*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N. 3, 2025*
*Электронный журнал,*
*рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010*
*ISSN 1817-2172*

*http://diffjournal.spbu.ru/*
*e-mail: jodiff@mail.ru*

*Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*

# Локальная топологическая эквивалентность существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Ю.А. Ильин, К.В. Мартынов
Санкт-Петербургский государственный университет
iljin_y_a@mail.ru, martynovkiry@gmail.com.

**Аннотация.** В статье рассматриваются система нелинейных однородных дифференциальных уравнений и ее возмущение слагаемыми более высокого порядка малости. Ищутся условия, при которых исходная система и её возмущение будут топологически локально эквивалентными в окрестности нулевой точки покоя. В основу статьи положен подход, предложенный Э. Рейзинем в 1971 году. Однако вместо использованного им коэффициентного условия Важевского, авторы применяют логарифмические нормы Лозинского, что позволило существенно расширить класс эквивалентных систем. Нормы Лозинского также являются коэффициентным условием, что особенно важно для прикладных задач.

**Ключевые слова:** топологическая эквивалентность, существенно нелинейные системы, логарифмическая норма

## 1. Постановка задачи

Одной из основных задач теории динамических систем является их классификация. За основу классификаций можно принимать разные отношения эквивалентности, например, можно рассматривать орбитальную топологическую эквивалентность, которая предполагает наличие гомеоморфизма, переводящего траектории в траектории, или топологическую эквивалентность, при которой гомеоморфизм переводит не только траектории в траектории, но и сохраняет время, или же гладкую эквивалентность, суть которой заключается в существовании диффеоморфизма, переводящего траектории в траектории. К сожалению, у каждого отношения эквивалентности есть свои достоинства и свои недостатки. Идеального, удобного во всех смыслах, отношения не существует, поэтому нужное отношение эквивалентности выбирается в зависимости от поставленных задач. В настоящее время самым распространённым является отношение топологической эквивалентности. Наличие топологической эквивалентности позволяет судить о качественном поведении решений возмущённой системы по исходной однородной системе, которая, в свою очередь, является более простым объектом, так как существуют определённые методы изучения таких систем.

Очень ценно, особенно для приложений, когда накладываемые на систему условия носят коэффициентный характер. Мы используем логарифмические нормы, которые были введены более 60 лет назад в работах [1] и [2], и по сей день успешно применяются к нелинейным системам (см., например, [3], [4] и настоящую работу). В каком-то смысле, условия на логарифмические нормы являются аналогами условий, накладываемых на собственные числа систем с ненулевым линейным приближением.

Приведём некоторые определения и утверждения, которые будут использоваться в дальнейшем.

**Определение 1** *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — квадратная матрица, $\|\cdot\|$ — некоторая векторная норма пространства $\mathbb{R}^m$. Верхней логарифмической нормой матрицы $A$, порождаемой данной векторной нормой $\|\cdot\|$, называется предел*

$$\gamma^*(A) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\|E+hA\|-1}{h},$$

*где $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — единичная матрица.*

**Определение 2** *Нижней логарифмической нормой матрицы $A$, порождаемой данной векторной нормой $\|\cdot\|$, называется предел*

$$\gamma_*(A) = \lim_{h\to 0^+} \frac{glb_{\|\cdot\|}(E+hA)-1}{h},$$

*где $glb_{\|\cdot\|}(A) \stackrel{def}{=} \min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ — нижняя грань матрицы $A$.*

Отметим основные свойства логарифмических норм (доказательства которых можно найти в [1]):

1. $\gamma^*(A)$ и $\gamma_*(A)$ корректно определены для всякой матрицы $A$;
2. $\gamma^*(-A) = -\gamma_*(A)$;
3. $\gamma_*(A) \leqslant \gamma^*(A)$;
4. $\gamma^*(A+B) \leqslant \gamma^*(A) + \gamma^*(B)$;
5. $\gamma^*(\lambda A) = \lambda\gamma^*(A),\ \lambda \geqslant 0$;
6. $|\gamma^*(A)| \leqslant \|A\|$;
7. $|\gamma^*(A) - \gamma^*(B)| \leqslant \|A - B\|$;
8. $\gamma^*(A)$ является непрерывной функцией от $A$.

**Определение 3** *Системы $\dot{x} = F(x)$ и $\dot{y} = G(y)$, удовлетворяющие условиям существования и единственности решений в $\mathbb{R}^m$, называются топологически эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, что для всех $x \in \mathbb{R}^m$ равенство*

$$h(\phi(t,x)) = \psi(t, h(x))$$

*выполнено для всех $t$, при которых определены $\phi(t,x)$ и $\psi(t,h(x))$, где $\phi(t,x)$ — решение $\dot{x} = F(x)$ с начальными данными $\phi(0,x) = x$, а $\psi(t,y)$ — решение $\dot{y} = G(y)$ с начальными данными $\psi(0,y) = y$.*

**Определение 4** *Системы $\dot{x} = F(x)$ и $\dot{y} = G(y)$, удовлетворяющие условиям существования и единственности решений в некоторых окрестностях начала координат в $\mathbb{R}^m$, называются локально топологически эквивалентными в начале координат, если существуют такие окрестности $U, V$ начала координат, а также гомеоморфизм $h : U \to V$, что для всех $x \in U$ равенство*

$$h(\phi(t,x)) = \psi(t, h(x))$$

*выполнено для всех $t$, при которых определены $\phi(t,x)$ и $\psi(t,h(x))$ и к тому же $\phi(t,x) \in U$, $\psi(t,h(x)) \in V$, где $\phi(t,x)$ — решение $\dot{x} = F(x)$ с начальными данными $\phi(0,x) = x$, а $\psi(t,y)$ — решение $\dot{y} = G(y)$ с начальными данными $\psi(0,y) = y$.*

Приведём без доказательства утверждение (см. [3]), результат которого будет активно использоваться в данной работе. Символом $\frac{d_+}{dt}$ мы будем обозначать правостороннюю производную.

