Esercizi riguardanti l'integrazione

1. Trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4e^x$$

2. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

3. Trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = 3x^4 + \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x}$$

4. Tra tutte le primitive della funzione $f(x) = 2\cos(x) - 2\mathrm{sen}(x)$, determinare quella il cui grafico passi per il punto di coordinate $(\pi,1)$.

5. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x^3 e^x dx$$

6. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (x^4 - 2x)x^2 dx$$

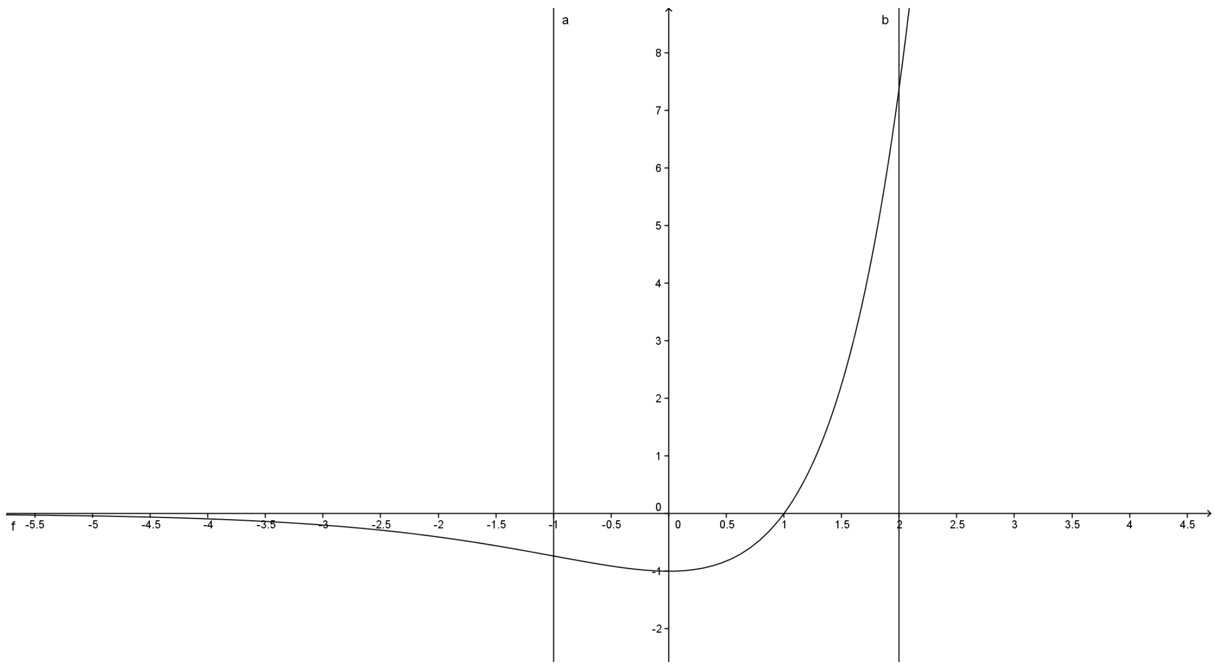
7. Trovare l'area compresa tra il grafico della funzione $y = \mathrm{sen}\, x$ e l'asse x nell'intervallo $[0,2\pi]$.

8. Trovare l'area compresa tra il grafico della funzione $y = (\mathrm{sen}\, x)^2$ e l'asse x nell'intervallo $[0,2\pi]$.

