

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
и
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172
<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в сложных системах

Управление с итеративным обучением системой с неопределенными параметрами на основе метода тяжелого шарика

Копосов А.С.^{1,*}, Пакшин П.В.^{1,**}

¹Арзамасский политехнический институт (филиал) Нижегородского
государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева

*koroposov96@yandex.ru

**pakshinpv@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача синтеза управления с итеративным обучением на основе наблюдателя состояния для дискретных линейных систем с неопределенными параметрами в повторяющемся режиме. Решение основано на распространении на данный класс систем ранее разработанного подхода, использующего комбинацию метода тяжелого шарика из теории оптимизации и дивергентного метода векторной функции Ляпунова для повторяющихся процессов. Приведен пример, демонстрирующий возможности и эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, системы с неопределенными параметрами, повторяющиеся процессы, устойчивость, сходимость, метод тяжелого шарика, векторная функция Ляпунова, линейные матричные неравенства.

1 Введение

Метод управления с итеративным обучением (УИО) направлен на повышение точности выполнения повторяющихся операций системами, которые после

каждой операции возвращаются в исходное состояние. Простым примером таких систем являются манипуляционные роботы, используемые в конвейерном производстве. Эти роботы могут, например, работать в режиме захвата и размещения, перемещая грузы с определенной позиции на конвейер, или наносить покрытие на конструктивно одинаковые заготовки. В обоих случаях робот должен выполнять движение по заданной траектории с требуемой точностью.

Отправной точкой развития метода УИО является работа [1]. Мотивацией к разработке метода стала идея наделить манипуляторы способностью к автономному обучению. Подобно тому, как человек самостоятельно обучается выполнять определенное действие (например, пытается забросить мяч в баскетбольную корзину) путем его многократного повторения, качество выполнения операции роботом может быть постепенно улучшено без вмешательства извне за счет накапливаемой им информации. В [1] эта идея реализована в виде следующего итеративного процесса обучения объекта: на каждом новом повторении управляющий сигнал с предыдущего повторения корректируется с учетом производной ошибки траектории движения, которая в свою очередь определяется как отклонение фактической траектории, полученной на предыдущем повторении, от желаемой, заданной заранее.

Работа [1] привлекла к УИО внимание исследователей различных областей, и с тех пор метод активно развивается, при этом основная концепция остается неизменной. В процессе работы система накапливает в памяти информацию, выработанную ей при повторениях операции. На очередном повторении эта информация используется для определения необходимой корректировки ранее сформированного управляющего сигнала. Путем поэтапного уточнения управления, система самостоятельно улучшает тот или иной показатель качества. Обычно этим показателем является точность отслеживания желаемой траектории выходного сигнала. Например, для манипулятора через желаемый выход может быть задан эталон движения его звеньев и сочленений.

На данный момент УИО продолжает находить многочисленные практические приложения, и прежде всего в роботизированном производстве. Например, в аддитивном производстве в конвейерных системах высокоточного лазерного напыления [2], в микро- и нанопроизводстве при использовании рулонной технологии для отслеживания положение полотна и регулировки натяжения [3], в автомобилестроении для выполнения лазерной резки по различным схемам [4], и др. Также стоит отметить интересные результаты при-

менения УИО в медицине [5, 6] и сельском хозяйстве [7]. Для ознакомления с другими результатами исследований в области УИО можно рекомендовать работы [8, 9].

Критическим показателем эффективности УИО является скорость обучения, которая определяется количеством повторений, необходимым для достижения требуемой точности. Обычно алгоритмы УИО формируют таким образом, что для корректировки управляющего сигнала на текущем повторении используется информация только с предыдущего повторения. В работе [10] получила развитие идея использования законов УИО высшего порядка (законы, использующие данные с более, чем одного предыдущего повторения) для ускорения сходимости, но строгих доказательств ускорения ни в [10], ни в цитируемых в ней работах получено не было. В работе [11] предложен подход формирования УИО, основанный на использовании известного в теории оптимизации метода тяжелого шарика, который позволяет существенно ускорить сходимость градиентного метода в классических задачах оптимизации [12–14]. Полученные в [11] результаты демонстрируют высокую скорость сходимости ошибки обучения для дискретной линейной системы.

В данной статье подход [11] распространяется на дискретные системы с неопределенными параметрами с использованием наблюдателя состояния. Структура УИО получается на основе применения метода тяжелого шарика, а параметры, обеспечивающие сходимость ошибки обучения, находятся из линейных матричных неравенств, полученных дивергентным методом векторной функции Ляпунова. Представлен пример, демонстрирующий возможности и эффективность предложенного подхода, и проведен сравнительный анализ с одним из законов УИО первого порядка.

2 Постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему с неопределенными параметрами в повторяющемся режиме. Динамика системы на повторении k описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} x_k(p+1) &= A(\delta(p))x_k(p) + B(\delta(p))u_k(p), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad k \geq 0, \quad 0 \leq p \leq N-1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u_k(p) \in \mathbb{R}$ – скалярная входная переменная (переменная управления), $y_k(p) \in \mathbb{R}$ – скалярная выходная переменная (профиль повторения), $N < \infty$ – число шагов дискретизации, одинаковое

для всех k . Граничное условие $x_k(0) = x_0$ для всех $k \geq 0$ известно и задано. Предполагается, что измерению доступна только выходная переменная.

