ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений: методы получения точных решений уравнений

Хакимова З.Н., Шахова Е.А.

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург

vka@mil.ru

Аннотация. Рассматриваются два основных метода получения точных решений уравнений в рамках дискретно-группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений: метод «размножения» разрешимых случаев в исследуемом классе уравнений, а также метод дискретных инвариантов.
Дана классификация классов уравнений, исследованных этими методами.
Приведены примеры получения этими методами точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в том числе, содержащих произвольные параметры, а также произвольные функции.
Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, точное решение дифференциального уравнения, дискретная группа преобразований, группа диэдра, дискретная псевдогруппа преобразований, инвариант дискретного преобразования, конкомитант, класс уравнений Эмдена-Фаулера.

1. Введение. Методы и классы уравнений

Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений (ДГА ОДУ) был разработан российским математиком В.Ф. Зайцевым более 40 лет назад [1, 2].

Основой ДГА ОДУ является выбор класса дифференциальных уравнений и поиск дискретных преобразований, замкнутых в этом классе уравнений.

Класс дифференциальных уравнений – это множество дифференциальных уравнений одного и того же вида, т.е. дифференциальное уравнение с параметрическим или функциональным произволом. Найденные дискретные преобразования изменяют лишь числовые параметры или функции, содержащиеся в исходном дифференциальном уравнении, не изменяя вида этого уравнения.

Указанные выше дискретные преобразования являются образующими циклических дискретных групп либо дискретных псевдогрупп: дискретных групп, если они замкнуты на всём классе уравнений или на его подклассе; дискретных псевдогрупп, если исходный и преобразованный подклассы – различны.

Далее выясняются порядки образующих, находится код дискретной группы, т.е. устанавливается структура группы. В соответствии с кодом группы строится её граф. Вершинам графа соответствуют дифференциальные уравнения с параметрами (либо с произвольными функциями), а дугам графа – преобразования полученной дискретной группы.

Далее строятся расширения найденной основной дискретной группы, которые допускаются при некоторых конкретных параметрах (функциях). При этом если одно из уравнений-вершин является разрешимым, то все уравнения, соответствующие остальным вершинам графа, являются разрешимыми, причём, в тех же функциях, что и исходное уравнение.

В этом заключается метод «размножения» разрешимых случаев в исследуемом классе уравнений.

Метод дискретных инвариантов пока менее разработан. Каждый новый пример нахождения интегрируемого подкласса можно рассматривать как удачу. Заключается он в следующем.

Выбирается дискретное преобразование, замкнутое на всём классе уравнений либо на его подклассе. Приравниваются соответствующие параметры исходного и преобразованного уравнений и получается система уравнений, решение которого – это параметры дискретно-инвариантного подкласса исходного класса уравнений.

Далее в ряде случаев удаётся понизить порядок полученного дискретного инварианта с помощью группировки его элементов и соответствующего выбора независимой и искомой переменных.

Рассмотрим ряд классов уравнений 2-го порядка – от частных к более общим видам уравнений:

1. *Классы степенных дифференциальных уравнений 2-го порядка*:
класс уравнений Эмдена-Фаулера

$$y''_{xx} = Ax^k y^l, \tag{1}$$

класс обобщённых уравнений Эмдена-Фаулера

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m, \tag{2}$$

более общий класс степенных уравнений

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^n. \tag{3}$$

2. *Классы уравнений с полиномиальными правыми частями*:
обобщение (2)

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i}, \tag{4}$$

а также обобщение класса уравнений (3) с конечным числом слагаемых в правых частях уравнений

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}. \tag{5}$$

3. *Класс уравнений дробно-полиномиального вида*, включающий в себя классы уравнений (1)-(5):

$$y''_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}{\sum_{i=p+1}^{2p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}. \tag{6}$$

4. *Мультипликативные классы уравнений с функциональным произволом*:
обобщение (2)

$$y''_{xx} = K(x)L(y)M(y'_x), \tag{7}$$

а также обобщение класса уравнений (3)

$$y''_{xx} = K(x)L(y)M(y'_x)N(xy'_x - y). \tag{8}$$

5. *Классы уравнений с конечным числом мультипликативных слагаемых*:
обобщение классов уравнений (4) и (7)

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^{p} K_i(x)L_i(y)M_i(y'_x), \tag{9}$$

а также обобщение классов уравнений (5) и (8)

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^{p} K_i(x)L_i(y)M_i(y'_x)N_i(xy'_x - y). \tag{10}$$

Уравнение (1) при $k = -4$ было получено Р. Эмденом [3] в связи с изучением условий равновесия политропного газового шара. Кроме того, уравнение (1) при $k = -\frac{1}{2}$, $l = \frac{3}{2}$ включает в себя уравнение Томпсона-Ферми , возникающее при изучении распределения электронов в атоме [4].

Класс ОУЭФ (2) имеет много приложений – прежде всего в нелинейной механике. Этот класс уравнений был хорошо изучен В.Ф. Зайцевым [1, 2, 5].

Класс уравнений (2) был расширен до класса уравнений (3) для получения замкнутости некоторых преобразований (которые замкнуты лишь при $m = 0$, т.е. в его подклассе (1)). В работе [6] был проведён ДГА класса уравнений (3). Класс уравнений (4) был исследован в работах [7, 8], а классы уравнений (5), (6) – в [9].

Стоит заметить, что уравнения Пенлеве, имеющие многочисленные приложения в нелинейной механике, в статистической физике, в квантовой теории поля, в теории чисел и т.д., принадлежат классам уравнений (4)-(6).

Кроме того, классы уравнений (4), (7), (9) имеют много приложений в различных областях естествознания. Классы уравнений (8) и (10) были введены в рассмотрение опять-таки для достижения замкнутости некоторых преобразований, которые не были замкнуты в классах уравнений (7) и (9) соответственно.

2. Дискретные группы преобразований для классов уравнений (3), (6), (8)

Классы уравнений (3), (6), (8) имеет дискретную группу (диэдра) преобразований, замкнутых в этих классах уравнений:

$$D_6 = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}^2, \boldsymbol{h}^3, \boldsymbol{h}^4, \boldsymbol{h}^5, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{hr}, \boldsymbol{h}^2\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^3\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^4\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^5\boldsymbol{r}\}, \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{h}^6 = (\boldsymbol{hr})^2 = \boldsymbol{E}, \quad (11)$$

$$\mathbf{r}: x \rightleftarrows y, \boldsymbol{h}: x \to \frac{1}{y_x'}, y \to -\frac{xy_x'-y}{y_x'}. \quad (12)$$

Если классы уравнений (3), (6), (8) обозначить соответствующими векторами параметров (функций):

$$(k, l, m, n|A); \frac{\sum_{i=1}^{p}(k_i,l_i,m_i,n_i|A_i)}{\sum_{i=p+1}^{2p}(k_i,l_i,m_i,n_i|A_i)};$$

$$(K(\alpha), L(\beta), M(\gamma), N(\delta)),\ \alpha = x, \beta = y, \gamma = y_x', \delta = xy_x' - y,$$

то преобразования $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{h}$ следующим образом изменяют вектор параметр для (3) [6]:

$$\mathbf{r}: (k, l, m, n|A) \to (l, k, 3 - m - n, n|(-1)^{n+1}A),$$

$$\boldsymbol{h}: (k, l, m, n|A) \to (-n, -m, k + l + 3, -l|(-1)^{1-l}\frac{1}{A});$$

для (6) [9]:

$$\mathbf{r}: \frac{\sum_{i=1}^{p}(k_i,l_i,m_i,n_i|A_i)}{\sum_{i=p}^{2p}(k_i,l_i,m_i,n_i|A_i)} \to \frac{\sum_{i=1}^{p}(l_i,k_i,-m_i-n_i+3,n_i|(-1)^{-n_i-1}A_i)}{\sum_{i=p}^{2p}(l_i,k_i,-m_i-n_i,n_i|(-1)^{-n_i}A_i)},$$

$$\boldsymbol{h}: \frac{\sum_{i=1}^{p}(k_i,l_i,m_i,n_i|A_i)}{\sum_{i=p}^{2p}(k_i,l_i,m_i,n_i|A_i)} \to \frac{\sum_{i=1}^{p}(n_i,m_i,-k_i-l_i,l_i|(-1)^{l_i}A_i)}{\sum_{i=p}^{2p}(n_i,m_i,-k_i-l_i-3,l_i|(-1)^{l_i-1}A_i)}.$$

В (8) функции изменяются следующим образом [10]:

$$\mathbf{r}: (K(\alpha), L(\beta), M(\gamma), N(\delta)) \to \left(-L(\alpha), K(\beta), \gamma^3 M\left(\frac{1}{\gamma}\right), N\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)\right),$$

$$\boldsymbol{h}: (K(\alpha), L(\beta), M(\gamma), N(\delta)) \to \left(-\frac{1}{N(\alpha)}, \frac{1}{M(\beta)}, \frac{\gamma^3}{K\left(\frac{1}{\gamma}\right)}, \frac{1}{L\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)}\right).$$

Граф группы D_6 (11), (12) 12-го порядка выглядит следующим образом:

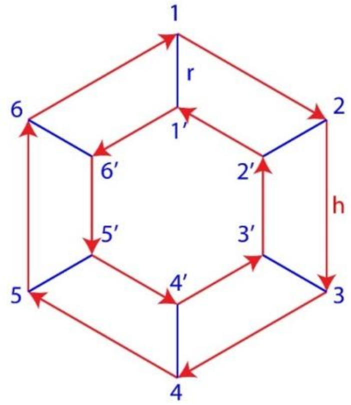

Рис. 1. Граф группы диэдра D_6 12-го порядка

3. Получение точных решений уравнений методом «размножения»

Пример 1. В качестве примера применения метода «размножения» для получения точных решений уравнений рассмотрим 1-е уравнение Пенлеве:

$$y''_{xx} = 6y^2 + x, \tag{13}$$

которое принадлежит классам уравнений (4) и (5).

Общим решением уравнения (13) является специальная функция, называемая 1-м трансцендентом Пенлеве, обозначим его:

$$x = \tau,\ y = P(\tau, C_1, C_2). \tag{14}$$

Группа D_6 (11), (12) 12-го порядка для 1-го уравнения Пенлеве расширяется до псевдогруппы 120-го порядка с помощью следующих преобразований [9]:

$$\mathbf{u}: x \to x^{\frac{1}{\sigma}},\ \ y \to x^{\frac{1-\sigma}{2\sigma}} \cdot y + \frac{(k_1+2)(k_1+3)}{A_1} \cdot x^{-\frac{k_1+2}{\sigma}},\ \ \sigma = \sqrt{8k_1^2 + 40k_1 + 49},$$

$$y''_{xx} = A_1 x^{k_1} y^2 + A_2 x^{k_2} \xrightarrow{\boldsymbol{u}} y''_{xx} = \frac{A_1}{\sigma^2} x^{\frac{2k_1+5}{2\sigma}-\frac{5}{2}} y^2 + \frac{A_2}{\sigma^2} x^{\frac{2k_2+3}{2\sigma}};$$

$$\mathbf{g}_1:\quad x \to y^{\frac{1}{k_1+1}},\ \ y \to (y'_x)^{-\frac{1}{l}},$$

$$y''_{xx} = A_1 x^{k_1} y^l + A_2 x^{k_2} \xrightarrow{\boldsymbol{g}_1}$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{g}_1} y''_{xx} = \left(-\frac{A_1}{(k_1+1)^2} x y^{-\frac{k_1}{k_1+1}} - \frac{A_2}{(k_1+1)(k_2+1)} y^{\frac{k_2-k_1+1}{k_1+1}}\right)(y'_x)^{\frac{2l+1}{l}};$$

$$\mathbf{g}_1^{-1}:\quad x \to \frac{l_1+1}{(2-m)A_1} \cdot y'_x - \frac{A_2}{A_1} x^{\frac{l_2-l_1}{l_1+1}},\ y \to x^{\frac{1}{l_1+1}},$$

$$y''_{xx} = (A_1 x y^{l_1} + A_2 y^{l_2})(y'_x)^m \xrightarrow{\boldsymbol{g}_1^{-1}}$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{g}_1^{-1}} y''_{xx} = \frac{2-m}{(l_1+1)^2} A_1 x^{-\frac{l_1}{l_1+1}} y^{\frac{1}{m-2}} + \frac{(l_2-l_1)(2-m)}{(l_1+1)^2} A_2 x^{\frac{l_2-2l_1-1}{l_1+1}}.$$

Граф псевдогруппы 120-го порядка изображён на рис. 2. Преобразования этой псевдогруппы замкнуты в классе уравнений (6).