9. Si calcoli il seguente integrale definito

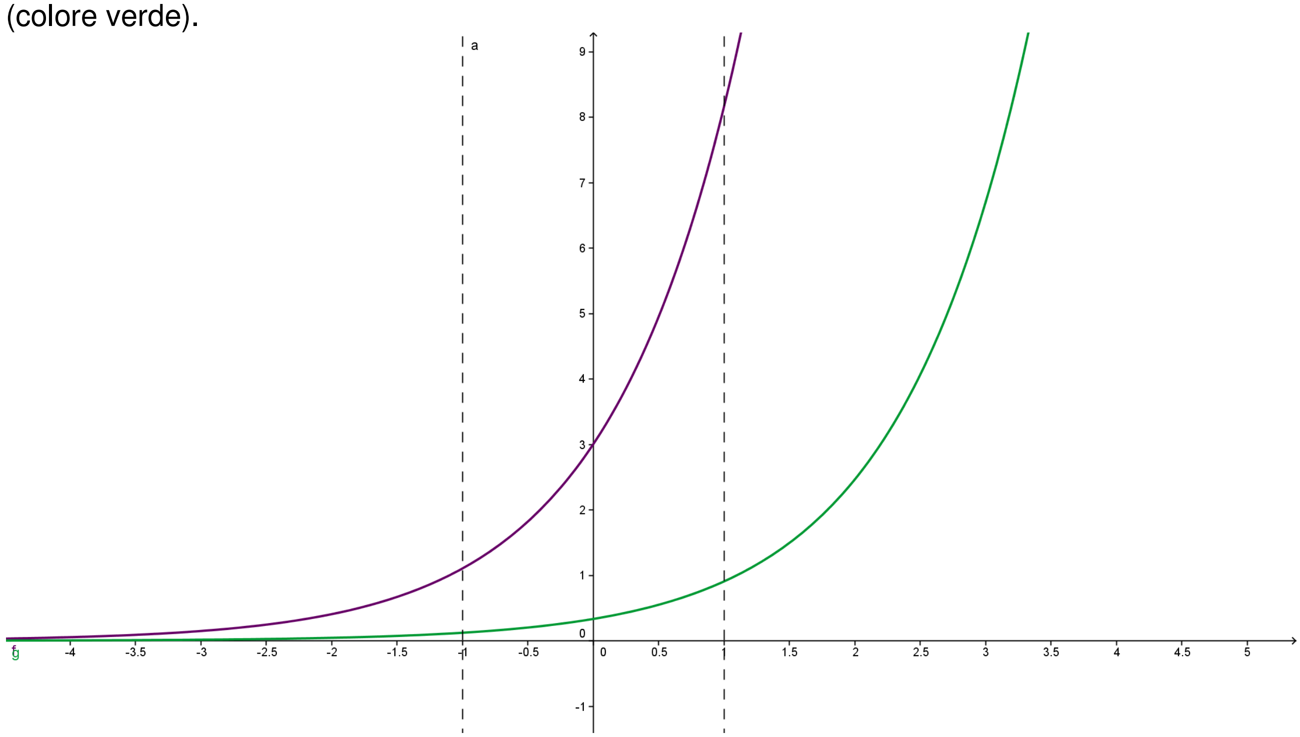
$$\int_0^{\pi} x^3 \mathrm{sen}(x) dx$$

10. In figura è rappresentato il grafico della funzione $f(x) = (x - 1)e^x$.



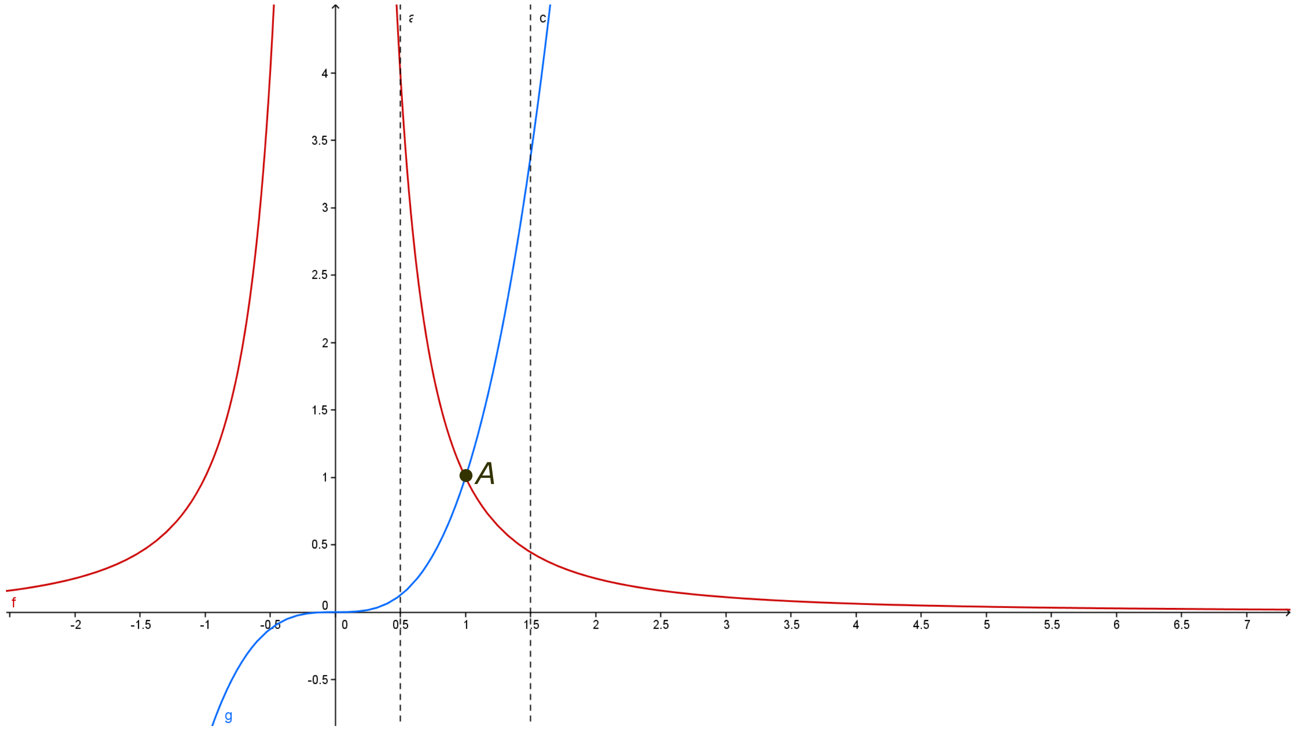
Calcolare l’area compresa tra il grafico della funzione e l’asse *x* nell’intervallo [-1,2].

