ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Компьютерное моделирование динамических и управляемых систем

Поиск приближенного решения задач оптимального быстродействия для систем с ограниченным скалярным управлением

Антипина Е.В.[*], Мустафина С.А.[**], Антипин А.Ф.[***]

Уфимский университет науки и технологий

[*]stepashinaev@ya.ru
[**]mustafina_sa@mail.ru
[***]andrejantipin@ya.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача оптимального быстродействия для линейных и нелинейных управляемых систем с ограниченным скалярным управлением. Для поиска ее приближенного решения сформулирован численный алгоритм на основе метода искусственных иммунных систем. Преимуществом предложенного подхода является отсутствие необходимости указывать начальное приближение, с которого начинается поиск решения. Работа алгоритма апробирована на модельных задачах. Для каждой из них вычислено приближенное решение, найдено субоптимальное по быстродействию управление, переводящее управляемый процесс из начального состояния в конечное состояние за наименьшее время. Результаты численных экспериментов согласуются с результатами расчетов, полученных на основе принципа максимума Понтрягина и многометодной технологии.

Ключевые слова: задача оптимального быстродействия, искусственные иммунные системы, линейная управляемая система, нелинейная управляемая система, эволюционные методы.

1. Введение

Одной из важнейших практических задач оптимального управления является задача оптимального быстродействия. Задача перевода управляемого процесса из начального состояния в конечное за минимальное время при наличии ограничений на управляющее воздействие часто встречается при управлении космическими и летательными аппаратами, химико-технологическими процессами, в навигации и робототехнике.

Математическое описание управляемых процессов представляется как линейными, так и нелинейными моделями. В настоящее время имеется большой арсенал методов для решения линейных задач оптимального быстродействия [1-4]. Нелинейность математического описания процесса усложняет анализ и управление [5, 6], а также приводит к необходимости применения специальных методов и подходов для их исследования. Поэтому актуальной является разработка методов и алгоритмов решения задач оптимального быстродействия, применимых как для линейных, так и нелинейных задач.

Одним из методов, который применяется для решения линейных и нелинейных задач оптимального быстродействия является принцип максимума Понтрягина, обеспечивающий высокую точность вычислений [7, 8]. С его помощью исходная задача сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой связано с выбором начальных значений сопряженных переменных. Основной трудностью применения данного метода при решении практических задач является необходимость определения начальных условий для решения сопряжённой системы, требующая углубленного знания предметной области решаемой задачи.

На практике в большинстве случаев достаточно иметь приближенное решение оптимизационной задачи ввиду необходимости оперативного реагирования на быстро меняющиеся условия протекания процесса. Поэтому при исследовании управляемых процессов часто применяется метод конечномерной аппроксимации задачи управления, сводящей исходную задачу бесконечномерной оптимизации к задаче математического программирования. Применение для ее решения классических методов оптимизации часто сталкивается с чувствительностью метода к выбору начального приближения. Поэтому для решения задачи быстродействия можно применить методы эволюционных вычислений, успешно зарекомендовавшие себя при решении практических задач, когда традиционные методы неэффективны [9, 10]. Одним из эволюционных методов является метод искусственных иммунных систем. Он позволяет находить приближенные решения задач многомерной оптимизации, определять глобальный экстремум нелинейных, недифференцируемых и мультимодальных функций. В его основу положена имитация функционирования иммунитета живых организмов, состоящая в защите от патогенов и антигенов с помощью антител, вырабатываемых иммунными клетками. Наиболее приспособленные для защиты антитела подавляют чужеродные тела, и именно эти клетки запоминает иммунная система для их воспроизведения при повторной атаке организма схожим патогеном.

Преимуществом метода искусственных иммунных систем является отсутствие необходимости задавать начальное приближение решения задачи, так как на начальном этапе генерируется популяция иммунных клеток, заполненная случайными допустимыми значениями.

Искусственные иммунные системы успешно применяются при решении задач распознавания образов [11], прогнозирования [12], классификации [13], оптимизации [14] и оптимального управления [15].

Целью работы является разработка численного алгоритма для определения приближенного решения линейной и нелинейной задачи оптимального быстродействия на основе метода искусственных иммунных систем.

2. Постановка задачи

Рассматривается управляемый процесс, описываемый системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ – вектор фазовых переменных, $u(t)$ – управляющее воздействие, на которое наложено ограничение

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, t \in [0, T], \tag{2}$$

$f(x(t), u(t), t) = (f_1(x(t), u(t), t), f_2(x(t), u(t), t), \ldots, f_n(x(t), u(t), t))$ – вектор-функция, непрерывная вместе со своими частными производными, T – продолжительность процесса.

Пусть заданы начальное и конечное состояние процесса:

$$x(0) = x^0, \tag{3}$$

$$x(T) = x^1. \tag{4}$$

Управление $u(t)$ принадлежит классу кусочно-постоянных функций $u(t) = u_j$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0, r}$, где r – число моментов переключений при разбиении $t_0 < t_1 < \ldots < t_{r+1}$, $t_0 = 0$, $t_{r+1} = T$.

Задача заключается в выборе такого управления $u(t)$, удовлетворяющего условию (2), при котором процесс переходит из начального состояния (3) в конечное состояние (4) за минимальное время T^*, то есть необходимо минимизировать функционал

$$J(u) = T. \tag{5}$$

3. Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального быстродействия

Для поиска приближенного решения задачи (1)-(5) сформулируем алгоритм на основе метода искусственных иммунных систем. Работа метода основана на исследовании области допустимых решений путем смены популяций иммунных клеток, которые являются потенциальными решениями оптимизационной задачи, и применения к ним операций клонирования, мутации и селекции. В качестве функции приспособленности, определяющей пригодность иммунной клетки в качестве решения задачи, выбирается целевая функция.

Обычно условием окончания расчетов является достижение заданного пользователем максимального количества итераций.

Модифицируем алгоритм метода искусственных иммунных систем для поиска решения задачи оптимального быстродействия.

Пусть популяцией является набор иммунных клеток $q_i = (q_{i0}, q_{i1}, \ldots, q_{ir}, q_{ir+1})$ $(i = \overline{1, m})$, каждая из которых является возможным решением задачи (1)-(5). Элементы иммунной клетки зададим равными значениям управления $u(t)$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_r$ и продолжительности T процесса, описываемого системой (1):

$$q_{ij} = \begin{cases} u_{ij}, \ j = \overline{0, r}, \\ T, \ j = r + 1. \end{cases} \tag{6}$$

В качестве функции приспособленности иммунной клетки q_k зададим функцию вида

$$F(q_k)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^k-x_i^1)^2}, \tag{7}$$

где $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$ – значения фазовых переменных, вычисленные путем решения системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2) для иммунной клетки q_k в момент времени $t=q_{k\ r+1}$ и кусочно-постоянного управления с узлами $(q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{ir})$. Чем меньше значение $F(q_k)$, тем точнее выполнены терминальные условия (3), поэтому иммунная клетка q_k считается более приспособленной, а значит больше других подходит в качестве решения задачи быстродействия.

Условием окончания поиска примем выполнение неравенства для некоторой иммунной клетки q_i:

$$F(q_i)<\varepsilon, \tag{8}$$

где ε – заданный пользователем параметр.

Условие (8) может быть выполнено для нескольких наборов управляющих параметров. Поэтому будем заносить возможные решения задачи быстродействия в отдельный массив иммунных клеток *solutions*. В конце работы алгоритма из иммунных клеток массива *solutions* в качестве решения выберем ту клетку q_l, у которой элемент $q_{l\ r+1}$, соответствующий продолжительности процесса, принимает наименьшее значение.

Модифицированный алгоритм метода искусственных иммунных систем для поиска приближенного решения задачи (1)-(5) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать параметры алгоритма: *m* – количество иммунных клеток в популяции, *r* – количество точек разбиения временного интервала, $\overline{T}$ – максимальная продолжительность процесса управления, *p* – количество клеток-родителей, *cl* – количество клонов, *s* – количество заменяемых иммунных клеток, *mut* – параметр мутации, ε – параметр окончания поиска.

Шаг 2. Создать начальную популяцию иммунных клеток $q_i=(q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{ir}, q_{ir+1})$ $(i=\overline{1,m})$, элементы которых рассчитать по формуле:

$$q_{ij}=\begin{cases} u_{\min}+\lambda_{ij}(u_{\max}-u_{\min}), & j=\overline{0,r}, \\ \lambda_{ij}\overline{T}, & j=r+1, \end{cases} \tag{9}$$

где $\lambda_{ij}\in[0,1]$ – случайное число.

Шаг 3. Вычислить значение функции приспособленности (7) для каждой иммунной клетки $q_i=(q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{ir}, q_{ir+1})$ $(i=\overline{1,m})$ начальной популяции. Для этого найти численное решение системы дифференциальных уравнений (1) с шагом разбиения интервала времени $[0, q_{i\ r+1}]$, равным $\frac{q_{i\ r+1}}{r}$.

Шаг 4. Проверить условие (8) для каждой клетки начальной популяции. Если оно выполнено, то поместить иммунную клетку в массив *solutions*.

Шаг 5. Выполнить операцию клонирования. Выбрать p клеток-родителей с наилучшим (наименьшим) значением функции приспособленности (7). Для *l*-й клетки родителя $(l=\overline{1,p})$ создать копии q^{lk} $(k=\overline{1,cl})$.

Шаг 6. Выполнить операцию мутации для каждой клетки-клона q^{lk} $(k=\overline{1,cl})$ *l*-й клетки родителя $(l=\overline{1,p})$:

$$q_{ij}^{lk} = \begin{cases} q_{ij}^{lk} + \alpha_l \cdot mut, & \gamma_l > 0{,}5, \\ q_{ij}^{lk} - \beta_l \cdot mut, & \gamma_l \le 0{,}5, \end{cases}$$

где $\alpha_l \in [0, a - q_{ij}^{lk}]$, $\beta_l \in [0, q_{ij}^{lk} - b]$, $\gamma_l \in [0,1]$ – случайные числа, сгенерированные для l-й клетки-родителя ($l = \overline{1,p}$); $a = u_{\max}$ $b = u_{\min}$ для $j = \overline{0,r}$, $a = \overline{T}$, $b = 0$ для $j = r + 1$.

Шаг 7. Вычислить приспособленность каждой клетки, полученной на этапе мутации.

Шаг 8. Выполнить операцию селекции. Среди клонов-мутантов l-й клетки-родителя ($l = \overline{1,p}$) выбрать наиболее приспособленную клетку и заменить ею клетку-родителя при условии, что она менее приспособлена по сравнению с клоном-мутантом.

Шаг 9. Создать s новых иммунных клеток. Элементы i-й клетки вычислить по формуле (9) ($i = \overline{1,s}$). Рассчитать значение функции приспособленности (7) для каждой новой клетки.

Шаг 10. Заменить в текущей популяции s наименее приспособленных иммунных клеток новыми клетками.

Шаг 11. Проверить условие (8) для иммунных клеток текущей популяции. Если условие (8) выполнено для клетки q_i ($i = \overline{1,m}$), то поместить ее в массив *solutions* и перейти к шагу 12. Иначе перейти к шагу 5.

Шаг 12. Найти в массиве *solutions* иммунную клетку q_l, у которой последний элемент, принимает наименьшее значение. В качестве наименьшей продолжительности процесса принять $T^* = q_{l\,r+1}$, а значениям управления $u(t)$ в дискретные моменты времени присвоить значения элементов q_{lj} ($j = \overline{0,r}$) согласно формуле (6).

Сформулированный алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального быстродействия имеет следующие особенности:

1) структура иммунной клетки включает в себя дискретные значения параметра управления и времени;

2) функцией приспособленности иммунной клетки выбирается не целевой функционал в форме (5), а отклонение между заданным конечным состоянием процесса (4) и вычисленным с помощью алгоритма;

3) введен специальный массив *solutions* для запоминания наиболее приспособленных иммунных клеток, из которых впоследствии выбирается решение с наименьшим значением времени;

4) условием окончания вычислительного процесса является отклонение от терминального состояния управляемого процесса.

4. Вычислительный эксперимент

Разработанный алгоритм искусственных иммунных систем реализован в среде визуального программирования Delphi. Применим его для поиска решения задач оптимального быстродействия для линейной и нелинейной систем.

Пусть динамический процесс описывается системой дифференциальных уравнений [16]:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = u, \tag{10}$$

где $x_1(t), x_2(t)$ – фазовые переменные, $u(t)$ – управление, на которое наложено ограничение:

$$-1 \le u(t) \le 1, \quad t \in [0, T]. \tag{11}$$

Пусть задано начальное и конечное состояние процесса:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = -4, \tag{12}$$

$$x_1(T) = 0, x_2(T) = 0. \tag{13}$$

Необходимо найти управление $u(t)$ с учетом ограничений (11), переводящее процесс, описываемый системой (10), из состояния (12) в начало координат за минимальное время T.

Алгоритм применен со следующими параметрами: количество иммунных клеток в популяции $m = 50$, количество точек разбиения интервала времени $r = 60$, максимальная продолжительность процесса $\overline{T} = 20$, количество клеток-родителей $p = 20$, количество клонов $cl = 20$, количество заменяемых иммунных клеток $s = 10$, параметр мутации $mut = 0{,}5$, параметр окончания вычислений $\varepsilon = 0{,}01$.

Функция приспособленности для задачи (10)-(13) имеет вид:

$$F(q_k) = \sqrt{(x_1^k)^2 + (x_2^k)^2}.$$

С помощью алгоритма искусственных иммунных систем вычислено наименьшее время $T^* = 9{,}6607$, за которое процесс переходит в состояние $x_1(T^*) = -0{,}0014$, $x_2(T^*) = 0{,}0046$. Рассчитаны субоптимальное по быстродействию управление и соответствующие значения переменных состояния процесса (рис. 1, 2). Отклонение от заданного терминального состояния составило $0{,}0048$.

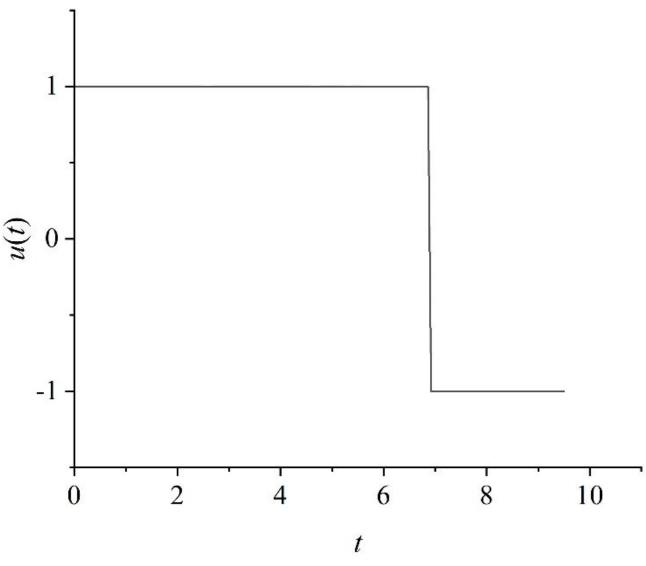

Рис. 1. График управляющей функции в задаче (10)-(13)

В работе [16] решение линейной задачи оптимального быстродействия (10)-(13) найдено с помощью принципа максимума Понтрягина:

$$u = \begin{cases} 1, \ t \in [0{,}4 + 2\sqrt{2}), \\ -1, \ t \in [4 + 2\sqrt{2}, 4 + 4\sqrt{2}], \end{cases}$$

$T^* = 4 + 4\sqrt{2}$.