По графу на рис. 2 легко видеть, что, например, уравнение 9.4

$$y''_{xx} = \left[(-1)^{-\frac{1}{26}} \cdot \frac{12}{169} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{2}} (y'_x)^{-\frac{20}{13}} (xy'_x - y)^{-\frac{32}{13}} + (-1)^{\frac{11}{26}} \cdot \frac{1}{39} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{2}} (y'_x)^{-\frac{14}{13}} (xy'_x - y)^{-\frac{25}{13}}\right]^{-1} \tag{15}$$

связано с уравнением Пенлеве 5.1 (13) с помощью преобразования

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{rh}^3\boldsymbol{g}_1^{-1}\boldsymbol{uh}^2\boldsymbol{r}: x \to \frac{36(x^2y-1)^2}{x^{13}(78x^3y'_x - 36x^4y^2 - 240x^2y - 13x^5 + 432)}, \\ &y \to -\frac{36}{x(78x^3y'_x - 36x^4y^2 - 240x^2y - 13x^5 + 432)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Композиция (16) и (14) является общим решением уравнения 9.4 (15):

$$x = \frac{36(\tau^2 P - 1)}{\tau^{13}(78\tau^3 \dot{P}_\tau - 36\tau^4 P^2 - 240\tau^2 P - 13\tau^5 + 432)},\ y = -\frac{36}{\tau(78\tau^3 \dot{P}_\tau - 36\tau^4 P^2 - 240\tau^2 P - 13\tau^5 + 432)}.$$

