälle aufzubauen. Ein Basisfall ist für uns ein Atom, die leere Liste und Listen mit genau einem Element. Diese können wir unverändert zurückliefern. Andernfalls haben wir eine Liste mit mehreren Elementen. Dann werden wir das erste (bzw. das letzte) Element von der Liste entfernen und eine neue Liste bauen die aus dem entfernten Element und dem umgedrehten Rest der Liste besteht. Wir wählen die Variante mit dem ersten Element da der Datentyp der Listen dies einfach ermöglicht. Um das letzte Element zu erhalten müssten wir den Datentyp modifizieren oder ein Programm schreiben welches nur das letzte Element zurückliefert.

Wir halten also fest:

$$\text{reverse}(x) = \begin{cases} x & x \in \text{ATOM} \\ x & x = [] \\ x & x = [\ell] \\ [\ell_k \text{reverse}([\ell_1 \dots \ell_{k-1}])] & x = [\ell_1 \dots \ell_{k-1} \ell_k] \end{cases}$$

Dies können wir wieder nicht direkt als \mathcal{E} -Programm umschreiben. Wir haben in der Sprache keine Möglichkeit auf das letzte Element einer Liste zuzugreifen. Wir könnten dafür eine Funktion `δ_{last}` schreiben oder direkt durch eine Rekursion über die Liste iterieren bis zum letzten Element und in einem zweiten Parameter (“Akkumulator”) die Liste aufbauen.

$$\begin{aligned} \delta_{\text{reverse}}(x) &= \text{if atom?}(x) \text{ then } x \text{ else reverse2}(x, \text{nil}) \\ \delta_{\text{reverse2}}(x, y) &= \text{if eq?}(x, \text{nil}) \text{ then } y \text{ else reverse2}(\text{rest}(x), \text{build}(\text{first}(x), y)) \end{aligned}$$

Verhält sich dieses Programm wie beabsichtigt?

$$\begin{aligned} &I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \text{reverse}(x)) \\ &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \text{if atom?}(x) \text{ then } x \text{ else reverse2}(x, \text{nil})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \text{atom?}(x)) &= \text{atom?}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x})) = \text{atom?}(\omega(\underline{x})) \\ &= \text{atom?}([\text{ FIR SEC THI }]) = F \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \text{reverse2}(x, \text{nil}))$$

$$\text{NE: } \omega'(\underline{x}) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x}) = \omega(\underline{x}) = [\text{ FIR SEC THI }], \omega'(\underline{y}) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{nil}}) = []$$

$$\begin{aligned} &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \text{reverse2}(x, y)) \\ &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega', \text{if eq?}(x, \text{nil}) \text{ then } y \text{ else reverse2}(\text{rest}(x), \text{build}(\text{first}(x), y))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{eq?}(\underline{x}, \underline{\text{nil}})} \right) &= \text{eq?} (I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega', \underline{x}), I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega', \underline{\text{nil}})) = \text{eq?} (\omega'(\underline{x}), []) \\ &= \text{eq?} ([\text{ FIR SEC THI }], []) = F \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{reverse2}(\text{rest}(\underline{x}), \text{build}(\text{first}(\underline{x}), \underline{y}))} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{NE: } \omega''(\underline{x}) &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{rest}(\underline{x})} \right) = \text{rest} (I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega', \underline{x})) = \text{rest} (\omega'(\underline{x})) \\ &= \text{rest} ([\text{ FIR SEC THI }]) = [\text{ SEC THI }], \\ \omega''(\underline{y}) &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{build}(\text{first}(\underline{x}), \underline{y})} \right) = \text{build} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{first}(\underline{x})} \right), I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega', \underline{y}) \right) \\ &= \text{build} \left(\text{first} (I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega', \underline{x})), I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega', \underline{y}) \right) = \text{build} \left(\text{first} (\omega'(\underline{x})), \omega'(\underline{y}) \right) \\ &= \text{build} \left(\text{first} ([\text{ FIR SEC THI }]), [] \right) = \text{build} (\text{FIR}, []) = [\text{ FIR }] \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega'', \underline{\text{reverse2}(\underline{x}, \underline{y})} \right)$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega'', \underline{\text{if eq?}(\underline{x}, \underline{\text{nil}}) \text{ then } \underline{y} \text{ else } \underline{\text{reverse2}(\text{rest}(\underline{x}), \text{build}(\text{first}(\underline{x}), \underline{y}))}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega'', \underline{\text{eq?}(\underline{x}, \underline{\text{nil}})} \right) &= \text{eq?} (I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega'', \underline{x}), I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega'', \underline{\text{nil}})) \\ &= \text{eq?} (\omega''(\underline{x}), []) = \text{eq?} ([\text{ SEC THI }], []) = F \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega'', \underline{\text{reverse2}(\text{rest}(\underline{x}), \text{build}(\text{first}(\underline{x}), \underline{y}))} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{NE: } \omega'''(\underline{x}) &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega'', \underline{\text{rest}(\underline{x})} \right) = \text{rest} (I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega'', \underline{x})) = \text{rest} (\omega''(\underline{x})) \\ &= \text{rest} ([\text{ SEC THI }]) = [\text{ THI }], \\ \omega'''(\underline{y}) &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega'', \underline{\text{build}(\text{first}(\underline{x}), \underline{y})} \right) = \text{build} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega'', \underline{\text{first}(\underline{x})} \right), I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega'', \underline{y}) \right) \\ &= \text{build} \left(\text{first} (I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega'', \underline{x})), I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega'', \underline{y}) \right) = \text{build} \left(\text{first} (\omega''(\underline{x})), \omega''(\underline{y}) \right) \\ &= \text{build} \left(\text{first} ([\text{ SEC THI }]), [\text{ FIR }] \right) = \text{build} (\text{SEC}, [\text{ FIR }]) = [\text{ SEC FIR }] \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{reverse2}(\underline{x}, \underline{y})} \right)$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{if eq?}(\underline{x}, \underline{\text{nil}}) \text{ then } \underline{y} \text{ else } \underline{\text{reverse2}(\text{rest}(\underline{x}), \text{build}(\text{first}(\underline{x}), \underline{y}))}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{eq?}(\underline{x}, \underline{\text{nil}})} \right) &= \text{eq?} (I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega''', \underline{x}), I_{\mathcal{E}} (\delta, \omega''', \underline{\text{nil}})) \\ &= \text{eq?} (\omega'''(\underline{x}), []) = \text{eq?} ([\text{ THI }], []) = F \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{reverse2}(\text{rest}(\underline{x}), \text{build}(\text{first}(\underline{x}), \underline{y}))} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{NE: } \omega'''(\underline{x}) &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{rest}(x)} \right) = \text{rest} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{x} \right) \right) = \text{rest} \left(\omega'''(\underline{x}) \right) \\
&= \text{rest} \left([\text{THI}] \right) = [], \\
\omega'''(\underline{y}) &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{build}(\text{first}(x), y)} \right) = \text{build} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{first}(x)} \right), I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{y} \right) \right) \\
&= \text{build} \left(\text{first} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{x} \right) \right), I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{y} \right) \right) = \text{build} \left(\text{first} \left(\omega'''(\underline{x}) \right), \omega'''(\underline{y}) \right) \\
&= \text{build} \left(\text{first} \left([\text{THI}] \right), [\text{SEC FIR}] \right) = \text{build} \left(\text{THI}, [\text{SEC FIR}] \right) = [\text{THI SEC FIR}] \\
&= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{reverse2}(x, y)} \right) \\
&= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{if eq?}(x, \text{nil}) \text{ then } y \text{ else } \text{reverse2}(\text{rest}(x), \text{build}(\text{first}(x), y))} \right) \\
\text{NR: } I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{eq?}(x, \text{nil})} \right) &= \text{eq?} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{x} \right), I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{\text{nil}} \right) \right) \\
&= \text{eq?} \left(\omega'''(\underline{x}), [] \right) = \text{eq?} \left([], [] \right) = T \\
&= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega''', \underline{y} \right) \\
&= \omega'''(\underline{y}) \\
&= [\text{THI SEC FIR}]
\end{aligned}$$

Das Programm verhält sich für diesen Fall wie gewünscht. Um zu beweisen, dass es sich immer korrekt verhält müssten wir einen Beweis führen.

Beispiel 2.17: Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt ein Programm in EXP über den Datentyp der Listen, welches die maximale Verschachtelungs-Tiefe einer Liste berechnet. Greifen Sie dafür auf die in der Vorlesung besprochene Codierung der natürlichen Zahlen zurück. Beispielsweise würde der Aufruf mit dem Input $[]$ als Resultat $[]$ berechnen, der Aufruf mit dem Input $[\text{a} [] [[] \text{b}] []]$ würde als Resultat $[[[]]]$ berechnen.

Wenn die Aussage wahr ist, ist eine Implementation anzugeben und die Korrektheit dieser zu zeigen.

Lösung: (Aus der Übung 2011) Wir haben im Tutorium das Programm zur Berechnung der maximalen Verschachtelungstiefe wie folgt implementiert:

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{depth}} &= \underline{\text{if atom?}(\text{first}(x)) \text{ then } \text{depth}(\text{rest}(x))} \\
&\quad \underline{\text{else if eq?}(x, \text{nil}) \text{ then nil}} \\
&\quad \underline{\text{else max}(\text{build}(\text{depth}(\text{first}(x)), \text{nil}), \text{depth}(\text{rest}(x)))} \\
\delta_{\text{max}} &= \underline{\text{if eq?}(x, \text{nil}) \text{ then } y} \\
&\quad \underline{\text{else if eq?}(y, \text{nil}) x} \\
&\quad \underline{\text{else build}(\text{max}(\text{rest}(x), \text{rest}(y)), \text{nil})}
\end{aligned}$$

Die Korrektheit von δ_{max} wurde im Tutorium per Induktion gezeigt, dem geneigten Leser ist es überlassen diesen Beweis selbst durchzuführen.

Wir haben $f_d(\omega(\underline{x}))$ als “Golden Device” definiert, eine Funktion $(L \rightarrow \mathbb{N})$ die die gesuchte Funktion korrekt berechnet.

Bei einer Induktion wollen wir im Allgemeinen von einem Fall auf den nächsten bzw. nachfolgenden schließen. In unserem Fall ist das gar nicht so leicht, denn die Listen sind beliebig verschachtelt. Wenn wir z.B. die Listenlänge n verwenden, könnte im rekursiven Aufruf die Länge der Liste $\text{first}(\omega(\underline{x}))$ größer als n sein. Ein Umweg über die Listentiefe t ist eher umständlich. In so einem Fall ist es recht hilfreich sich zu überlegen ob es ein anderes Kriterium gibt, mit welchem wir beide Rekursionsaufrufe auf die Hypothese zurückführen können.

Daher erfolgt der Beweis für δdepth mit $\text{atom?}(\text{first}(\omega(\underline{x}))) = F$ per Induktion nach der Gesamtanzahl $|\omega(\underline{x})|$ der Elemente in $\omega(\underline{x})$. Über diese Hilfsfunktion können wir relativ einfach nach dem Schema arbeiten welches in den anderen Beispielen bereits vorkam.

Wir definieren:

$$|\omega(\underline{x})| = \begin{cases} 1 & \text{eq?}(\omega(\underline{x}), []) \\ 1 & \text{atom?}(\omega(\underline{x}), []) \\ |\text{first}(\omega(\underline{x}))| + |\text{rest}(\omega(\underline{x}))| & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Idee - mit der wir die Induktion durchführen - könnte man schreiben als: Wenn δdepth korrekt ist für $|\omega(\underline{x})| = n$ ($n \in \mathbb{N}$), dann ist δdepth auch korrekt für $|\omega(\underline{x})| = n+1$.

