Studiare la seguente funzione (è richiesto lo studio di f ''(x) e la ricerca degli eventuali asintoti obliqui) :

$$f(x)=1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9}$$

1. Dominio : $\forall x\in\Re:\frac{x^2-4}{x^2-9}>0 \;\Rightarrow\; x<-3 \;,\; -2<x<+2 \;,\; x>+3$

Poichè la funzione è **pari** , lo studio viene limitato al semipiano delle ascisse positive $(x\geq 0)$

2. Intersezione assi :

$$\begin{cases} y=1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-\ln\frac{4}{9} \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln\frac{x^2-4}{x^2-9}=\ln e \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-e)x^2=4-9e \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=+\sqrt{\frac{9e-4}{e-1}} \\ y=0 \end{cases}$$

3. Segno *f(x) > 0* :

$$1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9}>0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-4}{x^2-9}<e \;\Rightarrow\; \frac{(e-1)x^2+4-9e}{x^2-9}>0$$

$$\Rightarrow\; 0<x<2 \;\;,\;\; x>+\sqrt{\frac{9e-4}{e-1}}$$

4. Limiti :

$$\lim_{x \to 2^-} 1 - \ln \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} 1 - \ln \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \ln \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \ln \left[\frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{9}{x^2} \right)} \right] = 1$$

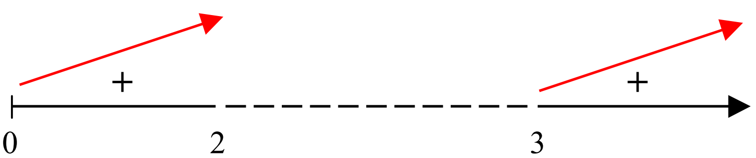
5. Asintoti :

$\boxed{x = 2}$, $\boxed{x = 3}$ **Asintoto verticale** $\boxed{y = 1}$ **Asintoto orizzontale**

6. Derivata 1^ :

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{2x(x^2-9) - 2x(x^2-4)}{(x^2-9)^2}}{\dfrac{(x^2-4)}{(x^2-9)}} = \frac{10x}{(x^2-9)(x^2-4)}$$

$$f'(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \Re : 0 < x < 2 \quad , \quad x > 3$$



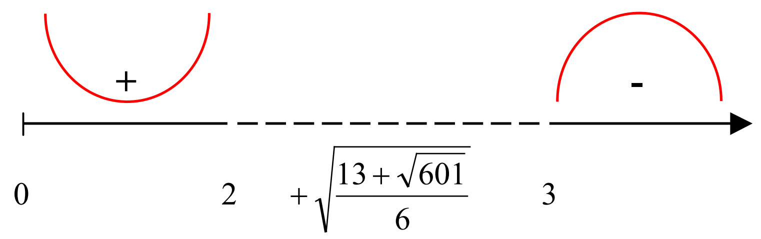
$$f(0) = 1 - \ln\frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad P\left(0\,, 1 - \ln\frac{4}{9} \right) \quad \max.\ \textit{relativo}$$

6. Derivata 2^ :

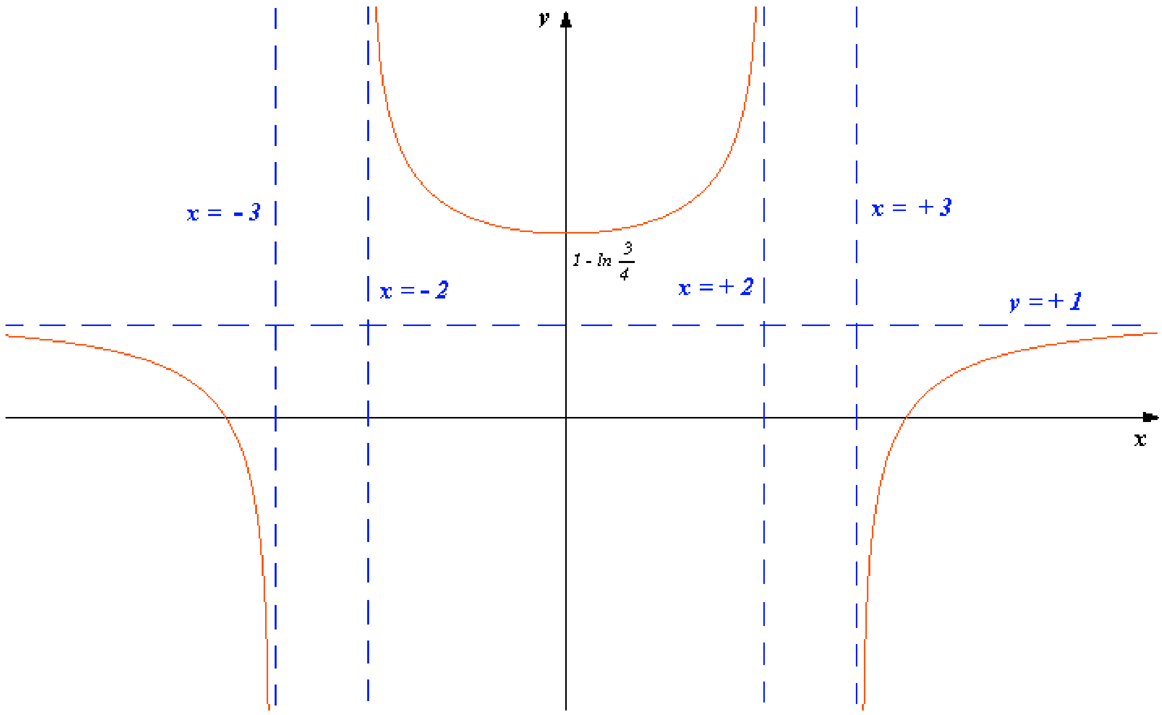
Allo stesso modo :

