*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N. 2, 2025*
*Электронный журнал,*
*рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010*
*ISSN 1817-2172*

*http://diffjournal.spbu.ru/*
*e-mail: jodiff@mail.ru*

*Интегро-дифференциальные системы*

# Интегральное представление для обобщенной системы Коши–Римана с сильной особенностью в младшем коэффициенте в области с кусочно-гладкой границей

Н. В. Якивчик

Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт»

YakivchikNV@mpei.ru

**Аннотация.** Целью настоящей работы является построение общего решения уравнения Коши–Римана с сильными особенностями в младшем коэффициенте в области с кусочно-гладкой границей. Полученное явное интегральное представление решения позволяет поставить и решить основные краевые задачи теории обобщенных аналитических функций: задачи типа Римана–Гильберта и линейного сопряжения. Для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами, в том числе для рассматриваемого уравнения явного построения решений в областях с кусочно-гладкими границами ранее не проводилось.

**Ключевые слова:** уравнение Коши–Римана, сильные особенности в коэффициенте, оператор Помпейю–Векуа, кусочно-гладкая граница

## 1 Постановка задачи

В конечной области $D \subseteq \mathbb{C}$, содержащей проколотый круг с центром в точке $z = 0$, рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + au + b\bar{u} = f, \tag{$1_0$}$$

с комплекснозначными функциями $a(z), b(z), f(z) \in C\big(\overline{D} \setminus \{0\}\big)$, причем его коэффициенты $a, b$ допускают в точке $z = 0$ степенные особенности. Согласно теории обобщенных аналитических функций [1], в каждом замкнутом круге $B \subseteq D$ решение этого уравнения принадлежит соболевскому классу $W^{1,p}(B)$ с любым $p > 2$. Хорошо известно, что этот класс вкладывается в пространство Гельдера $C^{\mu}(B)$ с показателем $\mu = 1 - 2/p$, который, таким образом, может быть сколь угодно близким к 1. Функции $\varphi$ этого типа, т.е. принадлежащие $W^{1,p}(B)$ в каждом замкнутом круге $B \subseteq D$ с любым $p > 1$, назовем регулярными в области $D$. Очевидно, вместе с такой функцией регулярной будет и функция $e^{\varphi}$.

Обозначим $C_{\lambda}\big(\overline{D}, 0\big)$, $\lambda < 0$, пространство всех непрерывных в $\overline{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с поведением $O(|z|^{\lambda})$ при $z \to 0$. Оно снабжается нормой

$$|\varphi| = \sup_{z \in D} |z|^{-\lambda} \, |\varphi(z)|,$$

относительно которой, очевидно, банахово. Запись $\varphi \in C_{\lambda+0}$ означает, что $\varphi \in C_{\lambda+\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Аналогично $\varphi \in C_{\lambda-0}$, если $\varphi$ принадлежит $C_{\lambda-\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$. В частности, функции $\varphi(z) \in C_{-0} = C_{0-0}$ допускают в точке $z = 0$ особенности логарифмического типа.

В этих обозначениях относительно коэффициентов уравнения $(1_0)$ предполагаем, что

$$a \in C_{-\alpha-1}\big(\overline{D}, 0\big), \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad b \in C_{-\beta}\big(\overline{D}, 0\big), \quad 0 < \beta < 1.$$

Основная задача состоит в том, чтобы при этих предположениях описать все регулярные в области $D$ решения этого уравнения. На поведение этих решений существенное влияние оказывает коэффициент $a$.

Классическая теория И.Н. Векуа [1] обобщенных аналитических функций охватывает случай, когда коэффициенты $a, b$ принадлежат пространству $L^{p}(G)$ с показателем $p > 2$. Коэффициенты таких систем могут допускать слабые особенности, лимитируемые требованием $p$-интегрируемости. В частности, уравнения с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha \geq 0$, и $b \in C_{-1}$ не охватываются этой теорией. В этой связи И.Н. Векуа был введен в рассмотрение класс квазисуммируемых коэффициентов $a(z)$ и $b(z)$ (т.е. суммируемые с весом, являющимся мероморфной функцией), для которых он предложил формулу представления решения в виде интегрального представления второго рода. Однако эта формула не охватывает случай коэффициентов с общими степенными особенностями. На необходимость изучения обобщенных систем Коши–Римана с коэффициентами, допускающими точечные особенности и особенности на линии не ниже первого порядка, впервые было указано И.Н. Векуа [1] и А.В. Бицадзе [2].

В монографии Л.Г. Михайлова [3] (см. с. 10) решение уравнения $(1_0)$ с коэффициентами $a, b \in C_{-1}\big(\overline{D}, 0\big)$ ищется в классе $C_\beta$, $0 < \beta < 1$. Разрешимость интегрального уравнения, к которому сводится уравнение $(1_0)$, доказывается при определенных условиях малости этих коэффициентов.

