

Técnicas de optimización de Árboles Binarios de Decisión para implementación de máquinas de estados

Trabajo fin de máster del
Máster en Investigación en Ingeniería del Software
de la Universidad de Educación a Distancia

Diego J. Romero López

Índice

Agradecimientos.....	3
Introducción.....	4
Objetivo.....	6
Lógica proposicional.....	7
Definición.....	7
Constantes.....	7
TRUE.....	7
FALSE.....	7
Operadores.....	7
Operador de negación.....	7
Operador de conjunción.....	7
Operador de disyunción inclusiva.....	8
Resto de operadores.....	8
Precedencia.....	8
Árboles Binarios de Decisión.....	10
Introducción.....	10
Orden de las variables.....	12
Árboles reducidos.....	12
No-redundancia.....	12
Unicidad de cada vértice.....	13
Definición.....	14
Operaciones.....	15
Apply.....	15
Restrict.....	17
Swap.....	17
Software.....	22
Implementación.....	23
Experimentos y resultados.....	24
Problemas abiertos.....	25
Bibliografía.....	26

Agradecimientos

Agradezco al Prof. Dr. José Luis Bernier el haberme dado la oportunidad de trabajar en este trabajo fin de máster.

Por último, también agradezco a mi familia el haberme apoyado de multitud de formas a lo largo de todo el máster y en especial, este trabajo que supone el colofón del mismo.

Introducción

En general, cuando se piensa en un sistema tolerante a fallos, se suele pensar en sistemas software que tienen vidas a su cargo, como software para aviónica o para centrales nucleares, pero, supongamos por un momento un sistema web que gestione ocupaciones de reserva de plazas para un lavadero de coches. Desde el momento que el cliente inicia su compra, está reservando un intervalo de tiempo. Este intervalo de tiempo se almacena en un estado que podríamos calificar como “pendiente”, puesto que todavía no se ha pagado, y bloquea la selección de esa misma ranura de tiempo para el resto de clientes. Obviamente, en este sistema, hay condiciones de carrera puesto que los clientes entran en la web de forma paralela.

Ahora, supongamos además que hay varios servicios (lavado, encerado, control de presión, limpieza interior del vehículo...) que son seleccionables y que cada uno de ellos se realiza en una ubicación distinta en distintos “box”. Así, internamente el sistema deberá llevar el control de la ocupación de cada “box”.

Cuando se realice un pago por internet, con todo el protocolo de comunicación que ha de ser implementado, deberá marcar la venta como pagada y reservar efectivamente la ocupación para el cliente, es obvio que éste se ha introducido en una máquina de estados implementada en el sitio web. Cuando el pago sea efectivo, deberá generar un ticket para que el encargado pueda leer de forma automática qué servicios ha comprado el cliente. Por supuesto, en este ticket deberá indicar quién ha realizado la compra.

Este tipo de problemas de restricciones de competencia entre instancias de un sistema pueden bien con bloqueos o pueden modelarse con árboles binarios de decisión (Binary Decision Diagram, BDD, en inglés) de forma que el sistema sea capaz de detectar inconsistencias y por ende, verificar que el proceso se encuentra con unos datos incorrectos y por tanto, cancelar el procedimiento actual y volver a un estado seguro. En el caso de una detección de un estado inconsistente, el software podrá detener el proceso y volver al estado correcto más cercano. En nuestro ejemplo, cancelar la compra.

Otro ejemplo más lejano a un usuario normal puede ser el de desarrollo de software para sistemas de control. Se modelan los estados como proposiciones lógicas y se estructura un BDD con todas las restricciones. Este árbol se mantiene en memoria y refleja el estado real del sistema. De forma que cuando el sistema entre en un estado inconsistente, puede reiniciarlo o volver a un estado seguro. Un ejemplo de este tipo de sistemas puede ser cualquier software que compruebe que una máquina industrial está funcionando correctamente.

En definitiva, sea cual sea el uso que se le dé, usar un BDD como software de control adicional permite que se detecten errores en el software y que el sistema vuelva al estado estable más cercano. Además, el BDD reflejará en cada momento el estado real del sistema.

Una vez puesto en situación, podemos entonces entender que en este trabajo se ha implementado esa *piedra angular*. Una librería eficiente para BDDs que implementa todas las herramientas para que un equipo de ingenieros de software la puedan usar para construir sistemas tolerantes a fallos.