Induktionshypothese:

$$\forall \omega(\underline{x}) \in L, \quad |\omega(\underline{x})| \leq n : \quad I(\delta, \omega, \text{depth}(\underline{x})) = f_d(\omega(\underline{x}))$$

Induktionsbasis:

$$\omega(\underline{x}) \in L, |\omega(\underline{x})| = 1$$

$$\begin{aligned} & I(\delta, \omega, \text{depth}(\underline{x})) \\ &= I(\delta, \omega, \text{if atom?}(\text{first}(\underline{x})) \text{ then depth}(\text{rest}(\underline{x})) \\ & \quad \text{else if eq?}(\underline{x}, \text{nil}) \text{ then nil} \\ & \quad \text{else max(build(depth(first}(\underline{x})), \text{nil}), \text{depth}(\text{rest}(\underline{x})))}) \end{aligned}$$

NR: $I(\delta, \omega, \text{atom?}(\text{first}(\underline{x}))) = \text{atom?}(I(\delta, \omega, \text{first}(\underline{x}))) = \text{atom?}(\text{first}(I(\delta, \omega, \underline{x})))$
 $= \text{atom?}(\text{first}([])) = \text{atom?}([]) = F$ (da dies zu einer Rekursion führen würde und folglich kein Basisfall ist.)

$$\begin{aligned} &= I(\delta, \omega, \text{if eq?}(\underline{x}, \text{nil}) \text{ then nil} \\ & \quad \text{else max(build(depth(first}(\underline{x})), \text{nil}), \text{depth}(\text{rest}(\underline{x})))}) \end{aligned}$$

Da $|\omega(\underline{x})| = 1$ ist muss $\omega(\underline{x}) = []$ sein.

$$= I(\delta, \omega, \underline{\text{nil}}) = [] = f_d([]) = f_d(\omega(\underline{x}))$$

Induktionsschritt:

$$\omega(\underline{x}) \in L, |\omega(\underline{x})| = n + 1, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} & I(\delta, \omega, \underline{\text{depth}(\underline{x})}) \\ &= I(\delta, \omega, \underline{\text{if atom?}(\text{first}(\underline{x})) \text{ then depth}(\text{rest}(\underline{x}))} \\ & \quad \underline{\text{else if eq?}(\underline{x}, \text{nil}) \text{ then nil}} \\ & \quad \underline{\text{else max}(\text{build}(\text{depth}(\text{first}(\underline{x})), \text{nil}), \text{depth}(\text{rest}(\underline{x}))))} \end{aligned}$$

Fallunterscheidung nach $\text{atom?}(\text{first}(\omega(\underline{x})))$:

- Fall $\text{atom?}(\text{first}(\omega(\underline{x}))) = T$

NR: $I(\delta, \omega, \underline{\text{atom?}(\text{first}(\underline{x}))}) = \text{atom?}(I(\delta, \omega, \underline{\text{first}(\underline{x})})) = \text{atom?}(\text{first}(I(\delta, \omega, \underline{x}))) = T$ (siehe Fallunterscheidung)

$$= I(\delta, \omega, \underline{\text{depth}(\text{rest}(\underline{x}))})$$

$\omega'(\underline{x}) = I(\delta, \omega, \text{rest}(\underline{x})) = \text{rest}(I(\delta, \omega, \underline{x})) = \text{rest}(\omega(\underline{x}))$. Die Gesamtanzahl der Elemente dieser Liste ist mindestens um 1 geringer, da $\text{first}(\underline{x})$ aus der Liste entfernt wurde.

$$= I(\delta, \omega', \underline{\text{depth}(\underline{x})})$$

Für dieses Environment gilt die Induktionshypothese. Wir wenden die Induktionshypothese daher an:

$$\begin{aligned} &= f_d(\omega'(\underline{x})) \\ &= f_d(\text{rest}(\omega(\underline{x}))) \end{aligned}$$

Was korrekt ist, da das Atom $\text{first}(\omega(\underline{x}))$ die Listentiefe nicht beeinflusst.

- Fall $\text{atom?}(\text{first}(\omega(\underline{x}))) = F$

NR: $I(\delta, \omega, \underline{\text{atom?}(\text{first}(\underline{x}))}) = \text{atom?}(I(\delta, \omega, \underline{\text{first}(\underline{x})})) = \text{atom?}(\text{first}(I(\delta, \omega, \underline{x}))) = F$ (siehe Fallunterscheidung)

$$\begin{aligned} &= I(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(\underline{x}, \text{nil}) \text{ then nil}} \\ & \quad \underline{\text{else max}(\text{build}(\text{depth}(\text{first}(\underline{x})), \text{nil}), \text{depth}(\text{rest}(\underline{x})))) \end{aligned}$$

Da $|\omega(\underline{x})| > 1$ ist, ist $\omega(\underline{x}) \neq []$

$$= I(\delta, \omega, \max(\text{build}(\text{depth}(\text{first}(\underline{x})), \text{nil}), \text{depth}(\text{rest}(\underline{x}))))$$

Korrektheit von δ_{\max} wurde bereits gezeigt

$$\begin{aligned} &= \max(I(\delta, \omega, \text{build}(\text{depth}(\text{first}(\underline{x})), \text{nil})), I(\delta, \omega, \text{depth}(\text{rest}(\underline{x})))) \\ &= \max(\text{build}(I(\delta, \omega, \text{depth}(\text{first}(\underline{x}))), []), I(\delta, \omega, \text{depth}(\text{rest}(\underline{x})))) \end{aligned}$$

$\omega''(\underline{x}) = I(\delta, \omega, \text{first}(\underline{x})) = \text{first}(I(\delta, \omega, \underline{x})) = \text{first}(\omega(\underline{x}))$. Die Gesamtanzahl der Elemente dieser Liste ist mindestens um 1 geringer, da die Eltern-Liste nicht im rekursiven Aufruf enthalten ist.

$\omega'''(\underline{x}) = I(\delta, \omega, \text{rest}(\underline{x})) = \text{rest}(I(\delta, \omega, \underline{x})) = \text{rest}(\omega(\underline{x}))$. Die Gesamtanzahl der Elemente dieser Liste ist mindestens um 1 geringer, da $\text{first}(\underline{x})$ aus der Liste entfernt wurde.

$$= \max(\text{build}(I(\delta, \omega'', \text{depth}(\underline{x})), []), I(\delta, \omega''', \text{depth}(\underline{x})))$$

Damit haben wir für beide rekursiven Aufrufe jeweils ein Environment für, dass die Induktionshypothese gilt. Wir wenden die Induktionshypothese daher an:

$$\begin{aligned} &= \max(\text{build}(f_d(\omega''(\underline{x})), []), f_d(\omega'''(\underline{x}))) \\ &= \max(\text{build}(f_d(\text{first}(\omega(\underline{x}))), []), f_d(\text{rest}(\omega(\underline{x})))) \end{aligned}$$

Die maximale Verschachtelungstiefe kann nur in $\text{first}(\omega(\underline{x}))$ oder $\text{rest}(\omega(\underline{x}))$ erreicht werden. Daher machen wir eine Fallunterscheidung die diese beiden Fälle unterscheidet (und damit alle Fälle abdeckt):

- Wird die maximale Verschachtelungstiefe k (Anmerkung: $f_d(\omega(\underline{x})) = \pi(k)$) in $\omega(\underline{x})$ in $\text{first}(\omega(\underline{x}))$ erreicht so ist $f_d(\omega'(\underline{x})) = \pi(k-1)$, da $\omega'(\underline{x})$ eine Verschachtelungsebene weniger enthält (die der Eltern-Liste). Dann ist $\text{build}(f_d(\omega'(\underline{x})), []) = \pi(k-1+1) = \pi(k)$.

In diesem Fall gilt also $\max(\text{build}(f_d(\omega'(\underline{x})), []), f_d(\omega''(\underline{x}))) = f_d(\omega(\underline{x})) = \pi(k)$.

- Andernfalls wird die maximale Verschachtelungstiefe k in $\omega(\underline{x})$ in $\text{rest}(\omega(\underline{x}))$ erreicht.

Dann ist $f_d(\omega''(\underline{x})) = \pi(k)$, da $\omega''(\underline{x})$ der Eltern-Liste mit entferntem ersten Element entspricht. Dann ist $f_d(\omega''(\underline{x})) = \pi(k)$.

In diesem Fall gilt also ebenfalls $\max(\text{build}(f_d(\omega'(\underline{x})), []), f_d(\omega''(\underline{x}))) = f_d(\omega(\underline{x})) = \pi(k)$.

Daraus folgt

$$\max(\text{build}(f_d(\omega'(\underline{x})), []), f_d(\omega''(\underline{x}))) = f_d(\omega(\underline{x})).$$

Damit wurde die Korrektheit von δ_{depth} gezeigt.

2.8 Kodierung von Datentypen

In nahezu jedem Programm wird mehr als ein Datentyp verwendet. Nach unseren Definitionen können wir kein Programm schreiben welches die Länge einer Liste zurückliefert, da die Länge einer Liste eine Zahl in \mathbb{N}_0 ist und keine Liste.

Eine einfache Lösung für dieses Problem ist es Datentypen zu kombinieren. Wir erzeugen also einen neuen Datentyp der beispielsweise die Kombination aus L und \mathbb{N}_0 ist, wir schreiben dann $L + \mathbb{N}_0$.

Definition 2.17: Die Kombination von 2 Datentypen D_1, D_2 ergibt einen neuen Datentyp $D_1 + D_2$. Die Mengen A, F, P, C sowie die Mengen der syntaktischen Repräsentationen $A^\Sigma, F^\Sigma, P^\Sigma, C^\Sigma, \dots$ des neuen Datentyps entsprechen der Vereinigung der jeweiligen Mengen der Datentypen D_1 und D_2 .

Funktionen und Prädikate sind weiterhin nur für die Argumente aus dem eigenen Datentyp definiert. Im Falle eines Aufrufs mit Parametern eines fremden Datentyps wird ein definierter konstanter Wert (ein Fehlerwert) zurückgeliefert. Dazu können auch neue Konstanten eingeführt werden, welche dann jedoch wieder in allen Funktionen und Prädikaten behandelt werden müssen. Im Fall von Prädikaten ist der Fehlerwert entweder T oder F .

Die Definition von Atomen beim Datentyp der Listen erlaubt es Listen leicht zu kombinieren. Elemente des zweiten Datentyps sind Atome.

Beispiel 2.18: Schreiben Sie ein Programm nth in \mathcal{E} über dem Datentyp $L + \mathbb{N}_0$ welches das n -te Element ($n > 0$) einer Liste zurückliefert und die leere Liste falls es kein solches gibt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Implementation.

Lösung: Der Basisfall ist das erste Element zurückzuliefern. In jedem weiteren Fall müssen wir das erste Element entfernen und eine Zählvariable inkrementieren.

$$\delta \text{nth}(\underline{x}, \underline{y}) = \text{if eq?}(\underline{y}, \text{eins}) \text{ then first}(\underline{x}) \text{ else nth}(\text{rest}(\underline{x}), \text{minus}(\underline{y}, \text{eins}))$$

Listen haben die Form $[\ell_1 \ell_2 \dots \ell_k]$, wir bezeichnen daher in unserem Beweis mit ℓ_i das i -te Element.

Bevor wir die Induktion durchführen können müssen wir überlegen nach welcher Variable wir die Induktion führen. Beide Variablen ($\underline{x}, \underline{y}$) werden im Laufe der Rekursion verändert. Entscheidend ist allerdings welche Variable zum Programmabbruch führt. Das ist bei uns \underline{y} .

\underline{x} hat dennoch Einfluss auf unseren Beweis, denn es können 2 Fälle auftreten: Die Anzahl der Elemente der Liste \underline{x} kann größer-gleich dem Wert von \underline{y} sein, er kann aber auch kleiner sein. Wir müssen daher in unserem Beweis eine **Fallunterscheidung** durchführen.

- Induktionshypothese:

$$\begin{aligned} & \forall \omega(\underline{y}) \leq n \leq |\omega(\underline{x})| : \quad I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{nth}(\underline{x}, \underline{y})}) = \ell_{\omega(\underline{y})} \\ \wedge \quad & \forall |\omega(\underline{x})| < \omega(\underline{y}) \leq n : \quad I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{nth}(\underline{x}, \underline{y})}) = [] \end{aligned}$$

Die Fallunterscheidung ist hier durch die \wedge -Verknüpfung vorhanden. Wir haben damit alle Fälle abgedeckt denn $|\omega(\underline{x})| < \omega(\underline{y})$ ist genau dann wahr, wenn $\omega(\underline{y}) \leq |\omega(\underline{x})|$ nicht wahr ist.

