Esercizio

Si ha motivo di ritenere che il farmaco in sperimentazione *Cervellex* possa migliorare gli esiti degli esami di Matematica degli studenti.

In 4 pazienti volontari viene iniettata é una quantità X di *Cervellex* (espresso in mg) e viene registrato l'esito Y della prima sessione di esami.

I risultati sono illustrati nella seguente tabella:

Dose farmaco (X)	10	13	14	19
Voto (Y)	18	23	21	26

1) Calcola la retta di regressione tra le due variabili ed il coefficiente di correlazione.

2) Calcola approssimativamente quale possibile voto è ragionevole prevedere con una dose di 11 mg di *Cervellex*.

1) Equazione retta di regressione:

$$y = mx + q$$

dove

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu_X)^2}$$

e q si trova imponendo che la retta passa per il baricentro (μ_X, μ_Y).

1) Equazione retta di regressione:

$$y = mx + q$$

dove

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)^2}$$

e q si trova imponendo che la retta passa per il baricentro (μ_X, μ_Y).

Si ha che:

$$\mu_X = \frac{10+13+14+19}{4} = \frac{56}{4} = 14$$

$$\mu_Y = \frac{18+23+21+26}{4} = \frac{88}{4} = 22$$

x_i	y_i	$x_i - \mu_X$	$y_i - \mu_Y$	$(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$	$(x_i - \mu_X)^2$
10	18				
13	23				
14	21				
19	26				

x_i	y_i	$x_i - \mu_X$	$y_i - \mu_Y$	$(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$	$(x_i - \mu_X)^2$
10	18	-4			
13	23	-1			
14	21	0			
19	26	5			

x_i	y_i	$x_i - \mu_X$	$y_i - \mu_Y$	$(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$	$(x_i - \mu_X)^2$
10	18	-4	-4		
13	23	-1	1		
14	21	0	-1		
19	26	5	4		

x_i	y_i	$x_i - \mu_X$	$y_i - \mu_Y$	$(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$	$(x_i - \mu_X)^2$
10	18	-4	-4	16	
13	23	-1	1	-1	
14	21	0	-1	0	
19	26	5	4	20	

x_i	y_i	$x_i - \mu_X$	$y_i - \mu_Y$	$(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$	$(x_i - \mu_X)^2$
10	18	-4	-4	16	16
13	23	-1	1	-1	1
14	21	0	-1	0	0
19	26	5	4	20	25

x_i	y_i	$x_i - \mu_X$	$y_i - \mu_Y$	$(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$	$(x_i - \mu_X)^2$
10	18	-4	-4	16	16
13	23	-1	1	-1	1
14	21	0	-1	0	0
19	26	5	4	20	25
			$\sum$	**35**	**42**

x_i	y_i	$x_i - \mu_X$	$y_i - \mu_Y$	$(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$	$(x_i - \mu_X)^2$
10	18	-4	-4	16	16
13	23	-1	1	-1	1
14	21	0	-1	0	0
19	26	5	4	20	25
			$\sum$	**35**	**42**

Pertanto

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)^2} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}$$

Trovo *q*:

$$\mu_Y = m\mu_X + q \quad \Rightarrow \quad 22 = \frac{5}{6} \cdot 14 + q$$

da cui

$$q = 22 - \frac{35}{3} = \frac{31}{3}$$

L'equazione della retta di regressione è:

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{31}{3}$$

Il coefficiente di correlazione è dato da

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^{4} (y_i - \mu_Y)^2}}$$

Il coefficiente di correlazione è dato da

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^{4}(y_i - \mu_Y)^2}}$$

Sappiamo che

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) = 35$$ (già fatto)

Il coefficiente di correlazione è dato da

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^{4}(y_i - \mu_Y)^2}}$$

Sappiamo che

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) = 35$$ (già fatto)

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)^2 = 42$$ (già fatto)

Il coefficiente di correlazione è dato da

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^{4}(y_i - \mu_Y)^2}}$$

Sappiamo che

$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) = 35$ (già fatto)

$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)^2 = 42$ (già fatto)

$\sum_{i=1}^{4}(y_i - \mu_Y)^2 =$ … da fare

y_i	$y_i - \mu_Y$	$(y_i - \mu_Y)^2$
18	-4	
23	1	
21	-1	
26	4	

y_i	$y_i - \mu_Y$	$(y_i - \mu_Y)^2$
18	-4	16
23	1	1
21	-1	1
26	4	16

y_i	$y_i - \mu_Y$	$(y_i - \mu_Y)^2$
18	-4	16
23	1	1
21	-1	1
26	4	16
	$\sum$	**34**

y_i	$y_i - \mu_Y$	$(y_i - \mu_Y)^2$
18	-4	16
23	1	1
21	-1	1
26	4	16
	$\sum$	**34**

Quindi $\sum_{i=1}^{4}(y_i - \mu_Y)^2 = 34$

e

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^{4}(y_i - \mu_Y)^2}} = \frac{35}{\sqrt{42 \cdot 34}} = \frac{35}{\sqrt{1428}} = \frac{35}{37{,}79} = 0{,}93$$

2) Il possibile voto che è ragionevole prevedere con una dose di 11 mg è dato dal valore y che la retta di regressione assume in corrispondenza dell'ascissa $x = 11$

$$y = \frac{5}{6} \cdot 11 + \frac{31}{3} = \frac{55}{6} + \frac{31}{3} = \frac{55 + 62}{6} = \frac{117}{6} = 19{,}5$$