Además, esta implementación sigue las directrices más estrictas en cuanto a desarrollo, de manera que se pueda continuar su desarrollo de forma sencilla por cualquier estudiante de máster o doctorado, al contrario de como ocurre con algunas implementaciones oscuras basadas en lenguajes menos modernos que además tienen un nivel de opacidad y falta de diseño estructurado que hacen difícil el trabajo sobre ellas.

A lo largo de este trabajo se mostrará cómo se ha implementado esta solución, los problemas que se encontraron, las soluciones que se han aportado y los algoritmos que se han usado.

En especial, cabe destacar la parte de optimización de BDDs, en la que se han realizado varios experimentos con varios algoritmos que tratan, mediante el intercambio de variables de reducir el número de nodos de un árbol de este tipo.

Inicialmente daremos una pequeña introducción sobre qué son este tipo de estructuras, luego hablaremos sobre su implementación y por último mostraremos esos resultados de optimización de tamaño de BDDs sobre varios *benchmarks* basados en el formato DIMACS [DIMACS].

Objetivo

En este trabajo se muestra una librería de uso de BDD basada en Java.

Lógica proposicional

Definición

La lógica proposicional (o lógica clásica) es aquella determinada por enunciados que pueden ser o bien ciertos, o bien falsos.

De forma formal, podemos decir que una proposición p es:

- $p = \text{TRUE}$
- $p = \text{FALSE}$
- $\neg q$, donde q es una proposición y \neg el operador de negación
- Dadas p y q proposiciones y OP un operador lógico, $p OP q$ es otra proposición lógica.

A continuación explicamos cada uno de estos conceptos

Constantes

TRUE

Proposición cierta. Se representa como TRUE, true, 1 o T.

FALSE

Proposición falsa. Se representa con FALSE, false, 0 o F.

Operadores

Los operadores en la lógica proposicional se definen mediante tablas de verdad. En este trabajo nos centraremos en la interpretación semántica de las fórmulas dejando para el lector la demostración sintáctica, dado que está demostrado (REF) que son equivalentes.

Operador de negación

p	$\neg p$
0	1
1	0

Operador de conjunción

Este operador proporciona una proposición cierta siempre y cuando al menos una de las proposiciones, que actúan como sus operandos, lo sea.

p	q	$p \text{ AND } q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

1	1	1
---	---	---

Muchas veces este operador se identifica con los símbolos \cdot , AND. También suele escribirse yuxtaponiendo directamente las variables, de forma que se escribirían una detrás de otra, por lo que si vemos $F = xy$, nos referiremos a $F = x \text{ AND } y$.

Operador de disyunción inclusiva

Este operador proporciona una proposición cierta siempre y cuando al menos una de las proposiciones, que actúan como sus operandos, lo sea.

p	q	$p \text{ OR } q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Este operador se identifica con los símbolos OR, \vee , $+$.

Resto de operadores

El resto de operadores posibles puede definirse en función de los ya indicados. Por ejemplo, el operador de implicación obedece la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \text{ OR } q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Para el operador de equivalencia tendríamos algo parecido

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \text{ AND } q) \text{ OR } (\neg p \text{ AND } \neg q)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Así, ante un operador no incluido aquí, supondremos que la fórmula puede convertirse sin problemas a cualquier combinación de los operadores incluidos anteriormente.

En este trabajo no vamos a detallar todos los operadores posibles como XOR, NAND, NOR, etc. El lector puede encontrar más información en [REF] y conociendo su comportamiento ante las entradas, si la salida es determinista podrá expresarlo como combinación de AND, OR y NOT.

Precedencia

De aquí en adelante, vamos a suponer que la precedencia de operadores sigue el siguiente orden:

- NOT
- AND
- OR
- \rightarrow

De todas formas, salvo en el caso de NOT, vamos a incluir paréntesis para evitar confusiones entre las distintas precedencias.

Propiedades

Propiedad asociativa

Propiedad distributiva

Leyes de De Morgan

Árboles Binarios de Decisión

Introducción

Un árbol binario de decisión [BRYANT1986] es una forma de representar tablas de verdad basada en la expansión de Boole¹, en la que se enuncia que cualquier fórmula lógica puede descomponerse en la expresión:

$$F = xF_{(x=1)} + \neg xF_{(x=0)}$$

Donde $F_{(x=0)}$ es la expresión F asignando a la variable x el valor *false* y $F_{(x=1)}$ es la expresión F sustituyendo la variable x por el valor *true*.