- Induktionsbasis: In der Induktionsbasis müssen wir nun beide Fälle der Hypothese für den Basisfall beweisen, d.h. einmal mit $0 = |\omega(\underline{x})| < \omega(\underline{y}) \leq n = 1$ und einmal mit $1 = |\omega(\underline{x})| < \omega(\underline{y}) \leq n = 1$

$$\begin{aligned} & |\omega(\underline{x})| = 0 \quad \omega(\underline{y}) = 1 \\ & I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{nth}(\underline{x}, \underline{y})}) \\ &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(\underline{y}, \text{eins}) \text{ then first}(\underline{x}) \text{ else nth}(\text{rest}(\underline{x}), \text{minus}(\underline{y}, \text{eins}))}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } & I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{eq?}(\underline{y})}) = \text{eq?}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{y}), I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{eins}})) = \text{eq?}(\omega(\underline{y}), 1) \\ &= \text{eq?}(1, 1) = T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{first}(\underline{x})}) \\ &= \text{first}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x})) \\ &= \text{first}(\omega(\underline{x})) \\ &= \text{first}([]) \quad (\text{wissen wir da } |\omega(\underline{x})| = 0) \\ &= [] \end{aligned}$$

Nun den zweiten Teil der Basis.

$$\begin{aligned} & |\omega(\underline{x})| = 1 \quad \omega(\underline{y}) = 1 \\ & I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{nth}(\underline{x}, \underline{y})}) \\ &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(\underline{y}, \text{eins}) \text{ then first}(\underline{x}) \text{ else nth}(\text{rest}(\underline{x}), \text{minus}(\underline{y}, \text{eins}))}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } & I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{eq?}(\underline{y})}) = \text{eq?}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{y}), I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{eins}})) = \text{eq?}(\omega(\underline{y}), 1) \\ &= \text{eq?}(1, 1) = T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{first}(\underline{x})}) \\ &= \text{first}(I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x})) \\ &= \text{first}(\omega(\underline{x})) \\ &= \text{first}([\ell_1]) \quad (\text{wissen wir da } |\omega(\underline{x})| = 1) \\ &= \ell_1 \end{aligned}$$

Die Basisfälle haben wir damit bewiesen.

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 & |\omega(\underline{x})| \geq 1 && (\text{den Fall } 0 \text{ haben wir ja schon bewiesen}) \\
 & \omega(\underline{y}) = n + 1 \\
 & I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{nth}(\underline{x}, \underline{y})} \right) \\
 & = I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(\underline{y}, \text{eins}) \text{ then first}(\underline{x}) \text{ else nth}(\text{rest}(\underline{x}), \text{minus}(\underline{y}, \text{eins}))} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{NR: } I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{eq?}(\underline{y})} \right) &= \text{eq?} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{y} \right), I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{eins}} \right) \right) = \text{eq?} \left(\omega(\underline{y}), 1 \right) \\
 &= \text{eq?} (n + 1, 1) = F
 \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{nth}(\text{rest}(\underline{x}), \text{minus}(\underline{y}, \text{eins}))} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{NE: } \omega'(\underline{x}) &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{rest}(\underline{x})} \right) = \text{rest} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{x} \right) \right) = \text{rest} \left(\omega(\underline{x}) \right) = \text{rest} ([\ell_1 \ell_2 \dots]) \\
 &= [\ell_2 \dots] = [\ell'_1 \dots]
 \end{aligned}$$

Wir definieren hier $\forall i : \ell'_i = \ell_{i+1}$.

$$\begin{aligned}
 \omega'(\underline{y}) &= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{minus}(\underline{y}, \text{eins})} \right) = \text{minus} \left(I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{y} \right), I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega, \underline{\text{eins}} \right) \right) \\
 &= \text{minus} \left(\omega(\underline{y}), 1 \right) = \text{minus} (n + 1, 1) = n
 \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{nth}(\underline{x}, \underline{y})} \right)$$

Beobachtung: Über diesen Programmaufruf mit $\omega'(\underline{y}) = n$ trifft die Induktionshypothese eine Aussage.

Fallunterscheidung nach $|\omega'(\underline{x})|$:

- Fall $|\omega'(\underline{x})| < \omega'(\underline{y})$:

$$I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{nth}(\underline{x}, \underline{y})} \right) = []$$

Was das geforderte Ergebnis für diesen Fall ist.

- Fall $|\omega'(\underline{x})| \geq \omega'(\underline{y})$:

$$I_{\mathcal{E}} \left(\delta, \omega', \underline{\text{nth}(\underline{x}, \underline{y})} \right) = \ell'_{\omega'(\underline{y})} = \ell'_n = \ell_{n+1}$$

Was ebenfalls das geforderte Ergebnis für diesen Fall ist.

Damit ist der Beweis erbracht. Wir stellen fest, dass Beweise von \mathcal{E} -Programmen oft kürzer sind als die Interpretation für einen bestimmten Eingabewert.

Eine Alternative zur Kombination von Datentypen ist die **Kodierung** eines Datentyps in einem anderen Datentyp. Dies findet auch in vielen alltäglichen Programmen Anwendung - genau genommen immer dann wenn nicht nur die eingebauten Datentypen einer Sprache verwendet werden.

Definition 2.18 (Mapping-Funktion π): Gegeben sei ein Datentyp $D = (A, F, P, C)$ und ein Datentyp E mit der Grundmenge B .

- Die Funktion $\pi : A \rightarrow B$ weist jedem Wert aus A einen Wert in B zu, d.h. $\forall x \in A : \pi(x) \in B$.
- $\forall f_i(\dots) \in F$ wird ein Funktionsausdruck $\pi[f_i](\dots)$ über dem Datentyp E konstruiert welcher die Funktion implementiert.
- $\forall p_i(\dots) \in P$ wird ein Prädikatausdruck $\pi[p_i](\dots)$ über dem Datentyp E konstruiert welcher das Prädikat implementiert.
- $\forall c_i \in C$ wird ein Funktionsausdruck (mglw. eine Konstante als 0-parametrische Funktion) $\pi[c_i]$ über dem Datentyp E konstruiert welcher die Konstante darstellt.

Definition 2.19 (Kodierungseigenschaften):

- $\forall x_1, \dots, x_n \in A, f_i \in F : \pi[f_i](\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = \pi(f_i(x_1, \dots, x_n))$, d.h. für alle Werte x_1, \dots, x_n in A (die Funktionsargumente) und alle Funktionen in F darf es keinen Einfluss auf das Ergebnis haben, ob für jedes Funktionsargument der Wert x_k (mit $1 \leq k \leq n$) zuerst kodiert und dann die kodierte Funktion mit diesen berechnet wird oder zuerst der die Funktion mit den Werten x_1, \dots, x_n für die Funktionsargumente berechnet und das Ergebnis kodiert wird.
- $\forall x \in A, p_i \in P : \pi[p_i](\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) \leftrightarrow \pi(p_i(x_1, \dots, x_n))$, gleich wie bei den Funktionen

In Abbildung 2.1 ist die Definition als kommutierendes Diagramm dargestellt.



Abb. 2.1: Kodierungseigenschaften

Beispiel 2.19: Kodieren Sie die natürlichen Zahlen inkl. Null (mit der Funktion $+$, Prädikat $eq?$ und der Konstante 0) in den Datentyp der Listen und zeigen Sie die Korrektheit von $\pi[+](x, y)$.

Lösung: Wir stellen die natürlichen Zahlen als Verschachtelung von Listen dar.

$$\begin{aligned}\pi(0) &= [] \\ \pi(x) &= \text{build}(\pi(x-1), []) \quad \text{für } x > 0\end{aligned}$$

Die Funktionen und Prädikate nehmen als Argumente in Listen kodierte natürliche Zahlen entgegen

$$\begin{aligned}\pi[+](\pi(x), \pi(0)) &= \pi(x) \\ \pi[+](\pi(x), \pi(y+1)) &= \pi[+](\pi(x+1), \pi(y)) \\ \pi[\text{eq?}]([], []) &= T \\ \pi[\text{eq?}](\pi(x+1), \pi(y+1)) &= \pi[\text{eq?}](\pi(x), \pi(y))\end{aligned}$$

Der Beweis der Korrektheit von $\pi[+](x, y)$ erfolgt durch vollständige Induktion. Zu zeigen ist $\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : \pi[+](\pi(x), \pi(y)) = \pi(x+y)$.

- Induktionsbasis: mit x beliebig, $y = 0$

$$\begin{aligned}\pi[+](\pi(x), \pi(y)) & \\ &= \pi[+](\pi(x), \pi(0)) \\ &= \pi(x) \\ &= \pi(x+y)\end{aligned}$$

- Induktionshypothese:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}_0, x \text{ beliebig}, y \leq n : \pi[+](\pi(x), \pi(y)) = \pi(x+y)$$

- Induktionsschritt: $y = n+1$

$$\begin{aligned}\pi[+](\pi(x), \pi(y)) & \\ &= \pi[+](\pi(x), \pi(n+1)) \\ &= \pi[+](\pi(x+1), \pi(n))\end{aligned}$$

Nun können wir die Induktionshypothese anwenden:

$$\begin{aligned}&= \pi(x+1+n) \\ &= \pi(x+y)\end{aligned}$$

□

Definition 2.20 (Dekodierungsfunktion ρ): Wenn ρ existiert, ist ρ ist die Umkehrfunktion zur Mapping-Funktion π . Dann gilt $\rho(\pi(x)) = x$.

π ist **injektiv** wenn $\nexists x \neq y, \pi(x) = \pi(y)$, d.h. es gibt keine 2 unterschiedlichen Werte für die π das gleiche Ergebnis hat. ρ existiert genau dann wenn π injektiv ist. ρ gilt nur für die Menge von Werten die π annehmen kann ("Bild von π ").

2.9 Kodierung von \mathcal{E} in den Datentyp der Listen

Wir werden nun darauf hin arbeiten die Unentscheidbarkeit des Halteproblems zu lösen (Kapitel 2.11). Dazu werden wir zunächst \mathcal{E} in den Datentyp der Listen kodieren (Kapitel 2.9) und anschließend einen Interpreter für kodierte \mathcal{E} -Programme in \mathcal{E} schreiben (Kapitel 2.10).

Wir wollen nun die Interpretationsfunktion ($I_{\mathcal{E}} : \text{FENV} \times \text{ENV} \times \mathcal{E} \rightarrow A$ mit einem Datentyp A) in \mathcal{E} implementieren. Wir nennen diesen Interpreter $\delta\text{IX}(\text{delta}, \text{omega}, \text{exp})$. Die verschiedenen Input-Mengen müssen wir in Listen kodieren. Dabei unterscheiden wir die Kodierungs- und Dekodierungsfunktionen: $\pi_{\text{FENV}}, \pi_{\text{ENV}}, \pi_{\mathcal{E}}, \pi_A$, die jedem Element der angegebenen Menge eine Repräsentation im Datentyp der Listen zuweisen.

Für den Interpreter sollen die Kodierungseigenschaften gelten:

$$I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \text{IX}(\text{delta}, \text{omega}, \text{exp})) = \pi_A(I_{\mathcal{E}}(\rho_{\text{FENV}}(\omega(\text{delta})), \rho_{\text{ENV}}(\omega(\text{omega})), \rho_{\mathcal{E}}(\omega(\text{exp}))))$$

Der Einfachheit halber behandeln wir nur den Fall $A = L$, dann ist in unserem Fall $\pi_A(x) = x$. Die Kodierung von ω kann beispielsweise durch eine Liste von 2-elementigen Listen geschehen wobei das 1. Element jeweils der Variablenname und das 2. Element jeweils der Variablenwert ist. Das heißt der Sachverhalt $\omega(\underline{x1}) = \ell_1, \omega(\underline{x2}) = \ell_2$ wird dargestellt durch $[[X1 \ \ell_1] [(X2) \ \ell_2]]$. Analog kann die Kodierung von FENV geschehen wobei hier 2 Werte pro Variable gespeichert werden: Die Parameterliste und das Programm in Listenkodierung. δ hat dann folgende Form:

$$[[F_1 [[x_1 \dots x_n] \pi_{\mathcal{E}}(\text{exp})]] \dots [F_n [[x_1 \dots x_n] \pi_{\mathcal{E}}(\text{exp}')]]] .$$

Wir definieren ℓ als Funktion die jedes Symbol in ein entsprechendes Atom übersetzt. D.h. $\ell(\text{first}) = \text{FIRST}$, $\ell(\text{variable}) = \text{VARIABLE}$, $\ell(\text{myfunc}) = \text{MYFUNC}$, etc.

