

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N.4, 2020

Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Теория обыкновенных дифференциальных  
уравнений

Управление колебаниями и хаосом

Компьютерное моделирование динамических и  
управляемых систем

## Управление колебаниями маятника на подвижной платформе

**А. В. Братищев**

Донской государственный технический университет

[avbratishchev@spark-mail.ru](mailto:avbratishchev@spark-mail.ru)

**Аннотация.** В настоящей статье выводится уравнение движения системы двух стационарно связанных материальных точек, одна из которых может перемещаться в горизонтальной плоскости. Из нормального вида соответствующей автономной системы уравнений следует, что аналитическое нахождение её состояний равновесия невозможно. Производится частичное интегрирование полученной системы. Предложено силовое поле, позволяющее гасить колебания системы при любом её начальном состоянии. Методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) найдено управление скоростью вращения маятника вокруг вертикальной оси, стабилизирующее его колебания в вертикальной плоскости. Спроектированы исполняемые S-модели свободной и управляемой систем в пакете Simulink. По результатам анализа уравнения и численных экспериментов сделаны выводы о поведении системы при изменении её параметров и параметров поля.

**Ключевые слова:** платформа, маятник, уравнение Лагранжа, силовое поле, синергетическое управление.

**Введение.** Задача имеет отношение к проблеме удержания палки в вертикальном положении на ладони с помощью горизонтального перемещения этой ладони. Она также имеет отношение к разработке приемов пилотирования вертолета с грузом на внешней подвеске [1], [2]. В первой из этих работ получено математическое описание движения груза на внешней подвеске вертолета с учетом сил инерции, возникающих при ускоренном перемещении точки подвеса. Груз на внешней подвеске рассматривается как сферический маятник с подвижной точкой подвеса. Во второй статье в частном случае колебания груза в фиксированной вертикальной плоскости изучается проблема гашения этих колебаний с помощью подходящих перемещений точки подвеса. Она решается с помощью проектирования ПИД-регулятора, а в качестве показателя качества берется длительность процесса регулирования. Установлено, что перемещение точки подвеса по горизонтали более предпочтительно.

В настоящей статье мы выводим уравнение движения двух стационарно связанных материальных точек в поле тяжести, одна из которых может перемещаться в горизонтальной плоскости. Производится частичное интегрирование (понижение порядка) полученной системы уравнений. Предлагается силовое поле, позволяющее гасить колебания системы при любом

неустойчивом начальном состоянии. Проектируется синергетический регулятор, который стабилизирует не только рассматриваемую систему, но и вертикальную плоскость колебаний маятника. Проектируются исполняемые S-модели системы в пакете Simulink. Приводятся результаты численных экспериментов.

### 1 Вывод уравнения движения системы.

Пусть в центре масс плоской горизонтальной платформы массой  $M$  шарнирно закреплён свободно колеблющийся маятник на невесомой упругой нити длины  $l$  с точечной массой  $m$  (Рис.1). Составим уравнение свободного движения этой системы [3].

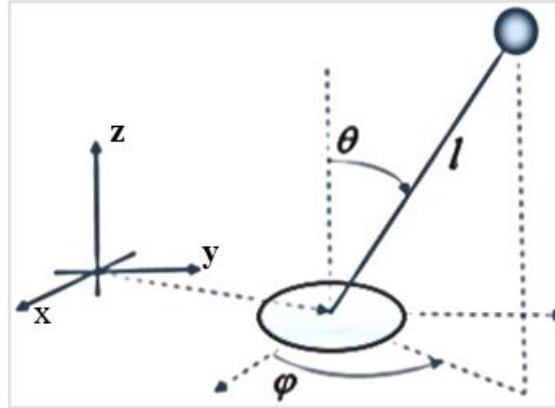


Рис.1 Маятник на платформе

Имеем координаты центра масс платформы  $\{x(t), y(t), 0\}$  и координаты конца маятника (в сферической системе координат)  $\{x(t) + l \sin \theta(t) \cos \varphi(t), y(t) + l \sin \theta(t) \sin \varphi(t), l \cos \theta(t)\}$ .

