ESERCIZI "TIPO" SUI LIMITI

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 5x^3}$

Metto in evidenza i termini che tendono a ∞ più rapidamente (cioè quelli con grado più alto):

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5\left(2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x} + 5\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5}{5x^3} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{5}x^2 = +\infty$$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 + x^2}{x+1} \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3\left(4 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} =$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3}{x} = \lim_{x \to -\infty} 4x^2 = +\infty$$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3 \cdot 10^{4x} + 10^{3x} + 4}{3 \cdot 10^{x} - 2 \cdot 10^{4x}}$. Vi sono due forme indeterminate $\infty - \infty$ e, poi, ∞/∞.

Mettiamo in evidenza, a numeratore e denominatore, i termini che tendono più rapidamente a ∞.

- Notare, innanzitutto, che $10^{4x} \to +\infty$ più velocemente di 10^{3x}, perché $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10^{4x}}{10^{3x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$.

Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3\cdot 10^{4x}+10^{3x}+4}{3\cdot 10^{x}-2\cdot 10^{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10^{4x}\left(-3+\underbrace{\frac{1}{10^{x}}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{4}{10^{4x}}}_{\to 0}\right)}{10^{4x}\left(\underbrace{\frac{3}{10^{3x}}}_{\to 0}-2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3\cdot 10^{4x}}{-2\cdot 10^{4x}} = \frac{3}{2}$$

4) $$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^{10}}_{\downarrow\, +\infty}\cdot \underbrace{e^{x}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{=}_{\substack{\text{FORMA INDETERMINATA}\\ 0\cdot\infty}} 0$$

perché $e^{x}\to 0$ più velocemente di quanto $x^{10}\to+\infty$ (per $x\to-\infty$)

Equivalentemente il limite si poteva trasformare in:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{10}}{e^{-x}}$$ e quindi in una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Il risultato segue dal fatto che $e^{-x}\to+\infty$ (per $x\to-\infty$) con un ordine di infinito più grande rispetto a x^{10}.

[quando faremo il Teorema de l'Hôpital potremo risolverlo anche con questo strumento].