

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N 2, 2015

Электронный журнал,

рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Динамические системы

## О спектре Морса в случае гомоклинического касания

Осипенко Г. С.

Московский государственный университет им. Ломоносова, филиал в Севастополе

299001, г. Севастополь, ул. Героев Севастополя, 7

[george.osipenko@mail.ru](mailto:george.osipenko@mail.ru)

Ампилова Н.Б.

Санкт-Петербургский Государственный университет

199034 С.Петербург, Университетская наб.7/9

[n.ampilova@spbu.ru](mailto:n.ampilova@spbu.ru)

### Аннотация

Среди характеристик динамических систем одной из важных является спектр Морса — предельное множество показателей Ляпунова периодических псевдотраекторий. Эта характеристика особенно важна, когда динамическая система имеет бесконечно много периодических траекторий большого периода. Практический подход к вычислению спектра Морса был предложен Г. Осипенко на основе разработанного им метода символического образа. Символический образ представляет собой ориентированный граф, отражающий динамику преобразования ячеек фазового пространства под действием системы. Как было показано в работах Г.Осипенко, спектр Морса оснащенного символического образа системы позволяет построить приближение к спектру исходной системы. В данной работе изучается структура спектра Морса в случае гомоклинического касания устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболической неподвижной точки. Доказано, что спектр Морса содержит отрезок, концы которого определяются устойчивым и неустойчивым показателями Ляпунова гиперболической неподвижной точки.

## Abstract

The Morse spectrum is defined as the limit set of Lyapunov exponents and is one of main characteristics of dynamical systems. It is important for system having infinitely many trajectories with long periods. G. Osipenko supposed a practical approach to the Morse spectrum computation, which is based on the symbolic image method. Symbolic image of a dynamical system is an oriented graph presenting the dynamics of the transformation of the system phase space. As it was shown by G. Osipenko, the Morse spectrum of labeled symbolic image is an approximation of a given system spectrum. In this work we study the structure of the Morse spectrum when there is homoclinic tangency of stable and unstable manifolds of a fixed hyperbolic point. We prove that the spectrum contains the segment for which initial and end points are defined by stable and unstable Lyapunov exponents of this point.

## 1 Введение

В теории динамических систем методы символической динамики, позволяющие описать динамику системы с помощью последовательностей слов, построенных над конечным алфавитом, стали важным разделом. Термин был введен Х. Морсом и Ж. Хедлундом. Большой вклад в развитие теории внес Р. Боуэн [2]. Подробное описание методов символической динамики дано в [6, 7]. Широкое распространение получили методы прикладной символической динамики, в частности метод символического образа, основанный на построении по заданному разбиению фазового пространства ориентированного графа. Описанию метода и его применения при исследовании динамических систем посвящены работы [1, 8, 9, 11, 12].

Применение метода символического образа позволило получить оценку для спектра Морса динамической системы, который был определен Ф. Колониусом как предельное множество показателей Ляпунова для псевдотраекторий системы. Он же показал, что спектр Морса совпадает со спектром Морса для периодических траекторий. Оказалось, что конструкция оснащенного символического образа, в которой на дугах графа расставляются значения дифференциала отображения, вычисленного в центре ячейки разбиения, позволяет вычислить приближение к спектру Морса исходной системы. Разработка и реализация алгоритма дана в [10].

В данной работе исследуется структура спектра Морса в случае гомоклинического касания устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболиче-

ской неподвижной точки диффеоморфизма плоскости.

## 2 Основные определения

Пусть  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  диффеоморфизм плоскости с гиперболической неподвижной точкой  $O$ . Обозначим  $W^s$  и  $W^u$  устойчивое и неустойчивое многообразия точки  $O$ . Предположим, что существует точка  $Q$ , в которой эти многообразия пересекаются касаясь. Это означает, что точка  $Q$  является гомоклинической и касательные пространства  $TW^s(Q)$  и  $TW^u(Q)$  совпадают. Такой случай мы будем называть гомоклиническим касанием. Обозначим  $\Omega$  замыкание гомоклинической траектории  $Tr(Q)$ , которое состоит из этой траектории и гиперболической точки  $O$ .