11. In figura sono rappresentati i grafici delle funzioni $f(x) = 3e^x$ (colore viola) e $g(x) = \frac{1}{3}e^x$ (colore verde).



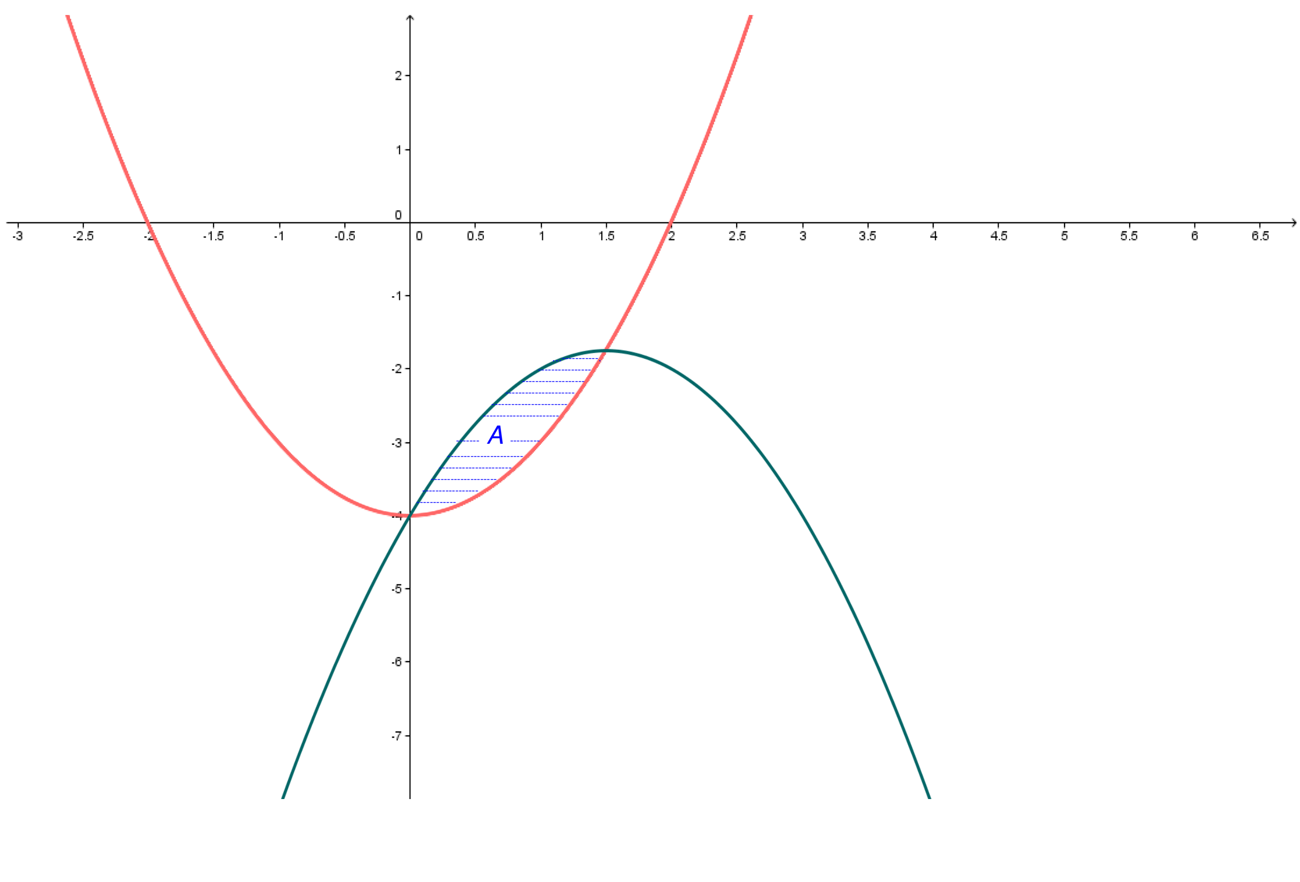
Calcolare l’area della regione di piano racchiusa dai grafici delle due funzioni nell’intervallo [-1,1].

