

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N. 1, 2025

Электронный журнал,

рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в сложных системах

Управление с итеративным обучением в условиях неопределенности с учетом нелинейности типа люфта

Емельянова Ю.П.

Арзамасский политехнический институт (филиал) Нижегородского
государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева

emelianovajulia@gmail.com

Аннотация. Решается задача синтеза управления с итеративным обучением дискретной системой, функционирующей в повторяющемся режиме с учетом нелинейности типа люфта, присущей исполнительным механизмам роботов, на основе информации об измеряемом выходном сигнале и с двумя типами корректирующих поправок. Параметры системы точно неизвестны и описываются аффинными моделями неопределенности. Постановка задачи мотивирована тенденциями развития высокоточных роботизированных производств, а также медицинских реабилитационных роботов. На примере портального робота проводится исследование влияния величины зоны нечувствительности характеристики люфта на точность воспроизведения желаемой траектории и проводится сравнительный анализ двух типов корректирующих поправок.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, люфт, неопределенности, векторная функция Ляпунова.

1 ВВЕДЕНИЕ

Развитие высокоточных интеллектуальных производств требует разработки специальных алгоритмов управления промышленными роботами. Эффективным методом повышения точности роботов, выполняющих повторяющиеся

операции, является управление с итеративным обучением. Управление с итеративным обучением основано на том, что тот или иной показатель качества системы, которая выполняет одну и ту же задачу многократно, может быть улучшен путем обучения на основе информации с предыдущих выполнений. Характерным примером может служить многоосный порталый робот, захватывающий и перемещающий детали по заданной траектории на конвейер. Показателем качества здесь служит точность воспроизведения желаемой траектории. Многие промышленные процессы функционируют подобно такому порталому роботу – например, упаковка продуктов, розлив жидкости в бутылки или сборка автомобилей. Все эти приложения требуют точного контроля за каждым выполнением в течение определенного периода времени с минимальным уровнем ошибок, чтобы максимизировать производительность и свести к минимуму брак при изготовлении.

Значительная часть литературы по управлению с итеративным обучением, включая исследования с экспериментальной проверкой, основана на использовании линейной модели динамики для синтеза управления. При реализации такого подхода в реальных производственных задачах и экспериментальных установках могут возникать значительные трудности из-за нелинейных эффектов в приводах. Таким образом, возникают новые задачи управления с итеративным обучением роботизированными системами с учетом типовых нелинейностей.

Задача управления с итеративным обучением с нелинейностью типа насыщения решалась автором в [1, 2]. Люфт – еще одна распространенная проблема приводов, но в этом случае при решении задачи управления с итеративным обучением проводилось относительно меньше исследований [3–5]. В указанных работах люфт описывается как линейный входной сигнал и неизвестный ограниченный член, что является существенно упрощенным представлением, не учитывающим, что на самом деле люфт является динамической нелинейностью. Динамические модели люфта, в подавляющем большинстве работ, описывается дифференциальными уравнениями, см. например [6]. Для применения этих моделей в дискретных системах необходим переход к их эквивалентным дискретным моделям. Одна из возможных дискретных моделей построена в [7].

В отличие от указанных работ, автором проекта предлагается новый подход к синтезу управления с итеративным обучением для систем с дискретным временем с учетом нелинейности типа люфта, где исследование будет ориентировано на использовании общей модели люфта из [7]. По мнению автора

она наиболее точно отражает физическую сущность люфта и согласуется с постановкой задачи в рамках дискретной модели. Кроме того, в указанных работах эффект влияния нелинейности типа люфта при управлении с итеративным обучением на достижимую точность не оценивался, хотя даже из простых физических соображений понятно, что люфт снижает точность. В данной работе не удалось получить аналитических оценок, но представлено структурное решение, позволяющее существенно снизить влияние люфта на достижимую точность, что подтверждено моделированием.

Важно отметить, что в реальной практике проектирования систем управления с итеративным обучением желаемая траектория должна задаваться заранее исходя из целей производства или конкретной задачи и не связана ни с какой эталонной системой, как это предполагается в [3–5]. Это крайне важно в большинстве приложений, например, в высокоточном конвейерном производстве желаемая траектория движения манипулятора должна рассчитываться исходя из условия установки детали в требуемую позицию на конвейерную ленту, с учетом скорости ее движения и расположения устанавливаемых деталей, в аддитивном производстве, эта траектория является желаемым профилем изготавливаемого изделия, в медицинских приложениях при роботизированной реабилитации после инсульта [8–10], желаемая траектория задается лечащим врачом для непосредственного использования пациентом, и любое изменение может иметь значительные негативные последствия для здоровья пациента (повышение кровяного давления, скорости кровотока и пр.). Следовательно, существует необходимость в синтезе управления с итеративным обучением с учетом люфта, основанном непосредственно на заданной желаемой траектории.

Интересное применение методов управления с итеративным обучением при наличии люфта – в тормозных системах транспортных средств. Так в [11] на основе управления с итеративным обучением предложен новый подход управления системой рекуперативного торможения, даже когда в трансмиссии присутствуют два люфта, способствующий повышению комфорта и безопасности езды.

Таким образом, в данной статье предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением при наличии люфта в приводе и непосредственном задании желаемой траектории на основе информации об измеряемом выходном сигнале. Несмотря на свою практическую значимость, эта задача ранее не решалась в такой постановке. Подход будет основан на развитии результатов [1, 2], в которых изучались системы с насыщением вход-

ных данных, где выделен главный эффект влияния нелинейностей на точность воспроизведения желаемой траектории при использовании управления с итеративным обучением – наличие нелинейности снижает скорость сходимости и среднеквадратическая ошибка стремится к некоторому ненулевому значению. Первые результаты по исследованию люфта в задачах управления с итеративным обучением были получены в [12], где также было отмечено, что с расширением зоны нечувствительности увеличивается установившееся значение ошибки обучения. Эта особенность важна как в теоретическом аспекте, так и в прикладном, поскольку эффект влияния нелинейности может не позволить достичь требуемой точности. В данной статье, в отличие от [12] предлагается метод синтеза управления с итеративным обучением на основе информации об измеряемом выходном сигнале, в условиях параметрической неопределенности и с двумя типами корректирующих поправок, для которых приводится сравнительный анализ. Подход будет основан на ранее разработанном автором и коллегами дивергентном методе векторных функций Ляпунова, который дает возможность применения эффективной техники линейных матричных неравенств [13].

