ESEMPI (USO DELLA "REGOLA DI DE L'HOSPITAL PER LA RISOLUZIONE DELLE FORME INDETERMINATE)

Il teorema di de l'Hospital può essere usato per risolvere **solamente** le forme indeterminate $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$.

Tuttavia esso si può anche usare per risolvere altre forme indeterminate, a patto di ricondurre queste ultime a una $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

1. $\lim_{x \to +\infty} (\ln(x) - \ln(x^2+1))$

Si tratta di una forma ind. $\infty - \infty$, non possiamo dunque utilizzare direttamente de l'Hospital. Riconduciamola quindi a una forma $\frac{\infty}{\infty}$ nel modo seguente:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) - \ln(x^2+1) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x)\left(1 - \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}\right)$$

Risolviamo, separatamente, $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$ usando de l'Hospital, dato che è una forma $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x^2+1))'}{(\ln(x))'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1} 2x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 2.$$

Pertanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) \underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}}^{\nearrow 2}\right)}_{\downarrow -1} = -\infty.$$

2. $\lim_{x \to 1^+} \underset{\downarrow \atop 0}{(x-1)} \cdot \underset{\downarrow \atop -\infty}{\ln(x-1)}$

È una forma $0 \cdot \infty$, non possiamo dunque applicare direttamente il teorema di de l'Hospital.

Ma possiamo trasformare tale forma indeterminata in una forma $\frac{\infty}{\infty}$ nel modo seguente:

$$\lim_{x \to 1^+} (x-1) \cdot \ln(x-1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Ora possiamo usare la regola di de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x-1)'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x-1)'}{((x-1)^{-1})'} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1} \cdot 1}{-1(x-1)^{-1-1} \cdot 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} -(x-1) = 0.$$