12. In figura sono rappresentati i grafici delle funzioni $f(x) = x^3$ (in blu) e $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (in rosso).



Calcolare l'area della regione di piano compresa tra di due grafici nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

13. Calcolare l'area A compresa tra le due parabole, così come rappresentata in figura, di equazioni $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 3x - 4$.



Le soluzioni

1.

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int\left(-\frac{1}{2}x^2+4e^x\right)dx\\ &= -\frac{1}{2}\int x^2dx+4\int e^xdx\\ &= -\frac{1}{2}\frac{x^{2+1}}{2+1}+4e^x\\ &= -\frac{x^3}{6}+4e^x+c\end{aligned},$$

dove c è una qualsiasi costante.

Una primitiva di f è quindi la funzione $y=-\frac{x^3}{6}+4e^x$.

2.

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx &= 2\int x^{-2}dx-\frac{1}{2}\int x^2dx\\ &= 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\frac{1}{2}\frac{x^{2+1}}{2+1}+c\\ &= -2x^{-1}-\frac{x^3}{6}+c\\ &= -\frac{2}{x}-\frac{x^3}{6}+c\end{aligned}$$

dove c è una qualsiasi costante.

3. Si tratta di calcolare l'integrale indefinito

$$\int\left(3x^4+\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}\right)dx.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}\int\left(3x^4+\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}\right)dx &= 3\int x^4dx+5\int x^{-\frac{1}{2}}dx-5\int\frac{1}{x}dx\\ &= 3\frac{x^{4+1}}{4+1}+5\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-5\ln|x|+c\\ &= 3\frac{x^5}{5}+5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-5\ln|x|+c\\ &= \frac{3}{5}x^5+10\sqrt{x}-5\ln|x|+c\end{aligned}$$

4. Per trovare tutte le primitive della funzione, dobbiamo calcolare l'integrale indefinito di $f(x) = 2\cos(x) - 2\mathrm{sen}(x)$. Si ha che

$$\begin{aligned}\int (2\cos(x) - 2\mathrm{sen}(x))dx &= 2\int \cos(x)dx - 2\int \mathrm{sen}(x)dx \\ &= 2\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x) + c\end{aligned}$$

Quindi le primitive di f sono tutte le funzioni

$$y = 2\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x) + c$$

al variare di $c \in \mathbf{R}$.
Per trovare la primitiva che passa per il punto di coordinate $(\pi,1)$, imponiamo appunto che il valore che la primitiva assume per $x = \pi$ sia 1:

$$1 = 2\mathrm{sen}(\pi) + 2\cos(\pi) + c$$

da cui

$$1 = 2\cdot 0 + 2\cdot(-1) + c.$$

Otteniamo dunque $c = 1 + 2 = 3$.
La primitiva cercata è pertanto

$$F(x) = 2\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x) + 3$$

5. Si tratta di calcolare l'integrale indefinito del prodotto di due funzioni: $y = x^3$ e $y = e^x$. Se riusciamo ad esprimere una qualsiasi di queste due funzioni come derivata di un'altra funzione, possiamo applicare la formula di integrazione per parti.
Si ha infatti:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= \int x^3 \cdot (e^x)' dx \\ &= x^3 e^x - \int (x^3)' \cdot e^x dx \\ &= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx \\ &= x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx\end{aligned}$$

Ora integriamo per parti anche l'integrale $\int x^2 e^x dx$. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx \\ &= x^3 e^x - 3\int x^2 \cdot (e^x)' dx \\ &= x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx \right) \\ &= x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - \int 2x e^x dx \right) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx\end{aligned}$$