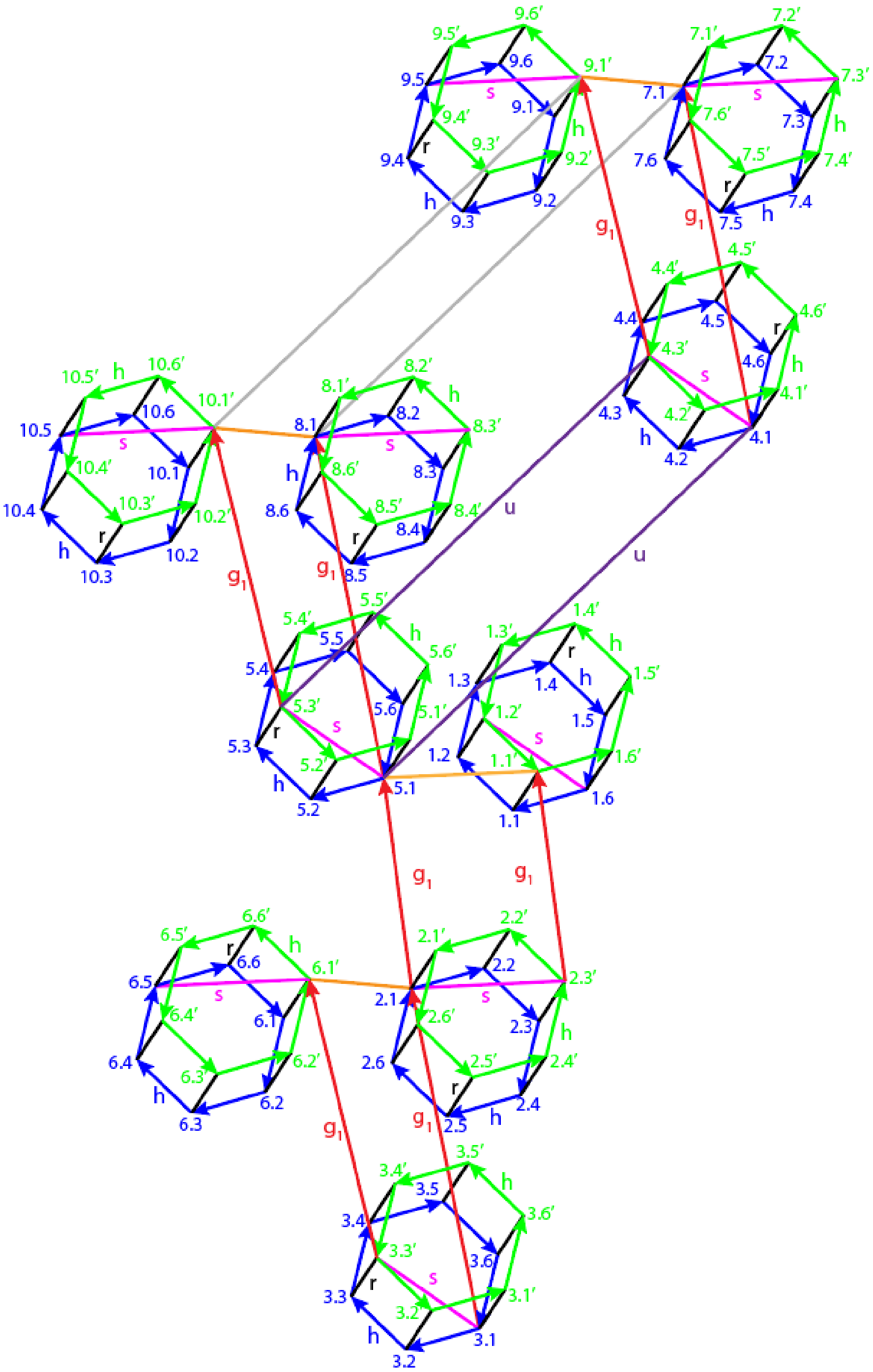

Рис. 2. Граф псевдогруппы 120-го порядка. Вершина 5.1 обозначает 1-е уравнение Пенлеве

Аналогично можно найти решения ещё 118-ти уравнений, обозначенных вершинами графа на рис. 2.

Вычисления можно минимизировать, если в каждой шестиугольной призме на рис. 2 выделить «ключевую» вершину; с помощью решения «ключевого» уравнения можно найти решения остальных 11-ти уравнений, соответствующих вершинам графа D_6.

Далее можно вычислить преобразования, связывающие «ключевые» вершины-уравнения.

Важно отметить, что решения всех уравнений, соответствующих вершинам графа на рис.2, выражаются через 1-й трансцендент Пенлеве, как и исходное уравнение.

Пример 2. Рассмотрим уравнение, принадлежащее классу уравнений (7) при $K(x) = e^x$, $L(y) = y^{-\frac{1}{2}}, M(y'_x) = (y'_x)^{\frac{3}{2}}$:

$$y''_{xx} = e^x y^{-\frac{1}{2}} (y'_x)^{\frac{3}{2}}. \tag{17}$$

Пусть оно имеет номер 1.1 на рис. 1. Его общее решение в параметрическом виде [11]:

$$x = \tau^2 - \ln f,\ y = C_1(2\tau f - e^{\tau^2})^2,\ f = \int e^{\tau^2} \partial\tau + C_2. \tag{18}$$

Уравнение 1.3' будет иметь вид:

$$y''_{xx} = -i x^{\frac{7}{2}} e^{\frac{1}{x}} y^{-\frac{1}{2}} (x y'_x - y)^{\frac{3}{2}}. \tag{19}$$

По рис. 1 легко видеть, что уравнение 1.3' приводится к 1.1 преобразованием

$$\boldsymbol{h}^2\boldsymbol{r} : x \to \frac{1}{x},\ y \to -\frac{y}{x}. \tag{20}$$

Композиция (20) и (18) является общим решением уравнения (19):

$$x = \frac{1}{\tau^2 - \ln f},\ y = -\frac{C_1(2\tau f - e^{\tau^2})^2}{\tau^2 - \ln f},\ f = \int \tau^2 \partial\tau + C_2.$$

4. Нахождение точных решений уравнений методом дискретных инвариантов

Пример 3. Рассмотрим класс уравнений (3). Применим к нему преобразование $\boldsymbol{r}$:

$$\mathbf{r}: x \rightleftarrows y,\ (k, l, m, n | A) \xrightarrow{\mathbf{r}} (l, k, 3 - m - n, n | (-1)^{n+1} A).$$