Матрицы системы задаются в виде аффинных функций вектора неопределенных параметров $\delta(p) \in \Delta$

$$A(\delta(p)) = A + A_a(\delta(p)) = A + \sum_{n=1}^l \delta_n(p) A_n,$$

$$B(\delta(p)) = B + B_a(\delta(p)) = B + \sum_{n=1}^l \delta_n(p) B_n,$$

где A и B – матрицы номинальной модели, A_n и B_n – постоянные матрицы соответствующих размеров. Множество неопределенных параметров определяется в виде

$$\Delta = \left\{ \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_l \end{bmatrix}^\top : \delta_n \in [\underline{\delta}_n, \bar{\delta}_n], n = 1, 2, \dots, l \right\},$$

и вводится конечное множество из 2^l элементов

$$\Delta_v = \left\{ \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_l \end{bmatrix}^\top : \delta_n \in \{\underline{\delta}_n, \bar{\delta}_n\}, n = 1, 2, \dots, l \right\}.$$

Здесь и далее зависимость δ от p опущена для компактности.

Обозначим желаемую траекторию выходной переменной через $y_{ref}(p)$, $0 \leq p \leq N - 1$, $y_{ref}(0) = Cx_0$, и введем ошибку обучения на повторении k в виде

$$e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p). \quad (2)$$

Задача заключается в поиске такой последовательности управлений $\{u_k\}$, при которой будут выполнены следующие условия сходимости ошибки и ограниченности управления:

$$|e_k(p)| \leq \kappa \varrho^k, \quad \kappa > 0, \quad 0 < \varrho < 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k(p)| = |u_\infty(p)| < \infty, \quad 0 \leq p \leq N - 1, \quad (3)$$

где $u_\infty(p)$ – переменная, обычно называемая обученным управлением. Эти условия означают, что ошибка обучения должна убывать при $k \rightarrow \infty$ не медленнее некоторой геометрической прогрессии и оставаться ограниченной для всех k . Таким образом, точность воспроизведения желаемой траектории будет постепенно улучшаться с каждым повторением.

Переменная управления $u_k(p)$ для $k = 0$ задана и ограничена, и для $k \geq 1$ вычисляется в соответствии с законом УИО

$$u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p), \quad (4)$$

где $\Delta u_{k+1}(p)$ – корректирующая поправка. При такой структуре управления задача сводится к определению корректирующей поправки, с которой закон (4) будет гарантировать выполнение условий (3).

3 Решение задачи

Для получения оценки состояния используем асимптотический наблюдатель полного порядка с матрицами номинальной модели

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(p+1) &= A\hat{x}_k(p) + Bu_k(p) + G(y_k(p) - C\hat{x}_k(p)), \\ \hat{x}_k(0) &= x_0, k \geq 0, 0 \leq p \leq N-1,\end{aligned}\quad (5)$$

где G – матрица усиления наблюдателя, которая определяется из условия, что ошибка оценивания

$$\tilde{x}_k(p) = x_k(p) - \hat{x}_k(p) \rightarrow 0$$

при $p \rightarrow \infty$.

Обозначим $\hat{y}_k(p) = C\hat{x}_k(p)$ и потребуем, чтобы для начального состояния наблюдателя выполнялось соотношение $\hat{y}_k(0) = C\hat{x}_k(0) = y_{ref}(0)$. Относительно этого введем в рассмотрение ошибку в виде

$$\hat{e}_k(p) = y_{ref}(p) - \hat{y}_k(p). \quad (6)$$

Также введем векторы приращений оценки и ошибки оценивания за одно повторение

$$\hat{\eta}_{k+1}(p+1) = \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \quad \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) = \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p) \quad (7)$$

соответственно. Учитывая закон (4) и наблюдатель (5), запишем уравнения системы (1) в терминах приращений (7) и ошибки (6):

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= A\hat{\eta}_{k+1}(p) + GC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + B\Delta u_{k+1}(p-1), \\ \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= A_a(\delta)\hat{\eta}_{k+1}(p) + (A(\delta) - GC)\tilde{\eta}_{k+1}(p) + B_a(\delta)\Delta u_{k+1}(p-1), \\ \hat{e}_{k+1}(p) &= -CA\hat{\eta}_{k+1}(p) - CGC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - CB\Delta u_{k+1}(p-1) + \hat{e}_k(p).\end{aligned}\quad (8)$$

В данной работе, в отличие от известных, корректирующую поправку будем искать из условия минимизации $\hat{e}_{k+1}(p)^2$ методом тяжелого шарика. Тогда эта поправка должна удовлетворять рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned}\Delta u_{k+1}(p-1) &= \alpha\Delta u_k(p-1) + \beta\nabla\left(\frac{1}{2}\hat{e}_{k+1}(p)^2\right) \\ &\quad + \gamma(\Delta u_k(p-1) - \Delta u_{k-1}(p-1)),\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{k+1}(p)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \Delta u_{k+1}(p-1)} \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{k+1}(p)^2 \right). \quad (10)$$

Вычисляя правую часть (10) с учетом последнего уравнения в (8), получим

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{2} \hat{e}_{k+1}(p)^2 \right) &= C B C A \hat{\eta}_{k+1}(p) + C B C G C \tilde{\eta}_{k+1}(p) \\ &\quad + (C B)^2 \Delta u_{k+1}(p-1) - C B \hat{e}_k(p). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (9), получим