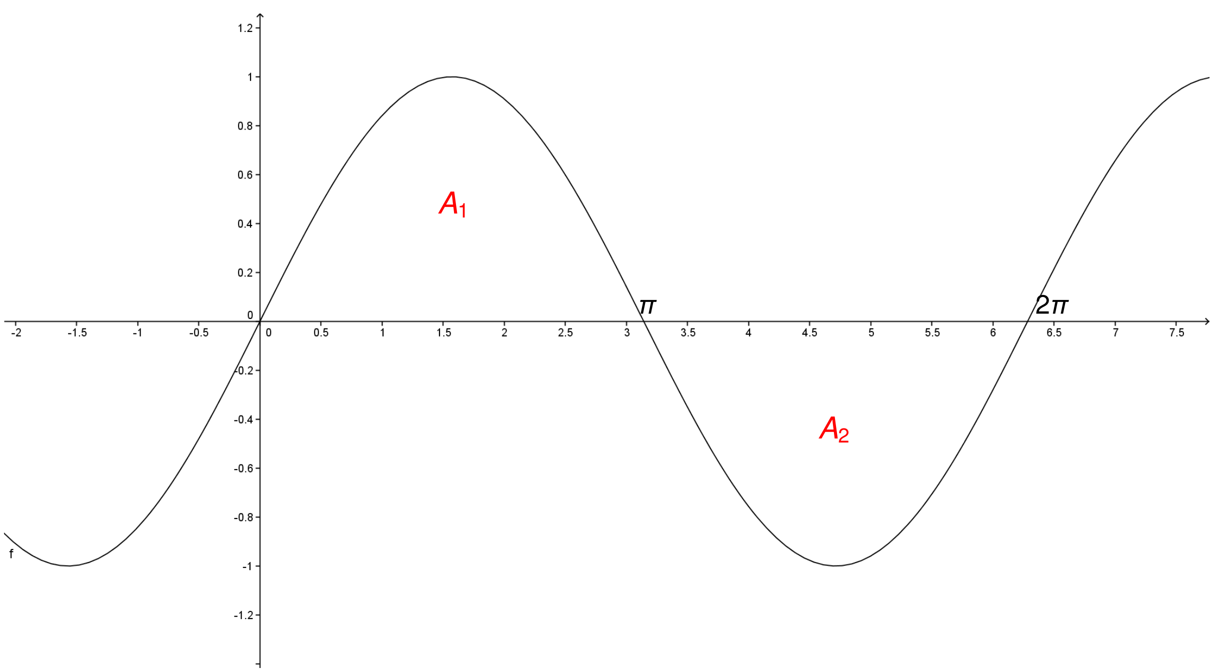
Infine ci rimane da risolvere l'integrale $\int xe^x dx$. Lo calcoliamo sempre per parti:

$$\begin{aligned}\int x^3e^x dx &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x dx \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int x(e^x)' dx \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int x' e^x dx\right) \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int 1\cdot e^x dx\right) \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x \\ &= \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)e^x\end{aligned}$$

6. Si ha che:

$$\begin{aligned}\int (x^4 - 2x)x^2 dx &= \int (x^6 - 2x^3)dx \\ &= \int x^6 dx - 2\int x^3 dx \\ &= \frac{x^7}{7} - 2\frac{x^4}{4} \\ &= \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2}\end{aligned}$$

7. Ricordiamo che il grafico della funzione $y = \text{sen}(x)$ è il seguente



L'area sottesa dal suo grafico è data dalla somma delle aree A_1 e A_2. Ora, come anche si evince anche dal grafico, $\text{sen}(x) \geq 0$ per $x \in [0,\pi]$ e $\text{sen}(x) \leq 0$ per $x \in [\pi,2\pi]$. Quindi si ha che

$$A_1 = \int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 - (-1) = 2$$

e

$$A_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(x)dx = -[-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} = -(\cos(2\pi) - (-\cos(\pi))) = -(-1-1) = 2$$

Pertanto l’area richiesta è data da

$$A = A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4.$$

8. Al contrario dell’esercizio precedente, la funzione in questione è sempre ≥ 0, in quanto il quadrato di qualsiasi numero reale è sempre un numero ≥ 0. Quindi

$$A = \int_0^{2\pi} (\text{sen}(x))^2 dx .$$

Per prima cosa troviamo una primitiva di $y = (\text{sen}(x))^2$. A tal fine utilizziamo la formula di integrazione per parti, riguardando la funzione $y = (\text{sen}(x))^2$ come il prodotto di due funzioni: $y = \text{sen}(x)\,\text{sen}(x) = \text{sen}(x)\cdot(-\cos(x))'$. Si ha dunque che

$$\begin{aligned}
\int (\text{sen}(x))^2 dx &= \int \text{sen}(x)\text{sen}(x)dx \\
&= \int \text{sen}(x)(-\cos(x))' dx \\
&= \text{sen}(x)(-\cos(x)) - \int (\text{sen}(x))'(-\cos(x))dx \\
&= -\text{sen}(x)\cos(x) + \int (\cos(x))^2 dx \\
&= -\text{sen}(x)\cos(x) + \int \left(1 - (\text{sen}(x))^2\right) dx \\
&= -\text{sen}(x)\cos(x) + \int dx - \int (\text{sen}(x))^2 dx \\
&= -\text{sen}(x)\cos(x) + x - \int (\text{sen}(x))^2 dx
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.
Dunque abbiamo dimostrato che

$$\int (\text{sen}(x))^2 dx = -\text{sen}(x)\cos(x) + x - \int (\text{sen}(x))^2 dx$$

da cui

$$2\int (\text{sen}(x))^2 dx = -\text{sen}(x)\cos(x) + x$$

e quindi

$$\int (\text{sen}(x))^2 dx = \frac{1}{2}(x - \text{sen}(x)\cos(x)).$$

Sapendo una primitiva di $y = (\text{sen } x)^2$ possiamo procedere a calcolare l’area. Si ha che