**Утверждение 1** *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = F(t, x)x + f(t, x),$$

*где $F$ — непрерывная $(m \times m)$-матричная функция, а $f$ — непрерывная векторная функция. Тогда если $x(t)$ — решение данной системы, то для произвольной нормы $\|\cdot\|$ пространства $\mathbb{R}^m$ выполнено соотношение:*

$$\gamma_*\big(F(t, x(t))\big)\|x(t)\| - \|f(t, x(t))\| \leqslant \frac{d_+\|x(t)\|}{dt} \leqslant \\ \leqslant \gamma^*\big(F(t, x(t))\big)\|x(t)\| + \|f(t, x(t))\|,$$

*где $\gamma_*$ и $\gamma^*$ — соответственно нижняя и верхняя логарифмические нормы, порождённые данной нормой $\|\cdot\|$.*

В данной статье мы рассматриваем следующую однородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x) \tag{1}$$

вместе с её возмущением

$$\dot{x} = P(x) + p(x), \tag{2}$$

где $P, p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $P \in C^2(\mathbb{R}^m)$.

Прежде всего заметим, что справедлива следующая лемма (её доказательство можно найти в [5, с. 168]).

**Утверждение 2** *Система дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = P(x) + \overline{p}(x)$$

*локально топологически эквивалентна в начале координат системе*

$$\dot{x} = P(x) + p(x),$$

*где $P, p, \overline{p} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ таковы, что обе системы удовлетворяют условиям существования и единственности решений в некоторой окрестности начала координат, $P(0) = \overline{p}(0) = 0$, причём*

$$p(x) = \Theta(\|x\|)\overline{p}(x),$$

*а функция $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^\infty, 0 \leqslant \Theta(h) \leqslant 1$, $\Theta(h) = 0$ при $h \geqslant \eta$, $\Theta(h) = 1$ при $h \leqslant \frac{\eta}{3}$.*

Таким образом, возмущение $p(x)$ всегда можно считать финитным, что и будем предполагать далее.

Будем также считать, что существует такое $q \geqslant 2$, что для всех $x \in \mathbb{R}^m$ и $\lambda \geqslant 0$ выполнено

$$P(\lambda x) = \lambda^q P(x), \tag{3}$$

то есть элементы вектор-функции $P$ являются неотрицательно однородными функциями порядка $q$.

Предположим ещё, что для всех $x^*, x$ из достаточно малой окрестности начала координат имеет место неравенство

$$\|p(x^*) - p(x)\| \leqslant \max\left(\|x^*\|^{q+\alpha-1}, \|x\|^{q+\alpha-1}\right)\|x^* - x\| \tag{4}$$

при некотором $\alpha > 0$. Таким образом, согласно теореме Пикара из общего курса дифференциальных уравнений, системы (1) и (2) удовлетворяют условиям существования и единственности решений в некоторой окрестности начала координат.

Считаем, что $P(0) = p(0) = 0$, что означает наличие в начале координат точки покоя обеих систем.

Также будем считать, что (1) распадается на две подсистемы

$$\dot{x}_1 = P_1(x_1), \tag{5}$$

$$\dot{x}_2 = P_2(x_2), \tag{6}$$

где $P_i : \mathbb{R}^{m_i} \to \mathbb{R}^{m_i},\ i = 1, 2,\ m_1, m_2 > 0,\ m_1 + m_2 = m.$

Также предполагаем, что в пространствах $\mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$ существуют такие нормы $\|x_1\|$ и $\|x_2\|$, что для порождаемых ими соответственно верхних $\gamma_1^*$ и $\gamma_2^*$ и нижних $\gamma_{1*}$ и $\gamma_{2*}$ логарифмических норм и некоторых положительных постоянных $c_1, \widetilde{c_1}, c_2, \widetilde{c_2}$ выполнены неравенства:

$$\begin{gathered} \gamma_1^*\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1)\right) \leqslant -c_1\|x_1\|^{q-1},\ \gamma_{1*}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1)\right) \geqslant -\widetilde{c_1}\|x_1\|^{q-1}, \\ \gamma_2^*\left(\frac{\partial P_2}{\partial x_2}(x_2)\right) \leqslant \widetilde{c_2}\|x_2\|^{q-1},\ \gamma_{2*}\left(\frac{\partial P_2}{\partial x_2}(x_2)\right) \geqslant c_2\|x_2\|^{q-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

В монографии [5, с. 182] доказывается следующая теорема.