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную дискретную систему с неопределенными параметрами, функционирующую в повторяющемся режиме, которая на k -м повторении описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}x_k(p+1) &= A(\delta(p))x_k(p) + B(\delta(p))\psi_k(p), \\ \psi_k(p) &= \text{back}(u_k(p)), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad p \in [0, N-1], \quad k = 0, 1, \dots,\end{aligned}\tag{1}$$

где $x_k(p) \in \mathbb{R}$ – вектор состояния, $u_k(p) \in \mathbb{R}$ – скалярное управление, $y_k(p) \in \mathbb{R}$ – скалярная выходная переменная, называемая профилем повторения, k – номер повторения (итерации или шага), p – номер шага дискретизации с известным периодом T_s , N – число шагов, определяющее продолжительность повторения, $\psi_k(p) \in \mathbb{R}$ – нелинейность типа люфта, представленная на рисунке

1 и описываемая моделью из [7] следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_k(p) &= \text{back}(u_k(p)) \\ &= \begin{cases} m_l(u_k(p) - c_l), & \text{если } u_k(p) \leq w_k(p), \\ m_r(u_k(p) - c_r), & \text{если } u_k(p) \geq W_k(p), \\ \psi_k(p-1), & \text{если } w_k(p) < u_k(p) < W_k(p), \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где m_l , m_r , c_r – положительные константы, c_l – отрицательная константа, и

$$w_k(p) = \frac{1}{m_l} \text{back}(u_k(p-1)) + c_l, \quad W_k(p) = \frac{1}{m_r} \text{back}(u_k(p-1)) + c_r. \quad (3)$$

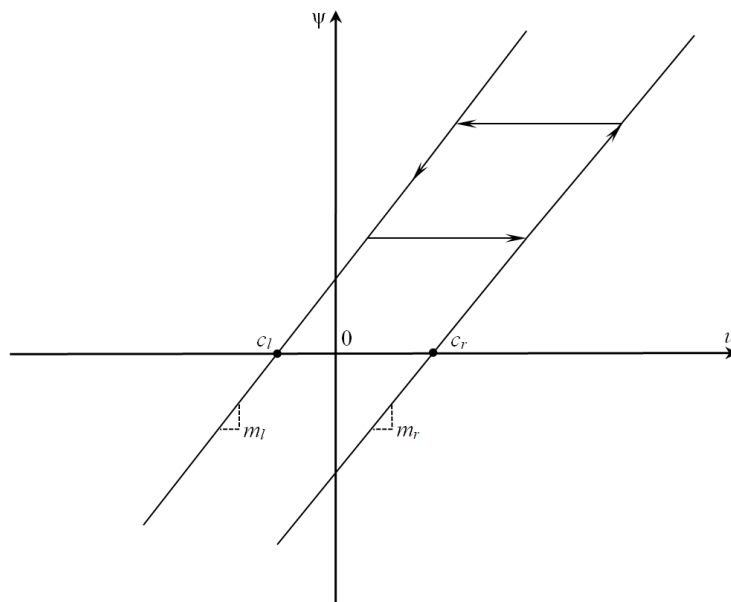


Рис. 1: Модель люфта

Модель неопределенности задается в виде:

$$A(\delta(p)) = A + \sum_{j=1}^l \delta_j(p) A_j, \quad B(\delta(p)) = B + \sum_{j=1}^l \delta_j(p) B_j, \quad (4)$$

где A и B – матрицы номинальной модели, A_j и B_j , $(j = 1, 2, \dots, l)$ – постоянные матрицы соответствующих размеров и $\delta_j(p) \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j]$. Далее повсюду для компактности записи зависимость δ от p указывать не будем.

Обозначим

$$\mathbf{D} = \{\delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j]\}, \quad \mathbf{D}_v = \{\delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in \{\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j\}\},$$

где \mathbf{D}_v – конечное множество из 2^l элементов.

В данной работе внимание сосредоточено на случае $m_r = m_l = m$, который наиболее широко распространен на практике. Кроме того, без потери общности можно предположить, что граничными условиями являются $x_k(0) = 0$ ($k \geq 1$). Также предполагается, что пара (A, B) управляема и $CB \neq 0$.

Пусть $y_{ref}(p)$, $0 \leq p \leq N - 1$ – заданная эталонная траектория (желаемый профиль повторения) такая, что $y_{ref}(0) = Cx_k(0)$, $k \geq 1$. Тогда

$$e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p) \quad (5)$$

является ошибкой обучения на повторении k .

Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений $u_k(p)$, которая, оставаясь ограниченной при всех $k = 1, 2, \dots$, обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения эталонной траектории за конечное число повторений k^* и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$\|e_k(p)\| \leq e^*, \quad k \geq k^*, \quad 0 \leq p \leq N. \quad (6)$$

Поставленная задача будет решена, если указанная последовательность $u_k(p)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \|e_k(p)\| &\leq \kappa \varrho^k + \mu, \quad \kappa > 0, \quad e^* \geq \mu \geq 0, \quad 0 < \varrho < 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(p)\| &= \|u_\infty(p)\|, \end{aligned} \quad (7)$$

где $u_\infty(p)$ – ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением, $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму (которая понимается как абсолютное значение для скалярных функций). Условия (7) означают, что ошибка обучения остается ограниченной для всех k и убывает не медленнее некоторой геометрической прогрессии. Если люфта нет, полученные результаты сводятся к случаю линейной динамики и выполняется условие сходимости ошибки обучения к нулю $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(p)\| = 0$.