З.Д. Усмановым [4] построена теория уравнения $(1_0)$ при $a = 0$, $b(z) = \bar{z}^{-1}\beta e^{ik\varphi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Им рассмотрен и случай $b(z) = \bar{z}^{-1}(\beta_1 e^{ik\varphi} + \beta_2 e^{im\varphi})$, где $\beta_1 \neq \beta_2$, однако он приводит к бесконечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, которые не поддаются исследованию. Поэтому в дальнейшем основной целью исследований З.Д. Усманова [5] являлось нахождение связи решений уравнений $(1_0)$ с коэффициентами $a(z) = 0$, $b(z) = \bar{z}^{-1}\beta$ и с коэффициентами $a(z) = 0$, $b(z) \in C_{-1}\big(\overline{D}, 0\big)$ посредством линейного интегрального уравнения с вполне непрерывным оператором, чтобы какой-либо вопрос для общего уравнения редуцировать к аналогичному вопросу для уравнения частного вида с постоянным коэффициентом.

В последние годы вопросам построения общего решения уравнения $(1_0)$, а также более общих уравнений и систем с сингулярными коэффициентами были посвящены многочисленные исследования [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. В частности, H. Begehr и Dao-Qing Dai [10] изучили уравнение $(1_0)$ с $a(z) \in C_{-1}\big(\overline{D}, 0\big)$, $b(z) \in L^p(D)$, $p > 2$. Было установлено, что число решений задачи Римана–Гильберта зависит не только от ее индекса, но и от местоположения и типа особенностей. М. Рейсиг и А. Тимофеев [14] рассмотрели случай, когда коэффициент $b(z)$ принадлежит специальному весовому пространству $S_p$, в котором ими была решена задача типа Дирихле. Класс непрерывных решений уравнения $(1_0)$ при $a(z), b(z) \in C_{-1}\big(\overline{D}, 0\big)$ изучен в работах А.Б. Тунгатарова (см., в частности, [15]). Решения уравнения $(1_0)$ с коэффициентами $a(z), b(z) \in C_{-1}(\mathbb{C}, 0)$ в виде рядов построены в работе А. Мезиани [16]. Для более подробного ознакомления с обзором проделанных работ можно обратиться к работам [3, 4, 15] и другим источникам.

Понятие сверхсингулярных особенностей введено в монографии Н.Р. Раджабова [17]. В последнее десятилетие к исследованию обобщенного уравнения Коши–Римана с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha \geq 0$ и $b \in C_{-1}$ со специальными видами (когда $a(z) = z\,|z|^{-\alpha-1}\,a_0(z)$, где $a_0 \in C(D)$) посвящено достаточно много работ (см., например, [18]).

В настоящей работе снято условие ограниченности с коэффициента $a(z)$.

Кроме того, уравнение $(1_0)$ с сингулярными коэффициентами в областях с кусочно-гладкими границами ранее не было исследовано.

Пусть односвязная область $D$ ограничена простым кусочно-гладким ляпуновским контуром $\Gamma$, составленным из гладких дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ и ориентированным против часовой стрелки. Множество $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ концов этих дуг обозначим $F$. Для определенности пусть $0 \in D$ и $D_0 = D \setminus \{0\}$, $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$, а область $D' = \mathbb{C} \setminus (D \cup \Gamma)$ содержит бесконечно удаленную точку $z = \infty$.

Рассмотрим в области $D_0$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{a(z)}{|z|^\alpha}\, u(z) + \frac{b(z)}{|z|^m}\, \bar{u} = f(z) \tag{1}$$

с коэффициентом $a(z) \in C\big(\overline{D}\big)$, который $n$ раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, $b(z) \in C\big(\overline{D}\big)$ в окрестности нуля и $b(z) \in L^p\big(D\big)$, $p > 2$, где $\alpha \geq 1$, $n = [\alpha]$ — целая часть $\alpha$. Правая часть (1) функция $f$ принадлежит $L^p_{\rm loc}(D_0)$, $p > 2$, где $L^p_{\rm loc}(D_0) = \{f : f \in L^p(D_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0\}$. В дальнейшем также воспользуемся классом $W^{1,p}_{\rm loc}(D_0) = \{f : f \in W^{1,p}(D_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0\}$.

Как сказано выше, в случае $0 < \alpha < 1$ теория уравнения (1) построена И.Н. Векуа [1] и называется теорией регулярных обобщенных аналитических функций. Случай $\alpha = 1$ исследован многими авторами (см., например, [3, 4] и др.). Заметим, что результаты, полученные в случае $\alpha \geq 1$, относятся к теории сингулярных обобщенных аналитических функций.

Функция $u(z) \in W^{1,p}_{\rm loc}\big(D_0\big)$, где $p > 2$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, называется его *регулярным* решением.

