

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2025

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

### Управление в нелинейных системах

## Скрытые колебания в задаче управления интегратором 3-го порядка при использовании непрерывного управления и разрывного

Морозов Ю.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

[tot1983@ipu.ru](mailto:tot1983@ipu.ru)

**Аннотация.** В данной работе рассматривается задача управления интегратором третьего порядка с помощью непрерывного и разрывного ограниченного управления. Исследуются механизмы потери глобальной устойчивости замкнутой системы и ставится задача определения коэффициентов обратной связи, обеспечивающих наибольшую скорость сходимости вблизи равновесия при сохранении глобальной асимптотической устойчивости системы. В работе доказано, что потеря глобальной устойчивости для предложенных законов управления происходит в результате возникновения скрытого аттрактора, который рождается, когда скорость сходимости достигает критического значения. Проведено исследование глобальных бифуркаций в 2-х замкнутых системах и показано, что в обоих случаях есть интервал значений бифуркационного параметра (скорости сходимости) при котором, возникают как устойчивые так и неустойчивые скрытые колебания, причем анализ на устойчивость/не устойчивость проведен, используя аналитико-численные методы. В случае разрывной правой части в замкнутой системе, параметры обоих циклов получены аналитически. В случае непрерывной обратной связи, разработан специальный алгоритм построения скрытых аттракторов. Приведены численные примеры, иллюстрирующие эффективность данного алгоритма.

**Ключевые слова:** цепочка интеграторов, вложенные функции насыщения, скрытые колебания, скрытые аттракторы, глобальная устойчивость.

# 1 Введение

Проблема стабилизации цепочек интеграторов широко обсуждалась в литературе в течение последних десятилетий (см., например, [2, 3, 5, 6, 7] и ссылки в ней). Интерес к проблеме обусловлен тем, что схема управления для цепочки интеграторов может быть легко расширена на более общие классы систем. Более того, во многих приложениях номинальные модели имеют вид цепочки интеграторов, например, механические системы с исполняемым устройством [18]. В англоязычной литературе такие системы называются *jerk-system* [1].

Эта статья опирается на исследования, начатые в [2] и продолженные в [3], [4]. В этих 3-х работах исследовалась проблема стабилизации интегратора третьего порядка с помощью управления в виде вложенных сатураторов. В [2] был предложен неограниченный закон управления, содержащий два вложенных сатуратора и доказано, что замкнутая этой обратной связью система глобально асимптотически устойчива при любых положительных коэффициентах обратной связи, т.е. в этом случае потери глобальной устойчивости не происходило. В [3] обсуждалась более сложная задача стабилизации системы ограниченным управлением и была предложена обратная связь в виде трех вложенных сатураторов. Именно в этой работе, было установлено, что потеря глобальной устойчивости при увеличении желаемой скорости экспоненциальной сходимости является следствием возникновения так называемых *скрытых колебаний* [10, 9, 8], которые проявляются при превышении скоростью сходимости бифуркационного значения. Таким образом, в отличие от случая неограниченного управления, положительность коэффициентов для ограниченной обратной связи гарантирует лишь локальную асимптотическую устойчивость для некоторого набора коэффициентов обратной связи. В [4] было доказано, что использование обратной связи в виде 2-х вложенных сатураторов (более простая форма чем в [3]) приводит к тому, что бифуркационное значение увеличивается, позволяя гарантировать глобальную устойчивость в большем диапазоне.

В данной работе предлагается более совершенный, *разрывный* закон управления, обеспечивающий выполнение *ограничения по фазе* на вторую производную отклонения. Как и в [4], ищем область параметров, обеспечивающую глобальную устойчивость замкнутой системы, и ставим

*задачу определения коэффициентов, обеспечивающих наибольшую скорость сходимости при сохранении свойства глобальной асимптотической устойчивости.*

Кроме того, исследуется глобальная бифуркация в замкнутой системе и ее схожесть и различие с глобальной бифуркацией в замкнутой системе из [4].

Как известно [11, 12, 13], численный поиск и исследование скрытых колебаний или аттракторов является сложной задачей даже для систем, приводимых к типу Лурье. Если же система не может быть приведена к данному типу, то из общих методов исследование остается только гармонический баланс [22]. Однако его применение к разрывным системам приводит к очень консервативным оценкам критических значений бифуркационного параметра [21]. В данной статье, исследуется разрывная система, для которой будет применен метод построения скрытого колебания, предложенный в [3] и позволяющий аналитически исследовать все глобальные бифуркации в разрывной системе. Кроме того с его помощью, но уже численно, будут исследованы бифуркации в системе из [4]. Таким образом, цель данного исследования выявить особенности структуры и параметров регуляторов, приводящие к возникновению скрытых колебаний или аттракторов в замкнутых системах, а также исследовать их эволюцию при изменении параметра, определяющего желаемую скорость сходимости.

## 2 Непрерывный закон управления

Рассматривается задача стабилизации цепочки из трех интеграторов,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = U(x), \quad (1)$$

где  $x \equiv [x_1, x_2, x_3]^T$ , для которой будем использовать непрерывное управление  $U(x)$  из [4] в виде

$$U(x) = -k_6 \text{sat} (k_5(x_3 + \text{sat}(k_3(x_2 + k_1 x_1)))) , \quad (2)$$

где  $\text{sat}(\cdot) \equiv \text{sat}_1(\cdot)$  и  $k_1, k_3, k_5$  и  $k_6$  — безразмерные коэффициенты (подробнее см. в [3]). Параметр  $k_6$  будем считать равным 1, т.к. он может быть исключен, используя нормировку времени и переменных следующего вида [4]:

$$t := k_6 t, \quad x_1(\cdot) := k_6^2 x_1(\cdot), \quad x_2(\cdot) := k_6 x_2(\cdot), \quad x_3(\cdot) := x_3(\cdot). \quad (3)$$

В работе [4] нормировка (3) применялась только при построении цикла, в данной работе это сделано на этапе формирования замкнутой системы. Рассматриваемый закон управления обладает свойствами:

1. ограничен, т.е.  $|U(x)| \leq U_{max} = 1$ ;
2. гарантирует выполнение фазовых ограничений, т.е.  $|x_3(t)| \leq x_{3max} = 1$ , если  $|x_3(0)| \leq x_{3max} = 1$ ;
3. гарантирует устойчивость замкнутой системы (1)-(2), если коэффициенты обратной связи положительны и выполняется условие  $k_5 > k_1$  [4].

Будем рассматривать только параметры  $k_1$ ,  $k_3$  и  $k_5$  из однопараметрического семейства, параметризованного экспоненциальной скоростью убывания отклонения  $\lambda$ . Это можно сделать, если взять коэффициенты обратной связи в виде

$$k_1 = \lambda/3, \quad k_3 = \lambda, \quad k_5 = 3\lambda. \quad (4)$$

Действительно, система (1), (2), (4) в линейной области принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -3\lambda x_3 - 3\lambda^2 x_2 - \lambda^3 x_1. \quad (5)$$

При таком выборе коэффициентов характеристическое уравнение системы (5) имеет один корень  $-\lambda$  кратности 3, а отклонение  $x_1$  убывает экспоненциально со скоростью  $\lambda$ .

Таким образом, исходная задача нахождения трех расчетных коэффициентов обратной связи, стабилизирующих систему, свелась к задаче определения одного параметра  $\lambda$  обратной связи для стабилизации системы. В этой работе будем рассматривать параметр  $\lambda$  как бифуркационный параметр замкнутой системы.

Численные эксперименты для полученной замкнутой системы показывают, что с ростом скорости сходимости область притяжения нуля уменьшается, а вот что происходит с циклом на всем интервале изменения параметра  $\lambda$  остается непонятным, т.к. предположения, сделанные в работе [4], перестают выполняться для  $\lambda > \lambda_2$ . Поэтому в данном разделе будет исследована глобальная бифуркация нормированной системы (1)-(4) для всех значений  $\lambda$ .

## 2.1 Исследование глобальной устойчивости

В [4] показано, что потеря глобальной устойчивости при увеличении  $\lambda$  в системе (1)-(4) является следствием возникновения периодических движений, названных Г.А. Леоновым *скрытыми колебаниями* или *скрытыми аттракторами* [9]. Аттрактор называется скрытым, если его область притяжения не пересекается со сколь угодно малыми окрестностями неустойчивых состояний

равновесия [10, 11], т.е. скрытые аттракторы не связаны с неустойчивыми состояниями и их бассейны притяжения «спрятаны» в фазовом пространстве системы [11].

Траектории периодических движений, если они существуют, далее для краткости будем называть *циклами*, а цикл, соответствующий наименьшему бифуркационному значению, — *минимальным циклом*.

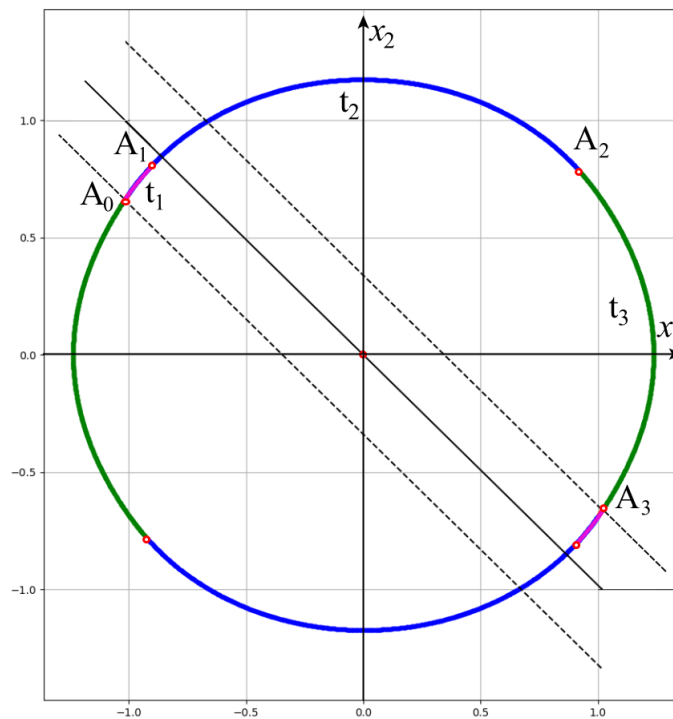


Рис. 1: Структура цикла в системе (1)-(4) и его проекция на плоскость  $(x_1, x_2)$ .

