Energia meccanica

- Lavoro
- Energia meccanica
- Concetto di campo in Fisica

Antonio Pierro **@antonio_pierro_ (https://twitter.com/antonio_pierro_)**

Per consigli, suggerimenti, eventuali errori o altro potete scrivere una email a antonio.pierro[at]gmail.com

Lavoro (1/2)

- Dato un punto materiale che si muove lungo una traiettoria curvilinea sotto l'azione di una forza $\vec{F}$,
  si definisce *lavoro della forza* $\vec{F}$, compiuto durante lo spostamento del punto dalla posizione A a B, la quantità scalare:
  $$W = \int_A^B \vec{F} * d\vec{s} = \int_A^B F * \cos\theta * ds = \int_A^B F_{tangente} * s$$
- Si definisce lavoro infinitesimo la quantità:
  $$dW = \vec{F} * d\vec{s} = F * \cos\theta * ds = F_{tangente} * s$$
- Il lavoro si misura in Newton * metro che equivale ad un Joule.

Lavoro (2/2)

- Se sul punto P agiscono **n** forze, per ciascuna si può calcolare il corrispondente lavoro e risulta:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \int_A^B \vec{F}_1 * d\vec{s} + .. + \int_A^B \vec{F}_n * d\vec{s} = W_1 + .. + W_n$$

Potenza

- Si definisce *potenza istantanea* il lavoro per unità di tempo:
$$P = \frac{dW}{dt}$$
- Si definisce *potenza media* il rapporto tra il lavoro totale e l'intervallo di tempo in cui il lavoro è stato svolto: $P = \frac{W}{\Delta t}$
- A parità di lavoro svolto, ha maggior potenza quella macchina che lo eroga in minor tempo.
- L'unità di misura della potenza è il Watt, simbolo W ($\frac{N*m}{s}$)

Energia cinetica

- Si chiama energia cinetica del punto materiale m la quantità:

$$K = \frac{1}{2} * m * v^2$$

- L'unità di misura dell'energia cientica, come di ogni altra forma di energia, è il Newton * metro ed è espressa dal simbolo J (Joule)
- Si dimostra che il lavoro fatto dalla forza è uguale alla variazione dell'energia cinetica:

$$W = \Delta K$$

Dimostrazione del teorema dell'energia cinetica

- Considero il lavoro associato ad uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ di una forza $\vec{F}$ tangente allo spostamento:

$$dW = F\,ds = m\,a\,ds = m\ \frac{dv}{dt}\ ds = m\,\frac{ds}{dt}\,dv = mvdv$$

- Integro lungo un percorso finito che va da un punto A ad un punto B

$$W = \int_A^B mv * dv = \frac{1}{2} * m * {v_B}^2 - \frac{1}{2} * m * {v_A}^2 = \Delta K$$

- Il simbolo Δ indica la differenza tra il valore finale e il valore iniziale.

Campo

- Un *campo* è un modello matematico che permette di associare ai punti di una certa regione di spazio una particolare proprietà.
- Un *campo scalare* è una funzione che associa uno scalare a ogni punto dello spazio.
- Un *campo vettoriale* è una funzione che associa un vettore a ogni punto dello spazio.
- Esempi di campi scalari sono: la distribuzione della temperatura nello spazio o quella della pressione atmosferica.
- Esempi di campi vettoriali sono: campo elettromagnetico e campo gravitazionale.

Circuitazione

- Detto $\vec{v}$ il vettore di un campo vettoriale, detto P un generico punto e detto $d\vec{s}$ lo spostamento elementare di P,
si chiama circuitazione di $\vec{v}$ l'integrale del prodotto scalare "$\vec{v} * d\vec{s}$" lungo una linea chiusa.
- Per questo tipo di integrale lungo una linea chiusa si usa il simbolo:
$$\oint_C$$
dove C rappresenta il percorso (linea chiusa).
- Il simbolo $\oint_C$ sta ad indicare l'integrale (somma di tutti i prodotti $\vec{v} * d\vec{s}$) esteso alla linea chiusa scelta C.