**Теорема 1** *Пусть выполнены условия* (1) – (6) *с* $\alpha = 1$ *в* (4). *Будем считать, что все решения* (5) *стремятся к началу координат при* $t \to +\infty$, *а все решения* (6) *стремятся к началу координат при* $t \to -\infty$. *Наконец, предположим, что все собственные числа матрицы*

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x_i) + \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x_i)\right)^T$$

*при* $\|x_i\| > 0$ *имеют отрицательные вещественные части при* $i = 1$ *и положительные вещественные части при* $i = 2$. *Тогда системы* (1) *и* (2) *локально топологически эквивалентны в начале координат.*

Присутствующее в этой теореме условие на вещественные части собственных чисел симметризованных матриц Якоби известно в литературе как условие Важевского. Также известно, что условие Важевского является частным случаем условия на логарифмические нормы, а именно, когда норма является евклидовой. Наша цель — обобщить этот результат на случай произвольной логарифмической нормы.

## *2. Вспомогательные утверждения*

Через $\psi_1(t, y_1)$ и $\psi_2(t, y_2)$ обозначим соответственно решения систем (5) и (6) с начальными данными $\psi_i(0, y_i) = y_i$. Докажем следующие утверждения.

**Утверждение 3** *Для всех* $t \geqslant 0$ *выполнено*

$$\frac{\|y_1\|}{\left(1 + \frac{q-1}{q}\widetilde{c_1}\|y_1\|^{q-1}t\right)^{\frac{1}{q-1}}} \leqslant \|\psi_1(t, y_1)\| \leqslant \frac{\|y_1\|}{\left(1 + \frac{q-1}{q}c_1\|y_1\|^{q-1}t\right)^{\frac{1}{q-1}}}. \tag{8}$$

**Доказательство утверждения 3.** Для $y_1 = 0$ данное утверждение очевидно, поскольку 0 является точкой покоя системы (5), поэтому далее, не умаляя общности, будем считать, что $y_1 \neq 0$. Тогда в силу единственности решений $\psi_1(t, y_1) \neq 0$ для любого $t$.

Решение $\psi_1(t, y_1)$ удовлетворяет системе $\dot{x}_1 = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1)\, x_1$, так как

$$P_1(x_1) = P_1(x_1) - P_1(0) = \left(\int_0^1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(\theta x_1) d\theta\right) x_1 = \left(\int_0^1 \theta^{q-1} \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1) d\theta\right) x_1 = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1)\, x_1.$$

Из этого равенства и утверждения 1 следует, что

$$\gamma_*\left(\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1)\big)\right)\|\psi_1(t, y_1)\| \leqslant \frac{d_+\|\psi_1(t, y_1)\|}{dt} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma^*\left(\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1)\big)\right)\|\psi_1(t, y_1)\|. \tag{9}$$

В силу неравенств (7) и (9) получим, что

$$-\frac{\widetilde{c_1}}{q}\cdot\|\psi_1(t,y_1)\|^q \leqslant \frac{d_+\|\psi_1(t,y_1)\|}{dt} \leqslant -\frac{c_1}{q}\cdot\|\psi_1(t,y_1)\|^q. \tag{10}$$

Решение задачи Коши $\dot{u} = -au^q$, $u(0) = u_0$, $q > 1$ имеет вид:

$$u(t) = \frac{u_0}{\big(1 + (q-1)au_0^{q-1}t\big)^{\frac{1}{q-1}}}.$$

Учитывая (10), по теореме сравнения (см. [6, с. 40]) получим искомые оценки. Утверждение доказано.

Аналогичный результат справедлив и для решений системы (6).

**Утверждение 4** *Для всех $t \leqslant 0$ выполнено*

$$\frac{\|y_2\|}{\big(1 + \frac{q-1}{q}\widetilde{c_2}\|y_2\|^{q-1}|t|\big)^{\frac{1}{q-1}}} \leqslant \|\psi_2(t,y_2)\| \leqslant \frac{\|y_2\|}{\big(1 + \frac{q-1}{q}c_2\|y_2\|^{q-1}|t|\big)^{\frac{1}{q-1}}}.$$

**Доказательство утверждения 4.** В силу (7) замена $t \mapsto -t$ сводит систему (6) к случаю системы (5), поэтому данное утверждение есть следствие предыдущего.

**Утверждение 5** *Пусть* $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)$ *— $j$-ый столбец матрицы* $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(t,y_1)$*, тогда для любого $t \geqslant 0$ выполнено*

$$\frac{1}{\big(1 + \frac{q-1}{q}c_1\|y_1\|^{q-1}t\big)^{\frac{q\widetilde{c_1}}{(q-1)c_1}}} \leqslant \left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\| \leqslant \frac{1}{\big(1 + \frac{q-1}{q}\widetilde{c_1}\|y_1\|^{q-1}t\big)^{\frac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}}} \tag{11}$$

**Доказательство утверждения 5.** Из общего курса дифференциальных уравнений известно, что $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(t,y_1)$ является фундаментальной матрицей системы в вариациях

$$\dot{z} = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t,y_1)\big)z,\;\; \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(0,y_1) = E, \tag{12}$$

где $E$ есть единичная $(m_1 \times m_1)$-матрица.

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right) = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t,y_1)\big)\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1),$$

причём $\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1) \neq 0$ для любых $t$ и $y_1$.