Отсюда кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2) + \frac{m}{2}(\dot{x} + l \sin \theta \cos \varphi)_t^2 + \frac{m}{2}(\dot{y} + l \sin \theta \sin \varphi)_t^2 + \frac{m}{2}l^2(\dot{\cos \theta})_t^2.$$

Потенциальная энергия  $\Pi = mgl \cos \theta$ . По функции Лагранжа  $L = T - \Pi$  составляем уравнения Лагранжа движения системы с 4 обобщёнными координатами.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} - \frac{\partial L}{\partial x} &= (M + m)x''_t + ml \cos \theta \cos \varphi \theta''_t - ml \sin \theta \sin \varphi \varphi''_t - ml \sin \theta \cos \varphi \theta'_t{}^2 - \\ &\quad - 2ml \cos \theta \sin \varphi \theta'_t \varphi'_t - ml \sin \theta \cos \varphi \varphi'_t{}^2 = ((M + m)x + ml \sin \theta \cos \varphi)_t'' = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}'} - \frac{\partial L}{\partial y} &= (M + m)y''_t + ml \cos \theta \sin \varphi \theta''_t + ml \sin \theta \cos \varphi \varphi''_t - ml \sin \theta \sin \varphi \theta'_t{}^2 + \\ &\quad + 2ml \cos \theta \cos \varphi \theta'_t \varphi'_t - ml \sin \theta \sin \varphi \varphi'_t{}^2 = ((M + m)y + ml \sin \theta \sin \varphi)_t'' = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= ml \left( \cos \theta \cos \varphi x''_t + \cos \theta \sin \varphi y''_t + l \theta''_t - \frac{l}{2} \sin 2\varphi \theta'_t{}^2 - g \sin \theta \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -ml \sin \theta (\sin \varphi x''_t - \cos \varphi y''_t - l \sin \theta \varphi''_t - 2l \cos \theta \theta'_t \varphi'_t) = 0 \end{aligned} \quad . \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ В частном случае  $y(t) \equiv 0$ ,  $\varphi(t) \equiv 0$  задача переходит в классическую задачу о движении подвижной тележки с маятником. При этом второе и четвертое уравнения системы вырождаются, а первое и третье преобразуются в уравнения свободного движения тележки с перевернутым маятником (смотри, например, [4], с.208).

В случае  $x(t) \equiv 0$ ,  $y(t) \equiv 0$ ,  $\varphi(t) \equiv 0$  получаем уравнение колебаний плоского математического

маятника  $\theta''_{t^2} = \frac{g}{l} \sin \theta$ .

Разрешим эту систему относительно производных второго порядка, и переобозначим переменные

$$x_1 := x, \quad x_2 := x', \quad x_3 := y, \quad x_4 := y', \quad x_5 := \theta, \quad x_6 := \theta', \quad x_7 := \varphi, \quad x_8 := \varphi'.$$

Получается такая автономная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = \frac{ml \sin x_5 \cos x_7}{M + m \sin^2 x_5} \left( x_6^2 + \sin^2 x_5 x_8^2 - \frac{g}{l} \cos x_5 \right) \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = \frac{ml \sin x_5 \sin x_7}{M + m \sin^2 x_5} \left( x_6^2 + \sin^2 x_5 x_8^2 - \frac{g}{l} \cos x_5 \right) \\ x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \frac{\sin x_5}{M + m \sin^2 x_5} \left( \cos x_5 (-m x_6^2 + M x_8^2) + \frac{g(M + m)}{l} \right) \\ x'_7 = x_8 \\ x'_8 = -2 \frac{\cos x_5}{\sin x_5} \cdot x_6 \cdot x_8 \end{cases} \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Если числитель и знаменатель правой части шестого уравнения разделить на  $M$ , и формально перейти к пределу при  $M \rightarrow \infty$ , то получим систему

$$\begin{cases} x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \sin x_5 \cos x_5 x_8^2 + \frac{g}{l} \sin x_5 \\ x'_7 = x_8 \\ x'_8 = -2 \frac{\cos x_5}{\sin x_5} \cdot x_6 \cdot x_8 \end{cases},$$

которая совпадает с уравнением колебаний сферического маятника [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Из физических соображений ожидается, что точки  $(x_1^0, 0, x_3^0, 0, \pi k, 0, x_7^0, 0)$  будут состояниями равновесия автономной системы (2), то есть правые части этой системы должны обращать в ноль в этих точках. Видно, что для первых семи уравнений это так, но правая часть последнего уравнения в этих точках не определена. Поэтому аналитически проверить эти точки на устойчивость не удастся.