В настоящей работе найдено регулярное решение уравнения (1) с более общими коэффициентами $a(z), b(z)$ в области $D_0$ при $\alpha \geq 1$, $0 < m < 1$, ограниченных в бесконечности и допускающих особенность порядка меньше единицы при $z \to \tau \in F$.

## 2 Необходимые определения и утверждения

В получении представления регулярного решения данного уравнения существенную роль играет интегральный оператор Помпейю–Векуа (см. монографию И.Н. Векуа [1], стр. 29)

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{f(\zeta)\, d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \neq 0, \tag{2}$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, где $p > 2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. В частности, оператор $T$ компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C\big(\overline{D}\,\big)$.

**Предложение 1.** *Если в уравнении* (1) *функции* $A(z) = |z|^{-\alpha}\, a(z) \in L^p(D)$ *и* $f \in L^p(D)$, *то* $\Omega = TA \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ *является решением уравнения* $\Omega_{\bar z} - A = 0$.

Следовательно, для функции $V = e^{-\Omega}\, u$ имеем соотношение

$$V_{\bar z} = e^{-\Omega}\, u_{\bar z} - A\, e^{-\Omega}\, u = e^{-\Omega}\, f.$$

В результате приходим к представлению

$$u = e^{\Omega}\, [\phi + T(e^{-\Omega}\, f)]$$

с произвольной аналитической в $D$ функцией $\phi \in C\big(\overline{D}\,\big)$ [1].

Приведем некоторые определения и предложения из работ [19, 20, 21], необходимые для решения краевой задачи Римана–Гильберта в области с кусочно-гладкой границей. Напомним, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$, $F = \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ и $\rho_\lambda = |z - \tau_1|^{\lambda_1} \cdots |z - \tau_m|^{\lambda_m}$; здесь и далее $\lambda = (\lambda_j, j = \overline{1, m}) = (\lambda_\tau, \tau \in F))$ обозначает набор весов в узлах контура $\Gamma$, также $\lambda + \varepsilon = (\lambda_\tau + \varepsilon, \tau \in F)$.

По определению дуга $\Gamma$ радиальная по отношению к своему концу $\tau$, если она допускает параметризацию вида

$$\gamma(r) = \tau + r e^{i\theta(r)}, \quad 0 \le r \le \rho,$$

где вещественная функция $\theta$ непрерывно дифференцируема на полуоткрытом интервале $(0, \rho]$ и допускает пределы $\lim \theta(r) = \theta(0)$ и $\lim r\theta'(r) = 0$ при $r \to 0$.

Рассмотрим функции, заданные на конечной радиальной дуге $\Gamma$ с отмеченным концом $\tau \neq \infty$.

**Определение 1.** Весовое пространство $C^\mu_\lambda\big(\overline{D}, F\big)$, $0 < \mu < 1$, состоит из аналитических в $D$ функций, для которых норма

$$|\varphi| = \sup_{z \in D} |\rho_{-\lambda}\varphi| + \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|(\rho_{-\lambda}\varphi)(z_1) - (\rho_{-\lambda}\varphi)(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu} \tag{3}$$

конечна. Относительно данной нормы это пространство банахово.

При $\lambda = 0$ оно состоит из ограниченных функций, а отображение $\phi \to \rho_\lambda \phi$ осуществляет изоморфизм $C^\mu_\lambda \to C^\mu_0$. Сама весовая функция $\rho_\lambda$ принадлежит $C^\mu_\lambda$ и ее норма (3) равна 2, поскольку полунорма $[\rho_\mu]_\mu = 1$. Из этих же соображений функция $\rho_\lambda \in C^\mu_0$ при $\lambda > 0$ и $\tau \neq \infty$. Функция $\rho_\mu(z) = |z|^\mu$ в окрестности нуля, а в окрестности точек $\tau \in F$ она совпадает с $|z - \tau|^\mu$.

**Определение 2.** Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — некоторая область с конечной кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial D$, которая, в свою очередь, имеет конечное множество узлов $F = \{\tau\}$, соединенных гладкими дугами $\Gamma_j \subset \Gamma$, так что $\partial\Gamma_j \subseteq F$. При этом множество $D \setminus \Gamma$ может быть несвязным, а его связные компоненты не обязательно являются простыми (односвязными) областями. Также область $D$ может располагаться по обе стороны от некоторых дуг — в этом случае соответствующая дуга называется разрезом области $D$.

Предположим, что область $D$ конечна. Тогда при необходимости дополним $\Gamma$ до кусочно-гладкой кривой $\widetilde{\Gamma}$ так, чтобы все связные компоненты $D_j$ множества $D\setminus\widetilde{\Gamma}$ были простыми областями. Тогда пространство $C^{\mu}_{\lambda}\big(\widehat{D}, F\big)$ состоит из аналитических в области $D$ функций, которые для каждой связной компоненты $D_j$ множества $D \setminus \widetilde{\Gamma}$ принадлежат классу $C^{\mu}_{\lambda}\big(\,\overline{D_j}, F\big)$.

Если же $D$ — бесконечная область, то $D \supset \{|z| \geq R\}$ для некоторого $R > 0$ и является окрестностью точки $\infty$. В таком случае рассматриваем конечную область $D_R = D \cap \{|z| < R\}$, границу которой $\Gamma \cup \{|z| = R\}$ при необходимости достраиваем до $\widetilde{\Gamma}$ как описано выше. Пространство $C^{\mu}_{\lambda}\big(\widehat{D}, F\big)$ состоит из функций, аналитических в $D$ и принадлежащих $C^{\mu}_{\lambda}\big(\,\overline{D_j}, F\big)$ для каждой связной компоненты $D_j$ области $D_R \setminus \widetilde{\Gamma}$.

Также в случае бесконечной области $D$ в пространстве $C^{\mu}_{\lambda}\big(\widehat{D}, F\big)$ для целого числа $k$ выделяется подпространство $C^{\mu}_{\lambda(k)}\big(\widehat{D}, F\big)$, состоящее из функций $\varphi$ с поведением $O(|z|^{k-1})$ при $z \to \infty$. Для такой функции степень $\deg \varphi \leq k-1$ определяется как наибольший индекс $j$ ненулевого коэффициента $c_j$ в лорановском разложении $\varphi(z) = \sum_{j=-\infty}^{k-1} c_j z^j$ при $|z| > R$.

**Определение 3.** Пусть кусочно-гладкая кривая $\Gamma$ является границей области $D$ и конечное множество $F \subset \Gamma$ таково, что $\Gamma \setminus F$ состоит из гладких дуг (сомкнутых или разогнутых, без концов). Тогда по аналогии с предыдущим определением вводится весовой класс $C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma, F)$, которому, очевидно, принадлежат сужения на $\Gamma$ функций классов $C^{\mu}_{\lambda}\big(\,\overline{D}, F\big)$ и $C^{\mu}_{\lambda}\big(\widehat{D}, F\big)$.

**Определение 4.** Как следует из предыдущих определений, для компакта $K \subset \mathbb{C}$ и конечного множества $F \subset K$ функции класса $C^{\mu}_{+0}\big(K, F\big)$ (т.е. класса $C^{\mu}_{\lambda+\varepsilon}(K, F)$ для любого $\varepsilon > 0$ в случае $\lambda_\tau = 0$ для всех $\tau$) обращаются в нуль в точках $\tau \in F$. Допустив в этих точках произвольные конечные предельные значения, мы получаем весовое пространство $C^{\mu}_{(+0)}(K, F)$ — это расширение пространства $C^{\mu}_{+0}(K, F)$ с конечной коразмерностью $|F| \leq m$.

В работе [21] доказано

**Предложение 2.** a) *Пространство $C_0^\mu(\Gamma, F)$ является банаховой алгеброй по умножению, так что произведение функций как билинейное отображение ограничено $C_{\lambda'}^\mu \times C_{\lambda''}^\mu \to C_{\lambda'\times\lambda''}^\mu$.*

b) *Суперпозиция $f \circ \varphi$ функции $\varphi \in C_0^\mu$ с функцией $f$, которая задана на множестве значений $\varphi$ и удовлетворяет условию Липшица, не выводит из класса $f \in C_0^\mu$.*

c) *Семейство банаховых пространств $C_\lambda^\mu(G, F)$ монотонно убывает (в смысле вложений) по каждому из параметров $\mu$ и $\lambda_\tau$, $\tau \in F$. В частности, для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения банаховых пространств $C_{\lambda+\varepsilon}^\mu(\Gamma, \tau) \subset C_\lambda^\mu(\Gamma, \tau)$ при $\tau \neq \infty$.*

d) *В частности, пространство $C_0^\mu(D)$ является банаховой алгеброй по умножению и монотонно убывает по $\mu$, т.е. имеет место вложение*

$$C_0^\nu(D, \tau) \subseteq C_0^\mu(D, \tau), \quad 0 < \mu < \nu.$$

В работе [22] доказан следующий факт: если граница области $\Gamma$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$, то имеет место

