



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N 2, 2017

Электронный журнал,

рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

УДК 517.95

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С СУПЕРУСТОЙЧИВОЙ ПОЛУГРУППОЙ

Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг

МГУ имени М. В. Ломоносова, МПГУ

Москва

e-mail: ivtikh@mail.ru, vnsontung@mail.ru

Аннотация

В настоящем сообщении дано расширенное изложение доклада, сделанного на научной конференции «Герценовские чтения — 2017». Изучается линейная обратная задача для эволюционного уравнения в банаховом пространстве. Нужно восстановить неизвестное неоднородное слагаемое. Дополнительная информация задана в виде нелокального условия, записанного через интеграл Римана–Стилтьеса. Для проведения исследования вводится специальное предположение, связанное с суперустойчивостью (квазинильпотентностью) эволюционной полугруппы. Показано, что тогда решение обратной задачи представимо сходящимся рядом Неймана. Тем самым, установлен конструктивный метод для нахождения решения. Отдельно выделен случай, когда бесконечный ряд Неймана обращается в конечную сумму. Рассмотрен модельный пример обратной задачи с финальным переопределением.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, обратная задача, суперустойчивая полугруппа.

Abstract

The paper presents an extended description of the report which was made at the scientific conference «Herzen Readings — 2017». The linear inverse problem for the evolution equation in a Banach space is studied. It is required to recover an unknown nonhomogeneous term. Additional information was given in the form of a nonlocal condition with the Riemann-Stieltjes integral. For conducting research, a special assumption which related to the superstability of the evolution semigroup is introduced. It is shown that the solution of the inverse problem can be represented by a convergent Neumann series. As a result, a constructive method for finding a solution of the inverse problem is obtained. The case when the Neumann series becomes a finite sum is singled out separately. A model example of the inverse problem with final overdetermination is considered.

Keywords: evolution equation, inverse problem, superstable semigroup.

Работа посвящена линейной обратной задаче о нахождении неоднородного слагаемого в абстрактном дифференциальном уравнении. Мы используем стандартный полугрупповой подход (см. [1]–[4]). В качестве дополнительного условия задано нелокальное переопределение в виде векторного интеграла Римана–Стилтьеса. Общая схема исследования подобных обратных задач была разработана в [5], [6]. Сейчас мы уточним некоторые детали и укажем конструктивный метод для поиска решения в предположении, что основной оператор эволюционного уравнения порождает суперустойчивую полугруппу класса C_0 (см. [7]–[12]).

Начнем с постановки исходной прямой задачи. В банаховом пространстве E при фиксированном значении $T > 0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для эволюционного уравнения специального вида:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$, плотной в E . Начальный элемент u_0 задан в $D(A)$. Считаем, что оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0 (см. [1]–[4]). Скалярная функция $\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$, причем $\varphi(t) \not\equiv 0$. Дополнительно предполагаем, что $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$, т. е. $\varphi \in BV[0, T]$.

Тогда, как показано в [6], при любом выборе элемента $g \in E$ стандартная

формула

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s) \varphi(s)g \, ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

дает классическое решение задачи (1), принадлежащее $C^1([0, T]; E)$, и такое, что $u(t) \in D(A)$ при $0 \leq t \leq T$.

Предположим теперь, что элемент $g \in E$ неизвестен. Для его нахождения добавим к задаче (1) специальное *нелокальное переопределение*

$$\int_0^T u(t) \, d\mu(t) = u_1. \quad (3)$$

Элемент $u_1 \in D(A)$ считаем заданным. Интеграл в условии (3) есть векторный интеграл Римана–Стилтьеса (см. [1]) с функцией $\mu \in BV[0, T]$, порождающей невырожденную меру $d\mu(t) \not\equiv 0$. Поставленная задача (1), (3) для нахождения пары $(u(t), g)$ называется *линейной обратной задачей* с нелокальным переопределением (см. [5], [6]).

