Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right) \cdot \sqrt[3]{\cos(x)}$$
$$f(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{x^2+1}{(3x+1)^2}\right)\right)$$

ESERCIZIO – Effettuare uno studio qualitativo e tracciare approssimativamente il grafico della seguente funzione. Non è richiesto, in questo caso, lo studio della concavità.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x-6}}$$

SOLUZIONE

Il campo di esistenza è dato dagli x tali che

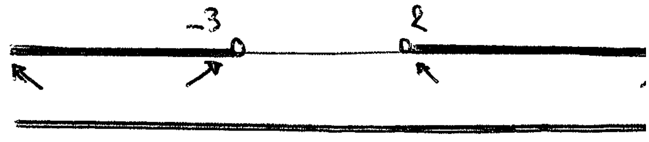
$$x^2+x-6>0$$

$$x^2+x-6=0 \qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}= \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$$D = (-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$$

D:

f(x) > 0



$f(x)>0$ sempre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{x^2+x-6}_{+\infty}}}_{+\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x-6}} = ?$$

il problema è capire prima di tutto a cosa tende x^2+x-6, dato che vi è una forma indeterminata $\infty-\infty$.

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{\underbrace{x^2}_{+\infty}\Big(\underbrace{1}_{1}+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\tfrac{6}{x^2}}_{0}\Big)}} = 0$$

Quindi la retta $y=0$ è asintoto orizzontale.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{0}} = +\infty$$

perché sia numeratore che denominatore sono positivi

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{1}{\sqrt{x^2+x-6}} = +\infty$$

per lo stesso motivo

Quindi le rette $x = -3$ e $x = 2$ sono asintoti verticali.

Vediamo la crescenza e decrescenza della funzione.
Calcolo la derivata:

$$f(x) = (x^2 + x - 6)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + x - 6)^{-\frac{1}{2}-1}(2x+1) = -\frac{1}{2}(x^2+x-6)^{-\frac{3}{2}}(2x+1)$$

$$= -\frac{2x+1}{2\sqrt{(x^2+x-6)^3}}$$

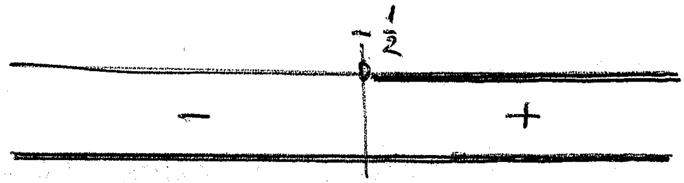
$$f'(x) > 0 \iff -\frac{2x+1}{2\sqrt{(x^2+x-6)^3}} > 0 \iff$$

$$\iff \frac{2x+1}{2\sqrt{(x^2+x-6)^3}} < 0$$

È una disequazione fatta.
Studiamo il segno di numeratore e denominatore.

$2x+1 > 0$

$2\sqrt{(x^2+x-6)^3} > 0$



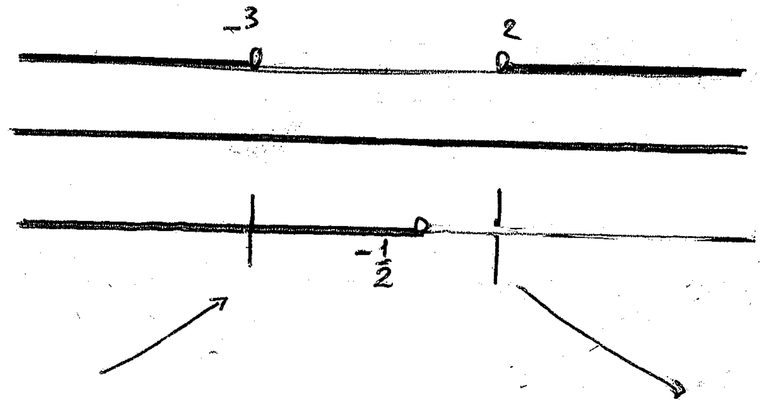
è sempre verificata

Quindi:

D:

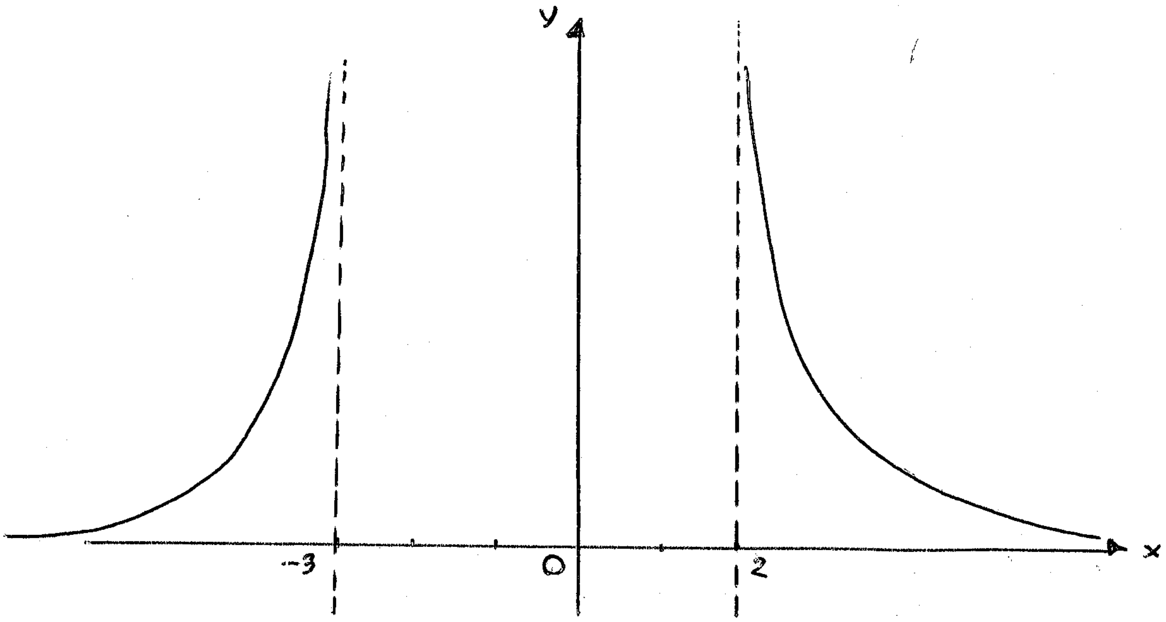
$f(x) > 0$:

$f'(x) > 0$:



Il punto $x = -\frac{1}{2}$
chiaramente non è un punto di massimo
perché non appartiene al dominio.
Possiamo solo dire (e non è poco) che f è crescente in $(-\infty, -3)$ e decrescente in $(2, +\infty)$.

Possiamo già tentare di abbozzare il grafico.



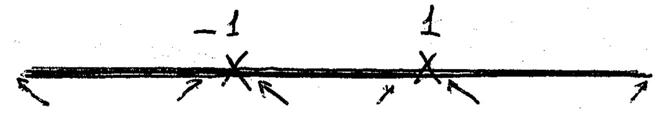
ESERCIZIO – Effettuare uno studio qualitativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.

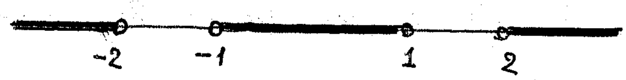
SOLUZIONE

Dominio: devo imporre $x^2-1 \neq 0$, cioè $x \neq 1, -1$

D: 

Poi studiamo

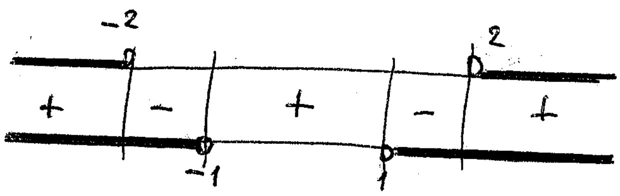
$f(x) > 0$:

$f(x)>0$: 

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} > 0$$

$x^2-4>0$

$x^2-1>0$



Ora cerchiamo eventuali asintoti orizzontali e verticali.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-4/x^2}{1-1/x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-4/x^2\right)}{x^2\left(1-1/x^2\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Quindi la retta $y=1$ è un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x\to1^+} \frac{\overbrace{x^2-4}^{-3}}{\underbrace{x^2-1}_{0^+}} = -\infty$$

la retta $x=1$ è dunque un asintoto verticale.

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2-4}{x^2-1} = +\infty$$

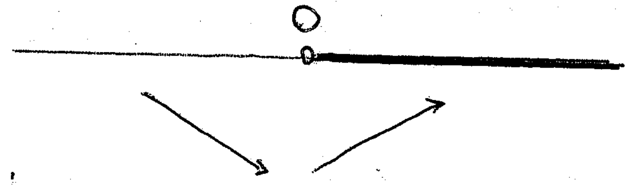
$$\lim_{x\to-1^-} \frac{\overbrace{x^2-4}^{-3}}{\underbrace{x^2-1}_{0^+}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-4}{x^2-1} = -\infty$$

quindi anche la retta $x=-1$ è asintoto verticale

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

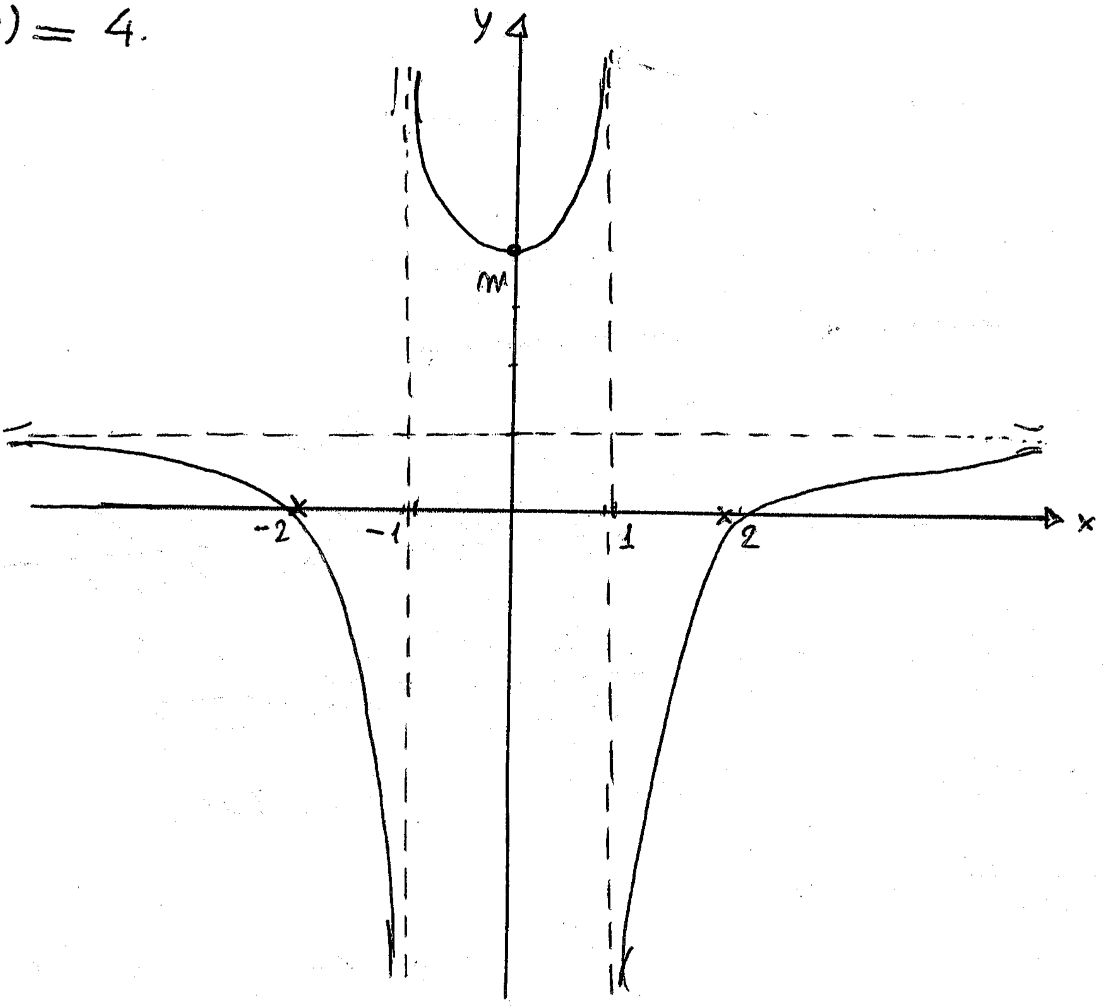
Quindi

$f'(x) > 0 \iff x > 0$



Quindi f è una funzione decrescente in $(-\infty, 0) \cap D$ e crescente in $(0, +\infty) \cap D$.

Il punto 0 è un punto di minimo. In tale punto la funzione vale $f(0) = 4$.



Può anche essere utile trovare qualche punto, per esempio le intersezioni con gli assi. Per $x=0$ abbiamo visto che $y=4$.

Per $y=0$ si ottiene $\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ cioè $x=2$ o $x=-2$

ESERCIZIO $\quad y = \dfrac{-4x}{e^{x-1}}$

dominio: $D = \mathbb{R}$

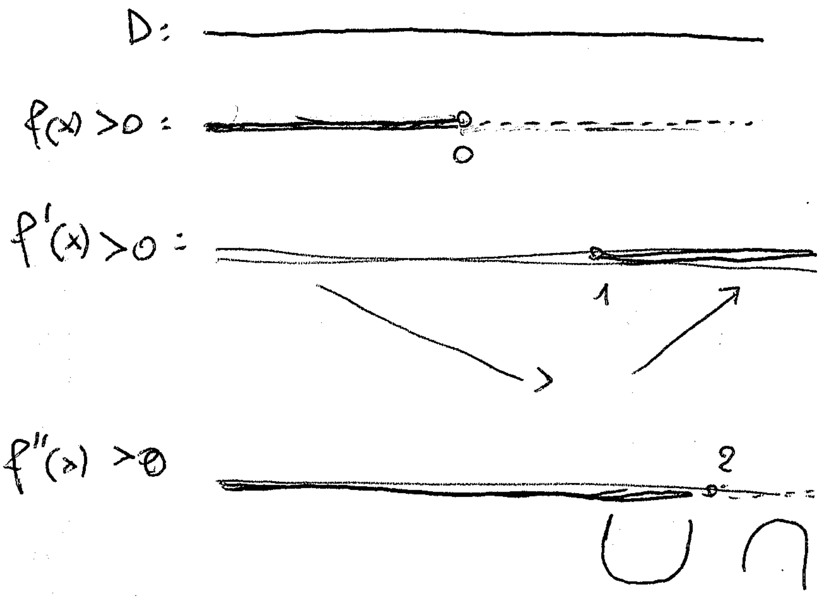
$f(x) > 0 \iff -4x > 0 \iff x < 0$

$\begin{cases} x=0 \\ y = \frac{-4 \cdot 0}{e^{-1}} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ -4x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{e^{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=}$$

