ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей

В. Б. Тлячев, А. Д. Ушхо, Д. С. Ушхо

Адыгейский государственный университет

stvb2006@rambler.ru, uschho76@rambler.ru damirubych@mail.ru

Аннотация. Доказаны общие теоремы о состояниях равновесия автономных динамических систем, правые части которых представляют собой полиномы n–ой степени. В частности, показано, что если система, правые части которой суть взаимно простые многочлены, имеет n^2 состояний равновесия, то все они простые. При этом, при определенных условиях индекс J Пуанкаре любого состояния равновесия удовлетворяет неравенству $|J| \leq n-1$. Рассмотрены условия отсутствия предельных циклов кубической системы, имеющей особые точки типа «центр». С помощью канонической формы кубической системы, имеющей максимальное число состояний равновесия, определены индексы Пуанкаре, позволяющие судить об их типах. Приведены примеры, подтверждающие выдвинутые утверждения.

Ключевые слова: автономная динамическая система, полиномы, кубическая система, изоклина, индекс Пуанкаре, состояния равновесия, проблема центра-фокуса, сфера Пуанкаре.

1 Введение

Интерес к изучению поведения траекторий дифференциальных систем вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, обусловлен их фундаментальной ролью в теории дифференциальных уравнений и широким использованием таких систем в качестве математических моделей в прикладной математике, физике, технике, биологии, экономике [1]– [4].

Кроме этого, особое внимание к системам (1) обусловлено тем фактом, что в большинстве случаев нелинейные системы аппроксимируются с приемлемой точностью полиномиальной, исследование которой может существенно упроститься.

Анализ систем (1), как правило, связан с определением их динамических свойств, например, классификации положений равновесия и их устойчивости. При этом важное место отводится исследованию свойств состояний равновесия, таких как их число и характер, без которых нельзя описать основные качественные черты поведения динамической системы.

Данная работа посвящена изучению свойств состояний равновесия дифференциальных систем вида (1). В первом разделе представлены общие теоремы, остальные разделы содержат результаты, касающиеся качественного исследования кубической системы.

2 Доказательство общих теорем

Теорема 1 *Пусть* $(0;0)$ *— сложное состояние равновесия системы (1) с взаимно простыми правыми частями. Тогда существует невырожденное преобразование*

$$\begin{cases} x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \\ y = \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}, \end{cases} \tag{2}$$

приводящее систему (1) к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \overline{P}(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = \overline{Q}(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases} \tag{3}$$

удовлетворяющей хотя бы одному из условий

$$\overline{P}'_{\overline{x}}(0;0) = \overline{P}'_{\overline{y}}(0;0) = \overline{P}(0;0) = 0, \tag{4}$$

$$\overline{Q}'_{\overline{x}}(0;0) = \overline{Q}'_{\overline{y}}(0;0) = \overline{Q}(0;0) = 0, \tag{5}$$

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + F_2(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + G_2(x, y), \end{cases} \tag{6}$$

где $F_2(x, y)$ и $G_2(x, y)$ — многочлены степени, не ниже второй.

Если выполняется одно из условий

$$|a| + |b| = 0, \tag{7}$$

$$|c| + |d| = 0, \tag{8}$$

то система (6) имеет необходимый вид. Поэтому полагаем, что не выполнено ни одно из условий (7) и (8).

Для определенности положим, что $a \neq 0$. Так как по условию $(0;0)$ — сложное состояние равновесия, то [5]

$$ad - bc = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что $c \neq 0$, в противном случае выполняется равенство (8).

Применим к системе (6) преобразование (2), учитывая при этом условие $\triangle = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. В результате система (6) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \Big(\alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \dfrac{\beta\gamma bc}{a}\Big)\overline{x} + \\ \qquad + \Big(\beta\delta a - \beta^2 c + \delta^2 b - \dfrac{\beta\delta bc}{a}\Big)\overline{y} + \overline{F}_2(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = \Big(\alpha^2 c - \alpha\gamma a - \gamma^2 b + \dfrac{\alpha\gamma bc}{a}\Big)\overline{x} + \\ \qquad + \Big(\alpha\beta c - \beta\gamma a - \gamma\delta b + \dfrac{\alpha\delta bc}{a}\Big)\overline{y} + \overline{G}_2(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases} \tag{10}$$

где $d\tau = \dfrac{1}{\triangle}dt$, $\quad \overline{F}_2(\overline{x},\overline{y})$, $\quad \overline{G}_2(\overline{x},\overline{y})$ — многочлены степени s $(2 \leq s \leq n)$.

Потребуем равенства нулю линейных коэффициентов в первом уравнении системы (10):

$$\begin{cases} (\delta a - \beta c)(\alpha a + \gamma b) = 0, \\ (\delta a - \beta c)(\beta a + \delta b) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Из (11) получаем, что

$$\delta = \frac{\beta c}{a}. \tag{12}$$

Из (12) и неравенства $\triangle \neq 0$ следует, что $\gamma \neq \dfrac{\alpha c}{a}$. Таким образом, преобразование (2), где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\delta = \dfrac{\beta c}{a}$, $\gamma \neq \dfrac{\alpha c}{a}$, является невырожденным и приводит систему (6) к системе (3), удовлетворяющей условию (4). Если бы мы исходили из условия равенства нулю линейных коэффициентов во втором уравнении системы (10), то нашли бы невырожденное преобразование, приводящее (6) к системе (3), удовлетворяющей условию (5). Теорема доказана.

В терминах теории алгебраических кривых утверждение теоремы 1 можно сформулировать следующим образом.

Пусть алгебраические кривые n–го порядка $F_n(x,y) = 0$ и $G_n(x,y) = 0$, не имеющие общих компонент, пересекаются в точке M кратности $r > 1$. Тогда в пучке кривых $G_n(x,y) - \lambda F_n(x,y) = 0$ $(\lambda = const)$ имеется хотя бы одна кривая, для которой M является особой точкой.

Пример 1. $(0;0)$ — общая точка кратности $r > 1$ кривых $y - x^3 + x^2y + y^3 = 0$ и $y + 2x^3 - 4x^2y + xy^2 = 0$. В пучке кривых $y + 2x^3 - 4x^2y + xy^2 - \lambda(y - x^3 + x^2y + y^3) = 0$, кривая, соответствующая $\lambda = 1$, имеет особую точку $(0;0)$.