**Предложение 3.** *Пусть контур $\Gamma$ составлен из гладких дуг $\Gamma_j \in C_{(1+0)}^{1,\mu}$, $1 \leq j \leq m$, причем все растворы $\pi\alpha_\tau$ криволинейных секторов $S_\tau$, $\tau \in F$, положительны. Пусть функция $\zeta = \omega(z) \in C\big(\overline{D}\big)$ отображает область $D$ на единичный круг $D_0 = \{|\zeta| < 1\}$. Тогда оператор суперпозиции $\varphi \to \varphi \circ \omega$ ограничен $C_{\alpha\lambda}^\mu(D_0, F_0) \to C_\lambda^\mu(D, F)$, где $\alpha\lambda = (\alpha_\tau\lambda_\tau, \tau \in F)$, $F_0 = \omega(F)$, и семейство $(\lambda_{\omega(\tau)}, \tau \in F)$ обозначено также $\lambda$. В частности, этот оператор действует $C_{(+0)}^\mu(D_0, F_0) \to C_{(+0)}^\mu(D, F)$.*

Основным инструментом исследования краевых задач для аналитических функций служат интеграл типа Коши

$$\varphi(z) = (I\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(t)\,dt}{t - z}, \quad z \notin \Gamma, \tag{4}$$

и связанный с ним сингулярный интеграл Коши

$$(S\phi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(t)\,dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma \setminus F. \tag{5}$$

Действие интегрального оператора типа Коши (4) в весовых пространствах Гёльдера (без конкретизации показателя $\mu$) изучено в [19]. В пространствах $C_\lambda^\mu$ этот результат был уточнен в [20]. Сформулируем его отдельно.

**Предложение 4.** *Пусть кусочно-гладкая кривая* $\Gamma = \sum_{j=1}^{m} \Gamma_j$ *представлена с помощью ориентируемых гладких дуг* $\Gamma_j$ *и* $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

*Тогда интегральный оператор типа Коши* $I$ *ограничен* $C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma, F) \to C^{\mu}_{\lambda(0)}(\widehat{D}, F)$, $-1 < \lambda < 0$, *и справедливы формулы Сохоцкого–Племеля* $2\varphi^{\pm} = \pm\phi + S\phi$, *связывающие интегралы* (4) *и* (5).

*Обратно, если* $\phi \in C^{\mu}_{\lambda(k)}(\widehat{D}, F)$, $-1 < \lambda < 0$, *и* $\phi = \varphi^{+} - \varphi^{-}$, *то* $\varphi = I\phi + p$ *с некоторым многочленом* $p \in P_k$, *причем*

$$\int_{\Gamma} \phi(t)\, q(t)\, dt = 0, \quad q \in P_{-k}. \tag{6}$$

Условия ортогональности в этой теореме следуют из разложения

$$(I\phi)(z) = \sum_{j \geq 0} c_j z^{-j-1}, \quad c_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \phi(t)\, t^j\, dt,$$

интеграла типа Коши в окрестности $\infty$. Оно показывает, что неравенство $\deg(I\phi) \leq k - 1$ обеспечивается условиями $c_j = 0$ при $0 \leq j \leq -k - 1$, которые равносильны (6).

**Предложение 5.** *Если* $\phi \in C^{\mu}_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$, *то в секторе* $S_{\tau,j}$ *интеграл типа Коши* $\varphi = I\phi$ *представим в виде*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j} \phi(\tau_j) \right] \ln(z - \tau) + \phi_\tau(z), \quad \phi_\tau(z) \in C^{\mu}_{(+0)}(S_{\tau,j}, \tau),$$

*где* $\sigma_{\tau,j} = 1$ $(\sigma_{\tau,j} = -1)$, *если* $\tau$ *является правым (левым) концом дуги* $\Gamma_{\tau,j}$.

# 3 Интегральные представления решений для $\mathbb{C}$-линейного уравнения

В данном разделе рассматривается уравнение (1), не содержащее слагаемого с $\bar{u}$, т.е. при $b(z) \equiv 0$. Частный случай $\mathbb{C}$-линейного уравнения такого вида для конечной и бесконечной областей с кусочно-гладкой границей $\Gamma$ и множеством узлов $F$ рассмотрен в работе [23]. Для этого случая исследовано поведение регулярных решений уравнения вблизи особых точек $z \in F \cup \{0, \infty\}$ и разрешимость задачи линейного сопряжения.

Работа [24] также посвящена исследованию $\mathbb{C}$-линейного уравнения и представлению его решений в весовых пространствах Гёльдера (следуя работе А.П. Солдатова [25]), в том числе для описания решения задачи типа

Римана–Гильберта. В настоящем разделе мы даем более точную формулировку результатов, касающихся интегрального представления решений.

Напомним, что коэффициент уравнения (1), $a(z) \in C\big(\overline{D}\big)$, $n$ раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$, $n = [\alpha]$ — целая часть $\alpha$. Следовательно, функцию $a(z)$ в окрестности особой точки $z = 0$ можно разложить по формуле Тейлора

$$a(z) = p(z) + a_0(z), \quad \text{где} \quad a_0(z) = o(z^n) \ \text{при} \ z \to 0.$$

Здесь $p(z) = \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} \cdot z^{k_1}\, \bar{z}^{k_2}$ — ее главная часть (полином), $a_{k_1 k_2}$ — коэффициенты Тейлора, $a_0(z)$ — остаток в форме Пеано.