Рассматриваются две формы закона управления с итеративным обучением. Первая из них выглядит следующим образом:

$$\psi_{k+1}(p) = \text{back}(u_{k+1}(p)) = \text{back}(\psi_k(p) + \delta u_{k+1}(p)), \quad (8)$$

где $\delta u_{k+1}(p)$ – корректирующая поправка, которая использует информацию с предыдущего повторения и должна быть выбрана так, чтобы обеспечить условия сходимости (7).

Для закона управления (8) используются выходные данные нелинейности и структурная схема такого управления показана на рисунке 2. С другой стороны, закон управления также может быть сформирован с использованием входных данных нелинейности в виде

$$\psi_{k+1}(p) = \text{back}(u_{k+1}(p)) = \text{back}(u_k(p) + \delta u_{k+1}(p)), \quad (9)$$

что схематично представлено на рисунке 3. Как будет показано далее в примере, вид формирования закона управления сильно влияет на характер сходимости ошибки обучения.

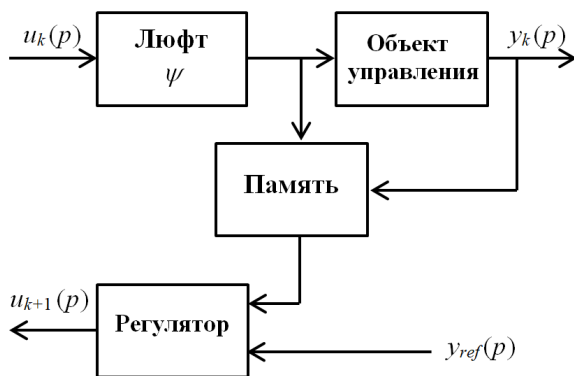


Рис. 2: Схема обратной связи при использовании **выходных** данных нелинейности

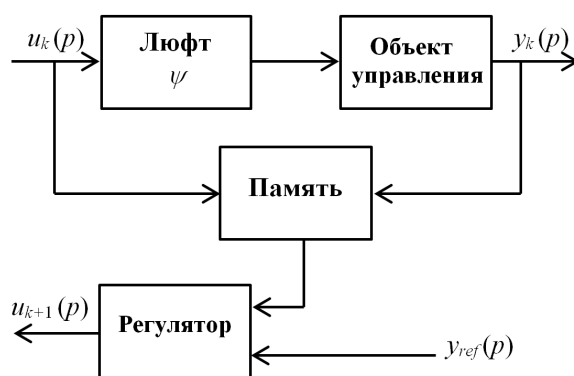


Рис. 3: Схема обратной связи при использовании **входных** данных нелинейности.

3 Переход к эквивалентной 2D модели в виде повторяющегося процесса

Для дальнейшего анализа удобно использовать модель в приращениях исходных переменных. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную переменную

$$\eta_{k+1}(p+1) = x_{k+1}(p) - x_k(p). \quad (10)$$

В соответствии с (1) эта переменная удовлетворяют уравнению

$$\eta_{k+1}(p+1) = A(\delta)\eta_{k+1}(p) + B(\delta)\Delta\psi_{k+1}(p-1), \quad (11)$$

где $\Delta\psi_{k+1}(p-1) = \psi_{k+1}(p-1) - \psi_k(p-1)$. В соответствии с (1), (5), (10), (11) ошибка обучения будет описываться уравнением

$$e_{k+1}(p) = -CA(\delta)\eta_{k+1}(p) + e_k(p) - CB(\delta)\Delta\psi_{k+1}(p-1), \quad (12)$$

В отличие от [12] предполагается, что для формирования управления до-
ступен только вектор выхода. В этом случае корректирующую поправку за-
дадим в виде

$$\delta u_{k+1}(p) = K_1 C \eta_{k+1}(p+1) + K_2 e_k(p+1), \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11), (12) получим управляемую динамику в терминах
приращения вектора состояния и ошибки обучения:

$$\begin{aligned} \eta_{k+1}(p+1) &= A_c(\delta) \eta_{k+1}(p) + B(\delta) K_2 e_k(p) + B(\delta) \varphi_k(p), \\ e_{k+1}(p) &= -C A_c(\delta) \eta_{k+1}(p) + \\ &+ (I - C B(\delta) K_2) e_k(p) - C B(\delta) \varphi_k(p), \end{aligned} \quad (14)$$

где $A_c(\delta) = A(\delta) + B(\delta) K_1 C$, $\varphi_k(p) = \Delta \psi_{k+1}(p-1) - \delta u_{k+1}(p-1)$.

Из (2) и из рисунка 1 следует, что $\Delta \psi_{k+1}(p-1) = \text{back}(u_{k+1}(p-1)) - \text{back}(u_k(p-1))$ удовлетворяет ограничениям

$$m \delta u_{k+1}(p-1) - m \Delta c \leq \Delta \psi_{k+1}(p-1) \leq m \delta u_{k+1}(p-1) + m \Delta c,$$

где $\Delta c = c_r - c_l$. Также $\varphi_k(p)$ удовлетворяет ограничениям

$$m_1 \delta u_{k+1}(p-1) - m \Delta c \leq \varphi_k(p) \leq m_1 \delta u_{k+1}(p-1) + m \Delta c$$

или

$$m^2 (\Delta c)^2 - [\varphi_k(p) - m_1 \delta u_{k+1}(p-1)]^2 \geq 0, \quad (15)$$

где $m_1 = m - 1$. Если $m_r = m_l = m$, $\text{back}(mu) = m \text{back}(u)$ и, следователь-
но, без потери общности будет рассмотрен случай $m = 1$, и квадратичное
ограничение (15) может быть записано в виде

$$(\Delta c)^2 - \varphi_k(p)^2 \geq 0. \quad (16)$$

Система (14) представляет собой дискретный повторяющийся процесс,
особый класс 2D систем [14]. При наличии люфта динамика управления с
итеративным обучением становится нелинейной. Дальнейшее исследование
основано на теории устойчивости для нелинейных повторяющихся процессов
и анализе этой системы на основе дивергентного метода векторных функций
Ляпунова [13].