Обозначим через  $D_1$  множество точек на плоскости  $(x_1, x_2)$ , где внутренний сатуратор не насыщен:

$$D_1 = \{(x_1, x_1) : |\lambda(x_2 + \lambda x_1/3)| \leq 1\}, \quad (6)$$

а через  $A_0$  — точку цикла, где его проекция на плоскость  $(x_1, x_2)$  пересекает нижнюю границу множества  $D_1$  (пунктирная линия на рис. 1).

Будем полагать, что

- (i) проекция цикла на плоскость  $(x_1, x_2)$  представляет собой замкнутую, гладкую, симметричную относительно начала координат кривую без самопересечений.

Исходя из этого предположения можно выделить 3 возможных типа структурно различающихся циклов:

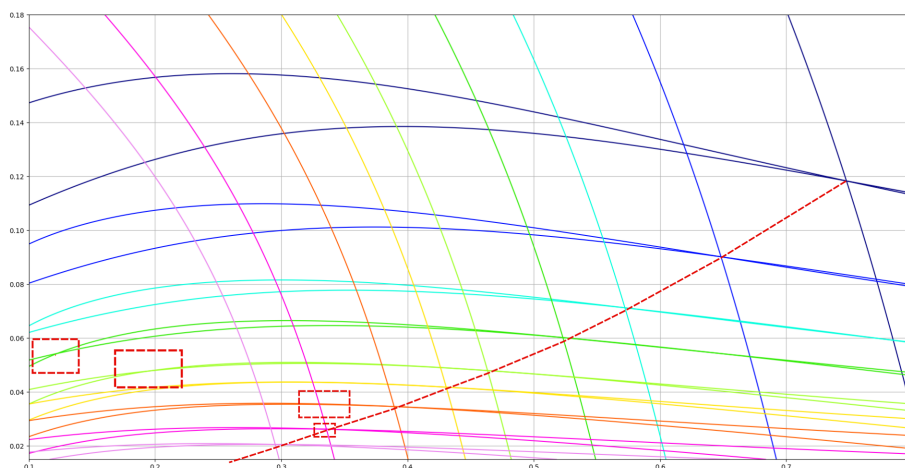


Рис. 2: Графики функции  $f_1^3(t_1; \lambda)$  и  $f_2^3(t_1; \lambda)$  для различных значений параметра  $\lambda$ .

- Случай 1. Траектория полуцикла (от  $A_0$  до  $A_3$ ) состоит из трех сегментов. На первом сегменте оба сатуратора не насыщены; на втором сегменте управление равно максимальному значению ( $U(x) = 1$ ); и, наконец, на третьем сегменте внешний сатуратор не насыщен, тогда как внутренний — насыщен. При такой структуре цикла удовлетворяются следующие предположения:
  - (ii) в точке  $A_0$  внешняя функция насыщения не насыщается;
  - (iii) внешний сатуратор достигает насыщения в точке  $A_1$ , проекция которой на плоскость  $(x_1, x_2)$  лежит во множестве  $D_1$ ;
  - (iv) переключение с насыщенного на ненасыщенное управление происходит в точке  $A_2$  вне  $D_1$ .
- Случай 2. Траектория полуцикла (от  $A_0$  до  $A_3$ ) состоит как, и в Случае 1. из трех участков. На первом сегменте  $U(x) = 1$  (внешний сатуратор насыщен); на втором сегменте оба сатуратора не насыщены; и, наконец, на третьем сегменте  $U(x) = -1$  (внешний сатуратор насыщен, но значение не совпадает со значением на первом сегменте). При такой структуре цикла удовлетворяются следующие предположения (см. рис. 1):
  - (v) в точке  $A_0$  внешняя функция насыщена;
  - (vi) внешняя и внутренняя функция не насыщены в точке  $A_1$ , проекция которой на плоскость  $(x_1, x_2)$  лежит во множестве  $D_1$ ;
  - (vii) переключение с ненасыщенного на насыщенное управление происходит в точке  $A_2$  вне  $D_1$ .

- Случай 3. Цикл состоит только из двух сегментов (переключения в точке  $A_1$  нет): на первом сегменте оба регулятора не насыщаются; на втором сегменте насыщается внутренний сатуратор. Т.е. нигде на цикле внешний сатуратор не насыщен, значит выполняются следующие предположения:
  - (viii) внешняя и внутренняя функции не насыщены в точке  $A_0$ ;
  - (ix) переключение с ненасыщенного на насыщенный внутренний сатуратор происходит в точке  $A_2$  вне  $D_1$ .

Эти предположения, с одной стороны кажутся вполне естественными и могут быть обоснованы (здесь опущены для экономии места); с другой стороны, они подкреплены результатами численных экспериментов.

Исходя из вышеизложенного, цель работы состоит в том, чтобы доказать, что система (1)-(4) допускает периодические решения и определить диапазон  $\lambda$ , для которого такие решения существуют. Минимальное значение этого диапазона является верхней границей диапазона  $\lambda$ , обеспечивающего глобальную асимптотическую устойчивость. Существование периодических движений будет доказано прямым построением циклов, соответствующих таким значениям параметра  $\lambda$ .

Предположим, что при заданном  $\lambda$  существует цикл. Рассмотрим его проекцию на плоскость  $(x_1, x_2)$  рис. 1. Из уравнений (1)-(4) видно, что направление движения по циклу — по часовой стрелке. Зададим начальное время ( $t = 0$ ) в момент, когда система находится в точке  $A_0$ . Через  $A_3$  обозначим точку пересечения проекции цикла с верхней границей  $D_1$ . Другая часть цикла (от  $A_3$  до  $A_0$ ) по предположению (i) симметрична относительно начала координат.

Рассмотрим сначала полуциклы, состоящие из 3-х сегментов. Точки переключения обозначены на рис. 1 как  $A_1$  и  $A_2$ . Времена, которые система тратит на каждый участок, обозначены как  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  соответственно, так что длительность полуцикла равна  $T = t_1 + t_2 + t_3$ .

Из предположения (i) о симметрии цикла следует, что

$$x_i(T) = -x_i(0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Рассмотрим следующую задачу: при заданном параметре  $\lambda$  выяснить, существуют ли циклы в замкнутой системе. Другими словами, существуют ли начальные условия  $x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и времена  $t_1, t_2, t_3$ , такие, что решение системы (1)-(4) удовлетворяет условиям (7).

## 2.2 Исследование первого случая

Выпишем сначала систему уравнений для Случая 1. По предположению (ii), на интервале  $[0, t_1]$  система (1)-(4) имеет вид (линейная система)

$$\dot{x}_1 = x_2(t), \dot{x}_2 = x_3(t), \dot{x}_3 = -x_1(t)\lambda^3 - 3x_2(t)\lambda^2 - 3x_3(t)\lambda. \quad (8)$$

Интегрируя ее, получаем решение в точке  $A_1$  в виде

$$x_1(t) = (x_1^0 t^2 \lambda^2 + 2x_2^0 t^2 \lambda + 2x_1^0 t \lambda + x_3^0 t^2 + 2x_2^0 t + 2x_1^0) e^{-t\lambda}/2, \quad (9)$$

$$x_2(t) = -(x_1^0 t^2 \lambda^3 + 2x_2^0 t^2 \lambda^2 + x_3^0 t^2 \lambda - 2x_2^0 t \lambda - 2x_3^0 t - 2x_2^0) e^{-t\lambda}/2, \quad (10)$$

$$x_3(t) = (x_1^0 (t^2 \lambda^4 - 2t \lambda^3) + 2x_2^0 (t^2 \lambda^3 - 3t \lambda^2) + x_3^0 (t^2 \lambda^2 - 4t \lambda + 2)) e^{-t\lambda}/2, \quad (11)$$

где  $x_i^0 = x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . По предположению (iii), решение в точке  $A_1$  должно удовлетворять условию насыщения

$$3\lambda \left( x_3(t_1) + \lambda x_2(t_1) + \frac{\lambda^2}{3} x_1(t_1) \right) = 1. \quad (12)$$

На временном интервале  $[t_1, t_1 + t_2]$  система (1),(2),(4),(3) принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = -1. \quad (13)$$

Интегрируя ее, получаем решение в точке  $A_2$  в виде

$$x_3(t_1 + t_2) = -t_2 + x_3(t_1), \quad (14)$$

$$x_2(t_1 + t_2) = -\frac{t_2^2}{2} + x_3(t_1)t_2 + x_2(t_1), \quad (15)$$

$$x_1(t_1 + t_2) = -\frac{t_2^3}{6} + x_3(t_1)\frac{t_2^2}{2} + x_2(t_1)t_2 + x_1(t_1). \quad (16)$$

Поскольку, по предположению (iv), точка  $A_2$  лежит вне полосы  $D_1$ , где внутренний сатуратор равен единице, то условие насыщения в  $A_2$  записывается как

$$3\lambda(x_3(t_1 + t_2) + 1) = 1. \quad (17)$$

На интервале  $[t_1 + t_2, T]$  система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = y_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = -3\lambda(x_3 + 1), \quad (18)$$

и ее решение в точке  $A_3$  дается формулами

$$x_3(T) = -(1 + y_3^0)(1 - e^{-3\lambda t_3}) + y_3^0, \quad (19)$$

$$x_2(T) = \frac{1 + y_3^0}{3\lambda} (1 - e^{-3\lambda t_3}) - t_3 + y_2^0, \quad (20)$$

$$x_1(T) = -\frac{1 + y_3^0}{9\lambda^2} (1 - e^{-3\lambda t_3}) - \frac{t_3^2}{2} + \left( y_2^0 + \frac{1 + y_3^0}{3\lambda} \right) t_3 + y_1^0, \quad (21)$$



где, для сокращения записи,  $y_i^0$ ,  $i = 1, 2, 3$  обозначают значения компонентов решения при  $t = t_1 + t_2$ :  $y_i^0 \equiv x_i(t_1 + t_2)$ .

