

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N. 4, 2025

Электронный журнал,

рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

Стохастические колебания вязкоупругой двухбалочной системы с аддитивными и параметрическими случайными возмущениями

И.Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

e-mail: Igor.Poloskov@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется система, состоящая из двух параллельных тонких призматических и однородных вязкоупругих балок, которые взаимодействуют через упругий слой, описываемый моделью Винклера, подвергаются осевому сжатию случайными силами и изгибу распределенной нагрузкой. На основе использования обобщенного уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для функционала плотности вероятности строятся уравнения для первых моментных полей. Для дискретизации по пространству этих уравнений применяется спектральный метод. Цепочка полученных на основе этого метода систем обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения моментных функций по синусам интегрируется в среде компьютерного пакета *Wolfram Mathematica*. Приводятся результаты численно-аналитических расчетов. Иллюстративный материал подготовлен также в среде пакета *Mathematica*.

Ключевые слова: вязкоупругая система, случайное поле, стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных, уравнения для первых моментных полей и функций, моделирование, спектральный метод, обыкновенное дифференциальное уравнение, компьютерные символьные вычисления, численные расчеты.

1 Введение

Модели в форме балочных конструкций применяются для инженерных расчетов во многих отраслях машиностроения (краны, рельсы), гражданского и промышленного строительства (мосты, дороги, трубопроводы), аэрокосмической техники (самолеты, взлетнопосадочные полосы) и др. [12, 16]. Такие конструкции находят широкое применение благодаря оптимальной прочности и жесткости. Поэтому одним из важнейших направлений исследований является решение динамических задач, связанных с устойчивостью и колебаниями. При этом балочные конструкции часто испытывают сочетание статических и динамических нагрузок, и существует множество ситуаций, когда динамическое поведение конструкции существенно зависит от поля статических напряжений.

В теории упругости и строительной механике значительное число исследований посвящено изучению вибраций балок, опирающихся на различные типы фундаментов. Среди моделей таких фундаментов отметим модели Винклера, Пастернака, Рейсснера или Керра, которые используются для представления механического поведения почвы. В частности, модель Винклера, в которой среда рассматривается как система, состоящая из бесконечно близких линейных пружин, является наиболее простой. В этой модели учитывают только реакцию, которая ортогональна балке и пропорциональна ее отклонению [19].

Динамические задачи одиночных балок, основанные на теории Бернулли – Эйлера, изучались многими исследователями. Но важным технологическим расширением концепции одинарной балки является концепция упруго соединенной двухбалочной системы. Такую систему можно рассматривать как идеальную модель сложной непрерывной системы или как приближенную модель многослойной балки, а сама система представляет собой еще одну модель сложной непрерывной системы, состоящей из двух одномерных тел, соединенных линейным упругим слоем типа Винклера. Также известно, что одну балку и упругий слой двухбалочной системы можно рассматривать как непрерывный динамический поглотитель для подавления вибрации другой балки, подвергающейся действию динамической силы. Упруго связанные балки используются в качестве приближенной модели для анализа вибрации композитных материалов или в качестве модели непрерывной системы для углеродных нанотрубок. Упругие слои обеспечивают линейную модель межатомных сил Ван-дер-Ваальса.

Эффект вязкоупругости наблюдается в ряде материалов, таких как полимеры, композиты, металлы и сплавы, при высоких температурах. В то время как эластичные материалы обладают способностью накапливать механическую энергию без рассеивания, вязкоупругие материалы как накапливают, так и рассеивают механическую энергию. Вибрации, возникающие в робототехнике, прецизионных промышленных операциях и узлах космических кораблей, требуют тщательного исследования вязкоупругих материалов [17].

На поведение различных механических, физических, технических, экономических и других систем, моделирующих реальные процессы и описываемых (интегро-)дифференциальными уравнениями, влияют случайные неопределенности в дифференциальных операторах, начальных и граничных условиях [9, 10, 21]. В зависимости от характера моделей эти уравнения классифицируются как стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения (СОДУ) или стохастические дифференциальные уравнения в частных производных (СДУвЧП). Уравнения стохастических колебаний являются хорошими примерами первого типа [13, 14, 20]. Важнейшими примерами второго типа являются стохастические уравнения диффузии и стохастические волновые уравнения [6].

В основе таких исследований лежит решение несколько математических и вычислительных проблем; к ним относятся: дискретизация случайных полей, оценка характеристик случайных собственных решений, обращение случайных матриц, решения стохастических краевых задач и описание случайных матричных произведений и др. [4].

Поэтому естественно, что в вычислительной механике значительное внимание обращается на моделирование неопределенностей. При этом динамический анализ конструкций обычно включает учет двух видов неопределенностей. Первые называются случайными неопределенностями (случайность, стохастическая изменчивость) и описываются на основе теории вероятностей и теории случайных процессов (полей), а другие – эпистемическими неопределенностями (неточность, двусмысленность, недостаток данных), которые задаются с помощью нечетких множеств, функций, процессов, нечетких случайных величин (нечетких случайных процессов) [15].

Поэтому наряду с исследованием детерминированных моделей балок в последнее время большое внимание уделяется анализу стохастического поведения отдельных и групп балочных конструкций, включая нанобалки [18]. Когда возбуждения, приложенные к упругой балке, являются неопределенными или случайными, то и в реакции балки также будет присутствовать

неопределенности, включающие случайные вибрации [12]. Различными авторами получены приближенные решения стохастического изгиба балки на основании Винклера, проанализирована задача стохастической неустойчивости осевой нагруженной балки Тимошенко из вязкоупругого материала, рассчитаны среднеквадратичное смещение и напряжение свободно опертой балки Бернулли – Эйлера, подвергнутой нескольким типам случайных возбуждений. В рамках решения подобных задач изучались балки со случайными жесткостями, изменчивостью материалов, упругими опорами [7], случайно распределенными пространственными неоднородностями [4] и др.

Для балочных конструкций решаются задачи как качественной направленности (анализ существования и единственности решения [7], асимптотической устойчивости и устойчивости почти наверное [18]), так и количественной (расчет различных статистических характеристик [21]). Например, стохастическая устойчивость двухбалочной системы, подвергнутой возбуждению белым шумом малой интенсивности, исследовалась в [11], в работе [16] рассматривалась динамическая устойчивость такой системы под действием случайных сил.

Для приближенного расчета требуемых статических и динамических статистических характеристик балочных конструкций применяются: методы конечных элементов [8], спектрального разложения, возмущений, и статистического моделирования [4], прямое интегрирование, методы Галеркина и стохастической линеаризации, частотно-зависимые функции формы для дискретизации случайных полей.

В настоящей статье для расчета отклика двухбалочной системы случайные возмущения применяется двухступенчатая процедура, согласно которой сначала строятся ДУвЧП для первых моментных полей, а затем для их решения на основании спектрального метода строится система ОДУ для коэффициентов разложения по синусам. Такая процедура позволяет не использовать ресурсозатратный метод статистического моделирования и не приводит к необходимости построения большого числа СОДУ для коэффициентов разложения решения в случае прямого применения спектрального метода для представления неизвестных случайных полей, а затем громоздких систем ОДУ для моментных характеристик. Численно-аналитические расчеты проводились в среде пакета *Wolfram Mathematica* [5]. Этот же пакет использовался для подготовки иллюстративных материалов.

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из двух параллельных тонких призматических и однородных вязкоупругих балок, которые взаимодействуют через упругий слой, описываемый моделью Винклера. Обе балки имеют одинаковую длину L , свободно оперты на концах и подвергаются осевому сжатию силами F_1 и F_2 (рис. 1). Кроме того, к системе приложена распределенная нагрузка $Q(\underline{x}, t)$.

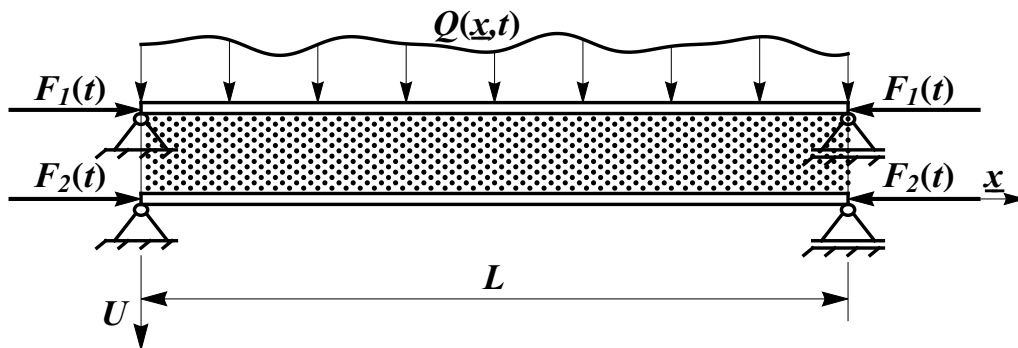


Рис. 1: Рассматриваемая система

На основе теории Бернулли–Эйлера и в предположении, что инерция вращения и деформация сдвига пренебрежимо малы, в безразмерной форме уравнения поперечных колебаний балок могут быть представлены следующим образом [17] (с дополнительной распределенной нагрузкой):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha_1 \frac{\partial^5 U_1(x, t)}{\partial t \partial x^4} + e_1 \frac{\partial^4 U_1(x, t)}{\partial x^4} + [v_1 + \beta_1 V_1(t)] \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} + \\ + \gamma [U_1(x, t) - U_2(x, t)] = Q_0(x, t), \quad x \in (0, 1), t \in (0, T]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha_2 \frac{\partial^5 U_2(x, t)}{\partial t \partial x^4} + e_2 \frac{\partial^4 U_2(x, t)}{\partial x^4} + [v_2 + \beta_2 V_2(t)] \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial x^2} + \\ + \gamma [U_2(x, t) - U_1(x, t)] = 0, \quad x \in (0, 1), t \in (0, T]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$U_k(x, 0) = U_k^{[0]}(x), \quad \left. \frac{\partial U_k(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = U_{k+2}^{[0]}(x), \quad x \in [0, 1]; \quad (3)$$

$$U_k(0, t) = U_k(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 U_k(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_k(1, t)}{\partial x^2} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (4)$$

где $k = 1, 2$; t – время ($T < \infty$); положительные коэффициенты $2\alpha_\ell$, e_ℓ ($\ell = 1, 2$) и γ – приведенные времена задержек, изгибные жесткости балок и модуль жесткости упругого слоя Винклера соответственно;

$$\underline{x} = L x; \quad \frac{F_\ell(t)}{\rho S_\ell L^2} = v_\ell + \beta_\ell V_\ell(t);$$

ρ – плотность материала; S_ℓ – площади поперечного сечения;

$$\frac{Q(\underline{x}, t)}{\rho_i S_i L^2} = Q_0(x, t) = q(x, t) \cos \Phi(t), \quad \dot{\Phi}(t) = \omega_0 + \sigma_0 V_0(t),$$

$\cos \Phi(t)$ – ограниченный случайный процесс [22, 23]; $q(x, t)$ – известная функция; $v_\ell + \beta_\ell V_\ell(t)$ – приведенные осевые возмущения; $V_0(t), V_1(t), V_2(t)$ – независимые стандартные белые шумы: $\mathbb{E}[V_k(t)] = 0$, $\mathbb{E}[V_k(t) V_\ell(t')] = \delta_{k\ell} \delta(t - t')$, $k, \ell = 0, 1, 2$; $\mathbb{E}[\dots]$, $\delta_{k\ell}$, $\delta(\cdot)$ – оператор математического ожидания, символ Кронекера и дельта-функция Дирака соответственно; $U_j^{[0]}(x)$, $j = \overline{1, 4}$ – случайные поля с известными статистическими характеристиками. Значения параметров $\alpha_\ell, e_\ell, \gamma, v_\ell, \beta_\ell, \omega_0, \sigma_0$ считаем заданными.