### 2.1 Действие дифференциала на проективном расслоении

Пусть  $f$  диффеоморфизм многообразия  $M$ ,  $d = \dim M$ . В нашем случае  $M = \mathbb{R}^2$ . Рассмотрим гладкую дискретную систему

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1)$$

на многообразии  $M$ . Обозначим  $TR(x_0) = \{x_k = f^k(x_0), k \in \mathbb{Z}\}$  траекторию точки  $x_0$ . Дифференциал в точке  $x$  есть матрица Якоби

$$Df(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

которая задает линейное отображение

$$v_{n+1} = A(x_n)v_n, \quad (2)$$

где  $A(x_n) = Df(x_n)$ ,  $v$  — вектор касательного пространства.

Любое невырожденное линейное отображение  $A : v \rightarrow Av$ ,  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $|v| \neq 0$  можно представить в виде:

$$Av = |Av| \cdot Av/|Av| = r|Ae| \cdot Ae/|Ae| = r|Ae| \cdot A_s(e),$$

где  $r = |v|$ ,  $e = \frac{v}{|v|} \in S^{d-1}$ ,  $S^{d-1}$  — единичная сфера. Таким образом, линейное отображение  $A : v \rightarrow Av$  есть произведение двух отображений

$$e \rightarrow A_s(e) = Ae/|Ae|,$$

$$r \rightarrow r |Ae|,$$

где первое действует на сфере  $S^{d-1}$ , а второе действует на положительной полупрямой  $\mathbb{R}^+$  и сомножитель  $|Ae|$  задает коэффициент изменения длины вектора. Напомним, что проективное пространство  $P^{d-1}$  есть множество одномерных подпространств в  $\mathbb{R}^d$ , оно может быть получено путем отождествления диаметрально противоположных точек единичной сферы  $S^{d-1}$ . Симметричность отображения  $A_s(e)$  относительно изменения знака  $A_s(\pm e) = \pm A_s(e)$  позволяет нам отождествить противоположные точки на сфере и определить динамическую систему на проективном пространстве  $P^{d-1}$ . Таким образом, мы получаем отображение

$$Pf(x, e) = (f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|})$$

на проективном расслоении  $P = \{(x, e) : x \in M, e \in P^{d-1}(x)\}$ , которое порождает дискретную динамическую систему вида

$$x_{n+1} = f(x_n), e_{n+1} = \frac{Df(x_n)e_n}{|Df(x_n)e_n|} \quad (3)$$

на проективном расслоении  $P$ . Величина  $a(x, e) = |Df(x)e|$  есть коэффициент изменения длины на подпространстве  $e$ .

**Определение 1** Бесконечная в обе стороны последовательность точек  $\{x_i, -\infty < i < +\infty\}$  называется  $\varepsilon$ -траекторией (или псевдотраекторией), если расстояние между образом  $f(x_i)$  и  $x_{i+1}$  меньше чем  $\varepsilon$ :

$$\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

для любого  $i$ . Если при этом последовательность  $\{x_i\}$  является периодической, то она называется периодической  $\varepsilon$ -траекторией, а точки  $x_i$  называются  $\varepsilon$ -периодическими. Если надо указать период  $p$ , то мы будем говорить о  $(p, \varepsilon)$ -периодической траектории.

Следует подчеркнуть, что, как правило, точная траектория системы редко известна, а в действительности мы вычисляем только  $\varepsilon$ -траекторию для достаточно малых положительных  $\varepsilon$ .

**Пример 1** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  рассмотрим отображение вида:  $f(x, y) = (y, 0.05(1 - x^2)y - x)$  и возьмем последовательность точек  $x_1 = (2, 0)$ ,  $x_2 = (0, -2)$ ,  $x_3 = (-2, 0)$ ,  $x_4 = (0, 2)$ ,  $x_{k+4} = x_k$ .