$$f''(x) \;=\; \frac{10(x^2-9)(x^2-4) - 10x\left[2x(x^2-4) + 2x(x^2-9)\right]}{(x^2-9)^2(x^2-4)^2} \;=\; \frac{-10(3x^4 - 13x^2 - 36)}{(x^2-9)^2(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) \;>\; 0 \qquad 3x^4 - 13x^2 - 36 \;<\; 0 \;\Rightarrow\; -\sqrt{\frac{13+\sqrt{601}}{6}} \;<\; x \;<+\sqrt{\frac{13+\sqrt{601}}{6}}$$



E il grafico :



Si disegni il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}}$$

Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva grafico della funzione f nel punto di ascissa $x_0=1$.

<u>Svolgimento</u> :

1. **Dominio :** $\forall\ x\in\Re : 2-x>0 \Rightarrow \quad x<2$

1. **Intersezioni Assi :**

$$\begin{cases} y=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \not\forall x\in\Re \\ y=0 \end{cases}$$

3. **Segno :**

$$f(x)>0 \qquad \frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}}>0 \quad\Rightarrow\quad \forall x\in D$$

4. **Limiti :**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \quad H\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}}=+\infty$$

5. Asintoti :

$\boxed{x = 2}$ asintoto verticale

verifica asintoto obliquo : $y = mx + q$

infinito di ordine superiore

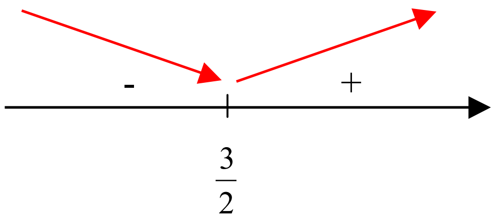
$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}} = +\infty$$

vedi lez. 2 (studio funzione)

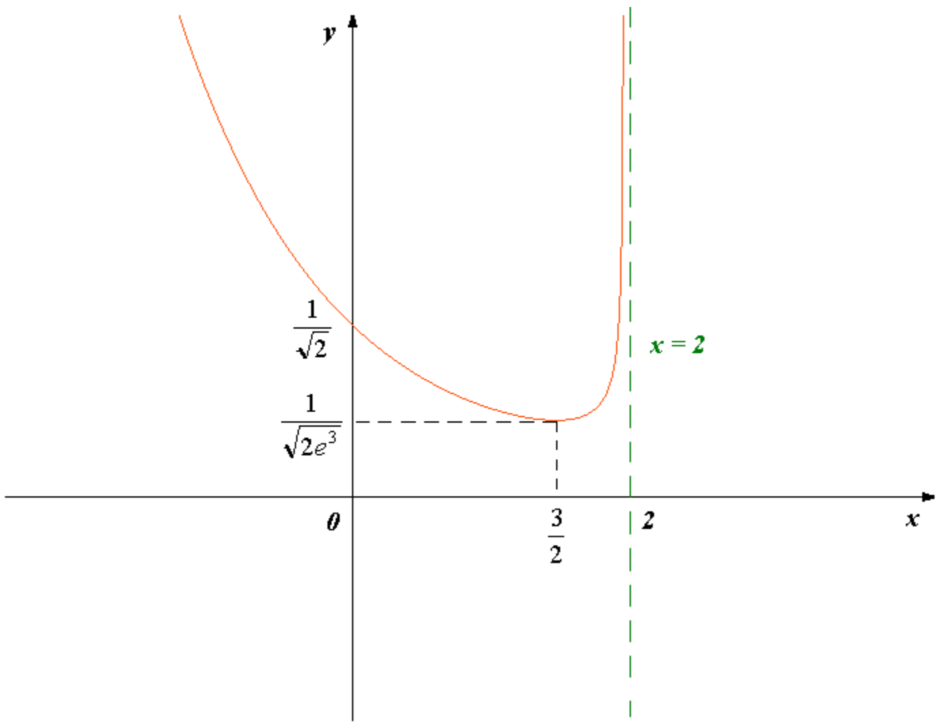
6. Derivata 1^ :