Целью данной работы является расчет первых моментных полей решения задачи (1)–(4).

3 Построение уравнений для моментных полей

Для построения соответствующих уравнений применяется аппарат марковских случайных полей [3], для чего система (1)–(4) записывается в виде гибридной системы линейных стохастических дифференциальных уравнений, обыкновенных [14] и в частных производных [6], с аддитивным и мультипликативными шумами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} &= U_3(x, t), & \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} &= U_4(x, t), \\ \frac{\partial U_3(x, t)}{\partial t} &= -2\alpha_1 \frac{\partial^4 U_3(x, t)}{\partial x^4} - [v_1 + \beta_1 V_1(t)] \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} - \\ &- e_1 \frac{\partial^4 U_1(x, t)}{\partial x^4} - \gamma [U_1(x, t) - U_2(x, t)] + q(x, t) U_5(t), \\ \frac{\partial U_4(x, t)}{\partial t} &= -2\alpha_2 \frac{\partial^4 U_4(x, t)}{\partial x^4} - [v_2 + \beta_2 V_2(t)] \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial x^2} - \\ &- e_2 \frac{\partial^4 U_2(x, t)}{\partial x^4} - \gamma [U_2(x, t) - U_1(x, t)], \\ \dot{U}_5(t) &= -\omega_0 U_6(t) - \sigma_0 U_6(t) V_0(t), & \dot{U}_6(t) &= \omega_0 U_5(t) + \sigma_0 U_5(t) V_0(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где последние два уравнения отвечают за моделирование случайных процессов $U_5(t) = \cos \Phi(t)$ и $U_6(t) = \sin \Phi(t)$, характеристики которых в установившемся режиме равны:

$$\mathbb{E}[U_5(\tau)] = \mathbb{E}[U_6(\tau)] = 0, \quad \mathbb{D}[U_5(\tau)] = \mathbb{D}[U_6(\tau)] = 1/2,$$

$$\mathcal{C}_{U_5 U_5}(\tau) = \mathcal{C}_{U_6 U_6}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau \sigma_0^2} \cos(\omega_0 \tau), \quad \mathcal{C}_{U_5 U_6}(\tau) = -\frac{1}{2} e^{-\tau \sigma_0^2} \sin(\omega_0 \tau),$$

т. е. после окончания переходных процессов функции $U_5(t)$ и $U_6(t)$ можно считать стационарными и стационарно связанными случайными процессами (символ $\mathbb{D}[\dots]$ – оператор дисперсии, \mathcal{C} – обозначение ковариационной функции). А это, если считать, что возмущения уже находятся в установившемся режиме, позволяет использовать в дальнейших расчетах следующие соотношения:

$$\begin{aligned} M_{U_5}(t) &= E[U_5(t)] = M_{U_6}(t) = E[U_6(t)] = 0, \\ D_{U_5 U_5}(t) &= \mathbb{D}[U_5(t)] = D_{U_6 U_6}(t) = \mathbb{D}[U_6(t)] = 1/2, \\ D_{U_5 U_6}(t) &= \mathcal{C}_{U_5 U_6}(0) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Данная форма уравнений (5) позволяет применить обобщенное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для одноточечного функционала плотности вероятности $P(\mathbf{u}, t)$ [2, 3]. В нашем случае это уравнение для функционала векторного поля $\mathbf{U}(x, t) = \{U_k(x, t)\}$, $k = \overline{1, 6}$, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{u}, t)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^6 \int_0^1 \frac{\delta \{a_i(\mathbf{u}, x, t) P(\mathbf{u}, t)\}}{\delta u_i(x)} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\delta^2 \{b_{ij}(\mathbf{u}, z_1, z_2, t) P(\mathbf{u}, t)\}}{\delta u_i(x) \delta u_j(y)} dx dy, \end{aligned}$$

где коэффициенты a_i и b_{ij} вычисляются на основе слагаемых из правых частей уравнений (5) и имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= u_3(x), & a_2 &= u_4(x), \\ a_3 &= -2\alpha_1 \frac{\partial^4 u_3(x)}{\partial x^4} - v_1 \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x^2} - e_1 \frac{\partial^4 u_1(x)}{\partial x^4} - \gamma [u_1(x) - u_2(x)] + q(x, t) u_5, \\ a_4 &= -2\alpha_2 \frac{\partial^4 u_4(x)}{\partial x^4} - v_2 \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x^2} - e_2 \frac{\partial^4 u_2(x)}{\partial x^4} - \gamma [u_2(x) - u_1(x)], \\ a_5 &= -\frac{\sigma_0^2}{2} u_5 - \omega_0 u_6, & a_6 &= \omega_0 u_5 - \frac{\sigma_0^2}{2} u_6, \\ b_{33} &= \beta_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_1(y)}{\partial y^2}, & b_{44} &= \beta_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_2(y)}{\partial y^2}, \\ b_{55} &= \sigma_0^2 u_6^2, & b_{56} &= b_{65} = \sigma_0^2 u_5 u_6, & b_{66} &= \sigma_0^2 u_5^2, \end{aligned}$$

остальные $b_{ij} = 0$; $\delta F / \delta v$ – обозначение вариационной производной [1].

Тогда полная система уравнений для полей математических ожиданий

$$M_{U_k}(x, t) = \mathbb{E}[U_k(x, t)] \quad (7)$$

и ковариаций

$$D_{U_k U_\ell}(x, y, t) = \mathbb{E}[\{U_k(x, t) - M_{U_k}(x, t)\}\{U_\ell(y, t) - M_{U_\ell}(y, t)\}] \quad (8)$$

($k, \ell = \overline{1, 6}$) с использованием соотношений из [2, с. 568–569] и (6) будут иметь вид (опущенные ниже для компактности записи аргументы функций те же и в том же порядке, что и в их определениях (7) и (8)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{U_1}}{\partial t} &= M_{U_3}, & \frac{\partial M_{U_2}}{\partial t} &= M_{U_4}, \\ \frac{\partial M_{U_3}}{\partial t} &= -2\alpha_1 \frac{\partial^4 M_{U_3}}{\partial x^4} - v_1 \frac{\partial^2 M_{U_1}}{\partial x^2} - e_1 \frac{\partial^4 M_{U_1}}{\partial x^4} - \gamma (M_{U_1} - M_{U_2}), \\ \frac{\partial M_{U_4}}{\partial t} &= -2\alpha_2 \frac{\partial^4 M_{U_4}}{\partial x^4} - v_2 \frac{\partial^2 M_{U_2}}{\partial x^2} - e_2 \frac{\partial^4 M_{U_2}}{\partial x^4} - \gamma (M_{U_2} - M_{U_1}), \\ \frac{\partial D_{U_1 U_1}}{\partial t} &= D_{U_1 U_3} + D_{U_3 U_1}, & \frac{\partial D_{U_1 U_2}}{\partial t} &= D_{U_1 U_4} + D_{U_3 U_2}, \\ \frac{\partial D_{U_1 U_3}}{\partial t} &= D_{U_3 U_3} - 2\alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_3}}{\partial y^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_1 U_1}}{\partial y^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_1}}{\partial y^4} - \\ &\quad - \gamma (D_{U_1 U_1} - D_{U_1 U_2}) + q(y, t) D_{U_1 U_5}, \\ \frac{\partial D_{U_1 U_4}}{\partial t} &= D_{U_3 U_4} - 2\alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_4}}{\partial y^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_1 U_2}}{\partial y^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_2}}{\partial y^4} - \\ &\quad - \gamma (D_{U_1 U_2} - D_{U_1 U_1}), \\ \frac{\partial D_{U_1 U_5}}{\partial t} &= D_{U_3 U_5} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_1 U_5} - \omega_0 D_{U_1 U_6}, \\ \frac{\partial D_{U_1 U_6}}{\partial t} &= D_{U_3 U_6} + \omega_0 D_{U_1 U_5} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_1 U_6}, \\ \frac{\partial D_{U_2 U_1}}{\partial t} &= D_{U_2 U_3} + D_{U_4 U_1}, & \frac{\partial D_{U_2 U_2}}{\partial t} &= D_{U_2 U_4} + D_{U_4 U_2}, \\ \frac{\partial D_{U_2 U_3}}{\partial t} &= D_{U_4 U_3} - 2\alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_3}}{\partial y^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_2 U_1}}{\partial y^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_1}}{\partial y^4} - \\ &\quad - \gamma (D_{U_2 U_1} - D_{U_2 U_2}) + q(y, t) D_{U_2 U_5}, \\ \frac{\partial D_{U_2 U_4}}{\partial t} &= D_{U_4 U_4} - 2\alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_4}}{\partial y^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_2 U_2}}{\partial y^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_2}}{\partial y^4} - \\ &\quad - \gamma (D_{U_2 U_2} - D_{U_2 U_1}), \\ \frac{\partial D_{U_2 U_5}}{\partial t} &= D_{U_4 U_5} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_2 U_5} - \omega_0 D_{U_2 U_6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D_{U_2 U_6}}{\partial t} &= D_{U_4 U_6} + \omega_0 D_{U_2 U_5} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_2 U_6}, \\
 \frac{\partial D_{U_3 U_1}}{\partial t} &= D_{U_3 U_3} - 2 \alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_3 U_1}}{\partial x^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_1 U_1}}{\partial x^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_1}}{\partial x^4} - \\
 &\quad - \gamma (D_{U_1 U_1} - D_{U_2 U_1}) + q(x, t) D_{U_5 U_1}, \\
 \frac{\partial D_{U_3 U_2}}{\partial t} &= D_{U_3 U_4} - 2 \alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_3 U_2}}{\partial x^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_1 U_2}}{\partial x^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_2}}{\partial x^4} - \\
 &\quad - \gamma (D_{U_1 U_2} - D_{U_2 U_2}) + q(x, t) D_{U_5 U_2}, \\
 \frac{\partial D_{U_3 U_3}}{\partial t} &= -2 \alpha_1 \left[\frac{\partial^4 D_{U_3 U_3}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 D_{U_3 U_3}}{\partial y^4} \right] - v_1 \left[\frac{\partial^2 D_{U_1 U_3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{U_3 U_1}}{\partial y^2} \right] - \\
 &\quad - e_1 \left[\frac{\partial^4 D_{U_1 U_3}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 D_{U_3 U_1}}{\partial y^4} \right] + q(y, t) D_{U_3 U_5} + q(x, t) D_{U_5 U_3} - \\
 &\quad - \gamma (D_{U_3 U_1} - D_{U_3 U_2} + D_{U_1 U_3} - D_{U_2 U_3}) + \beta_1^2 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_1}}{\partial x^2 \partial y^2}, \\
 \frac{\partial D_{U_3 U_4}}{\partial t} &= -2 \alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_3 U_4}}{\partial x^4} - 2 \alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_3 U_4}}{\partial y^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_1 U_4}}{\partial x^2} - \\
 &\quad - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_3 U_2}}{\partial y^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_4}}{\partial x^4} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_3 U_2}}{\partial y^4} - \\
 &\quad - \gamma (D_{U_3 U_2} - D_{U_3 U_1} + D_{U_1 U_4} - D_{U_2 U_4}) + q(x, t) D_{U_5 U_4}, \\
 \frac{\partial D_{U_3 U_5}}{\partial t} &= -2 \alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_3 U_5}}{\partial x^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_1 U_5}}{\partial x^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_5}}{\partial x^4} - \\
 &\quad - \gamma (D_{U_1 U_5} - D_{U_2 U_5}) - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_3 U_5} - \omega_0 D_{U_3 U_6} + q(x, t) D_{U_5 U_5}, \\
 \frac{\partial D_{U_3 U_6}}{\partial t} &= -2 \alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_3 U_6}}{\partial x^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_1 U_6}}{\partial x^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_1 U_6}}{\partial x^4} - \\
 &\quad - \gamma (D_{U_1 U_6} - D_{U_2 U_6}) + \omega_0 D_{U_3 U_5} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_3 U_6} + q(x, t) D_{U_5 U_6}, \\
 \frac{\partial D_{U_4 U_1}}{\partial t} &= D_{U_4 U_3} - 2 \alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_4 U_1}}{\partial x^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_2 U_1}}{\partial x^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_1}}{\partial x^4} - \\
 &\quad - \gamma (D_{U_2 U_1} - D_{U_1 U_1}), \\
 \frac{\partial D_{U_4 U_2}}{\partial t} &= D_{U_4 U_4} - 2 \alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_4 U_2}}{\partial x^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_2 U_2}}{\partial x^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_2}}{\partial x^4} - \\
 &\quad - \gamma (D_{U_2 U_2} - D_{U_1 U_2}), \\
 \frac{\partial D_{U_4 U_3}}{\partial t} &= -2 \alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_4 U_3}}{\partial x^4} - 2 \alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_4 U_3}}{\partial y^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_2 U_3}}{\partial x^2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -v_1 \frac{\partial^2 D_{U_4 U_1}}{\partial y^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_3}}{\partial x^4} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_4 U_1}}{\partial y^4} - \\
 & -\gamma (D_{U_2 U_3} - D_{U_1 U_3} + D_{U_4 U_1} - D_{U_4 U_2}) + q(y, t) D_{U_4 U_5}, \\
 \frac{\partial D_{U_4 U_4}}{\partial t} = & -2\alpha_2 \left[\frac{\partial^4 D_{U_4 U_4}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 D_{U_4 U_4}}{\partial y^4} \right] - v_2 \left[\frac{\partial^2 D_{U_2 U_4}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{U_4 U_2}}{\partial y^2} \right] - \\
 & -e_2 \left[\frac{\partial^4 D_{U_2 U_4}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 D_{U_4 U_2}}{\partial y^4} \right] - \\
 & -\gamma (D_{U_4 U_2} - D_{U_4 U_1} + D_{U_2 U_4} - D_{U_1 U_4}) + \beta_2^2 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_2}}{\partial x^2 \partial y^2}, \\
 \frac{\partial D_{U_4 U_5}}{\partial t} = & -2\alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_4 U_5}}{\partial x^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_2 U_5}}{\partial x^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_5}}{\partial x^4} - \\
 & -\gamma (D_{U_2 U_5} - D_{U_1 U_5}) - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_4 U_5} - \omega_0 D_{U_4 U_6}, \\
 \frac{\partial D_{U_4 U_6}}{\partial t} = & -2\alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_4 U_6}}{\partial x^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_2 U_6}}{\partial x^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_2 U_6}}{\partial x^4} - \\
 & -\gamma (D_{U_2 U_6} - D_{U_1 U_6}) + \omega_0 D_{U_4 U_5} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_4 U_6}, \\
 \frac{\partial D_{U_5 U_1}}{\partial t} = & D_{U_5 U_3} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_5 U_1} - \omega_0 D_{U_6 U_1}, \\
 \frac{\partial D_{U_5 U_2}}{\partial t} = & D_{U_5 U_4} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_5 U_2} - \omega_0 D_{U_6 U_2}, \\
 \frac{\partial D_{U_5 U_3}}{\partial t} = & -2\alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_5 U_3}}{\partial y^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_5 U_1}}{\partial y^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_5 U_1}}{\partial y^4} - \\
 & -\gamma (D_{U_5 U_1} - D_{U_5 U_2}) - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_5 U_3} - \omega_0 D_{U_6 U_3} + q(y, t) D_{U_5 U_5}, \\
 \frac{\partial D_{U_5 U_4}}{\partial t} = & -2\alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_5 U_4}}{\partial y^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_5 U_2}}{\partial y^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_5 U_2}}{\partial y^4} - \\
 & -\gamma (D_{U_5 U_2} - D_{U_5 U_1}) - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_5 U_4} - \omega_0 D_{U_6 U_4}, \\
 \frac{\partial D_{U_6 U_1}}{\partial t} = & D_{U_6 U_3} + \omega_0 D_{U_5 U_1} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_6 U_1}, \\
 \frac{\partial D_{U_6 U_2}}{\partial t} = & D_{U_6 U_4} + \omega_0 D_{U_5 U_2} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_6 U_2}, \\
 \frac{\partial D_{U_6 U_3}}{\partial t} = & -2\alpha_1 \frac{\partial^4 D_{U_6 U_3}}{\partial y^4} - v_1 \frac{\partial^2 D_{U_6 U_1}}{\partial y^2} - e_1 \frac{\partial^4 D_{U_6 U_1}}{\partial y^4} - \\
 & -\gamma (D_{U_6 U_1} - D_{U_6 U_2}) + \omega_0 D_{U_5 U_3} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_6 U_3} + q(y, t) D_{U_5 U_6},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{U_6 U_4}}{\partial t} = & -2\alpha_2 \frac{\partial^4 D_{U_6 U_4}}{\partial y^4} - v_2 \frac{\partial^2 D_{U_6 U_2}}{\partial y^2} - e_2 \frac{\partial^4 D_{U_6 U_2}}{\partial y^4} - \\ & - \gamma (D_{U_6 U_2} - D_{U_6 U_1}) + \omega_0 D_{U_5 U_4} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{U_6 U_4}, \end{aligned}$$