При изучении поведения фазовых траекторий системы (1) априори предполагается, что если эта система имеет n^2 состояний равновесия, то все они простые. Однако, насколько нам известно, доказательство этого факта не нашло отражения в существующей литературе по качественной теории дифференциальных систем вида (1).

Теорема 2 *Пусть система (1), правые части которой взаимно простые многочлены с вещественными коэффициентами, имеет n^2 состояний равновесия. Тогда все они простые.*

Доказательство. Предположим, что хотя бы одно из n^2 состояний равновесия системы (1) является сложным. Не уменьшая общности, согласно теореме 1 рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = R_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = S(x,y), \end{cases} \tag{13}$$

где $(R_2, S) = 1$, $R'_{2x}(0;0) = R'_{2y}(0;0) = R_2(0;0) = 0$, $R_2(x,y)$, $S(x,y)$ — многочлены степени, не выше n.

Обозначим состояния равновесия системы (13) $A_i(i = \overline{1, n^2})$. Кратности точек A_i как точек изоклины бесконечности $R_2(x,y) = 0$ и изоклины нуля $S(x,y) = 0$ обозначим, соответственно через r_i и $\overline{r_i}$. Полагаем $A_1 \equiv (0;0)$. Поэтому $r_1 \geq 2$.

Имеют место неравенства

$$\begin{cases} r_1\overline{r}_1 \geq 2, \\ r_2\overline{r}_2 \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ r_{n^2}\overline{r}_{n^2} \geq 1. \end{cases} \tag{14}$$

Из (14) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{n^2} r_i\overline{r}_i \geq n^2 + 1 > n^2. \tag{15}$$

Неравенство (15) противоречит теореме 3.3 [6], согласно которой сумма произведений кратностей r_i и $\overline{r}_i$ общих точек кривых $R_2(x,y) = 0$ и $S(x,y) = 0$ как точек данных кривых, не имеющих общих компонент, удовлетворяет неравенству $\sum r_i\overline{r}_i \leq n^2$. Теорема доказана.

Теорема 3 *Если $n^2 - n$ состояний равновесия системы (1) расположены на алгебраической кривой $(n-1)$–го порядка*

$$L_{n-1} : L_{n-1}(x,y) = 0, \tag{16}$$

то L_{n-1} — изоклина этой системы.

Доказательство. Выберем на кривой (16) произвольную точку $M_0(x_0; y_0)$, не являющуюся состоянием равновесия. Выбор такой точки всегда возможен, так как правые части системы (1) априори считаются взаимно простыми. Через M_0 проходит некоторая изоклина l системы (1).

Предположим, что система (1) индуцирует на l направление m (тангенс угла наклона касательных к траекториям системы (1), отличным от состояния равновесия, в точках кривой l равен m). Не уменьшая общности, считаем, что $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, так как в противном случае этого можно добиться соответствующим выбором новых осей координат.

Следуя [7], применим к системе (1) преобразование

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \overline{y}, \\ y = m\overline{y}, \end{cases} \tag{17}$$

переводящее систему (1) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{P}(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases} \tag{18}$$

где $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}) = P(\overline{x} + \overline{y}, m\overline{y}) - \dfrac{1}{m}Q(\overline{x} + \overline{y}, m\overline{y})$, $\overline{Q}(\overline{x}, \overline{y}) = \dfrac{1}{m}Q(\overline{x} + \overline{y}, m\overline{y})$.

Пусть преобразование (17) переводит l в кривую $\bar{l}$, кривую L_{n-1} в $\overline{L}_{n-1}$, точку M_0 в точку $\overline{M}_0$. В силу [7] имеет место равенство

$$\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})\Big|_{(\overline{x}, \overline{y}) \in \bar{l}} \equiv 0. \tag{19}$$

Так как по условию теоремы система (1) имеет $n^2 - n$ состояний равновесия на кривой L_{n-1}, то на кривой $\overline{L}_{n-1}$, система (18) имеет $n^2 - n$ состояний равновесия. Кроме этого, на $\overline{L}_{n-1}$ расположена точка $\overline{M}_0$, которая согласно (19) принадлежит изоклине бесконечности $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ системы (18).

Таким образом, кривая $(n-1)$–го порядка $\overline{L}_{n-1}$ имеет с кривой n–го порядка $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ более $n(n-1)$ общих точек. По теореме Безу [6, с. 72] кривая $\overline{L}_{n-1}$ является компонентой кривой $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, то есть является изоклиной системы (18). Поскольку свойство кривой быть изоклиной системы (1) инвариантно относительно линейного невырожденного преобразования [7], то L_{n-1} – изоклина системы (1).

Теорема доказана.

Замечание 1. В статье [8] доказана теорема, согласно которой кривая второго порядка L_2 является изоклиной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_3(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G_3(x, y), \end{cases} \tag{20}$$

где F_3 и G_3 – взаимно простые многочлены третьей степени с вещественными коэффициентами, если L_2 проходит через шесть состояний равновесия системы (20). Таким образом, упомянутая теорема является частным случаем теоремы 3.

Следствие 1. Если $n^2 - n$ состояний равновесия системы (1) принадлежат алгебраической кривой $(n-1)$–го порядка, то все остальные состояния равновесия этой системы лежат на одной и той же прямой.

Следствие 2. Если шесть общих точек кривых третьего порядка расположены на кривой второго порядка, то остальные общие точки этих кривых лежат на одной прямой (см. [9]).

Следствие 3. Если прямая проходит через два состояния равновесия квадратичной системы системы (1) при $n = 2$, то данная прямая является изоклиной этой системы.

В терминах теории кривых второго порядка следствие 3 можно трактовать следующим образом: если кривые $P_2(x,y) = 0$ и $Q_2(x,y) = 0$ имеют две общие точки, то прямая, проходящая через эти точки, принадлежит пучку кривых

$$Q_2(x,y) - mP_2(x,y) = 0, \qquad m - const.$$

Как известно [5], индекс Пуанкаре во многих случаях однозначно определяет топологическую структуру состояний равновесия. Поэтому, следуя А. Пуанкаре [10], введем понятие индекса.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x,y), \end{cases} \tag{21}$$

где X и Y — аналитические функции в некоторой односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$, не имеющие общего делителя.

Возьмем простую замкнутую кривую C, не обязательно гладкую, расположенную в области G и не проходящую через состояние равновесия системы (21). Для удобства кривую C назовем циклом. Совершим однократный обход цикла C в направлении против хода часовой стрелки, и рассмотрим при этом изменение знака функции $Y(x,y)/X(x,y)$ при переходе через изоклину бесконечности $X(x,y) = 0$.