Нетрудно проверить, что данная последовательность является 4-периодической  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0.1$ . Действительно,  $f(2, 0) = (0, -2)$ ;  $f(0, -2) = (-2, -0.1)$ ;  $f(-2, 0) = (0, 2)$ ,  $f(0, 2) = (2, 0.1)$ . Таким образом,  $|x_{k+1} - f(x_k)| \leq 0.1$  для  $k = 1, 2, 3, 4$ . Рисунок 1 иллюстрирует сказанное.

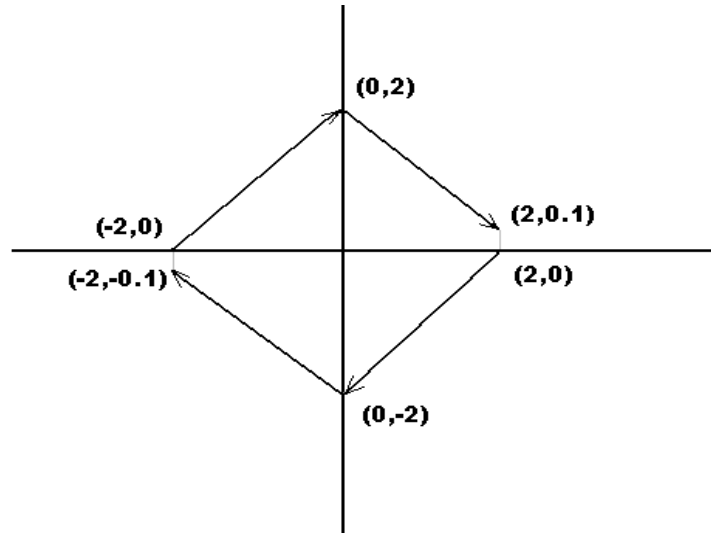


Рис. 1: Псевдотраектория отображения  $f(x, y) = (y, 0.05(1 - x^2)y - x)$ .

Мы можем рассматривать преобразования из точки  $(-2, -0.1)$  в точку  $(-2, 0)$  и из точки  $(2, 0.1)$  в точку  $(2, 0)$  как сдвиги, прыжки или коррекции величиной 0.1.

**Определение 2 [5]** Точка  $x$  называется цепно-рекуррентной, если для любого положительного  $\varepsilon$  существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория, проходящая через точку  $x$ . Цепно-рекуррентное множество состоит из всех цепно-рекуррентных точек и обозначается через  $CR$ .

Цепно-рекуррентное множество  $CR$  является инвариантным, замкнутым и содержит все типы возвратных траекторий: периодические, почти-периодические, неблуждающие, гомоклинические и т.д. Отметим, что, если цепно-рекуррентная точка не является периодической и  $\dim M > 1$ , то существует сколь угодно малое возмущение  $f$  в  $C^0$ -топологии, для которого данная точка является периодической [13]. Можно сказать, что цепно-рекуррентные точки порождают периодические траектории при  $C^0$ -возмущениях.

## 2.2 Спектр Морса

Рассмотрим цепно-рекуррентное множество отображения

$$Pf(x, e) = (f(x), Df(x)e/|Df(x)e|)$$

на проективном расслоении  $P = \{(x, e), x \in M, e \in P(x)\}$ . Напомним, что, если  $\xi = \{(x_k, e_k), k \in \mathbb{N}^+\}$  является  $\varepsilon$ -полутраекторией отображения  $Pf$ , тогда число

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \ln |Df(x_k)e_k|$$

есть характеристический показатель Ляпунова этой полутраектории. Пусть  $\xi = \{(x_k, e_k)\}$  есть  $p$ -периодическая псевдотраектория, тогда Ляпуновский показатель этой псевдотраектории есть среднее арифметическое по периоду

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \ln |a(x_k, e_k)| = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \ln |Df(x_k)e_k|. \quad (4)$$