4 Синтез на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова

Закон управления с итеративным обучением (8), (13) должен обеспечивать условия сходимости (7). Чтобы найти матрицы K_1 и K_2 , гарантирующие это свойство, воспользуемся дивергентным методом векторных функций Ляпунова для дискретных повторяющихся процессов [13].

Рассмотрим векторную функцию Ляпунова, определенную на траекториях системы (14):

$$V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_{k+1}(p)) \\ V_2(e_k(p)) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где $V_1(\eta_{k+1}(p)) > 0$, $\eta \neq 0$, $V_2(e_k(p)) > 0$, $e_k(p) \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$, и определим аналог оператора дивергенции вдоль траекторий этой системы как

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) &= V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p)) + \\ &+ V_2(e_{k+1}(p)) - V_2(e_k(p)). \end{aligned} \quad (18)$$

Теорема 1. Если существуют векторная функция Ляпунова (17), положительные числа c_1, c_2, c_3 и неотрицательное число γ такие, что

$$c_1 \|\eta_{k+1}(p)\|^2 \leq V_1(\eta_{k+1}(p)) \leq c_2 \|\eta_{k+1}(p)\|^2, \quad (19)$$

$$c_1 \|e_k(p)\|^2 \leq V_2(e_k(p)) \leq c_2 \|e_k(p)\|^2, \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_d V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leq \gamma - c_3 (\|\eta_{k+1}(p)\|^2 + \|e_k(p)\|^2), \quad (21)$$

то для системы (14) выполняются условия сходимости (7).

Доказательство совпадает с приведенным в [13] и [15] (Теорема 1) и поэтому опускается.

В зависимости от конкретного выбора элементов векторной функции Ляпунова (17) на основе теоремы 1 можно получить различные достаточные условия сходимости. Выбор этих компонентов в виде квадратичных форм позволяет свести исходную задачу синтеза к линейным матричным неравенствам (ЛМН). Если эти ЛМН разрешимы, то из них легко получить корректирующую поправку. Однако заранее определить уровень консервативности этого решения является нетривиальной задачей, и область разрешимости может быть чрезмерно ограниченной. Эту трудность можно преодолеть, например, следующим образом. Предположим, что корректирующую поправку,

полученная с помощью аппроксимации исходной нелинейной модели линейной моделью, обеспечивает сходимость. Тогда, если исходная нелинейная система с этой корректирующей поправкой удовлетворяет условиям теоремы 1, то этот закон обеспечит сходимость ошибки обучения в исходной системе. Другими словами, сначала проектируется линейный закон для системы без люфтов, затем к нему добавляются ограничения на нелинейность (16) и снова проверяются условия теоремы 1. Поскольку эти ограничения квадратичные, их проверка сводится к дополнительным ЛМН. Подход, основанный на этой идее, подробно описан ниже и позволяет существенно снизить консерватизм решения и расширить степень свободы выбора весовых матриц.

Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (17) в виде квадратичных форм

$$V_1(\eta_{k+1}(p)) = \eta_{k+1}(p)^T P_1 \eta_{k+1}(p), \quad (22)$$

$$V_2(e_{k+1}(p)) = e_{k+1}(p)^T P_2 e_{k+1}(p), \quad (23)$$

где $P_1 > 0$ и $P_2 > 0$ и вычислим дискретный аналог дивергенции этой функции в силу (14):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d V(\eta, e) = & [\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}]\zeta + \bar{B}(\delta)\varphi]^T \times \\ & \times P [\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}]\zeta + \bar{B}(\delta)\varphi] - \zeta^T P \zeta, \end{aligned} \quad (24)$$

где $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$, $K = [K_1 \ K_2]$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} A(\delta) & 0 \\ -CA(\delta) & I \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} B(\delta) \\ -CB(\delta) \end{bmatrix}$, $\bar{C} = [C \ I]$, $\zeta_k(p) = \begin{bmatrix} \eta_{k+1}^T(p) & e_k^T(p) \end{bmatrix}^T$.

Пусть матрицы S и K удовлетворяют билинейному матричному неравенству (Риккати)

$$\begin{aligned} & (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})^T S (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}) - S + \\ & + Q + (K\bar{C})^T R K \bar{C} \leq 0, \quad \delta \in \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2] \succ 0$ и $R \succ 0$ – весовые матрицы, которые подлежат выбору. Они аналогичны весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора, и их выбор осуществляется на основе результатов этой теории.

Следуя известным в технике линейных матричных неравенств преобразованиям [16], получим, что разрешимость неравенства (25) эквивалентна разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно перемен-

ных X , Y и Z :

$$\begin{bmatrix} X & (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)Y\bar{C})^T & X & (Y\bar{C})^T \\ (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)Y\bar{C}) & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y\bar{C} & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \delta \in \mathbf{D}_v,$$

$$\bar{C}X = Z\bar{C}, \quad (26)$$

$$X = \text{diag} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \text{diag}[X_{11} \ X_{22}].$$

Если эти ЛМН разрешимы, то $S = X^{-1}$ и

$$K = YZ^{-1}. \quad (27)$$

Следуя [12], можно показать, что для K , заданной формулой (27), условия теоремы 1 выполняются при $\gamma = 0$, что гарантирует сходимость ошибки при $\varphi_k(p) = 0$.

Как упоминалось ранее, в предлагаемом методе сначала находится закон управления с итеративным обучением для линейной модели, а затем для этого закона будут проверены условия сходимости, основанные на полной модели (14), которая включает люфт. Этот подход имеет следующую мотивацию: как правило, необходимо многократно корректировать весовые матрицы при синтезе системы управления, чтобы получить удовлетворительную скорость сходимости ошибки обучения. Для такой коррекции в линейной модели предусмотрена более широкая свобода выбора, за счет чего можно ожидать снижения консерватизма.