Из этого следует, что

$$\gamma_*\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t,y_1)\big)\right)\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\| \leqslant \frac{d_+}{dt}\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\| \leqslant \\ \leqslant \gamma^*\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t,y_1)\big)\right)\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|. \quad (13)$$

В силу неравенств (7) и (13), получим, что

$$-\widetilde{c_1}\cdot\|\psi_1(t,y_1)\|^{q-1} \leqslant \frac{\dfrac{d_+}{dt}\left\|\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|}{\left\|\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|} \leqslant -c_1\cdot\|\psi_1(t,y_1)\|^{q-1}. \quad (14)$$

Заметим, что

$$\frac{\dfrac{d_+}{dt}\left\|\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|}{\left\|\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|} = \frac{d_+}{dt}\left(\ln\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|\right). \quad (15)$$

По утверждению 3 верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} -c_1\cdot\|\psi_1(t,y_1)\|^{q-1} &\leqslant -c_1\cdot\frac{\|y_1\|^{q-1}}{1+\frac{q-1}{q}\widetilde{c_1}\|y_1\|^{q-1}t}, \\ -\widetilde{c_1}\cdot\|\psi_1(t,y_1)\|^{q-1} &\geqslant -\widetilde{c_1}\cdot\frac{\|y_1\|^{q-1}}{1+\frac{q-1}{q}c_1\|y_1\|^{q-1}t}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14), получим, что

$$-\widetilde{c_1}\cdot\frac{\|y_1\|^{q-1}}{\big(1+\frac{q-1}{q}c_1\|y_1\|^{q-1}t\big)} \leqslant \frac{d_+}{dt}\left(\ln\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|\right) \leqslant \\ \leqslant -c_1\cdot\frac{\|y_1\|^{q-1}}{\big(1+\frac{q-1}{q}\widetilde{c_1}\|y_1\|^{q-1}t\big)}. \quad (17)$$

Решение задачи Коши $\dot{u} = -a\cdot\dfrac{k}{1+bkt}$, $u(0) = 0$, $b > 0$, $k \geqslant 0$ имеет вид:

$$u(t) = -\frac{a}{b}\ln\big(1+bkt\big) = \ln\frac{1}{\big(1+bkt\big)^{\frac{a}{b}}}.$$

Тогда, интегрируя (17) с помощью теоремы сравнения (см. [6, с. 40]), получим, что выполнены следующие неравенства:

$$\ln\left(\frac{1}{\left(1+\frac{q-1}{q}c_1\|y_1\|^{q-1}t\right)^{\frac{q\widetilde{c_1}}{(q-1)c_1}}}\right) \leqslant \ln\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \ln\left(\frac{1}{\left(1+\frac{q-1}{q}\widetilde{c_1}\|y_1\|^{q-1}t\right)^{\frac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}}}\right),$$

экспоненциируя которые получим желаемую оценку. Утверждение доказано.

Аналогичное утверждение верно и для решений системы (6).

**Утверждение 6** *Пусть* $\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_2^j}(t,y_2)$ *— $j$-ый столбец матрицы* $\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_2}(t,y_2)$, *тогда для любого $t\leqslant 0$ выполнено*

$$\frac{1}{\left(1+\frac{q-1}{q}c_2\|y_2\|^{q-1}|t|\right)^{\frac{q\widetilde{c_2}}{(q-1)c_2}}} \leqslant \left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial y_2^j}(t,y_2)\right\| \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{q-1}{q}\widetilde{c_2}\|y_2\|^{q-1}|t|\right)^{\frac{qc_2}{(q-1)\widetilde{c_2}}}}$$

**Доказательство утверждения 6.** Замена $t\mapsto -t$ сводит систему (6) к системе (5), поэтому данное утверждение есть следствие предыдущего.

**Утверждение 7** *Существует константа $a_1>0$ такая, что для любых $x_1^*$, $x_1$ выполнено*

$$\left\|\frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1^*)-\frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1)\right\| \leqslant a_1\cdot\max\left(\|x_1^*\|^{q-2},\ \|x_1\|^{q-2}\right)\|x_1^*-x_1\|. \qquad (18)$$

**Доказательство утверждения 7.** Так как любые две нормы в $\mathbb{R}^{m_1}$ эквиваленты, то достаточно доказать данное неравенство для евклидовой нормы.

Обозначим элемент $i$-ой строки $j$-ого столбца матрицы $\dfrac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1)$ как $f_{ij}(x_1)$, где $i,j\in[1:m_1]$. $i$-ую строку этой матрицы обозначим через $f_i(x_1)$.

Тогда

$$\left\|\frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1^*) - \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1)\right\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_1}\big(f_{ij}(x_1^*) - f_{ij}(x_1)\big)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m_1}\big\|f_i(x_1^*) - f_i(x_1)\big\|^2}. \quad (19)$$

По теореме Лагранжа для любого $i \in [1 : m_1]$ существует $\theta_i = \theta_i(x_1^*, x_1) \in (0;1)$ такое, что выполнено

$$\big\|f_i(x_1^*) - f_i(x_1)\big\| \leqslant \left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\big(\overline{x_{1i}}\big)\right\|\cdot\|x_1^* - x_1\|,$$

где $\overline{x_{1i}} = \theta_i x_1^* + (1-\theta_i)x_1$.

