ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциальные уравнения с запаздыванием

Об устойчивости одной нелинейной модели с запаздыванием

Прасолов А.В, Михлин Л.С.

Санкт-Петербургский государственный университет
a.prasolov@spbu.ru
mikhlin@bk.ru

Аннотация. В динамических задачах биологии, экономики, социологии и других в последние десятилетия используется модель в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений типа Лотки -- Вольтерра. Одним из важных свойств, характеризующих качественное поведение решений таких систем, является устойчивость по Ляпунову. Данная работа посвящена анализу устойчивости указанных выше систем с запаздыванием специального вида. Показано, что в некоторых случаях можно вычислить критическое запаздывание, при достижении которого равновесное решение теряет устойчивость. Рассмотрены некоторые обобщения модели Лотки — Вольтерра. Приведены примеры, иллюстрирующие применение предложенного метода из области экономической динамики.

Ключевые слова: система Лотки — Вольтерра, запаздывание, устойчивость.

1 Введение

В работе одного из авторов [1] активно используется математическая модель Лотки — Вольтерры в экономической динамике. Модель, как для двух экономических агентов, так и в многомерном случае, имеет в правой части полиномиальную нелинейность второго порядка. Кроме того, в нее введено запаздывание механизма воспроизводства. Таким образом, анализ качественного поведения решений требует аппарата нелинейных систем с сосредоточенным запаздыванием. Таким задачам посвящено много работ. В частности, общепризнанными являются авторитетные учебники и монографии Н.Н. Красовского [2], Р. Беллмана и К. Кука [3], Дж. Хэйла [4] и др.

В работе [1] (см. также [5]) основная модель анализируется в отношении асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия и наличия колебаний около стационарных точек, когда асимптотическая устойчивость отсутствует. Алгоритм анализа является общепринятым: вычисляются стационарные точки, строится линейная часть системы в отклонениях и по расположению корней характеристического уравнения решается вопрос об асимптотической устойчивости равновесного решения нелинейной системы. При этом, естественно, нелинейная часть должна удовлетворять условиям теоремы об устойчивости по первому приближению Н.Н. Красовского, которую мы приведем для полноты изложения по [2] в случае одинакового постоянного запаздывания во всех уравнениях системы.

Теорема Красовского. Пусть дано уравнение

$$\dot{x_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}x_j(t) + b_{ij}x_j(t-\tau)\right) + R_i(x_1, \dots, x_n, x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau), t). \tag{1}$$

$$\left(i = \overline{1,n}, \tau = const, \tau > 0\right).$$

Если корни λ_i характеристического уравнения

$$det\left[\lambda E - A - e^{-\lambda\tau}B\right] = 0, \text{где} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\lambda_i < -\gamma < 0, \qquad \left(\gamma = const, i = \overline{1,n}\right),$$

то можно указать постоянную $\beta > 0$ такую, что решение $x = 0$ системы (1) будет асимптотически устойчиво, каковы бы ни были непрерывные функции $R_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$ и запаздывание τ удовлетворяющие неравенству

$$|R_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)| \le \beta(\|x\| + \|y\|)^{1+\delta}, \qquad \delta > 0.$$

Условие отделимости корней от мнимой оси на комплексной плоскости может быть заменено строгим неравенством, так как мы рассматриваем только уравнения с запаздыванием, а для них имеет место факт: во всякой вертикальной полосе конечной ширины уравнение (2) имеет лишь конечное число корней [6].

Новизну данному исследованию придает то, что нами выделен класс математических моделей со специальным введением запаздывания. Напомним, что характеристическое уравнение линейной системы с сосредоточенным запаздыванием определяется не полиномом, как в случае систем без запаздывания, а квазиполиномом и это доставляет трудности в виде счетного числа корней [3]. Выделенный нами класс сводит задачу к анализу конечного числа корней, для каждого из которых известны условия асимптотической устойчивости.

Заметим, что для линейных стационарных систем в 1982 году В.Л. Харитоновым [7] был получен алгоритм оценки максимального запаздывания в общем случае. Однако этот замечательный результат труден в применении, и нам известно небольшое количество примеров, иллюстрирующих его работу [5], [7], [8].

Ниже мы обобщим результаты, полученные в [1] и приведём содержательные примеры использования предлагаемой методики.