Для нахождения условий, при которых закон управления (8), (13) обеспечивает условия сходимости и ограниченности (7) при наличии люфта, установлен следующий новый результат.

Теорема 2. Пусть для заданных ограничений (16) и некоторых матриц $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ существует решение $X = \text{diag}[X_1 \ X_2] \succ 0$, Y , Z системы (26), такое что ЛМН

$$\begin{bmatrix} -W & 0 & (\bar{A}(\delta)W + \bar{B}(\delta)KW)^T \\ 0 & -\tau & \bar{B}(\delta)^T \\ (\bar{A}(\delta)W + \bar{B}(\delta)KW) & \bar{B}(\delta) & -W \end{bmatrix} \prec 0, \quad \delta \in \mathbf{D}_v \quad (28)$$

при K определяемым (27), разрешимо относительно переменных $W = \text{diag}[W_1 \ W_2] \succ 0$, и скаляра $\tau > 0$. Тогда закон управления с итеративным обучением (8), (13) обеспечивает условия сходимости (7).

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 2 в [2], можно показать, что при условии (28) дискретный аналог дивергенции $\mathbf{D}_d V(\eta, e)$, определенный формулой (24), удовлетворяет (21) с $\gamma = \tau(\Delta c)^2$ и, следовательно, выполняются все условия теоремы 1. Детали опущены, поскольку они за небольшими исключениями повторяют доказательство упомянутой теоремы из [2]. \square

5 Пример

Проверка эффективности предложенного алгоритма и анализ влияния величины зоны нечувствительности характеристики люфта проводилась на модели многоосного портального робота [17]. Робот осуществляет захват предмета с раздаточного устройства и размещение его на движущийся конвейер (рисунки 4, 5). Принцип работы робота довольно точно соответствует принципам работы многих промышленных систем, выполняющих повторяющиеся операции, поэтому результаты анализа влияния величины зоны нечувствительности на примере модели такого робота помогут дать рекомендации для практического применения для целого класса промышленных систем.



Рис. 4: Многоосный портальный робот

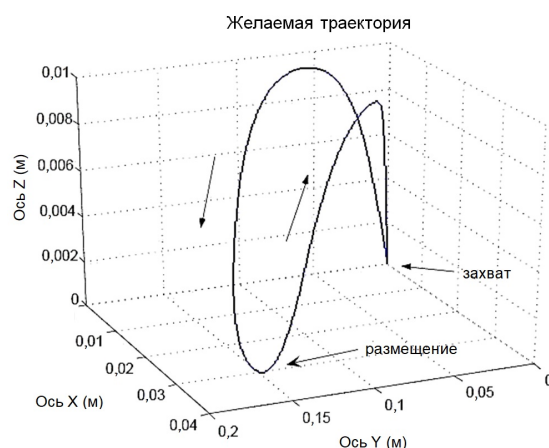


Рис. 5: Пространственный график желаемой траектории движения многоосного портального робота.

Рассмотрим модель движения вдоль горизонтальной оси Y . Полученная экспериментально передаточная функция от входного сигнала к перемещению вдоль этой оси представлена в [17] и имеет вид

$$G_y(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{23.7356(s + 661.2)}{s(s^2 + 426.7s + 1.744 \cdot 10^5)}. \quad (29)$$

Желаемая траектория робота вдоль горизонтальной оси Y представлена на рисунке 6 и имеет продолжительность повторения $T = 2$ с. Задачей робота является воспроизведение желаемой траектории с точностью до 0.5 мм.

Матрицы параметров дискретной модели получены с помощью стандартных функций `ss` и `c2d` пакета MATLAB с шагом дискретизации $T_s = 0,01$ с.

Предлагается, что параметры системы точно неизвестны. Для простоты дальнейшего анализа, чтобы сосредоточить внимание на влиянии люфта, ограничимся неопределенностями только по матрице параметров $B_c(\delta)$:

$$B_c(\delta) = B_c + g(\delta)B_c, \quad g(\delta)B_c = \delta B_c, \quad \delta = [\underline{g}; \bar{g}],$$

где $\underline{g} = -0.2$, $\bar{g} = 0.2$.

Следуя результатам, представленным в предыдущих разделах, закон управления с итеративным обучением (8) имеет вид

$$u_{k+1}(p) = \psi_k(p) + K_1 C(x_{k+1}(p) - x_k(p)) + K_2 e_k(p + 1). \quad (30)$$

где K_1 и K_2 вычисляются по Теореме 1.

Если для нелинейности запоминаются входные данные нелинейности, то закон управления с итеративным обучением (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{k+1}(p) &= \text{back}(u_{k+1}(p)), \\ u_{k+1}(p) &= u_k(p) + K_1 C(x_{k+1}(p) - x_k(p)) + K_2 e_k(p + 1). \end{aligned} \quad (31)$$

Задавая весовые матрицы $Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2]$, $Q_1 = \text{diag}[1 \ 1 \ 1]$, $Q_2 = 5 \cdot 10^2$, $R = 10^{-4}$ и решая (26), получим следующие матрицы усиления стабилизирующего управления

$$K_1 = -1215.7, \quad K_2 = 1097.9$$

и неравенство (28) из Теоремы 2 будет выполняться для всех значений величины зоны нечувствительности.

Для оценки точности воспроизведения желаемой траектории и анализа влияния люфта на точность строится среднеквадратичная ошибка обучения

$$\text{RMS}(e_k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \|e_k(p)\|^2}. \quad (32)$$

Далее проанализируем оба случая, когда нелинейная часть в законе управления с итеративным обучением формируется в виде (30) и в виде (31).