С учетом условия насыщения (17) последние три уравнения можно переписать как

$$x_3(T) = -\frac{1}{3\lambda}(1 - e^{-3\lambda t_3}) + y_3^0, \quad (22)$$

$$x_2(T) = \frac{1}{9\lambda^2}(1 - e^{-3\lambda t_3}) - t_3 + y_2^0, \quad (23)$$

$$x_1(T) = -\frac{1}{27\lambda^3}(1 - e^{-3\lambda t_3}) - \frac{t_3^2}{2} + \left(y_2^0 + \frac{1}{9\lambda^2}\right)t_3 + y_1^0. \quad (24)$$

Условия (7) в конце полупериода  $A_3$  дают следующие три уравнения:

$$x_3^0 = \frac{1}{3\lambda}(1 - e^{-3\lambda t_3}) - x_3(t_1 + t_2), \quad (25)$$

$$x_2^0 = -\frac{1}{9\lambda^2}(1 - e^{-3\lambda t_3}) + t_3 - x_2(t_1 + t_2), \quad (26)$$

$$x_1^0 = \frac{1}{27\lambda^3}(1 - e^{-3\lambda t_3}) + \frac{t_3^2}{2} - \left(x_2(t_1 + t_2) + \frac{1}{9\lambda^2}\right)t_3 - x_1(t_1 + t_2). \quad (27)$$

Так как точка  $A_0$  лежит на границе множества  $D_1$ , то координаты  $x_1^0$  и  $x_2^0$  не являются независимыми и связаны граничным уравнением

$$x_2^0 = -\frac{\lambda}{3}x_1^0 - \frac{1}{\lambda}. \quad (28)$$

Условия насыщения (12) и (17), условия симметрии (25)–(27) и граничное уравнение (28) составляют искомую систему из шести алгебраических и трансцендентных уравнений для определения цикла относительно шести неизвестных:  $x_1^0$ ,  $x_2^0$ ,  $x_3^0$  — координаты начальной точки;  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  — моменты времени.

## 2.3 Исследование Случая 2.

По предположению (v), на интервале  $[0, t_1]$  система (1)–(4) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = 1. \quad (29)$$

Интегрируя ее, получаем решение в точке  $A_1$  в виде

$$x_3(t_1) = t_1 + x_3^0, \quad (30)$$

$$x_2(t_1) = \frac{t_1^2}{2} + x_3^0 t_1 + x_2^0, \quad (31)$$

$$x_1(t_1) = \frac{t_1^3}{6} + x_3^0 \frac{t_1^2}{2} + x_2^0 t_1 + x_1^0, \quad (32)$$

где  $x_i^0 = x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Условие насыщения в  $A_1$  записывается в виде

$$3\lambda(x_3(t_1) + \lambda x_2(t_1) + \frac{\lambda^2}{3} x_1(t_1)) = -1. \quad (33)$$

По предположению (vi) на интервале времени  $[t_1, t_1 + t_2]$  система (1)-(4) принимает вид (8) и ее решения задается формулами

$$\begin{aligned} x_1(t_1 + t_2) = & (x_1(t_1)t_2^2\lambda^2 + 2x_1(t_1)t_2\lambda + 2x_1(t_1))e^{-\lambda t_2}/2 + \\ & + (2x_2(t_1)t_2^2\lambda + x_3(t_1)t_2^2 + 2x_3(t_1)t_2)e^{-\lambda t_2}/2, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} x_2(t_1 + t_2) = & -x_1(t_1)t_2^2\lambda^3 e^{-\lambda t_2}/2 - \\ & - (2x_2(t_1)t_2^2\lambda^2 + x_3(t_1)t_2^2\lambda - 2x_2(t_1)t_2\lambda - 2x_3(t_1)t_2 - 2x_2(t_1))e^{-\lambda t_2}/2, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} x_3(t_1 + t_2) = & (x_1(t_1)t_2^2\lambda^4 - 2x_1(t_1)t_2\lambda^3)e^{-\lambda t_2}/2 + \\ & (2x_2(t_1)t_2^2\lambda^3 + x_3(t_1)t_2^2\lambda^2 - 6x_2(t_1)t_2\lambda^2 - 4x_3(t_1)t_2\lambda + 2x_3(t_1))e^{-\lambda t_2}/2. \end{aligned} \quad (36)$$

Согласно предположению (vii), решение в точке  $A_2$  должно удовлетворять условию насыщения

$$3\lambda(x_3(t_1 + t_2) + \lambda x_2(t_1 + t_2) + \frac{\lambda^2}{3} x_1(t_1 + t_2)) = 1. \quad (37)$$

На интервале  $[t_1 + t_2, T]$  система описывается уравнениями (13). Интегрируя их, получаем решение в точке  $A_3$  в виде

$$x_3(T) = -t_3 + x_3(t_1 + t_2), \quad (38)$$

$$x_2(T) = -\frac{t_3^2}{2} + x_3(t_1 + t_2)t_3 + x_2(t_1 + t_2), \quad (39)$$

$$x_1(T) = -\frac{t_3^3}{6} + x_3(t_1 + t_2)\frac{t_3^2}{2} + x_2(t_1 + t_2)t_3 + x_1(t_1 + t_2). \quad (40)$$

Условия (7) в конце полупериода  $A_3$  приводит к следующим трем уравнениям:

$$x_3^0 = t_3 - x_3(t_1 + t_2), \quad (41)$$

$$x_2^0 = \frac{t_3^2}{2} - x_3(t_1 + t_2)t_3 - x_2(t_1 + t_2), \quad (42)$$

$$x_1^0 = \frac{t_3^3}{6} - x_3(t_1 + t_2)\frac{t_3^2}{2} - x_2(t_1 + t_2)t_3 - x_1(t_1 + t_2). \quad (43)$$

Поскольку точка  $A_0$  лежит на границе множества  $D_1$ , координаты  $x_1^0$  и  $x_2^0$  не являются независимыми и связаны граничным уравнением (28).

Условия насыщения (33) и (37), условия симметрии (41)-(43) и граничное уравнение (28) составляют требуемую систему из шести алгебраических и трансцендентных уравнений для определения цикла относительно шести неизвестных:  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  — координаты начальной точки;  $t_1, t_2$  и  $t_3$  — моменты времени.

## 2.4 Исследования третьего случая

На первом сегменте решение  $x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)$  задается формулами (9)-(11); на втором сегменте — формулами (19)-(21). Три уравнения симметрии принимают вид

$$x_3^0 = \frac{1}{3\lambda}(1 - e^{-3\lambda t_3}) - x_3(t_1), \quad (44)$$

$$x_2^0 = -\frac{1}{9\lambda^2}(1 - e^{-3\lambda t_3}) + t_3 - x_2(t_1), \quad (45)$$

$$x_1^0 = \frac{1}{27\lambda^3}(1 - e^{-3\lambda t_3}) + \frac{t_3^2}{2} - \left(x_2(t_1) + \frac{1}{9\lambda^2}\right)t_3 - x_1(t_1). \quad (46)$$

Поскольку точка  $A_0$  лежит на границе множества  $D_1$ , координаты  $x_1^0$  и  $x_2^0$  не являются независимыми и связаны граничным уравнением (28). Более того, т.к. переключение с одного сегмента на другой происходит на верхней границе множества  $D_1$ :

$$x_2(t_1) = -\frac{\lambda}{3}x_1(t_1) + \frac{1}{\lambda}. \quad (47)$$

Условия симметрии (44)-(46), граничное уравнение (28) и условие переключения (47) составляют желаемую систему из пяти алгебраических и трансцендентных уравнений с пятью неизвестными  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, t_1$ , и  $t_3$ .

Если решение любой из трех полученных систем существует, то дифференциальная система (1)-(4) имеет периодическое решение, что, в свою очередь, означает, что нулевое решение не является глобально устойчивым. Если циклического решения не существует у всех 3-х систем для данного значения  $\lambda$ , то система (1)-(4) глобально устойчива для этого значения  $\lambda$ .

## 2.5 Численное решение нелинейных систем

Для решения всех систем использовался один и тот же алгоритм на основе двух языков программирования: *Mathima* (символьные вычисления), *Python* (численные вычисления). Автору не удалось обнаружить универсального языка программирования, позволяющего одновременно и эффективно работать как с символьными, так и с численными данными.

Если обратиться к структуре полученных уравнений, можно всегда выделить линейные зависимости между неизвестными  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, t_2$  (если есть), а значит легко выразить аналитически переменные  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  и  $t_2$  как функции неизвестных  $t_1$  и  $t_3$  с помощью *Mathima* в символьном виде. Подставляя полученные выражения в условия симметрии, для каждого случая получаем новую систему двух сильно нелинейных уравнений, которые обозначим через

$$F_1^i(t_1^i, t_3^i; \lambda) = 0, \quad F_2^i(t_1^i, t_3^i; \lambda) = 0, \quad (48)$$

где  $i = 1, 2, 3$  обозначает соответствующий случай.

Выражения для функций  $F_1^i$  и  $F_2^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  слишком громоздки (например, длина выражения для функции  $F_1^1(t_1^1, t_3^1; \lambda)$  превышает 4 тысяч символов) и поэтому не могут быть приведены в статье, даже в приложении.