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}(x))^2\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2}(x - \mathrm{sen}(x)\cos(x))\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}(2\pi - \mathrm{sen}(2\pi)\cos(2\pi)) - \frac{1}{2}(0 - \mathrm{sen}(0)\cos(0)) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi - 0) - \frac{1}{2}(0 - 0) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

9. Calcoliamo innanzitutto una primitiva di $y = x^3\,\mathrm{sen}(x)$. Utilizzando la formula di integrazione per parti si ha

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \mathrm{sen}(x)dx &= \int x^3 \cdot (-\cos(x))' dx \\
&= x^3 \cdot (-\cos(x)) - \int 3x^2 \cdot (-\cos(x)) dx \\
&= -x^3 \cos(x) + 3\int x^2 \cos(x) dx
\end{aligned}
$$

Continuando ad integrare per parti,

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \mathrm{sen}(x)dx &= -x^3\cos(x) + 3\int x^2 \cos(x)dx \\
&= -x^3\cos(x) + 3\int x^2 \cdot (\mathrm{sen}(x))' dx \\
&= -x^3\cos(x) + 3\left(x^2 \mathrm{sen}(x) - \int 2x \cdot \mathrm{sen}(x) dx\right) \\
&= -x^3\cos(x) + 3x^2\mathrm{sen}(x) - 6\int x \cdot \mathrm{sen}(x)dx \\
&= -x^3\cos(x) + 3x^2\mathrm{sen}(x) - 6\int x \cdot (-\cos(x))' dx \\
&= -x^3\cos(x) + 3x^2\mathrm{sen}(x) - 6\left(x \cdot (-\cos x) - \int x' \cdot (-\cos x) dx\right) \\
&= -x^3\cos(x) + 3x^2\mathrm{sen}(x) + 6x\cos(x) - \int \cos(x)dx \\
&= -x^3\cos(x) + 3x^2\mathrm{sen}(x) + 6x\cos(x) - \mathrm{sen}(x)
\end{aligned}
$$

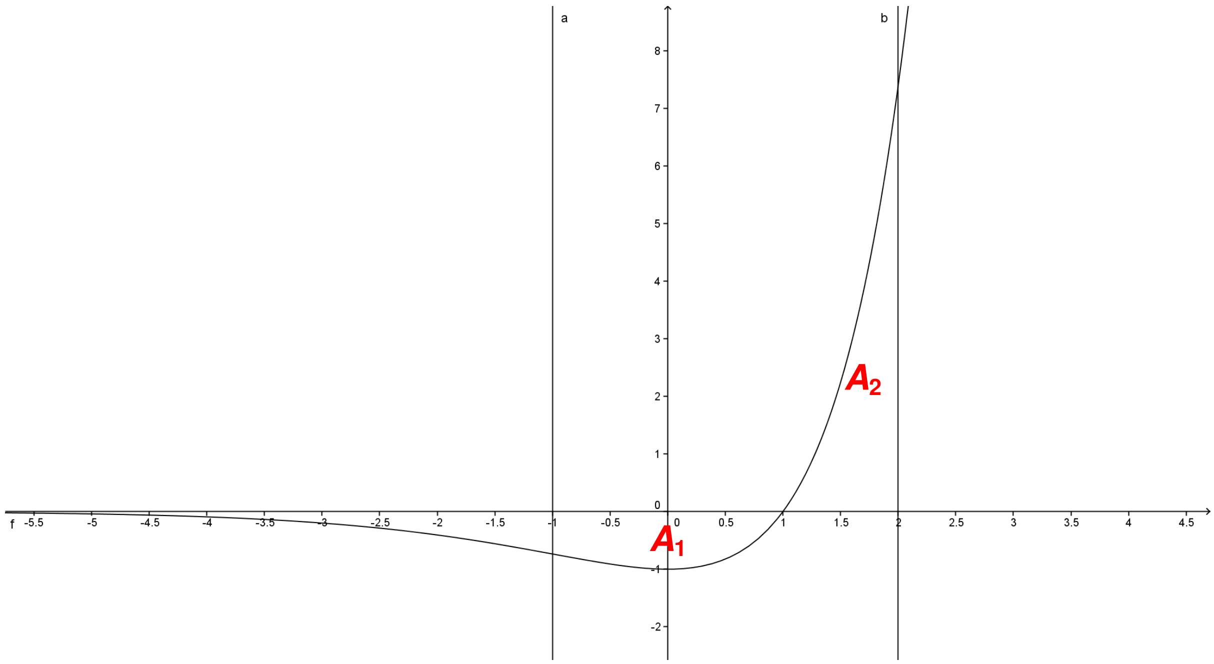
A questo punto possiamo procedere a calcolare l'integrale definito.
Si ha che