Si representamos esta expresión de forma gráfica tendremos un nodo con la expresión F (que depende de la variable x), de forma que si se le da a la x el valor 0 se obtiene $F_{(x=0)}$ y si se le da el valor 1 se obtiene $F_{(x=1)}$. La asignación de $x=0$ la marcamos con una arista discontinua, y la asignación de $x=1$ la marcamos con una arista continua.

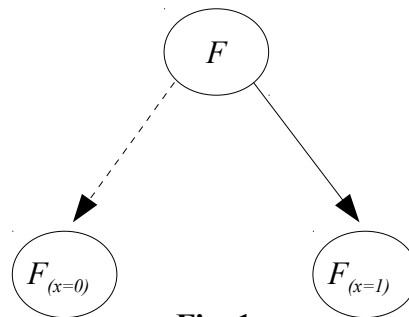


Fig. 1

Si F depende de otra variable, llamada y , podremos repetir este mismo proceso de bifurcación de asignaciones con $F_{(x=0)}$ y con $F_{(x=1)}$. Es decir, si suponemos que la siguiente variable es y , tendríamos el siguiente árbol de decisión:

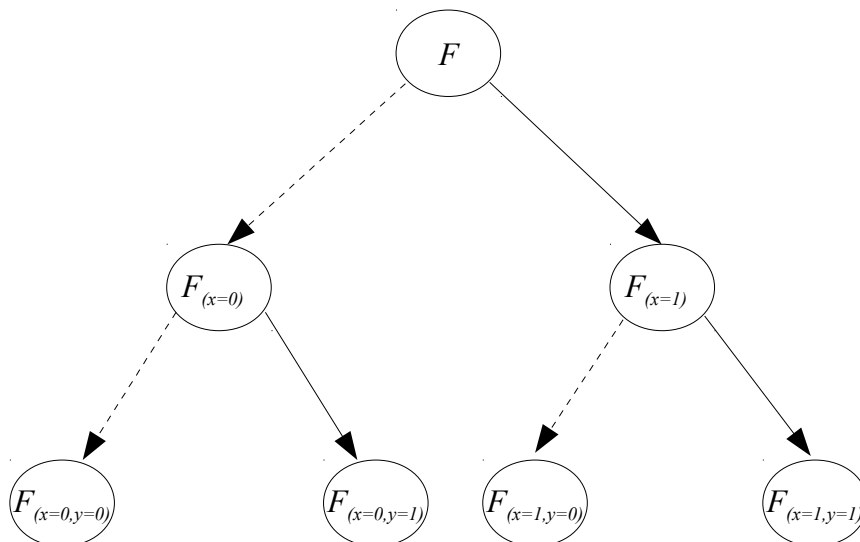


Fig. 2

¹ También se le suele llamar expansión de Shannon, aunque su creador fue George Boole, matemático, lógico y filósofo inglés del siglo XIX.

Como podemos ver, hablamos de árboles binarios de decisión porque cada nodo tiene exactamente dos nodos descendientes.

Puede ocurrir que alguno de los nodos no dependa de ninguna variable y tenga un valor constante (**0** ó **1**). En ese caso, ese nodo será un nodo hoja, dado que no tendrá descendientes, y sólo podrá tomar el valor *true* o *false*.

Vamos a ver un ejemplo de fórmula lógica real $F = xy$. Y tomando el orden de las variables como x , y luego, y . También, para facilitar la visibilidad del diagrama, suponemos que $F_{(a,b)} = F_{(x=a,y=b)}$.

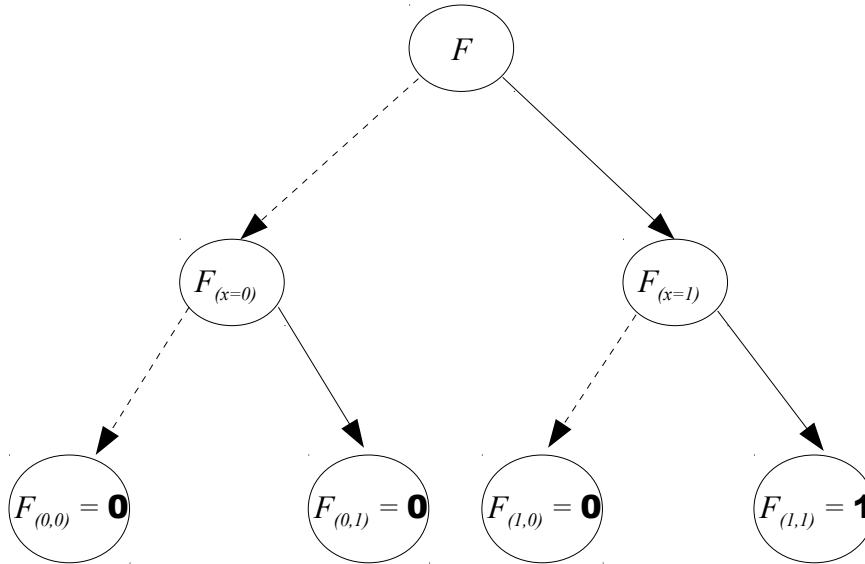


Fig. 3

Notemos que al nodo que viene de una arista punteada se le suele llamar, *low*, y al de la línea llena *high*, debido a que son producto de la asignación de **0** y **1** a su vértice padre, respectivamente.