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}(p-1) &= K_1 \Delta u_k(p-1) + K_2 C A \hat{\eta}_{k+1}(p) \\ &\quad + K_2 C G C \tilde{\eta}_{k+1}(p) - K_2 \hat{e}_k(p) - K_3 \Delta u_{k-1}(p-1), \end{aligned} \quad (11)$$

где с целью дальнейшего применения техники линейных матричных неравенств вместо исходных параметров α , β и γ будут использоваться

$$K_1 = \frac{\alpha + \gamma}{1 - \beta(CB)^2}, \quad K_2 = \frac{\beta CB}{1 - \beta(CB)^2}, \quad K_3 = \frac{\gamma}{1 - \beta(CB)^2}.$$

Приняв для компактности обозначения

$$\xi_k(p) = \hat{\eta}_{k+1}(p), \quad \zeta_k(p) = \tilde{\eta}_{k+1}(p), \quad \epsilon_k(p) = \hat{e}_k(p), \quad v_k(p) = \Delta u_k(p-1),$$

перепишем систему (8) с учетом поправки (11):

$$\begin{aligned} \xi_k(p+1) &= (I + BK_2C)A\xi_k(p) + (I + BK_2C)GC\zeta_k(p) \\ &\quad - BK_2\epsilon_k(p) + BK_1v_k(p) - BK_3\mu_k(p), \\ \zeta_k(p+1) &= (A_a(\delta) + B_a(\delta)K_2CA)\xi_k(p) \\ &\quad + (A(\delta) - GC + B_a(\delta)K_2CGC)\zeta_k(p) - B_a(\delta)K_2\epsilon_k(p) \\ &\quad + B_a(\delta)K_1v_k(p) - B_a(\delta)K_3\mu_k(p), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{k+1}(p) &= -C(I + BK_2C)A\xi_k(p) - C(I + BK_2C)GC\zeta_k(p) \\ &\quad + (CBK_2 + I)\epsilon_k(p) - CBK_1v_k(p) + CBK_3\mu_k(p), \end{aligned}$$

$$v_{k+1}(p) = K_2CA\xi_k(p) + K_2CGC\zeta_k(p) - K_2\epsilon_k(p) + K_1v_k(p) - K_3\mu_k(p),$$

$$\mu_{k+1}(p) = v_k(p).$$

Введем расширенные векторы

$$\bar{\xi}_k(p) = \begin{bmatrix} \zeta_k(p) \\ \xi_k(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{\epsilon}_k(p) = \begin{bmatrix} v_k(p) \\ \mu_k(p) \\ \epsilon_k(p) \end{bmatrix},$$

относительно которых система (12) примет вид

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_k(p+1) &= (\bar{A}_{11}(\delta) + \bar{B}_1(\delta)K\bar{C}_1)\bar{\xi}_k(p) + (\bar{A}_{12} + \bar{B}_1(\delta)K\bar{C}_2)\bar{\epsilon}_k(p), \\ \bar{\epsilon}_{k+1}(p) &= (\bar{A}_{21}(\delta) + \bar{B}_2(\delta)K\bar{C}_1)\bar{\xi}_k(p) + (\bar{A}_{22} + \bar{B}_2(\delta)K\bar{C}_2)\bar{\epsilon}_k(p),\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11}(\delta) &= \begin{bmatrix} A(\delta) - GC & A_a(\delta) \\ GC & A \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = 0, \quad \bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -CGC & -CA \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1(\delta) = \begin{bmatrix} B_a(\delta) \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ -CB \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CGC & CA \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Система (13) записана в стандартной форме дискретного повторяющегося процесса, и является частным случаем 2D-систем [15]. Она описывает два процесса: процесс изменения переменных на повторении относительно p и процесс изменения динамики от повторения к повторению относительно k . Это позволяет избежать моделей больших размерностей, которые неизбежно возникают при использовании альтернативного подхода с использованием, так называемых супервекторов [8, 16], и построить закон управления, который одновременно обеспечит сходимость ошибки вдоль повторений и будет регулировать динамику по траектории повторения.

Для поиска коэффициентов K_1 , K_2 и K_3 воспользуемся дивергентным методом векторной функции Ляпунова [17], который основан на использовании векторной функции Ляпунова и аналога ее дивергенции для исследования устойчивости динамических систем. В данной работе определим векторную функцию в виде

$$V(\bar{\xi}_k(p), \bar{\epsilon}_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\bar{\xi}_k(p)) \\ V_2(\bar{\epsilon}_k(p)) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $V_1(\bar{\xi}_k(p)) > 0$, $\bar{\xi}_k(p) \neq 0$, $V_2(\bar{\epsilon}_k(p)) > 0$, $\bar{\epsilon}_k(p) \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$, и аналог ее дивергенции как

$$\mathcal{D}V(\bar{\xi}_k(p), \bar{\epsilon}_k(p)) = V_1(\bar{\xi}_k(p+1)) - V_1(\bar{\xi}_k(p)) + V_2(\bar{\epsilon}_{k+1}(p)) - V_2(\bar{\epsilon}_k(p)). \quad (15)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. [17] Пусть существуют векторная функция Ляпунова (14) и положительные скаляры c_1, c_2 и c_3 такие, что на траекториях системы (13) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_1\|\bar{\xi}_k(p)\|^2 &\leq V_1(\bar{\xi}_k(p)) \leq c_2\|\bar{\xi}_k(p)\|^2, \\ c_1\|\bar{\epsilon}_k(p)\|^2 &\leq V_2(\bar{\epsilon}_k(p)) \leq c_2\|\bar{\epsilon}_k(p)\|^2, \\ \mathcal{D}V(\bar{\xi}_k(p), \bar{\epsilon}_k(p)) &\leq -c_3(\|\bar{\xi}_k(p)\|^2 + \|\bar{\epsilon}_k(p)\|^2). \end{aligned}$$