Более того, попытки решить систему (48), используя стандартные численные методы решения нелинейных систем не увенчались успехом, т.к. в силу наличия экспоненциальных и полиномиальных функций разных степеней необходимо достаточно точно указать начальные условия, гарантирующие сходимость, что проблематично сделать из-за узкой области определения одной из функций. Поэтому решение систем происходило в два этапа. Для краткости в приведенном алгоритме индекс  $i$  опущен.

1. Поиск начального приближения. Из первого уравнения неизвестное  $t_3$  находится численно как функция  $t_1$  и параметра  $\lambda$  (сетка по  $t_1, \lambda$  с шагом 0.01):  $t_3 = f_1(t_1; \lambda)$ . Область определения  $D(f_1) = (t_1^l(\lambda), t_1^r(\lambda))$  этой функции зависит от  $\lambda$  и является достаточно узкой: для любого  $\lambda$ ,

$(t_1^l(\lambda), t_1^r(\lambda)) \subset (0, 0.5)$ . Аналогично поступаем с функцией  $F_2$ , получая  $t_3 = f_2(t_1; \lambda)$ . Среди полученного набора точек ищем наиболее близкие, именно они будут потенциальными точками пересечения. Если минимальное расстояние больше размера шага сетки (в наше случае 0.01), считаем что кривые не пересекаются. На рис. 2 для Случая 3 указаны кривые (решения системы (48), цвет соответствует конкретному значению  $\lambda$ ), прямоугольные области (пунктир), содержащие ложные положения равновесия и пунктирная кривая, определяющая область значений  $t_1^r(\lambda)$ . Дело в том, что найденные значение времени  $\hat{t}_1$ , при которых есть решения, превышает время, необходимое для преодоления полосы  $D_1$ , т.е. нарушается условие о насыщенности, а значит приходим к Случаю 1. Таким образом, на этом этапе для Случая 3 не было найдено ни одного решения. Последнее означает, что цикла, в котором происходит только два переключения и при этом управление не насыщается, для данной системы не существует.

2. На втором этапе выделяется интервал значений  $\lambda$  и  $t_3$ , на котором может быть решение (функции  $f_1$  и  $f_2$  на этом интервале имеют разные знаки). Далее функцию  $f_1(t_1; \lambda)$  подставляем вместо  $t_3$  в выражение, определяющее функцию  $F_2$ , чтобы получить функцию одной переменной  $g_2(t_1; \lambda) = F_2(t_1, t_3(t_1; \lambda); \lambda)$ , для которой методом деления отрезка пополам находим искомые точки пересечения с осью абсцисс.

Рассмотрим, Случай 1 и Случай 2 более подробно, т.к. функции  $g_2^1(t_1; \lambda)$  и  $g_2^2(t_1; \lambda)$  имеют разную форму, а следовательно и разное количества корней. Начнем со Случая 1. Графики функции  $g_2^1(t_1; \lambda)$  для нескольких значений  $\lambda$  показаны на рис. 3. Поскольку  $g_2^1$  — выпуклые функции, уравнение может иметь одно, два или ни одного решения в зависимости от значения параметра. Более того, поскольку графики для разных значений  $\lambda$  не пересекаются и, для любого  $t_1$ ,  $g_2^1(t_1; \lambda)$  — монотонная функция  $\lambda$ , искомое минимальное значение  $\lambda_0$  параметра, при котором система имеет цикл, — это то, при котором график функции касается оси  $t_1$ . Как видно из рис. 3,  $\lambda_0 \approx 2.929$ . Именно это значение является верхней границей диапазона параметра  $\lambda$ , при котором система глобально асимптотически устойчива. На интервале  $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_1 \approx 2.974$  имеется 2 решения. При  $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2 = 3.189$  — только одно. При  $\lambda_2 < \lambda$  — предположения (ii) для Случая 1 нарушается, поэтому переходим к Случаю 2.

Для Случая 2 графики функции  $g_2^2(t_1; \lambda)$  для нескольких значений  $\lambda$  показаны на рис. 4. В отличие от  $g_2^1(t_1; \lambda)$  функция монотонно убывает по пере-

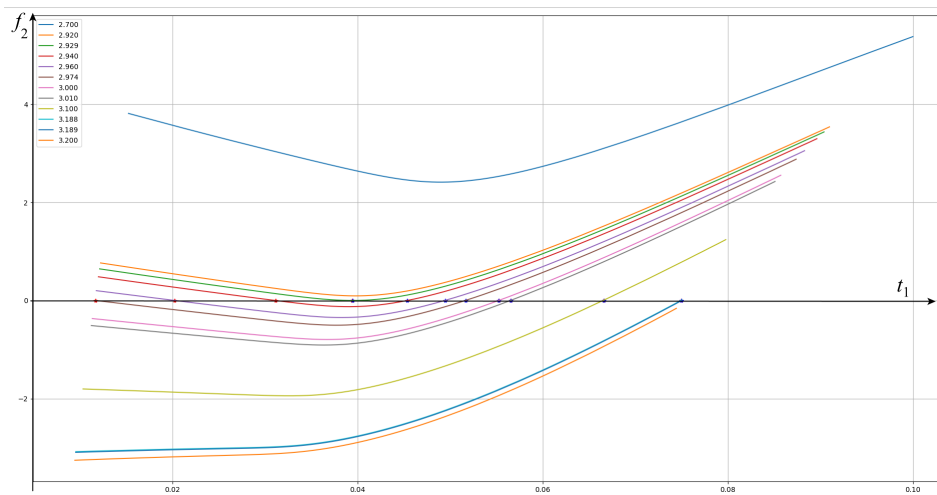


Рис. 3: Графики функции  $g_2^1(t_1; \lambda)$  для различных значений параметра  $\lambda$ .

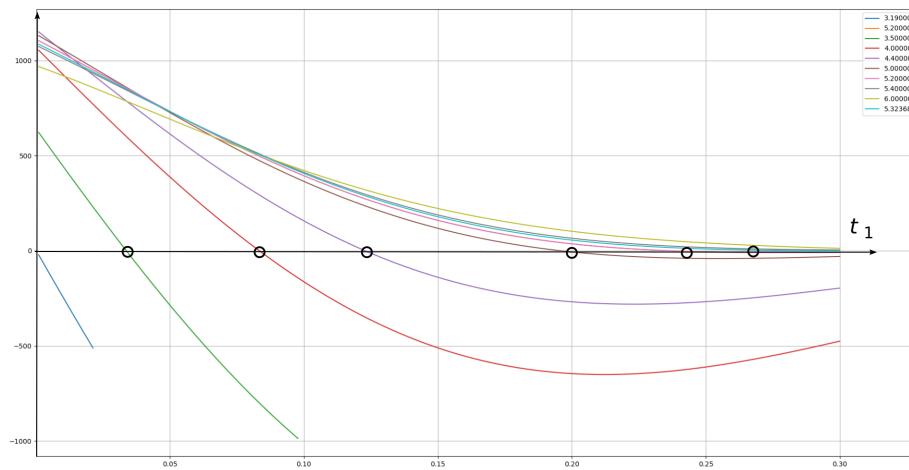


Рис. 4: Графики функции  $g_2^2(t_1; \lambda)$  для различных значений параметра  $\lambda$ .

менной  $t_1$  на интервале  $\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_3 \approx 5.19370$ , а уже для интервала  $\lambda > \lambda_3$  функция  $g_2^1(t_1; \lambda)$  неопределена, т.к. нарушается условие (v).

Теперь опишем процедуру построения и визуализации циклов. Пусть  $t_1^*$  — найденное решение уравнения  $g_2(t_1; \lambda^*) = 0$ . Значение  $t_3^*$  вычисляется как  $t_3^*(\lambda^*) = f_1(t_1^*(\lambda^*))$ . Все остальные неизвестные  $(x_1^0)^*$ ,  $(x_2^0)^*$ ,  $(x_3^0)^*$ ,  $t_2^*$  вычисляются из  $t_1^*$  и  $t_3^*$  по аналитическим формулам, выведенным ранее в Maxima. Зная решения, на каждом интервале  $t_i^*$  получаем сегменты цикла, а затем полуцикл отображаем относительно нуля, т.о. полный цикл состоит из 6 сегментов. Общий вид, циклов изображен на рис. 5.

Чтобы дать представление о размерах соответствующих циклов, введем для них норму по аналогии с эллипсоидом  $D(\lambda) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \max(x_i^0(\lambda))^2}$ . Гра-

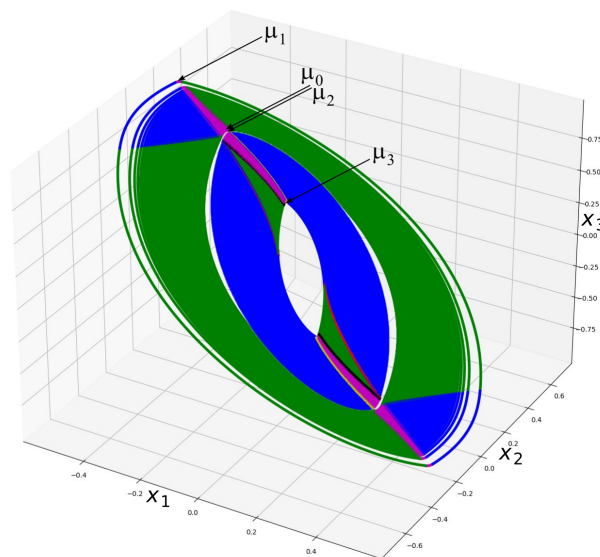


Рис. 5: Циклы для различных значений параметра  $\lambda$ .

фик зависимости размера цикла  $D(\lambda)$  от параметра  $\lambda$  изображен на рис. 6. А на рис. 7 показана зависимость начального значения координаты  $x_2^0$  для всех циклов от параметра  $\lambda$ . На рис. 6, рис. 7 кривая (1) и (2) соответствуют Случаю 1, а кривая (3) — Случаю 2. При этом для Случая 1 корни  $g_2(t_1; \lambda^*) = 0$  с меньшим значением соответствуют кривой (1), а с большим — (2).