2 Взаимодействие двух экономических агентов

Рассмотрим взаимодействие двух экономических агентов, описываемое системой дифференциальных уравнений типа Лотки — Вольтерра:

$$\dot{x_1}(t) = x_1(t)\left(\varepsilon_1 - P\big(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)\big)\right),$$
$$\dot{x_2}(t) = x_2(t)\left(\varepsilon_2 - Q\big(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)\big)\right), \tag{3}$$

где P и Q —произвольные многочлены двух переменных с положительными коэффициентами степеней n_1 и n_2 соответственно, не содержащие свободного члена. Заменой масштаба $y_1 = x_1/\varepsilon_1$, $y_2 = x_2/\varepsilon_2$ система (3) сводится к системе

$$\dot{y_1}(t) = \varepsilon_1 y_1(t)\left(1 - P_1\big(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)\big)\right),$$
$$\dot{y_2}(t) = \varepsilon_2 y_2(t)\left(1 - P_2\big(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)\big)\right). \tag{4}$$

Пусть у этой системы имеется некоторое нетривиальное положение равновесия $y_* = (y_{1*}, y_{2*})$,
т. е. $P_1(y_{1*}, y_{2*}) = P_2(y_{1*}, y_{2*}) = 1$, причём $y_{i*} > 0$. Исследуем его на асимптотическую устойчивость. Для этого необходимо рассмотреть линейную часть системы в отклонениях. Пусть $y_i' = y_i - y_{i*}$, $y_{i\tau}' = y_i(t-\tau) - y_{i*}$, $|p| = p_1 + p_2$, $P_i(y_1, y_2) = \sum_{|p|=1}^{n_i} a_i^{(p_1,p_2)}\, y_1^{p_1} y_2^{p_2}$, $(i = 1,2)$, тогда

$$\dot{y_1'} = \varepsilon_1(y_1' + y_{1*})\left(1 - \sum_{|p|=1}^{n_1} a_1^{(p_1,p_2)}\,(y_{1\tau}' + y_{1*})^{p_1}(y_{2\tau}' + y_{2*})^{p_2}\right),$$
$$\dot{y_2'} = \varepsilon_2(y_2' + y_{2*})\left(1 - \sum_{|p|=1}^{n_2} a_2^{(p_1,p_2)}\,(y_{1\tau}' + y_{1*})^{p_1}(y_{2\tau}' + y_{2*})^{p_2}\right).$$

Раскрывая скобки при помощи бинома Ньютона, получим следующие линейные слагаемые:

$$y_1' \approx -\varepsilon_1 y_{1*} P_1^1 y_{1\tau}' - \varepsilon_1 y_{1*} P_1^2 y_{2\tau}', \quad y_2' \approx -\varepsilon_2 y_{2*} P_2^1 y_{1\tau}' - \varepsilon_2 y_{2*} P_2^2 y_{2\tau}'$$

где $P_i^1 = \sum_{|p|=1}^{n_i} p_1\, a_i^{(p_1-1,p_2)} y_{1*}^{p_1-1} y_{2*}^{p_2}$, $P_i^2 = \sum_{|p|=1}^{n_i} p_2\, a_i^{(p_1,p_2-1)} y_{1*}^{p_1} y_{2*}^{p_2-1}$, $(i = 1,2)$.

Тогда характеристический квазиполином будет иметь следующий вид:

$$det\left[\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + e^{-\lambda\tau}\begin{pmatrix}\varepsilon_1 y_{1*} P_1^1 & \varepsilon_1 y_{1*} P_1^2\\ \varepsilon_2 y_{2*} P_2^1 & \varepsilon_2 y_{2*} P_2^2\end{pmatrix}\right] = 0. \tag{5}$$

Домножая уравнение (5) на $e^{\lambda\tau}$ и делая замену $z = \lambda e^{\lambda\tau}$, получим

$$z^2 + z(\varepsilon_1 y_{1*} P_1^1 + \varepsilon_2 y_{2*} P_2^2) + \varepsilon_1 y_{1*} \varepsilon_2 y_{2*}(P_1^1 P_2^2 - P_1^2 P_2^1) = 0.$$

У этого квадратного уравнения всегда есть два вещественных корня, вычисляемых по формуле

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{(\varepsilon_1 y_{1*} P_1^1 - \varepsilon_2 y_{2*} P_2^2)^2 + 4\varepsilon_1 y_{1*} \varepsilon_2 y_{2*} P_1^2 P_2^1} - \varepsilon_1 y_{1*} P_1^1 - \varepsilon_2 y_{2*} P_2^2\right).$$

Оба корня отрицательны при выполнении условия $P_1^2 P_2^1 < P_1^1 P_2^2$. Из [3] известно, что если $-\tau z_2 < \frac{\pi}{2}$, то нули квазиполинома (5) лежат левее мнимой оси комплексной плоскости.