Приравняем показатели степеней исходного и преобразованного уравнений, в результате получим $\boldsymbol{r}$-инвариант в классе уравнений (3), который можно записать в виде:

$$\frac{y''_{xx}}{2(y'_x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{2} (xy)^k \left(\frac{x y'_x - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}} \right)^n. \tag{21}$$

Пусть

$$\theta = xy,\ V = \frac{xy' - y}{(y'_x)^{\frac{1}{2}}} \left(\dot{V}_\theta = \frac{y''_{xx}}{2(y'_x)^{\frac{3}{2}}} \right), \tag{22}$$

тогда уравнение (21) приводится к уравнению 1-го порядка – к уравнению с разделяющимися переменными:

$\dot{V}_\theta = \frac{A}{2}\theta^k V^n$,

общее решение которого при $k \neq -1, n \neq 1$:

$$V = a(\theta^{k+1} + C_2)^{\frac{1}{1-n}},\ a = \left(\frac{A(1-n)}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-n}}. \quad (23)$$

Замечание 1. Преобразование (22) является так же, как и уравнение (21) $\boldsymbol{r}$-инвариантным. Оно называется конкомитантом – согласованным совместным инвариантом.

Обратное к конкомитанту (22) преобразование:

$$x = \theta C_1^{-1} e^{-\varphi(\theta)},\ y = C_1 e^{\varphi(\theta)},\ \varphi(\theta) = \int \frac{V^2 + 2\theta + V\sqrt{V^2+4\theta}}{\theta(V^2 + 4\theta + V\sqrt{V^2+4\theta})} d\theta. \quad (24)$$

Подставив (23) в (24), получаем общее решение уравнения (21).

Замечание 2. Методом дискретных инвариантов удалось проинтегрировать и более общие классы уравнений, например, с произвольными функциями.

Список литературы:

[1] Зайцев В. Ф. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений // Деп. ВИНИТИ № 5739-82. – 1982. – 130 с.

[2] Зайцев В. Ф., Кормилицына Т. В. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч. 2 // Деп. ВИНИТИ № 3720-85. – 1985. – 152 с.

[3] Emden, R. (1907) Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen warmetheorie auf kosmologische und meteorologische probleme. B. Teubner, Berlin.

[4] Математическая энциклопедия. Т.5 // Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – 1248 с.

[5] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464 с.

[6] Хакимова З. Н., Зайцев О.В. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки, №3. – СПб., 2014. – С. 3-11.

[7] Зайцев В. Ф., Хакимова З. Н. О дискретно-групповом анализе уравнения $y''_{xx} = A_1 x^{n_1} y^{m_1} {y'_x}^{l_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2} {y'_x}^{l_2}$ // Деп. ВИНИТИ № 9030-В86. – 1986. – 31 с.

[8] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В., Хакимова З.Н. Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Точные решения. – Л.: Препринт ЛИИА АН СССР, № 105. – 1989. – 61 с.

[9] Хакимова З. Н., Зайцев О. В. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2021. – N 1(4). – С. 62-92. – URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4.html

[10] Хакимова З. Н., Грешневиков К. В. О дискретных симметриях уравнения свободных незатухающих колебаний маятника // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2023». – СПб.: РГПУ, 2023. – С. 254-258.

[11] Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. – CRC Press. Boca Raton – London, 2018.

Discrete group analysis of ordinary differential equations: methods for obtaining exact solutions of equations

Khakimova Z.N., Shakhova E.A.

Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg

vka@mil.ru

Abstract. Two main methods of obtaining exact solutions of equations within the framework of discrete-group analysis of ordinary differential equations are considered: the method of "multiplication" of solvable cases in the studied class of equations, as well as the method of discrete invariants. A classification of the classes of equations studied by these methods is given. Examples of obtaining exact solutions of ordinary differential equations of the second order by these methods are given, including those containing arbitrary parameters, as well as arbitrary functions.
Keywords: ordinary differential equation of the second order, exact solution of differential equation, discrete transformation group, dihedral group, discrete pseudogroup of transformations, invariant of discrete transformation, concomitant, class of Emden-Fowler equations.