ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№4, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений
Управление колебаниями и хаосом
Компьютерное моделирование динамических и управляемых систем

УДК 517.925.53+51.72

ФАКТОРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИТЯГИВАЮЩЕЕ ИНВАРИАНТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

А. В. Братищев

Донской государственный технический университет

Аннотация

Пусть автономная система n-го порядка имеет m переменных параметров. В работе методом Еругина подбираются такие реализации параметров, чтобы полученная система имела наперёд заданное (n-m)-мерное инвариантное многообразие, устойчивое в смысле Колесникова. Доказано, что характеристический многочлен, соответствующий состоянию равновесия этой системы, можно представить в виде произведения явно вычисляемых многочленов степеней m и n-m. Аналогичная факторизация характеристического многочлена возможна и в случае, когда автономная система без параметров уже имеет устойчивое в смысле Колесникова инвариантное многообразие. Полученный результат используется в задаче о перевёрнутом маятнике, в которой методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов синтезировано нелинейное управление, стабилизирующее маятник в верхнем положении.

ключевые слова: автономная система, инвариантное множество, состояние равновесия, характеристический многочлен, агрегированная переменная, перевернутый маятник

Abstract

Let an autonomous n-*th* order system have m variable parameters. In this paper, the Erugin method is used to select such parameter realizations that the obtained system has a predetermined (n-m)-dimensional invariant manifold which is the Kolesnikov stable. It is proved that the characteristic polynomial corresponding to the equilibrium state of this system can be represented as the product of explicitly computed polynomials of powers m and n-m. The similar results may be obtained when the autonomous system without parameters already has the Kolesnikov stable invariant manifold. The result obtained is used in the problem of inverted pendulum, where the nonlinear control stabilizing the pendulum in the upper position has been synthesized by the method of analytical design of aggregated regulators.

keywords: autonomous system, invariant set, state of equilibrium, characteristic polynomial, aggregated variable, inverted pendulum.

Введение

В аналитической механике известен критерий инвариантности заданного многообразия для автономной системы дифференциальных уравнений [1], [2]. В обратных задачах динамики получил развитие метод Еругина [3] построения нормальных систем дифференциальных уравнений с наперед заданными интегралами [4]. При этом из множества решений выделялись системы, удовлетворяющие тем или иным дополнительным условиям, например, устойчивости соответствующего многообразия [5].

В теореме 1 методом Еругина строится автономная система, для которой наперед заданное многообразие является инвариантным и устойчивым в смысле Колесникова. Все состояния равновесия системы лежат поэтому на многообразии. Для каждого из них найдены в явном виде собственные числа матрицы Якоби в количестве, равном коразмерности многообразия. В теореме 2 обобщена теорема статьи [6]. Теорема 1 применяется для синтеза нелинейного управления тележкой с перевернутым маятником, которое стабилизирует маятник в верхнем положении равновесия. На S-модели проведен вычислительный эксперимент, демонстрирующий эффективность предложенного управления.

п.1. Пусть дана автономная система n-го порядка с правыми частями из класса гладкости C^r, $r \geq 1$,

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,\dots,x_n,c_1,\dots,c_m) = f_1(x,c) \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(x_1,\dots,x_n,c_1,\dots,c_m) = f_n(x,c) \end{cases}, \qquad (1)$$

и с параметрами $c = (c_1,\dots,c_m)$, $m < n$. Требуется так подобрать параметры как функции текущего состояния, чтобы система имела заданное инвариантное множество Λ, являющееся $(n-m)$-мерным дифференцируемым многообразием [7]

$$\Lambda := \{(x_1,\dots,x_n) : \psi_1(x_1,\dots,x_n) = 0,\dots,\psi_m(x_1,\dots,x_n) = 0\}, \quad m < n. \quad (2)$$

Напомним, что множество (система) называется инвариантным для автономной системы, если всякая её траектория целиком лежит на этом множестве, если хоть одна точка этой траектории ему принадлежит. Для того чтобы Λ было инвариантным множеством системы (1), необходимо и достаточно [1], чтобы функции $\psi_1,\dots,\psi_m$ удовлетворяли системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} f_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} f_n(x_1,\dots,x_n) = \Phi_1(\psi_1,\dots,\psi_m,x_1,\dots,x_n) \\ \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{d\psi_m}{dt} = \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_1} f_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_n} f_n(x_1,\dots,x_n) = \Phi_m(\psi_1,\dots,\psi_m,x_1,\dots,x_n) \end{cases},$$

где $\Phi_i(0,\dots,0,x_1,\dots,x_n) \equiv 0 \;\; i = 1,\dots,m$.

Потребуем, чтобы функции $\psi_1,\dots,\psi_m$ как функции изображающей точки искомой автономной системы удовлетворяли автономной системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = \Phi_1(\psi_1,...,\psi_m) \\ \quad . \quad . \quad . \qquad\qquad . \\ \dfrac{d\psi_m}{dt} = \Phi_m(\psi_1,...,\psi_m) \end{cases} \tag{3}$$

где $\Phi_i(0,...,0) = 0 \;\; i = 1,...,m$, то есть $(0,..,0)$ является её состоянием равновесия. Если оно устойчиво в целом, то инвариантное множество Λ будет асимптотически устойчивым в том смысле (в смысле А.А. Колесникова), что для каждой его траектории $x(t) := \left(x_1(t), ,..., x_n(t)\right)$

$$\lim_{t+\infty} \psi_1\left(x_1(t), ,..., x_n(t)\right) = ... = \lim_{t+\infty} \psi_m\left(x_1(t), ,..., x_n(t)\right) = 0 . \tag{4}$$

Допустим, что система m уравнений с m неизвестными (параметрами)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} f_1(x,c) + ... + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} f_n(x,c) = \Phi_1(\psi_1,...,\psi_m) \\ \qquad\qquad\qquad . \quad . \quad . \\ \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_1} f_1(x,c) + ... + \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_n} f_n(x,c) = \Phi_m(\psi_1,...,\psi_m) \end{cases} \tag{5}$$

разрешима относительно этих неизвестных. Подставим решение $c(x) = \left(c_1(x),...,c_m(x)\right)$ в систему (1):

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x, c(x)) \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \, . \\ x_n' = f_n(x, c(x)) \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ какое-либо её состояние равновесия. То, что правые части предпоследней системы обращаются в этой точке в ноль, означает $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) \in \mathrm{L}$, и потому $rangD_\Psi := rang\left(\psi'_{i,x_j}\right) = m$ в x^0. Считаем для определенности

$$\Delta = \Delta_{i_1...i_m} := \left.\begin{vmatrix} \psi'_{1x_{i_1}} & \psi'_{1x_{i_m}} \\ \psi'_{mx_{i_1}} & \psi'_{mx_{i_m}} \end{vmatrix}\right|_{(x_1^0,...,x_n^0)} \neq 0.$$

Разрешим линейную систему (5) относительно функций $f_{i_1}, ..., f_{i_m}$ в окрестности $(x_1^0,...,x_n^0)$ по формулам Крамера :

$$\begin{cases} f_{i_1}(x,c) + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j\neq i_1,...,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j(x,c)\right)\frac{A_{l,1}}{\Delta} = \sum_{l=1}^{m} \Phi_l(\psi_1,...,\psi_m)\frac{A_{l,1}}{\Delta} \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad\qquad\qquad . \\ f_{i_m}(x,c) + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j\neq i_1,...,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j(x,c)\right)\frac{A_{l,m}}{\Delta} = \sum_{l=1}^{m} \Phi_l(\psi_1,...,\psi_m)\frac{A_{l,m}}{\Delta} \end{cases}$$

Здесь $A_{l,k}$ - алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении l-ой строки и k-го столба определителя Δ.

Перепишем систему (6) с многообразием Λ в виде

$$
\begin{cases}
x_1' = f_1(x,c(x)) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
\qquad\qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
x_{i_1}' = \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi_l(\psi_1,\ldots,\psi_m) - \sum\limits_{j \neq i_1,\ldots,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j(x,c(x)) \right) \dfrac{A_{l,1}}{\Delta} =: \tilde{f}_{i_1}(x,c(x)) \\
x_{i_1+1}' = f_{i_1+1}(x,c(x)) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
\qquad\qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
x_{i_m}' = \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi_l(\psi_1,\ldots,\psi_m) - \sum\limits_{j \neq i_1,\ldots,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j(x,c(x)) \right) \dfrac{A_{l,m}}{\Delta} =: \tilde{f}_{i_m}(x,c(x)) \\
\qquad\qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
x_n' = f_n(x,c(x)) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .
\end{cases} . \qquad (7)
$$

Очевидно $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ является её состоянием равновесия и удовлетворяет системе уравнений

$$
\begin{cases}
f_1(x,c(x)) = 0 \\
\qquad . \; . \; . \\
\Phi_1\big(\psi_1(x),\ldots,\psi_m(x)\big) = 0 \\
f_{i_1+1}(x,c(x)) = 0 \\
\qquad . \; . \; . \\
\Phi_m\big(\psi_1(x),\ldots,\psi_m(x)\big) = 0 \\
f_{i_m+1}(x,c(x)) = 0 \\
\qquad . \; . \; . \\
f_n(x,c(x)) = 0
\end{cases} . \qquad (8)
$$

ТЕОРЕМА 1. Автономная система (7) имеет инвариантное многообразие Λ, и характеристический многочлен её матрицы Якоби для состояния равновесия $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ вычисляется по формуле

$$
p(\lambda) = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix}
\lambda - \Phi'_{1,\psi_1} & \ldots & -\Phi'_{1,\psi_k} & \ldots & -\Phi'_{1,\psi_m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\Phi'_{k,\psi_1} & \ldots & \lambda - \Phi'_{k,\psi_k} & \ldots & -\Phi'_{k,\psi_m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\Phi'_{m,\psi_1} & \ldots & -\Phi'_{m,\psi_k} & \ldots & \lambda - \Phi'_{m,\psi_m}
\end{vmatrix} \times
$$

$$\times\begin{vmatrix} \lambda - f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots & -f'_{1,x_{i_m}} & \dots & -f'_{1,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi'_{1,x_1} & \dots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{1,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi'_{m,x_1} & \dots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{m,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots & -f'_{n,x_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{n,x_n} \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Доказательство. Составим матрицу Якоби правой части системы (7), и вычислим ее в состоянии равновесия.

$$\left.\begin{pmatrix} f'_{1,x_1} & \dots & f'_{1,x_n} \\ . & . & . \\ \tilde{f}'_{i_1,x_1} & \dots & \tilde{f}'_{i_1,x_n} \\ . & . & . \\ \tilde{f}'_{i_m,x_1} & \dots & \tilde{f}'_{i_m,x_n} \\ . & . & . \\ f'_{n,x_1} & \dots & f'_{n,x_n} \end{pmatrix}\right|_{x^0} =: \begin{pmatrix} f'_{1,x_1} & \dots & f'_{1,x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\Phi'_{l,x_1} - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_1}\right)\dfrac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\Phi'_{l,x_n} - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_n}\right)\dfrac{A_{l,1}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\Phi'_{l,x_1} - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_1}\right)\dfrac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\Phi'_{l,x_n} - \sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_n}\right)\dfrac{A_{l,m}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{n,x_1} & \dots & f'_{n,x_n} \end{pmatrix}.$$

Образуем характеристический многочлен этой матрицы.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_1} - \Phi'_{l,x_1}\right)\dfrac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_n} - \Phi'_{l,x_n}\right)\dfrac{A_{l,1}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f'_{j,x_1} - \Phi'_{l,x_1}\right)\dfrac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & \sum\limits_{l=1}^{m}\left(\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_m} f'_{j,x_n} - \Phi'_{l,x_n}\right)\dfrac{A_{l,m}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ -f'_{n,x_1} & \dots & \lambda - f'_{1,x_n} \end{vmatrix}.$$

Исключая в строках $i_1, \dots, i_m$ слагаемые с множителями f'_{j,x_k} с помощью остальных строк, приходим к следующему виду

$$\begin{vmatrix} \lambda - f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots & -f'_{1,x_{i_m}} & \dots & -f'_{1,x_n} \\ . & \dots & . & \dots & . & \dots & . \\ \sum_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_1} - \Phi'_{l,x_1})\frac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & \lambda - \sum_{l=1}^{m}\Phi'_{l,x_{i_1}}\frac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & -\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{l,x_{i_m}}\frac{A_{l,1}}{\Delta} & \dots & \sum_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_n} - \Phi'_{l,x_n})\frac{A_{l,1}}{\Delta} \\ . & \dots & . & \dots & . & \dots & . \\ \sum_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_1} - \Phi'_{l,x_1})\frac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & -\sum_{l=1}^{m}\Phi'_{l,x_{i_1}}\frac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & \lambda - \sum_{l=1}^{m}\Phi'_{l,x_{i_m}}\frac{A_{l,m}}{\Delta} & \dots & \sum_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_n} - \Phi'_{l,x_n})\frac{A_{l,m}}{\Delta} \\ . & \dots & . & \dots & . & \dots & . \\ -f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots & -f'_{n,x_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{n,x_n} \end{vmatrix}.$$

Представим определитель Δ в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

и умножим его слева на предыдущий определитель. А затем используем свойства алгебраических дополнений [8].

$$\Delta \cdot p(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_1} - \Phi'_{l,x_1})\sum_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{1,x_{i_k}} & \dots & \lambda\psi'_{1,x_{i_1}} - \sum_{l=1}^{m}\Phi'_{l,x_{i_1}}\sum_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{1,x_{i_k}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_1} - \Phi'_{l,x_1})\sum_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{m,x_{i_k}} & \dots & \lambda\psi'_{m,x_{i_1}} - \sum_{l=1}^{m}\Phi'_{l,x_{i_1}}\sum_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{m,x_{i_k}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots \end{vmatrix}$$

$$
\left.\begin{matrix}
\ldots & -f'_{1,x_{i_m}} & \ldots & -f'_{1,x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \lambda\psi'_{1,x_{i_m}} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{l,x_{i_m}}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{1,x_{i_k}} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_n}-\Phi'_{l,x_n})\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{1,x_{i_k}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \lambda\psi'_{m,x_{i_m}} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{l,x_{i_m}}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{m,x_{i_k}} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{m}(\lambda\psi'_{l,x_n}-\Phi'_{l,x_n})\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{l,k}}{\Delta}\psi'_{m,x_{i_k}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & -f'_{n,x_{i_m}} & \ldots & \lambda - f'_{n,x_n}
\end{matrix}\right| =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\lambda - f'_{1,x_1} & \ldots & -f'_{1,x_{i_1}} & \ldots & -f'_{1,x_{i_m}} & \ldots & -f'_{1,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\lambda\psi'_{1,x_1} - \Phi'_{1,x_1} & \ldots & \lambda\psi'_{1,x_{i_1}} - \Phi'_{1,x_{i_1}} & \ldots & \lambda\psi'_{1,x_{i_m}} - \Phi'_{1,x_{i_m}} & \ldots & \lambda\psi'_{1,x_n} - \Phi'_{1,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\lambda\psi'_{m,x_1} - \Phi'_{m,x_1} & \ldots & \lambda\psi'_{m,x_{i_1}} - \Phi'_{m,x_{i_1}} & \ldots & \lambda\psi'_{m,x_{i_m}} - \Phi'_{m,x_{i_m}} & \ldots & \lambda\psi'_{m,x_n} - \Phi'_{m,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
-f'_{n,x_1} & \ldots & -f'_{n,x_{i_1}} & \ldots & -f'_{n,x_{i_m}} & \ldots & \lambda - f'_{n,x_n}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\lambda - f'_{1,x_1} & \ldots & -f'_{1,x_{i_1}} & \ldots & -f'_{1,x_{i_m}} & \ldots & -f'_{1,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\lambda\psi'_{1,x_1} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_1} & \ldots & \lambda\psi'_{1,x_{i_1}} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_1}} & \ldots & \lambda\psi'_{1,x_{i_m}} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_m}} & \ldots & \lambda\psi'_{1,x_n} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{1,\psi_l}\psi'_{l,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\lambda\psi'_{m,x_1} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_1} & \ldots & \lambda\psi'_{m,x_{i_1}} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_1}} & \ldots & \lambda\psi'_{m,x_{i_m}} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_{i_m}} & \ldots & \lambda\psi'_{m,x_n} - \sum\limits_{l=1}^{m}\Phi'_{m,\psi_l}\psi'_{l,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
-f'_{n,x_1} & \ldots & -f'_{n,x_{i_1}} & \ldots & -f'_{n,x_{i_m}} & \ldots & \lambda - f'_{n,x_n}
\end{vmatrix}.
$$

Образуем вспомогательный многочлен

$$
p_1(\lambda) := \begin{vmatrix}
\lambda - \Phi'_{1,\psi_1} & \ldots & -\Phi'_{1,\psi_k} & \ldots & -\Phi'_{1,\psi_m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\Phi'_{k,\psi_1} & \ldots & \lambda - \Phi'_{k,\psi_k} & \ldots & -\Phi'_{k,\psi_m} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\Phi'_{m,\psi_1} & \ldots & -\Phi'_{m,\psi_k} & \ldots & \lambda - \Phi'_{m,\psi_m}
\end{vmatrix} =
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \lambda-\Phi'_{1,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_m} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & -\Phi'_{m,\psi_1} & \dots & \lambda-\Phi'_{m,\psi_m} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix},
$$

где верхний определитель m-го порядка вставлен в качестве минора в нижний единичный определитель n-ого порядка на пересечение строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_m$ и столбцов с теми же номерами $i_1, i_2, \dots, i_m$.

Нетрудно поверить, что цепочка равенств продолжится в виде произведении

$$
\Delta \cdot p(\lambda) =
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \lambda-\Phi'_{1,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_m} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & -\Phi'_{m,\psi_1} & \dots & \lambda-\Phi'_{m,\psi_m} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
\lambda - f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots & -f'_{1,x_{i_m}} & \dots & -f'_{1,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\psi'_{1,x_1} & \dots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{1,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\psi'_{m,x_1} & \dots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{m,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
-f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots & -f'_{n,x_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{n,x_n}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\lambda-\Phi'_{1,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_k} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\Phi'_{k,\psi_1} & \dots & \lambda-\Phi'_{k,\psi_k} & \dots & -\Phi'_{k,\psi_m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\Phi'_{m,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{m,\psi_k} & \dots & \lambda-\Phi'_{m,\psi_m}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
\lambda - f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots & -f'_{1,x_{i_m}} & \dots & -f'_{1,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\psi'_{1,x_1} & \dots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{1,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\psi'_{m,x_1} & \dots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{m,x_n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
-f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots & -f'_{n,x_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{n,x_n}
\end{vmatrix}.
$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ Рассмотрим частный случай теоремы, когда управляющие параметры входят по одному и линейным образом в m из n уравнений системы

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{i_1}' = f_{i_1}(x) + u_1(x) \\ x_{i_1+1}' = f_{i_1+1}(x) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{i_m}' == f_{i_m}(x) + u_m(x) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(x) \end{cases}. \qquad (10)$$

Требуется подобрать их таким образом, чтобы дифференцируемое многообразие (2) стало устойчивым в смысле Колесникова инвариантным множеством управляемой системы. Такая задача изучается в теории синергетического управления [2]. Система (5) для нахождения управляющих параметров в случае системы (10) принимает вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \psi'_{1,x_{i_j}} (f_{i_j}(x) + u_j(x)) + \sum\limits_{j \ne i_1,\dots,i_m} \psi'_{1,x_j} f_j(x) = \Phi_1(\psi_1,\dots,\psi_m) \\ . \quad . \quad . \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \psi'_{m,x_{i_j}} (f_{i_j}(x) + u_j(x)) + \sum\limits_{j \ne i_1,\dots,i_m} \psi'_{m,x_j} f_j(x) = \Phi_m(\psi_1,\dots,\psi_m) \end{cases}.$$

Из неё получаем явные формулы вычисления управляющих параметров

$$\begin{cases} u_1(x) = -f_{i_1}(x,c) - \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\sum\limits_{j \ne i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j(x,c) \right) \dfrac{A_{l,1}}{\Delta} + \sum\limits_{l=1}^{m} \Phi_l(\psi_1,\dots,\psi_m) \dfrac{A_{l,1}}{\Delta} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ u_m(x) = -f_{i_m}(x,c) - \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\sum\limits_{j \ne i_1,\dots,i_m} \psi'_{l,x_j} f_j(x,c) \right) \dfrac{A_{l,m}}{\Delta} + \sum\limits_{l=1}^{m} \Phi_l(\psi_1,\dots,\psi_m) \dfrac{A_{l,m}}{\Delta} \end{cases}.$$

Факторизация характеристического многочлена состояния равновесия сохраняет свой вид (9).

п.2. Пусть теперь автономная система n-го порядка с правыми частями из класса гладкости C^r, $r \ge 1$,

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ . \quad . \quad . \\ x_n' = f_n(x_1,\dots,x_n) \end{cases}, \qquad (11)$$

имеет инвариантное множество Λ, являющееся $(n-m)$-мерным дифференцируемым многообразием

$$\mathrm{L} := \{(x_1,\dots,x_n) : \psi_1(x_1,\dots,x_n) = 0,\dots,\psi_m(x_1,\dots,x_n) = 0\}, \quad m < n.$$

Предположим, что функции $\psi_1, \dots, \psi_m$ удовлетворяют на траекториях системы (11) линейным дифференциальным уравнениям (3), (5), а состояние равновесия $(0,..,0)$ системы (3) устойчиво в целом. Тогда инвариантное множество Λ будет устойчивым в смысле А.А.Колесникова: для каждой её траектории $x(t) := \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)$ имеет место (4). Отсюда состояние равновесия $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ системы (11) необходимо лежит на L.

Пусть

$$\Delta = \Delta_{i_1 \dots i_m} := \left. \begin{vmatrix} \psi'_{1x_{i_1}} & \psi'_{1x_{i_m}} \\ \psi'_{mx_{i_1}} & \psi'_{mx_{i_m}} \end{vmatrix} \right|_{(x_1^0, \dots, x_n^0)} \neq 0.$$

Разрешим линейную систему (5) относительно функций $f_{i_1}, \dots, f_{i_m}$ в окрестности $(x_1^0, \dots, x_n^0)$

$$\begin{cases} f_{i_1} = \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi_l(\psi_1, \dots, \psi_m) - \sum\limits_{j \neq i_1, \dots, i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{l,1}}{\Delta} \\ \quad . \ . \ . \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ f_{i_m} = \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi_l(\psi_1, \dots, \psi_m) - \sum\limits_{j \neq i_1, \dots, i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{l,m}}{\Delta} \end{cases},$$

и подставим полученные решения в правые части соответствующих уравнений системы (11):

$$\begin{cases} x'_1 = f_1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ x'_{i_1} = \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi_l(\psi_1, \dots, \psi_m) - \sum\limits_{j \neq i_1, \dots, i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{l,1}}{\Delta} =: \tilde{f}_{i_1} \\ x'_{i_1+1} = f_{i_1+1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ x'_{i_m} = \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\Phi_l(\psi_1, \dots, \psi_m) - \sum\limits_{j \neq i_1, \dots, i_m} \psi'_{l,x_j} f_j \right) \dfrac{A_{l,m}}{\Delta} =: \tilde{f}_{i_m} \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ x'_n = f_n \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .. \end{cases} . \qquad (12)$$

Очевидно, состояние равновесия $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ будет решением функциональной системы

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \Phi_1(\psi_1,...,\psi_m) = 0 \\ f_{i_1+1} = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \Phi_m(\psi_1,...,\psi_m) = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ f_n = 0 \end{cases} .$$

ТЕОРЕМА 2. Характеристический многочлен матрицы Якоби для состояния равновесия $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ системы (11) вычисляется по формуле

$$p(\lambda) = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \lambda - \Phi'_{1,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_k} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Phi'_{k,\psi_1} & \dots & \lambda - \Phi'_{k,\psi_k} & \dots & -\Phi'_{k,\psi_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Phi'_{m,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{m,\psi_k} & \dots & \lambda - \Phi'_{m,\psi_m} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \lambda - f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots & -f'_{1,x_{i_m}} & \dots & -f'_{1,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi'_{1,x_1} & \dots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{1,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi'_{m,x_1} & \dots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{m,x_n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots & -f'_{n,x_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{n,x_n} \end{vmatrix} .$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в предыдущей теореме.

ЗАМЕЧАНИЕ В частном случае автономной системы (3)

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = \Phi_1(\psi_1) \\ \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{d\psi_m}{dt} = \Phi_m(\psi_m) \end{cases}$$

имеем

$$\begin{vmatrix} \lambda-\Phi'_{1,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_k} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Phi'_{k,\psi_1} & \dots & \lambda-\Phi'_{k,\psi_k} & \dots & -\Phi'_{k,\psi_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Phi'_{m,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{m,\psi_k} & \dots & \lambda-\Phi'_{m,\psi_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-\Phi'_{1,\psi_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda-\Phi'_{k,\psi_k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda-\Phi'_{m,\psi_m} \end{vmatrix} =$$

$$=(\lambda-\Phi'_{1,\psi_1})\cdot\ldots\cdot(\lambda-\Phi'_{m,\psi_m}).$$

Этот случай и соответствующая формула факторизации рассмотрены в статье [6].

п.3. Используем теорему 1 в задаче управления перевернутым маятником [9]. Уравнение его движения имеет вид

$$\begin{cases} x'_{1,t}=x_2 \\ x'_{1,t}=\dfrac{mll_0x_4^2\sin x_3-m\,l\,g\cos x_3\sin x_3+l_0(u-\mu x_2)}{(M+m)l_0-ml\cos^2 x_3}=:A+\dfrac{l_0}{(M+m)l_0-ml\cos^2 x_3}(u-\mu x_2) \\ x'_{3,t}=x_4 \\ x'_{4,t}=\dfrac{-mlx_4^2\cos x_3\sin x_3+(M+m)g\sin x_3-\cos x_3(u-\mu x_2)}{(M+m)l_0-ml\cos^2 x_3}=:B-\dfrac{\cos x_3}{(M+m)l_0-ml\cos^2 x_3}(u-\mu x_2) \end{cases}$$

(13),

где $x_1(t)$ - функция перемещения тележки, $x_3(t)$ - функция отклонения маятника от вертикальной оси, m - масса маятника, M - масса тележки, l - расстояние от центра масс маятника до оси вращения, J - момент инерции маятника относительно центра масс, $l_0:={J}/{ml}+1$ - эффективная длина маятника, μ - коэффициент трения, $\mathrm{g}=9.81$. Если сила, приложенная к тележке, $u=u(t)\equiv 0$, то тележка находится в свободном движении.

Легко проверить, что состояния равновесия системы имеют вид $S(x_0,0,\pi k,0),\ x_0\in$ Ў, $k\in$ ў , то есть фазовом пространстве переменных $x=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ имеется бесконечное число устойчивых $S(x_0,0,(2k+1)\pi,0)$ и неустойчивых $S(x_0,0,2\pi k,0)$ состояний равновесия.

Предполагается, что сила есть функция текущего состояния:

$$u=u\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t)\right),$$

и направлена на удержание маятника в верхнем положении равновесия: $x_3(t)\to 2\pi k$.

Согласно методу аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [2] будем искать агрегированную переменную - функцию $\Psi(x)$, которая задает инвариантное многообразие

$$\mathrm{L}:=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right):\psi(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\right\}$$

в фазовом пространстве управляемой системы (13) и которая на траекториях этой системы удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Psi'_t = -\dfrac{1}{T}\Psi$. Здесь константа $T > 0$ характеризует скорость стремления к нулю агрегированной переменной на траекториях управляемой системы. Действительно, решение последнего уравнения имеет вид

$$\Psi\big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\big) = C\exp\left\{-t/T\right\} \to 0$$

при $t \to +\infty$. Отсюда, в частности, следует, что все состояния проектируемого регулятора $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\right)$ лежат на многообразии: $\Psi(x^0) = 0$.

Вычислим производную агрегированной переменной в силу системы (13):

$$\Psi'_t = \Psi'_{x_1}x_2 + \Psi'_{x_3}x_4 + \Psi'_{x_2}A + \Psi'_{x_4}B + \left(u - \mu x_2\right)\frac{\Psi'_{x_2}l_0 - \Psi'_{x_4}\cos x_3}{(M+m)l_0 - ml\cos^2 x_3} = -\frac{1}{T}\Psi .$$

Исключая $\left(u - \mu x_2\right)$ из уравнений системы (13), получаем уравнение регулятора:

$$\begin{cases}
x'_{1,t} = x_2 \\
x'_{2,t} = A - \dfrac{l_0\left(\Psi'_{x_1}x_2 + \Psi'_{x_3}x_4 + \Psi'_{x_2}A + \Psi'_{x_4}B + \Psi/T\right)}{\Psi'_{x_2}l_0 - \Psi'_{x_4}\cos x_3} = \\
\qquad = \dfrac{-l_0\left(\Psi'_{x_1}x_2 + \Psi'_{x_3}x_4 + \Psi'_{x_4}(A\cos x_3/l_0 + B) + \Psi/T\right)}{\Psi'_{x_2}l_0 - \Psi'_{x_4}\cos x_3} \\
x'_{3,t} = x_4 \\
x'_{4,t} = B + \dfrac{\cos x_3\left(\Psi'_{x_1}x_2 + \Psi'_{x_3}x_4 + \Psi'_{x_2}A + \Psi'_{x_4}B + \Psi/T\right)}{\Psi'_{x_2}l_0 - \Psi'_{x_4}\cos x_3} = \\
\qquad = \dfrac{\cos x_3\left(\Psi'_{x_1}x_2 + \Psi'_{x_3}x_4 + \Psi'_{x_2}(A\cos x_3/l_0 + B)l_0/\cos x_3 + \Psi/T\right)}{\Psi'_{x_2}l_0 - \Psi'_{x_4}\cos x_3}
\end{cases} . \qquad (14)$$

Закон управления тележкой задается формулой

$$u = \mu x_2 - \frac{(M+m)l_0 - ml\cos^2 x_3}{\Psi'_{x_2}l_0 - \Psi'_{x_4}\cos x_3}\left(\Psi'_{x_1}x_2 + \Psi'_{x_3}x_4 + \Psi'_{x_2}A + \Psi'_{x_4}B + \frac{1}{T}\Psi\right).$$

Найдем возможные состояния равновесия $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\right)$ регулятора. Имеем $x_2^0 = x_4^0 = 0$. Так как $\dfrac{A\cos x_3^0}{l_0} + B = \dfrac{g\sin x_3^0}{l_0}$, то приравнивая нулю правые части второго и четвертого уравнений в точке x^0 и учитывая $\Psi(x^0) = 0$, имеем $\begin{cases}\Psi'_{x_2}(x^0)\operatorname{tg} x_3^0 = 0 \\ \Psi'_{x_4}(x^0)\sin x_3^0 = 0\end{cases}$. Отсюда в предположении $|\Psi'_{x_2}(x^0)| + |\Psi'_{x_4}(x^0)| \neq 0$ получаем $x_3^0 = \pi k$. То есть регулятор (14) имеет те же состояния равновесия $S(x_0,0,\pi k,0),\ x_0\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$, что и свободная система.

Заметим, что свободная система расщепляется на две подсистемы – трехмерную, составленную из второго, третьего и четвертого уравнений с независимыми от x_1 правыми частями, и интегрируемую в квадратурах одномерную. С другой стороны, по механическому смыслу задачи для искомого закона управления неважно, на каком расстоянии от начала координат находится тележка в начальный момент времени. Поэтому при проектировании управляемой системы методом АКАР мы будем исходить из трехмерной подсистемы и искать агрегированную переменную в виде функции от трех последних фазовых переменных: $\Psi=\Psi(x_2,x_3,x_4)$. Потребуем, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\forall k\in\mathbb{Z}\quad \Psi(0,\pi k,0)=0,\ \Psi'_{x_2}(0,\pi k,0)\neq 0,\ \Psi'_{x_4}(0,\pi k,0)\neq 0.$$

Первое равенство говорит о том, что сумма ряда $\Psi(0,x_3,0)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i x_3^i$ делится на $\sin x_3$, то есть $\Psi(0,x_3,0)=g(x_3)\sin x_3$. Второе и третье выполняются, например, для функции

$$\Psi(x_2,x_3,x_4):=g_2(x_2)+\sin x_3 g(x_3)+g_4(x_4),\quad g_2'(0)\neq 0,\ g_4'(0)\neq 0.$$

Пусть

$$\Psi(x_2,x_3,x_4):=c_2x_2+\sin x_3+c_4x_4,\ \text{где}\ c_2,c_4\neq 0.$$

Трехмерная подсистема регулятора в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} x'_{2,t}=\dfrac{-l_0\left(\cos x_3x_4+c_4(A\cos x_3/l_0+B)+(c_2x_2+\sin x_3+c_4x_4)/T\right)}{c_2l_0-c_4\cos x_3}=:\tilde f_2\\ x'_{3,t}=x_4=:\tilde f_3\\ x'_{4,t}=\dfrac{\left(\cos^2 x_3x_4+c_2l_0(A\cos x_3/l_0+B)+\cos x_3(c_2x_2+\sin x_3+c_4x_4)/T\right)}{c_2l_0-c_4\cos x_3}=:\tilde f_4\end{cases}. \qquad (15)$$

Определим характер состояний равновесия $s_k^0=(0,\pi k,0)$. Матрица Якоби в этой точке равна

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-l_0c_2/T}{c_2l_0-c_4(-1)^k} & \dfrac{c_4g+l_0/T}{c_2l_0-c_4(-1)^k}(-1)^{k+1} & \dfrac{-l_0((-1)^k+c_4/T)}{c_2l_0-c_4(-1)^k}\\ 0 & 0 & 1\\ \dfrac{(-1)^kc_2/T}{c_2l_0-c_4(-1)^k} & \dfrac{(-1)^kc_2g+1/T}{c_2l_0-c_4(-1)^k} & \dfrac{1+(-1)^kc_4/T)}{c_2l_0-c_4(-1)^k}\end{pmatrix}.$$

Система (15) в окрестности точки s_k^0 имеет вид

$$\Psi'_{x_2}\tilde f_2(x)+\Psi'_{x_3}\tilde f_3(x)+\Psi'_{x_4}\tilde f_4(x)=c_2\tilde f_2(x)+x_4\cos x_3+c_4\tilde f_4(x)=-\frac{1}{T}\Psi.$$

Так как $\Psi'_{x_2}=c_2\neq 0,\ \Psi'_{x_4}=c_4\neq 0$, то разрешаем последнее уравнение относительно $\tilde f_2(x)$ или $\tilde f_4(x)$ и подставляем полученное выражение в правую часть уравнения (15). Применение теоремы 1 к полученной системе в первом случае дает такой характеристический многочлен

$$c_2 p(\lambda) = \left(\lambda + \frac{1}{T}\right) \cdot \begin{vmatrix} c_2 & (-1)^k & c_4 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -\dfrac{(-1)^k c_2/T}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k} & -\dfrac{(-1)^k l_0 c_2 g + 1/T}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k} & \lambda - \dfrac{1+(-1)^k c_4/T)}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{T}\right) \cdot c_2 \cdot \left(\lambda^2 - \frac{1}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k}\lambda - \frac{(-1)^k c_2 g}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k}\right),$$

а во втором случае -

$$c_4 p(\lambda) = \left(\lambda + \frac{1}{T}\right) \cdot \begin{vmatrix} \lambda + \dfrac{l_0 c_2}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k} & \dfrac{l_0 c_4 g + l_0/T}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k}(-1)^k & \dfrac{l_0((-1)^k + c_4/T)}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k} \\ 0 & \lambda & -1 \\ c_2 & (-1)^k & c_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{T}\right) \cdot c_4 \cdot \left(\lambda^2 - \frac{1}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k}\lambda - \frac{(-1)^k c_2 g}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k}\right).$$

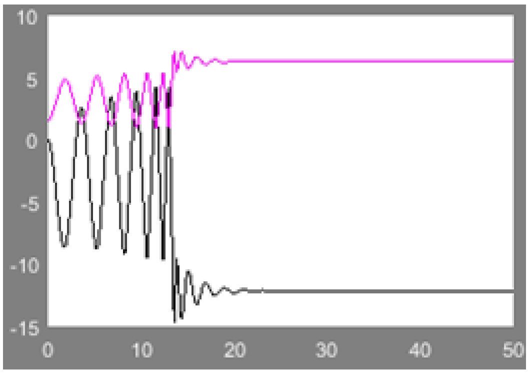
Для определения характера состояния равновесия s_k^0 исследуем корни квадратного уравнения $\lambda^2 - \dfrac{1}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k}\lambda - \dfrac{(-1)^k c_2 g}{c_2 l_0 - c_4(-1)^k}$. Нам нужно, чтобы верхнее положение маятника было устойчивым, что соответствует k четному. В этом случае отрицательность корней уравнения равносильна выполнению неравенств $c_2 l_0 - c_4 < 0,\ c_2 > 0$, что по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению дает устойчивый узел [10]. При их выполнении нижние состояния равновесия (с k нечетным) оказываются седлами.

ЗАМЕЧАНИЕ В монографии [11] спроектирована линейная система управления перевернутым маятником, которая годится для небольших отклонений. В статье [12] движение перевернутого маятника разделялось на режимы начальных малых (до $45^o - 50^o$) и больших (до 90^o) отклонений маятника. Методом АКАР синтезирована двухуровневая система управления, при которой сначала решалась задача перевода маятника в режим малых отклонений, а затем (с помощью соответствующей агрегированной переменной) – задача стабилизации маятника в верхнем положении.

п.4. Для верификации полученного результата была создана S-модель (по терминологии [13]) системы (15) в пакете Matlab-Simulink.

Выбраны значения параметров $m = l = J = \mu = 1,\ M = T = 2,\ c_2 = 1,\ c_4 = 3$.

На первых четырех графиках начальная скорость тележки $x_2^0 = 0$ и начальная угловая скорость маятника $x_4^0 = 0$. На графиках рисунков 1 и 2 маятник в начальный момент находится в горизонтальном положении, и демонстрируется влияние параметра T на отклонения маятника от вертикального положения (верхний рисунок) и движение тележки.



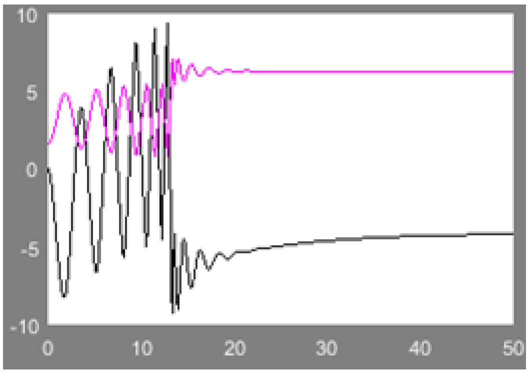


Рис.1. Графики $x(t), \varphi(t)$ при $\varphi_0 = \pi/2, T = 2$ Рис.2. Графики $x(t), \varphi(t)$ при $\varphi_0 = \pi/2, T = 10$

На графиках рисунков 3 и 4 демонстрируется поведение перевернутого маятника, если начальное положение маятника близко к нижнему неустойчивому положению равновесия или если оно совпадает с этим положением. Чем ближе φ_0 к $\pm 180^o$, тем большее число раскачиваний тележки понадобится для перевода маятника в устойчивое положение равновесия.

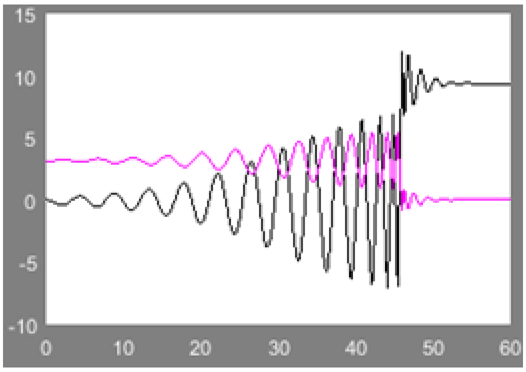
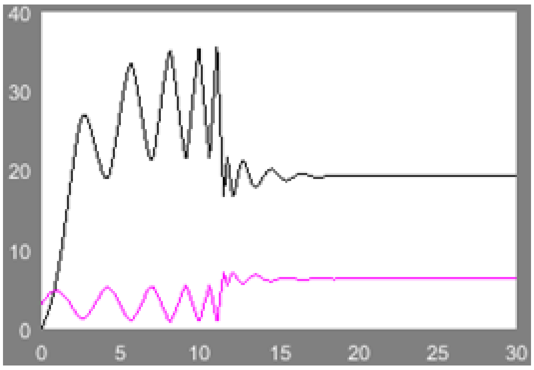


Рис.3. Графики $x(t), \varphi(t)$ при $\varphi_0 = 175^\circ, T = 2$ Рис.4. Графики $x(t), \varphi(t)$ при $\varphi_0 = 180^\circ, T = 2$

На графике рисунка 5 демонстрируется, как устанавливается устойчивое положение перевернутого маятника, если начальная скорость тележки x_2^0 и начальная угловая скорость мятника x_4^0 не равны нулю.

Из приведенных графиков видно, что при больших начальных отклонениях маятника предлагаемое одноуровневое нелинейное управление работает в двух режимах: сначала оно раскачивает тележку до тех пор, пока маятник не определится с выбором одного из устойчивых верхних состояний равновесия. После чего раскачивания резко прекращаются, тележка стабилизируется в какой-то точке, а маятник – в выбранном состоянии равновесия. Двойной режим появляется после $\varphi_0 = 48^o$. На графике рисунка 6 тележка ещё не раскачивается. При этом увеличение ее массы до $M = 10$ не сказывается на режиме стабилизации.



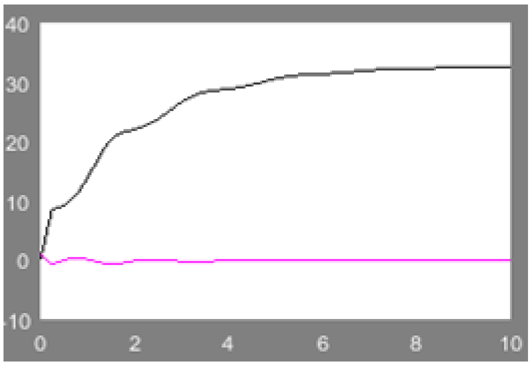


Рис.5.Графики $x(t)$, $\varphi(t)$ при $\varphi_0 = 175^\circ$, $x_3^0 = 5$, $x_4^0 = 3$ Рис.6. Графики $x(t)$, $\varphi(t)$ при $\varphi_0 = 48^\circ$, $M = 10$

Список литературы

[1] Леви-Чивита Т., Амальди У. *Курс теоретической механики. Том 2. Часть 2.* Издательство иностранной литературы. Москва, 1951, 556 с.

[2] *Современная прикладная теория управления. Ч.2. Синергетический подход в теории управления.* Под ред. А. А. Колесникова. Издательство ТРТУ. Таганрог, 2000, 559 с.

[3] Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. *Прикладная математика и механика*. Том 16. Вып.6, 1952, 659-670.

[4] Галиуллин А. С. *Методы решения обратных задач динамики*. Наука. Гл. редакция физ.-мат. литературы. Москва, 1986, 224 с.

[5] Мухарлямов Р. Г. Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы. *Дифференциальные уравнения.* Том 3, № 2, 1967, 180–192.

[6] Братищев А. В. О характеристическом многочлене состояния равновесия автономной системы, имеющей притягивающее инвариантное многообразие. *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* №2, 2017, 15-23.

[7] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях*. Издательство Лань. Санкт-Петербург, 2005, 160 с.

[8] Курош А. Г *Курс высшей алгебры*. Издательство Наука, Москва, 1975, 432 с.

[9] Квакернаак Х., Сиван Р. *Линейные оптимальные системы управления*. Издательство «Мир». Москва, 1975, 656 с.

[10] Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. Издательство «Наука». Москва, 1967, 472 с.

[11] Дэбни Дж., Харман Т. *Simulink-4. Секреты мастерства*. БИНОМ. Лаборатория знаний. Москва, 2003, 403 с.

[12] Колесников Ал. А. Синергетический синтез нелинейных регуляторов механических колебательных систем. *Синергетика и проблемы теории управления.* Под ред. А. А. Колесникова. ФИЗМАТЛИТ. Москва, 2004, 289-308.

[13] Лазарев Ю. *Моделирование процессов и систем в MATLAB*. Издательская группа BHV. Питер, Киев, 2005, 512 с.