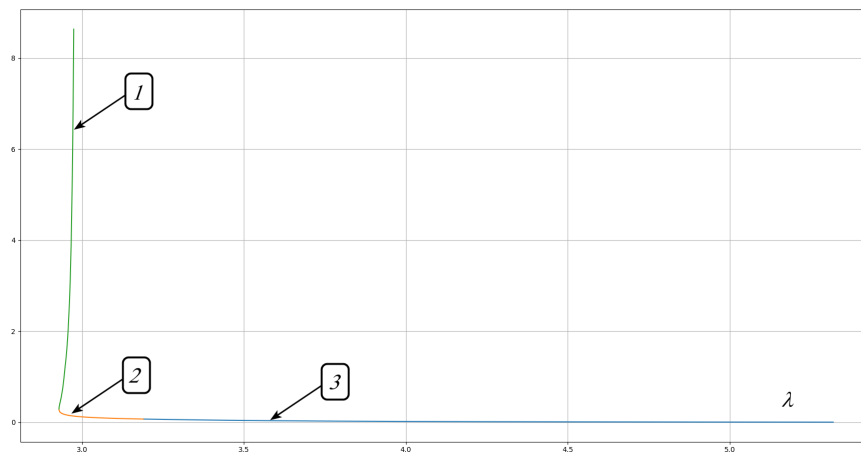


Рис. 6: Зависимость "Размера" устойчивого (1) и неустойчивого (2),(3) циклов от  $\lambda$ .

## 2.6 Исследование циклов на устойчивость

Построенный цикл можно трактовать как отображение Пуанкаре, плоскостью сечения которого выступает граница области  $D_1$ . В силу симметрично-

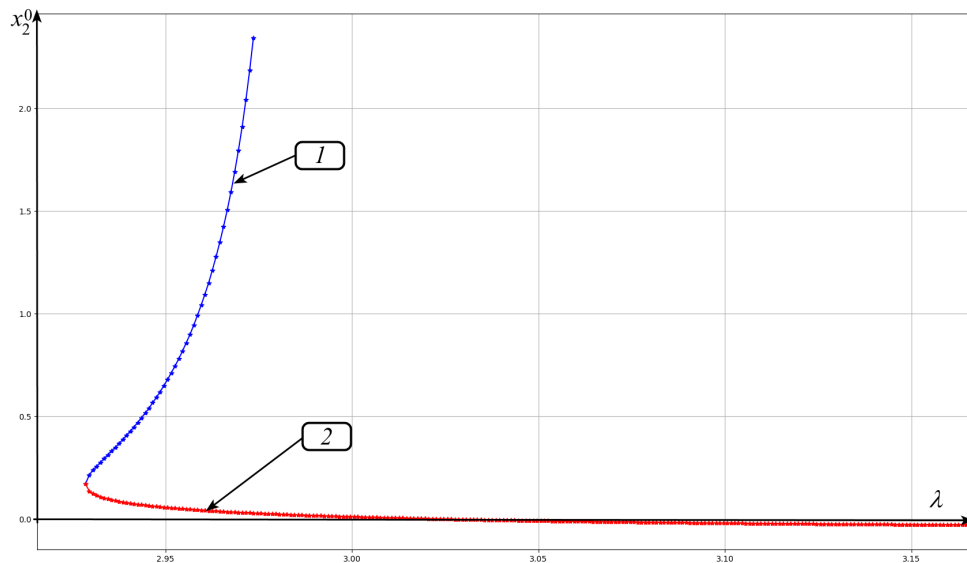


Рис. 7: Зависимость начальной координаты  $x_2^0$  устойчивого (1) и неустойчивого (2),(3) циклов от  $\lambda$ .

сти цикла, для его определения его устойчивости и неустойчивости, достаточно построить точечное отображение только для полуцикла. Если оно будет устойчивым, полное отображение на цикле будет устойчивым. Аналогично для неустойчивого.

Обычно, для многокомпонентного отображения, чтобы исследовать его на устойчивость необходимо строить Якобиан, а затем выписывать соответствующее ему характеристическое уравнение. Однако в нашем случае можно считать отображения разных координат независимыми, т.е. достаточно рассмотреть отображение  $Q_2^p(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  точки  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  в точку  $(-x_1^0, x_2(T), -x_3^0)$  и  $Q_1^p(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  точки  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  в точку  $(-x_1(T), -x_2^0, -x_3^0)$ ,  $p = 1, 2$ . Будем считать, что вариация по переменной  $x_3^0$  равна нулю, т.к. множество  $|x_3| < 1$  инвариантно для данной системы для любых  $\lambda > 0$  [4]. Потеря устойчивости происходит, когда решение начинает раскручиваться с увеличивающейся амплитудой по двум переменным  $x_1, x_2$ . Если бы отображение было сжимающим по одной из осей, то существовала бы область в фазовом пространстве ограниченная по 2-м осям, и бесконечная по первой. В нашей системе из ограниченности 2-х переменных  $(x_1^0, x_3^0)$  или  $(x_2^0, x_3^0)$  всегда следует ограниченность оставшейся переменной. Поэтому такой вариант невозможен [4].

Пусть  $Q_1^p : \{q_1^p(t_1^p, t_3^p; \lambda) = F_1^p(t_1^p, t_3^p; \lambda) + x_1^0(t_1^p, t_3^p; \lambda)\}$ , и  $Q_2^p : \{q_2^p(t_1^p, t_3^p; \lambda) = F_2^p(t_1^p, t_3^p; \lambda) + x_2^0(t_1^p, t_3^p; \lambda)\}$ ,  $p = 1, 2$ . Найдем производную по  $x_1^0$  для отображения  $Q_1^p$ . Сначала находим полную производную от функций  $q_1^1$  по  $x_1^0$ . Имеем



$$\frac{dq_1^1}{dx_1^0} = \frac{\partial q_1^1}{\partial t_1^p} \frac{\partial t_1^p}{\partial x_1^0} + \frac{\partial q_1^1}{\partial t_3^p} \frac{\partial t_3^p}{\partial x_1^0} = \frac{\partial q_1^1}{\partial t_1^p} \left( \frac{\partial x_1^0}{\partial t_1^p} \right)^{-1} + \frac{\partial q_1^1}{\partial t_3^p} \left( \frac{\partial x_1^0}{\partial t_3^p} \right)^{-1}.$$
 Теперь, найдем  $\left( \frac{\partial x_1^0}{\partial t_1^p} \right)$  и  $\left( \frac{\partial x_1^0}{\partial t_3^p} \right)$ , т.к. данная зависимость получена ранее в символьном виде. Все операции делаем символьно в пакете Maxima. Получаем в аналитическом виде производную  $\frac{\partial Q_1^p}{\partial x_1^0}$ . Аналогично поступаем при вычислении производной  $\frac{\partial Q_2^p}{\partial x_2^0}$ . Т.к. они вычислены аналитически, для каждого значения  $\lambda$  можно легко посчитать ее модуль. Для циклов, соответствующих кривым (1), оба модуля меньше 1, тогда как для кривых (2), (3) модули больше 1. Итак, имеем следующий результат.

Разобьем весь диапазон изменения параметра  $\lambda$  на 5 интервалов:  $0 < \lambda < \lambda_0$ ,  $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_1$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$ ,  $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_3$  и  $\lambda_3 < \lambda$ . На первом интервале система (12), (17), (25)–(28) не имеет решений, что означает отсутствие цикла. При  $\lambda = \lambda_0$  система (12), (17), (25)–(28) имеет только одно решение, т.е. в системе (1)–(4) зарождается цикл, что означает потерю глобальной устойчивости. При этом значении параметра система бифурцируется из системы, имеющей глобально устойчивое равновесие в начале координат, в систему с двумя равновесиями: одно из них является началом координат, а другое — скрытым периодическим аттрактором. При дальнейшем росте  $\lambda$  цикл разделяется на два. Для любого  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$  система (12), (17), (25)–(28) имеет два решения, что означает, что дифференциальная система (1)–(4) имеет два периодических решения. При  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2)$  остается только один корень у системы (12), (17), (25)–(28), а значит у (1)–(4) только неустойчивый цикл, который лежит на границе области притяжения нуля. При  $\lambda_2 \leq \lambda$  система (12), (17), (25)–(28) не имеет решения, т.к. не выполняются условия (ii)–(iv), однако выполняются условия (v)–(vii) и теперь уже система (33), (37), (41)–(43), (28) имеет одно решение при  $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_3$ , а значит у системы (1)–(4) есть только один неустойчивый цикл. Решение у системы (33), (37), (41)–(43), (28) исчезает, когда предположения (v)–(vii) становятся неверными. При  $\lambda = \lambda_3$  цикл становится настолько малым в диаметре, что касается границ области  $D_1$ . Численно удалось построить цикл, изображенный на рис. 8. При  $\lambda \in (\lambda_3, +\infty)$  циклов нет, происходит расщепление фазового пространства на устойчивое и неустойчивое. Из приведенных результатов следует, что цикл удовлетворяющий Случаю 3 и предположениям (viii)–(ix) мог, возникнуть только при  $\lambda < \lambda_0$ , а значит он должен был бы рождаться из глобальной устойчивости и не пересекаться с другими циклами. А это невозможно, т.к.