Definition 2.21 (Mapping-Funktion $\pi_{\mathcal{E}}$): Wir definieren $\pi_{\mathcal{E}}$ so, dass jeweils das erste Element einer Liste definiert ob diese Liste eine Konstante, Variable, Konditional, etc. ist.

$$\begin{aligned} \forall c \in C^{\Sigma} : \quad \pi_{\mathcal{E}}(c) &= [\text{CONST } \ell(c)] && \text{(Konstanten)} \\ \forall v \in \text{IVS} : \quad \pi_{\mathcal{E}}(v) &= [\text{IVS } \ell(v)] && \text{(Variablen)} \\ \forall f \in F^{\Sigma} : \quad \pi_{\mathcal{E}}(f(t_1, \dots, t_n)) &= [\text{APPLY } \ell(f) \pi_{\mathcal{E}}(t_1) \dots \pi_{\mathcal{E}}(t_n)] && \text{(Datentyp-Funktionen)} \\ \forall p \in P^{\Sigma} : \quad \pi_{\mathcal{E}}(\text{if } p(u_1, \dots, u_n) \text{ then } t_1 \text{ else } t_2) &= [\text{COND } \ell(p) [\pi_{\mathcal{E}}(u_1) \dots \pi_{\mathcal{E}}(u_n)] \pi_{\mathcal{E}}(t_1) \pi_{\mathcal{E}}(t_2)] && \text{(Datentyp-Prädikate)} \\ \forall F \in \text{FENV} : \quad \pi_{\mathcal{E}}(F(t_1, \dots, t_n)) &= [\text{CALL } \ell(F) \pi_{\mathcal{E}}(t_1) \dots \pi_{\mathcal{E}}(t_n)] && \text{(Funktionen des Funktionsenvironments)} \end{aligned}$$

Diese Definition erlaubt uns jedes \mathcal{E} -Programm in einer Liste zu kodieren.

2.10 Ein \mathcal{E} -Interpreter in \mathcal{E}

Die Implementation des \mathcal{E} -Interpreters $\delta IX(\text{delta}, \text{omega}, \text{exp})$ in \mathcal{E} erfolgt direkt entsprechend der Definition 2.14 (sowie den dort verwendeten Definitionen 2.9 und 2.10) wobei wir die größeren Teile der Definition auf Unterfunktionen aufteilen.

```

 $\delta IX(\text{delta}, \text{omega}, \text{exp})$ 
= if eq?(first(exp), CONST) then nth(exp, 2)                (z.B. [CONST NIL])
  else if eq?(first(exp), IVS) then DoIVS(omega, exp)
  else if eq?(first(exp), APPLY) then DoAppl(delta, omega, exp)
  else if eq?(first(exp), COND) then DoCond(delta, omega, exp)
  else DoCall(delta, omega, exp)

```

DoIVS implementieren wir indem wir rekursiv durch die Liste omega suchen und einen Fehler zurückgeben falls die Variable nicht definiert wurde oder eben die Variable

```

 $\delta DoIVS(\text{omega}, \text{exp})$                                 (Aufruf z.B. mit [IVS X1])
= if eq?(nth(exp, 2), first(first(omega))) then nth(first(omega), 2)
  else DoIVS(rest(omega), exp)

```

DoApply implementieren wir nach der Definition der Interpretationsfunktion, wobei wir hier sämtliche Datentypfunktionen (first, rest, build) hineinkodieren müssen. DoApply sieht folglich für jeden Datentyp unterschiedlich aus.

```

 $\delta DoApply(\text{delta}, \text{omega}, \text{exp})$                     (Aufruf z.B. mit [APPLY BUILD X1 X2])
= if eq?(nth(exp, 2), FIRST) then first(IX(delta, omega, nth(exp, 3)))
  else if eq?(nth(exp, 2), REST) then rest(IX(delta, omega, nth(exp, 3)))
  else build(IX(delta, omega, nth(exp, 3)), IX(delta, omega, nth(exp, 4)))

```

Wir definieren eine Unterfunktion die nur die Überprüfung macht (für die beiden Prädikate atom? und eq?):

```

 $\delta Check(\text{pred}, \text{exp})$ 
= if eq?(pred, ATOM) then if atom?(IX(delta, omega, first(exp))) then TRUE else FALSE
  else
  if eq?(IX(delta, omega, first(exp)), IX(delta, omega, nth(exp, 2))) then TRUE else FALSE

```

DoCond ist sehr ähnlich wie DoApply, eine Abfrage für jedes Prädikat. Unter Verwendung der Check Funktion entspricht DoCond genau dem Konditional-Teil der Interpretationsfunktion.

$$\begin{aligned} & \delta\text{DoCond}(\text{delta}, \text{omega}, \text{exp}) && (\text{Aufruf z.B. mit } [\text{COND P } [\text{X1 }] \text{X2 X3}]) \\ = & \text{if eq?}(\text{Check}(\text{nth}(\text{exp}, 2), \text{nth}(\text{exp}, 3)), \text{TRUE}) \text{ then } \text{IX}(\text{delta}, \text{omega}, \text{nth}(\text{exp}, 4)) \\ & \text{else } \text{IX}(\text{delta}, \text{omega}, \text{nth}(\text{exp}, 5)) \end{aligned}$$

DoCall ist nun etwas aufwändiger: Wir müssen eine neue Liste omega bauen und die Anzahl der Parameter ist variabel. Wir beginnen mit einer Funktion NewEnv, die ein neues omega baut und returniert und einer Hilfsfunktion build2 die aus 2 Elementen eine Liste baut.

$$\begin{aligned} & \delta\text{build2}(x, y) \\ = & \text{build}(x, \text{build}(y, \text{nil})) \\ & \delta\text{NewEnv}(\text{params}, \text{values}) \\ = & \text{if eq?}(\text{params}, \text{nil}) \text{ then nil} \\ & \text{else } \text{build}(\text{build2}(\text{first}(\text{params}), \text{IX}(\text{delta}, \text{omega}, \text{first}(\text{values}))), \\ & \quad \text{NewEnv}(\text{rest}(\text{params}), \text{rest}(\text{values}))) \end{aligned}$$

Wir können nun also ein Environment bauen. Die Werte für die Parameter bekommen wir als Listenrest nach dem Funktionsvariablenamen. Die Parameternamen finden sich in delta als Liste, als 1. Element vom Funktionsvariablenwert. Wir müssen allerdings noch die richtige Funktionsvariable finden. Dazu definieren wir eine Funktion FindFVS

$$\begin{aligned} & \delta\text{FindFVS}(\text{delta}, \text{name}) \\ = & \text{if eq?}(\text{name}, \text{first}(\text{first}(\text{delta}))) \text{ then } \text{nth}(\text{first}(\text{delta}), 2) \\ & \text{else } \text{FindFVS}(\text{rest}(\text{delta}), \text{name}) \end{aligned}$$

Damit können wir DoCall bauen:

$$\begin{aligned} & \delta\text{DoCall}(\text{delta}, \text{omega}, \text{exp}) && (\text{Aufruf z.B. mit } [\text{CALL F X1 X2 X3}]) \\ = & \text{IX}(\text{delta}, \text{NewEnv}(\text{FindFVS}(\text{delta}, \text{first}(\text{nth}(\text{exp}, 2))), \text{rest}(\text{rest}(\text{exp}))), \\ & \quad \text{FindFVS}(\text{delta}, \text{rest}(\text{nth}(\text{exp}, 2)))) \end{aligned}$$

Damit ist der Interpreter vollständig.

Es fällt auf, dass keinerlei Fehlerfälle bzw. Fehlerbehandlung in dem Interpreter vorkommen. Dies ist für unsere Zwecke auch nicht nötig da wir nur syntaktisch korrekte Programme interpretieren wollen.

Den Interpreter IX kann auch sich selbst interpretieren. Dazu muss er nur in Listenkodierung gebracht werden.

2.11 Das Halteproblem

\mathcal{E} ist turing-vollständig. Der Beweis dazu kann erbracht werden indem man einen Interpreter für (in einer definierten Art und Weise) kodierte Turingmaschinen in EXP schreibt.

Definition 2.22 (Church-Turing These): Die Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen ist genau die Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen.

Sofern die Church-Turing These stimmt gilt ein Beweis für ein Problem in EXP auch für alle anderen turing-vollständigen Sprachen.

Definition 2.23 (Entscheidungsproblem): Ein Prädikat P ist entscheidbar, wenn es ein Programm Π in \mathcal{E} mit folgender Eigenschaft gibt:

- Wenn $P(x_1, \dots, x_n) = T$: $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \Pi) = T$ mit $\omega(\underline{x}_i) = x_i$
- Wenn $P(x_1, \dots, x_n) = F$: $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \Pi) = F$ mit $\omega(\underline{x}_i) = x_i$

D.h. in einer endlichen Anzahl von Rechenschritten wird eine Entscheidung getroffen.

Ein Programm hält für eine Eingabe wenn es mit dieser Eingabe ausgeführt in einer endlichen Anzahl von Rechenschritten terminiert.

Definition 2.24 (Halteproblem): Gibt es ein Programm das entscheiden kann ob ein beliebiges Programm Π auf einer Eingabe x hält?

Satz 2.1: Das Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis: Wir beweisen, dass das Halteproblem (in \mathcal{E}) unentscheidbar ist, indem wir zeigen dass es kein Programm in \mathcal{E} geben kann, welches für beliebige Programme und Inputs entscheidet ob das Programm hält. Dazu nehmen wir an es wäre entscheidbar in \mathcal{E} und führen dies dann auf einen Widerspruch zurück. Diese Beweistechnik nennt man "Beweis durch Widerspruch".

Ein \mathcal{E} -Programm kann ein Programm aus mehreren Funktionen bestehen. Jedes \mathcal{E} -Programm kann aber auch mit nur einer Funktion implementiert werden. Sei L_{Π} die Listenkodierung einer Funktion Π .

Annahme: Es gibt eine Funktion $H(L_{\Pi}, X) : L \times L \rightarrow L$ die TRUE zurückgibt falls L_{Π} mit Input X hält, und FALSE zurückgibt falls L_{Π} mit Input X nicht hält und NIL als Fehlerwert zurückgibt falls L_{Π} keine $|X|$ -stellige Funktion kodiert.

Für den Widerspruch zu zeigen:

$$\nexists \delta : \underline{H(x,y)=\dots} \in \delta, \forall \omega \in \text{ENV} : I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{H(x,y)}) = H(\omega(\underline{x}), \omega(\underline{y})),$$

d.h. es existiert kein Funktionsenvironment indem $\underline{H(x,y)}$ definiert wurde, so dass für alle möglichen ω -Environments $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{H(x,y)}) = H(\omega(\underline{x}), \omega(\underline{y}))$ berechnet werden kann.

Um dies zu zeigen konstruieren wir eine Funktion $\delta \underline{A}$, die genau dann halten soll wenn sie nicht hält:

$$\delta \underline{A(x)} = \underline{\text{if eq?}(H(x,x), \text{TRUE}) \text{ then } A(x) \text{ else } x}$$

Mit $\omega(\underline{x}) = \pi(\delta \underline{A})$ berechnen wir nun $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{A(x)})$:

$$I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{A(x)}) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(H(x,x), \text{TRUE}) \text{ then } A(x) \text{ else } x}) = \star$$

Fallunterscheidung nach $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{H(x,x)}) =$

- TRUE (d.h. $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{A(x)})$ hält): Laut Definition der Interpretationsfunktion wird dann der then-Zweig ausgeführt.

$$\star = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{A(x)}) = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(H(x,x), \text{TRUE}) \text{ then } A(x) \text{ else } x}) = \star$$

und da $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{H(x,x)}) = \text{TRUE}$

$$\star = I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{A(x)}) = \dots$$

Wir sehen, dass das Programm nicht hält. Dies ist ein Widerspruch.

- FALSE (d.h. $I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{A(x)})$ hält nicht): Laut Definition der Interpretationsfunktion wird dann der else-Zweig ausgeführt.

$$I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{\text{if eq?}(H(x,x), \text{TRUE}) \text{ then } A(x) \text{ else } x}) == I_{\mathcal{E}}(\delta, \omega, \underline{x}) = \omega(\underline{x})$$

Wir sehen, dass das Programm hält. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch.

Die Fallunterscheidung deckt alle Fälle ab. Wir erhalten in jedem Fall einen Widerspruch. Somit haben wir den Satz bewiesen. \square

Definition 2.25 (Äquivalenzproblem): Gibt es ein Programm das entscheiden kann ob 2 Programme die selbe Funktion berechnen?

Satz 2.2: Das Äquivalenzproblem ist unentscheidbar.

Der Beweis ist eine gute Übungsaufgabe.

2.12 Sprache der Prädikatenlogischen Ausdrücke PL (\mathcal{P})

In \mathcal{E} hatten wir bereits Prädikate. Diese waren aber nur in Konditionalen an ganz bestimmten Stellen erlaubt (if **predicate** then ... else ...). Wir wollen nun prädikatenlogische Ausdrücke definieren die auch die Verwendung von logischen Operatoren und

Quantoren erlauben. Wir definieren nun die Sprache **PL** (\mathcal{P}). Wie schon bei **EXP** kürzen wir auch hier **PL** durch \mathcal{P} ab - \mathcal{P} gesprochen “PL”. Genau wie \mathcal{E} wird auch \mathcal{P} über einen Datentyp definiert.