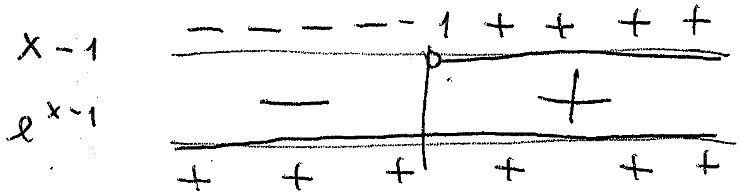
$$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{e^{x-1}} = 0 \quad \text{A.O.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^{\nearrow +\infty}}{\underset{\downarrow 0}{e^{x-1}}} = +\infty$$



$$y' = \frac{-4e^{x-1} - e^{x-1}(-4x)}{e^{2(x-1)}} = \frac{-4e^{x-1} + 4xe^{x-1}}{e^{2(x-1)}} = \frac{4e^{x-1}(x-1)}{e^{2(x-1)}} = \frac{4(x-1)}{e^{x-1}}$$

$$y' > 0 \iff \frac{x-1}{e^{x-1}} > 0$$



decrescente in $(-\infty, 0)$, crescente in $(1, +\infty)$. $x = 1$ punto di minimo.

$$y_m = f(1) = \frac{-4}{e^{1-1}} = -4 \Rightarrow m(1, -4)$$

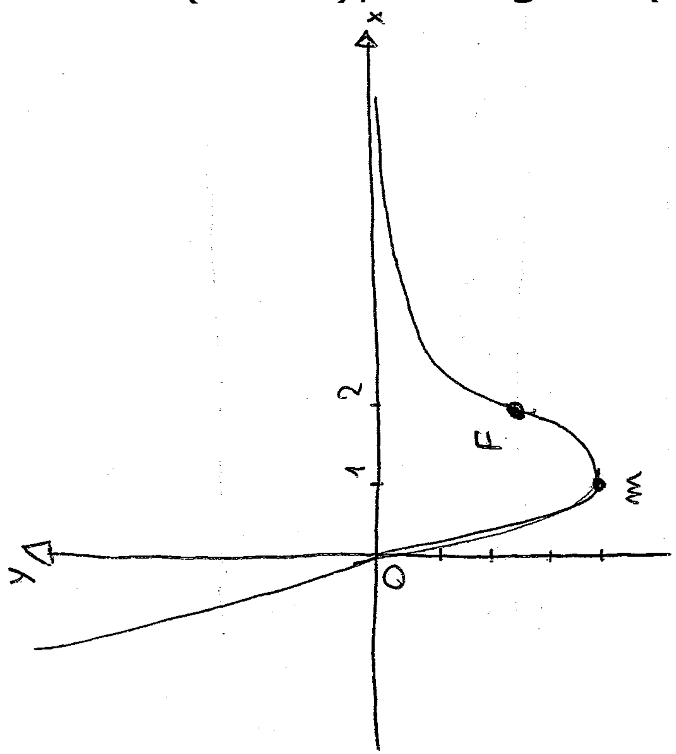
$$f''(x) = 4\frac{e^{x-1} - e^{x-1}(x-1)}{e^{2(x-1)}} = 4\frac{e^{x-1}(2-x)}{e^{2(x-1)}} = \frac{4(2-x)}{e^{x-1}}$$

$f'' > 0 \iff 2 - x > 0 \iff x < 2$. Concavità verso l'alto in $(-\infty, 2)$, verso il basso in $(2, +\infty)$.

In $x = 2$ c'è un flesso, le cui coordinate sono $(2, f(2)) = \left(2, \frac{-8}{e}\right)$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \quad -2{,}95$

In letteratura ci sono almeno 4 significati diversi associati al termine “varietà cosimplettica”.