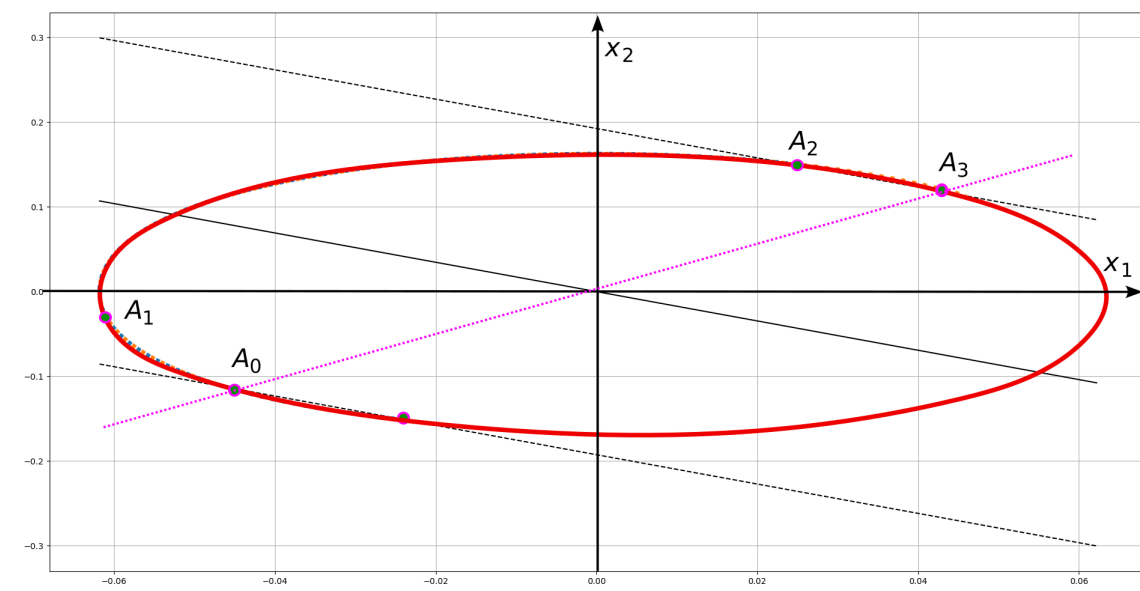


Рис. 8: "Последний" цикл.

все траектории попадают в область  $|x_3| < 1$ . Доказана следующая теорема:

**Теорема 1** Система (1)-(4) имеет скрытые колебания при следующих значениях параметра  $\lambda$ :

- При  $\lambda = \lambda_0$  рождается один цикл - скрытый аттрактор.
- При  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$  два цикла: один – скрытый аттрактор, а другой – неустойчивый цикл, лежащий на границе области притяжения нулевого решения.
- При  $\lambda \rightarrow \lambda_1$  скрытый аттрактор становится бесконечно большим. Неустойчивый цикл лежит на границе области притяжения нулевого решения.
- При  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_3]$  неустойчивый цикл, лежит на границе области притяжения нулевого решения. Скрытого аттрактора нет.
- При  $\lambda > \lambda_3$  любое решение либо стремится к нулевому положению равновесия, либо уходит в бесконечность. Неустойчивый цикл отсутствует. Скрытого аттрактора нет.

На рис. 9 показаны два цикла в системе (1)-(4) при  $\lambda = 2.96$ : большая кривая (1) — траектория скрытого аттрактора (устойчивого цикла), а кривая (2) — траектория неустойчивых колебаний. Для сравнения, кривая (3)

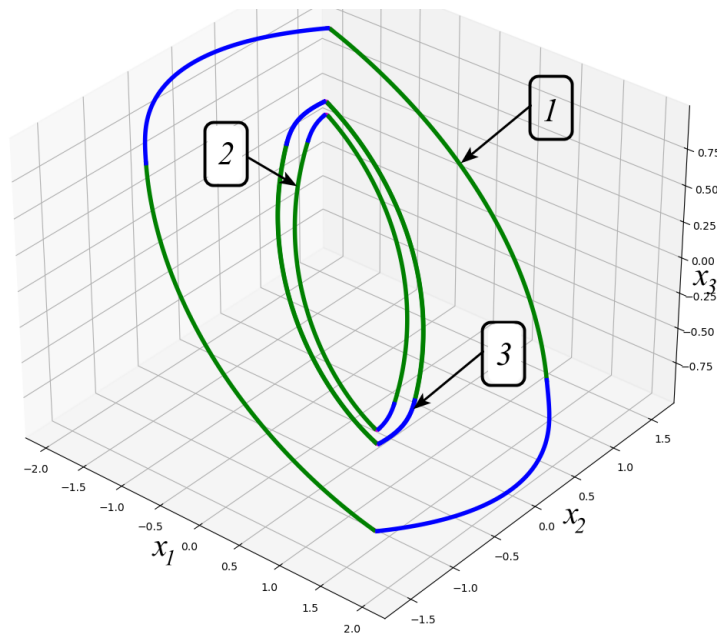


Рис. 9: Устойчивый (кривая 1) и неустойчивый (кривая 2) циклы системы (1)-(4) при  $\lambda = 2.96$ . Кривая 3 — минимальный цикл системы.

изображает минимальный цикл, возникающий в системе при  $\lambda = \lambda_0$ , из которого возникают циклы 1 и 2. Из этого рисунка видно, что циклы не являются гладкими кривыми. Это, однако, не противоречит предположению (i) в начале этого раздела. Кривые не являются гладкими относительно  $x_3$ , но проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$  гладкие.

При увеличении  $\lambda$  устойчивый цикл увеличивается в размерах, а неустойчивый уменьшается. Соответственно, область притяжения нулевого решения уменьшается, а аттрактора увеличивается. Аналогичный эффект для глобальной бифуркации был найден для плоской системы [19]. В зависимости от начальных условий система либо стабилизируется в начале координат, либо совершает периодическое движение. При  $\lambda \rightarrow \lambda_1$  размер орбиты аттрактора стремится к бесконечности, и при  $\lambda = \lambda_1$  у системы один неустойчивый цикл с одним равновесием в начале координат. Т.о. для любого  $\lambda > \lambda_1$  начало координат локально устойчиво, но ее область притяжения сокращается по мере увеличения параметра  $\lambda$ .

### 3 Случай разрывного управления

Заменяем внешний  $\text{sat}$  на функцию  $\text{sign}$  в управлении (2), тогда обратная связь примет вид

$$U(x) = -\text{sign}(x_3 + \text{sat}(k_3(x_2 + k_1 x_1))), \quad (49)$$

где функция  $\text{sign}(x)$  многозначная при  $x = 0$ , а решение системы понимается в смысле Филиппова [20]. Легко проверить, что использование данного закона управления приводит при некоторых значениях параметрах  $k_1, k_3$  к скользящему режиму по кривой  $S = x_3 + \text{sat}(k_3(x_2 + k_1 x_1)) = 0$ . В отличие от предыдущего раздела, система (1)-(49) не имеет линейного приближения в нуле, а значит дополнительные ограничения на выбор параметров  $k_1, k_3$  наложить нельзя. Однако, наряду с параметрами  $k_1$  и  $k_3$  также рассмотрим однопараметрическое семейство в виде

$$k_1 = \lambda/n, \quad k_3 = n\lambda, \quad n > 1. \quad (50)$$

Переформулируем исходную задачу для данной замкнутой системы в виде:

*найти значения параметров  $k_1$  и  $k_3$  ( $\lambda, n$ ), при которых система (1), (49) имеет скрытые колебания.*

#### 3.1 Неустойчивый Цикл

По аналогии с предыдущим разделом будем искать цикл, вводя некоторые предположения о его структуре. Т.к. в система (1), (49) не имеет линейного приближения в нуле, будем искать полуцикл, который состоит только из двух сегментов:

1.  $U(x) = 1$  на сегменте  $A_0 A_1$ ;
2.  $U(x) = -1$  на сегменте  $A_1 A_3$ .

На интервале  $[0, t_1]$  система имеет вид (29). Интегрируя ее, получаем решение в точке  $A_1$  в виде

$$x_3(t_1) = -t_1 + x_3^0, \quad (51)$$

$$x_2(t_1) = \frac{t_1^2}{2} + x_3^0 t_1 + x_2^0, \quad (52)$$

$$x_1(t_1) = \frac{t_1^3}{6} + x_3^0 \frac{t_1^2}{2} + x_2^0 t_1 + x_1^0, \quad (53)$$

где  $x_i^0 = x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

На интервале  $[t_1, t_2]$  система имеет вид (13). Интегрируя ее, получаем решение в точке  $A_3$  в виде

$$x_3(t_2) = -t_2 + x_3(t_1), \quad (54)$$

$$x_2(t_2) = -\frac{t_2^2}{2} + x_3(t_1)t_2 + x_2(t_1), \quad (55)$$

$$x_1(t_2) = -\frac{t_2^3}{6} + x_3(t_1)\frac{t_2^2}{2} + x_2(t_1)t_2 + x_1(t_1), \quad (56)$$

Условия симметрии приводят к трем уравнениям

$$x_i(t_2) = -x_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (57)$$

Четвертое и пятое уравнения представляют собой условие переключения в точке  $A_1$  и граничное условие в точке  $A_0$ :

$$g(t_1, x) := x_3(t_1) + k_3x_2(t_1) + k_3k_1x_1(t_1) = 0, \quad (58)$$

$$x_2^0 = -k_1x_1^0 - \frac{1}{k_3}. \quad (59)$$

Таким образом, имеем систему из 5 уравнений с 5 неизвестными. Однако, чтобы ее решить аналитически, необходимо переформулировать сделанные предположения.

Пусть начальная точка находится на поверхности разрыва, т.е. предполагаем, что точки  $A_0$  и  $A_1$  совпадают, тогда  $t_1 = 0$ . В этом случае полуцикл состоит только из одного сегмента с  $U = -1$ , а число уравнений и неизвестных равно четырем:  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, t_2 = T$ .