- Definition 2.26** (Syntax von PL (\mathcal{P})): 1. Wenn p^Σ ein n -stelliges Prädikatsymbol (d.h. $\in P^\Sigma$) ist und t_1, \dots, t_n Terme (d.h. $\in \mathcal{T}$) dann ist $p^\Sigma(t_1, \dots, t_n)$ ein prädikatenlogischer Ausdruck (d.h. $\in \mathcal{P}$). Wir nennen diesen Ausdruck Atomformel.
2. Wenn $q \in \mathcal{P}$ ist, dann ist auch $\neg q \in \mathcal{P}$.
3. Wenn $q, r \in \mathcal{P}$ sind, dann sind auch $q \vee r$, $q \wedge r$, $q \Rightarrow r$ prädikatenlogische Ausdrücke (d.h. $\in \mathcal{P}$).
4. Wenn $q \in \mathcal{P}$ und $v \in \text{IVS}$ ist, dann sind auch $(\forall v)q \in \mathcal{P}$ und $(\exists v)q \in \mathcal{P}$. In diesem Fall sagen wir, dass die Variable v im prädikatenlogischen Ausdruck q durch einen Quantor **gebunden** ist.
5. Wenn $q \in \mathcal{P}$, dann ist auch $\underline{q} \in \mathcal{P}$.

Die Definition von \mathcal{P} basiert auf der Definition der Sprache der Terme \mathcal{T} . Konditional-Konstrukte (if ... then ... else ...) und Funktionsumgebungen bzw. Funktionsvariablen-symbole (“benutzerdefinierte Funktionen”) können nicht in \mathcal{P} verwendet werden.

Bevor wir die Semantikfunktion definieren können müssen wir uns überlegen wie wir mit Quantoren umgehen. Wenn eine Variable durch einen Quantor gebunden ist müssen wir beispielsweise beim Existenz-Quantor einen passenden Wert suchen, alle anderen Variablen müssen jedoch unverändert bleiben. Beim All-Quantor müssen wir jeden Wert für eine Variable prüfen, allerdings ebenfalls alle anderen Variablen unverändert lassen. Für diesen Zweck definieren wir den Begriff für Environments: “äquivalent modulo” in Bezug auf eine Variable.

Definition 2.27 (äquivalent modulo): $\omega, \omega' \in \text{ENV}$ sind genau dann äquivalent modulo $v \in \text{IVS}$, wenn für alle $w \in \text{IVS}$ mit $v \neq w$ gilt: $\omega(w) = \omega'(w)$. Formal schreiben wir dann: $\omega \sim_v \omega'$, gesprochen “ ω, ω' äquivalent modulo v ”.

Definition 2.28 (Semantik von PL (\mathcal{P})): Die Semantikfunktion definieren wir als $I : \text{ENV} \times \mathcal{P} \rightarrow \{T, F\}$. Seien $q, r \in \mathcal{P}$ und $\omega, \omega' \in \text{ENV}$.

1. $I_{\mathcal{P}}(\omega, p^\Sigma(t_1, \dots, t_n)) = p(I_{\mathcal{T}}(\omega, t_1), \dots, I_{\mathcal{T}}(\omega, t_n))$, wenn $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, mit einem Prädikatsymbol $p^\Sigma \in P^\Sigma$ und dem entsprechenden Prädikat $p \in P$.
2. $I_{\mathcal{P}}(\omega, q \vee r) \Leftrightarrow (I_{\mathcal{P}}(\omega, q) \vee I_{\mathcal{P}}(\omega, r))$ (Oder-Verknüpfung)
3. $I_{\mathcal{P}}(\omega, q \wedge r) \Leftrightarrow (I_{\mathcal{P}}(\omega, q) \wedge I_{\mathcal{P}}(\omega, r))$ (Und-Verknüpfung)
4. $I_{\mathcal{P}}(\omega, q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (I_{\mathcal{P}}(\omega, q) \rightarrow I_{\mathcal{P}}(\omega, r))$ (Implikation)
5. $I_{\mathcal{P}}(\omega, \neg q) \Leftrightarrow \neg I_{\mathcal{P}}(\omega, q)$ (Negation)

$$6. I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{(q)} \right) \Leftrightarrow I_{\mathcal{P}} (\omega, q) \text{ (Klammerung)}$$

$$7. I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{(\forall v)} q \right) \Leftrightarrow \forall \omega', \omega \sim_v \omega' : I_{\mathcal{P}} (\omega', q) \text{ (All-Quantor)}$$

$$8. I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{(\exists v)} q \right) \Leftrightarrow \exists \omega', \omega \sim_v \omega' : I_{\mathcal{P}} (\omega', q) \text{ (Existenz-Quantor)}$$

Definition 2.29 (Syntax von $PL_0(\mathcal{P}_0)$): Die Sprache \mathcal{P}_0 ist die quantorenfreie Teilmenge der Sprache \mathcal{P} . Es ist also $\underline{(\forall v)} q \notin \mathcal{P}_0$ und $\underline{(\exists v)} q \notin \mathcal{P}_0$.

Beispiel 2.20: Interpretieren Sie die folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke in \mathcal{P} mit dem Datentyp \mathbb{N}_0 unter dem Environment $\omega(\underline{x}) = 0$:

$$1. \underline{((lt?(x, plus(eins, eins)) \wedge eq?(x, null)) \vee lt?(x, eins)) \rightarrow eq?(x, eins)}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} & I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{((lt?(x, plus(eins, eins)) \wedge eq?(x, null)) \vee lt?(x, eins)) \rightarrow eq?(x, eins)} \right) \\ & \Leftrightarrow I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{((lt?(x, plus(eins, eins)) \wedge eq?(x, null)) \vee lt?(x, eins))} \right) \rightarrow I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{eq?(x, eins)} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{(lt?(x, plus(eins, eins)) \wedge eq?(x, null)) \vee lt?(x, eins)} \right) \right) \rightarrow eq?(I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{x}), I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{eins})) \\ & \Leftrightarrow \left(I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{(lt?(x, plus(eins, eins)) \wedge eq?(x, null))} \right) \vee I_{\mathcal{E}} \left(\omega, \underline{lt?(x, eins)} \right) \right) \rightarrow eq?(\omega(\underline{x}), 1) \\ & \Leftrightarrow \left(\left(I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{lt?(x, plus(eins, eins)) \wedge eq?(x, null)} \right) \right) \vee lt?(I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{x}), I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{eins})) \right) \rightarrow eq?(0, 1) \\ & \Leftrightarrow \left(\left(I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{lt?(x, plus(eins, eins))} \right) \wedge I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{eq?(x, null)} \right) \right) \vee lt?(\omega(\underline{x}), 1) \right) \rightarrow T \\ & \Leftrightarrow \left(\left(lt?(I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{x}), I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{plus(eins, eins)})) \wedge eq?(I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{x}), I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{null})) \right) \vee lt?(0, 1) \right) \rightarrow T \\ & \Leftrightarrow ((lt?(\omega(\underline{x}), I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{eins})) + I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{eins})) \wedge eq?(\omega(\underline{x}), 0)) \vee lt?(0, 1) \rightarrow T \\ & \Leftrightarrow ((lt?(0, 1 + 1) \wedge eq?(0, 0)) \vee T) \rightarrow T \end{aligned}$$

Damit wissen wir eigentlich schon genug, denn $(\dots \vee T) \rightarrow T \Leftrightarrow T \rightarrow T \Leftrightarrow T$. Der Vollständigkeit halber rechnen wir hier weiter.

$$\Leftrightarrow ((lt?(0, 2) \wedge T) \vee T) \rightarrow T \Leftrightarrow ((T \wedge T) \vee T) \rightarrow T \Leftrightarrow (T \vee T) \rightarrow T \Leftrightarrow T \rightarrow T$$

$$2. \underline{(\exists y) lt?(y, x)}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& I_{\mathcal{P}} \left(\omega, (\exists y) \text{ lt?}(y, x) \right) \\
& \Leftrightarrow \exists \omega', \omega \sim_{\underline{y}} \omega' : I_{\mathcal{P}} (\omega', \text{ lt?}(y, x)) \\
& \Leftrightarrow \exists \omega', \omega \sim_{\underline{y}} \omega' : \text{ lt?}(I_{\mathcal{P}} (\omega', y), I_{\mathcal{P}} (\omega', x)) \\
& \Leftrightarrow \exists \omega', \omega \sim_{\underline{y}} \omega' : \text{ lt?}(\omega'(\underline{y}), \omega'(\underline{x})) \\
& \Leftrightarrow \exists \omega', \omega \sim_{\underline{y}} \omega' : \text{ lt?}(\omega'(\underline{y}), 0) \\
& \Leftrightarrow \exists \omega', \omega \sim_{\underline{y}} \omega' : \omega'(\underline{y}) < 0
\end{aligned}$$

Da $\omega'(\underline{y}) \in \mathbb{N}_0$, d.h. $\omega'(\underline{y}) \geq 0$, gibt es keinen Wert den $\omega'(\underline{y})$ annehmen könnte um das Prädikat zu erfüllen.

$$\Leftrightarrow F$$

Definition 2.30 (Semantischer Status): Der semantische Status eines prädikatenlogischen Ausdrucks $p \in \mathcal{P}$ ist:

- Wenn für alle $\omega \in \text{ENV}$ die Interpretation $I_{\mathcal{P}}(\omega, p) = T$ ist, dann heißt p **gültig** oder **allgemeingültig**.
- Wenn es mindestens ein $\omega \in \text{ENV}$ gibt, so dass $I_{\mathcal{P}}(\omega, p) = T$ ist, dann heißt p **erfüllbar**.
- Wenn es kein $\omega \in \text{ENV}$ gibt, so dass $I_{\mathcal{P}}(\omega, p) = T$ ist, dann heißt p **nicht erfüllbar** oder **unerfüllbar**.

Für die meisten Programme sind nur erfüllbare Ausdrücke interessant, da nur diese den Programmfluss nicht beeinflussen.

Beispiel 2.21: Ermitteln Sie den semantischen Status für Programme in \mathcal{P} über dem Datentyp der binären Stacks:

1. $(\forall x) \neg \text{istLeer?}(\text{add0}(x))$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& I_{\mathcal{P}} \left(\omega, (\forall x) \neg \text{istLeer?}(\text{add0}(x)) \right) \\
& \Leftrightarrow \forall \omega', \omega \sim_{\underline{x}} \omega' : I_{\mathcal{P}} (\omega', \neg \text{istLeer?}(\text{add0}(x))) \\
& \Leftrightarrow \forall \omega', \omega \sim_{\underline{x}} \omega' : \neg I_{\mathcal{P}} (\omega', \text{istLeer?}(\text{add0}(x))) \\
& \Leftrightarrow \forall \omega', \omega \sim_{\underline{x}} \omega' : \neg \text{istLeer?}(I_{\mathcal{P}} (\omega', \text{add0}(x))) \\
& \Leftrightarrow \forall \omega', \omega \sim_{\underline{x}} \omega' : \neg \text{istLeer?}(\text{add0}(I_{\mathcal{P}} (\omega', x))) \\
& \Leftrightarrow \forall \omega', \omega \sim_{\underline{x}} \omega' : \neg \text{istLeer?}(\text{add0}(\omega'(\underline{x})))
\end{aligned}$$

add0 legt eine 0 auf den Stack. Ist $\omega'(\underline{x})$ nicht leer ist es danach weiterhin nicht leer. War $\omega'(\underline{x})$ zuvor leer ist es danach nicht mehr leer.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall \omega', \omega \sim_{\underline{x}} \omega' : \neg F \\ &\Leftrightarrow \forall \omega', \omega \sim_{\underline{x}} \omega' : T \end{aligned}$$

Der Ausdruck ist **gültig**.