Проведем численные эксперименты на исполняемой модели системы (2), которую спроектируем в SIMULINK. Для этого после переобозначения переменных в уравнении Лагранжа исключим  $x'_2, x'_4$  из третьего и четвертого уравнений. Последнее из уравнений

сворачивается к виду  $(x_8 \sin^2 x_5)'_t = 0$ . Для проектирования возьмём такую систему

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{ml}{M+m}(\sin x_5 \cos x_7)'_t + C_1 \\ x_4 = -\frac{ml}{M+m}(\sin x_5 \sin x_7)'_t + C_2 \\ x_6' = \frac{1}{M/m + \sin^2 x_5} \left( (-x_6^2 + Mx_8^2/m) \cos x_5 + \frac{g(M+m)}{ml} \right) \sin x_5 \\ x_8 = \frac{C_3}{\sin^2 x_5} \end{cases}.$$

Предлагаемое понижение порядка системы на 3 единицы существенно упрощает её проектирование.

Для численных экспериментов удобнее произвольные постоянные выразить через начальные данные  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, x_7^0, x_8^0$ :

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{ml}{M+m}(\sin x_5 \cos x_7)'_t + (x_2^0 + ml(\cos x_5^0 \cos x_7^0 x_6^0 - \sin x_5^0 \sin x_7^0 x_8^0)/(M+m)) \\ x_4 = -\frac{ml}{M+m}(\sin x_5 \sin x_7)'_t + (x_4^0 + ml(\cos x_5^0 \sin x_7^0 x_6^0 + \sin x_5^0 \cos x_7^0 x_8^0)/(M+m)) \\ x_6' = \frac{1}{M/m + \sin^2 x_5} \left( (-x_6^2 + Mx_8^2/m) \cos x_5 + \frac{g(M+m)}{ml} \right) \sin x_5 \\ x_8 = \frac{x_8^0 \sin^2 x_5^0}{\sin^2 x_5} \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Из вида последнего уравнения следует, что при неограниченном приближении маятника к верхнему или нижнему положению равновесия его скорость вращения относительно вертикальной оси пропорционально возрастает. Если маятник проходит через положение равновесия, то он необходимо будет колебаться в фиксированной вертикальной плоскости, а вся система будет вести себя как тележка с маятником в этой плоскости.

Ввиду отсутствия трения система должна совершать незатухающие колебания. Приведём характерную траекторию движения конца маятника относительно центра масс платформы при начальных данных  $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, -1)$ ,  $M = 10$ ,  $m = 2$ ,  $l = 3$  и времени моделирования  $t = 20$ .

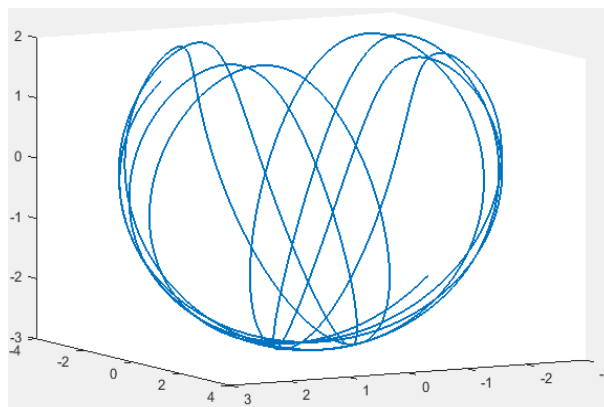


Рис.2 Свободное движение системы. Колебания конца маятника относительно платформы.

Приведём траекторию движения центра масс платформы относительно начала координат на  $x, y$ -плоскости при тех же начальных условиях (Рис.3). То есть платформа перемещается только благодаря колебаниям маятника.

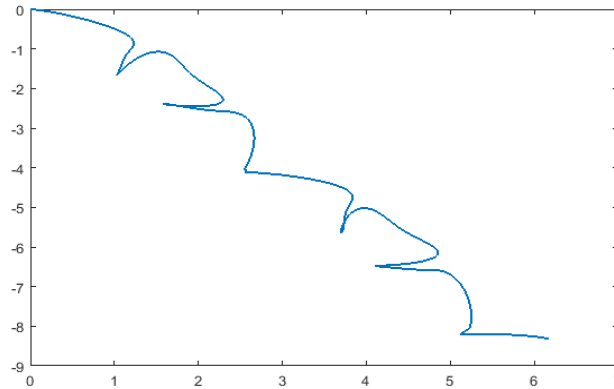


Рис.3 Свободное движение системы. Траектория движения платформы.

