

10.2. Una mole di gas ideale biatomico è soggetta ad una espansione reversibile dallo stato termodinamico A ($V_A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $p_A = 20 \text{ bar}$), allo stato B ($V_B = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$), caratterizzata dalla relazione $pV^3 = k$, con k costante.

Si determini:

- a) la variazione di energia interna del gas,
- b) la quantità di calore scambiata,
- c) la variazione di entropia del gas.

a) Ricaviamo le temperature dei due stati:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{R} = 481.1 \text{ K} \quad , \quad T_B = \frac{p_B V_B}{R} = 120.3 \text{ K} \quad ,$$

dove la pressione p_B viene calcolata utilizzando la relazione $p_A V_A^3 = p_B V_B^3$, $p_B = 2.5 \text{ bar}$. La variazione di energia interna è quindi:

$$\Delta U = c_V (T_B - T_A) = -7499.2 \text{ J}$$

$$\text{con } c_V = \frac{5}{2} R \quad .$$

b) Il lavoro durante l'espansione reversibile è dato da:

$$W = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \int_{V_A}^{V_B} V_A^3 p_A \frac{dV}{V^3} = 2V_A^3 p_A \left(\frac{1}{V_A^2} - \frac{1}{V_B^2} \right) = 6000 \text{ J} ,$$

avendo posto $p = \frac{k}{V^3} = \frac{p_A V_A^3}{V^3}$.

Il calore scambiato, utilizzando il primo principio della termodinamica, risulta:

$$Q = \Delta U + W = -1499.2 \text{ J} ;$$

si tratta di calore ceduto dal gas nell'espansione.

c) La variazione d'entropia viene calcolata utilizzando la relazione generale:

$$\Delta S = c_V \ln \frac{p_B V_B^\gamma}{p_A V_A^\gamma} = -23 \text{ J/K} .$$

10.3. *Un gas ideale monoatomico esegue una trasformazione da uno stato A ($V_A = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $p_A = 1 \text{ bar}$, $T_A = 200 \text{ K}$) ad uno B. La variazione di energia interna del gas è $\Delta U = 3600 \text{ J}$ e la variazione di entropia $\Delta S = 18.7 \text{ J/K}$. Determinare i parametri termodinamici dello stato B.*

Dall'equazione di stato in A ricaviamo il numero di moli del gas,

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 1.2 ,$$

e tramite la variazione di energia interna il valore di T_B :

$$\Delta U = n c_V (T_B - T_A) \Rightarrow T_B = T_A + \frac{\Delta U}{n c_V} = 440.5 \text{ K} .$$

Dalla relazione generale per il calcolo della variazione dell'entropia di un gas ideale:

$$\Delta S = n c_V \ln \frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} , \quad n R \ln \frac{V_B}{V_A} = \Delta S - n c_V \ln \frac{T_B}{T_A} ,$$

$$\ln \frac{V_B}{V_A} = 0.69 , \quad V_B = 39.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 , \quad p_B = \frac{n R T_B}{V_B} = 1.1 \text{ bar} .$$

10.4. *Una mole di gas ideale è contenuta in un recipiente chiuso da un pistone mobile, scorrevole senza attrito. Il recipiente è termicamente isolato dall'esterno ed ha una capacità termica complessiva, indipendente dalla temperatura, $k_0 = 75 \text{ J/K}$. Il calore specifico del gas, a pressione costante, vale $c_p = 30 \text{ J/mole K}$. Nello stato termodinamico A il gas è in equilibrio alla tem-*

peratura $T_A = 300\text{K}$ ed alla pressione $p_A = 25\text{bar}$. Successivamente il gas compie una espansione reversibile fino ad una pressione finale $p_B = 1\text{bar}$. Si determini la temperatura finale T_B raggiunta dal sistema e il lavoro fatto dal gas.

Durante l'espansione il gas tende a raffreddarsi ed assorbirà una certa quantità di calore dalle pareti del recipiente, in equilibrio termico con il gas. Utilizzando il primo principio della termodinamica, per una trasformazione infinitesima del gas:

$$-dW = dU - dQ, \quad -pdV = c_V dT + k_0 dT.$$

Infatti se $dQ_1 = k_0 dT$ è la quantità di calore scambiata dal recipiente, $dQ = -dQ_1$ è quella scambiata dal gas.