2. ist0?(x) → (ist1?(y) ∨ istLeer?(y))

Lösung:

$$\begin{aligned} &I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{\text{ist0?}(x) \rightarrow (\text{ist1?}(y) \vee \text{istLeer?}(y))} \right) \\ &\Leftrightarrow I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{\text{ist0?}(x)} \right) \rightarrow \left(I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{\text{ist1?}(y) \vee \text{istLeer?}(y)} \right) \right) \\ &\Leftrightarrow \text{ist0?}(I_{\mathcal{P}}(\omega, \underline{x})) \rightarrow \left(I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{\text{ist1?}(y)} \right) \vee I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{\text{istLeer?}(y)} \right) \right) \\ &\Leftrightarrow \text{ist0?}(\omega(\underline{x})) \rightarrow (\text{ist1?}(I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{y})) \vee \text{istLeer?}(I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{y}))) \\ &\Leftrightarrow \text{ist0?}(\omega(\underline{x})) \rightarrow (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass der semantische Status **erfüllbar** ist. Um dies zu beweisen müssen wir eine Variablenbelegung mit der der Ausdruck zu T evaluiert und eine mit der er zu F evaluiert. Fallunterscheidung nach $\omega(\underline{x})$

- $\omega(\underline{x}) = 1$:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{ist0?}(1) \rightarrow (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \\ &\Leftrightarrow F \rightarrow (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \end{aligned}$$

“Aus Falschem folgt Beliebiges”, d.h. $\Leftrightarrow T$ - wir können aber auch weiter umformen:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg F \vee (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \\ &\Leftrightarrow T \vee (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \\ &\Leftrightarrow T \end{aligned}$$

- $\omega(\underline{x}) = 0$:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{ist0?}(0) \rightarrow (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \\ &\Leftrightarrow T \rightarrow (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \end{aligned}$$

Die nächsten 3 Umformungszeilen sind trivial, wir führen sie hier trotzdem nochmal genau durch:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg T \vee (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \\ &\Leftrightarrow F \vee (\text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y}))) \\ &\Leftrightarrow \text{ist1?}(\omega(\underline{y})) \vee \text{istLeer?}(\omega(\underline{y})) \end{aligned}$$

Damit der Ausdruck zu F evaluiert müssen die Oder-verknüpften Ausdrücke alle zu F evaluieren. Dazu wählen wir $\omega(\underline{y}) = 0$.

$$\Leftrightarrow \text{ist1?}(0) \vee \text{istLeer?}(0) \quad \Leftrightarrow \quad F \vee F \quad \Leftrightarrow \quad F$$

Der Ausdruck ist **erfüllbar**.

3. istLeer?(x) ∧ ist1?(x)

Lösung:

$$\begin{aligned} &I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{\text{istLeer?}(x) \wedge \text{ist1?}(x)} \right) \\ &\Leftrightarrow I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{\text{istLeer?}(x)} \right) \wedge I_{\mathcal{P}} \left(\omega, \underline{\text{ist1?}(x)} \right) \\ &\Leftrightarrow \text{istLeer?}(I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{x})) \wedge \text{ist1?}(I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{x})) \\ &\Leftrightarrow \text{istLeer?}(\omega(\underline{x})) \wedge \text{ist1?}(\omega(\underline{x})) \end{aligned}$$

$\text{istLeer?}(\omega(\underline{x})) = T$ genau dann wenn $\omega(\underline{x}) = \varepsilon$, dann ist aber $\text{ist1?}(\omega(\underline{x})) = F$. Die Und-Verknüpfung kann also nicht zu T evaluieren.

$$\Leftrightarrow F$$

Der Ausdruck ist **nicht erfüllbar**.

Eine Erweiterung von \mathcal{E} um prädikatenlogische Ausdrücke als Prädikate führen wir an dieser Stelle nicht durch. Diese ist zwar zumindest mit quantorfreien Ausdrücken einfach, wir werden allerdings in Abschnitt 2.13 eine Sprache definieren in der wir die Sprache \mathcal{P} für Konditionale verwenden.

2.13 Assignmentsprachen / Sprache AL (\mathcal{A})

Assignmentsprachen (imperative Sprachen) sind die häufigsten verwendeten Programmiersprachen (z.B. C, C++, Java) und vermutlich sind auch die meisten Programmiersprachen Assignmentsprachen.

In Tabelle 2.1 findet sich eine Auflistung von Merkmalen funktionaler und imperativer Sprachen.

| | | |
|---------------------------------|-------------------|---|
| | funktional | imperativ |
| Zuweisungen | nicht möglich | möglich |
| Variablenwerte | unveränderbar | veränderbar |
| mathematische Definition | direkt umsetzbar | muss u.U. ganz anders formuliert werden |
| Iteration | Rekursion | Schleifen |
| Berechnungsergebnis | Wert | Environment |

Tabelle 2.1: Unterschiede zwischen funktionalen Sprachen und Assignmentsprachen

Der Zustand eines Programms in einer Assignmentsprache ist durch die Variablenwerte definiert. Befehle stellen Zustandsübergänge dar.

Wir definieren nun die Sprache **AL**. Wie schon bei **EXP** kürzen wir auch hier **AL** durch \mathcal{A} ab - \mathcal{A} gesprochen "AL".

Definition 2.31 (Syntax von AL \mathcal{A}): Gegeben die Sprachen \mathcal{T} und \mathcal{P}_0 über einen beliebigen Datentyp D , so definieren wir die Syntax von \mathcal{A} wie folgt:

1. Wenn $v \in \text{IVS}$ und $t \in \mathcal{T}$, dann ist $v := t \in \mathcal{A}$ (Assignments).
2. Wenn $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ dann ist $\text{begin } a_1 ; a_2 \text{ end} \in \mathcal{A}$ (Blöcke).
3. Wenn $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ und $p \in \mathcal{P}_0$, dann ist $\text{if } p \text{ then } a_1 \text{ else } a_2 \in \mathcal{A}$ (Konditionale).
4. Wenn $a \in \mathcal{A}$ und $p \in \mathcal{P}_0$, dann ist $\text{while } p \text{ do } a \in \mathcal{A}$ (Schleifen).

Zwischen begin und end stehen **genau zwei Befehle** die von genau einem $;$ getrennt werden. Dies ist keine Einschränkung, da durch Verschachtelung beliebig viele Befehle nacheinander ausgeführt werden können. Die Syntax von \mathcal{A} erinnert an eine stark vereinfachte Version von ALGOL (oder einer verwandten Sprache - Pascal, als bekannteres Beispiel). Es fällt außerdem auf, dass ein Term $t \in \mathcal{T}$ nur an ganz bestimmten Stellen in der Sprache vorkommen darf.

Definition 2.32 (Semantik von AL \mathcal{A}): Die Interpretationsfunktion $I_{\mathcal{A}} : \text{ENV} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{ENV}$ nimmt ein Environment und ein Programm und berechnet ein neues Environment.

1. Assignments: $I_{\mathcal{A}}(\omega, v := t) = \omega'$ mit $\omega' \sim_v \omega$ und $\omega'(v) = I_{\mathcal{T}}(\omega, t)$.
2. Blöcke: $I_{\mathcal{A}}(\omega, \text{begin } a_1 ; a_2 \text{ end}) = I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega, a_1), a_2)$.
3. Konditionale:
 - (a) $I_{\mathcal{A}}(\omega, \text{if } p \text{ then } a_1 \text{ else } a_2) = I_{\mathcal{A}}(\omega, a_1)$ wenn $I_{\mathcal{P}}(\omega, p) = T$.
 - (b) $I_{\mathcal{A}}(\omega, \text{if } p \text{ then } a_1 \text{ else } a_2) = I_{\mathcal{A}}(\omega, a_2)$ wenn $I_{\mathcal{P}}(\omega, p) = F$.
4. Schleifen:
 - (a) $I_{\mathcal{A}}(\omega, \text{while } p \text{ do } a) = I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega, a), \text{while } p \text{ do } a)$ wenn $I_{\mathcal{P}}(\omega, p) = T$.

(b) $I_{\mathcal{A}}(\omega, \underline{\text{while } p \text{ do } a}) = \omega$ wenn $I_{\mathcal{P}}(\omega, p) = F$.

Beispiel 2.22: Implementieren Sie die Multiplikation zweier Zahlen über dem Datentyp \mathbb{N}_0 . Interpretieren Sie ihre Implementation für $\omega(\underline{x}) = 3$, $\omega(\underline{y}) = 2$.

Lösung: Wir initialisieren die Variable \underline{z} für das Ergebnis auf 0 und addieren \underline{x} \underline{y} -mal dazu.

```

1 begin
2    $\underline{z} := \text{null}$  ;
3   while  $\neg \text{eq}?(y, \text{null})$  do
4     begin
5        $\underline{z} := \text{plus}(\underline{z}, x)$  ;
6        $\underline{y} := \text{minus}(y, \text{eins})$ 
7     end
8   end

```

In der Interpretation werden wir nicht relevante Zeilen jeweils durch Platzhalter Z_k ersetzen um so mehr Übersicht zu schaffen.

$$\begin{aligned}
& I_{\mathcal{A}} \left(\omega, \underline{\text{begin } z := \text{null} ; \text{while } \neg \text{eq}?(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7} \text{ end}} \right) \\
&= I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}}(\omega, \underline{z := \text{null}}), \underline{\text{while } \neg \text{eq}?(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right)
\end{aligned}$$

NE: $\omega^1 \sim_{\underline{z}} \omega$ und berechnen $\omega^1(\underline{z}) = I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{null}}) = 0$

$$= I_{\mathcal{A}} \left(\omega^1, \underline{\text{while } \neg \text{eq}?(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right)$$

NR: $I_{\mathcal{P}} \left(\omega^1, \underline{\neg \text{eq}?(y, \text{null})} \right) = \neg I_{\mathcal{P}} \left(\omega^1, \underline{\text{eq}?(y, \text{null})} \right) = \neg \text{eq}?(I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{y}), I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{\text{null}}))$
 $= \neg \text{eq}?(I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{y}), 0) = \neg \text{eq}?(2, 0) = \neg F = T$

$$\begin{aligned}
&= I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}} \left(\omega^1, \underline{\text{begin } z := \text{plus}(\underline{z}, x) ; y := \text{minus}(y, \text{eins}) \text{ end}} \right), \underline{\text{while } \neg \text{eq}?(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right) \\
&= I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}} \left(\omega^1, \underline{z := \text{plus}(\underline{z}, x)} \right), \underline{y := \text{minus}(y, \text{eins})} \right), \underline{\text{while } \neg \text{eq}?(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right)
\end{aligned}$$

NE: $\omega^2 \sim_{\underline{z}} \omega^1$ und berechnen $\omega^2(\underline{z}) = I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{\text{plus}(\underline{z}, x)}) = \text{plus}(I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{z}), I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{x}))$
 $= \text{plus}(\omega^1(\underline{z}), \omega^1(\underline{x})) = \text{plus}(0, 3) = 3$

$$= I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}} \left(\omega^2, \underline{y := \text{minus}(y, \text{eins})} \right), \underline{\text{while } \neg \text{eq}?(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right)$$

NE: $\omega^3 \sim_{\underline{y}} \omega^2$ und berechnen $\omega^3(\underline{y}) = I_{\mathcal{T}}(\omega^2, \underline{\text{minus}(y, \text{eins})})$
 $= \text{minus}(I_{\mathcal{T}}(\omega^2, \underline{y}), I_{\mathcal{T}}(\omega^2, \underline{\text{eins}})) = \text{minus}(\omega^2(\underline{y}), 1) = \text{minus}(2, 1) = 1$