Приведём траекторию движения конца маятника в неподвижной системе координат при тех же начальных условиях.

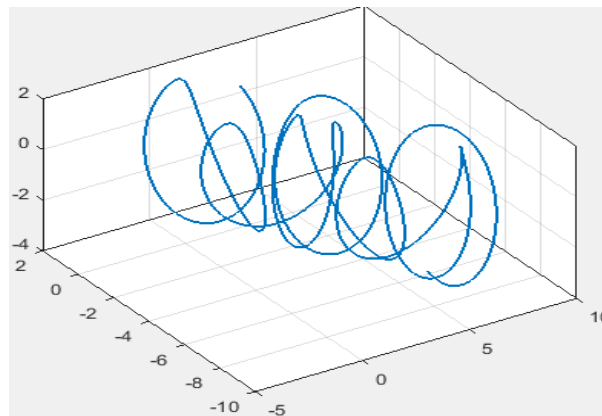


Рис.4 Свободное движение системы. Траектория движения конца маятника относительно начала координат.

## 2 Уравнение движения системы в силовом поле

Пусть платформа находится в плоском силовом поле

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \{f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8), f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8), 0\}.$$

Ее уравнение движения принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} &= (M + m)x''_{t^2} + ml \cos \theta \cos \varphi \varphi''_{t^2} - ml \sin \theta \sin \varphi \varphi''_{t^2} - ml \sin \theta \cos \varphi \theta'^2 - \\ &\quad - 2ml \cos \theta \sin \varphi \theta'_t \varphi'_t - ml \sin \theta \cos \varphi \varphi'^2_{t^2} = f_1 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = (M+m)y''_{t^2} + ml \cos \theta \sin \varphi \theta''_{t^2} + ml \sin \theta \cos \varphi \varphi''_{t^2} - ml \sin \theta \sin \varphi \theta'^2_{t^2} +$$

$$+ 2ml \cos \theta \cos \varphi \theta'_t \varphi'_t - ml \sin \theta \sin \varphi \varphi'^2_{t^2} = f_2 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml \left( \cos \theta \cos \varphi x''_{t^2} + \cos \theta \sin \varphi y''_{t^2} + l \theta''_{t^2} - \frac{l}{2} \sin 2\theta \varphi'^2_{t^2} - g \sin \theta \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ml \sin \theta (\sin \varphi x''_{t^2} - \cos \varphi y''_{t^2} - l \sin \theta \varphi''_{t^2} - 2l \cos \theta \theta'_t \varphi'_t) = 0$$

Разрешим эту систему относительно производных второго порядка, и сделаем замену переменных

$$x_1 := x, \quad x_2 := x', \quad x_3 := y, \quad x_4 := y', \quad x_5 := \theta, \quad x_6 := \theta', \quad x_7 := \varphi, \quad x_8 := \varphi'.$$

Получается следующая нормальная система дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = \frac{\sin x_5 \cos x_7}{\frac{M}{m} + \sin^2 x_5} (lx_6^2 + l \sin^2 x_5 x_8^2 - g \cos x_5) + \\ + \frac{1}{\frac{M}{m} + \sin^2 x_5} \left( \left( \frac{M}{m} + \sin^2 x_5 \sin^2 x_7 \right) f_1 - \sin^2 x_5 \sin x_7 \cos x_7 f_2 \right) \frac{1}{M} \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = \frac{\sin x_5 \sin x_7}{\frac{M}{m} + \sin^2 x_5} (lx_6^2 + l \sin^2 x_5 x_8^2 - g \cos x_5) + \\ + \frac{1}{\frac{M}{m} + \sin^2 x_5} \left( -\sin^2 x_5 \sin x_7 \cos x_7 f_1 + \left( \frac{M}{m} + \sin^2 x_5 \cos^2 x_7 \right) f_2 \right) \frac{1}{M} \\ x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \frac{\sin x_5}{\frac{M}{m} + \sin^2 x_5} \left( -\cos x_5 x_6^2 + \frac{M}{m} \cos x_5 x_8^2 + \frac{g(M+m)}{ml} \right) - \\ - \frac{1}{ml} \frac{\cos x_5 \cos x_7 f_1 + \cos x_5 \sin x_7 f_2}{\frac{M}{m} + \sin^2 x_5} \\ x'_7 = x_8 \\ x'_8 = -2 \frac{\cos x_5}{\sin x_5} x_6 x_8 + \frac{1}{Ml} \frac{\sin x_7}{\sin x_5} f_1 - \frac{1}{Ml} \frac{\cos x_7}{\sin x_5} f_2 \end{array} \right.$$