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x^3 \mathrm{sen}(x)dx &= \left[x^3\cos(x) + 3x^2\mathrm{sen}(x) + 6x\cos(x) - \mathrm{sen}(x)\right]_0^{\pi} \\
&= \left(\pi^3\cos(\pi) + 3\pi^2\mathrm{sen}(\pi) + 6\pi\cos(\pi) - \mathrm{sen}(\pi)\right) \\
&\quad - \left(0^3\cos(0) + 3\cdot 0^2\mathrm{sen}(0) + 6\cdot 0\cos(0) - \mathrm{sen}(0)\right) \\
&= -\pi^3 - 6\pi
\end{aligned}
$$

10. La funzione $f(x) = (x - 1)e^x$ risulta essere ≥ 0 per $x \geq 1$ e negativa altrove. Quindi l'area cercata si può esprimere come somma delle aree A_1 e A_2, dove

A_1 = area compresa tra il grafico di f e l'asse x nell'intervallo [-1,1] (dove la funzione è negativa)

A_2 = area compresa tra il grafico di f e l'asse x nell'intervallo [1,2] (dove la funzione è positiva)



Si noti che

$$A_1 = -\int_{-1}^{1}(x-1)e^x dx$$

e

$$A_2 = \int_{1}^{2}(x-1)e^x dx$$

(il segno "meno" nel primo integrale definito è dovuto al fatto che la funzione è negativa in [-1,1], è per questo che abbiamo preliminarmente distinto le zone dove la funzione è positiva da quelle in cui è negativa).

Calcoliamo dunque l'integrale indefinito

$$\begin{aligned}\int (x-1)e^x dx &= \int xe^x dx - \int e^x dx \\ &= \int x \cdot (e^x)' dx - e^x \\ &= xe^x - \int x' e^x dx - e^x \\ &= xe^x - \int e^x dx - e^x \\ &= xe^x - e^x - e^x \\ &= (x-2)e^x\end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\int_{-1}^{1}(x-1)e^x dx \\ &= -\left[(x-2)e^x\right]_{-1}^{1} \\ &= -\left((1-2)e^1-(-1-2)e^{-1}\right) \\ &= -\left(-e+3e^{-1}\right) \\ &= e-\frac{3}{e} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{1}^{2}(x-1)e^x dx \\ &= \left[(x-2)e^x\right]_{1}^{2} \\ &= (2-2)e^2-(1-2)e^1 \\ &= 0-(-1)e \\ &= e \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$A = A_1 + A_2 = e-\frac{3}{e}+e = 2e-\frac{3}{e}.$$

11. In generale sappiamo che se f e g sono due funzioni continue tali che

$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

allora l'area compresa tra i grafici delle due funzioni nell'intervallo $[a,b]$ è dato dall'integrale definito

$$\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Nel nostro caso, dalla figura risulta che la funzione $f(x) = 3e^x$ è sempre maggiore o uguale della funzione $g(x) = \frac{1}{3}e^x$ (invero a noi bastava che $f \geq g$ per lo meno nell'intervallo [-1,1] indicato dall'esercizio). Siamo dunque sotto le ipotesi del teorema che abbiamo ricordato e abbiamo quindi che l'area è data da:

$$A = \int_{-1}^{1}\left(3e^x - \frac{1}{3}e^x\right)dx.$$

Al fine di calcolare il valore di questo integrale definito, risolviamo dapprima il corrispondente integrale indefinito, per trovare una primitiva della funzione $y = 3e^x - \frac{1}{3}e^x$.

$$\int\left(3e^x-\frac{1}{3}e^x\right)dx = \int\left(3-\frac{1}{3}\right)e^x dx = \int\frac{8}{9}e^x dx = \frac{8}{9}\int e^x dx = \frac{8}{9}e^x + C$$

dove C è una qualsiasi costante.