$$= I_{\mathcal{A}} \left(\omega^3, \underline{\text{while } \neg \text{eq}?(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } I_{\mathcal{P}} \left(\omega^3, \underline{\neg \text{eq?}(y, \text{null})} \right) &= \neg I_{\mathcal{P}} \left(\omega^3, \underline{\text{eq?}(y, \text{null})} \right) = \neg \text{eq?} \left(I_{\mathcal{T}} \left(\omega^3, \underline{y} \right), I_{\mathcal{T}} \left(\omega^1, \underline{\text{null}} \right) \right) \\ &= \neg \text{eq?} \left(\omega^3(\underline{y}), 0 \right) = \neg \text{eq?} (1, 0) = \neg F = T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}} \left(\omega^3, \underline{\text{begin } z := \text{plus}(z, x) ; y := \text{minus}(y, \text{eins}) \text{ end}} \right), \underline{\text{while } \neg \text{eq?}(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right) \\ &= I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}} \left(\omega^3, \underline{z := \text{plus}(z, x)} \right), \underline{y := \text{minus}(y, \text{eins})} \right), \underline{\text{while } \neg \text{eq?}(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NE: } \omega^4 \sim_z \omega^3 \text{ und berechnen } \omega^4(\underline{z}) &= I_{\mathcal{T}} \left(\omega^3, \underline{\text{plus}(z, x)} \right) = \text{plus}(I_{\mathcal{T}} \left(\omega^3, \underline{z} \right), I_{\mathcal{T}} \left(\omega^3, \underline{x} \right)) \\ &= \text{plus}(\omega^3(\underline{z}), \omega^3(\underline{x})) = \text{plus}(3, 3) = 6 \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}} \left(\omega^4, \underline{y := \text{minus}(y, \text{eins})} \right), \underline{\text{while } \neg \text{eq?}(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{NE: } \omega^5 \sim_y \omega^4 \text{ und berechnen } \omega^5(\underline{y}) &= I_{\mathcal{T}} \left(\omega^4, \underline{\text{minus}(y, \text{eins})} \right) \\ &= \text{minus}(I_{\mathcal{T}} \left(\omega^4, \underline{y} \right), I_{\mathcal{T}} \left(\omega^4, \underline{\text{eins}} \right)) = \text{minus}(\omega^4(\underline{y}), 1) = \text{minus}(1, 1) = 0 \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{A}} \left(\omega^5, \underline{\text{while } \neg \text{eq?}(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } I_{\mathcal{P}} \left(\omega^5, \underline{\neg \text{eq?}(y, \text{null})} \right) &= \neg I_{\mathcal{P}} \left(\omega^5, \underline{\text{eq?}(y, \text{null})} \right) = \neg \text{eq?} \left(I_{\mathcal{T}} \left(\omega^5, \underline{y} \right), I_{\mathcal{T}} \left(\omega^5, \underline{\text{null}} \right) \right) \\ &= \neg \text{eq?} \left(\omega^5(\underline{y}), 0 \right) = \neg \text{eq?} (0, 0) = \neg T = F \end{aligned}$$

$$= \omega^{(5)}$$

Korrektheitsbeweise von \mathcal{A} -Programmen unterscheiden sich wesentlich von jenen für \mathcal{E} -Programmen. In \mathcal{E} konnten wir nicht-rekursive Funktionen einfach direkt beweisen (durch Interpretation, evtl. Fallunterscheidung). Rekursive Funktionen konnten durch vollständige Induktion bewiesen werden. Anstatt der Rekursion haben wir nun Schleifen. Über diese können wir auch vollständige Induktionen führen. In \mathcal{A} ist dies aufgrund des geringen Sprachumfangs einfacher als in Sprachen die in der Praxis verwendet werden.

Beispiel 2.23: Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Implementation der Multiplikation über dem Datentyp \mathbb{N}_0 .

Lösung: Unser Programm ist korrekt wenn $\omega(\underline{x}) \cdot \omega(\underline{y}) = \omega^k(\underline{z})$, wobei ω das initiale Environment ist und ω^k das Ergebnis des Programms. Wir verwenden den Platzhalter Z_k aus dem vorherigen Beispiel.

$$\text{Zu zeigen: } \forall \omega \in \text{ENV} : I_{\mathcal{A}}(\omega, Z_{1,\dots,8}) = \omega^k \wedge \omega(\underline{x}) \cdot \omega(\underline{y}) = \omega^k(\underline{z})$$

$$\begin{aligned} &I_{\mathcal{A}} \left(\omega, \underline{\text{begin } z := \text{null} ; \text{while } \neg \text{eq?}(y, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7} \text{ end}} \right) \\ &= I_{\mathcal{A}} \left(I_{\mathcal{A}}(\omega, \underline{z := \text{null}}), Z_{3,\dots,7} \right) \end{aligned}$$

NE: $\omega^1 \sim_{\underline{z}} \omega$ und berechnen $\omega^1(\underline{z}) = I_{\mathcal{T}}(\omega, \underline{\text{null}}) = 0$ Über das Teilprogramm $Z_{3,4,5,6,7}$ führen wir nun eine vollständige Induktion durch.

- Induktionshypothese: $\omega(\underline{x}) = m$ beliebig, $\omega(\underline{y}) = n$, $\omega(\underline{z}) = p$ beliebig, mit ω^k dem Ergebnis der Berechnung (finales Environment).

$$\forall \omega \in \text{ENV}, \omega(\underline{y}) \leq n : I_{\mathcal{A}}(\omega, Z_{3,\dots,7}) = \omega^k \wedge \omega(\underline{x}) \cdot \omega(\underline{y}) + \omega(\underline{z}) = \omega^k(\underline{z})$$

- Induktionsbasis: $\omega(\underline{x}) = m$ beliebig, $\omega(\underline{y}) = 0$, $\omega(\underline{z}) = p$

$$I_{\mathcal{A}}(\omega^1, \underline{\text{while } \neg \text{eq?}(\underline{y}, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}})$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } I_{\mathcal{P}}(\omega^1, \underline{\neg \text{eq?}(\underline{y}, \text{null})}) &= \neg I_{\mathcal{P}}(\omega^1, \underline{\text{eq?}(\underline{y}, \text{null})}) \\ &= \neg \text{eq?}(I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{y}), I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{\text{null}})) = \neg \text{eq?}(\omega^1(\underline{y}), 0) = \neg \text{eq?}(0, 0) = \neg T = F \\ &= \omega^1 \end{aligned}$$

Wir erhalten $\omega^1(\underline{z}) = p$. Der Basisfall ist also bewiesen.

- Induktionsschritt: $\omega(\underline{x}) = m$ beliebig, $\omega(\underline{y}) = n + 1$, $\omega(\underline{z}) = p$ beliebig

$$I_{\mathcal{A}}(\omega^\ell, \underline{\text{while } \neg \text{eq?}(\underline{y}, \text{null}) \text{ do } Z_{4,5,6,7}})$$

$$\begin{aligned} \text{NR: } I_{\mathcal{P}}(\omega^\ell, \underline{\neg \text{eq?}(\underline{y}, \text{null})}) &= \neg I_{\mathcal{P}}(\omega^\ell, \underline{\text{eq?}(\underline{y}, \text{null})}) \\ &= \neg \text{eq?}(I_{\mathcal{T}}(\omega^\ell, \underline{y}), I_{\mathcal{T}}(\omega^\ell, \underline{\text{null}})) = \neg \text{eq?}(\omega^\ell(\underline{y}), 0) = \neg \text{eq?}(n + 1, 0) = \neg F = T \\ &= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^\ell, \underline{\text{begin } z := \text{plus}(\underline{z}, \underline{x}) ; \underline{y} := \text{minus}(\underline{y}, \text{eins}) \text{ end}}), Z_{3,\dots,7}) \\ &= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^\ell, \underline{z := \text{plus}(\underline{z}, \underline{x})}), \underline{y := \text{minus}(\underline{y}, \text{eins})}), Z_{3,\dots,7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NE: } \omega^{\ell+1} \sim_{\underline{z}} \omega^\ell \text{ und berechnen } \omega^{\ell+1}(\underline{z}) &= I_{\mathcal{T}}(\omega^\ell, \underline{\text{plus}(\underline{z}, \underline{x})}) \\ &= \text{plus}(I_{\mathcal{T}}(\omega^\ell, \underline{z}), I_{\mathcal{T}}(\omega^1, \underline{x})) = \text{plus}(\omega^\ell(\underline{z}), \omega^1(\underline{x})) = \text{plus}(p, m) = p + m \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^{\ell+1}, \underline{y := \text{minus}(\underline{y}, \text{eins})}), Z_{3,\dots,7})$$

$$\begin{aligned} \text{NE: } \omega^{\ell+2} \sim_{\underline{y}} \omega^{\ell+1} \text{ und berechnen } \omega^{\ell+2}(\underline{y}) &= I_{\mathcal{T}}(\omega^{\ell+1}, \underline{\text{minus}(\underline{y}, \text{eins})}) \\ &= \text{minus}(I_{\mathcal{T}}(\omega^{\ell+1}, \underline{y}), I_{\mathcal{T}}(\omega^{\ell+1}, \underline{\text{eins}})) = \text{minus}(\omega^{\ell+1}(\underline{y}), 1) = \text{minus}(n + 1, 1) = n \end{aligned}$$

$$= I_{\mathcal{A}}(\omega^{\ell+2}, Z_{3,\dots,7})$$

Wir sehen, dass für $\omega^{\ell+2}$ die Induktionshypothese gilt und verwenden diese:

$$\begin{aligned}
 &= \omega^k \\
 \omega^k(\underline{z}) &= \omega^{\ell+2}(\underline{x}) \cdot \omega^{\ell+2}(\underline{y}) + \omega^{\ell+2}(\underline{z}) \\
 &= m \cdot n + (p + m) \\
 &= (m + 1) \cdot n + p
 \end{aligned}$$

Und damit ist auch die Schleife bewiesen. Das Programm ist also korrekt. \square

Im Vorlesungsskriptum findet sich ab Seite 87 die Definition der Sprache $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$ skizziert. Diese ist eine Erweiterung von \mathcal{A} um das Konzept “Pointer” (“Zeiger”). Variablen werden dabei nur noch Adressen (aus \mathbb{N}_0) enthalten, die Werte stehen in einem neuen Environment an der entsprechenden Adresse. Für diese Erweiterung ist es nötig \mathcal{T} , \mathcal{P} und \mathcal{A} neu zu definieren um ein neues Environment (σ) einzuführen. Anhand dieser Erweiterung wird deutlich, dass das Konzept Pointer im Wesentlichen nur ein zusätzliches Mapping ist, die Mächtigkeit der Sprache aber nicht ändert - jedoch “Komfort” für den Programmierer bringen kann.

2.14 Die Sprache LP (\mathcal{L})

Das dritte Sprachparadigma welches wir untersuchen wollen ist die “Logische Programmierung”. In logischen Programmen werden Zusammenhänge in Form von logischen Formeln festgehalten. Die Vorgehensweise (d.h. der Lösungsweg) muss vom Programmierer nicht explizit angegeben werden. Wir werden die Sprache \mathcal{L} (gesprochen “LP”) entwerfen, die durchaus an einfaches Prolog erinnert.

An dieser Stelle ist noch ein Hinweis auf das Vorlesungsskriptum angebracht welches eine weitere Sprache definiert (“P” die Sprache der Aussagenlogik) und außerdem Grundlagen der Aussagenlogik wiederholt. Wir gehen an dieser Stelle davon aus, dass der Leser diese Grundkenntnisse ($a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$, “Wie können Aussagen in menschlicher Sprache in Aussagenlogik ausgedrückt werden?”, etc.) bereits erworben hat und werden daher gleich die Sprache \mathcal{L} definieren.

Programme bestehen in \mathcal{L} aus Fakten und Regeln für Schlussfolgerungen mit einfachen prädikatenlogischen Ausdrücken. Bei der Semantik von \mathcal{L} lassen wir die Semantikfunktion bewusst weg und definieren stattdessen Äquivalenzen zu logischen Ausdrücken. Unterstreichungen lassen wir ebenfalls weg, da wir nicht mehr zwischen Syntax- und Semantik-Ebene trennen müssen.

Definition 2.33 (Syntax von LP (\mathcal{L})):

1. x ist eine Konstante wenn X nur aus Kleinbuchstaben besteht. Eine Konstante in \mathcal{L} ist ein logischer Term.

2. x ist eine Variable wenn X nur aus Buchstaben besteht und der erste Buchstabe groß geschrieben ist. Eine Variable in \mathcal{L} ist ein logischer Term.
3. Wenn t_1, \dots, t_n logische Terme sind und f eine n -stellige Funktion, dann ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein logischer Term.
4. Wenn p ein n -stelliges Prädikat ist und t_1, \dots, t_n sind logische Terme, dann ist $p(t_1, \dots, t_n)$ eine Atomformel.
5. Wenn $A \in \mathcal{P}$ eine Atomformel ist, dann ist A ein “Fakt”.
6. Wenn A_1, \dots, A_k, A Atomformeln sind, dann ist der Ausdruck $A: -A_1, \dots, A_k$ eine “Regel”.
7. Ein Programm in \mathcal{L} besteht aus einer oder mehreren Atomformeln.

Wir sehen, dass \mathcal{L} völlig unabhängig von unseren bisherigen Sprachen (insbesondere der Sprache der Terme \mathcal{T}) ist.

Definition 2.34 (Semantik von LP (\mathcal{L})):

1. Der Ausdruck A ist äquivalent zur Implikation $T \rightarrow A$, äquivalent zu A .
2. Der Ausdruck $A: -A_1, \dots, A_k$ ist äquivalent zur Implikation $A_1 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow A$.
3. Ein Programm in \mathcal{L} besteht aus Fakten f_1, \dots, f_n und Regeln r_1, \dots, r_n . Wir nennen ein Programm auch “Wissensbasis”. Das Programm ist äquivalent zu einer logischen Formel $f_1 \wedge \dots \wedge f_n \wedge r_1 \wedge \dots \wedge r_n$.