Последнее неравенство получено как частный случай "результата Хейса" [3]. В дальнейшем все утверждения относительно критического запаздывания опираются на этот результат. Так как правые части системы (4) полиномиальны, выполняется условие теоремы 1. Отсюда следует асимптотическая устойчивость y_*.

Аналогично показывается асимптотическая устойчивость тривиального положения равновесия $(\eta, 0)$, где $P_1(\eta, 0) = 1$. Линейная часть системы в отклонениях примет вид

$$y_1' \approx -\varepsilon_1(\alpha_1 y_{1\tau}' + \alpha_2 y_{2\tau}'), \qquad y_2' \approx \varepsilon_2(1-\alpha) y_2',$$

где $\alpha_1 = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_1^{(k,0)} \eta^k$, $\alpha_2 = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_1^{(k,1)} \eta^{k+1}$, $\alpha = \sum_{k=1}^{n_2} \alpha_2^{(k,0)}$. Второе уравнение дает затухающие до нуля решения при $\alpha > 1$, а первое уравнение становится при этом линейным с затухающей неоднородностью. Его однородная часть будет асимптотически устойчива при условии $\varepsilon_1 \alpha_1 \tau < \frac{\pi}{2}$.

Случай второго тривиального положения равновесия абсолютно аналогичен первому. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Положение равновесия* $(\eta, 0)$ *системы* (4) *будет асимптотически устойчиво, если* $\alpha > 1$, $\tau < \frac{\pi}{2\varepsilon_1 \alpha_1}$; *и неустойчиво, если либо* $\alpha < 1$, *либо* $\alpha > 1, \tau > \frac{\pi}{2\varepsilon_1 \alpha_1}$.

Положение равновесия (y_{1*}, y_{2*}) *будет асимптотически устойчиво, если* $P_1^2 P_2^1 < P_1^1 P_2^2, \tau < \frac{\pi}{-2z_2}$; *и неустойчиво, если либо* $P_1^2 P_2^1 > P_1^1 P_2^2$, *либо*$P_1^2 P_2^1 < P_1^1 P_2^2, \tau > \frac{\pi}{-2z_2}$.

Полученные результаты в случае двух многочленов первой степени совпадают с результатами, полученными в [1].

3 Общий случай

Сформулируем теперь теорему об асимптотической устойчивости для случая n уравнений системы Лотки — Вольтерра, правые части которых дважды дифференцируемые функции.

Теорема 2. *Если система типа Лотки — Вольтерра*

$$\dot{x}_i = x_i P_i\big(X(t-\tau)\big) \quad \big(i = \overline{1,n}\big) \tag{6}$$

удовлетворяет условиям:

1) X^*— *корень уравнения* $P(X) = \Big(P_1\big(X(t-\tau)\big), \ldots, P_n\big(X(t-\tau)\big)\Big) = 0$ *с положительными компонентами;*

2) $P(X)$ — *дважды дифференцируемая вектор-функция*;

3) *матрица* $B(X) = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & x_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \ldots & x_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ x_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & x_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} & \ldots & x_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & x_n \frac{\partial P_n}{\partial x_2} & \ldots & x_n \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ *является гурвицевой в точке* X^*,

то решения системы (6) асимптотически притягиваются к X^**при*

$$\tau < \min_{i=\overline{1,n}} \frac{\frac{\pi}{2} + arctan\frac{\mathrm{Im}z_i}{\mathrm{Re}z_i}}{|z_i|}, \tag{7}$$

где z_i — корни характеристического уравнения матрицы $B(X^*)$.

Доказательство. Воспользовавшись тем, что $P_i(X^*) = 0$, и разложив функцию $P(X)$ в окрестности точки X^* в ряд Тейлора до первого порядка, получим линейную часть системы в отклонениях:

$$\dot{x}_j' = (x_j' + x_j^*)\left(0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(X^*)x_{i\tau}' + Q(X_\tau')\right) \quad (j = \overline{1,n})$$

или

$$\dot{x}_j' \approx x_j^* \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(X^*)x_{i\tau}' \quad (j = \overline{1,n}).$$

В $Q(X_\tau')$ собраны члены более высоких порядков, не входящие в линейную часть, а коэффициенты при X_τ' образуют матрицу $B(X^*)$. Уравнение (2) имеет вид

$$det[\lambda E - e^{-\lambda\tau}B(X^*)] = 0. \tag{8}$$

Домножив его на $e^{\lambda\tau}$ и сделав замену $z = \lambda e^{\lambda\tau}$, получим характеристическое уравнение для матрицы $B(X^*)$. Согласно условию 3) теоремы, его корни характеристического уравнения z_i имеют отрицательные вещественные части. При переходе от переменной z обратно к λ мы должны решать скалярные уравнения $\lambda e^{\lambda\tau} = \mathrm{Re}z_i + i\mathrm{Im}z_i$. Его корни остаются в левой полуплоскости при выполнении условия (7). Корни λ_i будут не только иметь отрицательную вещественную часть, но и отделены от нуля за счет того, что в любой вертикальной полосе конечной ширины уравнение (8) имеет лишь конечное число корней. Доказательство двух последних утверждений можно найти, например, в [3].