Тогда закон управления (4) с корректирующей поправкой (11) обеспечит выполнение условий сходимости ошибки обучения и ограниченности управления (3).

Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (14) в виде квадратичных форм

$$V_1(\bar{\xi}_k(p)) = \bar{\xi}_k^\top(p)P_1\bar{\xi}_k(p), \quad V_2(\bar{\epsilon}_k(p)) = \bar{\epsilon}_k^\top(p)P_2\bar{\epsilon}_k(p), \quad (16)$$

и тогда, вычисляя дивергенцию (15) на траекториях системы (13), получим, что условия теоремы 1 будут выполнены, если для некоторых матриц $Q_1 \succ 0$, $Q_2 \succ 0$ и скаляра $R > 0$ на всем множестве параметров Δ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C})^\top P(\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)K\bar{C}) - P + Q + (K\bar{C})^\top R K \bar{C} &\preceq 0, \\ P &\succ 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}(\delta) &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}(\delta) & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} \bar{B}_1(\delta) \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}, \\ P &= \text{diag} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \text{diag} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Применяя лемму о дополнении Шура, перепишем неравенства (17) в виде системы матричных уравнений и неравенств относительно неизвестных переменных X, Y и Z :

$$\begin{bmatrix} X & (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)Y\bar{C})^\top & X & (Y\bar{C})^\top \\ \bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)Y\bar{C} & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y\bar{C} & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (18)$$

$\bar{C}X = Z\bar{C},$

где $X = P^{-1}$ и $Y = KZ$. Поскольку неравенство (18) выпуклое, то оно будет выполняться тогда и только тогда, когда оно выполняется на конечном множестве Δ_v . Обобщим полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть для некоторых матриц $Q_1 \succ 0$, $Q_2 \succ 0$ и скаляра $R > 0$ система матричных уравнений и неравенств (18) имеет решение $X = \text{diag}[X_1 \ X_2]$, Y и Z для всех $\delta \in \Delta_v$, где $X_1 \succ 0$ и $X_2 \succ 0$ – матрицы размеров $2n_x \times 2n_x$ и 3×3 соответственно. Тогда закон УИО (4) с корректирующей поправкой

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}(p) = & K_1 \Delta u_k(p) + K_2 C A (\hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p)) \\ & + K_2 C G (y_{k+1}(p) - y_k(p)) - K_2 C G (\hat{y}_{k+1}(p) - \hat{y}_k(p)) \\ & - K_2 (y_{ref}(p+1) - \hat{y}_k(p+1)) - K_3 \Delta u_{k-1}(p), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = Y Z^{-1},$$

гарантирует выполнение условий сходимости ошибки обучения и ограниченности управления (3).

Таким образом, закон управления, удовлетворяющий теореме 2, обеспечивает сходимость выходного сигнала к желаемой траектории и является робастным по отношению к заданным неопределенностям. В данной теореме соотношение (19) следует из (11) с учетом (6) и (7). Также отметим, что Q_1 , Q_2 и R здесь играют роль, аналогичную весовым коэффициентам в теории линейно-квадратичного регулятора, и подбираются исходя из знаний особенностей динамики рассматриваемой системы и желаемых характеристик ее работы.

Проанализируем корректирующую поправку (19) более детально, чтобы выяснить каким образом внедрение оптимизации в динамику системы может ускорить сходимость. Из уравнения (5) следует

$$\begin{aligned} A(\hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p)) = & (\hat{x}_{k+1}(p+1) - \hat{x}_k(p+1)) \\ & - G(y_{k+1}(p) - y_k(p)) + G(\hat{y}_{k+1}(p) - \hat{y}_k(p)) - B \Delta u_{k+1}(p). \end{aligned}$$

С учетом этого соотношения выражение для корректирующей поправки можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}(p) = & \bar{K}_1 \Delta u_k(p) + \bar{K}_2 (\hat{y}_{k+1}(p+1) - \hat{y}_k(p+1)) \\ & - \bar{K}_2 (y_{ref}(p+1) - \hat{y}_k(p+1)) - \bar{K}_3 \Delta u_{k-1}(p), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\bar{K}_i = K_i/(1 + K_2 C B)$, $i = 1, 2, 3$. Сравнивая с (23) видим, что второе слагаемое в правой части (19) неявно придает управлению прогнозирующий характер и в таком случае, предыстория не должна оказывать существенного влияния, что подтверждается приводимым далее примером.