Пусть $p(q)$ – число скачков от $+\infty$ к $-\infty$ (от $-\infty$ к $+\infty$), совершаемых функцией $\dfrac{Y(x,y)}{X(x,y)}$. Тогда число $J = \dfrac{p-q}{2}$ называется индексом цикла C.

Индексом Пуанкаре состояния равновесия A системы (21) называется индекс цикла C, окружающего точку A и расположенного в достаточно малой проколотой окрестности точки A. Индекс простого состояния равновесия типа «седло» равен -1, а простые узел, фокус, центр имеют индекс, равный $+1$ [5]. Тип сложного состояния равновесия $(0;0)$ системы (6) при выполнении условий: $a+d \neq 0,\ \ ad-bc=0$, вполне определяется его индексом, а именно: если $J(0)=0$, то $(0;0)$ — седлоузел, если $J(0)=1$, то точка $(0;0)$ — топологический узел, если $J(0)=-1$, то $(0;0)$ — топологическое седло [5].

Теорема 4 *Пусть система (1) удовлетворяет условиям:*

$$deg\left(P^2(x,y)+Q^2(x,y)\right)=2n, \tag{22}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} P_i(x,y)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i(x,y)\right)^2 \not\equiv 0, \tag{23}$$

и преобразование

$$\begin{cases} x=\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}+\eta, \\ y=\gamma\overline{x}+\delta\overline{y}+\omega, \quad \Delta=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0 \end{cases} \tag{24}$$

переводит систему (1) в систему вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i(\overline{x},\overline{y})+\overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\overline{Q}_i(\overline{x},\overline{y})+\overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y}), \end{cases} \tag{25}$$

где $\overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}),\quad \overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y})$ *— однородные многочлены n–ой степени,* $\overline{P}_i(\overline{x},\overline{y}),\ \overline{Q}_i(\overline{x},\overline{y})$ *— однородные многочлены i–ой степени,* $d\tau=dt/\Delta$. *Тогда*

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \overline{P}_i(\overline{x},\overline{y})\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \overline{Q}_i(\overline{x},\overline{y})\right)^2 \not\equiv 0.$$

Доказательство. Введем обозначения: $X=\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\ Y=\gamma\overline{x}+\delta\overline{y}$.

Так как

$$P_n(X+\eta,Y+\omega)=\widetilde{P}_n(X,Y)+F_{n-1}(X,Y),$$
$$Q_n(X+\eta,Y+\omega)=\widetilde{Q}_n(X,Y)+G_{n-1}(X,Y),$$

где $\widetilde{P}_n(X,Y)$, $\widetilde{Q}_n(X,Y)$ — однородные многочлены n–ой степени, $F_{n-1}(X,Y)$, $G_{n-1}(X,Y)$ — многочлены степени не выше $n-1$, то систему (25) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \delta\sum\limits_{i=1}^{n-1} P_i(X+\eta, Y+\omega) - \beta\sum\limits_{i=1}^{n-1} Q_i(X+\eta), Y+\omega)+ \\ \qquad +\delta F_{n-1}(X,Y) - \beta G_{n-1}(X,Y) + \delta\widetilde{P}_n(X,Y) - \beta\widetilde{Q}_n(X,Y), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = -\gamma\sum\limits_{i=1}^{n-1} P_i(X+\eta, Y+\omega) + \alpha\sum\limits_{i=1}^{n-1} Q_i(X+\eta), Y+\omega)- \\ \qquad -\gamma F_{n-1}(X,Y) + \alpha G_{n-1}(X,Y) - \gamma\widetilde{P}_n(X,Y) + \alpha\widetilde{Q}_n(X,Y). \end{cases} \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует, что

$$\overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}) = \delta\widetilde{P}_n(X,Y) - \beta\widetilde{Q}_n(X,Y), \tag{27}$$

$$\overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y}) = -\gamma\widetilde{P}_n(X,Y) + \alpha\widetilde{Q}_n(X,Y). \tag{28}$$

Предположим, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overline{P}_i(\overline{x},\overline{y}) \equiv 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \overline{Q}_i(\overline{x},\overline{y}) \equiv 0. \tag{29}$$

Тогда система (25) запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = \overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y}), \end{cases} \tag{30}$$

где $\overline{P}_n(\overline{x},\overline{y})$ и $\overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y})$ заданы выражениями (27) и (28), соответственно.

Положим в системе (30)

$$\overline{x} = \frac{-\eta\delta + \omega\beta}{\Delta} = \overline{x}_0, \;\; \overline{y} = \frac{\eta\gamma - \omega\alpha}{\Delta} = \overline{y}_0, \text{ где } \eta^2 + \omega^2 > 0. \tag{31}$$

Из (24) и (31) следует, что при $x = 0$ и $y = 0$ $X = -\eta$ и $Y = -\omega$.

Систему (25) или, что то же самое систему (26), можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Big(\alpha P_i(x,y) - \beta Q_i(x,y)\Big), \\ \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Big(-\gamma P_i(x,y) + \alpha Q_i(x,y)\Big), \end{cases} \tag{32}$$

где $P_i(x,y)$ и $Q_i(x,y)$ — однородные многочлены i–ой степени.

Так как правые части системы (32) равны нулю при $x = y = 0$, то

$$\overline{P}_n(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = 0, \;\; \overline{Q}_n(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = 0. \tag{33}$$

Из (33) с учетом (27) и (28) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \delta\widetilde{P}_n(-\eta, -\omega) - \beta\widetilde{Q}_n(-\eta, -\omega) = 0, \\ -\gamma\widetilde{P}_n(-\eta, -\omega) + \alpha\widetilde{Q}_n(-\eta, -\omega) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Из (34) с учетом $\Delta \neq 0$ получаем

$$\begin{cases} \widetilde{P}_n(-\eta, -\omega) = 0, \\ \widetilde{Q}_n(-\eta, -\omega) = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Так как $\eta^2 + \omega^2 > 0$, то из (35) следует, что однородные многочлены $\widetilde{P}_n(X,Y)$ и $\widetilde{Q}_n(X,Y)$ имеют общий множитель $\eta Y - \omega X$. Принимая во внимание равенства (27) и (28), приходим к выводу, что правые части системы (30) не являются взаимно простыми. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Если система (1) удовлетворяет условиям теоремы 4, то в результате преобразования (24) многочлены $\overline{P}_n(\overline{x}, \overline{y})$ и $\overline{Q}_n(\overline{x}, \overline{y})$, фигурирующие в системе (25), не обращаются одновременно в тождественный нуль.