Introducendo per la pressione l'espressione data dall'equazione di stato si ha:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{k_0 + c_V}{R} \frac{dT}{T},$$

ed integrando tra lo stato A e quello B

$$\int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = -\frac{k_0 + c_V}{R} \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T},$$

$$\ln \frac{V_B}{V_A} = -\frac{k_0 + c_V}{R} \ln \frac{T_B}{T_A}, \quad \frac{V_B}{V_A} = \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{-\frac{k_0 + c_V}{R}}.$$

Poiché si ha, dall'equazione di stato,

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{p_A}{p_B} \frac{T_B}{T_A},$$

si ottiene

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B} \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{-\frac{k_0 + c_V}{R}} = \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{-\frac{k_0 + c_V}{R} - 1} = \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{-\frac{k_0 + c_p}{R}},$$

avendo utilizzato la relazione di Mayer $c_p = c_V + R$. Pertanto

$$T_B = T_A \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{\frac{R}{k_0 + c_p}} = 232.7\text{K}.$$

Il calore assorbito dal gas è

$$Q = -k_0(T_B - T_A) = 5047.5\text{J}$$

e la variazione di energia interna

$$\Delta U = c_V(T_B - T_A) = -1460.4\text{J},$$

con $c_V = 21.7\text{J/mole K}$. Il lavoro, infine, è:

$$W = Q - \Delta U = 6507.9\text{J}.$$

10.5. Un compressore, lavorando ciclicamente e reversibilmente, fornisce $m = 50\text{kg}$

di aria compressa ogni ora, aspirandola da un ambiente in cui si ha una pressione $p_0 = 1\text{bar}$ ed una temperatura $T_0 = 280\text{K}$. Si calcoli la potenza del compressore:

- a) nel caso di una compressione adiabatica, conoscendo la pressione all'uscita del compressore $p_1 = 10\text{bar}$,
 b) nel caso di una compressione per la quale la temperatura dell'aria compressa è $T_2 = 460\text{K}$ e la perdita di calore nel compressore è $Q_2 = 210\text{J/s}$. Si consideri l'aria un gas ideale con $c_V = 710\text{J/kg K}$, $\gamma = 1.4$.

a) Consideriamo una massa infinitesima d'aria dm che viene compressa nell'intervallo infinitesimo di tempo dt . La quantità di massa compressa, nell'unità di tempo, sarà data da:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m}{1h} = 1.4 \cdot 10^{-2} \text{kg/s}.$$

La massa dm subisce una compressione adiabatica, tramite il lavoro

$$dW_1 = -dU = -dm c_V (T_1 - T_0),$$

T_1 è la temperatura raggiunta dall'aria dopo la compressione, ricavabile tramite l'equazione delle adiabatichette:

$$T_0 p_0^{(1-\gamma)/\gamma} = T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma}, \quad T_1 = 540.6\text{K}.$$

La potenza spesa dal compressore è data da:

$$P_1 = -\frac{dW_1}{dt} = \frac{dm}{dt} c_V (T_1 - T_0) = 2590\text{W}.$$

Il segno negativo compare perché il lavoro fatto dal compressore è opposto a quello subito dal gas.

b) La trasformazione non è adiabatica. La quantità di massa dm , compressa in un intervallo di tempo dt , cede all'esterno la quantità di calore

$$dQ_2 = -Q_2 dt,$$

subendo un lavoro

$$dW_2 = dQ_2 - dU_2,$$

con $dU_2 = -dm c_V (T_2 - T_0)$.