4 Пример

Рассмотрим простой однозвездный манипулятор, перемещающий грузы по заданной траектории в горизонтальной плоскости в повторяющемся режиме. Модель его динамики имеет вид

$$J\ddot{\theta}_k(t) + K_s\theta_k(t) = u_k(t), \quad k \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (21)$$

где $\theta_k(t)$ – угол поворота звена, $J = m_l l^2 + \frac{1}{3}m_p l^2$ – момент инерции, m_p – масса груза, m_l – масса жесткого звена, l – длина звена, K_s – коэффициент жесткости, $u_k(t)$ – управляющий сигнал, $T < \infty$ – продолжительность повторения. Определив векторы

$$x_k(t) = \begin{bmatrix} \theta_k \\ \dot{\theta}_k \end{bmatrix}, \quad y_k(t) = \dot{\theta}_k,$$

и учитывая, что масса груза может изменяться в некоторых заданных пределах, перепишем (21) в виде модели в пространстве состояний с непрерывным временем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_c(\delta)x_k(t) + B_c(\delta)u_k(t), \\ y_k(t) &= C_c x_k(t), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A_c(\delta) &= A_c + A_{ca}(\delta) = A_c + \delta_1 A_{c1}, \quad B_c(\delta) = B_c + B_{ca}(\delta) = B_c + \delta_1 B_{c1}, \\ A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_s/J_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_s/J_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_0 \end{bmatrix}, \quad B_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_1 \in [\underline{\delta}_1, \bar{\delta}_1], \quad \underline{\delta}_1 = \frac{\underline{m}_p l^2}{3J_0 + \underline{m}_p l^2}, \quad \bar{\delta}_1 = \frac{\bar{m}_p l^2}{3J_0 + \bar{m}_p l^2}, \end{aligned}$$

$J_0 = m_l l^2$ – момент инерции манипулятора без полезной нагрузки, и m_p и \bar{m}_p – минимальная и максимальная масса груза соответственно.

Были приняты следующие значения параметров: $m_l = 1$ кг, $l = 0,3$ м, $K_s = 2,3$. Масса груза m_p может меняться от $\underline{m}_p = 1,9$ кг до $\bar{m}_p = 5$ кг,

отсюда нижняя и верхняя границы неопределенного параметра δ_1 составляют $\underline{\delta}_1 = 0,3878$ и $\bar{\delta}_1 = 0,625$ соответственно. Желаемая траектория изменения угловой скорости имеет вид

$$\dot{\theta}_{ref}(t) = \frac{1}{4} \left(\pi t - \frac{\pi t^2}{2} \right)$$

и задает поворот на 30° за $T = 2$ с по траектории

$$\theta_{ref}(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi t^2}{2} - \frac{\pi t^3}{6} \right).$$

Для синтеза управления использовалась дискретная модель в пространстве состояний на основе метода Эйлера

$$\begin{aligned} x_k(p+1) &= A(\delta)x_k(p) + B(\delta)u_k(p), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad k \geq 0, \quad 0 \leq p \leq N-1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A(\delta) &= A + A_a(\delta) = (T_s A_c + I) + T_s A_{ca}(\delta), \\ B(\delta) &= B + B_a(\delta) = T_s B_c + T_s B_{ca}(\delta), \quad C = C_c, \quad N = T/T_s, \end{aligned}$$

и T_s – шаг дискретизации, который составлял 10^{-3} с.

Дополнительно для сравнительного анализа рассмотрим наиболее часто применяемую структуру закона обновления (см., например, [9, 15])

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}(p-1) &= \mathbf{K}_1(\hat{x}_{k+1}(p-1) - \hat{x}_k(p-1)) \\ &\quad + \mathbf{K}_2(y_{ref}(p) - \hat{y}_k(p)) = \mathbf{K}_1\hat{\eta}_{k+1}(p) + \mathbf{K}_2\hat{e}_k(p). \quad (23) \end{aligned}$$

Применяя теорему 1 к системе (8) с поправкой (23), выбрав компоненты векторной функции (14) в виде

$$V_1(\bar{\xi}_k(p)) = \bar{\xi}_k^\top(p) \mathbf{P}_1 \bar{\xi}_k(p), \quad V_2(\epsilon_k(p)) = \epsilon_k^\top(p) \mathbf{P}_2 \epsilon_k(p),$$

было получено, что если система

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & (\mathbf{A}(\delta)\mathbf{X} + \mathbf{B}(\delta)\mathbf{Y}\mathbf{C})^\top & \mathbf{X} & (\mathbf{Y}\mathbf{C})^\top \\ \mathbf{A}(\delta)\mathbf{X} + \mathbf{B}(\delta)\mathbf{Y}\mathbf{C} & \mathbf{X} & 0 & 0 \\ \mathbf{X} & 0 & \mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{Y}\mathbf{C} & 0 & 0 & \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (24)$$

$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{X} = \mathbf{Z}\mathbf{C}$

с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A(\delta) - GC & A_a(\delta) & 0 \\ GC & A & 0 \\ -CGC & -CA & I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_a(\delta) \\ B \\ -CB \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

разрешима относительно неизвестных $\mathbf{X} = \text{diag}[\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2]$, \mathbf{Y} , \mathbf{Z} для всех $\delta \in \Delta_v$ и некоторых весовых матриц $\mathbf{Q} = \text{diag}[\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2] \succ 0$ и коэффициента $\mathbf{R} > 0$, то закон УИО (4) с корректирующей поправкой (23) и матрицами \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , определяемыми из соотношения

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2] = \mathbf{YZ}^{-1},$$

обеспечит выполнение условий (3).