Область $D$ содержит точку $z = 0$ и ограничена простым кусочно-гладким ляпуновским контуром $\Gamma$, ориентированным против часовой стрелки. Пусть $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$ и оператор $T_\varepsilon$ определяется как выше по отношению к $D_\varepsilon$.

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \big(T_\varepsilon(a\,|\zeta|^{-\alpha})\big)(z) \equiv -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{a(\zeta)\, d_2\zeta}{|\zeta|^\alpha\,(\zeta - z)}, \tag{7}$$

где интегральный оператор $T_\varepsilon$ определяется аналогично (2) по отношению к области $D_\varepsilon$.

Следующее утверждение играет ключевую роль в обосновании существования и описании структуры регулярного решения $\mathbb{C}$-линейного уравнения вида (1) в зависимости от степени изолированной особенности внутри области и структуры области вблизи точек, где нарушается гладкость границы.

**Лемма 1.** *Если $\alpha > 1$, то существует регулярное решение уравнения*

$$\Omega_{\bar{z}} = |z|^{-\alpha}\, a(z),$$

*представимое в виде*

$$\Omega(z) = \omega(z) + h(z), \tag{8}$$

*где* $\omega(z) = \omega_p(z) + \big(T(|\zeta|^{-\alpha} a_0)\big)(z)$, *причем*

$$\omega_p(z) = \frac{2}{|z|^\alpha} \cdot \sum_{k_1+k_2\le n} a_{k_1k_2} \cdot \frac{z^{k_1}\,\bar z^{k_2+1}}{2(k_2+1)-\alpha} \qquad \textit{в случае} \quad \frac{\alpha}{2} \notin \mathbb{Z},$$

$$\omega_p(z) = \frac{2}{|z|^\alpha} \cdot \sum_{\substack{k_1+k_2\le n\\ k_2\ne k_0}} a_{k_1k_2} \cdot \frac{z^{k_1}\,\bar z^{k_2+1}}{2(k_2+1)-\alpha} + \sum_{k_1=0}^{n-k_0} a_{k_1k_0}\, z^{k_1} \cdot \ln \bar z \tag{9}$$

$$\textit{в случае} \quad \frac{\alpha}{2} - 1 = k_0 \in \mathbb{Z},$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j}\,\omega(\tau_j)\right]\ln(z-\tau) + \omega_\tau(z), \quad \omega_\tau(z) \in C^\mu_{(+0)}(S_{\tau,j},\tau),$$

$\sigma_{\tau,j} = 1$ $(\sigma_{\tau,j} = -1)$, *если* $\tau$ *является правым (левым) концом дуги* $\Gamma_{\tau,j}$.

*Доказательство.* Заметим, что функция $|z|^{-\alpha}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ вдоль линии, соединяющей точки 0 и $\infty$ (например, луча $\arg z = \beta$), мы выбираем фиксированную ветвь данной функции и этот выбор учитываем при дифференцировании. В самом деле, $|z|^{-\alpha} = z^{-\alpha/2}\,\bar z^{-\alpha/2} = e^{-\frac{\alpha}{2}\ln z}\,e^{-\frac{\alpha}{2}\ln \bar z}$; при этом значения логарифма $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ и $\ln \bar z = \ln|z| - i\arg z$ комплексно сопряжены, так что значение функции остается положительным вещественным числом. Обратим внимание, что функция $\omega_p(z)$ из формулы (9) является результатом прямого интегрирования функции $r(z,\bar z) = |z|^{-\alpha}\,p(z)$ по переменной $\bar z$, что объясняет появление логарифма в случае чётного $\alpha$, т.е. присутствия в некоторых слагаемых $r(z,\bar z)$ множителя $\bar z^{-1}$.

Напомним, что если $f(x,y)$ — аналитическая функция переменных $x$ и $y$, то можно указать формулу, которая несколько упрощает вычисление интеграла Помпейю–Векуа $Tf$ ([1], стр. 30). Сделав замену $x = 2^{-1}(z+\bar z)$, $y = (2i)^{-1}(z-\bar z)$ и вычислив неопределенный интеграл

$$F(z,\bar z) = \int f\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) d\bar z,$$

согласно формуле Бореля–Помпейю получим

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta - z} = F(z,\bar z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Рассмотрим случай $\alpha \ne 2(k_2+1)$. Используя представление коэффициента $a(z) = p(z) + a_0(z)$, в вышеприведенных обозначениях (7)

$$\left(T_\varepsilon \frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \left(T_\varepsilon \frac{p}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) + \left(T_\varepsilon \frac{a_0}{|\zeta|^\alpha}\right)(z).$$