Сделаем сейчас акцент на специальном случае суперустойчивой полугруппы $U(t)$. Напомним, что *экспоненциальным типом* полугруппы называется величина

$$\omega_0 \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{t}.$$

Указанный предел заведомо существует со значением в промежутке $[-\infty, \infty)$. Если $\omega_0 = -\infty$, то полугруппа $U(t)$ называется *суперустойчивой* (английский термин *superstable semigroup*, см. [7]–[12]). В таком случае при любом выборе числа $\alpha > 0$ найдется константа $M = M_\alpha \geq 1$, для которой

$$\|U(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Суперустойчивую полугруппу называют также *квазинильпотентной*, поскольку все ее операторы $U(t)$ при $t > 0$ являются квазинильпотентными в пространстве E . Спектр порождающего оператора A будет пустым, а резольвентное множество заполнит всю комплексную плоскость.

Из теории, развитой в [6], следует такое утверждение (см. [6, с. 112]).

Теорема 1. Пусть оператор A порождает в E суперустойчивую полугруппу $U(t)$ класса C_0 . Пусть $\varphi \in C[0, T] \cap BV[0, T]$ и $\mu \in BV[0, T]$, причем

$$\mu(0) = \mu(0+) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t). \quad (5)$$

Пусть также

$$\beta \equiv \int_0^T \varphi(t) d\mu(t) \neq 0. \quad (6)$$

Тогда линейная обратная задача (1), (3) имеет и притом единственное решение $(u(t), g)$ при любом выборе элементов $u_0, u_1 \in D(A)$.

Представленный

результат гарантирует корректность изучаемой обратной задачи (1), (3) в случае суперустойчивой полугруппы $U(t)$ при минимальных ограничениях (5), (6), связанных с самой природой обратной задачи. Метод доказательства теоремы 1, предложенный в [6], носил неконструктивный характер и базировался на теории Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, точнее, на ее специальной версии, разработанной в трактате [1] в связи с запросами спектральной теории полугрупп. Дополнительный анализ показывает, что можно избежать обращения к этим сложным концепциям и получить теорему 1 элементарным конструктивным методом. Коротко изложим план такого исследования.

В предположениях теоремы 1 рассмотрим операторное уравнение на неизвестный элемент $g \in E$. Согласно схеме [6] уравнение допускает запись

$$\beta g - Bg = f \quad (7)$$

со значением $\beta \neq 0$ из формулы (6), оператором

$$B = \int_0^T \varphi(0) U(t) d\mu(t) + \int_0^T d\mu(t) \int_0^t U(t-s) d\varphi(s) \quad (8)$$

и заданным элементом $f \in E$ вида

$$f = A \left(\int_0^T U(t) u_0 d\mu(t) - u_1 \right). \quad (9)$$

Интегралы в (8) понимаются в сильной операторной топологии. Используя структуру выражения (8) и оценку (4) с подходящим выбором $\alpha > 0$, можно оценить оператор B в некоторой эквивалентной норме и показать его квазинильпотентность.

Основной результат состоит в следующем.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1, включая требования (5), (6). Тогда оператор B из формулы (8) является квазинильпотентным в E , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|B^k\|} = 0.$$

При этом решение операторного уравнения (7) представимо рядом Неймана

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \quad (10)$$

сходящимся по норме пространства E . Если элемент $f \in E$ взят в виде (9), а число $\beta \neq 0$ — в виде (6), то элемент g из формулы (10) дает второй компонент решения $(u(t), g)$ поставленной обратной задачи (1), (3). При этом первый компонент — функция $u(t)$ — выражается формулой (2).

Теорема 2 обосновывает итерационный алгоритм для поиска решения обратной задачи (1), (3) на основе ряда Неймана (10). Алгоритм приобретает законченный вид в специальном случае нильпотентной полугруппы $U(t)$, когда

$$U(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0 > 0, \quad (11)$$

с некоторым фиксированным значением t_0 . Всякая нильпотентная полугруппа очевидно будет суперустойчивой (квазинильпотентной). При дополнительных ограничениях на функции $\varphi(t)$, $\mu(t)$ можно установить следующий результат.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения теоремы 1, включая требования (5), (6). Пусть, дополнительно, полугруппа $U(t)$ является нильпотентной, удовлетворяя соотношению (11) с некоторым фиксированным значением $t_0 > 0$. Предположим также, что функция $\mu(t)$ является постоянной на промежутке $[0, \varepsilon] \subset [0, T)$, а функция $\varphi(t)$ является постоянной на промежутке $[T - \delta, T] \subset (0, T]$, причем

$$\varepsilon + \delta > T. \quad (12)$$

Тогда оператор B из формулы (8) является нильпотентным, и

$$B^k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq \frac{t_0}{\varepsilon + \delta - T}.$$

Соответственно, решение операторного уравнения (7) представимо в виде конечной суммы

$$g = \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \quad N_0 \equiv \left[\frac{t_0}{\varepsilon + \delta - T} \right] - 1,$$

замещающей бесконечный ряд Неймана (10).