1. Sinonimo di semi-Kähler
2. G_2 - cosimplettica
3. P. Libermann (1958)
4. D. Blair (1967), K. Ogiue (1968), M. Okumura (1965)

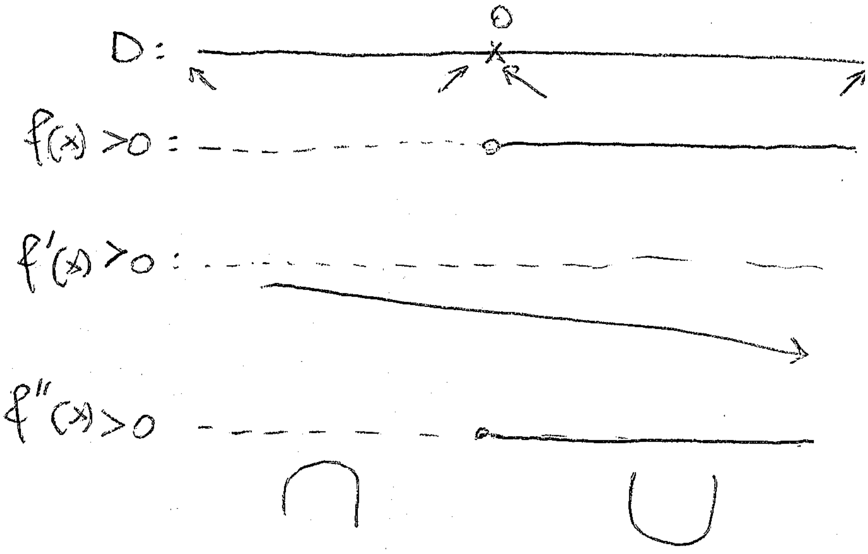


ESERCIZIO $\quad y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

Dominio: $e^x - 1 \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{e^x}{e^x - 1} \end{cases} \quad 0 \notin D$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{e^x}{e^x - 1} \end{cases} \quad \emptyset$



$f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^x - 1} > 0$

		0	
e^x	$+ + + +$		$+ + +$
$e^x - 1$	$- - -$	0	$+ + +$
	$-$		$+$

$e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x \to 0}{\underset{\downarrow 0}{e^x} - 1} = 0$$

Le rette $y = 1$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x \to 1}{\underset{\downarrow 1}{e^x} - 1} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale

$$y' = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$ sempre negativa

Funzione sempre decrescente

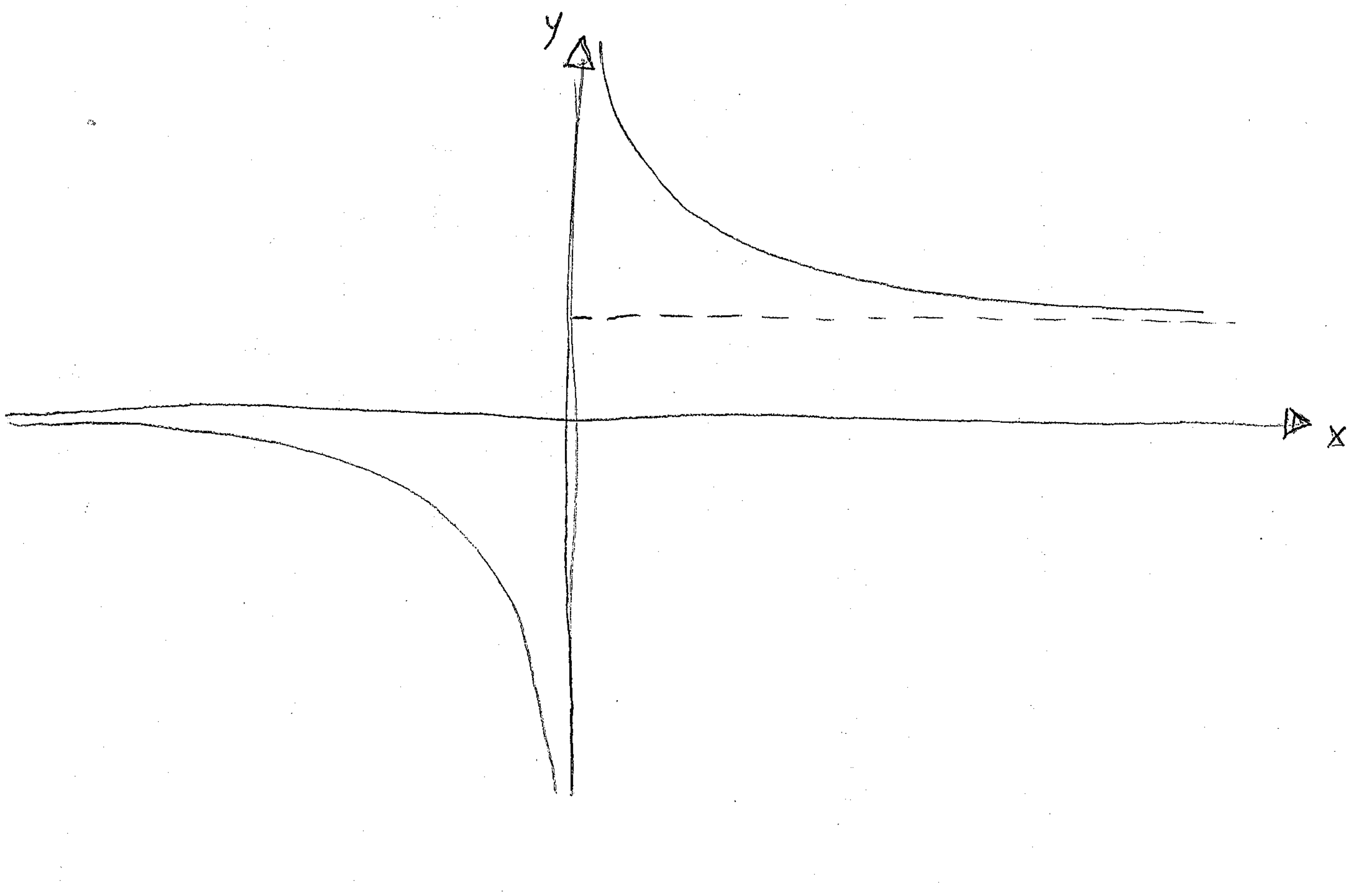
$$y'' = \frac{-e^x(e^x-1)^2 + e^x\,2(e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4} = \frac{e^x(e^x-1)(-e^x+1+2e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{e^x(e^x+1)(e^x-1)}{(e^x-1)^4} = \frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^x-1)^4}$$

$$y'' > 0 \iff e^{2x}-1 > 0 \iff e^{2x} > e^0 \iff x > 0$$

$y'' > 0$ ---------- 0 ——————

$\cap$ $\cup$



<u>ESERCIZIO</u> — In un laboratorio vi è una colonia di batteri sottoposta ad un antibiotico in via di sperimentazione. Dai dati sperimentali si evince che il numero y (espresso in migliaia) di batteri presenti è dato da

$$y = 20 - xe^{-x^2}$$

dove x (espresso in minuti) è il tempo trascorso dall'inizio dell'esperimento (all'istante $x=0$ ci sono dunque 20 mila batteri).

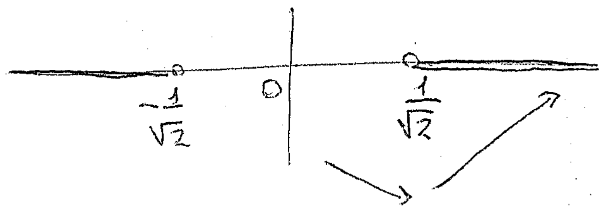
a) Dire in quale minuto si ha il minimo numero di batteri

b) Esprimere tale numero minimo di batteri in notazione scientifica.

SOLUZIONE

$$f'(x) = -1 \cdot e^{-x^2} - x\left(e^{-x^2}(-2x)\right) = e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2} = (2x^2-1)e^{-x^2}$$

$$f'(x) > 0 \iff 2x^2 - 1 > 0$$



$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71 \text{ min.}$$

$$y_{min} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 20 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = 20 - \frac{1}{\sqrt{2e}} = 19{,}8 \cdot 10^3 =$$
$$= 1{,}98 \cdot 10^4.$$