Otro ejemplo en el que podemos ver varios niveles es el siguiente:

$F = xz + y$, con el orden x, y, z .

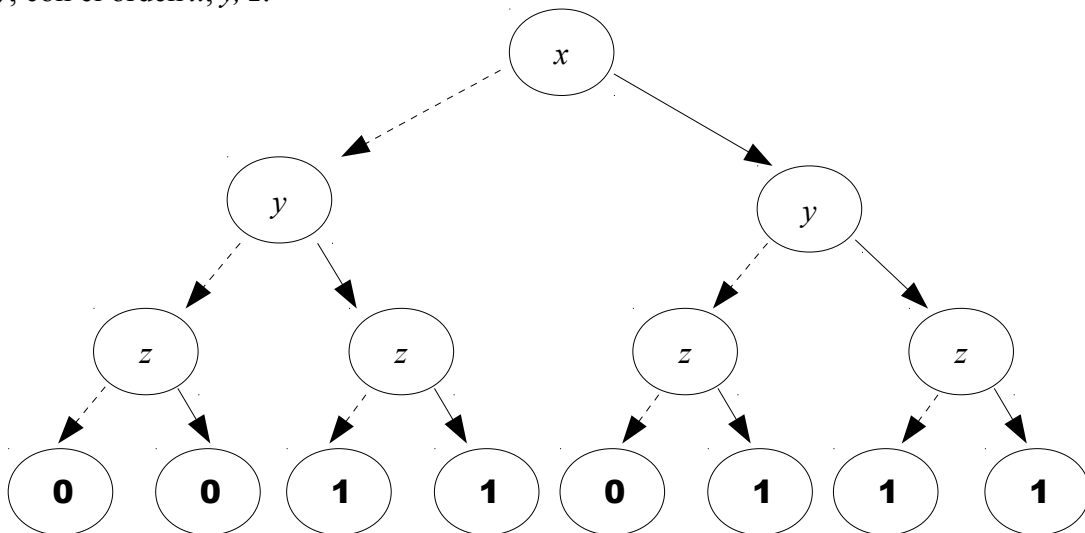


Fig. 4

Como se puede ver en este ejemplo, hay ramas completas repetidas. En la siguiente sección vamos

a mostrar cómo se pueden reducir los BDD haciendo que pasen de ser árboles binarios a digrafos acíclicos.

Orden de las variables

Como podemos ver, hablamos de que las variables tienen un orden entre ellas. Esto nos sirve para evitar tener niveles repetidos, tengamos en cuenta que cada camino que va desde la rama raíz representa una asignación de valores de verdad a variables, lo que sería equivalente a una fila de una tabla de verdad, y por tanto, no se puede repetir asignaciones.

De igual forma, hemos de respetar este orden en todas las ramas del árbol, o si no, podríamos encontrarnos con problemas a la hora de evaluar funciones o de reducir el árbol.

Árboles reducidos

Dado el árbol de la **Fig. 3** (función $F = xy$), un detalle importante que podemos apreciar en este diagrama es la repetición de nodos. Es decir, podemos ver cómo se repiten los nodos hoja y tenemos tres nodos con el valor **0** y sólo uno con el valor **1**. Si eliminamos los nodos con el mismo valor, obtenemos el siguiente árbol binario reducido:

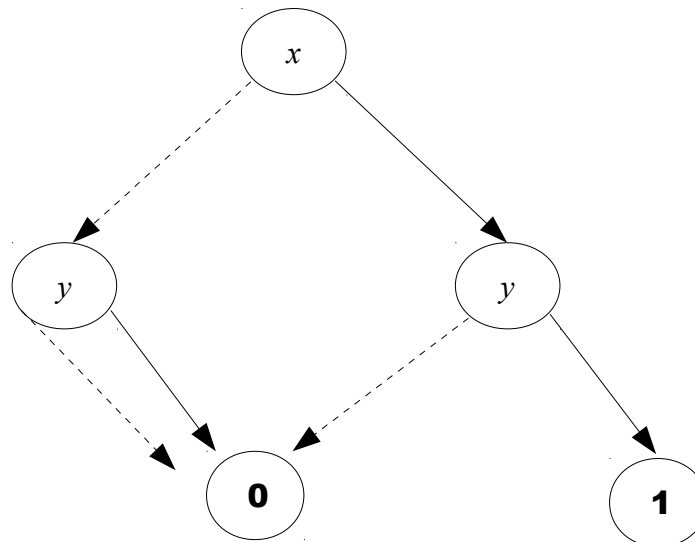


Fig. 5

Como podemos ver, hemos reducido el árbol en 2 nodos sobre un total de 7 nodos. Esto no puede parecer mucho, pero pensemos a gran escala, en fórmulas de miles de variables, conseguir una reducción de un tercio de su tamaño es muy deseable.

También vemos como, en el nodo y de la izquierda, independientemente del valor que tome y , se obtiene el valor 0. ¿No se podría tener una normas para reducir aún más el árbol evitando repeticiones innecesarias?

Randal Bryant en la Universidad Carnegie Mellon inventó el concepto de Diagrama de Decisión Binario Ordenado Reducido Compartido en [BRYANT1986], indicando las restricciones que debía tener un BDD para que fuera mínimo y único dado el mismo orden de variables. Para ello, el diagrama ha de cumplir dos propiedades.

No-redundancia

En primer lugar, no debe haber vértices redundantes, esto es, no puede haber un vértice cuyos

descendientes sean otro. En el caso de que en el proceso de construcción esta casuística se dé, se tomará el nodo descendiente y se eliminará el nodo y se le pasará el

Es decir, dado un vértice v , si $low(v) = high(v)$, entonces se produce la siguiente sustitución:

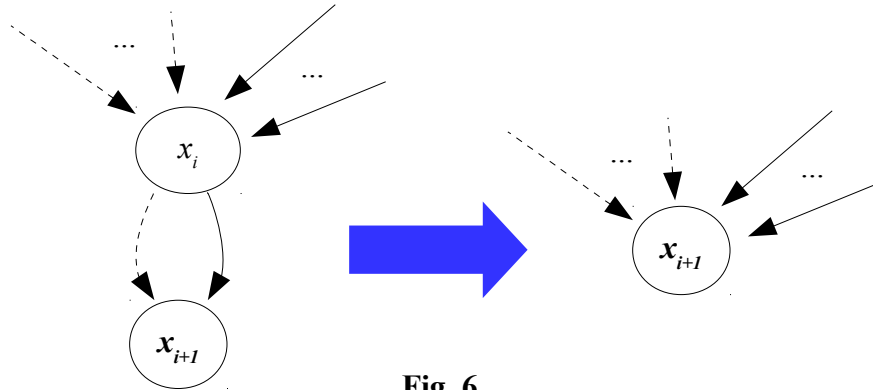


Fig. 6

Unicidad de cada vértice

Si un vértice tiene los mismos descendientes que otro y la misma variable, entonces ha de ser sustituido por éste. Es decir, supongamos que tenemos un árbol que tiene dos vértices distintos u y v que cumplen que ambos tienen la misma variable y que tienen los mismos descendientes low y $high$. Entonces, ambos son el mismo vértice.

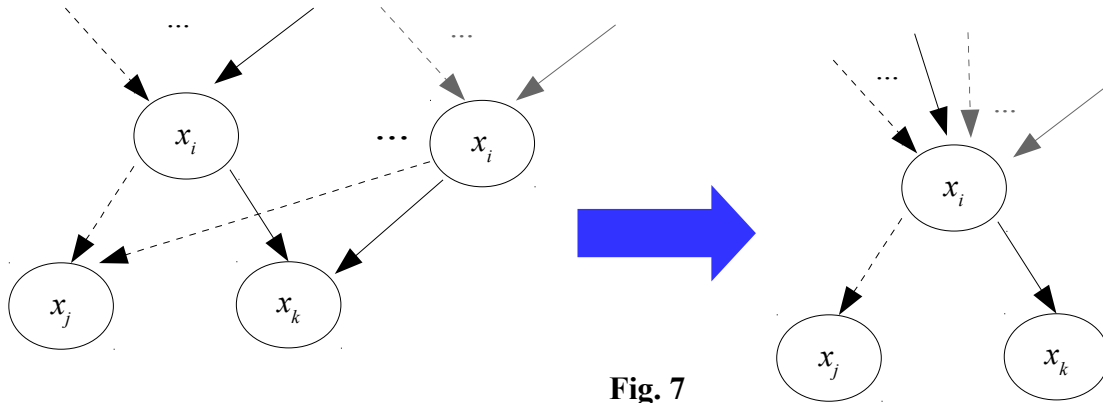


Fig. 7

Por ejemplo, si tenemos el árbol de la figura 4 ($F = xz + y$), tendremos varios vértices repetidos y redundantes. Si los eliminamos, obtendremos el siguiente árbol reducido:



Cada vértice tiene los siguientes atributos $v = \{id: Int, var: Variable, low: Vertex, high: Vertex\}$.

Operaciones

Apply

El algoritmo APPLY que permite ejecutar una operación binaria lógica entre dos árboles BDD fue detallada en [BRYANT1986].

Nuestro pseudocódigo es el siguiente:

```
# Construye una nueva clave para cada vértice
makeUniqueKey(var_index, low, high):
    if(low==null && high==null):
        return var_index+"-"+ "NULL"+"-"+ "NULL";
    return var_index+"-"+low.index+"-"+high.index

# Añade un vértice único a la tabla hash
addNewVertex(var_index, low, high):
    # Obtiene la siguiente clave e incrementa el contador global
    index = getNextKey()
    v = new Vertex(index, var_index, low, high)
    T[index] = v
    U[makeUniqueKey(var_index, low, high)] = v
    V[var_index].add(v)
    return v

# Añade un vértice no-redundante a la tabla hash
addVertex(var, low, high):
    vertexUniqueKey = makeUniqueKey(var_index, low, high)
    if(uniqueKey in U):
        return U[vertexUniqueKey]
    return addNewVertex(var, low, high)

# Aplica el algoritmo Apply a dos vértices
applyVertices(Vertex v1, Vertex v2):
    # Clave hash del subárbol de estos dos vértices
    String key = "1-" + v1.index + "+2-" + v2.index
    if( key in G ):
        return G[key]

    if(v1.isLeaf() && v2.isLeaf()):
        # op es la operación boolean entre dos vértices hoja
        # (que pueden ser true o false)
```

```

        if(op(v1,v2)):
            return True # Vértice con el valor true
        return False  # Vértice con el valor false

var = -1
low = null
high = null
# v1.index < v2.index
if (!v1.isLeaf() and (v2.isLeaf() or v1.variable < v2.variable)):
    var = v1.variable;
    low = applyVertex(v1.low, v2)
    high = applyVertex(v1.high, v2)
else if (v1.isLeaf() or v1.variable > v2.variable):
    var = v2.variable
    low = applyVertex(v1, v2.low)
    high = applyVertex(v1, v2.high)
else:
    var = v1.variable
    low = applyVertex(v1.low, v2.low)
    high = applyVertex(v1.high, v2.high)

# Respeta la propiedad de no-redundancia:
# "Ningún vértice ha de tener como low y high a un único vértice."
if(low.index == high.index):
    return low

# Respeta la propiedad de unicidad:
# "Ningún vértice ha de tener la misma variable y vértices
# low y high que otro."
Vertex u = addVertex(var, low, high)
G[key] = u
return u;

# Llamada al algoritmo de apply
apply(operation, bdd1, bdd2):
    # Caché para evitar cálculos repetidos
    G = {}
    String function = bdd1.function + " "+operation+" "+bdd2.function
    # Llenar la tabla hash T que contiene el nuevo árbol
    # con vértices de bdd1 y bdd2

```



```

root = appyVertex(bdd1.root, bdd2.root)
# Construcción del nuevo BDD
return new BDD(function, root)

```

Restrict

Esta operación asigna valores booleanos a algunas variables, de esta forma restringiendo la ruta desde la raíz del árbol y obteniendo un nuevo árbol de menor tamaño.

```

# Obtiene una nueva raíz de un BDD basándose en el BDD con raíz v
# y con una asignación de valores booleanos en algunas variables

```

```

restrictFromVertex(v, assignement):
    if(v.isLeaf()):
        # Hay un único vértice 1 ó 0
        return T[v.index]
    if(v.variable in assignement):
        boolean value = assignement[v.variable]
        if(value):
            return restrictFromVertex(v.high, assignement)
        else:
            return restrictFromVertex(v.low, assignement)
    else:
        low = restrictFromVertex(v.low, assignement)
        high = restrictFromVertex(v.high, assignement)
        if(low.index == high.index)
            return low
        return addVertex(v.variable, low, high)

```

```

# Obtiene un nuevo BDD basándose en este BDD junto con una
# asignación booleana a algunas variables.