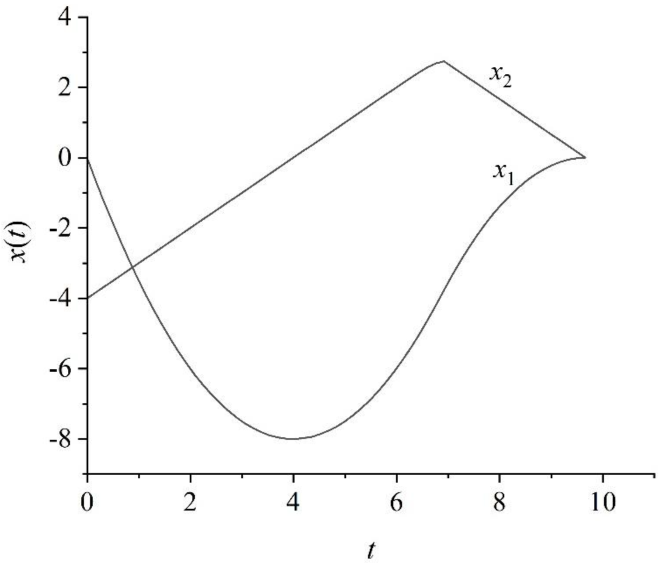

Рис. 2. График фазовых переменных в задаче (10)-(13)

Относительная погрешность наименьшего времени T^*, вычисленного с помощью метода искусственных иммунных систем, составила 0,039%, погрешность значения точки переключения управления (t = 6,863) равна 0,63%, что свидетельствует об удовлетворительном согласовании с решением, найденным с помощью принципа максимума Понтрягина.

Рассмотрим теперь в качестве тестовой задачи нелинейную задачу быстродействия [17]:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 0{,}072 - 0{,}0968x_3^2 - 0{,}0605x_3\,sin(x_1), \tag{14}$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 0{,}232(1+u) - 0{,}297x_3 + 0{,}0919\,cos(x_1),$$

$$-1 \le u(t) \le 1, \quad t \in [0, T], \tag{15}$$

$$x_1(0) = -0{,}0436, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1{,}1, \tag{16}$$

$$x_1(T) = -0{,}4502, x_2(T) = 0, x_3(T) = 1{,}043. \tag{17}$$

$$J(u) = T. \tag{18}$$

Необходимо найти управление $u(t)$, удовлетворяющее условию (15), при котором система переходит из начального состояния (16) в конечное состояние (17) и целевой функционал (18) принимает минимальное значение.

Решение задачи (14)-(18) найдено с функцией приспособленности

$$F(q_k) = \sqrt{(x_1^k + 0{,}4502)^2 + (x_2^k)^2 + (x_3^k - 1{,}043)^2}$$

с параметрами алгоритма: $m = 50$, $r = 100$, $\overline{T} = 10$, количество клеток-родителей $p = 20$, количество клонов $cl = 20$, количество заменяемых иммунных клеток $s = 10$, параметр мутации $mut = 0{,}5$, параметр окончания вычислений $\varepsilon = 0{,}01$.

На рис. 3, 4 показаны результаты решения задачи (14)-(18). Наименьшее время процесса управления составило $T^* = 6{,}3994$. Конечное состояние процесса задается значениями: $x_1(T^*) = -0{,}4498$, $x_2(T^*) = -0{,}002$, $x_3(T^*) = 1{,}042$. Отклонение от терминальных условий – $0{,}00227$.