Для оценки качества законов УИО введем среднеквадратическую ошибку обучения

$$E(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} |e_k(p)|^2} \quad (25)$$

как меру сходимости ошибки обучения по повторениям.

Для вычисления параметров наблюдателя использовалась функция `place` пакета MATLAB. Задавая собственные значения матрицы $A - GC$ в виде $\lambda_{1,2} = 0,6 \pm 0,01i$, была получена матрица

$$G = [-6,2638 \ 0,8]^\top.$$

Выбирая Q_1 , Q_2 и R единичными, из решения (18) получены следующие коэффициенты для корректирующей поправки (11):

$$K_1 = 3,9531 \times 10^{-10}, \quad K_2 = -89,4059, \quad K_3 = -2,8919 \times 10^{-11}.$$

Для поправки (23) из (24) с аналогичными весовыми коэффициентами:

$$\mathbf{K}_1 = [2,2969 \ -47,7407], \quad \mathbf{K}_2 = 0,0044.$$

При отсутствии полезной нагрузки ($\delta_1 = 0$) закон УИО с поправкой (11) позволил снизить среднеквадратическую ошибку в 5×10^3 раз за одно повторение, а достичь значений, близких к компьютерному нулю – за 8 повторений (рисунок 1). Для сравнения, при законе УИО с поправкой (23) ошибка снизилась на 0,18% за 20 повторений. Эти выводы соответствуют результатам

в [11], где для дискретных линейных систем проведен детальный сравнительный анализ.

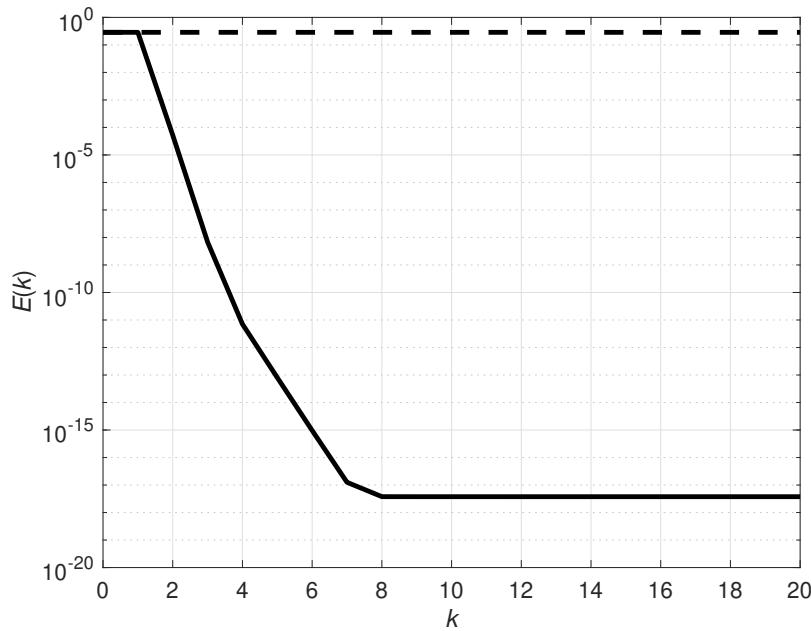


Рис. 1: Изменение $E(k)$ при отсутствии полезной нагрузки: законы УИО с поправкой (11) (сплошная линия) и с поправкой (23) (пунктирная линия) при единичных весовых коэффициентах

Для УИО с поправкой (23) ускорить сходимость и достичь аналогичных характеристик можно за счет эвристического подбора Q_1 , Q_2 и R , однако зачастую это является сложной задачей. В данном случае, путем достаточно длительного подбора были получены матрицы

$$Q_1 = 10^{-5} I_{n_x}, \quad Q_2 = 10^5, \quad R = 1, \quad (26)$$

при которых удалось достичь точности воспроизведения желаемой траектории в 10^{-4} на 7 повторении (рисунок 2), однако с корректирующей поправкой (11) такая точность достигается на 3 повторении.

При наличии полезной нагрузки в указанных выше пределах точность отслеживания желаемой траектории падает, и минимальная среднеквадратическая ошибка составляет не выше 10^{-4} как для груза минимальной массы, так и максимальной. Это объясняется тем, что параметры наблюдателя состояния остаются постоянными. При этом в обоих случаях ошибка установилась на 3 повторении (рисунок 3). Такая же точность достигается и с корректирующей поправкой (23) при весовых коэффициентах (26), однако в 3 раза медленнее (рисунок 4).

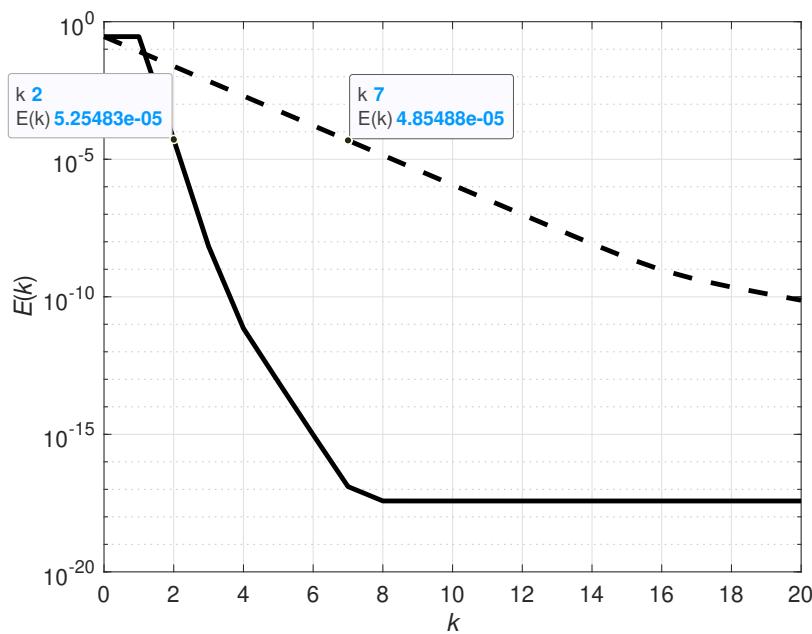


Рис. 2: Изменение $E(k)$ при отсутствии полезной нагрузки: законы УИО с поправкой (11) при единичных Q_1 , Q_2 и R (сплошная линия) и с поправкой (23) при (26) (пунктирная линия)

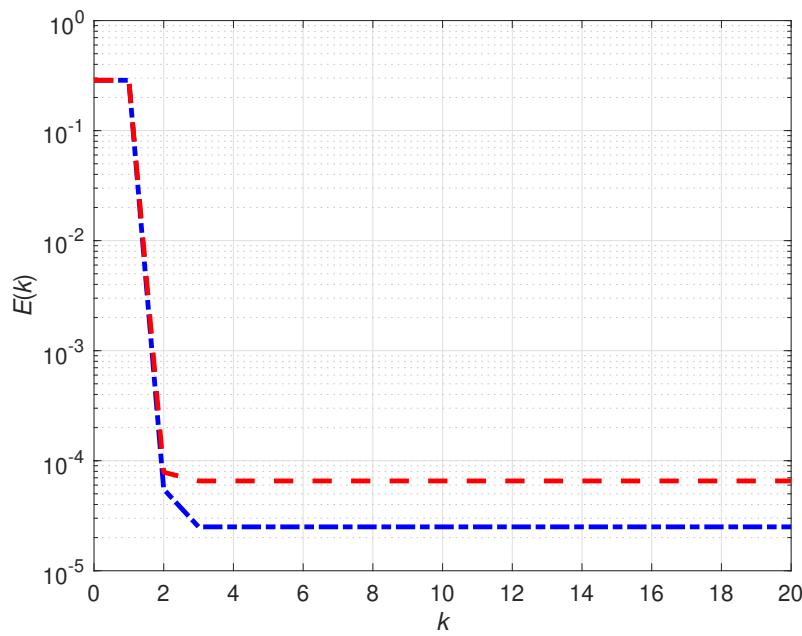


Рис. 3: Изменение $E(k)$ с полезной нагрузкой при законе УИО с поправкой (11): параметр δ_1 на нижней границе (синяя штрихпунктирная линия) и верхней границе (красная пунктирная линия)

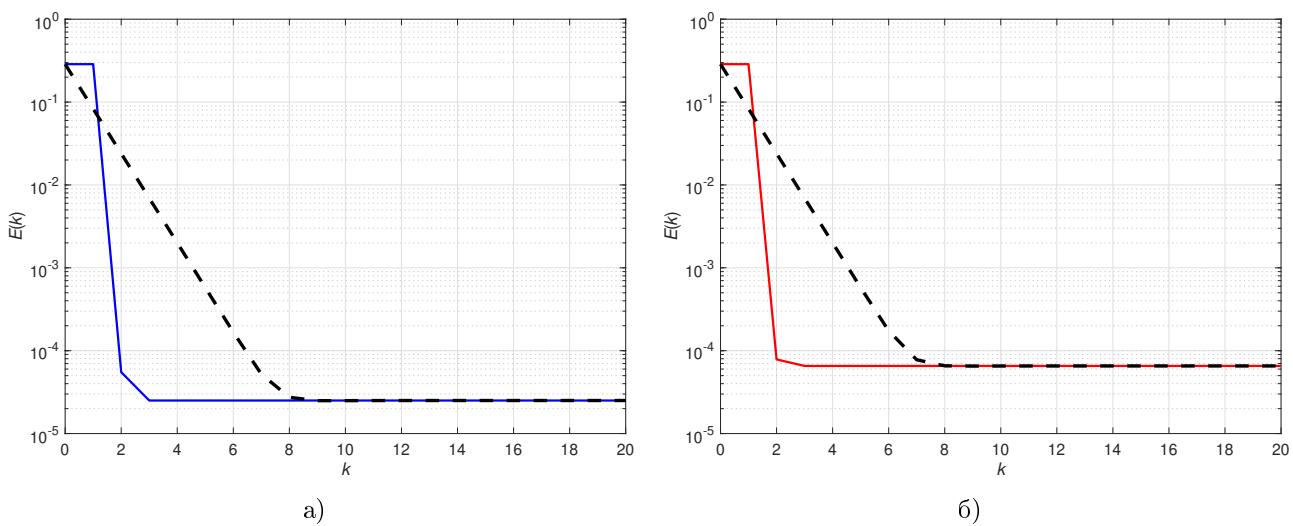


Рис. 4: Изменение $E(k)$ с полезной нагрузкой, сравнение законов УИО с поправкой (11) при единичных Q_1 , Q_2 и R (сплошная линия) и с поправкой (23) при (26) (пунктирная линия): а) параметр δ_1 на нижней границе; б) параметр δ_1 на верхней границе

5 Заключение

В работе была рассмотрена задача синтеза УИО дискретными линейными системами с неопределенными параметрами на основе наблюдателя состояния, в основу решения которой легли метод тяжелого шарика и дивергентный метод векторной функции Ляпунова. Как и в [11], выбранная структура корректирующей поправки позволила достичь высокой скорости обучения без ущерба точности отслеживания желаемой траектории, что подтверждается представленными результатами моделирования. В случае с законом первого порядка, рассмотренным для сравнения, достижение подобной скорости для некоторых систем возможно путем подбора подходящих весовых коэффициентов, однако такой выбор носит эвристический характер и может потребовать существенных затрат времени.

6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 25-11-00065, <https://rscf.ru/project/25-11-00065/>.

Список литературы

- [1] Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F. Bettering Operation of Robots by Learning // J. Robot. Syst. – 1984. – V. 1. – P. 123-140.
- [2] Sammons P. M., Gegel M. L., Bristow D. A., Landers R. G. Repetitive Process Control of Additive Manufacturing with Application to Laser Metal Deposition // IEEE Transact. Control Syst. Technol. – 2019. – V. 27, No. 2. – P. 566-575.
- [3] Sutanto E., Alleyne A. G. Norm Optimal Iterative Learning Control for a Roll to Roll nano/micro-manufacturing system // 2013 American Control Conference (ACC). – 2013. – P. 5935-5941.
- [4] Gunnarsson S., Norrlöf M., Hovland G., Carlsson U., Brogardh T., Svenson T., Moberg S. Pathcorrection for an industrial robot // U. S. Patent 20040093119. – 2004.
- [5] Freeman C. T., Rogers E., Hughes A.-M., Burridge J. H., Meadmore K. L. Iterative learning control in health care: electrical stimulation and robotic-assisted upper-limb stroke rehabilitation // IEEE Control Syst. Magaz. – 2012. – V. 47. – P. 70-80.
- [6] Meadmore K. L., Exell T. A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C. T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burridge J. H. The application of precisely controlled functional electrical stimulation to the shoulder, elbow and wrist for upper limb stroke rehabilitation: a feasibility study // J. NeuroEngin. Rehabilitat. – 2014. – P. 11-105.
- [7] Johansen S. V., Jensen M. R., Chu B., Bendtsen J. D., Mogensen J., Rogers E. Broiler FCR Optimization Using Norm Optimal Terminal Iterative Learning Control // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2021. – V. 29, No. 2. – P. 580-592.
- [8] Bristow D. A., Tharayil M., Alleyne A. G. A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // IEEE Control Syst. Magaz. – 2006. – V. 26, No. 3. – P. 96-114.
- [9] Rogers E., Chu B., Freeman C., Lewin P. Iterative Learning Control Algorithms and Experimental Benchmarking Chichester.: John Wiley & Sons, 2023.

- [10] Пакшин П. В., Емельянова Ю. П., Емельянов М. А. Алгоритмы управления с итеративным обучением высшего порядка для линейных систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2024. – Т. 64, № 4. – С. 644-657.
- [11] Пакшин П. В., Емельянова Ю. П., Роджерс Э. Синтез управления с итеративным обучением для дискретных систем на основе наблюдателя состояния с использованием метода тяжелого шарика // АиТ. – 2024. – № 8. – С. 99-118.
- [12] Поляк Б. Т. О некоторых способах ускорения сходимости итерационных методов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1964. – Т. 4, № 5. – С. 791-803.
- [13] Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
- [14] d'Aspremont A., Scieur D., Taylor A. Acceleration Methods. arXiv:2101.09545v3. – 2021.
- [15] Rogers E., Gałkowski K., Owens D. H. Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 349. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [16] Ahn H-S., Chen Y. Q., Moore K. L. Iterative Learning Control: Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev. – 2007. – V. 37, No. 6. – P. 1099-1121.
- [17] Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Gałkowski K., Rogers E. Dissipativity and stabilization of nonlinear repetitive processes // Syst. Control Lett. – 2016. – V. 91. – P. 14-20.

**Iterative learning control of uncertain system
based on the heavy-ball method**

Koposov A.S.^{1,*}, Pakshin P.V.^{1,**}

¹Arzamas Polytechnic Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State
Technical University

*koposov96@yandex.ru

**pakshinpv@gmail.com

Abstract. This paper considers iterative learning control design problem based on a state observer for a discrete linear systems in a repetitive mode with uncertain parameters. The solution is based on extension to this class of systems of previously developed approach using combination of the heavy-ball method from optimization theory and the divergent method of the vector Lyapunov function for repetitive processes. The example demonstrating the capabilities and efficiency of the proposed approach is given.

Keywords: iterative learning control, uncertain systems, repetitive processes, stability, convergence, heavy-ball method, vector Lyapunov function, linear matrix inequalities.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation under grant 25-11-00065, <https://rscf.ru/project/25-11-00065/>.