```

```

restrict(bdd, assignement):
    restrictedBDD = restrictFromVertex(bdd.root, assignement);
    rfunction = bdd.function
    for(pair : assignement.pairs()):
        variable = VARIABLES[pair.key]
        value = pair.value
        rfunction = rfunction.replace(variable, value)
    return new BDD(rfunction, restrictedBDD)

```

Swap

Esta operación intercambia dos niveles del árbol. El objetivo es tener una operación que permita obtener algunos vértices huérfanos, de forma que se puedan eliminar y por tanto reduciendo el

tamaño del árbol.

La implementación es ignorada en la mayoría de los trabajos de la bibliografía y en ellos se indica [Rud93] como referencia. Para comprender mejor esta operación se pueden ver las notas del mismo autor en el taller [Rud93W]. En [JacobiEtAl], los autores indican de forma gráfica cada uno de los posibles cambios escenarios en los que se puede encontrar un vértice que ha de intercambiarse con el del siguiente nivel. Los reproducimos a continuación:

Supongamos que en el nivel actual se encuentra la variable x y en el siguiente la variable y . El resto de vértices que no tengan ninguna de estas dos variables se les pondrá como nombre A , B , C o D .

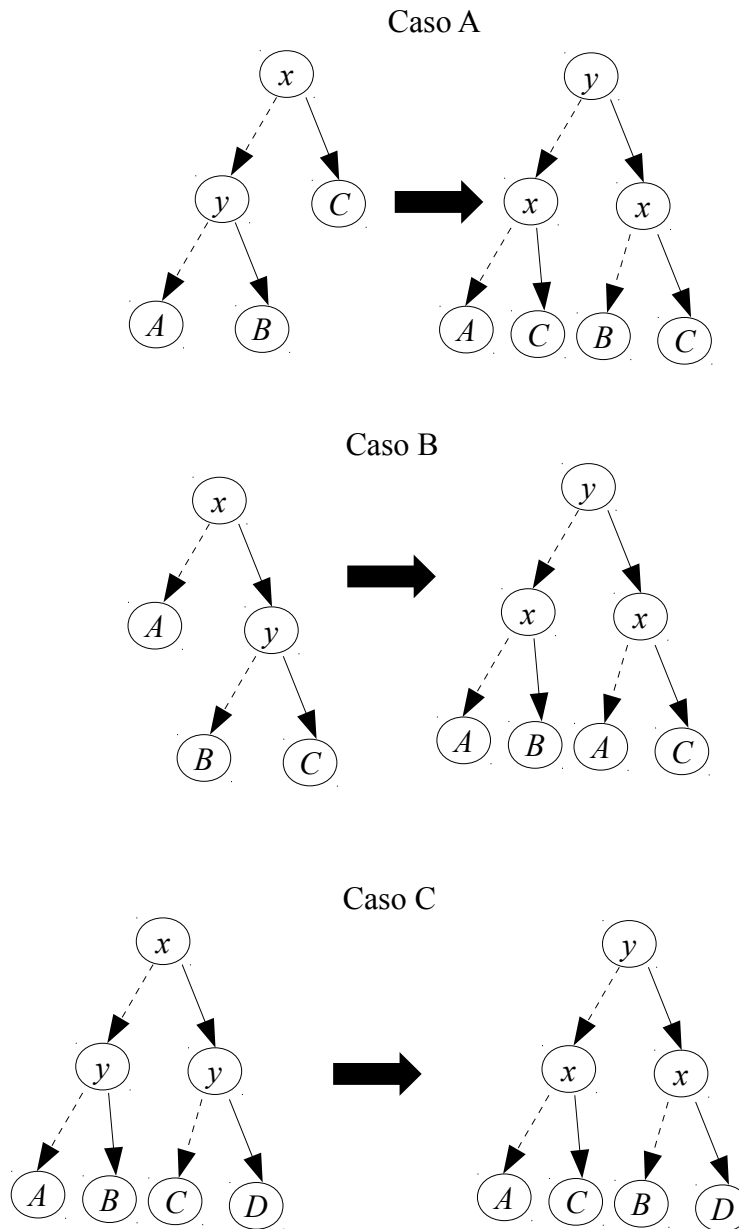


Fig. 9

En el resto de escenarios de intercambios de variables, el vértice x no tiene vértices descendientes con la variable y , por lo tanto, no se produce ningún intercambio.