Условия симметрии (57) дают:

$$-x_3^0 = f_3(T, x^0) := -T + x_3^0, \quad (60)$$

$$-x_2^0 = f_2(T, x^0) := -\frac{T^2}{2} + x_3^0T + x_2^0, \quad (61)$$

$$-x_1^0 = f_1(T, x^0) := -\frac{T^3}{6} + x_3^0\frac{T^2}{2} + x_2^0T + x_1^0. \quad (62)$$

Из первого уравнения получаем  $T = 2x_3^0$ . Подставляя это значение во второе уравнение, имеем  $x_2^0 = 0$ . Из третьего уравнения получаем

$$-2x_1^0 = -\frac{8(x_3^0)^3}{6} + 2(x_3^0)^3,$$

$$x_1^0 = -\frac{1}{3}(x_3^0)^3.$$

Подставляя правую часть этого уравнения в (58), получим

$$x_3^0(1 - \frac{k_1 k_3}{3}(x_3^0)^2) = 0.$$

Кубическое уравнение имеет решения:  $x_3^0 = 0$ ,  $x_3^0 = \pm\sqrt{3/(k_1 k_3)}$ .  $x_3^0 = 0$  — не подходит, т.к. оно задает положение равновесия. Два других решения, определяют третью координату искомого цикла. В силу симметричности можно брать любое. Таким образом, имеем решением системы алгебраических уравнений в виде

$$x_1^0 = -\sqrt{\frac{3}{(k_1 k_3)^3}}, \quad x_2^0 = 0, \quad x_3^0 = \sqrt{\frac{3}{k_1 k_3}}; \quad T = 2x_3^0. \quad (63)$$

Т.к. цикл может лежать в области  $|x_3^0| < 1$  с учетом (63) получаем ограничения на выбор параметров  $k_1$ ,  $k_3$ , которые можно записать в виде:

$$3 < k_1 k_3 = \mu^2. \quad (64)$$

Для однопараметрического семейства условие (64) на параметры  $\lambda$ ,  $n$  принимает вид

$$\sqrt{3} < \lambda, \quad (65)$$

т. е. цикл, определяемый формулами (63) возникает при любом  $n > 0$ . Из моделирования следует, что данный цикл неустойчивый. Чтобы это доказать, не нужно строить все отображение трехмерной точки в себя, а достаточно указать только одно направление, в котором происходит растяжение пространства. Пусть соотношения (60) и (61) выполнены. Введем обозначение  $F(T, x_1^0) = f_2(T, x_1^0)$ , тогда справедливы соотношения

$$F(x_1^0) = -\frac{T(x_1^0)^3}{6} + x_3^0(x_1^0)\frac{T(x_1^0)^2}{2} + x_2^0(x_1^0)T(x_1^0) + x_1^0 = \frac{2(x_3^0(x_1^0))^3}{3} + x_1^0, \quad (66)$$

где учтено, что  $x_2^0 = 0$ . Из уравнения (58), получим  $x_1^0 = -\frac{x_3^0}{\mu^2}$ . Подставляя правую часть этого выражения в (66) имеем отображение точки  $x^0$  в точку  $(F(x_1^0), -x_2^0, -x_3^0)$  на полуцикле

$$F(x_1^0) = -\mu^6 \frac{2(x_1^0)^3}{3} + x_1^0.$$

Циклы в интервале  $\sqrt{3} < \mu < +\infty$  будут неустойчивыми, если выполняется  $\left| \frac{\partial F(x_1^0)}{\partial x_1^0} \right| > 1$ . Из (66) получаем

$$\left| \frac{\partial F(x_1^0)}{\partial x_1^0} \right| = -1 + 2(x_1^0)^2 \mu^6. \quad (67)$$

Подставляя параметры цикла из (63) в (67) окончательно имеем  $\left| \frac{\partial F(x_1^0)}{\partial x_1^0} \right| = 5 > 1$ , причем это значение не зависит от параметра  $\mu$ . Для параметра  $\lambda$  все вычисления идентичны. Таким образом, доказан следующий результат:

**Лемма 1** Пусть значения параметров  $k_1$  и  $k_3$  удовлетворяют условиям (64), тогда в системе (1), (49) есть неустойчивое колебание, параметры которого даны в (63).

**Замечание 1** Результат леммы 1 остается верным, если рассмотреть параметризацию  $k_1$  и  $k_3$  в виде (50) и наложить на параметр  $\lambda$  дополнительное условие (65).

## 3.2 Устойчивый Цикл

Расчеты в предыдущем подразделе предполагали, что  $|x_3| < 1$ . Теперь считаем, что  $x_3 = 1$  в некоторой точке траектории перед входом в множество  $D_1$ . Пусть полуцикл состоит из двух сегментов:

1. на первом сегменте  $U(x) = -1$  и  $x_3^0 = 1$ ;
2. на втором сегменте  $U(x) = 0$  и  $x_3(T) = -1$ , где  $T = t_1 + t_2$  – полупериод.

**Замечание 2** Данное предположение, может быть реализовано, только на сатураторах, причем неважно, гладкие они или нет. А вот для сигмоидов это предположение не выполняется никогда (график сигмоиды приближается бесконечно близко к своему пределу, но не выходит на него), т.е. при использовании вместо внешней функции  $\text{sign}$  функции сигмоиды в замкнутой системе будет только один неустойчивый цикл, который лежит на границе области притяжения нуля.

Решаем систему (1), (49) на каждом сегменте, согласно со сделанными предположениями. На интервале  $t \in [0, t_1]$  из уравнения  $x_3 = -t + 1$  и условия  $x_3(t_1) = -1$  находим  $t_1 = 2$ . Из решения второго уравнения (52)

$$x_2(t_1) = -\frac{t_1^2}{2} + x_3^0 t_1 + x_2^0,$$

находим, что  $x_2(t_1) = x_2^0$ . Третье уравнение (51) дает

$$x_1(t_1) = -\frac{t_1^3}{6} + x_3^0 \frac{t_1^2}{2} + x_2^0 t_1 + x_1^0 = \frac{2}{3} + 2x_2^0 + x_1^0.$$

На всем втором интервале  $[t_1, T]$   $x_3(t) \equiv -1$ . Интегрируем второе уравнение системы (1) используя это предположение, имеем  $x_2(T) = f_2(T, x^0) := -t_2 + x_2(t_1) = -t_2 + x_2^0$ , из чего, с учетом условия симметрии, следует, что  $t_2 = 2x_2^0$ . Решение третьего уравнения системы (1) задается формулой

$$x_1(T) = f_1(T, x^0) := -\frac{t_2^2}{2} + x_2(t_1)t_2 + x_1(t_1). \quad (68)$$

После подстановки значения  $t_2 = 2x_2^0$  в (68) имеем  $x_1(T) = \frac{2}{3} + 2x_2^0 + x_1^0$ . Откуда с учетом условия симметрии, следует, что

$$x_1^0 = -\frac{1}{3} - x_2^0. \quad (69)$$

Исходя из граничного условия, имеем

$$x_2^0 = -k_1 x_1^0 - \frac{1}{k_3} = -\frac{\lambda}{n} x_1^0 - \frac{1}{n\lambda}. \quad (70)$$

Решая систему линейных уравнений (69), (70) относительно  $x_1^0$  и  $x_2^0$ , получаем

$$x_1^0 = \frac{3 - k_3}{3(1 - k_1)k_3} = \frac{3 - n\lambda}{3\lambda(n - \lambda)}, \quad x_2^0 = \frac{k_1 k_3 - 3}{3k_3(1 - k_1)} = \frac{\lambda^2 - 3}{3\lambda(n - \lambda)}; \quad t_2 = 2x_2^0. \quad (71)$$

Положительность  $t_2$  подразумевает, что  $x_2^0 \geq 0$ . Что справедливо, когда

$$3 < k_3 k_1, \quad k_1 < 1 \quad \text{или} \quad \sqrt{3} \leq \lambda < n. \quad (72)$$

Следовательно, цикл существует при  $k_1 < 1$  и  $k_3 k_1 > 3$ , или для любого  $\lambda$  в интервале  $[\sqrt{3}, n)$ ,  $n > \sqrt{3}$ .

Докажем, что данный цикл устойчивый при выборе коэффициентов, удовлетворяющих неравенствам (72).

Т.к. в данном случае переменная  $x_3^0$  точно известна (неизвестен интервал  $t_2$ ) наше отображение становится двумерным и определяется функциями  $f_1(T, x^0)$  и  $f_2(T, x^0)$ . Граничные условия в данном случае тоже упрощаются и принимают вид:  $g_1(T, x^0) := 1 + 2\lambda x_2^0 + \lambda^2 x_1^0 = 0$  и  $g_2(T, x^0) := 1 + 2\lambda f_2(T, x^0) + \lambda^2 f_1(T, x^0) = 0$ . Т.к. граничные условия должны обязательно выполняться, отображения  $f_1(T, x^0)$  и  $f_2(T, x^0)$  линейно зависимые, причем выполняется соотношение  $\left| \frac{\partial F_2(x_2^0)}{\partial x_2^0} \right| = k_1 \left| \frac{\partial F_1(x_1^0)}{\partial x_1^0} \right| = \frac{\lambda}{n} \left| \frac{\partial F_1(x_1^0)}{\partial x_1^0} \right|$ , а значит в



силу (72) достаточно исследовать на устойчивость только одно отображение  $f_1(T, x^0)$ .