В самом деле, в противном случае согласно (27) и (28) $\widetilde{P}_n(X,Y) \equiv 0$, $\widetilde{Q}_n(X,Y) \equiv 0$, а значит, в системе (1) $P_n(x,y) \equiv 0$, $Q_n(x,y) \equiv 0$. Получаем противоречие условию (22).

Теорема 5 *Если система (1) удовлетворяет условиям теоремы 4, то индекс Пуанкаре J состояния равновесия этой системы удовлетворяет неравенству*

$$|J| \leq n - 1.$$

Доказательство. Пусть $(x_0; y_0)$ — произвольное состояние равновесия системы (1). Совершим в этой системе параллельный перенос $\begin{cases} x = \overline{x} + x_0, \\ y = \overline{y} + y_0, \end{cases}$, являющийся частным случаем преобразования (24). В результате получим систему (25), для которой не выполняется хотя бы одно из равенств (29).

Тогда по лемме 5 [11] индекс Пуанкаре J состояния равновесия $(x_0; y_0)$ удовлетворяет неравенству $|J| \leq n - 1$.

Теорема доказана.

Определение 1. Точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая гладкой кривой L, называется контактом на L, если вектор $\overrightarrow{V} = (P(x_0; y_0), Q(x_0; y_0))$ является направляющим вектором касательной к кривой L в точке M.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ F'_x(x, y)P(x, y) + F'_y(x, y)Q(x, y) = 0, \end{cases} \tag{36}$$

где $F(x, y) = 0$ – гладкая алгебраическая кривая порядка m, $m \geq 1$.

Система (36) имеет не более $m(m + n - 1)$ решений [6]. Каждое решение этой системы в силу гладкости кривой $F(x, y) = 0$ является либо контактом, либо состоянием равновесия системы (1). Поэтому справедлива

Теорема 6 *Сумма числа состояний равновесия системы (1) и числа контактов на гладкой алгебраической кривой порядка m, не состоящей из траекторий этой системы, не превосходит числа $N = m(m + n - 1)$.*

Следствие 4. Сумма числа состояний равновесия системы (1) и числа контактов на прямой, не состоящей из траекторий этой системы, не превосходит n.

Впрочем, в соответствии со следствием 4 замкнутая траектория квадратичной системы является выпуклой кривой (см. [12]).

3 Условия отсутствия предельных циклов у кубической системы, имеющей центр

Определение 2 [13]. Состояние равновесия $M(x_0; y_0)$ системы (1) называется состоянием равновесия второй группы, если выполняются условия:

$$\begin{cases} P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0, \\ P'_x(x_0, y_0) \cdot Q'_y(x_0, y_0) - P'_y(x_0, y_0) \cdot Q'_x(x_0, y_0) > 0, \end{cases} \tag{37}$$

Известно [13], что состояние равновесия второй группы является центром, либо сложным фокусом. Поэтому появляется проблема различения центра и фокуса. Обширный список литературы, посвященной классической проблеме центра–фокуса, можно найти в монографии [13].

В процессе изучения поведения траекторий системы (1), имеющей состояние равновесия типа «центр», возникает проблема сосуществования предельных циклов и центров полиномиальных векторных полей. Так, в работе белорусского математика Н.А. Лукашевича [14] доказано, что система (1) при $n = 2$ не имеет предельных циклов, если она обладает хотя бы одним состоянием равновесия типа «центр». После опубликования данной работы Н.П. Еругиным была поставлена задача обнаружения полиномиальных векторных полей с состоянием равновесия типа «центр», которые допускают предельные циклы [13]. Наименьшая степень полиномов P и Q в системе (1), при которой эта система имеет предельные циклы в случае центра, равна трем. Этот факт впервые установлен в работе [15] нижегородского математика М.В. Долова. Поэтому в статье [16] была поставлена задача: если E_m — класс кубических систем, имеющих m центров, то при каком наибольшем значении m система (1) при $n = 3$ имеет предельные циклы?

В [16] доказано, что в классе E_m $(m \geq 3)$ существуют системы с предельными циклами.

Определение 3 [17]. Прямая $y = kx$ называется осью симметрии N–типа системы (1), если преобразование

$$\begin{cases} \overline{x} = x + ky, \\ \overline{y} = -kx + y, \end{cases} \tag{38}$$

переводит систему (1) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{P}(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases} \tag{39}$$

где $\overline{P}(\overline{x}, -\overline{y}) = -\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{Q}(\overline{x}, -\overline{y}) = \overline{Q}(\overline{x}, \overline{y})$.

В [17], [18] доказывается, что ось симметрии N–типа системы (1) является изоклиной, которую пересекают траектории (1) под прямым углом.

Определение 4 [17], [18]. Прямая $y = kx$ называется осью симметрии S- типа системы (1), если преобразование (38) переводит систему (1) в систему (39), где $\overline{P}(\overline{x}, -\overline{y}) = \overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{Q}(\overline{x}, -\overline{y}) = -\overline{Q}(\overline{x}, \overline{y})$.

В [17], [18] доказывается, что ось симметрии S–типа системы (1) является ее инвариантной прямой.

Теорема 7 *Пусть система (1) при $n = 3$ имеет ось симметрии N–типа и не менее трех центров, два из которых не лежат на оси симметрии N–типа. Тогда эта система не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что прямая $y = 0$ является осью симметрии N–типа. По условию хотя бы один центр лежит на оси симметрии N–типа. В противном случае, система имела бы более пяти центров, что противоречит теореме об оценке числа состояний равновесия второй группы кубической системы [19]. Перенося начало координат в один из центров, лежащих на оси симметрии N–типа, придадим системе (1) при $n = 3$ вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + a_{03}y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{12}xy^2, \end{cases} \tag{40}$$

Дивергенция векторного поля системы (35) имеет вид:

$$\sigma(x, y) = y[a_{11} + 2b_{02} + 2(a_{21} + b_{12})x] \tag{41}$$

Если $\sigma(x, y) \equiv 0$, то система (40) консервативна и не имеет изолированных периодических решений [5]. Поэтому полагаем, что $\sigma(x, y) \not\equiv 0$. Тогда центры системы (40) расположены на кривой $\sigma(x, y) = 0$ [5].