A continuación incluimos el pseudocódigo de los distintos casos de intercambio, indicando en cada

uno de ellos a qué caso se refiere.

El método `addWithoutRedundant(varI, A, C)` añade un vértice con esos valores de variable y con los descendientes `low` y `high`, comprobando que no existe ya un vértice con esos atributos. Si no existe, devuelve un nuevo vértice con esos valores, si existe, lo obtiene y de igual forma lo devuelve.

```
# Reemplaza el vértice v (si tiene la variable varJ)
# con el vértice del siguiente nivel
swapVertex(Vertex v, int varJ):
    swapWasMade = false
    varI = v.variable

    low = v.low
    high = v.high

    A = null
    B = null
    if (!low.isLeaf()):
        A = low.low
        B = low.high
    else:
        A = low
        B = low

    C = null
    D = null
    if (!high.isLeaf()) :
        C = high.low()
        D = high.high()
    else:
        C = high
        D = high

    newLow = null
    newHigh = null

    # Caso a:
    if (low != null && low.variable == varJ &&
        (high == null || high.variable != varJ)):
        newLow = addWithoutRedundant(varI, A, C)
```

```

        newHigh = addWithoutRedundant(varI, B, C)
        setVertex(v, varJ, newLow, newHigh)
        swapWasMade = true
# Caso b:
else if ((low == null || low.variable != varJ) &&
        (high != null && high.variable == varJ)):
    newLow = addWithoutRedundant(varI, A, B)
    newHigh = addWithoutRedundant(varI, A, C)
    setVertex(v, varJ, newLow, newHigh)
    swapWasMade = true
# Caso c:
else if ((low != null && low.variable == varJ) &&
        (high != null && high.variable == varJ)):
    newLow = addWithoutRedundant(varI, A, C)
    newHigh = addWithoutRedundant(varI, B, D)
    this.setVertex(v, varJ, newLow, newHigh)
    swapWasMade = true
# Caso d:
else if ((low == null || low.variable != varJ) &&
        (high == null || high.variable != varJ)):
    swapWasMade = false
# Caso e:
else if ((low == null || low.variable != varJ) && high == null):
    swapWasMade = false

return swapWasMade

# Intercambia un nivel con el siguiente
swap(int level):

    # Si es el último nivel, ignorar
    if(level == variables.size()-1)
        return false

    variableI = variables.getVariableInPosition(level)
    variableJ = variables.getVariableInPosition(level+1)

    boolean swapWasMade = false

    verticesOfThisLevel = V[variableI]

```

```
for(Vertex v : verticesOfThisLevel):  
    swapWasMade = swapWasMade || swapVertex(v, variableJ)  
  
variables.swap(variableI, variableJ);  
return swapWasMade
```

Software

Herramientas usadas

Diseño

Funcionalidad

Manual de uso de los binarios

Implementación

La mayoría de las implementaciones actuales están realizadas en código C o C++ de baja calidad. De hecho, en la mayoría de los trabajos encontrados, no se preocupan de detalles de cómo está implementada la operación swap, de manera que a la hora de mostrar resultados, simplemente se desarrolla un algoritmo basado en esta operación y se toman tiempos.

He optado por realizar una implementación libre y gratuita que pudiera usarse como laboratorio por parte de investigadores.

La implementación se encuentra disponible para descargar bajo licencia libre GPL3 con excepción de uso de clases en <https://github.com/diegoromero/lopez/djbdd>.

Experimentos y resultados

Problemas abiertos

Bibliografía

- [BRYANT1986] Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation, Randal E. Bryant, 1986
- [1] Symbolic Boolean Manipulation with Ordered Binary Decision Diagrams, Randal E. Bryant. Carnegie Mellon University.
- [DIMACS] DIMACS CNF formula format. <http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/data/cnf/cnf.html>
- [2] Binary Decision Diagrams. Fabio SOMENZI. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Colorado at Boulder.
- [3] Efficient implementation of a BDD package, Karl S. Brace, Richard L. Rudell, Randal E. Bryant.
- [4] Implementation of an Efficient Parallel BDD Package. Tony Stornetta, Forrest Brewer.
- [Rud93] *Dynamic variable* ordering for ordered binary decision diagrams. Richard L. Rudell 1993.
- [Rud93W] BDDs: Implementation Issues & Variable Ordering. Richard Rudell 1993.
- [JacobiEtAl] Incremental Reduction of Binary Decision Diagrams. R. Jacobi, N. Calazans, C. Trullemans.