**Определение 3** Спектр Морса  $\Sigma$  определяется как

$$\Sigma = \{\lambda \in R : \text{существуют } \varepsilon_k - \text{траектории } \xi_k, \text{ что } \varepsilon_k \rightarrow 0, \lambda(\xi_k) \rightarrow \lambda \text{ при } k \rightarrow \infty\}.$$

В работе [4] было показано, что спектр Морса совпадает с периодическим спектром Морса, который определяется как

$$\Sigma = \{\lambda \in R : \text{существуют периодические } \varepsilon_k - \text{орбиты } \xi_k, \text{ что } \varepsilon_k \rightarrow 0, \lambda(\xi_k) \rightarrow \lambda \text{ при } k \rightarrow \infty\}.$$

Таким образом, спектр Морса есть предельное множество показателей Ляпунова периодических  $\varepsilon$ -траекторий при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Из результатов главы 12 книги [11] следует, что каждая компонента  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества  $CR(Pf)$  отображения  $Pf$  на проективном расслоении  $P$  порождает отрезок  $[\lambda_{\min}(\Omega), \lambda_{\max}(\Omega)]$ , где  $\lambda_{\min}(\Omega)$  и  $\lambda_{\max}(\Omega)$  наименьший и наибольший предельные показатели Ляпунова периодических псевдотраекторий компоненты  $\Omega$ . Описанные интервалы для различных компонент цепно-рекуррентного множества  $CR(Pf)$  могут пересекаться [4]. Каждая компонента  $\Omega_{ik}$  цепно-рекуррентного множества  $CR(Pf)$  на проективном расслоении  $P$  проектируется на некую компоненту  $\Omega_i$

цепно-рекуррентного множества  $CR(f)$  на многообразии  $M$ . Число  $i$  цепно-рекуррентных компонент на  $M$  не ограничено, но число  $k$  компонент  $\Omega_{ik} \subset P$ , которые проектируются на фиксированную компоненту  $\Omega_i \subset M$  не превышает размерности многообразия  $M$  [11]. В этой же работе описан метод, основанный на использовании символического образа динамической системы, который позволяет построить спектр Морса с любой точностью.

### 2.3 Примеры гомоклинического касания

Рассмотрим пример гомоклинической траектории, который позволяет понять, как появляются отрезки в спектре Морса. Пусть  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  диффеоморфизм плоскости с гиперболической неподвижной точкой  $O$ . Обозначим  $W^s$  и  $W^u$  устойчивое и неустойчивое многообразия точки  $O$ . Предположим, что существует точка  $Q$ , в которой эти многообразия пересекаются касаясь. Это означает, что точка  $Q$  является гомоклинической и касательные пространства  $TW^s(Q)$  и  $TW^u(Q)$  совпадают. Такой случай мы будем называть гомоклиническим касанием. Примером такого отображения может быть

$$f(x, y) = (bx + y + ax(1 - x), y + ax(1 - x)),$$

при  $a=1.511717565$ ,  $b=0.93$ , см. рис. 2. В работе [3] построен пример гомо-

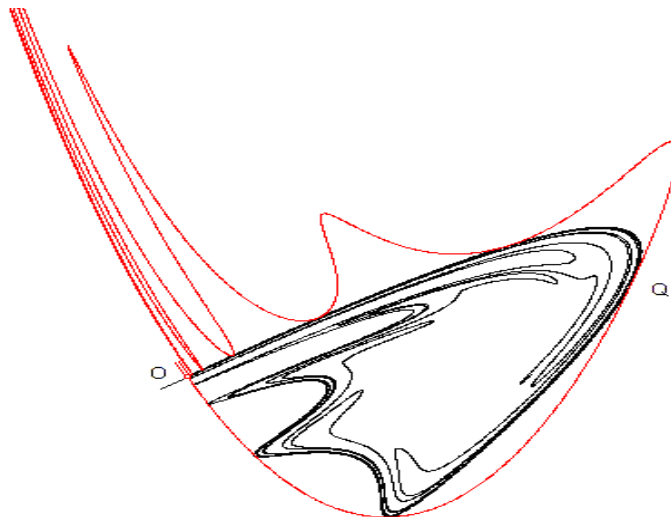


Рис. 2: Гомоклиническое касание для  $f(x, y) = (bx + y + ax(1 - x), y + ax(1 - x))$ ,  $a=1.511717565$ ,  $b=0.93$ .