ЗАМЕЧАНИЕ В частном случае  $y(t) \equiv 0$ ,  $\varphi(t) \equiv 0$ ,  $f_2 = 0$  система переходит в уравнение управляемой системы для перевёрнутого маятника на подвижной тележке [5]:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \frac{ml \sin x_5 x_6^2 - mg \sin x_5 \cos x_5 + f_1}{M + m \sin^2 x_5} =: f \\ x_5' = x_6 \\ x_6' = \frac{-ml \sin x_5 \cos x_5 x_6^2 + (M + m)g \sin x_5 - \cos x_5 f_1}{l(M + m \sin^2 x_5)} = -\frac{\cos x_5}{l} f + \frac{g}{l} \sin x_5 \end{cases}.$$

Как и в случае свободного движения платформы с маятником полученная нормальная система весьма громоздка для создания S-модели управляемой платформы. Поэтому после переобозначения переменных в уравнении Лагранжа (3) исключим  $x_2', x_4'$  из третьего и четвертого уравнений.

Последнее уравнение сворачивается к виду

$$(x_8 \sin^2 x_5)'_t = \frac{\sin x_5}{Ml} (\sin x_7 f_1 - \cos x_7 f_2).$$

Для проектирования выберем такую систему

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{M + m} \left( -ml(\sin x_5 \cos x_7)'_t + \int_0^t f_1 dt \right) \\ x_4 = \frac{1}{M + m} \left( -ml(\sin x_5 \sin x_7)'_t + \int_0^t f_2 dt \right) \\ x_6' = \frac{((-x_6^2 + Mx_8^2/m) \cos x_5 + g(M + m)/ml) \sin x_5 - \cos x_5 (\cos x_7 f_1 + \sin x_7 f_2)/ml}{M/m + \sin^2 x_5} \\ x_8 = \frac{1}{\sin^2 x_5} \frac{1}{Ml} \int_0^t \sin x_5 (\sin x_7 f_1 - \cos x_7 f_2) dt \end{cases}.$$

Пусть силовое поле, в котором находится тележка, имеет характер силы трения:

$$F = \{-c_1 x_2, -c_2 x_4, 0\}, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Для численных экспериментов с соответствующей S-моделью в последней системе выразим произвольные постоянные через начальные данные  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, x_7^0, x_8^0$ :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-ml(\sin x_5 \cos x_7)'_t + (M + m)x_2^0 + ml(\cos x_5^0 \cos x_7^0 x_6^0 - \sin x_5^0 \sin x_7^0 x_8^0) - c_1(x_1 - x_1^0)}{M + m} \\ x_4 = \frac{-ml(\sin x_5 \sin x_7)'_t + (M + m)x_4^0 + ml(\cos x_5^0 \sin x_7^0 x_6^0 + \sin x_5^0 \cos x_7^0 x_8^0) - c_2(x_3 - x_3^0)}{M + m} \\ x_6' = \frac{((-x_6^2 + Mx_8^2/m) \cos x_5 + g(M + m)/ml) \sin x_5 + \cos x_5 (c_1 x_2 \cos x_7 + c_2 x_4 \sin x_7)/ml}{M/m + \sin^2 x_5} \\ x_8 = \frac{1}{\sin^2 x_5} \left( \frac{1}{Ml} \int_0^t \sin x_5 (-c_1 x_2 \sin x_7 + c_2 x_4 \cos x_7) d\tau + x_8^0 \sin^2 x_5^0 \right) \end{cases} \quad (4)$$

Естественно ожидать, что платформа должна будет со временем останавливаться, а колебания маятника – затухать. Выберем случайным образом начальные данные и параметры (5, -2, -10, 4, 3, -5, 1, 4),  $c_1 = 3, c_2 = 5, t = 120$ .

Траектория движения конца маятника относительно центра масс платформы имеет следующий вид (Рис.5). Вначале маятник вращается вокруг точки подвеса, но с течением времени приближается к нижнему положению равновесия.