Отсюда

$$\left(T_\varepsilon \frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \left(T_\varepsilon \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha}\right)(z) - \omega_1(z) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где обозначено $\omega_1(z) = \big(T(p\,|\zeta|^{-\alpha})\big)(z)$; или, что равносильно,

$$\left(T_\varepsilon \frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le\varepsilon} \frac{a_0}{|\zeta|^\alpha\,(\zeta - z)}\, d_2\zeta - \omega(z) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad |z| > \varepsilon. \tag{10}$$

Убедимся, что функция $\Omega_\varepsilon(z) = \big(T_\varepsilon(a\,|\zeta|^{-\alpha})\big)(z)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к $\Omega(z) = \big(T(a\,|\zeta|^{-\alpha})\big)(z)$ и, в частности, справедливо равенство (9) при $\alpha \ne 2(k_2+1)$. В самом деле, используя неравенство Гёльдера, можно показать, что первый интеграл в правой части (10) по модулю не превосходит $CL_p(a_0\,|\zeta|^{-\alpha})\,\varepsilon^\delta$, $C = C(d)$ — постоянная (здесь $d$ — диаметр области), $\delta = 1 - p^{-1}$, так что соответствующий интеграл равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим контурный интеграл по границе Г. Заметим, что $\omega(t) \equiv \big(T(a\,|\zeta|^{-\alpha})\big)(t)$, $t \in \Gamma$, где $a\,|\zeta|^{-\alpha} \in H(\Gamma)$, в частности, $\omega \in C^\mu_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$. Следовательно, согласно предложению 5, для

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = h(z)$$

имеет место

**Лемма 2.** *Если $\omega \in C^\mu_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$, то в секторе $S_{\tau,j}$ интеграл типа Коши $h = I\omega$ представим в виде*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j}\,\omega(\tau_j)\right]\ln(z - \tau) + \omega_\tau(z), \quad \omega_\tau(z) \in C^\mu_{(+0)}(S_{\tau,j}, \tau), \tag{11}$$

*где $\sigma_{\tau,j} = 1$ ($\sigma_{\tau,j} = -1$), если $\tau$ является правым (левым) концом дуги $\Gamma_{\tau,j}$.*

Заметим, что в представлении $h(z)$ значение $\omega$ в точках $\tau_j$ непосредственно зависит от коэффициента $a(z)$ и степени сингулярности $\alpha$, которая играет важную роль в формировании класса $C^\mu_\lambda$, так как $\lambda = \lambda(a, \alpha, \tau) = \operatorname{Re}\omega(\tau_j)$.

При $\alpha = 2(k_2+1)$ доказательство леммы проводится аналогично. □

Следовательно, при $\alpha \ge 1$

$$\exp\Omega = \exp\{\omega + \omega_\tau(z)\}\prod_{j=1}^{n_\tau}(z - \tau)^{\gamma_{\tau,j}}.$$

В обозначениях $\gamma_{\tau,j} = \sigma_{\tau,j}\,\omega(\tau_j)\,(2\pi i)^{-1}$ функция $(z-\tau)^{\gamma_{\tau,j}}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ вдоль линии, соединяющей точки $\tau$ и $\infty$ (например, луча $\arg(z-\tau) = \beta$) мы выбираем фиксированную ветвь данной функции.

Итак, на основе лемм 1, 2 и согласно предложению 1 может быть сформулирована

**Теорема 1.** *Пусть число $\alpha \geq 1$ и функция $\Omega$ определена по формуле (7), а правая часть $f$ удовлетворяет условию $e^{-\Omega} f \in L^p(D) = f_0$ с $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде*

$$u = e^{\Omega}\,[\phi + Tf_0], \tag{12}$$

*где $\phi \in C\big(\overline{D} \setminus F\big)$ — произвольная аналитическая в области $D_0$ функция, которая для заданного семейства $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел подчиняется степенному поведению*

$$\phi(z) = O\big((z-\tau)^{\lambda_\tau}\big) \quad \text{при } z \to \tau.$$

*При этом регулярное решение $u(z)$ вблизи особой точки $z = 0$ и вблизи концов $\tau \in F$ контура $\Gamma$ имеет поведение*

$$u(z) = \begin{cases} O\big(e^{-\operatorname{Re}\Omega(z)}\big) & \text{при } z \to 0, \\ O\big((z-\tau)^{\gamma_\tau + \lambda_\tau}\big) & \text{при } z \to \tau. \end{cases} \tag{13}$$

# 4 Представление неявного решения в случае $a(z) \neq 0$, $b(z) \neq 0$

Для рассмотрения уравнения (1) с ненулевыми $a(z)$ и $b(z)$ необходимо предварительно изучить действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(K_0\varphi)(z) = \int_D \frac{\varphi(\zeta)\,d_2\zeta}{|\zeta|^m\,|\zeta - z|^\alpha}, \quad z \in D, \tag{14}$$

где положительные $m, \alpha$, удовлетворяют условиям

$$0 < m < 1 \leq \alpha < (3-m)/2, \tag{15}$$

так что $0 < 3 - m - 2\alpha < 1$.