Campo conservativo

- Un campo vettoriale si dice conservativo se l'integrale del vettore $\vec{v}$ del campo lungo lo spostamento $d\vec{s}$ non dipende dal particolare cammino, ma dipende soltanto dalla posizione dei due punti A (posizione iniziale) e B (posizione finale).
- Poiché l'integrale dipende soltanto dalla posizione iniziale e da quella finale, l'integrale lungo una linea chiusa (circuitazione $\oint_C$) deve essere necessariamente nullo

$$\oint_C \vec{v} * d\vec{s} = 0$$

Circuitazione della forza peso

- Si dimostra che il lavoro della forza peso non dipende dal particolare spostamento ma soltanto dalla posizione iniziale e quella finale.
- Per dimostrarlo basta verificare che l'integrale della forza peso lungo un percorso chiuso sia nullo

$$\oint_C \vec{P} * d\vec{s} = 0$$

- Quindi il campo vettoriale associato alla forza peso è un campo conservativo. La forza peso viene detta forza conservativa.

Circuitazione della forza d'attrito

- Si dimostra che il lavoro della forza d'attrito dipende dal particolare spostamento dalla posizione iniziale e quella finale.
- Per dimostrarlo basta verificare che l'integrale della forza d'attrito lungo un percorso chiuso non sia nullo

$$\oint_C \vec{P} * d\vec{s} \neq 0$$

- Quindi la forza d'attrito non è una forza conservativa.

Potenziale scalare del campo vettoriale

- Dato un campo vettoriale $\vec{V}$ conservativo nello spazio τ allora esiste una funzione scalare φ definita nello stesso dominio tale che:

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\varphi$$

- La variazione del potenziale scalare nello spazio o gradiente definisce a sua volta una grandezza vettoriale che è il campo vettoriale.
- Le tre componenti di $\vec{V}$ sono date da:

$$V_x(x, y, z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z)$$

$$V_y(x, y, z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z)$$

$$V_z(x, y, z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z)$$

Potenziale scalare della forza peso

- Se calcoliamo il lavoro della forza peso per uno spostamento generico dalla posizione A alla posizione B (supponendo l'asse y parallelo e di verso opposto alla forza peso) otteniamo:

$$W = -(m * g * y_b - m * g * y_a)$$

- Se indiachiamo con $E_p = m * g * y$ una funzione della coordinata y del punto otteniamo:

$$W = -\Delta E_p$$

- La funzione $E_p = m * g * y$ viene detta energia potenziale della forza peso.

Potenziale scalare della forza elastica

- Se calcoliamo il lavoro della forza elastica per uno spostamento generico dalla posizione A alla posizione B (suponendo l'asse x parallelo alla forza elastica) otteniamo:

$$L = \int_A^B -kxdx = -k\int_A^B xdx = \frac{1}{2}k{x_a}^2 - \frac{1}{2}k{x_b}^2$$

- Ponendo $E_{potenziale\_elastico} = \frac{1}{2} * k * x^2$ funzione solo della posizione:

$$W = -\Delta E_{pe}$$

- La funzione

$$E_{potenzaiale\_elastico} = \frac{1}{2} * k * x^2$$

viene detta energia potenziale elastica.

Forze conservative (riepilogo)

- I tre esempi di calcolo di lavoro (forza peso, forza elastica e forza d'attrito) presentano una differenza sostanziale:
  - nel caso della forza peso e della forza elastica il lavoro dipende solo dalle coordinate spaziali A e B e non dal particolare percorso
  - nel caso della forza d'attrito il lavoro dipende dal particolare percorso
- Le forze del primo tipo vengono dette *forze conservative* e per tutte queste forze si definisce una funzione chiamata *energia potenziale* tale che:

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$$

Principio di conservazione dell'energia meccanica (PCME)

- Se agiscono solo forze conservative valgono le seguenti relazioni:

$$L = \Delta K = K_B - K_A$$
$$L = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

- Eguagliando le due relazioni si ha:

$$K_B - K_A = E_{p,A} - E_{p,B} \Longleftrightarrow E_m = K + E_p = costante$$

- La somma dell'energia cinetica e dell'energa potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto. Tale somma si chiama energia meccanica.

Quando non si conserva l'energia: sistemi dissipativi

- Il PCEM può essere un valido strumento per studiare, al contrario, la *non conservazione dell'energia meccanica*: è sensato pensare che, allorquando viene violata la conservazione, l'energia perduta è stata dissipata dalle forze di attrito.
- In ultima analisi, effettuando un bilancio energetico è possibile risalire all'entità delle forze non conservative che interessano il sistema: basterà vedere di quanto è variata l'energia meccanica del sistema tra la fase finale e quella iniziale.
- In altre parole:

$$L_{attriti} = \Delta E$$