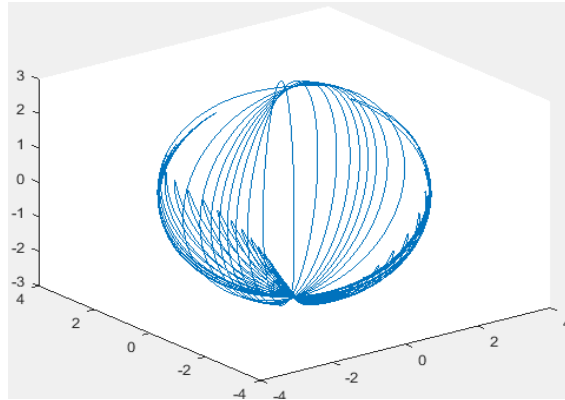


Рис.5 Движение в силовом поле. Колебания конца маятника относительно платформы.

Траектория движения тележки начинается в точке  $(5, -10)$  плоскости и с течением времени движение стабилизируется в окрестности точки  $(-3.6, 15)$  (Рис.6).

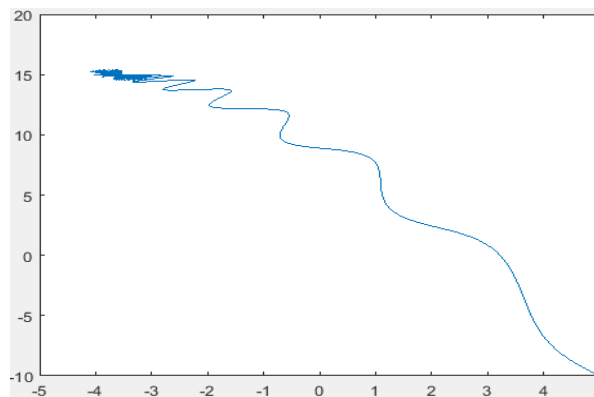


Рис.6 Движение в силовом поле. Траектория движения тележки.

Траектория движения конца маятника относительно неподвижной системы координат имеет такой вид (Рис.7). Она начинается в точке  $(5, -10, \approx -3)$  и с течением времени он стабилизируются в точке  $(-3.6, 15, -3)$ .

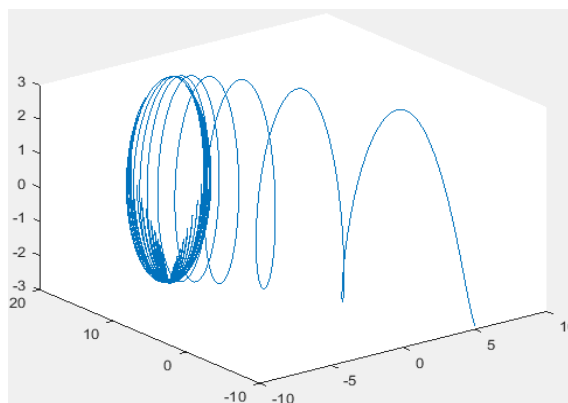


Рис.7 Движение в силовом поле. Траектория движения конца маятника относительно начала координат.

### 3 Проектирование синергетического регулятора

Пусть платформа находится в плоском силовом поле, но есть возможность управлять угловым ускорением  $x'_8$  вращения маятника относительно вертикальной оси:



$$x_8' = -2 \frac{\cos x_5}{\sin x_5} x_6 x_8 + \frac{1}{Ml} \frac{\sin x_7}{\sin x_5} f_1 - \frac{1}{Ml} \frac{\cos x_7}{\sin x_5} f_2 + u.$$

Воспользуемся методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) А. А. Колесникова [6], и выберем агрегированную переменную  $\Psi := x_8 \sin^2 x_5$ . На траекториях регулятора она должна удовлетворять дифференциальному уравнению  $\Psi' = -\frac{1}{T} \Psi$ . Так как

$$x_8(t) \sin^2 x_5(t) \equiv x_8^0 \sin^2 x_5^0 \exp\left(\frac{-1}{T} t\right),$$

то такой выбор обеспечивает притяжение траекторий регулятора к состоянию  $x_5 = \pi k$ , либо уменьшение скорости вращения маятника  $x_8(t)$ .