Итак, корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости и нелинейности начинаются со второго порядка: условия теоремы Красовского выполнены, и это доказывает теорему 2.

Теорема 3. *Если обобщенная система типа Лотки — Вольтерры*

$$\dot{x}_i = R_i(X)P_i(X(t-\tau)), \quad (i = \overline{1,n}) \tag{9}$$

удовлетворяет условиям

1) X^**— корень уравнения* $P(X) = \left(P_1(X(t-\tau)), \dots, P_n(X(t-\tau))\right) = 0$ *с положительными компонентами;*

2) $R(X) = \left(R_1(X(t-\tau)), \dots, R_n(X(t-\tau))\right), P(X)$ *— дважды дифференцируемые вектор-функции;*

3) *матрица* $B(X) = \begin{pmatrix} R_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & R_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \dots & R_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ R_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & R_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} & \dots & R_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & R_n \frac{\partial P_n}{\partial x_2} & \dots & R_n \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ *является гурвицевой в точке* X^*,

то решения системы (9) *асимптотически притягиваются к* X^* *при*

$$\tau < \min_{i=\overline{1,n}} \frac{\frac{\pi}{2} + arctan \frac{\mathrm{Im} z_i}{\mathrm{Re} z_i}}{|z_i|},$$

где z_i *— корни характеристического уравнения матрицы* $B(X^*)$.

Доказательство. Воспользовавшись тем, что $P_i(X^*) = 0$ и разложив функции $R(X)$ и $P(X)$ в окрестности точки X^* в ряд Тейлора до первого порядка, получим линейную часть системы в отклонениях:

$$\dot{x_j'} = \left(R_j(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial x_i}(X^*) x_i' + Q_1(X')\right)\left(0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(X^*) x_{i\tau}' + Q_2(X_\tau')\right), \quad (j = \overline{1,n})$$

или

$$\dot{x}_j' \approx \sum_{i=1}^{n} R_j(X^*) \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(X^*) x_{i\tau}', \quad (j = \overline{1,n}).$$

В $Q_1(X')$, $Q_2(X_\tau')$ собраны члены более высоких порядков, не входящие в линейную часть, а коэффициенты при X_τ' образуют матрицу $B(X^*)$. Характеристическое уравнение для системы линейного приближения имеет вид (2):

$$det[\lambda E - e^{-\lambda\tau} B(X^*)] = 0.$$

Дальнейшие рассуждения абсолютны аналогичны доказательству теоремы 2.

4 Примеры

Для иллюстрации применения теоремы 2 рассмотрим несколько моделей из экономической динамики, подробное описание которых и экономический смысл коэффициентов приведены в [1, 9, 10], там же получены значения коэффициентов.

4.1. Пример 1.

В качестве первого примера рассмотрим задачу о конкуренции на автомобильном рынке США [9, 10]. Экономические агенты в данной модели — автомобильная промышленность США: (x_1), и автомобильная промышленность всего остального мира (x_2).

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_1(t)\big(0{,}0121 - 0{,}00003 x_1(t-\tau) + 0{,}000033 x_2(t-\tau)\big), \\ \dot{x_2}(t) = x_2(t)\big(0{,}0194 - 0{,}000013 x_1(t-\tau) - 0{,}000064 x_2(t-\tau)\big), \end{cases} \quad (10)$$

где шкала времени имеет в качестве единицы один месяц.
Положение равновесия в этой системе достигается при $(x_1^*, x_2^*) = (603{,}284; 179{,}548)$. Проверим его устойчивость. Матрица $B(X^*) = \begin{pmatrix} -0{,}01809852 & 0{,}019908372 \\ -0{,}002334124 & -0{,}011491072 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа $z_{1,2} = -0{,}0147948 \pm 0{,}00596272i$. Здесь и далее i — мнимая единица. Тогда вычисленное по формуле (7) критическое запаздывание $\tau = 74$. В результате численных экспериментов, приведенных в [9], наилучшей считается модель с $\tau = 67$, что соответствует полученной оценке. Модельная траектория при этом колеблется вокруг равновесной точки с периодом 22 года.