т. е. полная система уравнений распадается на две независимых подсистемы – для полей математический ожиданий и ковариации отдельно. При этом начальными и краевыми условиями для этих уравнений будут следующие соотношения:

$$\begin{aligned} M_{U_k}(x, 0) &\equiv M_{U_k}^{[0]}(x) = \mathbb{E} \left[U_k^{[0]}(x) \right], \\ M_{U_{k+2}}(x, 0) &\equiv M_{U_{k+2}}^{[0]}(x) = \mathbb{E} \left[U_{k+2}^{[0]}(x) \right], \quad k = 1, 2, \\ M_{U_\ell}(x, t) \Big|_{x=0,1} &= \frac{\partial^2 M_{U_\ell}(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0,1} = 0, \quad \ell = \overline{1, 4}; \\ D_{U_k U_\ell}(x, y, 0) &\equiv D_{U_k U_\ell}^{[0]}(x, y) = \\ &= \mathbb{E} \left[\{U_k^{[0]}(x) - M_{U_k}(x, 0)\} \{U_\ell^{[0]}(y) - M_{U_\ell}(y, 0)\} \right], \\ D_{U_k U_\ell}(x, y, t) \Big|_{x=0,1} &= D_{U_k U_\ell}(x, y, t) \Big|_{y=0,1} = \frac{\partial^2 D_{U_k U_\ell}(x, y, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0,1} = \\ &= \frac{\partial^2 D_{U_k U_\ell}(x, y, t)}{\partial y^2} \Big|_{y=0,1} = 0, \quad k, \ell = \overline{1, 4}; \\ D_{U_k U_\ell}(x, 0) &= \left[D_{U_k U_\ell}(x, t), \frac{\partial^2 D_{U_k U_\ell}(x, t)}{\partial x^2} \right] \Big|_{x=0,1} = 0, \\ k = \overline{1, 4}, \ell = 5, 6 \quad &\text{или} \quad k = 5, 6, \ell = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

4 Спектральный метод решения уравнений

Исходя из формы уравнений для первых моментных полей и заданных краевых и начальных условий и с учетом возможности представления

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k(t) \sin(\pi k x), \quad (9)$$

будем искать решения уравнений в следующей форме:

$$M_{U_i}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} M_{ik}(t) \sin(\pi k x), \quad i = \overline{1, 4},$$

$$\begin{aligned}
 D_{U_i U_j}(x, y, t) &= \sum_{k, \ell=1}^{+\infty} D_{ijkl}(t) \sin(\pi k x) \sin(\pi \ell y), \quad i, j = \overline{1, 4}, \\
 D_{U_i U_j}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} D_{ijk}(t) \sin(\pi k x), \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = 5, 6, \\
 D_{U_i U_j}(x, y, t) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} D_{ij\ell}(t) \sin(\pi \ell y), \quad i = 5, 6, \quad j = \overline{1, 4}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Представления (9) и (10) позволяют автоматически удовлетворить краевые условия для функций $M_{U_i}(x, t)$ и $D_{U_i U_j}(x, y, t)$, а также дают возможность получить замкнутые системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $M_{ik}(t)$ и $D_{ijkl}(t)$ конечного порядка на любом уровне редукции (усечения) по k и ℓ бесконечных систем таких уравнений: $k = \overline{1, k_0}$, $\ell = \overline{1, \ell_0}$, $1 \leq k_0 < \infty$, $1 \leq \ell_0 < \infty$, что необходимо при практическом применении этого и подобных методов. Заметим, что увеличение k_0 и ℓ_0 добавляет уточняющие приближенное решение слагаемые, не искажая вклад предыдущих уровней урезания.

Несложно установить, что

$$\begin{aligned}
 D_{U_i U_j}(x, y, t) &= D_{U_j U_i}(y, x, t), \quad 1 \leq j \leq i \leq 4, \\
 D_{U_i U_j}(x, t) &= D_{U_j U_i}(x, t), \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = 5, 6.
 \end{aligned}$$

С учетом вышесказанного из полученных уравнений для ковариаций $D_{U_i U_j}$ достаточно оставить только те, которые соответствуют индексам i и j таким, что $i = \overline{1, 4}$, $i \leq j \leq 6$. Тогда после подстановки представлений (9), (10) в оставшиеся уравнения, выделения коэффициентов при одинаковых произведениях синусов в левых и правых частях и их приравнивания получим следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $M_{ik}(t)$, $D_{ijkl}(t)$ и $D_{ijk}(t)$ (аргумент t в уравнениях ниже опущен):

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_{1k} &= M_{3k}, \quad \dot{M}_{2k} = M_{4k}, \\
 \dot{M}_{3k} &= -2\alpha_1 \pi^4 k^4 M_{3k} - \pi^2 k^2 (e_1 \pi^2 k^2 - v_1) M_{1k} - \gamma (M_{1k} - M_{2k}), \\
 \dot{M}_{4k} &= -2\alpha_2 \pi^4 k^4 M_{4k} - \pi^2 k^2 (e_2 \pi^2 k^2 - v_2) M_{2k} - \gamma (M_{2k} - M_{1k}), \\
 \dot{D}_{11k\ell} &= D_{13k\ell} + D_{13\ell k}, \quad \dot{D}_{12k\ell} = D_{14k\ell} + D_{23\ell k}, \\
 \dot{D}_{13k\ell} &= D_{33k\ell} - 2\alpha_1 \pi^4 \ell^4 D_{13k\ell} - \pi^2 \ell^2 (e_1 \pi^2 \ell^2 - v_1) D_{11k\ell} - \\
 &\quad - \gamma (D_{11k\ell} - D_{12k\ell}) + D_{15k} q\ell, \\
 \dot{D}_{14k\ell} &= D_{34k\ell} - 2\alpha_2 \pi^4 \ell^4 D_{14k\ell} - \pi^2 \ell^2 (e_2 \pi^2 \ell^2 - v_2) D_{12k\ell} - \\
 &\quad - \gamma (D_{12k\ell} - D_{11k\ell}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_{15k} &= D_{35k} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{15k} - \omega_0 D_{16k}, \quad \dot{D}_{16k} = D_{36k} + \omega_0 D_{15k} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{16k}, \\
 \dot{D}_{22k\ell} &= D_{24k\ell} + D_{24\ell k}, \\
 \dot{D}_{23k\ell} &= D_{34\ell k} - 2\alpha_1 \pi^4 \ell^4 D_{23k\ell} - \pi^2 \ell^2 (e_1 \pi^2 \ell^2 - v_1) D_{12\ell k} - \\
 &\quad - \gamma (D_{12\ell k} - D_{22k\ell}) + D_{25k} q_\ell, \\
 \dot{D}_{24k\ell} &= D_{44k\ell} - 2\alpha_2 \pi^4 \ell^4 D_{24k\ell} - \pi^2 \ell^2 (e_2 \pi^2 \ell^2 - v_2) D_{22k\ell} - \\
 &\quad - \gamma (D_{22k\ell} - D_{12\ell k}), \\
 \dot{D}_{25k} &= D_{45k} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{25k} - \omega_0 D_{26k}, \quad \dot{D}_{26k} = D_{46k} + \omega_0 D_{25k} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{26k}, \\
 \dot{D}_{33k\ell} &= -2\alpha_1 \pi^4 (k^4 + \ell^4) D_{33k\ell} - \pi^2 k^2 (e_1 \pi^2 k^2 - v_1) D_{13k\ell} - \\
 &\quad - \pi^2 \ell^2 (e_1 \pi^2 \ell^2 - v_1) D_{13\ell k} - \gamma (D_{13\ell k} - D_{23\ell k} + D_{13k\ell} - D_{23k\ell}) + \\
 &\quad + D_{35k} q_\ell + D_{35\ell} q_k + \beta_1^2 \pi^4 k^2 \ell^2 D_{11k\ell}, \\
 \dot{D}_{34k\ell} &= -2\pi^4 (\alpha_1 k^4 + \alpha_2 \ell^4) D_{34k\ell} - \pi^2 k^2 (e_1 \pi^2 k^2 - v_1) D_{14k\ell} - \\
 &\quad - \pi^2 \ell^2 (e_2 \pi^2 \ell^2 - v_2) D_{23\ell k} - \gamma (D_{23\ell k} - D_{13\ell k} + D_{14k\ell} - D_{24k\ell}) + \\
 &\quad + D_{45\ell} q_k, \\
 \dot{D}_{35k} &= -2\alpha_1 \pi^4 k^4 D_{35k} - \pi^2 k^2 (e_1 \pi^2 k^2 - v_1) D_{15k} - \\
 &\quad - \gamma (D_{15k} - D_{25k}) - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{35k} - \omega_0 D_{36k} + \frac{q_k}{2}, \\
 \dot{D}_{36k} &= -2\alpha_1 \pi^4 k^4 D_{36k} - \pi^2 k^2 (e_1 \pi^2 k^2 - v_1) D_{16k} - \\
 &\quad - \gamma (D_{16k} - D_{26k}) + \omega_0 D_{35k} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{36k}, \\
 \dot{D}_{44k\ell} &= -2\alpha_2 \pi^4 (k^4 + \ell^4) D_{44k\ell} - \pi^2 k^2 (e_2 \pi^2 k^2 - v_2) D_{24k\ell} - \\
 &\quad - \pi^2 \ell^2 (e_2 \pi^2 \ell^2 - v_2) D_{24\ell k} - \gamma (D_{24\ell k} - D_{14\ell k} + D_{24k\ell} - D_{14k\ell}) + \\
 &\quad + \beta_2^2 \pi^4 k^2 \ell^2 D_{22k\ell}, \\
 \dot{D}_{45k} &= -2\alpha_2 \pi^4 k^4 D_{45k} - \pi^2 k^2 (e_2 \pi^2 k^2 - v_2) D_{25k} - \\
 &\quad - \gamma (D_{25k} - D_{15k}) - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{45k} - \omega_0 D_{46k}, \\
 \dot{D}_{46k} &= -2\alpha_2 \pi^4 k^4 D_{46k} - \pi^2 k^2 (e_2 \pi^2 k^2 - v_2) D_{26k} - \\
 &\quad - \gamma (D_{26k} - D_{16k}) + \omega_0 D_{45k} - \frac{\sigma_0^2}{2} D_{46k}.
 \end{aligned}$$

Начальные условия для этих уравнений будут иметь следующую форму:

$$M_{ik}(0) = 2 \int_0^1 M_{U_i}^{[0]}(x) \sin(\pi k x) dx, \quad i = \overline{1, 4};$$

$$D_{ijk\ell}(0) = 4 \int_0^1 \int_0^1 D_{U_i U_j}^{[0]}(x, y) \sin(\pi k x) \sin(\pi \ell y) dx dy,$$

$$1 \leq i \leq j \leq 4; \quad k, \ell \in \mathbb{N},$$

$$D_{ijk}(0) = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = 5, 6.$$

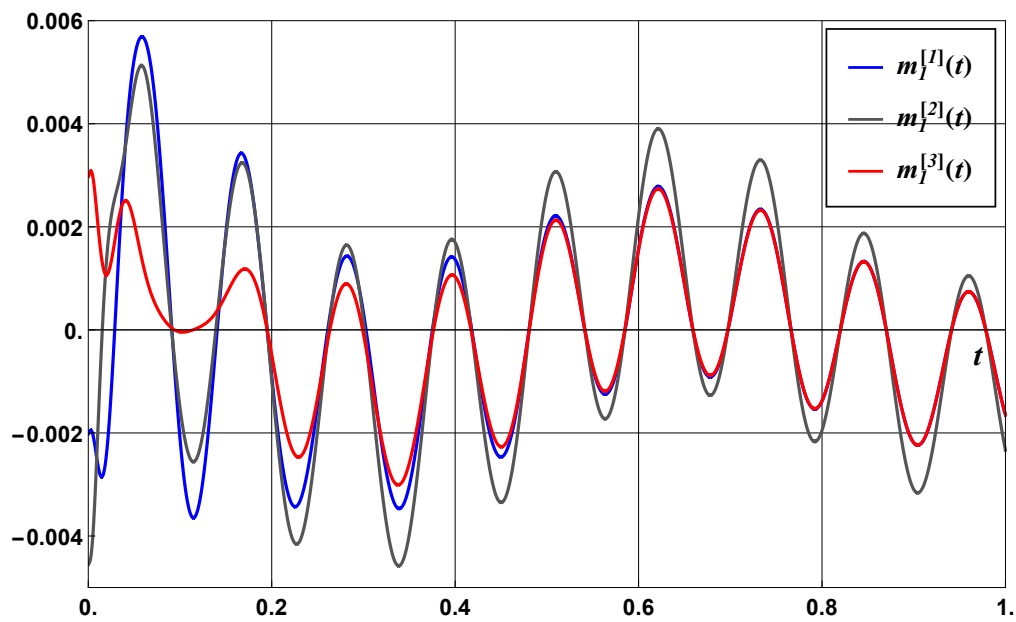


Рис. 2

5 Результаты расчетов

Расчеты статистических характеристик рассматриваемой системы производились при следующих значениях параметров задачи (основная часть которых была взята из статей [16, 17, 19], а остальные модельные):

$$\alpha_1 = 0.006; \quad e_1 = 3; \quad v_1 = 20; \quad \beta_1 = \sqrt{0.4};$$

$$\alpha_2 = 0.005; \quad e_2 = 2; \quad v_2 = 10; \quad \beta_2 = \sqrt{0.2};$$

$$\gamma = 1500; \quad \omega_0 = 2; \quad \sigma_0 = 1.8; \quad T = 10;$$

$$M_{U_1}^{[0]}(x) = -\frac{4x}{1875} (156x^3 - 287x^2 + 149x - 18); \quad M_{U_3}^{[0]}(x) = 0;$$

$$M_{U_2}^{[0]}(x) = -\frac{16x}{375} (3x^2 - 4x + 1); \quad M_{U_4}^{[0]}(x) = 0;$$

$$D_{U_1 U_1}^{[0]}(x, y) = x(1-x)y(1-y)/100;$$

$$D_{U_2 U_2}^{[0]}(x, y) = x(1-x^2)y(1-y)/200;$$

$$D_{U_k U_\ell}^{[0]}(x, y) = 0, \quad k = \overline{1, 4}, \quad \ell = \overline{1, 6}, \quad k \neq \ell \text{ или } k = 5, 6, \quad \ell = \overline{1, 4};$$

$$q(x, t) = -x \left(\frac{425 x^4}{4256} - \frac{1115 x^3}{3648} + \frac{335 x^2}{1064} - \frac{445 x}{3648} + \frac{55}{4256} \right),$$

причем число гармоник в разложениях (9), (10) было выбрано равным 16 ($k_0 = \ell_0 = 16$) по каждому из аргументов x и y .

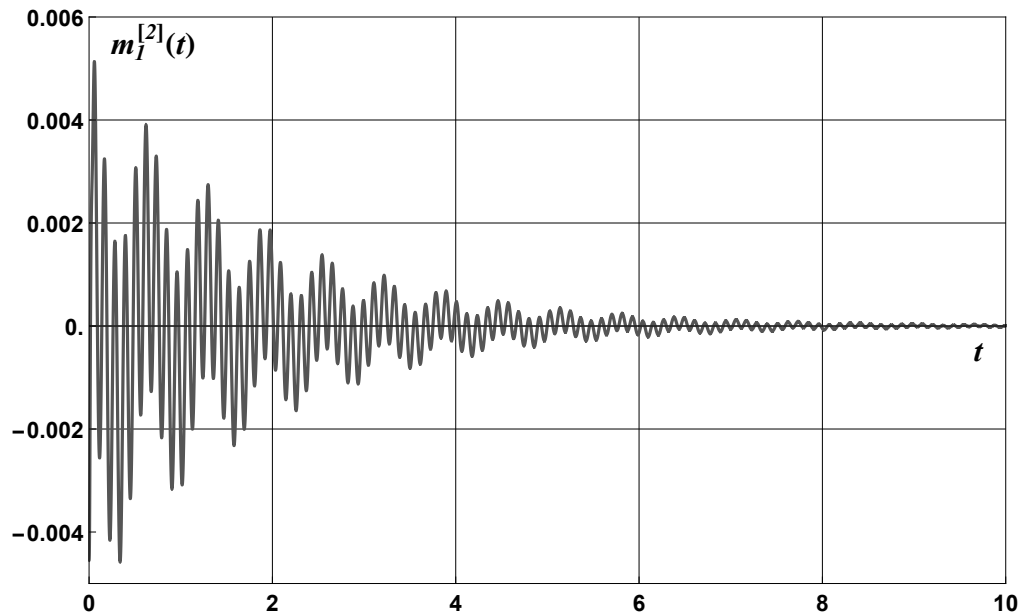


Рис. 3

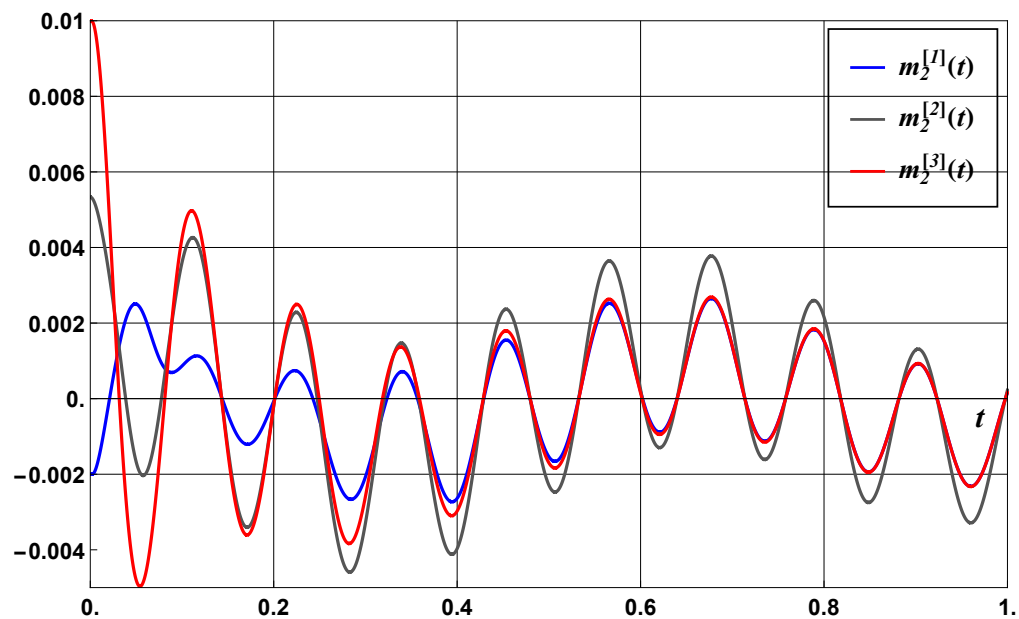


Рис. 4

На рис. 2–9 приведено поведение математических ожиданий исследуемых полей, причем на рисунках с четными номерами разными цветами представлено такое поведение для трех точек балок ($x = 0.25, 0.50$ и 0.75) на укороченном временном промежутке с целью более ярко продемонстрировать детали

переходных процессов. Номера соответствующих точек указаны в верхних индексах, заключенных в квадратные скобки. Графики с четными номерами показывают изменение тех же математических ожиданий в серединах балок на полном временном промежутке.

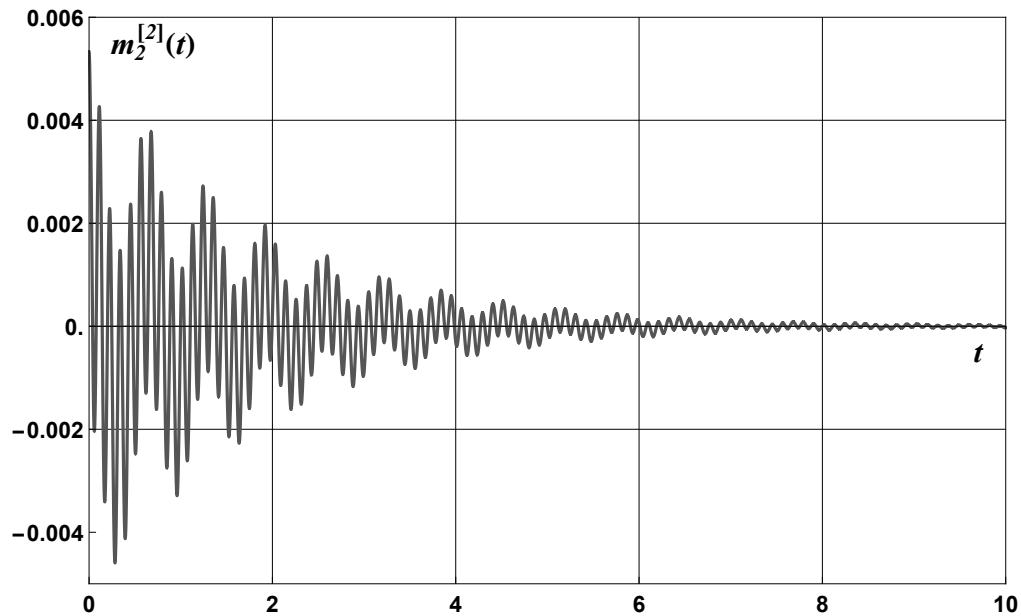


Рис. 5

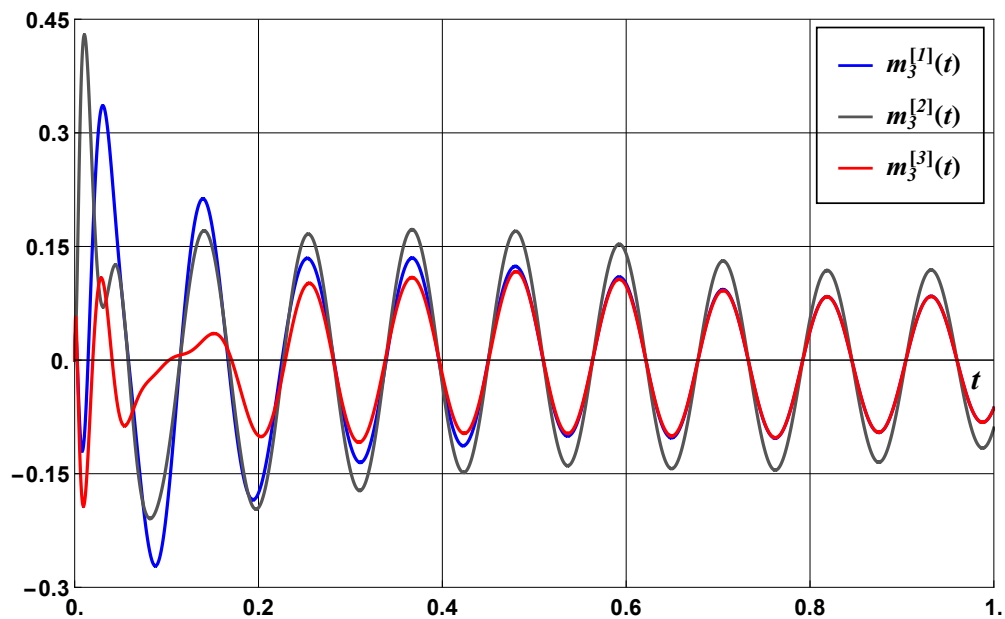


Рис. 6

На рис. 10–17 демонстрируется изменение среднеквадратичных отклонений (СКО) полей $U_k(x, t)$, причем на рисунках с четными номерами разными цветами, как и выше, представлено такое поведение для трех точек балок (x

$= 0.25, 0.50$ и 0.75) на укороченном временном промежутке. Графики с четными номерами показывают изменение тех же СКО $\sigma_k(x, t) = \sqrt{D_{kk}(x, x, t)}$, $k = \overline{1, 4}$, в серединах балок на всем промежутке $[0, T]$.

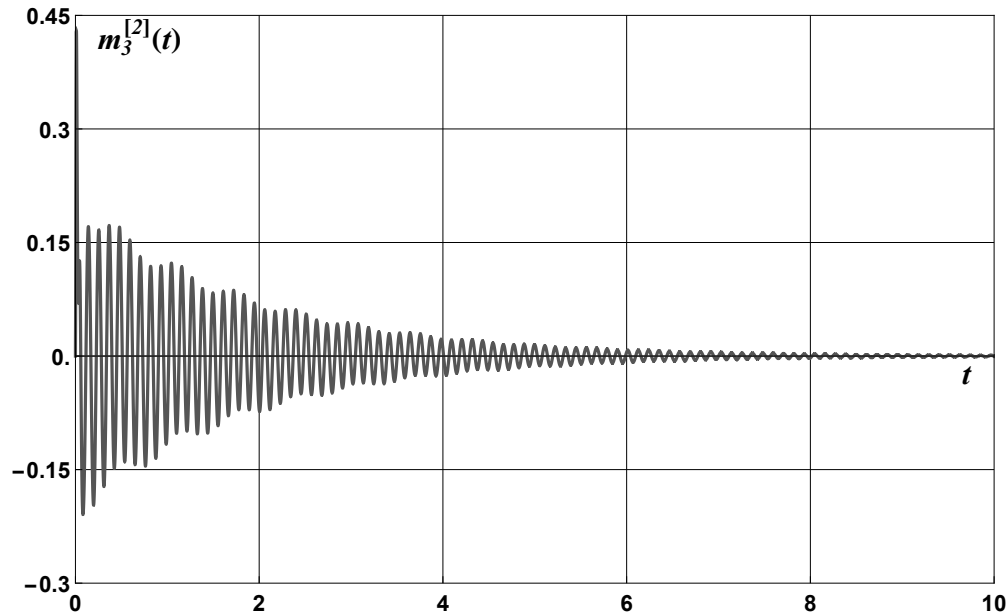


Рис. 7

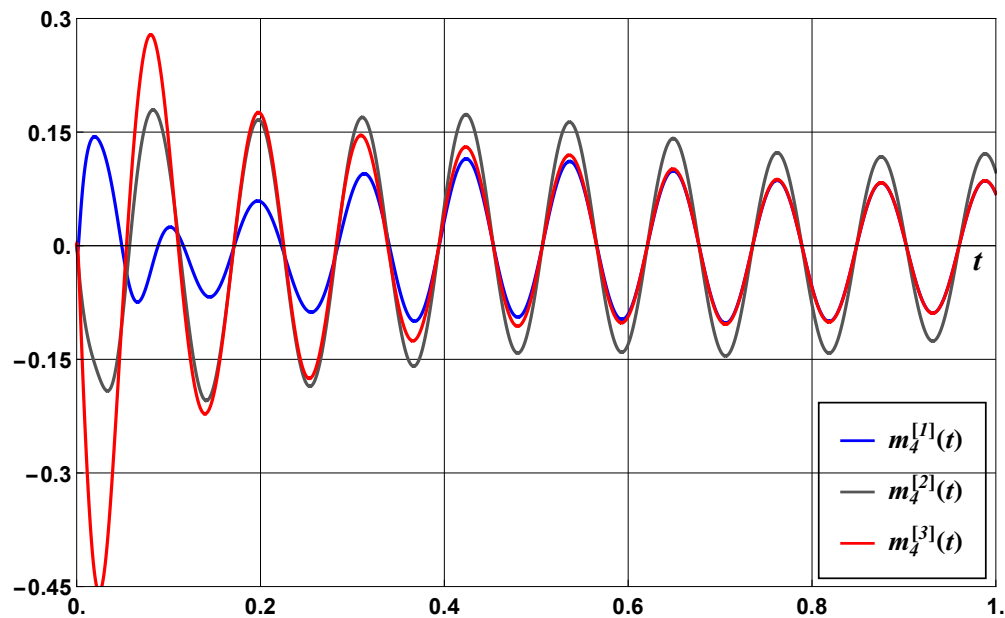


Рис. 8

На рис. 18–21 при тех же установках, что и выше, показано поведение ковариаций $D_{12}(x, x, t)$ и $D_{34}(x, x, t)$.

Несложно видеть, что при выбранных параметрах расчетов математические ожидания, дисперсии и ковариации смещений и скоростей балок демонстрируют затухающие колебания, причем после небольшого переходного

периода графики статистических характеристик при $x = 0.25$ и 0.75 сливаются (на графиках дисперсий и ковариаций на это дополнительно указывают точки синего цвета, соответствующих сечению $x = 0.75$).

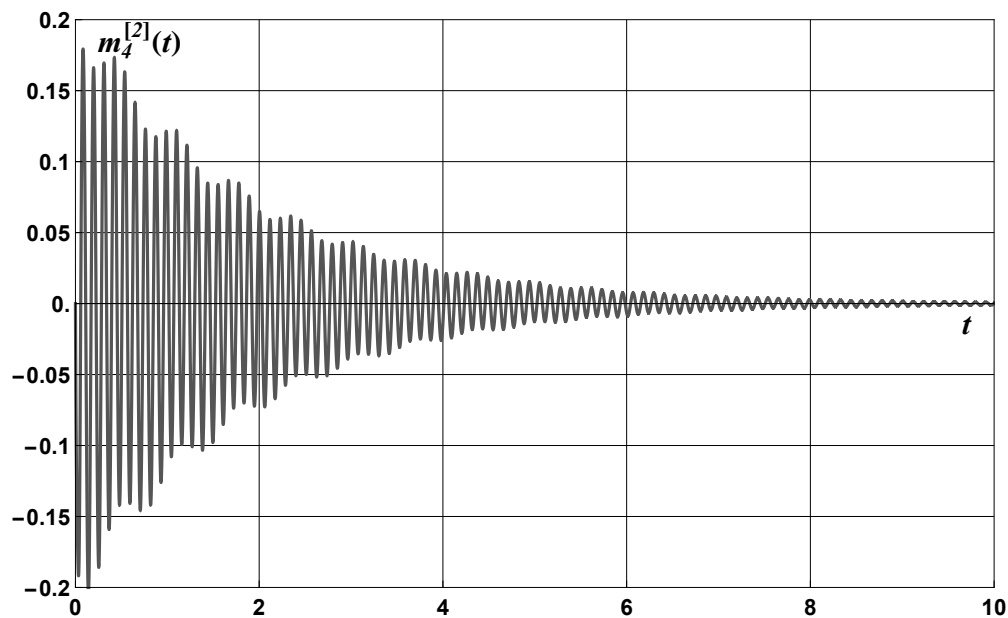


Рис. 9

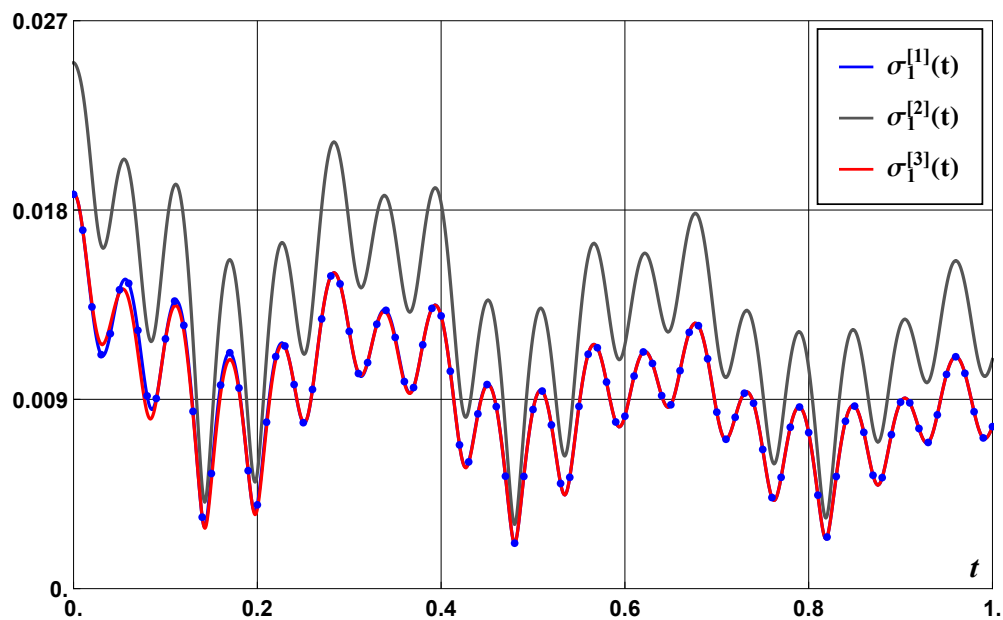


Рис. 10

Если рассматривать вопрос о точности получаемых аппроксимаций неизвестных функций, то необходимо отметить, что, с одной стороны, получить практически значимые априорные оценки точности приближений в зависимости от k_0 и ℓ_0 в этой задаче, как и во многих иных случаях не представляется возможным, но с другой, вследствие того, что применяемый метод по сути

использует отрезки рядов Фурье, должна наблюдаться эмпирическая сходимость метода, соответствующая теоретической среднеквадратической сходимости таких рядов.

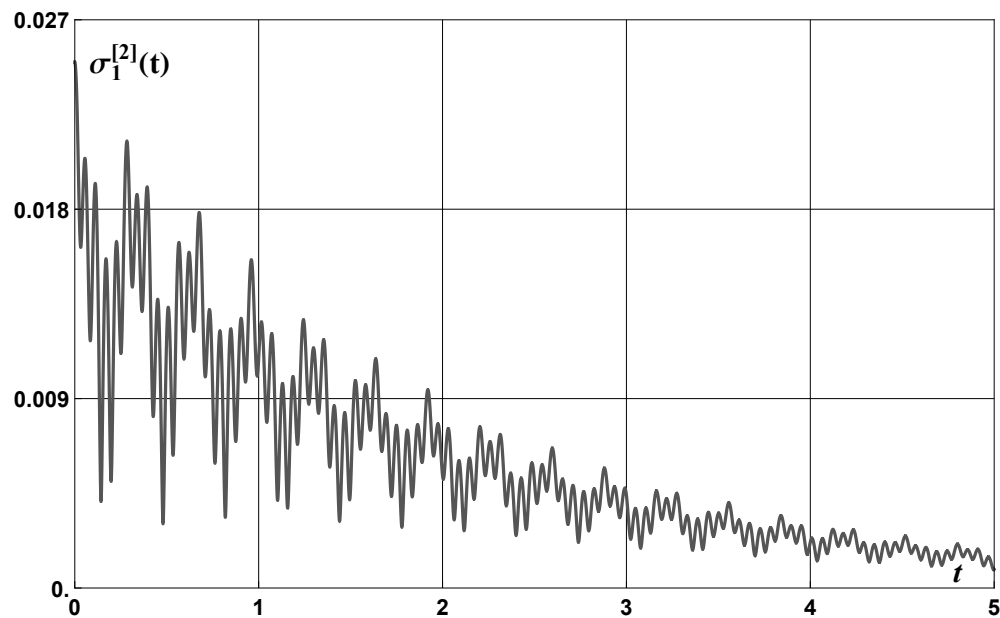


Рис. 11

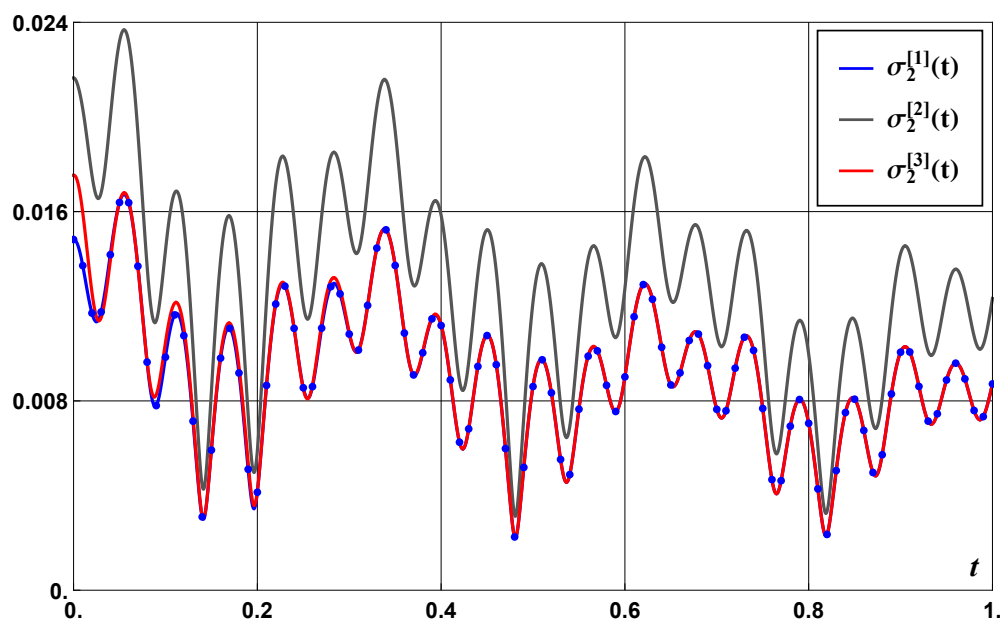


Рис. 12

Если же использовать апостериорную информацию, то для оценки погрешности расчетов сравнивались результаты вычислений при значениях $k_0 = \ell_0 = 16$ и $k_0 = \ell_0 = 18$, причем системы ОДУ для математических ожиданий численно интегрировались с автоматическим выбором шага с использование арифметики чисел с 30 значащими цифрами, а уравнения для

$D_{U_i U_j}$ – с 25. Данные в таблицах 1, 2 и 3 дают представление о близости переходных режимов в системе при различных уровнях урезания:

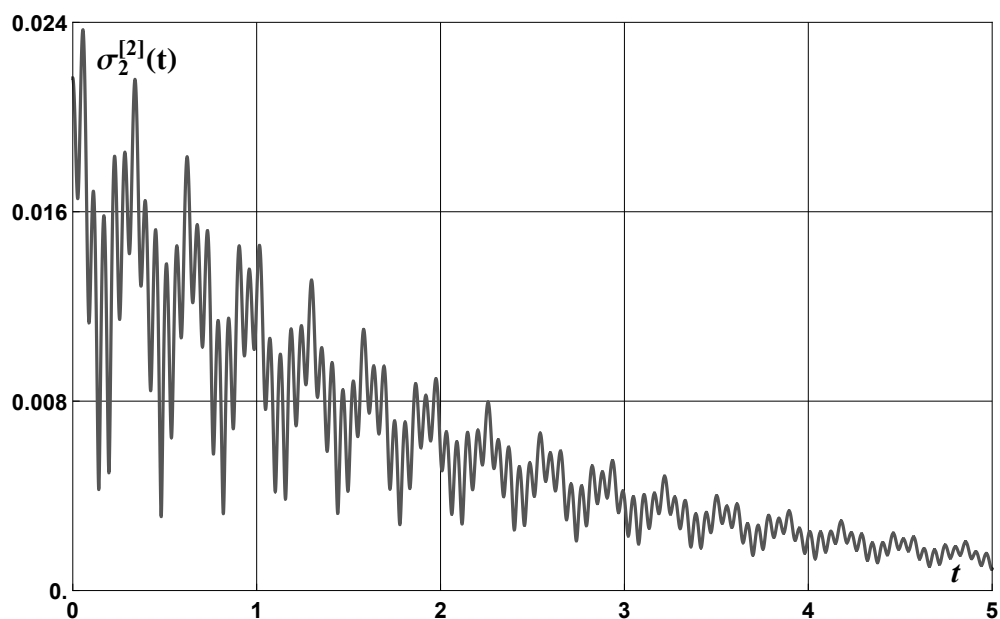


Рис. 13

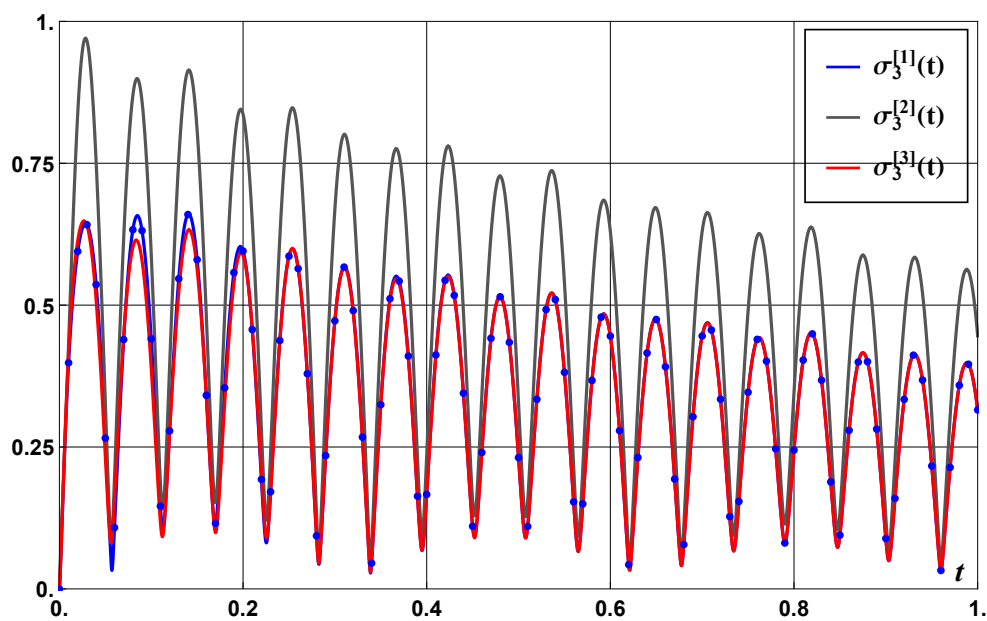


Рис. 14

Таблица 1

k_0	I	II	III	IV
16	$0.902148 \cdot 10^{-4}$	$0.369029 \cdot 10^{-4}$	$4.872011 \cdot 10^{-7}$	$6.850808 \cdot 10^{-7}$
18	$0.714838 \cdot 10^{-4}$	$0.295275 \cdot 10^{-4}$	$3.807608 \cdot 10^{-7}$	$5.396335 \cdot 10^{-7}$