Из однородности матрицы Якоби следует, что

$$\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\big(\overline{x_{1i}}\big)\right\| = \begin{cases} 0, & \|\overline{x_{1i}}\| = 0 \\ \|\overline{x_{1i}}\|^{q-2}\left\|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}\left(\dfrac{\overline{x_{1i}}}{\|\overline{x_{1i}}\|}\right)\right\|, & \|\overline{x_{1i}}\| \neq 0. \end{cases}$$ Очевидно, что

$$\|\overline{x_{1i}}\|^{q-2} \leqslant \max\Big(\|x_1^*\|^{q-2},\ \|x_1\|^{q-2}\Big).$$

Используя последние оценки, получим

$$\big\|f_i(x_1^*) - f_i(x_1)\big\| \leqslant \max\Big(\|x_1^*\|^{q-2},\ \|x_1\|^{q-2}\Big)\cdot c_i\cdot\|x_1^* - x_1\|,$$

где $c_i = \max\limits_{\|y_1\|=1}\left\|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(y_1)\right\|$.

Подставляя это в неравенство (19), имеем:

$$\left\|\frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1^*) - \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x_1)\right\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m_1} c_i^2\Big(\max\Big(\|x_1^*\|^{q-2},\ \|x_1\|^{q-2}\Big)\Big)^2\|x_1^* - x_1\|^2} =$$

$$= a_1\cdot\max\Big(\|x_1^*\|^{q-2},\ \|x_1\|^{q-2}\Big)\|x_1^* - x_1\|, \text{ где } a_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m_1} c_i^2}.$$

Утверждение доказано.

Аналогичное неравенство выполнено и для системы (6).

**Утверждение 8** *Существует константа* $a_2 > 0$ *такая, что для любых* $x_2^*$, $x_2$ *выполнено*

$$\left\|\frac{\partial P_2}{\partial x_2}(x_2^*) - \frac{\partial P_2}{\partial x_2}(x_2)\right\| \leqslant a_2 \cdot \max\Big(\|x_2^*\|^{q-2},\ \|x_2\|^{q-2}\Big)\|x_2^* - x_2\|.$$

**Доказательство утверждения 8.** Доказательство данной оценки полностью повторяет доказательство предыдущего утверждения.

**Утверждение 9** *Существует такая положительная константа* $A_1$, *что при* $t \geqslant 0$ *и* $\|y_1^*\| \geqslant \|y_1\|$ *верна оценка*

$$\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1^*) - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1)\right\| \leqslant$$

$$A_1\|y_1^*\|^{q-2} t \max\Big(1, B\|y_1^*\|^2 t^{\frac{2}{q-1}}\Big)\left(1 + \frac{q-1}{q}\widetilde{c_1}\|y_1^*\|^{q-1} t\right)^{-\frac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}}\|y_1^* - y_1\| \quad (20)$$

**Доказательство утверждения 9.** Известно (см. доказательство утверждения 5), что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1)\right) = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1)\big) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1^*) - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1)\right) =$$

$$= \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1^*)\big) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1^*) - \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1)\big) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1) =$$

$$= \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1^*)\big) \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1^*) - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1)\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1^*)\big) - \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1)\big)\right) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{d_+}{dt}\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1^*) - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1)\right\| \leqslant \gamma^*\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1^*)\big)\right)\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1^*) - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1)\right\| +$$

$$+ \left\|\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1^*)\big) - \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t, y_1)\big)\right\| \cdot \left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t, y_1)\right\|.$$

Используя утверждение 7, оценим второе слагаемое из правой части последнего неравенства:

$$\left\|\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t,y_1^*)\big)-\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t,y_1)\big)\right\|\cdot\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant a_1\cdot\max\Big(\|\psi_1(t,y_1^*)\|^{q-2},\,\|\psi_1(t,y_1)\|^{q-2}\Big)\|\psi_1(t,y_1^*)-\psi_1(t,y_1)\|\cdot\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|.$$

Обозначим правую часть этого неравенства как $v(t)$.

По предположению (7) знаем, что

$$\gamma^*\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\big(\psi_1(t,y_1^*)\big)\right)\leqslant -c_1\big\|\psi_1(t,y_1^*)\big\|^{q-1}.$$

Правую часть данного неравенства обозначим через $r(t)$.

Определим $z(t)$ следующим образом:

$$z(t)=\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1^*)-\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|.$$

В итоге получим, что

$$\frac{d_+}{dt}z(t)\leqslant r(t)z(t)+v(t),\ z(0)=0.$$

Решение задачи Коши $\dot{u}=r(t)u+v(t),\ u(0)=0$ имеет вид:

$$u(t)=exp\left(\int\limits_0^t r(\tau)\,d\tau\right)\cdot\int\limits_0^t v(\tau)\,exp\left(-\int\limits_0^\tau r(s)\,ds\right)d\tau.$$

Тогда согласно теореме сравнения (см. [6, с. 40]) верна оценка

$$z(t)\leqslant exp\left(-c_1\int\limits_0^t\big\|\psi_1(\tau,y_1^*)\big\|^{q-1}d\tau\right)\cdot$$
$$\cdot\int\limits_0^t v(\tau)\,exp\left(c_1\int\limits_0^\tau\big\|\psi_1(s,y_1^*)\big\|^{q-1}ds\right)d\tau. \quad (21)$$

Оценим первый множитель из правой части неравенства (21), интегрируя первое неравенство в (16):

$$exp\left(-c_1\int\limits_0^t\big\|\psi_1(\tau,y_1^*)\big\|^{q-1}d\tau\right)\leqslant\left(1+\frac{q-1}{q}\widetilde{c_1}\|y_1^*\|^{q-1}t\right)^{-\dfrac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}}.$$