клинического касания, динамика которого обладает следующими свойствами. Существует последовательность периодических траекторий, сходящихся

к гомоклинической орбите. Периодические траектории являются гиперболическими, и при этом характеристические показатели этих траекторий равномерно отделены от нуля. Однако угол между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами не отделен от нуля, что является естественным в случае гомоклинического касания.

### 3 Формулировка и доказательство основных утверждений

Мы покажем, что в случае гомоклинического касания цепно-рекуррентное множество в проективном расслоении содержит весь слой  $P^1$  над гиперболической точкой  $O$  и, как следствие, спектр Морса содержит отрезок  $[\lambda_s, \lambda_u]$ , где  $\lambda_s$  и  $\lambda_u$  — устойчивый и неустойчивый характеристические показатели точки  $O$ .

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1** *Цепно-рекуррентное множество действия дифференциала  $Df$  на проективном расслоении содержит произведение  $\Omega \times P^1$ , где  $P^1$  — одномерное проективное пространство.*

**Теорема 2** *Спектр Морса отображения  $f$  содержит отрезок  $[\lambda_s, \lambda_u]$ , где  $\lambda_s$  и  $\lambda_u$  — устойчивый и неустойчивый показатели Ляпунова.*

Рассмотрим цепно-рекуррентное множество  $CR$  отображения

$$Pf(x, e) = (f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|})$$

на проективном расслоении  $P = R^2 \times P^1$ , где  $P^1$  обозначено одномерное проективное пространство, которое является окружностью длины  $\pi$ . Расстоянием на  $P^1$  является угол между прямыми (подпространствами), которые можно отождествить с единичными векторами  $e$ , определенными с точностью до знака.

**Утверждение 1** *Цепно-рекуррентное множество  $CR(Pf)$  отображения  $Pf$  на проективном расслоении  $P$  содержит одномерное проективное пространство  $P^1(O)$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  и любого подпространства  $e \in P^1(O)$  существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория отображения  $Pf$ , проходящая через  $e$ .*



**Доказательство.** Над неподвижной точкой  $O$  отображение  $Pf(O)$  действует на  $P^1(O)$ , где имеет два неподвижных подпространства  $e^s = TW^s(O)$  и  $e^u = TW^u(O)$ , которые являются касательными к устойчивому и неустойчивому многообразиям. При этом,  $e^s$  является источником (репеллером) и  $e^u$  - стоком (аттрактором), двойственным к  $e^s$ , а все другие траектории начинаются в  $e^s$  и заканчиваются в  $e^u$ . Рассмотрим подпространство  $e$  отличное от  $e^s$  и  $e^u$ . Траектория  $Tr(O, e)$  подпространства  $e$  начинается в  $e^s$  и заканчивается в  $e^u$ . Гомоклиническая траектория  $Tr(Q)$  точки  $Q$  начинается и заканчивается в гиперболической точке  $O$ . Рассмотрим траекторию  $Tr(Q, e^*)$  подпространства  $e^* = TW^s(Q) = TW^u(Q)$  (над точкой  $Q$ ) под действием проективного отображения  $Pf$ . Из инвариантности устойчивых и неустойчивых подпространств следует, что

$$Tr(Q, e^*) = \{TW^s(x) = TW^u(x), x \in Tr(Q)\}.$$

Эта траектория начинается в  $O \times e^u$  и заканчивается в  $O \times e^s$ . Таким образом, мы построили две траектории  $Tr(O, e)$  и  $Tr(Q, e^*)$  на проективном расслоении, которые образуют цикл вида

$$(O, e^s) \rightarrow (O, e) \rightarrow (O, e^u) \rightarrow (Q, e^*) \rightarrow (O, e^s).$$

Покажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория отображения  $Pf$ , проходящая через  $e$ . Пусть расстояние  $\rho$  на проективном расслоении  $P = R^2 \times P^1$  определяется как максимум между расстоянием на плоскости и углом между подпространствами. Построим  $\varepsilon$ -окрестность  $U$  гиперболической точки  $O$ . Так как траектория  $Tr(Q)$  начинается и заканчивается в  $O$ , то существуют целое положительное число  $k$  такое, что  $f^{-k}(Q) \in U$ ,  $f^0(Q) = Q$ , и  $f^k(Q) \in U$ . При этом число  $k$  можно выбрать достаточно большим. Выберем это число так, что углы  $\angle(Df^{-k}e^*, e^u) < \varepsilon/2$  и  $\angle(Df^k e^*, e^s) < \varepsilon/2$ . Так как траектория  $Tr(O, e)$  подпространства  $e$  начинается в  $e^s$  и заканчивается в  $e^u$ , то существует целое положительное число  $n$  такое, что углы  $\angle(Df^{-n}e, e^s) < \varepsilon/2$  и  $\angle(Df^n e, e^u) < \varepsilon/2$ . Тогда расстояния

$$\rho((f^{-k}(Q), Df^{-k}e^*), (O, Df^n e)) < \varepsilon, \quad \rho((f^k(Q), Df^k e^*), (O, Df^{-n}e)) < \varepsilon,$$

что позволяет построить периодическую  $\varepsilon$ -траекторию вида

$$\xi^* = \{(O, Df^i e), -n \leq i \leq n; (f^j(Q), Df^j e^*), -k \leq j \leq k\}$$

на проективном расслоении. Эта псевдотраектория проходит через подпространство  $e$ , имеет период  $2(k+n)$ , величины  $k$  и  $n$  определяются величиной

$\varepsilon$ . Так как  $e$  было произвольным подпространством в  $O \times P^1$ , отличным от  $e^s$  и  $e^u$ , то вся окружность  $O \times P^1$  состоит из цепно-рекуррентных точек. Утверждение доказано.

**Замечание.** Из доказательства утверждения следует, что цепно-рекуррентное множество отображения  $Pf$  содержит траекторию  $Tr(Q, e^*)$ ,  $e^* = TW^s(Q) = TW^u(Q)$  и окружность  $O \times P^1$ .

Пусть  $f : R^2 \rightarrow R^2$  — описанный выше диффеоморфизм плоскости с гиперболической неподвижной точкой и гомоклинической орбитой. Обозначим  $\lambda_s$  и  $\lambda_u$  показатели Ляпунова гиперболической точки  $O$ ,  $\lambda_s < 0 < \lambda_u$ .

**Утверждение 2** Если устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической точки пересекаются касаясь, то спектр Морса содержит интервал  $[\lambda_s, \lambda_u]$ .

**Доказательство.** При доказательстве предыдущего утверждения были построены две траектории в проективном расслоении  $Tr(O, e)$  и  $Tr(Q, e^*)$ , которые образуют цикл

$$(O, e^s) \rightarrow (O, e) \rightarrow (O, e^u) \rightarrow (Q, e^*) \rightarrow (O, e^s).$$

Используя этот цикл, мы построили замкнутую псевдотраекторию. Устойчивое и неустойчивое подпространства  $e^s$  и  $e^u$  гиперболической точки являются неподвижными точками для проективного отображения  $Pf$ . Траектории этих точек  $Tr(O, e^s) = (O, e^s)$  и  $Tr(O, e^u) = (O, e^u)$ , что позволяет вставить их в построенный цикл. Получим цикл вида

$$(O, e^s) \rightarrow (O, e) \rightarrow (O, e^u) \rightarrow (O, e^u) \rightarrow (Q, e^*) \rightarrow (O, e^s) \rightarrow (O, e^s).$$