– в таблице 1 представлены максимумы модулей разностей между функциями $M_{U_1}^{[0]}(x)$ (I), $M_{U_2}^{[0]}(x)$ (II), $D_{U_1 U_1}^{[0]}(x, y)$ (III), $D_{U_2 U_2}^{[0]}(x, y)$ (IV) и отрезками их рядов Фурье;

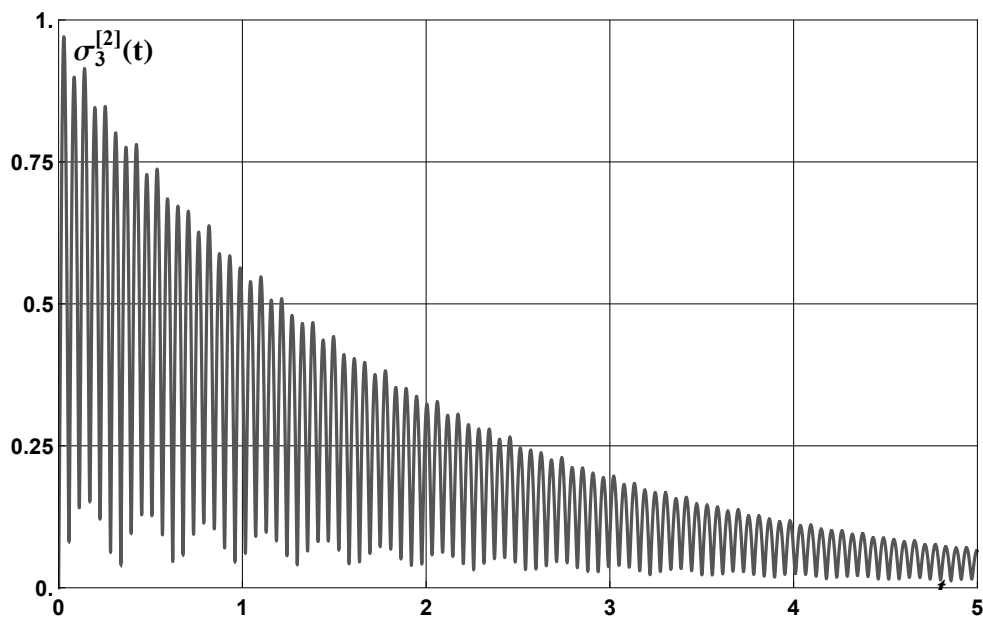


Рис. 15

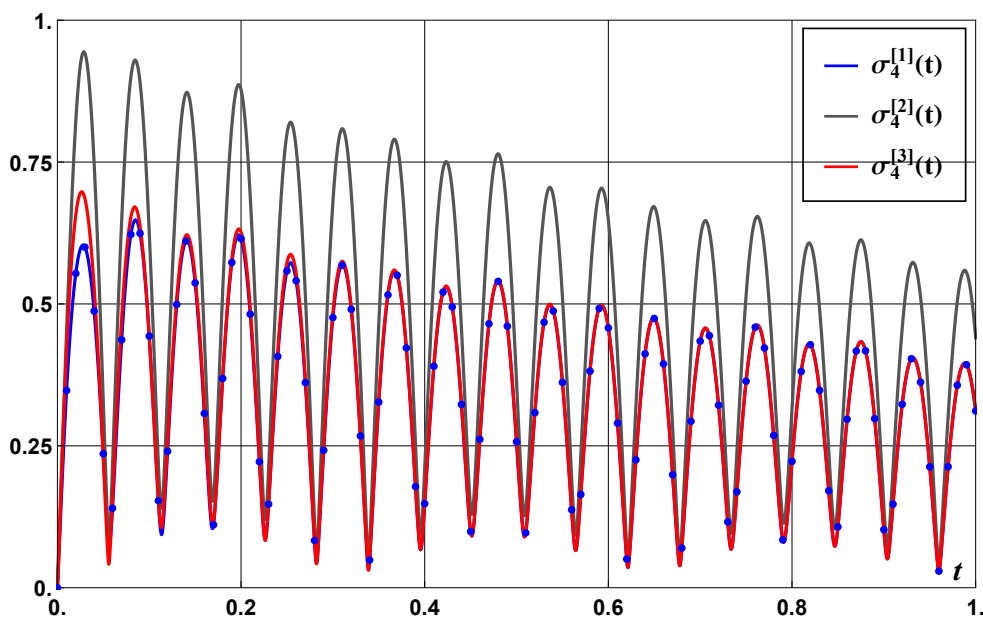


Рис. 16

– в таблице 2 приведены максимумы модулей разностей между функциям $M_{U_i}(x, t)$ ($i = \overline{1, 4}$ при $k_0 = 16$ и 18 в трех точках и времена t_* такие, что при $t > t_*$ модули разностей были менее 10^{-10} ;

Таблица 2

i	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	t_*
1	$0.111834 \cdot 10^{-4}$	$0.208209 \cdot 10^{-4}$	$0.182619 \cdot 10^{-4}$	0.05
2	$0.770203 \cdot 10^{-5}$	$0.112035 \cdot 10^{-5}$	$0.928644 \cdot 10^{-5}$	0.06
3	$0.218405 \cdot 10^{-2}$	$0.406514 \cdot 10^{-2}$	$0.356493 \cdot 10^{-2}$	0.08
4	$0.126416 \cdot 10^{-2}$	$0.183784 \cdot 10^{-3}$	$0.152407 \cdot 10^{-2}$	0.09