Il compressore compie un lavoro pari a $-dW_2$ e pertanto la potenza del compressore è

$$P_2 = -\frac{dW_2}{dt} = \frac{dm}{dt} c_V (T_2 - T_0) - \frac{dQ_2}{dt} = 2000\text{W}.$$

10.6. Una bombola di volume V_0 , inizialmente chiusa, contiene $n = 2$ moli di un gas ideale a temperatura ambiente $T_0 = 300\text{K}$ ed alla pressione $p_0 = 1.5 \cdot 10^6 \text{Pa}$. Essa è collegata tramite un sottile capillare ad un recipiente a volume variabile e pressione costante (gasometro). Si apre la valvola di chiusura e il gas fluisce nel gasometro. molto lentamente, in modo che la

temperatura del gas è costantemente uguale a quella dell'ambiente. La pressione che agisce sul gasometro è $p_1 = 10^5$ Pa. Calcolare:

- a) il lavoro fatto dal gas ed il calore ceduto dall'ambiente, per la trasformazione descritta;*
- b) il lavoro che si otterrebbe se il gas venisse trasferito in maniera perfettamente reversibile;*
- c) la variazione di entropia del gas e quella dell'ambiente nei due casi.*

a) Il processo di espansione del gas è costituito da una isoterma irreversibile (il sistema non è in equilibrio meccanico), da un volume iniziale $V_{in} = V_0$ ad uno finale $V_{fin} = (V_0 + V_G)$, dove V_G è il volume del gasometro. Dall'equazione di stato:

$$V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = 3.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad V_G = \frac{nRT_0}{p_1} - V_0 = 46.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Il gas si espande contro la pressione esterna costante p_1 , compiendo un lavoro:

$$W_1 = p_1 [(V_G + V_0) - V_0] = p_1 V_G = 4660 \text{ J}.$$

Il calore ceduto dall'ambiente sarà, in modulo, uguale al lavoro fatto dal gas ($\Delta U = 0$, isoterma di un gas ideale):

$$|Q_1| = W_1 = 4660 \text{ J}.$$

b) Il lavoro si può ora calcolare utilizzando l'espressione valida per una trasformazione isoterma reversibile:

$$W_2 = nRT_0 \ln \frac{p_0}{p_1} = 13509 \text{ J}.$$

c) La variazione di entropia del gas è la medesima nelle due trasformazioni, poiché gli stati iniziali e quelli finali sono gli stessi nei due casi. Utilizzando la relazione valida per una isoterma:

$$\Delta S_{\text{gas}} = nR \ln \frac{p_0}{p_1} = 45 \text{ J/K}.$$

La variazione di entropia dell'ambiente differirà nei due casi, dato che il calore ceduto al gas è diverso nelle due trasformazioni. Nella trasformazione isoterma irreversibile:

$$\Delta S_a = -\frac{|Q_1|}{T_0} = -15.5 \text{ J/K},$$

nella trasformazione reversibile:

$$\Delta S_a = -\Delta S_{\text{gas}} = -45 \text{ J/K}.$$

- 10.7. Un recipiente rigido A di volume $V_A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, contenente 0.4 moli di un gas ideale monoatomico alla temperatura $T_A = 300 \text{ K}$, è chiuso da un rubinetto che lo collega ad un palloncino vuoto, di tela inestensibile e a perfetta tenuta d'aria.

Si apre il rubinetto ed il palloncino si gonfia occupando il volume $V_B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Supposto che il processo avvenga senza scambi di calore con l'ambiente, che si trova a pressione $p_0 = 1 \text{ bar}$, si determini ad equilibrio raggiunto:

- a) la temperatura finale del gas, T_F
- b) la pressione finale del gas, p_F
- c) la variazione di entropia dell'universo, ΔS_u .

a) Il processo è costituito da una trasformazione adiabatica irreversibile (durante la trasformazione il sistema non è in equilibrio meccanico) ed il gas compie un lavoro contro la pressione esterna costante p_0 .

Il lavoro è dato da:

$$W = p_0[(V_A + V_B) - V_B] = p_0 V_B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Poiché $W = -\Delta U = -nc_V(T_F - T_A)$, $T_F = T_A - \frac{W}{nc_V} = 260 \text{ K}$.

b) La pressione finale del gas è ricavabile dall'equazione di stato dei gas:

$$p_F = \frac{nRT_F}{V_A + V_B} = 1.23 \text{ bar}.$$

c) La variazione d'entropia dell'universo è pari a quella del gas (trasformazione adiabatica). Applicando la relazione generale per la variazione d'entropia di un gas ideale si ha:

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{gas}} = nc_V \ln \frac{T_F (V_A + V_B)^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} = 0.4 \text{ J/K}$$

con $\gamma = \frac{5}{3}$.