Pertanto si ha

$$A=\left[\frac{8}{9}e^{x}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{9}e^{1}-\frac{8}{9}e^{-1}=\frac{8}{9}e-\frac{8}{9}\frac{1}{e}=\frac{8}{9}\left(e-\frac{1}{e}\right)\approx 2{,}10\,.$$

12. In questo caso non siamo nelle ipotesi del teorema richiamato nell'Esercizio 11: infatti lungo l'intervallo $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$, indicato dalla traccia dell'esercizio, né $f(x) \geq g(x)$ e neppure $g(x) \geq f(x)$, cioè tra le due funzioni non ve ne è una il cui grafico sta sempre al di sopra del grafico dell'altra. Quindi è assolutamente sbagliato scrivere che l'area cercata è data, per esempio, da $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(f(x)-g(x))dx$.

È tuttavia possibile aggirare questo problema nel modo seguente. Troviamo innanzitutto il punto di intersezione A dei due grafici. Esso è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

Sostituendo una delle due equazioni nell'altra si ottiene

$$x^3 = \frac{1}{x^2}$$

cioè

$$\frac{x^5-1}{x^2}=0\,.$$

Tale equazione è soddisfatta se e solo se $x^5 - 1 = 0$, cioè $x=\sqrt[5]{1}=1$. Il punto A, come si vede anche dalla figura, ha quindi ascissa 1.

Ora, dalla figura si evince che

$$g(x) \geq f(x) \qquad \forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$$

e

$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in \left[1,\frac{3}{2}\right].$$

Quindi in ciascuno dei sottointervalli $\left[\frac{1}{2},1\right]$ e $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ le ipotesi del teorema generale richiamato all'inizio dell'Esercizio 11 sono verificate.

Ne consegue che possiamo calcolare la nostra area come somma delle due aree A_1 e A_2 comprese tra i grafici delle due funzioni lungo gli intervalli $\left[\frac{1}{2},1\right]$ e $\left[1,\frac{3}{2}\right]$, rispettivamente:

$$A = A_1 + A_2$$

dove

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2} - x^3\right)dx \qquad \text{e} \qquad A_2 = \int_{1}^{\frac{3}{2}}\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Troviamo esplicitamente i valori di A_1 e A_2, cioè risolviamo gli integrali definiti che abbiamo scritto.
Partiamo con

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2} - x^3\right)dx.$$

Il corrispondente integrale indefinito è dato da

$$\int\left(\frac{1}{x^2} - x^3\right)dx = \int x^{-2}dx - \int x^3 dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = -\frac{1}{x} - \frac{x^4}{4} + C$$

dove C è una qualsiasi costante.

Quindi

$$A_1 = \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{16}}{4}\right) = -1 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{64} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{64}$$

Ora calcoliamo $A_2 = \int_{1}^{\frac{3}{2}}\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)dx$. Il corrispondente integrale indefinito è dato da

$$\int\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)dx = -\int\left(\frac{1}{x^2} - x^3\right)dx = \frac{1}{x} + \frac{x^4}{4} + C,$$

con C una qualsiasi costante (si noti che abbiamo sfruttato il calcolo che abbiamo svolto prima).

Pertanto

$$A_2 = \left[\frac{1}{x} + \frac{x^4}{4}\right]_{1}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{81}{16}}{4} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} + \frac{81}{64} - 1 - \frac{1}{4}.$$

Quindi:

$$A = A_1 + A_2 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{2}{3} + \frac{81}{64} - 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{82}{64} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{41}{32} + \frac{2}{3} = \frac{139}{96} \approx 1{,}45$$

13. Troviamo dapprima le intersezioni tra i grafici delle due funzioni $f(x) = -x^2 + 3x - 4$ e $g(x) = x^2 - 4$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 4 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo

$$x^2 - 4 = -x^2 + 3x - 4$$

cioè

$$2x^2 - 3x = 0,$$

vale a dire

$$x(2x - 3) = 0.$$

Si ottengono dunque i valori $x = 0$ e $x = 3/2$. Siccome, come anche si vede bene dalla figura, lungo l'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ si ha sempre $f(x) \geq g(x)$, concludiamo che

$$A = \int_0^{\frac{3}{2}} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (-x^2 + 3x - 4 - (x^2 - 4))dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (-2x^2 + 3x)dx.$$

Troviamo una primitiva di $-2x^2 + 3x$. Si ha che:

$$\int (-2x^2 + 3x)dx = -2\int x^2 dx + 3\int x dx = -2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + c$$

dove c è una qualunque costante.
Allora

$$A = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{8} + \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4} = -\frac{9}{4} + \frac{27}{8} = \frac{9}{8}.$$