Интерпретация критического запаздывания состоит в том, что выход новых моделей автомобилей не должен превышать 5-6 лет, т. к. иначе амплитуда колебаний будет возрастать до разбалансирования рынка (неустойчивость).

4.2. Пример 2.

Теперь рассмотрим модель, описывающую взаимодействие сельского хозяйства (x_1) и промышленности (x_2). Отрасли сельского хозяйства ведут себя по отношению к промышленности как "хищник" по отношению к "жертве": государство через налоги, дотации и другие управленческие рычаги переводит часть доходов промышленности в экономику сельского хозяйства. Коэффициенты модели получены из предположений, носящих иллюстративный характер.

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_1(t)\big(-0{,}23 + 0{,}23x_2(t-\tau)\big), \\ \dot{x_2}(t) = x_2(t)\big(0{,}14 - 0{,}14x_1(t-\tau) - 0{,}112x_2(t-\tau)\big), \end{cases} \tag{11}$$

Здесь время измеряется в годах. Положение равновесия - точка $x^* = (0{,}2; 1)$. Матрица $B(X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}046 \\ -0{,}14 & -0{,}112 \end{pmatrix}$. Собственные числа $z_{1,2} = -0{,}056 \pm 0{,}0574804i$. Критическое запаздывание по теореме 1 будет равно 9,62. Это совпадает с оценкой, полученной в [1], с точностью до погрешностей округления. При этом отметим, что в данной статье оценка получена за счет более простых рассуждений, чем в [1]. Для системы же она означает, что экономические отношения промышленности и сельского хозяйства в рамках данной модели должны строиться на инвестиционных программах длительностью не более десяти лет.

4.3. Пример 3.

В заключение рассмотрим модель, описывающую взаимодействие малой (назовем ее условно уличной — x_1) и большой (стационарной — x_2) торговли.

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_1(t)\big(2{,}3 - 0{,}077x_1(t-\tau) - 0{,}005x_2(t-\tau)\big), \\ \dot{x_2}(t) = x_2(t)\big(0{,}69 - 0{,}0018x_1(t-\tau) - 0{,}0086x_2(t-\tau)\big), \end{cases} \tag{12}$$

В этой системе время также измеряется в годах, а стационарная точка $x^* = (25\%, 75\%)$. Матрица $B(X^*) = \begin{pmatrix} 0{,}01925 & 0{,}00125 \\ 0{,}00135 & 0{,}00645 \end{pmatrix}$. У этой матрицы два вещественных собственных числа $z_1 = -1{,}93805, z_2 = -0.631949$. Тогда временной лаг не превышает 0,81 года, что полностью совпадает с результатом, полученным в [1]. При превышении критического значения вокруг стационарной точки начинаются неустойчивые колебания, причем их период и амплитуда тем больше, чем больше запаздывание.

5 Заключение.

Таким образом, в данной статье получены три теоремы, позволяющие находить критическое значение запаздывания для достаточно широкого класса систем произвольной размерности по простому алгоритму. Системы типа Лотки — Вольтерра активно используются в моделировании экономических процессов, а примеры подтверждают применимость данных теорем.

Литература

[1] Прасолов А.В. Математические модели экономической динамики. СПб: Лань. 2008.

[2] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[3] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[4] Хэйл Дж. К. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[5] Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. СПб.: Лань, 2010.

[6] Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

[7] Харитонов В.Л. Об определении максимально допустимого запаздывания в задачах стабилизации. М.: Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 723-724.

[8] Жабко А.П., Прасолов А.В., Харитонов В.Л. Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений. М.: Высшая школа, 2003.

[9] Prasolov A.V. Dynamic Competitive Analysis in Automotive Industry. Proceedings of International Conference on Stability and Control Processes, St. Petersburg, 2005. Pp 1233-1242.

[10] Prasolov Alexander V. Some Quantitative Methods and Models in Economic Theory. NY.: NOVA Science Publishers, 2016.

On stability of a nonlinear model with delay

Prasolov A.V., Mikhlin L.S.
Saint Petersburg state University
a.prasolov@spbu.ru
mikhlin@bk.ru

Abstract. In recent decades, a model in the form of a system of nonlinear differential equations of the Lotka — Volterra type has been used in dynamic problems of biology, economics, sociology, and others. One of the important properties that characterizes the qualitative behavior of such systems solutions is the Lyapunov stability. This paper is devoted to the analysis of the stability of the above mentioned systems with a special type of delay. It is shown that in some cases it is possible to calculate the critical delay at which the equilibrium solution loses stability. Some generalizations of the Lotka — Volterra model are considered. Examples from the field of economic dynamics illustrating the application of the proposed method are given.

Keywords: Lotka – Volterra system, delay, stability.