Теперь оценим экспоненту, стоящую во втором интеграле неравенства (21), используя второе неравенство в (8):

$$exp\left(c_1\int\limits_0^\tau \left\|\psi_1(s,y_1^*)\right\|^{q-1}ds\right)\leqslant\left(1+\frac{q-1}{q}c_1\|y_1^*\|^{q-1}t\right)^{\dfrac{q}{q-1}}.$$

Получим оценки на все множители функции $v(\tau)$:

а) Заметим, что нужная оценка выполнена, если

$$\max\Big(\|\psi_1(\tau,y_1^*)\|^{q-2},\ \|\psi_1(\tau,y_1)\|^{q-2}\Big)=0.$$

Последнее равенство равносильно тому, что $y_1^*=y_1=0$ (этот случай тривиален), поэтому далее будем предполагать, что

$$\max\Big(\|\psi_1(\tau,y_1^*)\|^{q-2},\ \|\psi_1(\tau,y_1)\|^{q-2}\Big)>0.$$

Тогда хотя бы один из $y_1$ или $y_1^*$ не равен нулю. Пусть это будет $y_1^*$. Не умаляя общности, будем считать, что $\|y_1^*\|\geqslant\|y_1\|$. Пусть далее $\|y_1\|\neq 0$ (случай, когда $\|y_1\|=0$, очевиден).

Согласно утверждению 3 имеем:

$$\|\psi_1(\tau,y_1)\|\leqslant\frac{\|y_1\|}{\left(1+\frac{q-1}{q}c_1\|y_1\|^{q-1}\tau\right)^{\frac{1}{q-1}}}=\frac{1}{\left(\|y_1\|^{1-q}+\frac{q-1}{q}c_1\tau\right)^{\frac{1}{q-1}}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\left(\|y_1^*\|^{1-q}+\frac{q-1}{q}c_1\tau\right)^{\frac{1}{q-1}}}=\frac{\|y_1^*\|}{\left(1+\frac{q-1}{q}c_1\|y_1^*\|^{q-1}\tau\right)^{\frac{1}{q-1}}}.$$

По утверждению 3 также имеем:

$$\|\psi_1(\tau,y_1^*)\|\leqslant\frac{\|y_1^*\|}{\left(1+\frac{q-1}{q}c_1\|y_1^*\|^{q-1}\tau\right)^{\frac{1}{q-1}}},$$

а значит верна оценка

$$\max\Big(\|\psi_1(t,y_1^*)\|^{q-2},\ \|\psi_1(t,y_1)\|^{q-2}\Big)\leqslant\frac{\|y_1^*\|^{q-2}}{\left(1+\frac{q-1}{q}c_1\|y_1^*\|^{q-1}\tau\right)^{\frac{q-2}{q-1}}}.$$

б) По теореме Лагранжа существует $\theta=\theta(\tau)\in(0;1)$ такое, что выполнено

$$\|\psi_1(t,y_1^*)-\psi_1(t,y_1)\|\leqslant\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(\tau,y_1^{**})\right\|\cdot\|y_1^*-y_1\|,$$

где $y_1^{**} = \theta y_1^* + (1-\theta) y_1$.

Из утверждения 5 следует, что

$$\left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(\tau, y_1^{**}) \right\| \leqslant \left(1 + \frac{q-1}{q} \widetilde{c_1} \|y_1^{**}\|^{q-1} \tau\right)^{-\dfrac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}}.$$

Также согласно утверждению 5 имеем:

$$\left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(\tau, y_1) \right\| \leqslant \left(1 + \frac{q-1}{q} \widetilde{c_1} \|y_1\|^{q-1} \tau\right)^{-\dfrac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}}.$$

Таким образом, неравенство (21) можно переписать в виде

$$z(t) \leqslant a \cdot \|y_1^* - y_1\| \left(1 + \frac{q-1}{q} \widetilde{c_1} \|y_1^*\|^{q-1} t\right)^{-\dfrac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}} \cdot$$
$$\cdot \int\limits_0^t \|y_1^*\|^{q-2} \left(1 + \frac{q-1}{q} c_1 \|y_1^*\|^{q-1} \tau\right)^{\dfrac{2}{q-1}} \left(1 + \frac{q-1}{q} \widetilde{c_1} \|y_1^{**}\|^{q-1} \tau\right)^{-\dfrac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}} \cdot$$
$$\cdot \left(1 + \frac{q-1}{q} \widetilde{c_1} \|y_1\|^{q-1} \tau\right)^{-\dfrac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}} d\tau. \quad (22)$$

Учитывая, что последние два множителя в интеграле не превосходят единицы, сам интеграл можно оценить сверху выражением

$$\int\limits_0^t \|y_1^*\|^{q-2} \left(1 + \frac{q-1}{q} c_1 \|y_1^*\|^{q-1} \tau\right)^{\dfrac{2}{q-1}} d\tau =$$
$$= \frac{q-1}{q+1} \cdot \frac{1}{\|y_1^*\|} \cdot \left[ \left(1 + \frac{q-1}{q} c_1 \|y_1^*\|^{q-1} t\right)^{\dfrac{q+1}{q-1}} - 1 \right].$$

Нетрудно проверить, что выражение в квадратных скобках оценивается сверху как

$$\overline{A_1} \|y_1^*\|^{q-1} t \max\left(1, B_1 \|y_1^*\|^2 t^{\frac{2}{q-1}}\right),$$

где $\overline{A_1}, B_1$ — некоторые положительные константы.