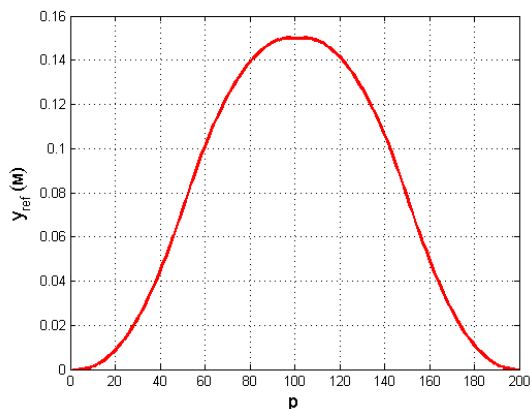


Рис. 6: Желаемая траектория движения вдоль вертикальной оси Y .

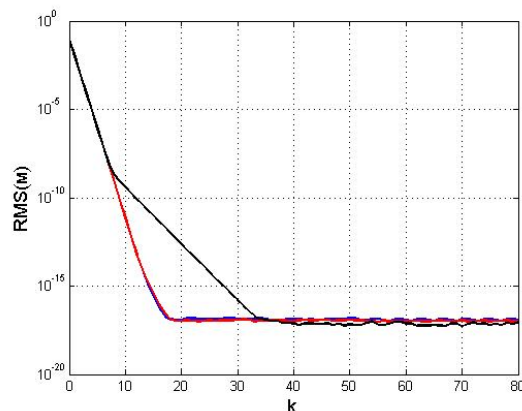


Рис. 7: Среднеквадратичная ошибка обучения в случае **отсутствия люфта** (красная линия – для номинальной системы, черная линия – для системы с нижним значением неопределенного параметра, синяя линия – для системы с верхним значением неопределенного параметра).

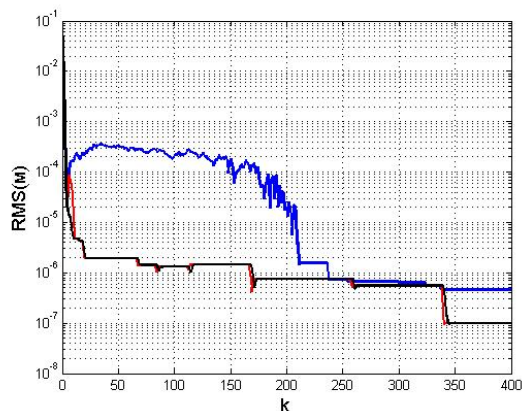


Рис. 8: Среднеквадратичная ошибка обучения при наличии люфта с границами зоны нечувствительности $c_r = 0.4$, $c_l = -0.4$ при формировании нелинейности по **входным** данным (красная линия – для номинальной системы, черная линия – для системы с нижним значением неопределенного параметра, синяя линия – для системы с верхним значением неопределенного параметра).

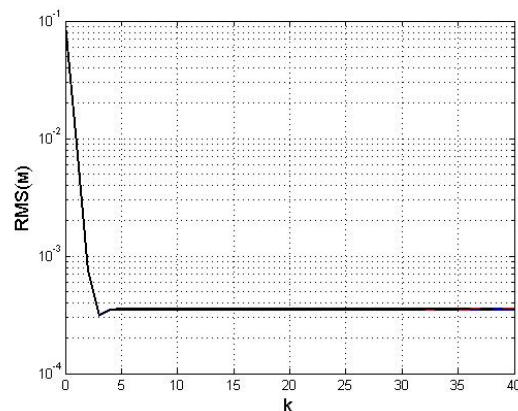


Рис. 9: Среднеквадратичная ошибка обучения при наличии люфта с границами зоны нечувствительности $c_r = 0.4$, $c_l = -0.4$ при формировании нелинейности по **выходным** данным (красная линия – для номинальной системы, черная линия – для системы с нижним значением неопределенного параметра, синяя линия – для системы с верхним значением неопределенного параметра).

При отсутствии люфта робот достигает требуемой точности работы за две итерации, а ошибка обучения сходится к компьютерному нулю за 18 итераций для номинальной модели и для верхней границы области неопределенности (рисунок 7 синяя и красная линии) и за 34 итерации для нижней границы области неопределенности (рисунок 7, черная линия).

При наличии зоны нечувствительности с границами $c_r = 0.4$, $c_l = -0.4$ в случае использования закона (31) скорость сходимости ошибки обучения к установившемуся значению уменьшится кратно, сходимость будет иметь ступенчатый скачкообразный характер и установившееся значение будет отличаться от нуля. Для номинальной модели и нижней границы области неопределенности значение ошибки обучения начнет устанавливаться с 21-й итерации со следующим большими скачками на 175-м и 345-м шаге (рисунок 8, красная и черная линии). Для верхней границы области неопределенности значение начнет устанавливаться лишь с 240-й итерации (рисунок 8, синяя линия). В случае использования закона (30) установившееся значение достигается за две итерации, но оно на 3 порядка больше, чем в случае использования закона (31) и неизменно при дальнейшем обучении, что показано на рисунке 9. Кроме того, характер сходимости ошибки обучения в этом случае идентичный для всех значений неопределенного параметра. Точность в 0.5 мм достигается за две итерации в обоих случаях для всех значений неопределенного параметра.

Механизм компенсации люфта можно объяснить следующим образом: в зависимости от p люфт может быть описан одним из трех законов в (2). При их переключении возникает переходный процесс в направлении p , отображаемый на кривой среднеквадратичной ошибки обучения характерными «клювами» и ступеньками (рисунки 8, 10, 12). Управление с итеративным обучением компенсирует эти возмущения и продолжает медленно уменьшать ошибку до тех пор, пока переключение между законами в (2) не станет невозможным. Это объясняет ступенчатый характер изменения ошибки обучения. Другими словами, закон управления с итеративным обучением рассматривает нелинейность как повторяющееся возмущение и компенсирует ее на протяжении многих шагов. Можно утверждать, что закон управления с итеративным обучением (31) в значительной степени подавляет нелинейность и компенсирует ее посредством длительного обучения.