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot \sqrt{2-x} - e^{-x} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2} = \frac{-2e^{-x} \cdot (2-x) + e^{-x}}{\sqrt{(2-x)^3}} = \frac{e^{-x} \cdot (2x-3)}{\sqrt{(2-x)^3}}$$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{3}{2}$$



Per $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e^3}}$

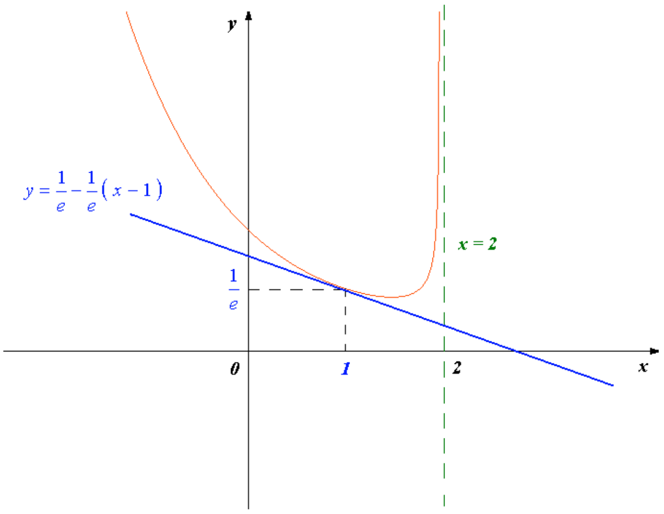


Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva grafico della funzione f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Ricordando che l'equazione della retta tangente ad una funzione in un punto $P(\ x_0\ ,\ f(x_0)\ )$ è :

$y = f(x_0) + f'(x_0)(\ x - x_0\ )$ **vedi lez. 8 (studio funzione)**

si ha : $f(1) = \frac{1}{e}$, $f'(1) = -\frac{1}{e}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{e} - \frac{1}{e}(\ x - 1\ )$.



y
$y = \frac{1}{e} - \frac{1}{e}(x-1)$
$x = 2$
$\frac{1}{e}$
0
1
2
x

Determinare il numero degli zeri della derivata prima della funzione

$$f(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$$

Svolgimento :

Posta $F(x)=f'(x)$ **studieremo la seguente funzione , determinandone il numero gli zeri :**

$$F(x) \quad = \quad 4x^3-15x^2+10x+5$$

1. **Dominio :** $\boxed{\forall x \in \Re}$

2. **Intersezione assi :**

$$\begin{cases} F(x)=5 \\ x=0 \end{cases}$$

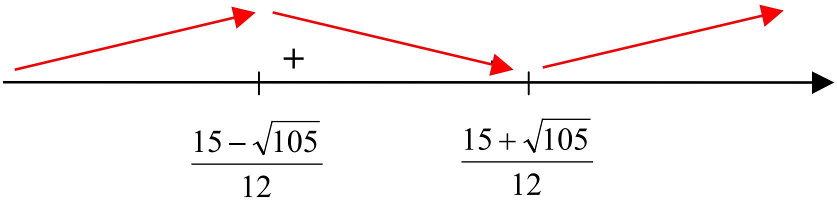
3. **Limiti :**

$$\lim_{x \to -\infty} \quad 4x^3-15x^2+10x+5 \quad = \quad -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} \quad 4x^3-15x^2+10x+5 \quad = \quad +\infty$$

4. **Derivata 1^ :**

$$F'(x) \quad = \quad 12x^2-30x+10$$

$$F'(x) > 0 \qquad 6x^2 - 15x + 5 > 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{15-\sqrt{105}}{12} \;,\; x > \frac{15+\sqrt{105}}{12}$$



$$F\left(\frac{15-\sqrt{105}}{12}\right) = 6{,}856 \;\Rightarrow\; P(\,0{,}396\,,\,6{,}856\,) \quad \max.\, relativo$$

$$F\left(\frac{15+\sqrt{105}}{12}\right) = -3{,}106 \;\Rightarrow\; P(\,2{,}103\,,\,-3{,}106\,) \quad \min.\, relativo$$

Il grafico relativo della $F(x)$: