ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

О полной управляемости по выходу линейных стационарных систем

Кондратьева Н. В.[1,*], Потапов А. П.[2**]

[1]Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого
[2]Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

[*]knat0202@mail.ru
**potalpan@yandex.ru

Аннотация. В рамках задачи оптимального управления «по выходу», впервые сформулированной и исследованной В. А. Якубовичем, возникла проблема получения условий полной управляемости линейной стационарной системы с помощью управления, являющегося функцией выхода. В статье вводится понятие управляемости линейной системы по заданному «выходу». На основе «частотной» теоремы Якубовича-Калмана доказывается теорема о необходимом условии управляемости по «выходу» линейных стационарных систем. Показано, что для систем второго порядка полученное условие является также и достаточным. Приведены примеры построения областей управляемости по «выходу» при наличии ограничений на управление.

Ключевые слова: полная управляемость, полная наблюдаемость, управляемость по выходу, передаточная функция, частотная характеристика.

Введение. Постановка задачи.

В задаче оптимального управления «по выходу», впервые сформулированной и исследованной В. А. Якубовичем [8, 9], в частности, рассматривается линейная стационарная система вида:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ \sigma = c^*x\end{cases}, t \in [0;T],\ u = u(\sigma) \qquad (1)$$

с дополнительными ограничениями: $x(0) = a$, $x(T) = b$, для которой требуется найти оптимальное управление $u = u(\sigma)$ из условия: $\int_0^T \varphi(t,x,u)\,dt \ \rightarrow\ min$.

При подходах к решению этой задачи возникла проблема нахождения условий, при которых система (1) может быть переведена из произвольного начального состояния $\boldsymbol{a}$ в произвольное конечное состояние b с помощью управления $u = u(\sigma)$, которое является функцией выхода σ, а также связанная с ней задача построения областей управляемости (областей достижимости) по «выходу» при наличии ограничений на управление.

Рассмотрим линейную стационарную систему (1) управления «по выходу», где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n, u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in R^m$, $\sigma \in R^1, \sigma = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, $x = x(t) -$ «состояние» системы в момент времени t, $\sigma = \sigma(t)$ – скалярный «выход» в момент времени t, $u = u(\sigma)$ – управление «по выходу», A, B, c^* – матрицы размерностей соответственно $n \times n$, $n \times m$ и $1 \times n$.

Определение. Система (1) называется *полностью управляемой* «по выходу», если для любых «состояний» $x', x'' \in R^n$ существуют $T > 0$ и управление $u = u(\sigma)$ такие, что соответствующее решение $x = x(t)$ системы (1) удовлетворяет условиям: $x(0) = x'$, $x(T) = x''$ (т.е. управление $u = u(\sigma)$ переводит систему за время T из состояния x' в состояние x'').

Замечание. Данное определение отличается от обычного определения полной управляемости $[2, 3]$ тем, что здесь накладываются дополнительные ограничения на управление $u = u(t) = u[\sigma(t)]$. А именно: если для каких-нибудь значений $t_1, t_2 \in [0;T]$ выполняется равенство $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, то должно выполняться и равенство $u(t_1) = u(t_2)$.

Если система является *полностью управляемой* «по выходу», то она, очевидно, будет и полностью управляемой в обычном смысле. В данной статье показано, что обратное утверждение неверно.

Известны разные критерии полной управляемости в обычном смысле $[2, 3]$ для этих систем, например, условие $rg\ \{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n$. Но эти критерии не гарантируют полной управляемости «по выходу».

Задача состоит в том, чтобы для системы (1) получить необходимые и достаточные условия полной управляемости «по выходу»

В качестве *допустимых* управлений здесь рассматривается класс *кусочно-непрерывных* функций $u(\sigma)$. Решение системы дифференциальных уравнений, соответствующее кусочно-непрерывному управлению $u = u(\sigma)$, понимается по А. Ф. Филиппову $[7]$.

Введём обозначения:

$W(p) = c^*(pI - A)^{-1}B$ – передаточная функция, $W(i\omega) = c^*(i\omega I - A)^{-1}B$ – частотная характеристика.

Здесь I – единичная матрица $n \times n$, $p \in C$ – комплексная переменная, $p \neq \lambda_j$, где λ_j – собственные значения матрицы A, i – мнимая единица, $\omega \in R$, $\omega \neq \omega_j$, где $i\omega_j$ – чисто мнимые собственные значения матрицы A.

Для решения поставленной задачи используем одну из «частотных теорем» Якубовича-Калмана. Приведём её формулировку $[2, 4]$.

Частотная теорема. Пусть пара $(A, B) -$ полностью управляема (в обычном смысле), а $F(x,u) -$ эрмитова (квадратичная) форма переменных x, u.

Для существования вещественной матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей неравенству:

$$2Re\ x^*H(Ax + Bu) - F(x,u) \leq 0 \quad \forall\ x \in C^n, u \in C^m \qquad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$F((i\omega I - A)^{-1}Bu, u) \geq 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty),\ det\,(i\omega I - A) \neq 0 \text{ и } \forall u \in R^m. \tag{3}$$

Замечание. Если условие (2) записано в виде: $Re\, x^*H(Ax + Bu) + F(x, u) \leq 0$, то условие (3) запишется в виде: $F((i\omega I - A)^{-1}Bu, u) \leq 0$.

Часть 1. Основная теорема.

Рассмотрим линейную стационарную систему управления «по выходу» второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ \sigma = c^*x \end{cases}, \quad u = u(\sigma). \tag{1.1}$$

Здесь: $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, $x -$ вектор состояния системы, $\sigma \in R^1$, σ – скалярный «выход», $u \in R^1$, $u = u(\sigma)$ – скалярное управление «по выходу», $A = \|a_{ij}\|_{2\times 2}$, $B = (b_1, b_2)^T$, $c^T = (c_1; c_2)$.

Система (1.1) называется полностью управляемой (сокращённо: П/У) «по выходу», если для любых «состояний» $x', x'' \in R^2$ существуют $T > 0$ и управление $u = u(\sigma)$ такие, что соответствующее решение $x = x(t)$ системы (1) удовлетворяет условиям: $x(0) = x'$, $x(T) = x''$ (т. е. управление $u(\sigma)$ переводит систему за время T из состояния x' в состояние x'').

Для эрмитовой формы вида $F(x, u) = Re\, u{\cdot}c^*{\cdot}(Ax + Bu)$ условие (2) частотной теоремы означает:

$$Re\,(2x^*H - uc^*){\cdot}(Ax + Bu) \leq 0 \quad \forall\, x \in C^n, u \in C^1.$$

Тогда для $x = (i\omega I - A)^{-1}Bu$ имеем:

$$(i\omega I - A)x = Bu \Rightarrow Ax + Bu = i\omega Ix = i\omega x \Rightarrow G((i\omega I - A)^{-1}Bu, u) =$$
$$= Re\, u{\cdot}c^*{\cdot}(i\omega x) = Re\, i\omega{\cdot}u{\cdot}c^*x = Re\, i\omega{\cdot}u{\cdot}c^*(i\omega I - A)^{-1}Bu =$$
$$= Re\, i\omega{\cdot}u{\cdot}W(i\omega){\cdot}u = Re[i\omega \cdot W(i\omega)]{\cdot}u^2.$$

В этом случае условие (3) частотной теоремы означает:

$$Re[i\omega \cdot W(i\omega)]{\cdot}u^2 \geq 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty),\ det\,(i\omega I - A) \neq 0 \text{ и } \forall u \in R^1,$$

или:

$$Re[i\omega \cdot W(i\omega)] \geq 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty),\ det\,(i\omega I - A) \neq 0.$$

Если $F(x, u) = -Re\, u{\cdot}c^*{\cdot}(Ax + Bu)$, то получим:

$$Re[i\omega \cdot W(i\omega)] \leq 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty),\ det\,(i\omega I - A) \neq 0.$$

Таким образом, из частотной теоремы для данной эрмитовой формы получаем утверждение.

Утверждение. Для существования вещественной матрицы $\boldsymbol{H = H^*}$, удовлетворяющей неравенству:

$$Re\,[2x^*H(Ax+Bu)-uc^*(Ax+Bu)]\le 0\quad \forall\, x\in C^n, u\in C^1 \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$Re[i\omega\cdot W(i\omega)]\ge 0\ \ \forall\omega\in(-\infty,+\infty),\ det\,(i\omega I-A)\ne 0, \tag{1.3}$$

или:

$$Re\,[2x^*H(Ax+Bu)+uc^*(Ax+Bu)]\le 0\quad \forall\, x\in C^n, u\in C^1\ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Re[i\omega\cdot W(i\omega)]\le 0\ \ \forall\omega\in(-\infty,+\infty),\ det\,(i\omega I-A)\ne 0.$$

Воспользуемся данным следствием для получения необходимого и достаточного условия полной управляемости «по выходу».

Пусть система (1.1) полностью управляема (в обычном смысле) и полностью наблюдаема. Рассмотрим квадратичную форму $V(x)=x^*Hx$, где матрица $H=H^*$ - из условия (1.2). Покажем, что $H\ne kc\cdot c^*$ ни при каких $k\in R$.

Действительно, если $H=kc\cdot c^*$, то из (1.2) получим:

$$2x^*H(Ax+Bu)-uc^*(Ax+Bu)=2x^*kc\cdot c^*(Ax+Bu)-uc^*(Ax+Bu)=$$

$$=(2x^*kc-u)c^*(Ax+Bu)=(2kc^*x-u)\cdot(c^*Ax+c^*Bu)\le 0\quad \forall\, x\in R^2, u\in R.$$

Но выполнение последнего неравенства $\forall\, x\in R^2$ и $\forall\, u\in R -$ невозможно, т. к. система (1.1) полностью наблюдаема и, следовательно, векторы c^* и c^*A линейно независимы.

Выберем точки $x', x''\in R^2$ – так, чтобы $c^*x'=c^*x''$, а $V(x')\ne V(x'')$. Это возможно, поскольку в противном случае:

$$\{\forall\, x',x''\in R^2,\ c^*x'=c^*x''\ \Rightarrow\ V(x')=V(x'')\}\Leftrightarrow V(x)=V(c^*x)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(x)=k(c^*x)^2=kx^*c\,c^*x=x^*Hx\ \Rightarrow\ H=kc\cdot c^*,$$

а это невозможно, как показано выше.

Очевидно, что среди точек $x', x''\in R^2$, для которых $c^*x'=c^*x''$, всегда можно выбрать такие точки, для которых $V(x'')>V(x')$ и точки, для которых $V(x'')<V(x')$.

Введем обозначение: $\varphi(\omega)=Re[i\omega\cdot W(i\omega)]=-Im\,[\omega\cdot W(i\omega)]$.

Основная теорема (Необходимое и достаточное условие полной управляемости «по выходу»).

Пусть система (1.1) П/У (в обычном смысле) и полностью наблюдаема. Для того, чтобы эта система была П/У «по выходу», необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\omega)$ меняла знак при $\omega\in(-\infty,+\infty)$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть система (1.1) П/У «по выходу». Тогда существует управление $u=u(\sigma)$, переводящее эту систему из любого состояния x' в любое состояние x'' за некоторое время $T>0$.

Предположим, что функция $\varphi(\omega)$ не меняет знак при $\omega\in(-\infty,+\infty)$. Если $\varphi(\omega)\ge 0$ $\forall\omega\in(-\infty,+\infty)$, то по частотной теореме существует вещественная матрица $H=H^*$, удовлетворяющая неравенству:

$$2x^*H(Ax+Bu)-uc^*(Ax+Bu)\le 0\quad \forall\, x\in R^n, u\in R^1.$$

Если $\varphi(\omega)\le 0$ $\forall\omega\in(-\infty,+\infty)$, то по частотной теореме существует вещественная матрица $H=H^*$, удовлетворяющая неравенству:

$2x^*H(Ax+Bu)+uc^*(Ax+Bu)\le 0 \quad \forall\, x\in R^n, u\in R^1.$

Таким образом, если функция $\varphi(\omega)$ не меняет знак при $\omega\in(-\infty,+\infty)$, то существует вещественная матрица $H=H^*$, удовлетворяющая неравенству:

$$2x^*H(Ax+Bu)\pm uc^*(Ax+Bu)\le 0 \quad \forall\, x\in R^n, u\in R^1.$$

Пусть $V(x)=x^*Hx$. Выберем точки x' и x'' - так, чтобы $c^*x'=c^*x''$, а $V(x'')>V(x')$. Пусть управление $u=u(\sigma)$ переводит систему (1.1) из состояния x' в состояние x'' за некоторое время $T>0$: $x(0)=x'$, $x(T)=x''$.

Тогда имеем: $\sigma(0)=\sigma(T)$, $\dot\sigma(t)=c^*\big[Ax(t)+Bu\big(\sigma(t)\big)\big]$ и

$$\int_0^T uc^*(Ax+Bu)\,dt=\int_0^T u\big(\sigma(t)\big)\cdot c^*\big[Ax(t)+Bu\big(\sigma(t)\big)\big]\,dt=$$

$$=\int_0^T u\big(\sigma(t)\big)\cdot\dot\sigma(t)\,dt=\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)}u(\sigma)\,d\sigma=0 \text{ (т. к. } \sigma(0)=\sigma(T)).$$

Заметим, что если на некотором участке $[t_1;t_2]\subset[0;T]$ возникает скользящий режим, то равенство сохраняется, т. к. в этом случае $\dot\sigma(t)=0$ на $[t_1;t_2]$ и, следовательно: $\int_{t_1}^{t_2}uc^*(Ax+Bu)\,dt=0$. Далее:

$$V(x'')-V(x')=V\big(x(t)\big)\Big|_0^T=\int_0^T\dot V\big(x(t)\big)\,dt=\int_0^T 2x^*H(Ax+Bu)\,dt=$$

$$=\int_0^T 2x^*H(Ax+Bu)\,dt\pm\int_0^T uc^*(Ax+Bu)\,dt=$$

$$=\int_0^T[2x^*H(Ax+Bu)\pm uc^*(Ax+Bu)]\,dt\le 0.$$

Следовательно, $V(x'')\le V(x')$, а это противоречит условию: $V(x'')>V(x')$.

Это противоречие показывает, что функция $\varphi(\omega)$ должна менять знак при $\omega\in(-\infty,+\infty)$. Необходимость доказана.

Обсудим полученный результат прежде, чем перейдём к доказательству достаточности,

В силу П/У система (1.1) может быть записана в следующем виде:

$$\ddot x+\delta_1\dot x+\delta_0 x=u(\sigma),\qquad \sigma=c_1x+c_2\dot x\,. \tag{1.4}$$

Или, если $x_1=x$, $x_2=\dot x$, то

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=-\delta_0x_1-\delta_1x_2+u(\sigma)\end{cases},\quad \sigma=c_1x_1+c_2x_2. \tag{1.5}$$

В этих обозначениях функции $W(i\omega)$ и $\varphi(\omega)$ имеют следующий вид:

$$W(i\omega)=\frac{1}{(\delta_0-\omega^2)^2+\delta_1^2\omega^2}[c_1(\delta_0-\omega^2)+c_2\delta_1\omega^2+i\omega(c_2\delta_0-c_2\omega^2-c_1\delta_1)],$$

$$\varphi(\omega)=\frac{\omega^2}{(\delta_0-\omega^2)^2+\delta_1^2\omega^2}(c_2\omega^2+c_1\delta_1-c_2\delta_0).$$

Тогда условие теоремы: «функция $\varphi(\omega)$ меняет знак при $\omega\in(-\infty,+\infty)$» равносильно выполнению неравенства:

$$c_2\cdot(c_1\delta_1-c_2\delta_0)<0. \tag{1.6}$$

Из условия (1.6) в частности следует, что при $c_2 = 0$ (т. е. когда $\sigma = x_1$, $u = u(x_1)$) система (1.1) не является П/У «по выходу». Иными словами, уравнение $\ddot{x} + \delta_1\dot{x} + \delta_0 x = u(x)$ ни при каких значениях δ_0, δ_1 не является П/У «по выходу».

При $c_1 = 0$ (т. е. когда $\sigma = x_2, u = u(x_2)$) из условия (1.6) следует, что $\delta_0 > 0$. Это означает, что уравнение $\ddot{x} + \delta_1\dot{x} + \delta_0 x = u(\dot{x})$ может быть П/У «по выходу» только при $\delta_0 > 0$. Далее будет доказано, что при этом условии система будет П/У «по выходу».

Достаточность. Поскольку система (1.1) П/У в обычном смысле, то её можно привести к виду (1.5). Пусть функция $\varphi(\omega)$ меняет знак при $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Это означает, что выполнено неравенство (1.6), из которого следует, что $c_2 \neq 0$. Следовательно, можно считать, что $c_2 = 1$ и $c_1 = c$, т. е. $\sigma = cx_1 + x_2$, а условие (1.6) запишется в виде: $c\delta_1 - \delta_0 < 0$.

Таким образом, рассматривается система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\delta_0 x_1 - \delta_1 x_2 + u(\sigma) \end{cases}, \quad \sigma = cx_1 + x_2 \tag{1.5a}$$

при условии:

$$c\delta_1 - \delta_0 < 0. \tag{1.6a}$$

Докажем, что система (1.5a) при выполнении условия (1.6a) является П/У «по выходу».

Пусть $x' = (a_1, a_2)^T$, $x'' = (b_1, b_2)^T$. Требуется найти управление $u = u(\sigma)$, переводящее систему (1.5a) из точки x' в точку x''. Управление будем искать в следующем виде:

$$u(\sigma) = \delta_1 \cdot \sigma + u_0, \;\; u_0 = const. \tag{1.7}$$

Подставляя управление (1.7) в систему (1.5a), получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\delta_0 x_1 - \delta_1 x_2 + \delta_1\sigma + u_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\delta_0 x_1 + \delta_1(\sigma - x_2) + u_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\delta_0 x_1 + \delta_1 c x_1 + u_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(\delta_0 - c\delta_1)x_1 + u_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma^2 x_1 + u_0 \end{cases},$$

где $\gamma^2 = \delta_0 - c\delta_1 > 0$.

Решение последней системы с учётом начальных данных: $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2$ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{a_2}{\gamma} sin(\gamma t) + a_1 cos(\gamma t) + \frac{2u_0}{\gamma^2} sin^2\left(\frac{\gamma t}{2}\right) \\ x_2(t) = a_2 cos(\gamma t) - \gamma a_1 sin(\gamma t) + \frac{u_0}{\gamma} sin(\gamma t) \end{cases}.$$

Требуется подобрать константу u_0 так, чтобы существовало $T > 0$ такое, что $x_1(T) = b_1$, $x_2(T) = b_2$. Введя обозначение $\tau = \gamma \cdot T$ $(\gamma > 0)$, получим систему уравнений относительно переменных τ, u_0:

$$\begin{cases} \frac{2u_0}{\gamma^2} sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right) = b_1 - \frac{a_2}{\gamma} sin\,\tau - a_1 cos\,\tau \\ \frac{u_0}{\gamma} sin\,\tau = b_2 - a_2 cos\,\tau + \gamma a_1 sin\,\tau. \end{cases} \tag{1.8}$$

Заметим, что если $a_2 + b_2 = 0$, то система (1.8) имеет решение:

$$\tau = \pi,\ u_0 = \frac{1}{2}\gamma^2(a_1 + b_1).$$

Далее можно считать, что $a_2 + b_2 \neq 0$. Введём обозначение: $z = tg(\tau/2)$. Тогда $sin\,\tau = \frac{2z}{1+z^2}$, $cos\,\tau = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, и система (1.8) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{2u_0}{\gamma^2} z^2 = z^2(b_1 + a_1) - \frac{2a_2}{\gamma} z + (b_1 - a_1) \\ \frac{2u_0}{\gamma} z = z^2(b_2 + a_2) + 2\gamma a_1 z + (b_2 - a_2). \end{cases} \tag{1.8a}$$

Исключая из этой системы переменную u_0, получим уравнение относительно z:

$$(z^2 + 1)\cdot[z(a_2 + b_2) + \gamma(a_1 - b_1)] = 0.$$

Поскольку $a_2 + b_2 \neq 0$, можно найти решение: $z_0 = \gamma\cdot\frac{b_1 - a_1}{b_2 + a_2}$.

Если $z_0 \neq 0$ $(a_1 \neq b_1)$, то подставляя значение z_0 в систему (1.8a), найдём решение u_0:

$$u_0 = \frac{1}{2}\gamma^2(a_1 + b_1) + \frac{1}{2}\frac{b_2^2 - a_2^2}{b_1 - a_1}. \tag{1.9}$$

Таким образом, если $a_1 \neq b_1$, то система (1.8) имеет решение (1.9). При этом

$$\tau = \left[\begin{array}{l} 2arctg\, z_0\,, \ \text{если } z_0 > 0 \\ \pi + 2arctg\, z_0\,, \text{если } z_0 < 0 \end{array}\right., \quad \text{где} \quad z_0 = \gamma\cdot\frac{b_1 - a_1}{b_2 + a_2}, \text{ т. е. } \ 0 < \tau \leq \pi$$

($\tau = \pi$, если $a_2 + b_2 = 0$).

Это означает, что управление (1.7) переводит систему (1.5a) из точки x' в точку x'' за время T, где $0 < \gamma\cdot T \leq \pi$. Заметим, что при этом производная $\dot{\sigma}(t)$ обращается в ноль не более одного раза,
т. к. функция $\sigma(t)$ имеет вид:

$$\sigma(t) = k_1 sin(\gamma t) + k_2 cos(\gamma t) + k_3, \text{где } k_i = const,\ 0 < \gamma\cdot T \leq \pi.$$

Отметим следующее равенство:

$$\dot{\sigma}(0) = u_0 + c\cdot a_2 - \gamma^2\cdot a_1, \tag{1.10}$$

где u_0 вычисляется по формуле (1.9).

Рассмотрим случай, когда $a_1 = b_1$ $(z_0 = 0)$. Введём обозначения:

$$\sigma' = \sigma(0) = ca_1 + a_2,\quad \sigma'' = \sigma(T) = cb_1 + b_2.$$

Заметим, что $\sigma'' - \sigma' = b_2 - a_2$, т. к. $a_1 = b_1$. Выберем на прямой $\sigma = \sigma'$ точку $M(s, c(a_1 - s) + a_2), s \neq a_1$. Покажем, что промежуточную точку M можно выбрать так, чтобы можно было осуществить движение из x' в x'', проходя через эту точку M с помощью управления, которое является управлением по «по выходу».

Так как $s \neq a_1$, то, как показано выше, существует управление вида $u(\sigma) = \delta_1 \cdot \sigma + u_1$, $u_1 = const$, которое переводит систему из точки x' в точку M за некоторый промежуток $[0; T_1]$. Величина u_1 вычисляется по формуле (1.9) с заменой b_1 на s, b_2 на $c(a_1 - s) + a_2$:

$$u_1 = \frac{1}{2} s(\gamma^2 + c^2) + \frac{1}{2} a_1(\gamma^2 - c^2) - a_2 c. \tag{1.9а}$$

Поскольку $s \neq b_1$, существует также управление вида $u(\sigma) = \delta_1 \cdot \sigma + u_2$, $u_2 = const$, которое переводит эту систему из точки M в точку x'' за некоторый промежуток $[T_1; T_2]$. Величина u_2 вычисляется по формуле (1.9) с заменой a_1 на s, a_2 на $c(a_1 - s) + a_2$, b_1 на a_1:

$$u_2 = \tfrac{1}{2} s(\gamma^2 + c^2) + \tfrac{1}{2} a_1(\gamma^2 - c^2) - a_2 c - \tfrac{1}{2} \tfrac{b_2^2 - a_2^2}{s - a_1}. \tag{1.9б}$$

Тогда «сквозное» управление:

$$u(t) = \begin{cases} \delta_1 \cdot \sigma(t) + u_1, & 0 \leq t < T_1 \\ \delta_1 \cdot \sigma(t) + u_2, & T_1 \leq t \leq T_2. \end{cases} \tag{1.11}$$

переведёт систему $(1.5а)$ из точки x' в точку x''. Остаётся лишь доказать, что промежуточную точку M (т. е. координату s) можно подобрать так, чтобы управление (1.11) было функцией «выхода»: $u = u(\sigma)$.

Из формул (1.9), $(1.9а)$, $(1.9б)$ и (1.10) для управления (1.11) можно получить следующие равенства:

$$\dot{\sigma}(0) = \tfrac{1}{2}(\gamma^2 + c^2)(s - a_1); \; \dot{\sigma}(T_1) = -\tfrac{1}{2}\left[(\gamma^2 + c^2)(s - a_1) + \tfrac{b_2^2 - a_2^2}{s - a_1}\right]. \tag{1.12}$$

Производная $\dot{\sigma}(t)$ обращается в ноль, как отмечено выше, не более одного раза на каждом из промежутков $[0; T_1]$ и $[T_1; T_2]$. Следовательно, для того, чтобы управление (1.11) являлось функцией «выхода», достаточно потребовать выполнения следующих условий:

если $\sigma' > \sigma''$, то $\begin{cases} \dot{\sigma}(0) > 0 \\ \dot{\sigma}(T_1) < 0 \end{cases}$; если $\sigma' < \sigma''$, то $\begin{cases} \dot{\sigma}(0) < 0 \\ \dot{\sigma}(T_1) > 0 \end{cases}$ (рис. 1).

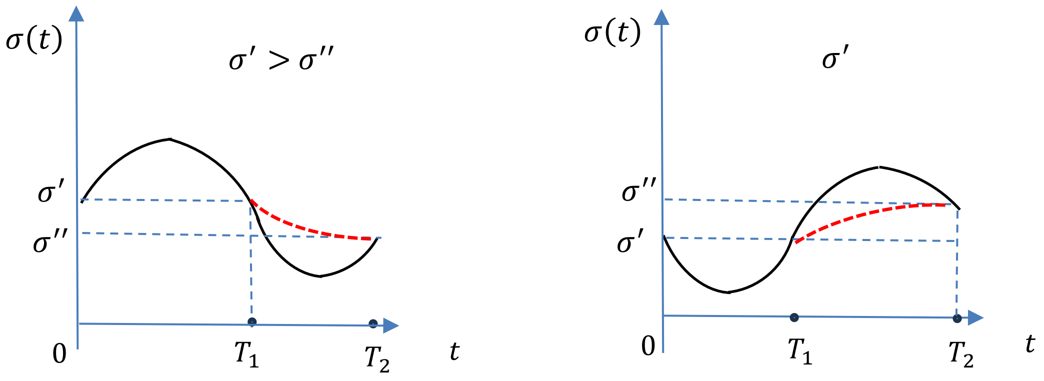

Рис. 1.

Из этих условий и формул (1.12) получим систему неравенств относительно переменной s.

$$\begin{cases} (\gamma^2+c^2)(s-a_1)>0 \\ (\gamma^2+c^2)(s-a_1)+\frac{b_2^2-a_2^2}{s-a_1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s-a_1>0 \\ (\gamma^2+c^2)(s-a_1)^2>a_2^2-b_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s>a_1 \\ (s-a_1)^2>\frac{a_2^2-b_2^2}{\gamma^2+c^2} \end{cases} \text{ при } \sigma'>\sigma''.$$

$$\begin{cases} (\gamma^2+c^2)(s-a_1)<0 \\ (\gamma^2+c^2)(s-a_1)+\frac{b_2^2-a_2^2}{s-a_1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s-a_1<0 \\ (\gamma^2+c^2)(s-a_1)^2>a_2^2-b_2^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} s<a_1 \\ (s-a_1)^2>\frac{a_2^2-b_2^2}{\gamma^2+c^2} \end{cases} \text{ при } \sigma'<\sigma''.$$

Следовательно, переменную s выбираем следующим образом:

$$\begin{cases} s>a_1, & \text{при } \sigma'>\sigma'' \\ s<a_1, & \text{при } \sigma'<\sigma'' \end{cases} \text{ если } |a_2|\le|b_2|;$$

$$\begin{cases} s>a_1+\sqrt{\frac{a_2^2-b_2^2}{\gamma^2+c^2}}, & \text{при } \sigma'>\sigma'' \\ s<a_1-\sqrt{\frac{a_2^2-b_2^2}{\gamma^2+c^2}}, & \text{при } \sigma'<\sigma'' \end{cases} \quad \text{если } |a_2|>|b_2|.$$

Выбирая таким образом промежуточную точку M с абсциссой s, можно перевести систему (1.5а) из точки $x'=(a_1,a_2)^T$ в точку $x''=(b_1,b_2)^T$ в случае $a_1=b_1$ с помощью кусочно-линейного управления (1.9) , которое является функцией «выхода». Это управление задаётся следующим образом

$$\sigma'>\sigma''\Longrightarrow u(\sigma)=\begin{cases} \delta_1\sigma+u_1, & \sigma>\sigma' \\ \delta_1\sigma+u_2, & \sigma<\sigma', \end{cases} \qquad \sigma'<\sigma''\Longrightarrow u(\sigma)=\begin{cases} \delta_1\sigma+u_1, & \sigma<\sigma' \\ \delta_1\sigma+u_2, & \sigma>\sigma'. \end{cases}$$

Здесь u_1,u_2 вычисляются по формулам $(1.9\text{а}),(1.9\text{б})$.

Итак, в случае $a_1=b_1$ система (1.5а) также управляема по «выходу». Тем самым доказано, что для любых $x',x''\in R^2$ существует управление $u=u(\sigma)$, которое переводит систему (1.5а) за некоторое время $T>0$ из состояния x' в состояние x''. Теорема доказана.

Часть 2. Примеры.

Полученные выше результаты позволяют поставить вопрос о нахождении в пространстве состояний систем, не являющихся П/У «по выходу», областей управляемости $G\subset R^2$, обладающих следующим свойством: $\forall\ x',\ x''\in G \quad \exists\ T>0,\ \exists\ u=u(\sigma)$ такие, что соответствующее решени $x=x(t)$ системы удовлетворяет условиям: $x(0)=x', x(T)=x''$.

Условие П/У «по выходу» для системы (1.5):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=Ax+Bu \\ \sigma=c^*x \end{cases}, \quad u=u(\sigma),\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\delta_0 & -\delta_1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ c_1^2+c_2^2\neq 0.$$

имеет вид:

$$c_2 \cdot (c_1 \delta_1 - c_2 \delta_0) < 0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим пример построения в пространстве состояний системы (1.5), не являющейся П/У «по выходу», области G_0 нуль-управляемости (или нуль-достижимости), где G_0 – это множество всех таких состояний системы (1.5), из каждого из которых эта система может быть за конечное время T переведена в состояние $(0; 0)$ с помощью управления $u(\sigma)$, являющегося функцией «выхода».

Пример 1.

$$\ddot{x} = u(\sigma),\ \sigma = c_1 x + c_2 \dot{x} \tag{2.2}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$

Система (2.2) является полностью управляемой в обычном смысле, но не является П/У «по выходу», т. к. условие (2.1) не выполнено: $\delta_0 = \delta_1 = 0$. Найдём область нуль-управляемости G_0 для этой системы для различных «выходов» σ.

1) При условии $c_1 = 0$ система (2.2) имеет вид: $\ddot{x}(t) = u(\dot{x})$. В этом случае область нуль-управляемости:

$G_0 = \{(x_1; x_2) \in R^2\colon\ x_1 x_2 < 0\}$ (рис. 2). Доказательство этого факта аналогично доказательству в [5]. Заметим, что в данном случае система *не наблюдаема* $(\mathrm{c}^* \mathrm{A} = 0)$.

2) При условии $c_2 = 0$ система (2.2) имеет вид: $\ddot{x}(t) = u(x)$.

В этом случае $G_0 = \{(x_1; x_2) \in R^2\colon\ x_1 \neq 0\}$ – вся плоскость R^2 за исключением оси Ox_2.

3) При условии $c_1 \cdot c_2 < 0$ имеем такую же область: $G_0 = \{(x_1; x_2) \in R^2\colon\ x_1 \neq 0\}$.

4) При условии $c_1 \cdot c_2 > 0$ имеем: $G_0 = R^2$. Доказательство утверждений 2), 3), 4) аналогично доказательству в [5, 6].

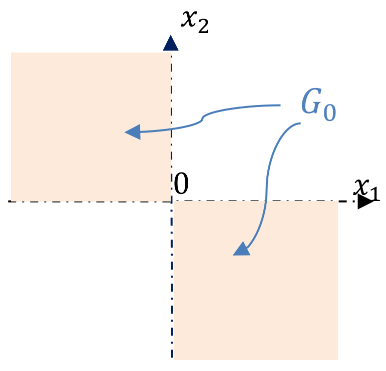

Рис. 2.

Далее рассмотрим системы, где есть ограничение на управление вида: $u(\sigma) \in \Omega \subset R^1$.

Пример 2.

$$\ddot{x} = u(\sigma),\ \sigma = c_1 x + c_2 \dot{x},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0,\ |u(\sigma)| \leq 1. \tag{2.3}$$

Здесь, как и в предыдущем примере $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$ отличие лишь в наличии ограничения: $|u| \leq 1$.

Как показано в [6], области нуль-управляемости для системы (2.3) в зависимости от значений c_1, c_2 имеют вид:

1) $c_1 = 0,\ c_2 \neq 0\ \Rightarrow\ G_0 = G_- \cup G_+$ (рис. 3), где
$G_- = \left\{(x_1; x_2):\ x_1 \leq -\frac{1}{2}x_2^2,\ x_2 > 0\right\},\ G_+ = \left\{(x_1; x_2):\ x_1 \geq \frac{1}{2}x_2^2,\ x_2 < 0\right\};$
2) $c_1 \neq 0,\ c_2 = 0\ \Rightarrow\ G_0 = G_- \cup G_+$, где
$G_- = \left\{(x_1; x_2):\ x_1 \leq -\frac{1}{2}x_2^2\right\},\quad G_+ = \left\{(x_1; x_2):\ x_1 \geq \frac{1}{2}x_2^2\right\}$ (рис. 4);

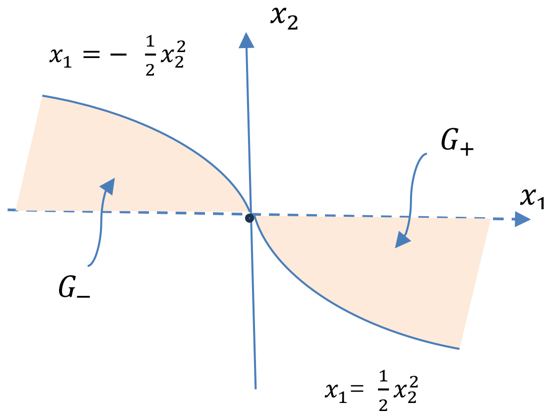

Рис. 3

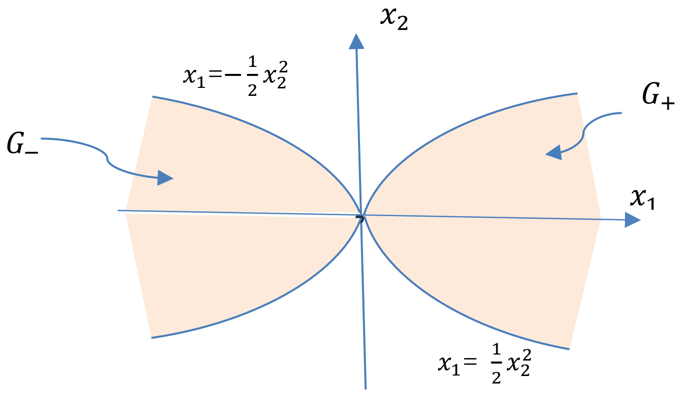

Рис. 4.

3) $c_1 \cdot c_2 < 0\ \Rightarrow\ G_0 = G_- \cup G_+$, где
$G_- = \left\{(x_1; x_2):\ x_1 \leq -\frac{1}{2}x_2^2,\ x_2 \geq 0\right\} \cup \left\{(x_1; x_2):\ x_1 < -\frac{1}{2}x_2^2 - 2c_0x_2, x_2 \leq 0\right\},$
$G_+ = \left\{(x_1; x_2):\ x_1 \geq \frac{1}{2}x_2^2,\ x_2 \leq 0\right\} \cup \left\{(x_1; x_2):\ x_1 > \frac{1}{2}x_2^2 - 2c_0x_2,\ x_2 \geq 0\right\}$. Здесь $c_0 = \frac{c_2}{c_1}$ (рис. 5). 4) $c_1 \cdot c_2 > 0\ \Rightarrow\ G_0 = R^2$.

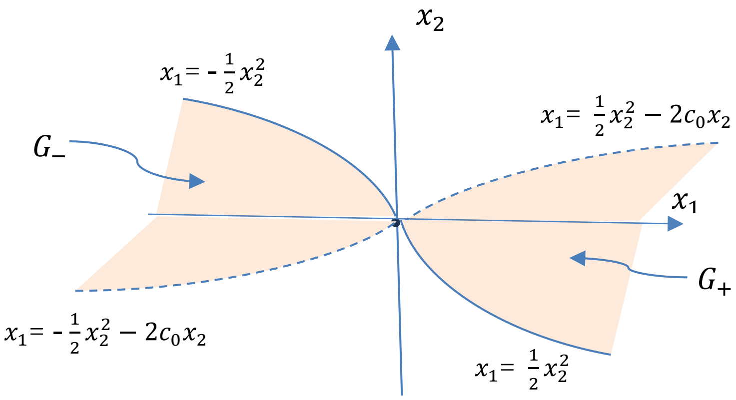

Рис. 5.

Пример 3.

$$\ddot{x} + \gamma^2 x = u(\sigma),\ \sigma = c_1 x + c_2 \dot{x},\ |u(\sigma)| \le 1. \qquad (2.4)$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma^2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ \ c_1^2 + c_2^2 \ne 0.$

Система (2.4) полностью управляема в обычном смысле. Найдём G_0 для двух различных σ.

1) При условии $c_1 = 0, c_2 = 1$ $(\sigma = \dot{x})$ система (2.4) полностью наблюдаема и имеет вид:

$$\ddot{x} + \gamma^2 x = u(\dot{x}), \text{ где } |u(\dot{x})| \le 1$$

В этом случае условие (2.1) выполнено:

$$c_1 = 0, c_2 = 1,\ \delta_0 = \gamma^2,\ \delta_1 = 0\ \Rightarrow c_2 \cdot (c_1\delta_1 - c_2\delta_0) = 1 \cdot (0 - \gamma^2) < 0$$

Следовательно, система (2.4) является П/У «по выходу». Это значит, что в случае отсутствия ограничения: $|u(\sigma)| \le 1$ область нуль-управляемости совпала бы с R^2.

Покажем, что с ограничением $|u(\sigma)| \le 1$ область G_0 тоже будет совпадать с R^2.

Для простоты примем $\gamma = 1$. Пусть $x_0 = (a_1 \quad a_2)^T$. Искомое управление, переводящее систему из точки x_0 в начало координат, представим в следующем виде:

$$u(\sigma) = -u_0 \cdot sign\, \sigma, \text{ где } u_0 \in (0, 1].$$

Отметим, что в случае $u(\sigma) = u_0$ траектории системы (2.4) - полуокружности:

$$(x_1 - u_0)^2 + x_2^2 = r_-^2, \text{где } r_-^2 = (a_1 - u_0)^2 + a_2^2,$$

а в случае $u(\sigma) = -u_0$ – полуокружности:

$$(x_1 + u_0)^2 + x_2^2 = r_+^2, \text{где } r_+^2 = (a_1 + u_0)^2 + a_2^2 \ \text{(рис. 6)}$$

$$r_0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2};$$

$$R = max\left\{r_0, \sqrt{(a_1 + 1)^2 + a_2^2}\right\}, \text{если } \left[\begin{array}{l} a_2 > 0 \\ \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ и}$$

$$R = max\left\{r_0, \sqrt{(a_1 - 1)^2 + a_2^2}\right\}, \text{если } \left[\begin{array}{l} a_2 < 0 \\ \begin{cases} a_2 = 0. \\ a_1 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Выберем наименьшее натуральное число N такое, что $R \le 2N + 1$. Величину u_0 найдём из условия, что расстояние R_0 от точки $x_0 = (a_1 \quad a_2)^T$ до точки $(-u_0 \quad 0)^T$ (это в случае $a_2 > 0$) было бы равно $(2N + 1)u_0$ (рис.6).

Получаем квадратное уравнение относительно u_0:

$$(a_1 \pm u_0)^2 + a_2^2 = (2N + 1)^2 \cdot u_0^2,$$

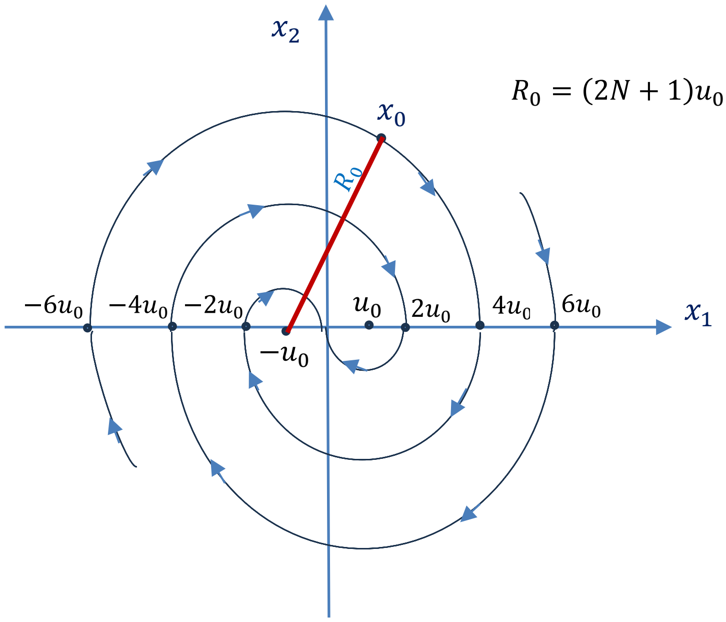

Рис. 6.

где вместо «$\pm$» берём знак «+», если $\left[\begin{array}{l} a_2 > 0 \\ \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ и знак «$-$», если $\left[\begin{array}{l} a_2 < 0 \\ \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Это квадратное уравнение всегда имеет решение $u_0 \in (0, 1]$, т. к.

$(2N+1)u_0 = R_0 \le R \Rightarrow u_0 \le \frac{R}{2N+1} \le 1.$

Таким образом, управление $u(\sigma) = -u_0 \cdot sign\,\sigma$, где $u_0 \in (0, 1]$ - переводит систему из точки x_0 в начало координат. Соответствующие траектории показаны на рисунке 6.

2) При $c_1 = 1, c_2 = 0$ $(\sigma = x)$ система (2.4) полностью наблюдаема и имеет вид:

$\ddot{x} + \gamma^2 x = u(x)$, где $|u(x)| \le 1$.

В этом случае условие (2.1) не выполнено:

$c_1 = 1, c_2 = 0,\ \delta_0 = \gamma^2,\ \delta_1 = 0\ \Rightarrow c_2 \cdot (c_1\delta_1 - c_2\delta_0) = 0$

Следовательно, система (2.4) не является П/У «по выходу». Покажем, что в этом случае область нуль-управляемости G_0 состоит из 2-х эллипсов: $G_0 = G_- \cup G_+$, где

$G_- = \{(x_1; x_2) \in R^2\colon\ x_1 \le 0,\ \gamma^4(x_1 + \gamma^{-2})^2 + \gamma^2 x_2^2 \le 1\},$

$G_+ = \{(x_1; x_2) \in R^2\colon\ x_1 \ge 0,\ \gamma^4(x_1 - \gamma^{-2})^2 + \gamma^2 x_2^2 \le 1\}.$

В случае $\gamma = 1$ область G_0 состоит из 2-х кругов: $G_0 = G_- \cup G_+$, где

$G_- = \{(x_1; x_2) \in R^2\colon\ x_1 \le 0,\ (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \le 1\},$

$G_+ = \{(x_1; x_2) \in R^2\colon\ x_1 \ge 0,\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 1\}$ (рис.7).

Для доказательства воспользуемся следующим равенством:

$$\frac{1}{2}x_2^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} x_2\,\dot{x}_2 dt = \int_{t_1}^{t_2} x_2\,[u(x_1) - x_1]dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_1\,[u(x_1) - x_1]dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \dot{\sigma}(t)\,\big[u\big(\sigma(t)\big) - \sigma(t)\big]dt = \int_{\sigma(t_1)}^{\sigma(t_2)} [u(\sigma) - \sigma]\,d\sigma.$$

Если $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, то $x_2^2(t_1) = x_2^2(t_2)$ и $|x_2(t_1)| = |x_2(t_2)|$.

Следовательно, если траектория пересекает ось Ox_2 не в начале координат, то эта траектория далее при том же управлении уже не может проходить через начало координат.

Рассмотрим первый случай, когда точка $x_0 = (a_1, a_2)^T$ лежит в левой полуплоскости. Пусть $x_0 \in G_-$; тогда постоянное управление $u(\sigma) = u_0$, где $u_0 = (a_1^2 + a_2^2)/2a_1$, переводит систему (2.4) из точки x_0 в начало координат, причем $|u_0| \leq 1$. При этом соответствующая траектория есть дуга окружности с центром в точке $(u_0; 0)$ и радиуса $|u_0|$ (рис. 7).

Пусть $x_0 \notin G_-$; учитывая ограничения: $-1 \leq u(x) \leq 1$ – можно утверждать, что траектория пересечёт ось Ox_2 в некоторой точке $M_0(0; x_2^0)$, где $x_2^0 \neq 0$. Следовательно, эта траектория не может пройти через начало координат. Значит, $x_0 \notin G_0$.

Случай, когда точка x_0 лежит в правой полуплоскости, рассматривается аналогично. Таким образом, $G_0 = G_- \cup G_+$.

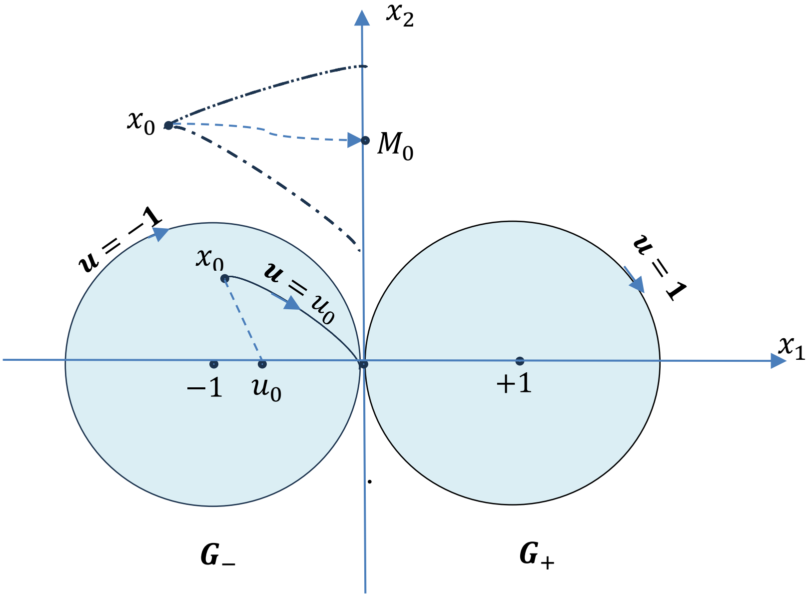

Рис. 7.

Часть 3. Система общего вида.

Рассмотрим линейную стационарную систему управления «по выходу» общего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ \sigma = c^* x \end{cases}, t \in [0; T],\ u = u(\sigma). \tag{3.1}$$

Здесь $x = x(t) \in R^n, u = u(\sigma) \in R^m, \sigma \in R^1,\ \sigma = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n,\ n \geq 2,\ m \geq 1$,
A, B – матрицы размерностей соответственно $n \times n,\ n \times m, c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$.