По условию два центра не принадлежат оси симметрии N–типа. Следовательно, согласно (41) они принадлежат прямой $l_0 : a_{11}+2b_{02}+2(a_{21}+b_{12})x = 0$. Как следует из признака Бендиксона для односвязной области [5], предельные циклы системы (40) пересекают кривую $\sigma(x, y) = 0$.

Так как прямая $y = 0$ — ось симметрии N–типа, то предельные циклы системы (40) не пересекают эту прямую.

Ввиду того, что точка пересечения прямой l_0 с осью абсцисс является контактом на l_0, то допуская существование предельного цикла системы (40), мы тем самым утверждаем, что сумма числа контактов и числа состояний равновесия системы (40), расположенных на прямой l_0, не менее пяти. Это противоречит теореме 6. Теорема доказана.

Теорема 8 *Пусть система (1) при $n = 3$ имеет ось симметрии S–типа и четыре центра. Тогда эта система не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Без потери общности, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{21}x^2 + b_{03}y^2), \end{cases} \tag{42}$$

имеющую в качестве оси симметрии S–типа прямую $y = 0$.

Очевидно, все состояния равновесия системы (42), не лежащие на прямой $y = 0$, принадлежат кривой второго порядка $L_2 : b_{01} + b_{11}x + b_{21}x^2 + b_{03}y^2 = 0$.

Если $\sigma(x, y) = a_{10} + b_{01} + (b_{11} + 2a_{20})x + (b_{21} + 3a_{30})x^2 + (a_{12} + 3b_{03})y^2 \equiv 0$, то система не имеет предельных циклов в силу ее консервативности [5].

Если $\sigma(x, y) \not\equiv 0$, то все состояния равновесия типа «центр» расположены на кривой $\sigma(x, y) = 0$, два из которых расположены в полуплоскости $y > 0$, а два других в полуплоскости $y < 0$.

По известной теореме Пуанкаре [20] на кривой L_2 между центрами расположены сёдла (одно в полуплоскости $y > 0$, а другое — в полуплоскости $y < 0$).

Пусть $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ — седло, расположенное выше оси симметрии S–типа. Так как кривые L_2 и $\sigma(x, y) = 0$ имеют не более четырех общих точек, то седло $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ не принадлежит кривой $\sigma(x, y) = 0$, то есть $\sigma(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \neq 0$. Для определенности положим, что $\sigma(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > 0$. Мы утверждаем, что не существует петли сепаратрисы седла, окружающей центр.

В самом деле, если бы существовала такая петля, то в силу неравенства $\sigma(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > 0$, она была бы неустойчивой, и любая траектория системы (42), проходящая через точку, расположенную внутри петли достаточно близко к петле, стремилась бы к петле при $t \to -\infty$.

Но это невозможно, так как область, ограниченная петлей сепаратрисы и содержащая центр, сплошь заполнена замкнутыми траекториями.

Таким образом, любая сепаратриса седла системы (42) либо уходит на бесконечность, либо стремится к конечному состоянию равновесия системы (42), расположенному на оси симметрии S–типа $y = 0$. Поэтому не существует предельного цикла, окружающего группу состояний равновесия, состоящую из двух центров и одного седла.

Теорема доказана.

4 Каноническая форма кубической дифференциальной системы в случае максимального числа состояний равновесия

Согласно работе [21] под канонической формой записи системы (1) будем понимать такую форму ее записи, при которой

$$P(x,y) = (a_1x + b_1y + c_1)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (a_kx + b_ky + c_k)^{\alpha_k} \cdot \widetilde{P}(x,y) \tag{43}$$

или

$$Q(x,y) = (m_1x + n_1y + l_1)^{\beta_1} \cdot ... \cdot (m_sx + n_sy + l_s)^{\beta_s} \cdot \widetilde{Q}(x,y), \tag{44}$$

где α_i, $\beta_j(i = \overline{1,k}, j = \overline{1,s})$ — целые неотрицательные числа, причем $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i > 0$ (или $\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j > 0$), $\widetilde{P}(x,y)$ ($\widetilde{Q}(x,y)$) — многочлен нулевой степени, либо многочлен степени $n \geq 2$, не имеющий делителей вида $ax + by + c$.

Теорема 9 *Если система*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^iy^j, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^iy^j \end{cases} \tag{45}$$

имеет девять состояний равновесия, то ее можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a_1x + b_1y + c_1)P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (a_2x + b_2y + c_2)Q_2(x,y), \end{cases} \tag{46}$$

где $P_2(x,y)$ $Q_2(x,y)$ — многочлены второй степени.

Доказательство. Следуя [9], определим понятие корезидюальной точки. Пусть через четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 кривой третьего порядка L_3 проходит коническое сечение, пересекающее L_3 еще в двух точках M и N. Все прямые MN пересекают еще раз L_3 в точке P, называемой корезидюальной по отношению к точкам A_1, A_2, A_3, A_4.

Обратное утверждение также справедливо: каждая прямая, проходящая через точку P, пересекает L_3 в двух точках, лежащих на одном коническом сечении с точками A_1, A_2, A_3, A_4.

Известно [22], что через любые пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная кривая второго порядка.

Из девяти состояний равновесия системы (45) выберем произвольным образом пять состояний равновесия B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Так как кубическая система имеет на прямой не более трех состояний равновесия, то через точки B_i $(i = \overline{1,5})$ проходит единственная кривая второго порядка, которую обозначим через L_2^1. Согласно [9] L_2^1 проходит через точку P^1, корезидюальную остальным четырем состояниям равновесия C_1, C_2, C_3, C_4 системы (45). Покажем, что P^1 совпадает с одной из точек B_i $(i = \overline{1,5})$.

Рассмотрим точки C_j $(j = \overline{1,4})$ как точки изоклины нуля $\sum\limits_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^iy^j = 0$ системы (45). Так как P^1 – корезидюальная точка по отношению к точкам C_j $(j = \overline{1,4})$, то существует коническое сечение L_2^2, проходящее через точки M и N изоклины нуля такие, что прямая MN пересекает изоклину нуля в точке P^1.

Рассмотрим далее C_j $(j = \overline{1,4})$ как точки изоклины бесконечности $\sum\limits_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^iy^j = 0$ системы (45). Так как P^1 — корезидюальная точка по отношению к точкам C_j $(j = \overline{1,4})$, то существует коническое сечение L_2^3, проходящее через точки R и S изоклины бесконечности такие, что прямая RS пересекает изоклину бесконечности в точке P^1.