что позволяет построить периодическую  $\varepsilon$ -траекторию вида

$$\xi = \{(O, Df^i e), -n \leq i \leq n; (O, Df^p e^u), 0 \leq i \leq N;$$

$$(f^j(Q), Df^j e^*), 0 \leq j \leq k; (O, Df^q e^s), 0 \leq q \leq K \}$$

на проективном расслоении. Эта псевдотраектория проходит через подпространство  $e$ , имеет период  $2(k+n) + N + K$ , величины  $k$  и  $n$  фиксированы и определяются величиной  $\varepsilon$ ,  $N$  и  $K$  могут быть выбраны любыми целыми положительными числами. Найдем показатель Ляпунова построенной псевдотраектории

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{2(k+n) + N + K} \sum_{z=0}^{2(k+n)+N+K-1} \ln |Df(x_z) e_z|. \quad (5)$$

Разобьем сумму на три части: первая часть  $\sum_0$  содержит слагаемые, порожденные псевдотраекторией  $\xi^*$  и имеет  $2(k+n)$  слагаемых, вторая часть  $\sum_s$  порождена действием дифференциала на устойчивом подпространстве  $e^s$  и имеет  $K$  слагаемых, а третья часть  $\sum_u$  порождена действием дифференциала на неустойчивом подпространстве  $e^u$  и имеет  $N$  слагаемых. Числа  $k$  и  $n$  фиксированы, а  $N$  и  $K$  будут выбраны большими целыми положительными числами так, чтобы получить  $\lambda(\xi)$  как приближение для любого числа из отрезка  $[\lambda_s, \lambda_u]$ . Первая сумма ограничена  $\sum_0 = C$ , вторая сумма  $\sum_s = K\lambda_s$ , третья сумма  $\sum_u = N\lambda_u$ . Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned}\lambda(\xi) &= \frac{1}{2(k+n) + N + K} (C + K\lambda_s + N\lambda_u) = \\ &= \frac{C}{2(k+n) + N + K} + \left( \frac{N + K}{2(k+n) + N + K} \right) \left( \frac{1}{N + K} \right) (K\lambda_s + N\lambda_u).\end{aligned}$$

При  $N + K \rightarrow \infty$

$$\frac{C}{2(k+n) + N + K} \rightarrow 0 \text{ и } \frac{N + K}{2(k+n) + N + K} \rightarrow 1.$$

Пусть  $0 < \alpha < 1$ , построим последовательность положительных чисел  $N$  и  $K$  так, чтобы  $N + K \rightarrow \infty$  и  $\frac{K}{N+K} \rightarrow \alpha$ . Если  $\alpha$  рациональное число, то достаточно решить равенство

$$\frac{K}{N + K} = \alpha,$$

т.е. положить  $\frac{N}{K} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ . Так как таких чисел будет бесконечно много, то можно выбрать их так, чтобы  $N + K \rightarrow \infty$ . Если  $\alpha$  иррациональное число, то достаточно положить  $\frac{N}{K} \rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha}$  и тогда  $N + K \rightarrow \infty$ .

При описанном выборе чисел  $N$  и  $K$

$$\lambda(\xi) \rightarrow \alpha\lambda_s + (1 - \alpha)\lambda_u,$$

т.е. спектр Морса содержит число  $\alpha\lambda_s + (1 - \alpha)\lambda_u$ . Так как  $\alpha$  является любым числом между 0 и 1, то спектр Морса содержит интервал  $[\lambda_s, \lambda_u]$ . Утверждение доказано.