Пусть система (3.1) полностью управляема в обычном смысле и полностью наблюдаема. $W(i\omega) = c^*(i\omega I - A)^{-1}B$ – частотная характеристика системы,

$\varphi(\omega) = Re[i\omega \cdot W(i\omega)] = -Im\,[\omega \cdot W(i\omega)]$ – вектор-функция скалярного аргумента ω, $\varphi(\omega) \in R^m$. В следующей теореме доказывается необходимое условие полной управляемости системы (3.1) «по выходу».

Теорема. Пусть система (3.1) $-$ П/У «по выходу». Тогда вектор-функция $\varphi(\omega)$ меняет направление при $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Если $m = 1$, то функция $\varphi(\omega)$ меняет знак при $\omega \in (-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют $\boldsymbol{m}$-вектор $\boldsymbol{d \neq 0}$ и скалярная функция $\boldsymbol{\lambda(\omega)}$ – такие, что $\boldsymbol{\varphi(\omega) = \lambda(\omega)\cdot d^*}$, где функция $\boldsymbol{\lambda(\omega)}$ сохраняет знак при $\boldsymbol{\omega} \in (-\infty, +\infty)$: $\boldsymbol{\lambda(\omega) \geq 0}$ $\forall\, \boldsymbol{\omega} \in (-\infty, +\infty)$, $\boldsymbol{\omega \neq \omega_j}$, или $\boldsymbol{\lambda(\omega) \leq 0}$ $\forall\, \boldsymbol{\omega} \in (-\infty, +\infty)$, $\boldsymbol{\omega \neq \omega_j}$, где $\boldsymbol{i\omega_j}$ – чисто мнимые собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$.

Тогда для эрмитовой формы $F(x, u) = Re\,[u^* dc^*(Ax + Bu)]$, где $x \in C^n$, $u \in C^m$ имеем:

$$F((i\omega I - A)^{-1}Bu, u) = Re\,[u^* dc^* i\omega(i\omega I - A)^{-1}Bu] =$$

$$= Re\,[u^* d \cdot i\omega c^*(i\omega I - A)^{-1}Bu] = Re\,[u^* d \cdot i\omega W(i\omega)u] =$$

$$= u^* \cdot d \cdot Re[i\omega W(i\omega)] \cdot u = u^* \cdot d \cdot \varphi(\omega) \cdot u = u^* \cdot d \cdot \lambda(\omega) \cdot d^* \cdot u = \lambda(\omega) \cdot |d^* u|^2.$$

Если $\lambda(\omega) \geq 0$ $\forall\, \omega \in (-\infty, +\infty)$, $\omega \neq \omega_j$, то

$F((i\omega I - A)^{-1}Bu, u) \geq 0$ $\quad \forall\omega \in (-\infty, +\infty)$, $det\,(i\omega I - A) \neq 0$ и $\forall u \in R^m$.

Если $\lambda(\omega) \leq 0$ $\forall\, \omega \in (-\infty, +\infty)$, $\omega \neq \omega_j$, то

$F((i\omega I - A)^{-1}Bu, u) \leq 0$ $\quad \forall\omega \in (-\infty, +\infty)$, $det\,(i\omega I - A) \neq 0$ и $\forall u \in R^m$.

Тогда в силу частотной теоремы существует вещественная матрица $H = H^*$ такая, что:

$$2x^* H(Ax + Bu) \pm u^* dc^*(Ax + Bu) \leq 0 \quad \forall\, x \in R^n, u \in R^m, \tag{3.2}$$

где вместо «$\pm$» стоит «$-$», если $\lambda(\omega) \geq 0$, и «$+$», если $\lambda(\omega) \leq 0$.

Рассмотрим квадратичную форму $V(x) = x^* Hx$ с матрицей $H = H^*$. Покажем, что $H \neq kc \cdot c^*$ ни при каких $k \in R$.

Действительно, если $H = kc \cdot c^*$, то из (3.2) имеем:

$$2x^* H(Ax + Bu) \pm u^* dc^*(Ax + Bu) = 2x^* kc \cdot c^*(Ax + Bu) \pm u^* dc^*(Ax + Bu) =$$

$$= (2x^* kc \pm u^* d)c^*(Ax + Bu) = (2kc^* x \pm u^* d) \cdot (c^* Ax + c^* Bu) \leq 0.$$

Но выполнение последнего неравенства $\forall x \in R^n$ и $\forall u \in R^m$ – невозможно, т. к. система (3.1) полностью наблюдаема и, следовательно, векторы c^* и $c^* A$ линейно независимы.

Итак, доказано, что $H \neq kc \cdot c^*$ ни при каких $k \in R$.

Выберем точки $x', x'' \in R^n$ так, чтобы $c^* x' = c^* x''$, а $V(x') \neq V(x'')$.

Это можно сделать, т. к. в противном случае приходим к противоречию:

$$\{\forall\, x', x'' \in R^n,\ c^* x' = c^* x'' \implies V(x') = V(x'')\} \Leftrightarrow V(x) = V(c^* x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(x) = k(c^* x)^2 = kx^* c \cdot c^* x = x^* Hx \implies H = kc \cdot c^*.$$

Очевидно, что среди точек x', $x'' \in R^n$, для которых $c^* x' = c^* x''$, всегда можно выбрать такие точки, для которых $V(x'') > V(x')$ и точки, для которых $V(x'') < V(x')$.

Выберем точки x' и x'' - так, чтобы $c^* x' = c^* x''$, а $V(x'') > V(x')$. Пусть управление $u = u(\sigma)$ переводит систему (3.1) из состояния x' в состояние x'' за некоторое время $T > 0$: $x(0) = x'$, $x(T) = x''$.

Тогда имеем: $\sigma(0) = \sigma(T)$, $\dot{\sigma}(t) = c^*\big[Ax(t) + Bu\big(\sigma(t)\big)\big]$ и

$$\int_0^T u^* dc^*(Ax + Bu)\,dt = \int_0^T d^*u\big(\sigma(t)\big)\cdot c^*\big[Ax(t) + Bu\big(\sigma(t)\big)\big]\,dt =$$

$$= \int_0^T d^*u\big(\sigma(t)\big)\cdot\dot{\sigma}(t)\,dt = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} d^*u(\sigma)\,d\sigma = 0 \text{ (т. к. } \sigma(0) = \sigma(T)).$$

Заметим, что если на некотором участке $[t_1; t_2] \subset [0; T]$ возникает скользящий режим, то равенство сохраняется, т. к. в этом случае $\dot{\sigma}(t) = 0$ на $[t_1; t_2]$ и, следовательно: $\int_{t_1}^{t_2} u^* dc^*(Ax + Bu)\,dt = 0$. Далее:

$$V(x'') - V(x') = V\big(x(t)\big)\Big|_0^T = \int_0^T \dot{V}\big(x(t)\big)\,dt = \int_0^T 2x^*H(Ax + Bu)\,dt =$$

$$= \int_0^T 2x^*H(Ax + Bu)\,dt \pm \int_0^T u^* dc^*(Ax + Bu)\,dt =$$

$$= \int_0^T [2x^*H(Ax + Bu) \pm u^*dc^*(Ax + Bu)]\,dt \le 0.$$

Следовательно, $V(x'') \le V(x')$, а это противоречит условию: $V(x'') > V(x')$.

Это противоречие показывает, что вектор-функция $\varphi(\omega)$ должна менять направление при $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Теорема доказана.

Замечание. В условии теоремы вместо предположения о полной наблюдаемости системы $(\mathbf{3.1})$ достаточно было предположить линейную независимость векторов $\boldsymbol{c}^*$ и $\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{A}$.

Далее приведём примеры использования теоремы в случае $m = 1$ и $n \ge 3$.

Пример 4. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\dddot{x} + \delta_2\ddot{x} + \delta_1\dot{x} + \delta_0 x = u(\sigma), \quad \sigma = c_1x + c_2\dot{x} + c_3\ddot{x} \tag{3.3}$$

Запишем уравнение (3.3) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\delta_0x_1 - \delta_1x_2 - \delta_2x_3 + u(\sigma) \end{cases} \quad \sigma = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3. \tag{3.4}$$

Здесь $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \ddot{x}$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\delta_0 & -\delta_1 & -\delta_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \ne 0,$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega^2}{|\Delta(i\omega)|^2}[c_3\omega^4 + (c_2\delta_2 - c_1 - c_3\delta_1)\omega^2 + (c_1\delta_1 - c_2\delta_0)], \Delta(i\omega) = det(i\omega I - A).$$

Необходимое условие П/У «по выходу» для системы (3.4) согласно теореме, означает, что функция $\varphi(\omega)$ меняет знак при $\omega \in (-\infty, +\infty)$. А это означает, что многочлен

$$P(z) = c_3z^2 + (c_2\delta_2 - c_1 - c_3\delta_1)z + (c_1\delta_1 - c_2\delta_0)$$

имеет простой действительный положительный корень.

Рассмотрим частные случаи.

А) $c^* = (1 \quad 0 \quad 0) \Rightarrow \dddot{x} + \delta_2\ddot{x} + \delta_1\dot{x} + \delta_0 x = u(x)$,

$\varphi(\omega) = \frac{\omega^2}{|\Delta(i\omega)|^2}(-\omega^2 + \delta_1),\ P(z) = -z + \delta_1.$

Необходимое условие П/У «по выходу» имеет вид: $\boxed{\delta_1 > 0}$.

Б) $c^* = (0 \quad 1 \quad 0) \Longrightarrow \dddot{x} + \delta_2\ddot{x} + \delta_1\dot{x} + \delta_0 x = u(\dot{x})$,

$\varphi(\omega) = \frac{\omega^2}{|\Delta(i\omega)|^2}(\delta_2\omega^2 - \delta_0),\ P(z) = \delta_2 z - \delta_0.$

Необходимое условие П/У «по выходу» имеет вид: $\boxed{\delta_2\delta_0 > 0}$.

В) $c^* = (0 \quad 0 \quad 1) \Rightarrow \dddot{x} + \delta_2\ddot{x} + \delta_1\dot{x} + \delta_0 x = u(\ddot{x})$,

$\varphi(\omega) = \frac{\omega^2}{|\Delta(i\omega)|^2}\omega^2 \cdot (\omega^2 - \delta_1),\ P(z) = z^2 - \delta_1 z = z(z - \delta_1).$

Необходимое условие П/У «по выходу» имеет вид: $\boxed{\delta_1 > 0}$.

Пример 5. Рассмотри линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами:

$x^{(n)} + \delta_{n-1}x^{(n-1)} + \ \dots + \delta_1\dot{x} + \delta_0 x = u(x).$

Здесь $\sigma = x$, $c^* = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -\delta_0 & -\delta_1 & -\delta_2 & \dots & -\delta_{n-2} & -\delta_{n-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega^2}{|\Delta(i\omega)|^2} \cdot [\delta_1 - \delta_3\omega^2 + \delta_5\omega^4 - \delta_7\omega^6 + \ \dots + (-1)^k\delta_{2k+1}\omega^{2k}],$$

где $n = 2k$ или $n = 2k + 1$. Введём многочлен:

$P_N(z) = \delta_1 - \delta_3 z + \delta_5 z^2 - \delta_7 z^3 + \ \dots + (-1)^N\delta_{2N+1}z^N.$

Если $n = 2k$, то $N = k - 1$ и $\delta_{2N+1} = \delta_{n-1}$, а если $n = 2k + 1$, то $N = k$ и $\delta_{2N+1} = 1$.

Необходимое условие П/У «по выходу» означает, что многочлен $P_N(z)$ имеет действительный положительный корень нечётной кратности. Например:

$n = 3 \ \Rightarrow\ N = 1 \ \Rightarrow P_1(z) = \delta_1 - z \Longrightarrow \boxed{\delta_1 > 0}$,
$n = 4 \ \Rightarrow\ N = 1 \ \Rightarrow\ P_1(z) = \delta_1 - \delta_3 z \Longrightarrow \boxed{\delta_1\delta_3 > 0}$.

$$n = 5 \Rightarrow N = 2 \Rightarrow P_2(z) = \delta_1 - \delta_3 z + z^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_1 < 0 \\ \begin{cases} \delta_1 \geq 0 \\ \delta_3 > 2\sqrt{\delta_1} \end{cases} \end{array}\right. \text{(рис 8).}$$

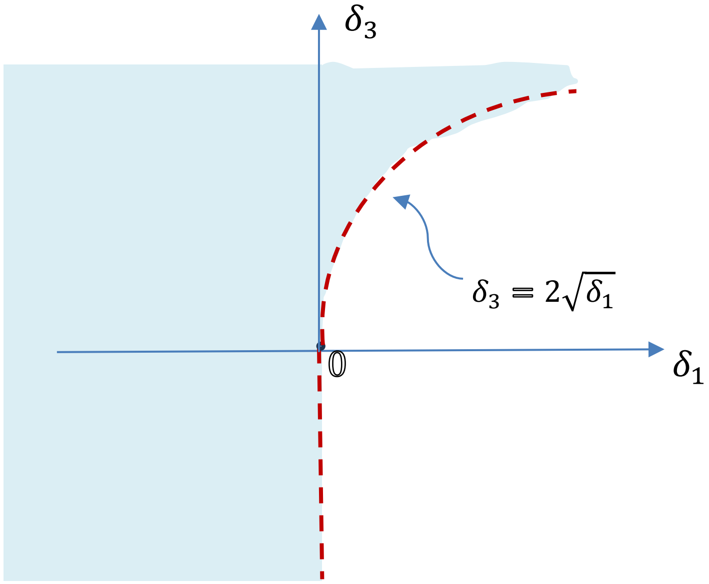

Рис. 8.

$$n = 6 \;\Rightarrow\; N = 2 \;\Rightarrow\; P_2(z) = \delta_1 - \delta_3 z + \delta_5 z^2 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_1\delta_5 < 0 \\ \begin{cases} \delta_1\delta_5 \geq 0 \\ \delta_3\delta_5 > 2\sqrt{\delta_1\delta_5}\cdot|\delta_5| \end{cases} \\ \begin{cases} \delta_5 = 0 \\ \delta_1\delta_3 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание.

Остаётся открытым вопрос о том, является ли полученное необходимое условие полной управляемости «по выходу» системы (1) в случае $n \geq 3$ и достаточным (как в случае $n = 2$).

Литература

[1] Матвеев А. С., Якубович В. А. Абстрактная теория оптимального управления. СПб.: Изд-во С-Пб ун-та, 1994. 364 с.

[2] Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

[3] Леонов Г. А. Теория управления. СПб.: Изд-во С-Пб ун-та, 2006. 236 с.

[4] Леонов Г. А., Кондратьева Н. В. Анализ устойчивости электрических машин переменного тока. СПб.: Изд-во С-Пб ун-та, 2009. 258 с.

[5] Потапов А. П. О некоторых задачах, связанных с управлением по выходу». Вестник ЛГУ, 1979, № 13, стр. 57–63.

[6] Потапов А. П. Области управляемости для некоторых систем с регуляторами Вестник ЛГУ, 1984, № 13, стр. 39–48.

[7] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

[8] Якубович В. А. Некоторые варианты абстрактного принципа максимума. Доклады АН СССР. 1976. Т. 229, №4, С. 816–819.

[9] Якубович В. А. Принцип максимума для случая, когда допустимые управления – функции заданного выхода системы. Труды III-й Всесоюзной Четаевской конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением. Иркутск, 1979, с. 20–27.

About complete output controllability linear stationary systems

Kondratyeva N. V. [1*], Potapov A. P. [2**]

[1]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
[2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

[*]knat0202@mail.ru
**potalpan@yandex.ru

Annotation. Within the framework of the optimal control problem "by output", first formulated and studied by V. A. Yakubovich, the problem arose of obtaining conditions for complete controllability of a linear stationary system using control that is a function of the output. The article introduces the concept of controllability of a linear system for a given "output". Based on the "frequency" theorem of Yakubovich-Kalman, a theorem is proved about the necessary condition for controllability by "output" of linear stationary systems. It is shown that for two-dimensional systems the obtained condition is also sufficient. Examples are given of constructing controllability regions based on the "output" in the presence of control restrictions.

Key words: complete controllability, complete observability, complete output controllability, transfer function, frequency response.