Значит, с некоторой положительной постоянной $A_1$ верна оценка

$$z(t) \leqslant A_1 \|y_1^*\|^{q-2} t \max\left(1, B_1 \|y_1^*\|^2 t^{\frac{2}{q-1}}\right) \left(1 + \frac{q-1}{q} \widetilde{c_1} \|y_1^*\|^{q-1} t\right)^{-\frac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}} \|y_1^* - y_1\|,$$

что и завершает доказательство.

Аналогичный результат верен и для решений системы (6).

**Утверждение 10** *Существует такая положительная константа* $A_2$, *что при* $t \leqslant 0$ *и* $\|y_2^*\| \geqslant \|y_2\|$ *верна оценка*

$$\left\|\frac{\partial\psi_2}{\partial y_2^j}(t,y_2^*)-\frac{\partial\psi_2}{\partial y_2^j}(t,y_2)\right\|\leqslant$$

$$A_2\|y_2^*\|^{q-2}|t|\max\left(1,B_2\|y_2^*\|^2|t|^{\frac{2}{q-1}}\right)\left(1+\frac{q-1}{q}\widetilde{c_2}\|y_2^*\|^{q-1}|t|\right)^{-\frac{qc_2}{(q-1)\widetilde{c_2}}}\|y_2^*-y_2\|$$

**Доказательство утверждения 10.** Замена $t\mapsto -t$ сводит систему (6) к системе (5), поэтому данное утверждение есть следствие предыдущего.

**Утверждение 11** *Предположим, что* $q$ *столь велико, что* $q>\dfrac{\widetilde{c_1}}{c_1}$. *Тогда существует такая положительная константа* $A_1'$, *что при достаточно больших* $t\geqslant 0$ *и* $\|y_1^*\|\geqslant\|y_1\|$ *верна оценка*

$$\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1^*)-\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1^j}(t,y_1)\right\|\leqslant A_1'\|y_1^*\|^{q-2}\|y_1^*-y_1\|t^{\frac{q\left(1-\frac{c_1}{\widetilde{c_1}}\right)-1}{q-1}} \tag{23}$$

**Доказательство утверждения 11.** Под интегралом в (22) суммарная степень $\tau$ есть

$$\frac{2}{q-1}-2\frac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}=2\,\frac{1-\dfrac{c_1}{\widetilde{c_1}}q}{q-1}.$$

При условии, что это выражение меньше нуля, а именно $q>\dfrac{\widetilde{c_1}}{c_1}$, подынтегральное выражение не превосходит величины $K\|y_1^*\|^{q-2}$, где K — некоторая положительная постоянная. А значит $z(t)$ в (22) можно оценить следующим образом:

$$z(t)\leqslant A_1'\|y_1^*\|^{q-2}\|y_1^*-y_1\|t\left(1+\frac{q-1}{q}\widetilde{c_1}\|y_1^*\|^{q-1}\,t\right)^{-\frac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}},$$

что при достаточно больших $t$ даёт искомую оценку. Утверждение доказано.

Аналогичная оценка выполняется и для решений системы (6).

**Утверждение 12** *Предположим, что $q$ столь велико, что $q > \dfrac{\widetilde{c_2}}{c_2}$. Тогда существует такая положительная константа $A_2'$, что при достаточно малых $t \leqslant 0$ и $\|y_2^*\| \geqslant \|y_2\|$ верна оценка*

$$\left\|\frac{\partial \psi_2}{\partial y_2^j}(t, y_2^*) - \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2^j}(t, y_2)\right\| \leqslant A_2' \|y_2^*\|^{q-2} \|y_2^* - y_2\| |t|^{\frac{q\left(1-\frac{c_2}{\widetilde{c_2}}\right)-1}{q-1}}$$

**Доказательство утверждения 12.** И снова доказательство аналогично предыдущему утверждению.

### *3. Основные результаты*

Перейдём теперь к формулировке и доказательству основных результатов.

**Теорема 2** *При выполнении условий* (3) − (7), *а также неравенства*

$$\alpha > 2q \max\left(1 - \frac{c_1}{\widetilde{c_1}}, 1 - \frac{c_2}{\widetilde{c_2}}\right) + 1$$

*системы* (1) *и* (2) *будут локально топологически эквивалентными в начале координат.*

**Доказательство теоремы 2.** Согласно леммам (6.3.5) и (6.3.6) из [5] для наличия топологической эквивалентности достаточно условий

$$\beta < \frac{\alpha}{q-1},\ \beta + \beta_1 < \frac{\alpha}{q-1},\ \beta + \beta_2 < \frac{\alpha + 1}{q-1},$$

где $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$ берётся из условий

$$\left\|\frac{\partial \psi_i}{\partial y_i}(t, y_i)\right\| \leqslant K_1 |t|^{\beta_1},$$

$$\left\|\frac{\partial \psi_i}{\partial y_i}(t, y_i^*) - \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i}(t, y_i)\right\| \leqslant K_2 |t|^{\beta_2} \|y_i^* - y_i\|$$

при $t \geqslant 0$ для $i = 1$ и при $t \leqslant 0$ для $i = 2$, причём $\beta_2 > 0$. Заметим, что первое неравенство не может быть выполнено при $t = 0$ в силу (12). Однако из доказательства видно, что эти оценки необходимы только при достаточно больших по модулю значениях $t$.