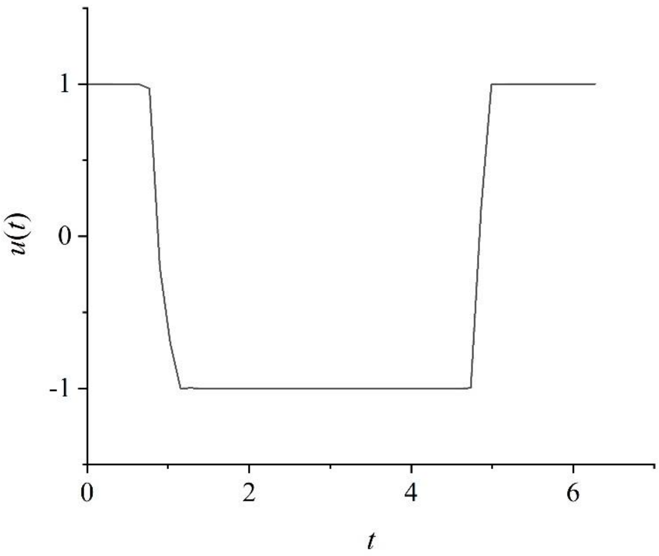

Рис. 3. График управляющей функции в задаче (14)-(18)

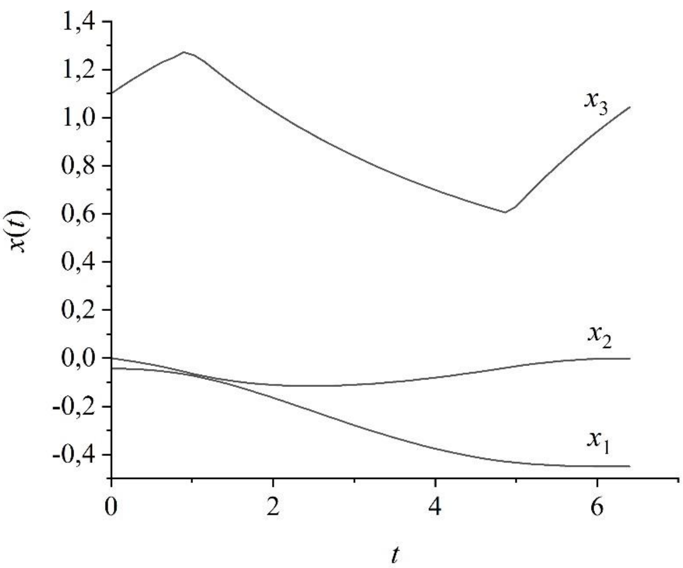

Рис. 4. График фазовых переменных в задаче (14)-(18)

Ранее в работе [17] с помощью многометодной технологии найдено значение наименьшего времени T^*, равное 6,3016, что на 1,55% отличается от решения, рассчитанного с помощью метода искусственных иммунных систем.

Таким образом, решения линейных и нелинейных задач оптимального быстродействия, вычисленные с помощью метода искусственных иммунных систем, незначительно отличаются от решений, полученных с помощью других методов. При этом важным преимуществом разработанного алгоритма является отсутствие необходимости задавать начальное приближение решения задачи, поскольку начальная популяция иммунных клеток, с которой начинается вычислительный процесс, заполняется на шаге 2 алгоритма случайными допустимыми значениями, что упрощает для исследователя поиск решения.

5. Заключение

Таким образом, для поиска приближенного решения задачи оптимального быстродействия можно использовать разработанный алгоритм искусственных иммунных систем. Особенностью алгоритма является возможность его применения для решения как линейных, так и нелинейных задач быстродействия. Преимуществом предложенного подхода является отсутствие необходимости указывать начальное приближение, с которого начинается поиск решения.

Работа алгоритма продемонстрирована на линейной и нелинейной задачах оптимального быстродействия. Для каждой из задач вычислено приближенное решение, найдено наименьшее время и управление, переводящее управляемый процесс из начального состояния в конечное состояние. Проведено сравнение решения задач с решениями, вычисленными с помощью принципа максимума Понтрягина и многометодной технологии, в результате которого продемонстрирована эффективность применения разработанного алгоритма.