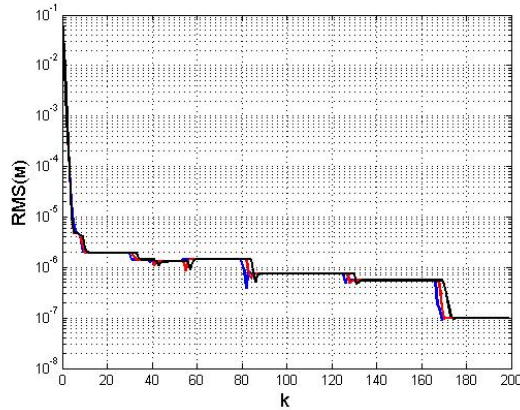


Рис. 10: Среднеквадратичная ошибка обучения при наличии люфта с границами зоны нечувствительности $c_r = 0.2$, $c_l = -0.2$ при формировании нелинейности по **входным** данным (красная линия – для номинальной системы, черная линия – для системы с нижним значением неопределенного параметра, синяя линия – для системы с верхним значением неопределенного параметра).

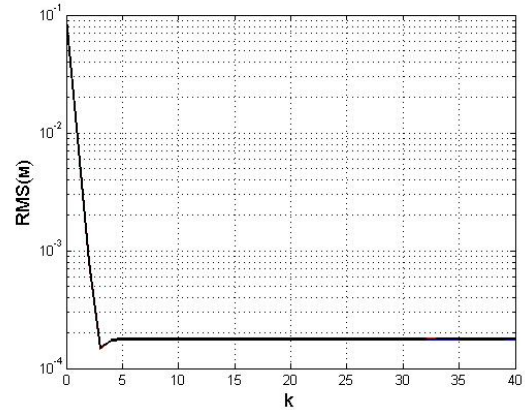


Рис. 11: Среднеквадратичная ошибка обучения при наличии люфта с границами зоны нечувствительности $c_r = 0.2$, $c_l = -0.2$ при формировании нелинейности по **выходным** данным (красная линия – для номинальной системы, черная линия – для системы с нижним значением неопределенного параметра, синяя линия – для системы с верхним значением неопределенного параметра).

В случае сужения зоны нечувствительности в два раза до $c_r = 0.2$, $c_l = -0.2$, и применения закона управления (31), ошибка начинает устанавливаться на 10-й итерации, что в два раза быстрее исходного случая, со следующими большими скачками на 90-й и 175-й итерации, что показано на рисунке 10. Кроме того, в этом случае характер и скорости сходимости будут одинаковые для всех значений неопределённого параметра. При применении закона управления (30), установившееся значение по прежнему будет неизменно со второй итерации и на 3 порядка больше, чем при применении закона управления (31), и характер сходимости ошибки обучения так же идентичный для всех значений неопределенного параметра. Данный случай продемонстрирован на рисунке 11. Точность в 0.5 мм достигается за две итерации в обоих случаях.

С увеличением зоны нечувствительности в два раза до $c_r = 0.8$, $c_l = -0.8$, при применении закона управления (31), компенсация кратно замедляется и ошибка начинает устанавливаться лишь на 450-й итерации для номинальной модели, 430-й – для нижней границы области неопределенности и только на 660-й итерации для верхней границы области неопределенности, что показано на рисунке 12, и за счет широкой зоны нечувствительности, переключения

законов в (2) происходят достаточно часто по сравнению с предыдущими случаями. Кроме того, требуемая точность 0,5 мм достигается за 3 итерации для всех значений неопределенного параметра, но далее за счет большой зоны нечувствительности точность нарушается и окончательно достигается только на 47-й итерации для нижней границы области неопределенности, на 69-й итерации для номинальной модели и на 385-й итерации для верхней границы области неопределенности. При применении закона управления (30) установившееся значение будет на 3 порядка больше, чем при применении закона управления (31), оно также не изменяется при дальнейшем обучении, как и в предыдущем случае, но, что важно, требуемая точность 0,5 мм не достигается.

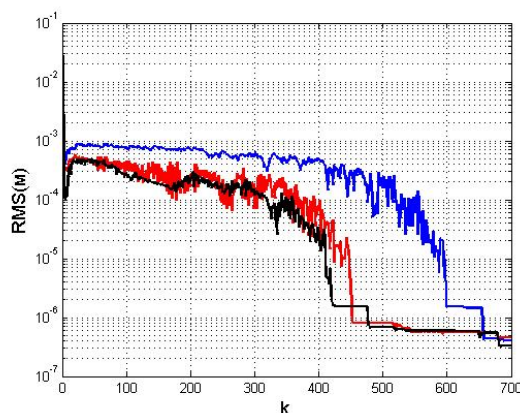


Рис. 12: Среднеквадратичная ошибка обучения при наличии люфта с границами зоны нечувствительности $c_r = 0.8$, $c_l = -0.8$ при формировании нелинейности по **входным** данным (красная линия – для номинальной системы, черная линия – для системы с нижним значением неопределенного параметра, синяя линия – для системы с верхним значением неопределенного параметра).

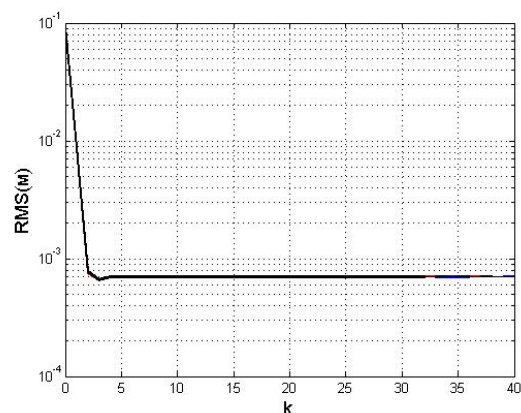


Рис. 13: Среднеквадратичная ошибка обучения при наличии люфта с границами зоны нечувствительности $c_r = 0.8$, $c_l = -0.8$ при формировании нелинейности по **выходным** данным (красная линия – для номинальной системы, черная линия – для системы с нижним значением неопределенного параметра, синяя линия – для системы с верхним значением неопределенного параметра).