Таким образом, P^1 принадлежит как изоклине нуля, так и изоклине бесконечности, то есть P^1 — состояние равновесия системы (45). Тем самым доказано, что P^1 — это одна из точек B_i $(i = \overline{1,5})$. Для определенности положим, что $P^1 \equiv B_5$. Если среди точек B_1, B_2, B_3, B_4 найдутся две, лежащие на одной прямой с точкой B_5, то такая прямая будет изоклиной системы (45) (см. [9]). Предположим, что никакие две точки из четырех отмеченных точек не лежат на одной прямой с точкой B_5. Рассмотрим B_5 и B_1 как точки изоклины нуля системы (45). Так как B_5 — корезидюальная точка по отношению к точкам C_j $(j = \overline{1,4})$ изоклины нуля, то прямая, проходящая через точки B_5 и B_1 пересекает изоклину нуля в некоторой точке U. Через точки U и B_1 проходит коническое сечение L_2^4, которому принадлежат точки C_j $(j = \overline{1,4})$ изоклины бесконечности, поэтому прямая B_5B_1 пересекает изоклину бесконечности в точке V. Через точки V и B_1 проходит коническое сечение L_2^5, которому принадлежат точки C_j $(j = \overline{1,4})$. Через пять точек C_j $(j = \overline{1,4})$ и B_1 проходит только одно коническое сечение [22], то есть $L_2^4 \equiv L_2^5 \equiv L_2^0$. Так как прямая B_5B_1 пересекает L_2^0 только в двух точках, то $V \equiv U \equiv T$ —

состояние равновесия системы (45).

Таким образом, на прямой B_5B_1 система (45) имеет три состояния равновесия, и согласно [7] прямая B_5B_1 — прямая изоклина системы (45). Если теперь взять точки B_5, B_r $(r \in \{2,3,4\})$ и повторить все выше проведенные рассуждения, то можно убедиться в том, что прямая B_5B_r $(r \in \{2,3,4\})$ — изоклина системы (45). По теореме 2 B_5 — простое состояние равновесия, поэтому согласно [7] на прямых изоклинах B_5B_1 и B_5B_r системы (45) индуцированы различные направления. Пусть на прямой B_5B_1 (B_5B_r) индуцировано направление $m_1(m_2)$. Применяя к системе (45) преобразование

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \overline{y}, \\ y = m_1\overline{x} + m_2\overline{y}, \end{cases} \tag{47}$$

получим систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = (\overline{a}_1\overline{x} + \overline{b}_1\overline{y} + \overline{c}_1)\overline{P}_2(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = (\overline{a}_2\overline{x} + \overline{b}_2\overline{y} + \overline{c}_2)\overline{Q}_2(\overline{x},\overline{y}), \end{cases} \tag{48}$$

где $\overline{P}_2(\overline{x},\overline{y})$, $\overline{Q}_2(\overline{x},\overline{y})$ — многочлены второй степени.

В результате преобразования (47) прямая B_5B_1 перешла в изоклину нуля $\overline{a}_2\overline{x}+\overline{b}_2\overline{y}+\overline{c}_2 = 0$, а прямая B_5B_r — в изоклину бесконечности $\overline{a}_1\overline{x}+\overline{b}_1\overline{y}+\overline{c}_1 = 0$ системы (48) имеющей вид системы (46).

Теорема доказана.

5 Сумма индексов Пуанкаре девяти состояний равновесия кубической системы

Пусть система (45) имеет в ограниченной части фазовой плоскости девять состояний равновесия. По теореме 2 все они являются простыми.

В отличие от простого седла (c) все простые состояния равновесия системы (45), имеющие индекс Пуанкаре, равный $+1$, будем называть антиседлами (a).

Для вычисления суммы индексов Пуанкаре состояний равновесия кубической системы рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (ax + by)P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (cx + dy)Q_2(x,y), \end{cases} \tag{49}$$

где $P_2(x,y) = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^iy^j$, $Q_2(x,y) = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^iy^j$, $a_{00}\cdot b_{00} \neq 0$, $ad-bc \neq 0$. Это не сужает общности рассуждений.

Так как по предположению система (49) имеет девять состояний равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, то шесть из них расположены на кривой второго порядка $P_2(x,y) = 0$, а три состояния равновесия — на прямой $ax+by = 0$. Аналогично, шесть состояний равновесия расположены на кривой второго порядка $Q_2(x,y) = 0$, а три состояния равновесия — на прямой $cx+dy = 0$.

Теорема 10 *Если система (45) имеет девять состояний равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, то индекс J Пуанкаре любого состояния равновесия этой системы на экваторе сферы Пуанкаре удовлетворяет неравенству $|J| \leq 1$.*

Доказательство. Применим к системе (49) преобразование Пуанкаре [5]:

$$\begin{cases} x = 1/z, \\ y = \dfrac{u}{z}. \end{cases}$$

В результате система (49) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = b_{20}c + (b_{11}c + b_{20}d - a_{20}a)u + b_{10}cz + P_4(u,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = -a_{20}az - Q_4(u,z), \end{cases} \tag{50}$$

где $P_4(u,z) = (b_{02}c + b_{11}d - a_{11}a - a_{20}b)u^2 + (b_{01}c + b_{10}d - a_{10}a)uz + b_{00}cz^2 + (b_{02}d - a_{02}a - a_{11}b)u^3 + (b_{01}d - a_{01}a - a_{10}b)u^2z + (b_{00}d - a_{00}a)uz^2 - a_{02}bu^4 - a_{01}bu^3z - a_{00}bu^2z^2$,

$Q_4(u,z) = (a_{11}a + a_{20}b)uz + a_{10}az^2 + (a_{02}a + a_{11}b)u^2z + (a_{01}a + a_{10}b)uz^2 + a_{00}az^3 + a_{02}bu^3z + a_{01}bu^2z^2 + a_{00}buz^3$.