В нашем случае, когда отображаем  $(x_1^0, x_2^0)$  в  $(F_1(x_1^0), -x_2^0)$ , время  $t_2 = 2x_2^0$ . Из (68) находим  $F_1(x_1^0)$  в виде

$$F(x_1^0) = \frac{2}{3} + 2x_2^0(x_1^0) + x_1^0 = x_1^0(1 - 2k_1) - \frac{2}{k_3} + \frac{2}{3}. \quad (73)$$

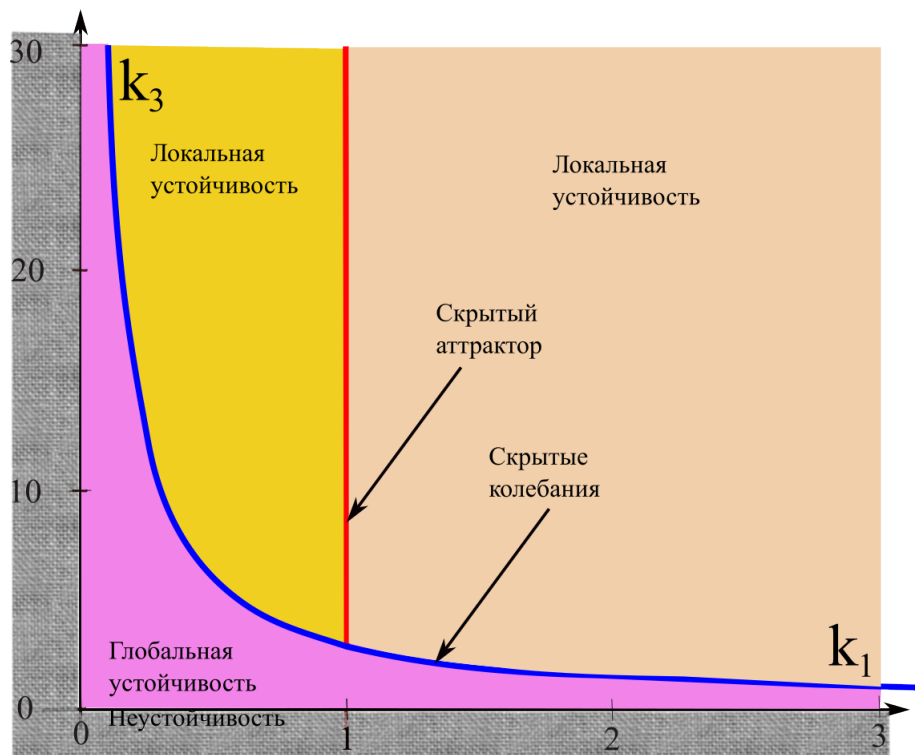
Очевидно, что  $\left| \frac{\partial F_1(x_1^0)}{\partial x_1^0} \right| = (2k_1 - 1) < 1$  при  $k_1 < 1$ . Подставляя выражения для  $\lambda$  получаем, что производная также меньше 1. Таким образом, доказан следующий результат:

**Лемма 2** Пусть значения параметров  $k_1$  и  $k_3$  или  $\lambda$ ,  $n$  удовлетворяют условиям (72), тогда в системе (1), (49) есть скрытый аттрактор, параметры которого даны в (71).

Из лемм 1 и 2 следует, что в системе (1), (49) при следующих значениях параметров  $k_1$  и  $k_3$  или  $\lambda$ ,  $n$  есть скрытые колебания рис. 10.

- Когда  $k_1 k_3 = 3$  или  $\lambda = \sqrt{3}$  циклы устойчивый и неустойчивый совпадают, т.е. при этом значении параметров имеем наполовину устойчивый цикл, у которого область притяжения он сам.
- Когда  $0 < k_1 k_3$  и  $k_1 < 1$  или интервале  $\sqrt{3} < \lambda < n$ , имеем два цикла: один – скрытый аттрактор, а другой – неустойчивый цикл, лежащий на границе области притяжения нулевого решения.
- При  $k_1 \rightarrow 1$  или  $\lambda \rightarrow n$  скрытый аттрактор становится бесконечно большим. Неустойчивый цикл лежит на границе области притяжения нулевого решения.
- При  $k_1 > 1$  или  $\lambda > n$  любое решение либо стремится к равновесию, либо уходит в бесконечность. Неустойчивый цикл лежит на границе области притяжения нулевого решения. Скрытого аттрактора нет.

На всем интервале  $0 < k_1 < +\infty$  при условии  $k_1 k_3 > 3$  ( $\sqrt{3} < \lambda < +\infty$ ) неустойчивый цикл уменьшается при возрастании  $k_1$  ( $\lambda$ ) и в пределе стремится к нулю, в отличие от случая непрерывного управления, где всегда вокруг нуля есть ограниченная область притяжения линейной системы, в которой может не быть цикла.

Рис. 10: Пространство параметров  $k_1, k_3$ .

## 4 Выводы

В данной работе ставится задача исследования глобальных бифуркаций в замкнутой системе 3-го порядка, возникающих в результате стабилизации цепи из трех интеграторов ограниченным управлением, содержащим функции насыщения. В работе предложен новый разрывной закон управления, который является предельным случаем закона управления в виде вложенных функций насыщения.

Доказано, что в обоих случаях непрерывного и разрывного законов управления в замкнутой системе возникают скрытые колебания, параметры которых получены для каждого характерного интервала изменения бифуркационного параметра. Причем в случае разрывного управления все формулы приведены в аналитической форме. Основные результаты работы оформлены в виде теоремы и 2-х лемм. Проведено численное моделирование.

## Список литературы

- [1] *Schot S.H.* Jerk: the time rate of change of acceleration // Am. J. Phys. 1978.

V. 46. P. 1090–1094.

- [2] *Pesterev A. V., Morozov Yu. V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // In: Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Pospelov I. (eds) Optimization and Applications. OPTIMA 2022. Lecture Notes in Computer Science. 2022. V. 13781. P. 66–78.
- [3] *Pesterev A. V., Morozov, Yu. V.* Optimizing a feedback in the form of nested saturators to stabilize the chain of three integrators // In: Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Pospelov I. (eds) Optimization and Applications. OPTIMA 2023. Lecture Notes in Computer Science. 2023. V. 14395. P. 129–142.
- [4] *Pesterev A. V., Morozov, Yu. V.* Optimal selection of feedback coefficients in the problem of stabilizing a chain of three integrators // In: Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Pospelov I. (eds) Optimization and Applications. OPTIMA 2024. Lecture Notes in Computer Science. 2024. V. 15218. Принята к публикации.
- [5] *Teel A. R.* Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls // Systems & Control Letters. 1992. V. 18. P. 165–171.
- [6] *Teel A. R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // Trans. Autom. Contr. IEEE. 1996. V. 41. P. 1256–1270.
- [7] *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions // Springer International Publishing: Cham. 2014.
- [8] *Moreno I., Suarez R.* Existence of periodic orbits of stable saturated systems // Systems & Control Letters. 2004. V. 51. P. 293–309.
- [9] *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Hidden oscillations in dynamical systems. 16 Hilbert’s problem, Aizerman’s and Kalman’s conjectures, hidden attractors in Chua’s circuits // Journal of Mathematical Sciences. 2014. V. 201. P. 645–662.
- [10] *Andrievsky, B. R. et al.* Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators // IFAC Proc. 2013. V. 46. P. 37–41.

- [11] *Kuznetsov N.V.* Theory of hidden oscillations and stability of control systems // J. Comp. Systems Sciences International. 2020. V. 59. P. 647–668.
- [12] *Genesio R., Tesi A.* Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems // Automatica. 1992. V. 28. P. 531–548.
- [13] *Li P., Zheng T., Li C. et al.* A unique jerk system with hidden chaotic oscillation // Nonlinear Dyn. 2016. V. 86. P. 197–203.
- [14] *Pesterev A. V., Morozov Y. V.* Optimizing coefficients of a controller in the point stabilization problem for a robot-wheel // In: Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jacimovic M., Khachay M., Malkova V. Optimization and Applications. OPTIMA. Lecture Notes in Computer Science. 2021. V. 13078. P. 191–202.
- [15] *Hua M.-D., Samson C.* Time sub-optimal nonlinear pi and pid controllers applied to longitudinal headway car control // Inter. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.
- [16] *Marconi L., Isidori A.* Robust global stabilization of a class of uncertain feedforward nonlinear systems // Systems & Control Letters. 2000. V. 41. P. 281–290.
- [17] *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Robust stability and control // Rus. Acad. Sci., Inst. Control Problems, Moscow: Nauka, 2002.
- [18] *Матюхин, В. И., Пятницкий, Е. С.* Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной // АиТ. 2004. V. 8, P. 14–38.
- [19] *Морозов Ю.В.* Предельный цикл как результат глобальной бифуркации в одном классе симметричных систем с разрывной правой частью // Нелинейная Динамика. 2016. V. 12. P. 17-30.
- [20] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
- [21] *Kuznetsov N.V., Akimova E.D., Andrievsky B.R. Mokaev R.N.* Andronov-Vyshnegradsky problem on Watt governor and Kalman conjecture on global stability // IFAC-PapersOnLine. 2023. V. 56. P. 4460–4465.
- [22] *Магнус К.* Колебания. Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982.

## Hidden oscillations in the problem of controlling a 3rd order integrator using continuous control and discontinuous

Morozov Yu.V.<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Institute of Control Sciences V.A. Trapeznikov, RAS (ICS RAS), Moscow

\* tot1983@ipu.ru

**Abstract.** In this paper, the problem of controlling a third-order integrator using continuous and discontinuous bounded control is considered. The methods of loss of global stability of a closed system are investigated. Moreover, there are solved an optimization problem of determining coefficients that ensure the fastest convergence rate while preserving the property of being globally asymptotically stable. It is established that the loss of global stability results from arising a hidden attractor, which comes to existence when the convergence rate reaches a critical value. A study of global bifurcations in two closed systems is carried out. It is shown that in both cases there is an interval of values of the bifurcation parameter (convergence rate) at which both stable and unstable hidden oscillations arise. The stability/instability analysis is carried out using analytical and numerical methods. In the case of a discontinuous right-hand side in a closed system, the parameters of both cycles are obtained analytically. In the case of continuous feedback, a special algorithm for constructing hidden attractors is developed. Numerical examples illustrating the efficiency of this algorithm are given.

**Key words:** hidden oscillations, hidden attractor, bounded control, discontinuous control, local stability, global bifurcation, nested saturation functions.