Характерной особенностью закона управления (30) является то, что установившееся значение достигается значительно быстрее, но оно значительно больше, чем в случае закона управления (31) и никак не меняется в процессе дальнейшего обучения. Поэтому в этом случае возможна ситуация, когда требуемая точность не будет достигнута, что и показано на рисунке 13. Таким образом, на основании проведенного анализа можно утверждать, что закон управления (31) предпочтительнее для реализации.

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получен новый метод синтеза управления с итеративным обучением для дискретной системы с неопределенными параметрами с учетом нелинейности типа люфта на основе информации об измеряемом выходном сигнале и прямым заданием желаемой траектории. Новый метод позволяет оценить влияние величины зоны нечувствительности характеристик люфта на точность воспроизведения желаемой траектории. Приведен сравнительный анализ двух типов корректирующих поправок. Показано, что различные виды функции нелинейности типа люфта (на основе выходных или входных данных) дают разные результаты.

На основе исследования случая можно утверждать, что в случае, когда для формирования корректирующей поправки в законе управления не используются выходные данные нелинейности, при достаточно широких требованиях к точности и большом разбросе неопределенных параметров, нелинейность типа люфта не оказывает существенного влияния на точность выполнения операций, она компенсируется обучением, но обучением длительным. Таким образом, при формировании нелинейности на основе входных данных, как в (31), закон управления существенно подавляет этот тип нелинейности.

Дальнейшие исследования будут направлены на строгое теоретическое обоснование представленных результатов.

7 Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01044, <https://rscf.ru/project/23-71-01044/>

Список литературы

- [1] Emelianova J. Iterative Learning Control of an Uncertain System with Input Saturation Using the Measurable Output // Proceedings of the 11th International Conference on Systems and Control (ICSC 2023). – 2023. – p. 219–224.
- [2] Емельянова Ю.П. Управление с итеративным обучением на основе наблюдаемого выхода с учетом нелинейности типа насыщения // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2024. – №. 3. – с. 47-66.

- [3] He W., Meng T., Zhang S., Liu J.-K., Li G., Sun C. Dual-Loop Adaptive Iterative Learning Control for a Timoshenko Beam With Output Constraint and Input Backlash // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. – 2019. 49(5). – pp. 1027–1038.
- [4] Zhou X., Wang H., Tian Y., Zheng G. Disturbance Observer-Based Adaptive Boundary Iterative Learning Control for a Rigid-Flexible Manipulator with Input Backlash and Endpoint Constraint // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. – 2020. – 34 (9). – pp. 1220-1241.
- [5] Wei Z.-B., Qua, Q., Cai K.-Y. Output Feedback ILC for a Class of Nonminimum Phase Nonlinear Systems With Input Saturation: An Additive State-Decomposition-Based Method // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2017. – 62(1). – pp. 502–508.
- [6] Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
- [7] Tao G., Kokotovic P.V. Adaptive control of systems with backlash // *Automatica*. – 1993. – 29(2). – pp. 323–335.
- [8] Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burrige J.H., Meadmore K.T. Iterative Learning Control in Health Care: Electrical Stimulation and Robotic-Assisted Upper-Limb Stroke Rehabilitation // *IEEE Control Systems*. – 2012. – V. 32, Issue 1. – pp. 18-43.
- [9] Meadmore K. L., Exell T. A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C.T., Kutlu M., Benson V., Rogers E. , Burrige J. H. The application of precisely controlled functional electrical stimulation to the shoulder, elbow and wrist for upper limb stroke rehabilitation: a feasibility study // *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 11(1):105, 2014.
- [10] Sakariya S. E., Freeman C. T., Yang K. Iterative learning control of functional electrical stimulation in the presence of voluntary user effort // *Control Engineering Practice*. – 2020. – vol. 96, 104303.
- [11] Byungjun Kim, Seibum B.Choi. Terminal iterative learning control for an electrical powertrain system with backlash // *2023 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*. – 2023. – pp. 2991–2996.

- [12] Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K. Iterative learning control for discrete systems with input backlash // IFAC-PapersOnLine. – 2023. – Vol. 56-2. – pp. 1069–1074.
- [13] Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E. Dissipativity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes. Systems & Control Letters. – 2016. – V. 91. – pp. 14-20.
- [14] Rogers E., Chu B., Freeman C., Lewin P. Iterative Learning Control Algorithms and Experimental Benchmarking. John Wiley, 2023.
- [15] Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Rogers E., Galkowski K. Iterative Learning Control of Discrete Systems With Actuator Backlash Using a Weighted Sum of Previous Trial Control Signals // IEEE Control Systems Letters. – 2023. – Vol. 7. – pp. 2958-2963.
- [16] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [17] Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P. Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // Control Engineering Practice. – 2010. – V. 18. – pp. 339-348.

Output Based Iterative Learning Control of an Uncertain System with Input Backlash

Emelianova J.P.

Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State
Technical University

emelianovajulia@gmail.com

Abstract. This paper considers iterative learning control (ILC) design problem for a discrete system operating in a repetitive mode with the backlash-type nonlinearity, inherent in robot actuators, using the measurable output and with two type of update laws. The system parameters are incompletely known and are described by the affine uncertainty model. The problem statement is motivated by the development trends of high-precision smart and additive manufacturing as well as medical rehabilitation robots. A new ILC design method with direct specification of the reference trajectory is obtained. Using a gantry robot as an example, the influence of the backlash dead zone on the accuracy of the reference trajectory tracking is investigated and a comparative analysis with two type of update laws is given.

Keywords: iterative learning control, input backlash, parameter uncertainties, vector Lyapunov function.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation under grant 23-71-01044, <https://rscf.ru/en/project/23-71-01044/>