Рассмотрим проективное пространство  $P^1(Q)$  над гомоклинической точкой  $Q$ . Здесь имеется подпространство  $e^* = TW^s(Q) = TW^u(Q)$ , которое обладает следующими свойствами. Если  $\bar{e}^*$  — единичный вектор в  $e^*$ , то

$$|Df^n \bar{e}^*| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

и

$$|Df^n \bar{e}^*| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow -\infty.$$

Если  $e \in P^1(Q)$  отлично от  $e^*$  и  $\bar{e}$  — единичный вектор в  $e$ , то

$$|Df^n \bar{e}| \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

и

$$|Df^n \bar{e}| \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow -\infty.$$

**Утверждение 3** *Цепно-рекуррентное множество  $CR(Pf)$  отображения  $Pf$  на проективном расслоении  $P$  содержит одномерное проективное пространство  $P^1(Q)$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  и любого подпространства  $e \in P^1(Q)$  существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория отображения  $Pf$ , проходящая через  $e$ .*

**Доказательство.** Пусть  $e \in P^1(Q)$  является подпространством, отличным от  $e^*$ . Напомним, что отображение  $Pf(O)$  над неподвижной точкой  $O$  имеет две неподвижные точки  $e^s = TW^s(O)$  и  $e^u = TW^u(O)$ . При этом все другие траектории начинаются в  $e^s$  и заканчиваются в  $e^u$ . Тогда итерации  $Pf^n e$  при достаточно больших  $|n|$  ведут себя аналогичным образом, а именно

$$Pf^n e \rightarrow e^u \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

и

$$Pf^n e \rightarrow e^s \text{ при } n \rightarrow -\infty.$$

Таким образом, имеется траектория вида

$$e^s \rightarrow e \rightarrow e^u.$$

Кроме того, имеется траектория гомоклинического касания

$$e^u \rightarrow e^* \rightarrow e^s.$$

Объединяя две эти траектории, мы получим цикл

$$e^s \rightarrow e \rightarrow e^u \rightarrow e^* \rightarrow e^s,$$

который дважды проходит над  $\Omega$  — замыканием гомоклинической траектории. Используя построенный цикл и действуя аналогично Утверждению 1, построим периодическую псевдотраекторию, проходящую через  $e$ . Утверждение доказано.

Из доказанных Утверждений следует справедливость Теорем 1 и 2.

## Список литературы

- [1] V.Avrutin, P.Levi, M.Schanz, D.Fundingier, G.Osipenko, Investigation of dynamical systems using symbolic image: efficient implementation and application. *Inter. J. of Bifurcation and Chaos*, v. 16 (2006), no. 12, 3451-3496.
- [2] R.Bowen. Symbolic Dynamics. *Ann. Math. Soc.*, Providence, R.I., v.8 (1982).
- [3] Y. Cao, S. Luzzatto, I. Rios Some non-hyperbolic systems with strictly non-zero Lyapunov exponents for all invariant measures: horseshoes with internal tangencies, *Discrete and continuous dynamical systems*, v. 15 (2006), no. 1, 61–71.
- [4] F.Colonius and W.Kliemann. *The Dynamics of Control*. Burkhauser, 2000.
- [5] C.Conley. Isolated Invariant set and the Morse Index. *CBMS Regional Conference Series*, v.38 (1978), Amer.Math.Soc., Providence.
- [6] A.Katok, B.Hasselblat. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [7] Lind Douglas, Marcus Brian. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [8] G.S.Osipenko. On a symbolic image of dynamical system. In *Boundary value problems*, Interuniv. Collect. Sci. Works, (1983) 101 - 105.
- [9] G.S.Osipenko. Spectrum of a dynamical system and applied symbolic dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 252 (2000), no. 2, 587 – 616.
- [10] G.S.Osipenko, J.V.Romanovsky, N.B.Ampilova, and E.I.Petrenko. Computation of the Morse Spectrum. *Journal of Mathematical Sciences*, v.120 (2004), no. 2, 1155 – 1166.
- [11] George Osipenko. Dynamical systems, Graphs, and Algorithms. *Lectures Notes in Mathematics*, 1889, Springer, Berlin, 2007.
- [12] George Osipenko. Symbolic images and invariant measures of dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 30 (2010), 1217 – 1237.
- [13] M.Shub, Stabilité globale de systèmes dynamiques, *Asterisque*, v. 56, 1978, 1-21.