6. Благодарности

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2023-0002).

7. Литература

[1] Александров В.М. Итерационный метод вычисления оптимального по быстродействию управления квазилинейными системами // Сибирский журнал вычислительной математики. 2003. Т. 6, № 3. С. 227–247.

[2] Шевченко Г.В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31, № 12. С. 1763–1771.

[3] Флоринский В.В. Решение линейной задачи быстродействия с двумерным управлением // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2015. № 5. С. 89–95.

[4] Новиков Д.А. О простейшей задаче быстродействия с фазовым ограничением при управлении пространственной ориентацией тела // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 3. С. 62–72.

[5] Павлюковец С.А., Вельченко А.А., Радкевич А.А. Математическая модель системы управления мобильным гусеничным роботом с учетом кинематических и динамических параметров // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 3. С. 33–38.

[6] Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Поиск оптимальных начальных концентраций веществ каталитической реакции на основе кинетической модели // Автометрия. 2023. Т. 59, № 4. С. 78–87.

[7] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

[8] Карамзин Д.Ю. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями при ослабленных предположениях управляемости // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2018. № 20. С. 46–61.

[9] Katoch S., Chauhan S.S., Kumar V. A Review on Genetic Algorithm: Past, Present, and Future // Multimedia Tools and Applications. 2021. Vol. 80. P. 8091–8126.

[10] Mustafina S., Antipin A., Antipina E., Odinokova E., Tuchkina L. Search for the optimal ratio of the initial substances of a chemical reaction based on evolutionary calculations // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2020. Vol. 15, No. 1. P. 56–60.

[11] Михерский Р.М. Применение искусственной иммунной системы для распознавания зрительных образов // Компьютерная оптика. 2018. Т. 42, № 1. С. 113–117.

[12] Самигулина Г.А. Разработка интеллектуальных экспертных систем прогнозирования и управления на основе искусственных иммунных систем // Теоретическая информатика. 2009. № 4. С. 15–22.

[13] Бардачев Ю.Н., Дидык А.А. Использование положений теории опасности в искусственных иммунных системах // Автоматика, автоматизация, электротехнические комплексы и системы. 2007. № 2. С. 107–111.

[14] Alonso F.R., Oliveira D.Q., Zambroni de Souza A.C. Artificial Immune Systems Optimization Approach for Multiobjective Distribution System Reconfiguration // IEEE Transactions on Power Systems. 2015. Vol. 30, No. 2. P. 840–847.

[15] Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Поиск оптимальных режимных параметров каталитического процесса на основе эволюционных вычислений // Теоретические основы химической технологии. 2022. Т. 56, № 2. С. 158–166.

[16] Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах: учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2003. 583 с.

[17] Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.

Search for an approximate solution of optimal performance problems for systems with limited scalar control

Antipina E.V.[*], Mustafina S.A.[**], Antipin A.F.[***]

Ufa University of Science and Technology

[*]stepashinaev@ya.ru
[**]mustafina_sa@mail.ru
[***]andrejantipin@ya.ru

Abstract. The article considers the problem of optimal performance for linear and nonlinear controlled systems with limited scalar control. To find its approximate solution, a numerical algorithm is formulated based on the method of artificial immune systems. The advantage of the proposed approach is the lack of need to specify the initial approximation from which the search for a solution begins. The algorithm has been tested on model problems. For each of them, an approximate solution has been calculated, a suboptimal control in terms of performance has been found, transferring the controlled process from the initial state to the final state in the shortest time. The results of numerical experiments are consistent with the results of calculations obtained based on the Pontryagin maximum principle and multi-method technology.

Keywords: optimal performance problem, artificial immune systems, linear controlled system, nonlinear controlled system, evolutionary methods.

Acknowledgements: This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (scientific code FZWU-2023-0002).