Definition 2.35 (Literal): Wir nennen Atomformeln auch (positive) Literale. Negierte Atomformeln nennen wir auch (negative) Literale.

Definition 2.36 (Hornklausel): Eine Klausel der Form $b_1 \vee \dots \vee b_k$ heißt Hornklausel wenn die Anzahl der positiven (d.h. nicht-negierten) Literale b_i maximal 1 ist.

\mathcal{L} -Programme sind Und-verknüpfte Hornklauseln.

Definition 2.37 (Anfragen in LP (\mathcal{L})): Eine Anfrage in \mathcal{L} hat die Form $: -A_1, \dots, A_k$, was äquivalent zur Implikation:

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow F \Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_k) \vee F \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_k \vee F$$

Um eine Anfrage zu beantworten wird versucht sie auf einen Widerspruch zurückzuführen.

Beispiel 2.24: Schreiben Sie ein Programm in \mathcal{L} welches die Variation der folgenden Peano-Axiome repräsentiert:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl x hat eine natürliche Zahl x' als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

4. Natürliche Zahlen mit gleichem Vorgänger sind gleich.

Lösung: Wir definieren ein Prädikat $\text{nat}(X)$ welches wahr ist wenn X eine natürliche Zahl ist. Dazu verwenden wir eine Funktion $s(X)$ welche den Nachfolger einer Zahl X bezeichnet. Das Prädikat $\text{eq}(X, Y)$ soll wahr sein wenn X und Y den gleichen Vorgänger haben.

```
nat(0).
nat(s(X)) :- nat(X).
eq(0,0).
eq(s(X),s(Y)) :- eq(X,Y).
```

Fall 3 ist in unserer Definition implizit erfüllt.

In Sprache können wir unser Programm so darstellen:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Wenn X eine natürliche Zahl ist, dann ist auch $s(X)$ eine natürliche Zahl (\rightarrow Implikation).
3. 0 ist gleich 0.
4. Wenn X und Y gleich sind, dann sind auch $s(X)$ und $s(Y)$ gleich (\rightarrow Implikation).

Um Anfragen zu beantworten müssen wir einen Algorithmus definieren der ggf. vom \mathcal{L} -Interpreter ausgeführt würde. Dazu benötigen wir Substitution und Unification.

Definition 2.38 (Variablensubstitution): Eine Substitution $\Theta = \{x_1|t_1, \dots, x_n|t_n\}$ ist eine Menge von Paaren der Form $x_i|t_i$, wobei x_i eine Variable ist und t_i ein logischer Term. In t_i darf x_i nicht vorkommen. Substitutionen sind transitiv.

Definition 2.39 (Substitutionsanwendung): Sei Θ eine Substitution und t ein logischer Term. Einen Term t_Θ erhält man, indem man für alle Paar $x_i|t_i$ in Θ , alle Vorkommnisse von x_i und t_i im logischen Term t ersetzt. Der Term t_Θ wird auch Instanz von t genannt.

Substitutionsanwendungen kann man sich leicht als “Suchen und Ersetzen” behalten. Eine Substitution ist eine Menge von “Suchen/Ersetzen” Tupeln.

Beispiel 2.25: Gegeben $t = \text{male}(X)$ und $\Theta = \{X \mid \text{terach}\}$, erhält man durch Anwendung der Substitution die Instanz $t_\Theta = \text{male}(\text{terach})$.

Für die Beantwortung unserer Anfragen werden wir 2 Atomformeln durch geeignete Substitution vereinheitlichen (“unify”). Wollen wir beispielsweise $p(X)$ und $p(Y)$ vereinheitlichen, so könnten wir dies mit $\Theta_1 = \{X|Y\}$, $\Theta_2 = \{Y|X\}$, $\Theta_3 = \{X|a, Y|a\}$, etc.

Wir sehen, dass bei Θ_3 nach der Substitution weniger Variablen in den beiden Atomformeln vorkommen. Dies bedeutet eine zusätzliche Einschränkung. Wir sind suchen meist die allgemeinsten Substitutionen die die beiden Ausdrücke vereinheitlichen. Eine solche Substitution nennen wir MGU (Most General Unifier).

Definition 2.40 (MGU): Eine Substitution ist ein MGU (Most General Unifier), wenn es keine Substitution gibt die allgemeiner ist.

Eine Substitution Θ_1 ist allgemeiner als eine Substitution Θ_2 , wenn es eine Substitution Δ gibt, so dass $\Theta_{1,\Delta} = \Theta_2$.

Ein MGU ist nicht unbedingt eindeutig.

Algorithmus (Berechnung von MGU):

- Input: Atomformeln p und p'
- Output: “Nicht unifizierbar” oder den MGU Θ .
- Algorithmus:
 1. Sei $\Theta = \{\}$.
 2. Suche den ersten Unterschied zwischen p und p' und ermittle die korrespondierenden logischen Terme t und t' . Gibt es keinen Unterschied returniere Θ als MGU.
 - (a) Sind weder t noch t' Variablen, dann Abbruch: “Nicht unifizierbar”.
 - (b) Ist t eine Variable X und t' enthält X (oder umgekehrt), dann Abbruch: “Nicht unifizierbar”.
 - (c) Sonst gehe zu Schritt 3.
 3. Definiere neues p , p' und Θ durch:
 - $p := p_{\{X|t\}}$, $p' := p'_{\{X|t\}}$,
 - $\Theta := \Theta \cup \{X|t\}$.
 4. Gehe zu Schritt 2.

Beispiel 2.26: Berechnen Sie den MGU für $p(X, f(X, g(Z)), i)$ und $p(Y, f(V, W), V)$.

Lösung: Entsprechend dem Algorithmus berechnen wir den MGU Θ :

1. $\Theta = \{\}$, $t = p(\textcolor{red}{X}, f(X, g(Z)), i)$ und $t' = p(\textcolor{red}{Y}, f(V, W), V)$
 2. $\Theta = \{Y|X\}$, $t = p(X, f(\textcolor{red}{X}, g(Z)), i)$ und $t' = p(X, f(\textcolor{red}{V}, W), V)$
 3. $\Theta = \{Y|X, V|X\}$, $t = p(X, f(X, g(\textcolor{red}{Z})), i)$ und $t' = p(X, f(X, \textcolor{red}{W}), X)$
 4. $\Theta = \{Y|X, V|X, W|g(Z)\}$, $t = p(X, f(X, g(Z)), \textcolor{red}{i})$ und $t' = p(X, f(X, g(Z)), \textcolor{red}{X})$
 5. $\Theta = \{Y|X, V|X, W|g(Z), X|i\}$, $t = p(X, f(X, g(Z)), i)$ und $t' = p(X, f(X, g(Z)), i)$
- $$\Theta = \{Y|X, V|X, W|g(Z), X|i\} = \{Y|i, V|i, W|g(Z), X|i\}$$

Algorithmus (Beantwortung einer Anfrage in LP (\mathcal{L})):

- Input: Anfrage der Form : $-P_1, \dots, P_n$.

- Output: T wenn die Anfrage gezeigt werden kann, sonst F .
- Algorithmus:
 1. Bringe die Regeln in eine Reihenfolge r_1, \dots, r_n .
 2. Ist $:-$ die Anfrage (d.h. eine leere Anfrage), wird T returniert.
 3. Wähle die nächste Teilanfrage (zu Beginn P_1)
 4. Für alle Regeln r_i :
 - (a) Wenn die Regel r_i die Form $R : -Q_1, \dots, Q_n$ hat und es gibt eine Substitution Θ so dass $P_{1,\Theta} = R_\Theta$ (wir sagen in diesem Fall “Die Regel **matcht** (die Anfrage)”), dann sei $:-Q_1, \dots, Q_m, P_2, \dots, P_n$ die neue Anfrage. Wir nennen diesen Schritt **Resolution**.
 Bearbeite diese rekursiv:
 - i. Ergibt die Anfrage T , fahre mit nächster Teilanfrage fort (Schritt 3).
 - ii. Andernfalls probiere die nächste Regel.
 - (b) Wenn die Regel nicht matcht, dann probiere die nächste Regel.
 - (c) Wenn es keine Regeln mehr gibt returniere F .

Der Algorithmus returniert T wenn ein Widerspruch in $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow F$ abgeleitet werden kann. Dann müssen alle Teilanfragen P_i wahr sein. Der Algorithmus terminiert je nach Wissensbasis und Anfrage nicht (Erfüllbarkeitsproblem von Hornklauseln).

In diesem Skriptum wird die Reihenfolge der Regeln immer der im Programm entsprechen (Prolog-Variante). Im Vorlesungsskriptum wird hingegen von einer zufälligen Reihenfolge ausgegangen.

Beispiel 2.27: Gegeben ist folgendes Programm:

```
nat(0).
nat(s(X)) :- nat(X).
```

Beweisen Sie die Anfrage $:- \text{nat}(\text{s}(\text{s}(0)))$. (“Ist 2 eine natürliche Zahl?”).

Lösung:

- Anfrage: $:- \text{nat}(\text{s}(\text{s}(0)))$.
- Resolution: 2. Regel matcht: $\text{nat}(\text{s}(X')) :- \text{nat}(X')$.

Wenn eine Regel matcht kennzeichnen wir jede Variable so dass sie eindeutig ist (auch wenn die Regel mehrfach matcht im Laufe des Beweises).

- Unification: $\Theta = \{X' \mid \text{s}(0)\}$.
 In die 2. Regel eingesetzt: $\text{nat}(\text{s}(\text{s}(0))) :- \text{nat}(\text{s}(0))$.

- Neue Anfrage: $\text{:- nat}(\text{s}(0))$.
- Resolution: 2. Regel matcht: $\text{nat}(\text{s}(X')) \text{ :- nat}(X')$.
- Unification: $\Theta = \{X' \mid 0\}$.
In die 2. Regel eingesetzt: $\text{nat}(\text{s}(0)) \text{ :- nat}(0)$.
- Neue Anfrage: $\text{:- nat}(0)$.
- Resolution: 1. Regel matcht: $\text{nat}(0)$.

Ab hier wird der Beweis normalerweise nicht mehr aufgeschrieben, da erkennbar ist dass nun alle Teilanfragen erfüllt sind.

- Unification: bereits unifiziert.
- Neue Anfrage: $\text{:- } .$

Der Beweis ist damit erbracht, 2 ist eine natürliche Zahl.

Beispiel 2.28: Gegeben ist folgendes Programm:

```
nat(0).
nat(s(X)) :- nat(X).
```

Ermitteln Sie für welche Werte die Anfrage $\text{:- nat}(X)$ wahr ist.

Lösung: Wir schreiben $\Theta_{i,j}$ für Θ_{i,Θ_j} .

- Anfrage: $\text{:- nat}(X)$.
- Resolution: 1. Regel matcht: $\text{nat}(0)$.
- Unification: $\Theta_1 = \{X \mid 0\}$. 0, d.h. 0 ist ein gültiger Wert.
Wir fahren jetzt so fort als hätte die 1. Regel nicht gematcht um weitere Ergebnisse zu finden.
- Weitere Resolution: 2. Regel matcht: $\text{nat}(\text{s}(X')) \text{ :- nat}(X')$.
- Unification: $\Theta_2 = \{X \mid \text{s}(X')\}$.
- Neue Anfrage: $\text{:- nat}(X')$.
- Resolution: 1. Regel matcht: $\text{nat}(0)$.
- Unification: $\Theta_3 = \{X' \mid 0\}$. $\Theta_{2,3} = \{X \mid \text{s}(0)\}$. $\text{s}(0)$, d.h. 1 ist ein gültiger Wert.
- Weitere Resolution: 2. Regel matcht: $\text{nat}(\text{s}(X'')) \text{ :- nat}(X'')$.
- Unification: $\Theta_4 = \{X' \mid \text{s}(X'')\}$.
- Neue Anfrage: $\text{:- nat}(X'')$.
- Resolution: 1. Regel matcht: $\text{nat}(0)$.

- Unification: $\Theta_5 = \{X' \mid 0\}$. $\Theta_{2,3,4,5} = \{X \mid s(s(0))\}$. $s(s(0))$, d.h. 2 ist ein gültiger Wert.

X nimmt alle Werte $\in \mathbb{N}_0$ (dargestellt mittels der Successor-Funktion) an.

Im Vorlesungsskriptum findet sich eine alternative (graphisch unterstützte) Notation für die Beantwortung von Anfragen in \mathcal{L} .