В нашем случае из утверждений $5, 6, 9, 10$ получим

$$\beta_1 = -\min\left(\frac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}, \frac{qc_2}{(q-1)\widetilde{c_2}}\right)$$

$$\beta_2 = \beta = \max\left(\frac{q\left(1-\dfrac{c_1}{\widetilde{c_1}}\right)+1}{q-1}, \frac{q\left(1-\dfrac{c_2}{\widetilde{c_2}}\right)+1}{q-1}\right) > 0.$$

Таким образом, необходимо проверить условие $\alpha+1 > 2\beta(q-1)$, которое выполнено по условиям данной теоремы. Тогда можно заключить, что искомая топологическая эквивалентность имеет место.

Теорема доказана.

Докажем теперь топологическую эквивалентность, ослабив условие из теоремы 2, но при этом добавив дополнительное условие на степень однородности $q$ невозмущённой системы.

**Теорема 3**
*При выполнении условий* (3) – (7), *достаточно большом значении* $q$, *а именно* $q > \max\left(\dfrac{\widetilde{c_1}}{c_1}, \dfrac{\widetilde{c_2}}{c_2}\right)$, $\min\left(q\left(1-\dfrac{c_1}{\widetilde{c_1}}\right)-1, q\left(1-\dfrac{c_2}{\widetilde{c_2}}\right)-1\right) > 0$, *и при выполнении неравенства*

$$\alpha > \max\left(2q\left(1-\frac{c_1}{\widetilde{c_1}}\right)-3,\ 2q\left(1-\frac{c_2}{\widetilde{c_2}}\right)-3,\ q\left(1-\frac{c_1}{\widetilde{c_1}}\right)-1,\ q\left(1-\frac{c_2}{\widetilde{c_2}}\right)-1\right)$$

*системы* (1) *и* (2) *будут локально топологически эквивалентными в начале координат.*

**Доказательство теоремы 3.** Согласно леммам (6.3.5) и (6.3.6) из [5] для наличия топологической эквивалентности достаточно условий

$$\beta < \frac{\alpha}{q-1},\ \beta+\beta_1 < \frac{\alpha}{q-1},\ \beta+\beta_2 < \frac{\alpha+1}{q-1},$$

где $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$ берётся из условий

$$\left\|\frac{\partial\psi_i}{\partial y_i}(t, y_i)\right\| \leqslant K_1|t|^{\beta_1},$$

$$\left\|\frac{\partial\psi_i}{\partial y_i}(t, y_i^*) - \frac{\partial\psi_i}{\partial y_i}(t, y_i)\right\| \leqslant K_2|t|^{\beta_2}\|y_i^* - y_i\|$$

при $t \geqslant 0$ для $i = 1$ и при $t \leqslant 0$ для $i = 2$, причём $\beta_2 > 0$. И снова эти оценки необходимы лишь при достаточно больших по модулю значениях $t$.

В данном случае из утверждений $5, 6, 11, 12$ получим

$$\beta_1 = -\min\left(\frac{qc_1}{(q-1)\widetilde{c_1}}, \frac{qc_2}{(q-1)\widetilde{c_2}}\right)$$

$$\beta_2 = \beta = \max\left(\frac{q\left(1-\dfrac{c_1}{\widetilde{c_1}}\right)-1}{q-1}, \frac{q\left(1-\dfrac{c_2}{\widetilde{c_2}}\right)-1}{q-1}\right) > 0.$$

А тогда из условий данной теоремы мы заключаем, что искомая топологическая эквивалентность имеет место.

Теорема доказана.

***Литература***


1. Лозинский С. М. *Оценки погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I.* Известия высших учебных заведений. Математика 5, 52-90 (1958).

2. Dahlquist G. Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. *Doctoral dissertation, Almqvist & Wiksell* (1958).

3. Ильин Ю. А. О применении логарифмических норм к нелинейным системам дифференциальных уравнений. *Издательство СПбГУ. Нелинейные динамические системы* 2, 103-121 (1999).

4. Ильин Ю. А. О гладкой эквивалентности существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений в окрестности асимптотически устойчивой точки покоя. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* 2, вып. 1, 37-47 (2015).

5. Рейзинь Л. Э. *Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений.* Зинатне (1971).

6. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир (1970).

7. Рейзинь Л. Э. *Функции Ляпунова и проблемы различения.* Зинатне (1986).

8. Андрианова Л. Я. *Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений*. Учебное пособие. Санкт-Петербург. Издательство СПбГУ (1992).

**Local topological equivalence of essentially nonlinear systems of differential equations.**

Yu.A. Iljin, K.V. Martynov
St. Petersburg State University
iljin_y_a@mail.ru, martynovkiry@gmail.com.

**Abstract.** The authors examine a system of nonlinear homogeneous differential equations and its perturbation by higher-order terms. The aim is to find conditions under which the original system and its perturbed version are locally topologically equivalent in the neighborhood of the zero equilibrium point.

The paper is based on the approach proposed by E. Reizin in 1971. But instead of using Wazewski's coefficient condition employed by him, the authors apply Lozinskii logarithmic norms, which made it possible to significantly expand the class of equivalent systems. Lozinskii norms also represent a coefficient condition, which is particularly important for applied problems.

**Keywords:** topological equivalence, essentially nonlinear system, logarithmic norm.