Здесь через $[h]$ обозначен *потолок* числа $h \in \mathbb{R}$, т. е. наименьшее целое число, большее или равное h . Доказательство теоремы 3 основано на представлении оператора B в виде

$$B = U(\varepsilon + \delta - T) Q,$$

где

$$Q = U(T - \delta) \int_{\varepsilon}^T \varphi(0) U(t - \varepsilon) d\mu(t) + \int_{\varepsilon}^T d\mu(t) \int_0^{T-\delta} U(t - \varepsilon + T - \delta - s) d\varphi(s).$$

Данное представление возможно в силу выполненного условия (12).

Простым «вырожденным» примером к теореме 3 служит модельная обратная задача с финальным переопределением:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u(T) = u_1. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\varphi(t) \equiv 1$ на $[0, T]$, а $\mu(t)$ есть функция единичного скачка в финальный момент времени $t = T$. Оператор B и элемент f из формул (8), (9) приобретают вид

$$B = U(T), \quad f = A(U(T)u_0 - u_1). \quad (14)$$

По-прежнему считаем, что полугруппа $U(t)$ является нильпотентной, удовлетворяя соотношению (11) с фиксированным значением $t_0 > 0$. Тогда решение обратной задачи (13) представимо в замкнутой форме

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)g ds, \quad g = \sum_{k=0}^{N_0} B^k f = \sum_{k=0}^{N_0} U(kT)f \quad (15)$$

со значением $N_0 = \lceil t_0/T \rceil - 1$. Учитывая представление (14) для элемента f , формулу (15) для второго компонента g можно записать в виде

$$g = \begin{cases} -Au_1, & t_0 \leq T, \\ -Au_1 + A \sum_{k=1}^{N_0} U(kT)(u_0 - u_1), & t_0 > T, \end{cases} \quad (16)$$

где снова $N_0 = \lceil t_0/T \rceil - 1$. Формула (16) удобна на практике.

Перечисленные результаты могут найти применение в специальных разделах математической физики, связанных с теорией упругости и задачами линейного переноса.

Список литературы

- [1] **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ. 1962. — 830 с.
- [2] **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М: Наука. 1967. — 464 с.
- [3] **Pazy A.** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — N.Y.: Springer Verlag. 1983. — 279 p.
- [4] **Engel K.-J., Nagel R.** One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — N.Y.: Springer. 2000. — 586 p.
- [5] **Прилепко А.И., Тихонов И.В.** Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Известия РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. — С. 167–188.
- [6] **Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.** Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56. Вып. 2. — С. 99–113.
- [7] **Balakrishnan A. V.** On superstability of semigroups // In: M.P. Polis et al (Eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics. — Chapman and Hall. 1999. — P. 12–19.

- [8] **Balakrishnan A. V.** Smart structures and super stability // In: G. Lumer, L. Weis (Eds.). Evolution equations and their applications in physical and life sciences. Lecture notes in pure and applied mathematics. Vol. 215. – Marcel Dekker. 2001. — P. 43–53.
- [9] **Balakrishnan A. V.** Superstability of systems // Applied Mathematics and Computation. 2005. Vol. 164. Issue 2. — P. 321–326.
- [10] **Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu.** Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations // Applied Mathematics Letters. 2011. Vol. 24. — P. 1698–1701.
- [11] **Creutz D., Mazo M., Preda C.** Superstability and finite time extinction for C_0 -Semigroups // arXiv:0907.4812. Submitted. 2013. — P. 1–12.
- [12] **Kmit I., Lyul'ko N.** Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // arXiv:1605.04703. Submitted. 2017. — P. 1–26.