Поскольку приведенное выше уравнение преобразуется к виду

$$(x_8 \sin^2 x_5)' = \frac{1}{Ml} \sin x_5 (\sin x_7 f_1 - \cos x_7 f_2) + u \sin^2 x_7,$$

то искомое управление  $u$  находится из уравнения

$$\frac{1}{Ml} \sin x_5 (\sin x_7 f_1 - \cos x_7 f_2) + u \sin^2 x_7 = -\frac{1}{T} x_8 \sin^2 x_5,$$

и равно  $u = -\frac{1}{T} x_8 - \frac{1}{Ml \sin x_5} (\sin x_7 f_1 - \cos x_7 f_2)$ .

В случае  $F = \{-c_1 x_2, -c_2 x_4, 0\}$ ,  $c_1, c_2 > 0$  уравнение синергетического регулятора принимает вид

$$\begin{cases} x_2' = \frac{-ml(\sin x_5 \cos x_7)' + (M+m)x_2^0 + ml(\cos x_5^0 \cos x_7^0 x_6^0 - \sin x_5^0 \sin x_7^0 x_8^0) - c_1(x_1 - x_1^0)}{M+m} \\ x_4' = \frac{-ml(\sin x_5 \sin x_7)' + (M+m)x_4^0 + ml(\cos x_5^0 \sin x_7^0 x_6^0 + \sin x_5^0 \cos x_7^0 x_8^0) - c_2(x_3 - x_3^0)}{M+m} \\ x_6' = \frac{((-x_6^2 + Mx_8^2/m) \cos x_5 + g(M+m)/ml) \sin x_5 + \cos x_5 (c_1 x_2 \cos x_7 + c_2 x_4 \sin x_7)}{M/m + \sin^2 x_5} \\ x_8 = \frac{x_8^0 \sin^2 x_5^0}{\sin^2 x_5} \exp\left(\frac{-1}{T} t\right) \end{cases}.$$

Спроектируем его S-модель и проведем численный эксперимент с теми же начальными данными и параметрами  $(5, -2, -10, 4, 3, -5, 1, 4)$ ,  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 5$ ,  $t = 120$ .

Траектория движения конца маятника относительно центра масс платформы имеет следующий вид (Рис.8). В отличие от предыдущего случая колебания маятника относительно тележки почти сразу стабилизируются вблизи вертикально плоскости  $\varphi = 38.8$  рад.

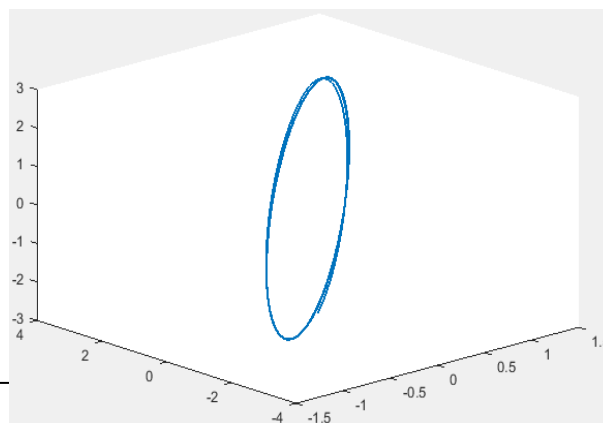


Рис.8 Синергетический регулятор. Колебания конца маятника относительно платформы.

Траектория движения тележки начинается в точке  $(5, -10)$  плоскости и с течением времени оно стабилизируется в окрестности точки  $(-3.6, 15)$  (Рис.9).

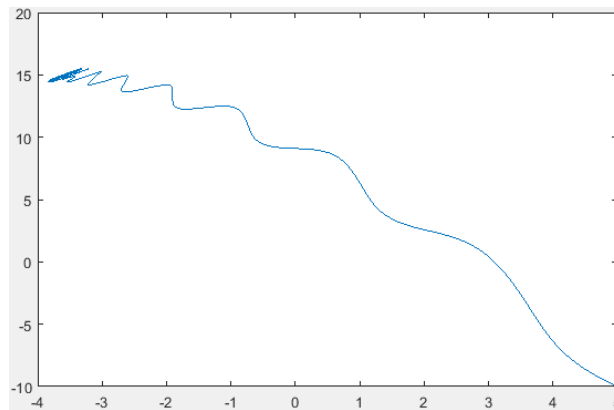


Рис.9 Синергетический регулятор. Траектория движения тележки.