Другое преобразование Пуанкаре вида

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{z}, \\ y = 1/z. \end{cases}$$

переводит систему (49) в систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = a_{02}b + (a_{20}a + a_{11}b - b_{02}d)v + a_{01}bz + \overline{P}_4(v,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = -b_{02}dz - \overline{Q}_4(v,z), \end{cases} \tag{51}$$

где $\overline{P}_4(v,z) = (-b_{02}c - b_{11}d + a_{11}a + a_{20}b)v^2 + (-b_{01}d + a_{10}b + a_{01}a)vz + a_{00}bz^2 + (-b_{20}d + a_{20}a - b_{11}c)v^3 + (-b_{10}d + a_{10}a - b_{01}c)v^2z + (-b_{00}d + a_{00}a)vz^2 - b_{20}cv^4 - b_{10}cv^3z - b_{00}cv^2z^2$,

$\overline{Q}_4(v,z) = (b_{02}c + b_{11}d)vz + b_{01}dz^2 + (b_{11}c + b_{20}d)v^2z + (b_{01}c + b_{10}d)vz^2 + b_{00}dz^3 + b_{20}cv^3z + b_{10}cv^2z^2 + b_{00}cvz^3$.

Как известно [5], состояния равновесия системы (50) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} z = 0, \\ b_{20}c + (b_{11}c + b_{20}d - a_{20}a)u + (b_{02}c + b_{11}d - a_{11}a - a_{20}b)u^2 + \\ \qquad +(b_{02}d - a_{02}a - a_{11}b)u^3 - a_{02}bu^4 = 0. \end{cases} \tag{52}$$

Пусть $(u_0; 0)$ — произвольное состояние равновесия системы (50) (u_0 — корень второго уравнения системы (52)). Совершив в системе (50) параллельный перенос

$$\begin{cases} u = \overline{u} + u_0, \\ z = \overline{z}, \end{cases}$$

и приравняв нулю линейные коэффициенты полученной системы, получаем, что

$$a = -bu_0, \quad d = \frac{u_0 b(a_{20} + a_{11}u_0 + a_{02}u_0^2)}{b_{20} + b_{11}u_0 + b_{02}u_0^2}, \quad c = du_0. \tag{53}$$

В силу (53) коэффициенты системы

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

пропорциональны. Это означает, что правые части системы (49) не являются взаимно простыми.

Согласно [5] все бесконечно удаленные состояния равновесия системы (45), кроме «концов оси oy», то есть точки $v = z = 0$ системы (51), являются состояниями равновесия системы (50). Поэтому все рассуждения, проведенные относительно системы (50), применимы и к системе (51). Таким образом, индекс состояния равновесия системы (45) на экваторе сферы Пуанкаре удовлетворяет неравенству $|J| \leq 1$. Теорема доказана.

Теорема 11 *Сумма индексов Пуанкаре девяти состояний равновесия системы (45), расположенных в ограниченной части фазовой плоскости, пробегает множество значений* $\{-3, -1, 1, 3\}$.

Доказательство. Согласно монографии [18] сумма индексов Пуанкаре всех бесконечно удаленных состояний равновесия системы (45) принадлежит множеству $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Так как индекс каждого состояния равновесия системы (45), расположенного в ограниченной части фазовой плоскости, равен 1 или -1, то принимая во внимание тот факт, что сумма индексов всех состояний равновесия системы (45), включая и бесконечно удаленные, равна 1 [10], убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y\Big(1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\Big), \\ \dfrac{dy}{dt} = x\Big(1 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}\Big) \end{cases} \tag{54}$$

имеет девять состояний равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, в том числе пять седел: $(0; 0)$, $(0; 3)$, $(0; -3)$, $(-3; 0)$, $(3; 0)$ и четыре узла $\Big(\dfrac{6}{\sqrt{3}}; \dfrac{6}{\sqrt{13}}\Big)$, $\Big(\dfrac{6}{\sqrt{13}}; -\dfrac{6}{\sqrt{13}}\Big)$, $\Big(-\dfrac{6}{\sqrt{13}}; \dfrac{6}{\sqrt{13}}\Big)$, $\Big(-\dfrac{6}{\sqrt{3}}; -\dfrac{6}{\sqrt{13}}\Big)$.

На экваторе сферы Пуанкаре данная система имеет два узла, и они расположены на концах инвариантных прямых $y - x = 0$ и $y + x = 0$. Фазовый портрет системы изображен на рис. 1.

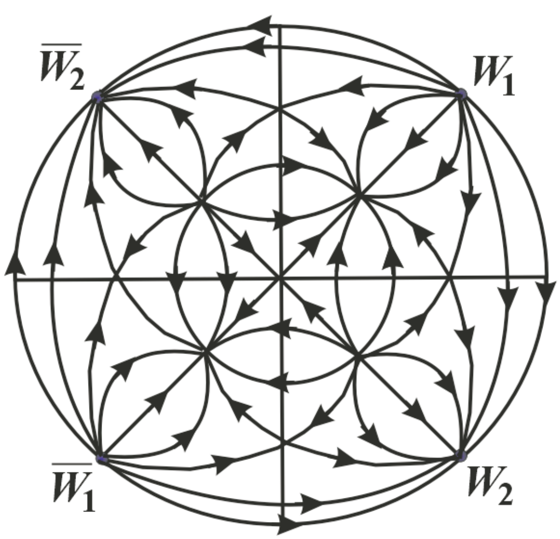

Рис. 1: Фазовый портрет системы из примера 2 на сфере Пуанкаре. Система (54) имеет пять седел, четыре узла в конечной части фазовой плоскости и два простых узла на бесконечности

Пример 3. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y\Big(1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\Big), \\ \dfrac{dy}{dt} = x\Big(1 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}\Big) \end{cases} \tag{55}$$

имеет в ограниченной части фазовой плоскости пять центров:$A(-3;0)$, $O(0;0)$, $B(3;0)$, $C(0;3)$, $D(0;-3)$ и четыре седла $E\Big(-\dfrac{6}{\sqrt{13}};\dfrac{6}{\sqrt{13}}\Big)$, $F\Big(\dfrac{6}{\sqrt{13}};\dfrac{6}{\sqrt{13}}\Big)$, $G\Big(-\dfrac{6}{\sqrt{3}};-\dfrac{6}{\sqrt{13}}\Big)$, $H\Big(\dfrac{6}{\sqrt{13}};-\dfrac{6}{\sqrt{13}}\Big)$.

На бесконечности система не имеет состояний равновесия. Фазовый портрет системы изображен на рис. 2.