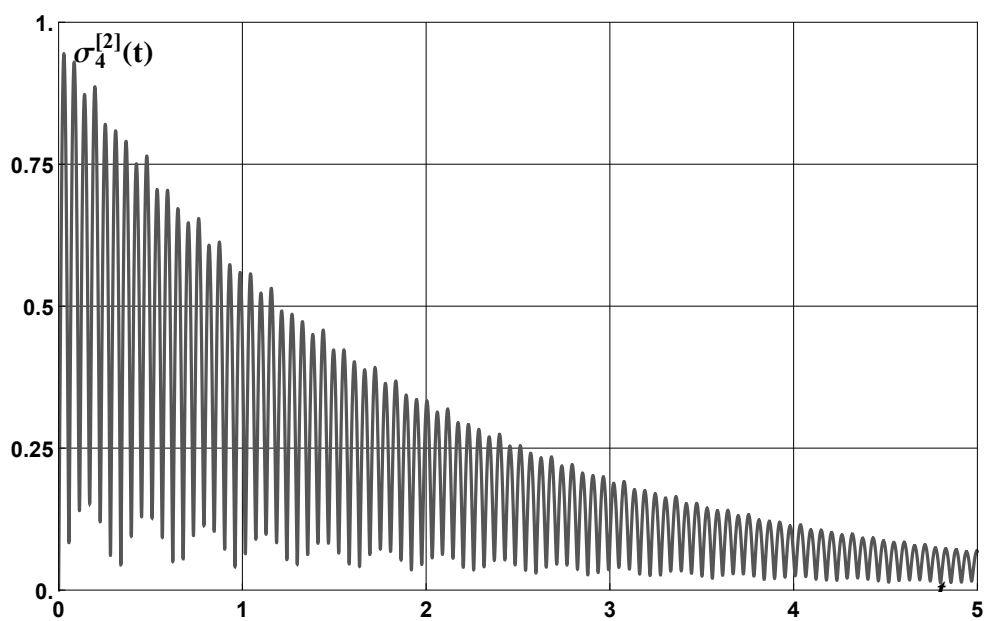


Рис. 17

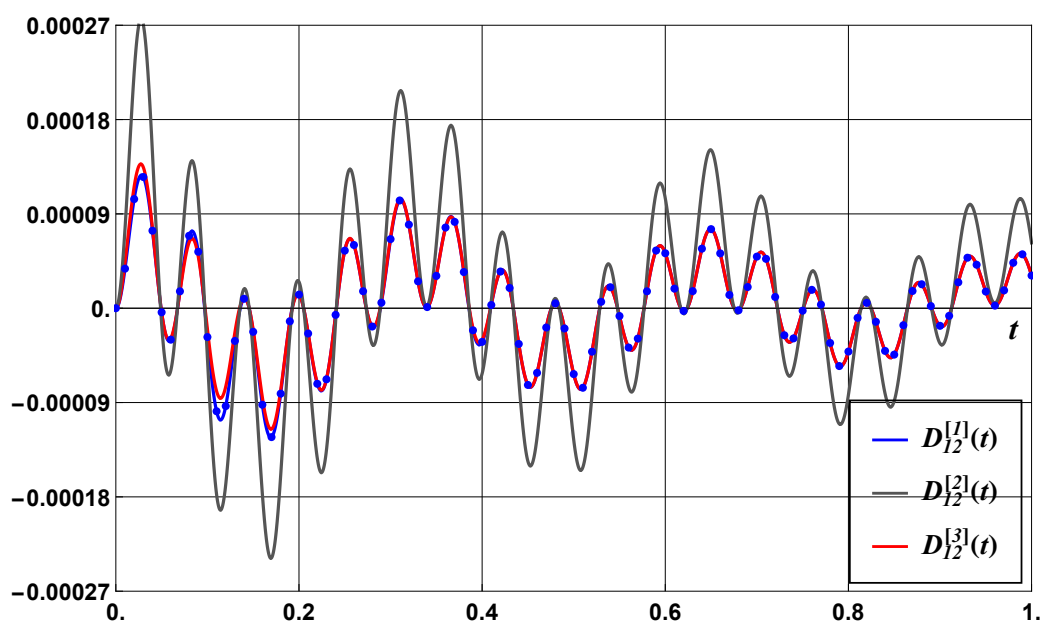


Рис. 18

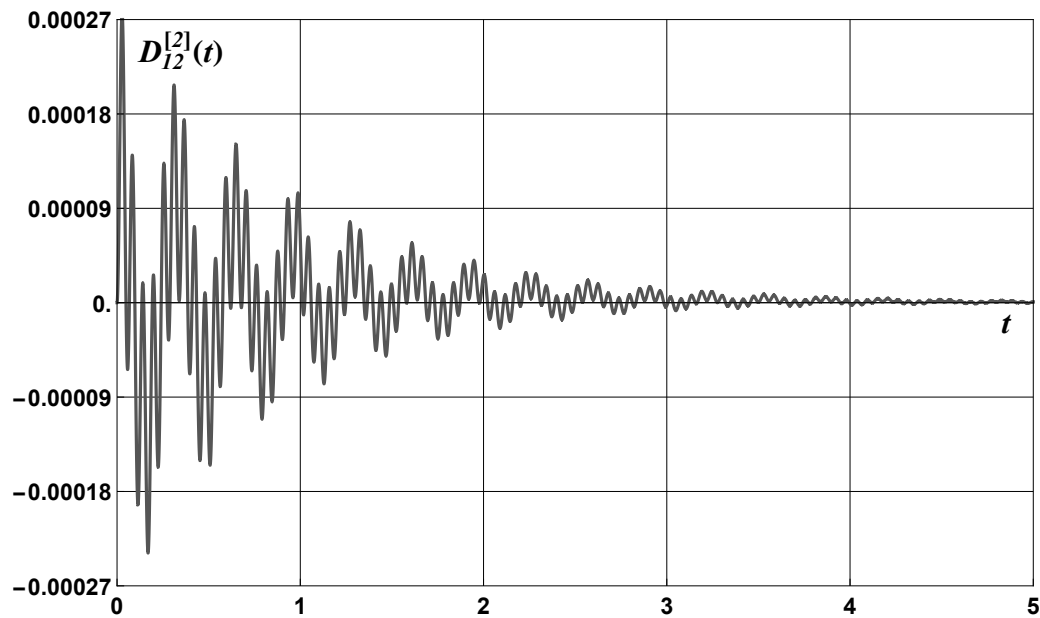


Рис. 19

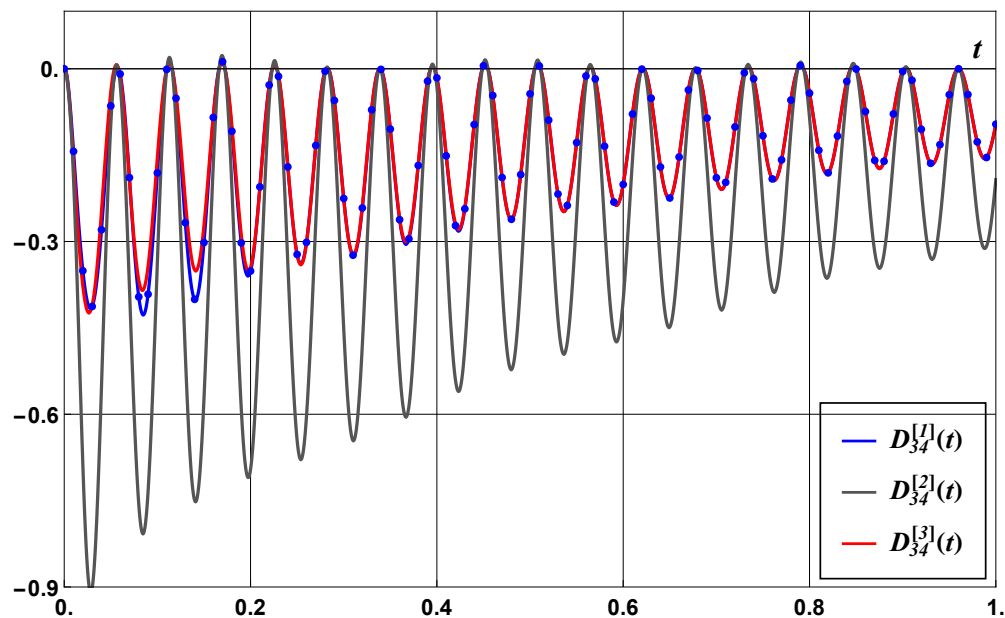


Рис. 20

– в таблице 3 отображены максимумы модулей разностей между функциями $\sigma_{U_i}(x, x, t)$ ($i = \overline{1, 4}$, $D_{U_1 U_2}(x, y, t)$, $D_{U_3 U_4}(x, y, t)$ ($i = 5, 6$) при $k_0 = 16$ и 18 в трех точках (смысл t_* тот же, что и выше).

Анализ приведенных таблиц и их сравнение с результатами расчетов при $k_0 = \ell_0 = 20$ позволяет сделать вывод, что последовательное увеличение уровней замыкания монотонно уменьшает максимумы абсолютных величин добавок к аппроксимациям решений, а также приводит к убыванию времён t_* , а также то, что действительно наблюдается эмпирическая сходимость.

Таблица 3

i	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	t_*
1	$0.371346 \cdot 10^{-5}$	$0.525162 \cdot 10^{-5}$	$0.371346 \cdot 10^{-5}$	0.04
2	$0.113081 \cdot 10^{-5}$	$0.454804 \cdot 10^{-5}$	$0.454804 \cdot 10^{-5}$	0.05
3	$0.487041 \cdot 10^{-3}$	$0.742738 \cdot 10^{-3}$	$0.442233 \cdot 10^{-3}$	0.07
4	$0.119626 \cdot 10^{-3}$	$0.476031 \cdot 10^{-3}$	$0.479966 \cdot 10^{-3}$	0.08
5	$0.864203 \cdot 10^{-9}$	$0.180794 \cdot 10^{-8}$	$0.102586 \cdot 10^{-8}$	0.04
6	$0.614611 \cdot 10^{-4}$	$0.125020 \cdot 10^{-3}$	$0.705719 \cdot 10^{-4}$	0.08

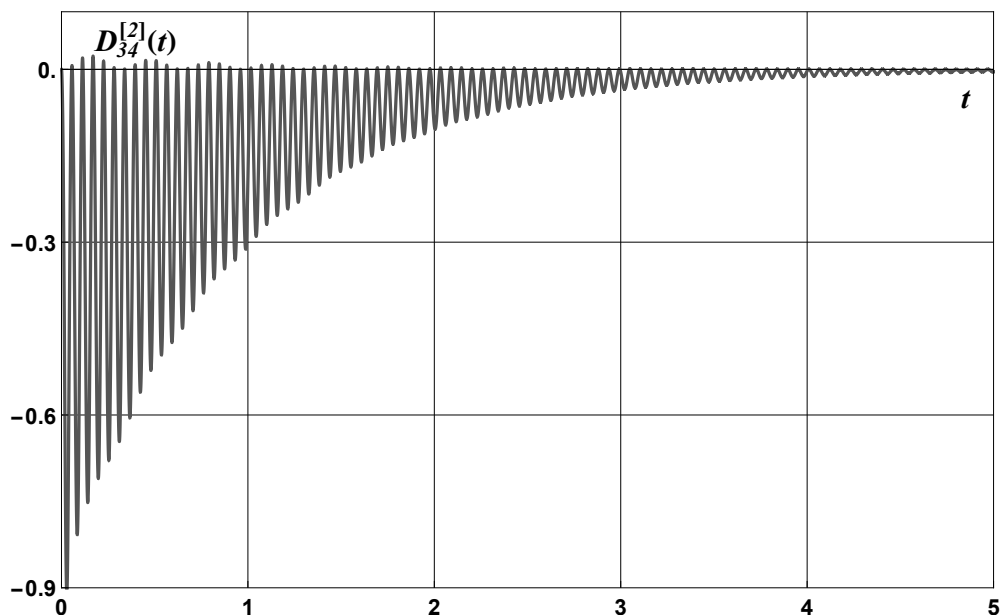


Рис. 21

Список литературы

- [1] Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
- [2] Полосков И.Е. Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. – 772 с.
- [3] Шмелев А.Б. Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. – М.: Изд-во МФТИ, 1998. – 208 с.
- [4] Adhikari S., Manohar C.S. Transient dynamics of stochastically parametered beams // Journal of Engineering Mechanics. – 2000. – Vol.126, № 11. – P. 1131–1140.
- [5] Wolfram St. An elementary introduction to the Wolfram Language. – Champaign (IL): Wolfram Media, 2017. – 324 p.

- [6] *Chow P.-L.* Stochastic partial differential equations. – Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2015. – XII, 314 p.
- [7] *Galal O.H., El-Tawil M.A., Mahmoud A.A.* Stochastic beam equations under random dynamic loads // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Vol. 39, № 4. – P. 1031–1040.
- [8] *Ghanem R.G., Spanos P.D.* Stochastic finite elements: A spectral approach. – New York: Springer, 1991. – 214 p.
- [9] *Ju P.* Stochastic dynamics of power systems. – Singapore: Springer, 2019. – 241 p.
- [10] *Klyatskin V.I.* Stochastic equations: Theory and applications in acoustics, hydrodynamics, magnetohydrodynamics, and radiophysics. – Cham: Springer, 2015. – Vol. 1. Basic concepts, exact results, and asymptotic approximations. – 438 p.; Vol. 2. Coherent phenomena in stochastic dynamic systems. – 519 p.
- [11] *Kozić P., Janevski G., Pavlović R.* Moment Lyapunov exponents and stochastic stability of a double-beam system under compressive axial loading // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47, № 10. – P. 1435–1442.
- [12] *Li J.W., Ni B.Y., Jiang C., Fang T.* Dynamic response bound analysis for elastic beams under uncertain excitations // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Vol. 422. – P. 471–489.
- [13] *Lin Y.K., Cai G.Q.* Probabilistic structural dynamics. Advanced theory and applications. – New York: McGraw–Hill, 1995. – 546 p.
- [14] *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. – Oxford: Woodhead Publishing, 2011. – 440 p.
- [15] *Mazur-Śniady K., Misiurek K., Szyłko-Bigus O., Śniady P.* Fuzzy stochastic vibrations of double-beam complex system as model sandwich beam with uncertain parameters // ISRN Applied Mathematics (Hindawi). – 2013. – Vol. 2013, Article ID 340145. – 12 p.
- [16] *Pavlović R., Kozić P., Pavlović I.* Dynamic stability and instability of a double-beam system subjected to random forces // International Journal of Mechanical Sciences. – 2012. – Vol. 62, № 1. – P. 111–119.
- [17] *Pavlović I., Pavlović R., Kozić P., Janevski G.* Almost sure stochastic stability of a viscoelastic double-beam system // Archive of Applied Mechanics. – 2013. – Vol. 83, № 11. – P. 1591–1605.
- [18] *Pavlović I., Pavlović R., Ćirić I., Karličić D.* Dynamic stability of nonlocal Voigt–Kelvin viscoelastic Rayleigh beams // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – Vol. 39, № 22. – P. 6941–6950.

- [19] *Pavlović R., Pavlović I.R.* Dynamic stability of Timoshenko beams on Pasternak viscoelastic foundation // Theoretical and Applied Mechanics. – 2018. – Vol. 45, № 1. – P. 67–81.
- [20] *Roberts J.B., Spanos P.D.* Random vibration and statistical linearization. – Chichester (UK): John Wiley & Sons, 1990. – 420 p.
- [21] *Soize C.* Uncertainty quantification: An accelerated course with advanced applications in computational engineering. – Cham (Switzerland): Springer, 2017. – 351 p.
- [22] *Wedig W.V.* Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations // Structural Safety. – 1990. – Vol. 8, № 1–4. – P. 13–25.
- [23] *Wedig W.V.* Analysis and simulation of nonlinear stochastic systems // Proc. IUTAM Symp. "Nonlinear Dynamics in Engineering Systems" / W. Schiehlen (ed.). – Berlin, Heidelberg: Springer, 1990. – P. 337–344.

Stochastic vibrations of a viscoelastic two-beam system with additive and parametric random disturbances

I. E. Poloskov

Perm State University

e-mail: Igor.Poloskov@gmail.com

Abstract. The paper examines a system consisting of two parallel thin prismatic and homogeneous viscoelastic beams, which interact through an elastic layer described by the Winkler model. These beams are subjected to axial compression by random forces and bending by a distributed stochastic load. We construct equations for the first moment fields on the base of the generalized Fokker – Planck – Kolmogorov equation for the probability density functional. The spectral method is used to discretize these equations in space and to obtain a chain of systems of ordinary differential equations. Solution to this chain of equations is a set of the coefficients of moment functions' expansion in sines. The equations are numerically integrated in the environment of the **Wolfram Mathematica** computer package. Then we present the results of analytical calculations and numerical computations. Illustrative material is also prepared with the help of the **Mathematica** package.

Keywords: viscoelastic system, random field, stochastic partial differential equation, equations for the first moment fields and functions, modeling, spectral method, ordinary differential equation, computer analytical calculations, numerical computations.