Траектория движения конца маятника относительно неподвижной системы координат имеет такой вид (Рис.10). Она начинается в точке  $(5, -10, \approx -3)$  и с течением времени конец стабилизируется в точке  $(-3.6, 15, -3)$ .

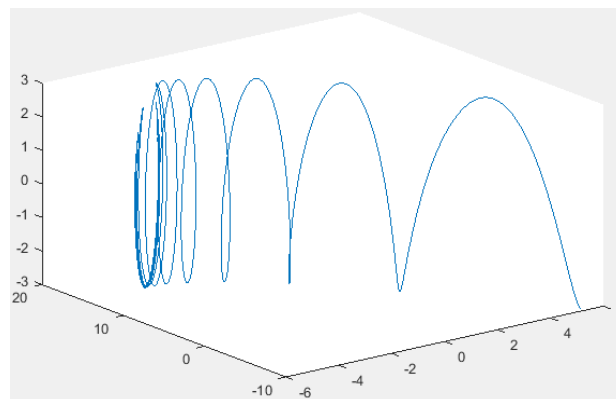


Рис.10 Синергетический регулятор. Траектория движения конца маятника относительно начала координат.

#### Заключение. Результаты численных экспериментов.

Для свободных колебаний системы.

- 1) С ростом массы тележки растет время затухания колебаний системы.

- 2) С увеличением длины маятника растет время затухания колебаний системы.  
Для колебаний маятника в плоском силовом поле  $F = \{-c_1x_2, -c_2x_4, 0\}$ ,  $c_1, c_2 > 0$ .
- 1) С уменьшением “коэффициентов сопротивления”  $c_1, c_2$  растет время затухания колебаний системы.
- 2) Численные эксперименты на S-модели показывают, что при любом начальном состоянии системы, не являющемся физическим положением равновесия  $(x_1^0, 0, x_2^0, 0, \pi k, 0, x_7^0, 0)$ ,  $k \in Z$ , колебания маятника со временем затухают, а платформа останавливается. При этом скорость вращения маятника вокруг вертикальной оси возрастает, когда он приближается к вертикальному положению.
- 3) S-модель системы уравнений (4) не работает при начальном условии, совпадающем с физическим положением равновесия, из-за знаменателя в четвертом уравнении.
- 4) Если добавляется синергетическое управление по переменной  $x_8$ , то время затухания остальных скоростей  $x_2, x_4, x_6$  уменьшается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов, В.В. Математическое описание движения груза на внешней подвеске вертолета (науч. статья). // *Научный вестник МГТУ ГА. Серия Аэромеханика и прочность*. № 111, 2007, 121- 128.
2. Ефимов, В.В. Исследование колебаний физического маятника с подвижной точкой подвеса как упрощенной модели груза на внешней подвеске вертолета (науч. статья). // *Научный вестник МГТУ ГА. Серия Аэромеханика и прочность*. № 138, 2009, 126-133.
3. Бутенин, Н.В., Фуфаев, Н.А. *Введение в аналитическую механику*. М.: Наука, 1991. - 256 с.
4. Дэбни, Дж., Харман Т. *Simulink 4. Секреты мастерства*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. - 403 с.
5. Братищев, А.В. Факторизация характеристического многочлена состояния равновесия автономной системы с инвариантным множеством (науч. статья). // *Дифференциальные уравнения и процессы управления* [Электронный ресурс]: электрон. журн. / СПбГУ. - 2019. - № 3. – С.1-17. - Режим доступа: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>
6. Колесников, А.А. *Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного анализа*. М.: КомКнига, 2006. - 240 с.

## **Control of fluctuations of pendulum on the mobile platform**

Batishchev Alexander V.

Don State Technical University

avbratishchev@spark-mail.ru

**Abstract.** In this article, we derive the equation of motion for a system of two stationary connected material points, one of which can move in a horizontal plane. It follows from the normal form of the corresponding autonomous system of equations that it is impossible to find its equilibrium states analytically. The resulting system is partially integrated. We consider a force field that allows us to dampen system vibrations at any initial state. The method of analytical design of aggregated regulators (ACAR) is used to control the speed of rotation of the pendulum around the vertical axis, which stabilizes its oscillations in the vertical plane. An executable S-model of free and managed systems in the Simulink package is designed. The conclusions based on the results of analysis of the equation and numerical experiments are made about the behavior of the system when changing its parameters and field parameters.

**Keywords:** platform, pendulum, Lagrange equation, force field, synergetic control.