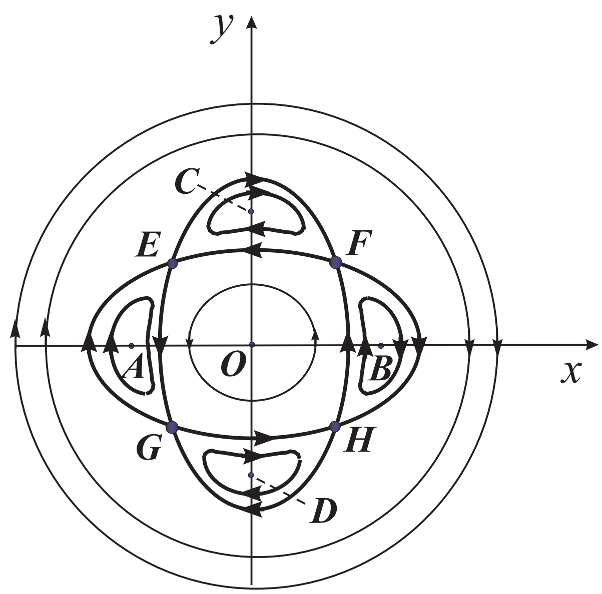

Рис. 2: Фазовый портрет системы из примера 3 на сфере Пуанкаре. Система (55) имеет пять центров и четыре седла в конечной части фазовой плоскости, но не имеет состояний равновесия на бесконечности

Пример 4. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 59x + 108x^2 - 144xy - 36x^3 + 36xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -23y - 108xy + 40y^2 + 36x^2y - 4y^3 \end{cases} \tag{56}$$

имеет девять состояний равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, в том числе: $O(0;0)$, $A\Big(0;\dfrac{10+\sqrt{77}}{2}\Big)$, $B\Big(0;\dfrac{10-\sqrt{77}}{2}\Big)$, $D\Big(\dfrac{9+2\sqrt{35}}{6};0\Big)$,

$C\Big(\dfrac{9-2\sqrt{35}}{6};0\Big)$, $S(2,28854\ldots;2,85610\ldots)$ — седла, $F(-0,07113\ldots;0,39389\ldots)$, $G(3,07113\ldots;0,39389\ldots)$, $H(0,71145\ldots;2,85610\ldots)$ — антиседла.

На экваторе сферы Пуанкаре система имеет четыре простых узла: $W_1(u=0;z=0)$, $W_2(u=3\sqrt{0,2};z=0)$, $W_3(u=-3\sqrt{0,2};z=0)$, $W_4(v=0;z=0)$.

Замечание. Если правую часть одного из уравнений системы (51) умножить на -1, то в ограниченной части фазовой плоскости все антиседла станут седлами, а все седла — антиседлами. При этом на экваторе сферы Пуанкаре система будет иметь два топологических, по терминологии [5], седла.

6 Открытые вопросы

Рассмотренные в данной работе задачи отвечают не на все вопросы. В частности, отметим, что:

1) открытым остается вопрос: может ли иметь кубическая система предельные циклы при наличии у нее четырех центров;

2) представляет интерес задача исследования кубической системы, имеющей в ограниченной части фазовой плоскости девять состояний равновесия, на ацикличность.

Список литературы

[1] *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. Изд. 2. Москва, URSS, 2003. 208 с.

[2] *Понтрягин Л. С.* Дифференциальные уравнения и их приложения. Москва, URSS, 2018. 208 с.

[3] *Baker G.* Differential Equations as Models in Science and Engineering. Singapore, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2016. 392 p.

[4] *Meiss J. D.* Differential Dynamical Systems. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia Publisher, 2017. 392 p.

[5] *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. Москва, Наука, 1966. 568 с.

[6] *Уокер Р.* Алгебраические кривые. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1952. 236 с.

[7] *Ушхо Д. С.* Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп, Изд-во АГУ, 2007. 93 с.

[8] *Ушхо Д. С.* Новое доказательство теоремы об оценке числа особых точек второй группы кубической дифференциальной системы. Вестник АГУ. Сер. Естественно-математические и технические науки, 2007, №4 (28). С. 14–19.

[9] *Смогоржевский А. С., Столова Е. С.* Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. Москва, Физматгиз, 1961. 263 с.

[10] *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Москва, Ленинград, ОГИЗ, ГИТЛ, 1947. 392 с.

[11] *Берлинский А. Н.* О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения. Известия высших учебных заведений. Сер. Математика, 1960, №15. С. 3–18.

[12] *Тун-Цзинь-Чжу.* Расположение предельных циклов системы $\dfrac{dx}{dt} = X_2(x, y)$, $\dfrac{dy}{dt} = Y_2(x, y)$. Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика, 1962, том 6, №6. С. 150–168.

[13] *Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, Изд-во БГУ, 1982. 208 с.

[14] *Лукашевич Н. А.* Интегральные кривые одного дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения, 1965, том 1, №1. С. 82–95.

[15] *Долов М. В.* О предельных циклах в случае центра. Дифференциальные уравнения, 1972, том 8, №9. С. 1691–1692.

[16] *Ушхо Д. С.* О сосуществовании предельных циклов и особых точек типа «центр» кубических дифференциальных систем. Дифференциальные уравнения, 1995, том 31, №1. С. 173–174.

[17] *Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С.* Оси симметрии полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2010, том 10, вып. 2. С. 41–49.

[18] *Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С.* Полиномиальные векторные поля на плоскости. Избранные вопросы. Майкоп, Изд-во АГУ, 2012. 326 с.

[19] *Ушхо Д. С.* О числе особых точек второй группы кубической системы. Дифференциальные уравнения, 1993, том 29, №2. С. 240–245.

[20] *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. Москва, Наука, 1967. 488 с.

[21] *Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С.* К вопросу о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2010, №1. С. 156-162.

[22] *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. Москва, Наука, 1968. 912 с.

Equilibrium states and adjacent questons of the plane polynomial vector fields theory

V. B. Tlyachev, A. D. Ushho, D. S. Ushho

Adygea State University

stvb2006@rambler.ru, uschho76@rambler.ru damirubych@mail.ru

Abstract. We prove general theorems about of the equilibrium states of autonomous dynamical systems, the right-hand sides of which are polynomials of n–th order. In particular, it is shown that if a system, the right parts of which are mutually simple polynomials, has n^2 equilibrium states, then all of them are simple. Moreover, under certain conditions, the Poincare index J of any equilibrium state satisfies the inequality $|J| \leq n-1$. The conditions for the absence of limit cycles of a cubic system with singular points of the type «center» are considered. With the help of the canonical form of the cubic system, which has the maximum number of equilibrium states, the Poincare indices are determined, which make it possible to determine their types. The examples confirming the propositions are given.

Keywords: polynomial vector field, cubic system, isocline, Poincare index, equilibrium states, center-focus problem, Poincare sphere.