**Лемма 3.** *Пусть*

$$p > 2/(3-m-2\alpha), \quad \mu = 3 - m - 2\alpha - 2/p. \tag{16}$$

*Тогда оператор $K_0$ ограничен $L^p(D) \to C^\mu\big(\overline{D}\big)$.*

*Доказательство.* Отметим сначала, что если $0 < \beta_0 < 1 < \beta_1 < 2 - \beta_0$, то имеет место равномерная по $z \in \mathbb{C}$ оценка

$$\int_{|\zeta|\le 1} \frac{d_2\zeta}{|\zeta + z|^{\beta_0} \, |\zeta|^{\beta_1}} \le C_\alpha. \tag{17}$$

Аналогично, при $0 < \beta_0 < 1$, $\beta_2 > 2$ интеграл

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\beta_0} \, (1 + |\zeta|^{\beta_2})} < \infty. \tag{18}$$

Обратимся к интегралу $\psi = K_0\varphi$ в (14). Полагая $\beta_0 = qm$, $\beta_1 = q\alpha$, на основании неравенства Гёльдера можем написать

$$|\psi(z)| \le |\varphi|_{L^p} \left( \int_D \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\beta_0} \, |\zeta - z|^{\beta_1}} \right)^{1/q},$$

так что в силу (17), (18) имеем оценку

$$|\psi(z)| \le C_0 \, |\varphi|_{L^p}. \tag{19}$$

Аналогичным образом для любых точек $z_1, z_2 \in D$ справедливо неравенство

$$|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \le \alpha R^{\alpha - 1} \, |z_1 - z_2| \left( \int_D \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{mq} \, |\zeta - z_1|^{\alpha q} \, |\zeta - z_2|^{\alpha q}} \right)^{1/q} |\varphi|_{L^p},$$

где $R$ есть диаметр области $D$. Здесь учтено, что $1 - t^\alpha \le \alpha(1 - t)$ при $0 < t \le 1 \le \alpha$ и, следовательно,

$$(|u_1|^\alpha - |u_2|^\alpha) \le \alpha \, |u_1|^{\alpha - 1} (|u_1| - |u_2|) \le \alpha \, |u_1|^{\alpha - 1} \, |u_1 - u_2| \tag{20}$$

при $|u_1| \ge |u_2|$.

Замена $\zeta - z_1 = |z_1 - z_2| \, \zeta'$ приводит интеграл в правой части этого неравенства к выражению

$$|z_1 - z_2|^{2 - (m + 2\alpha) q} \int_{D'} \frac{d_2\zeta}{|\zeta + \zeta_0|^{mq} \, |\zeta|^{\alpha q} \, |\zeta - \zeta_1|^{\alpha q}},$$

где $D'$ есть образ $D$ при преобразовании $\zeta \to \zeta'$ и положено $\zeta_0 = z_1/|z_1 - z_2|$, $\zeta_1 = -(z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|$. Интеграл здесь разобьем на сумму интегралов по $D_0 = D' \cap \{|\zeta| \le 1/2\}$, $D_2 = D' \cap \{|\zeta - \zeta_1| \le 1/2\}$ и $D_1 = D' \setminus (D_0 \cup D_2)$. Интегралы по $D_0$ и $D_2$ равномерно ограничены в силу (17), а интеграл по $D_1$ обладает аналогичным свойством в силу (18). В результате приходим к оценке

$$|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \le C_1 \, |\varphi|_{L^p} \, |z_1 - z_2|^{1 + 2/q - m - 2\alpha},$$

которая вместе с (17), (18) и (19) завершает доказательство леммы 3. $\square$

Теперь переходим к рассмотрению уравнения (1) в общем случае, предполагая, что его правая часть удовлетворяет условию $f_0 = e^{-\Omega} f \in L^p(D)$. Это уравнение рассмотрим для регулярных решений $u$ в классе, определяемом аналогичным условием $\varphi = e^{-\Omega} u \in L^p(D)$. Тогда в силу (12) по отношению к $\varphi$ оно запишется в эквивалентном виде

$$\varphi_{\bar z} + bc\bar\varphi = f_0$$

с ограниченной функцией $c(z) = e^{-2i\,\mathrm{Im}\,\Omega(z)}$. Напомним, что функция $b_0(z) = |z|^m\, b(z)$ также непрерывна и ограничена в $D_0$.

В свою очередь это уравнение в классе $\varphi \in L^p(D)$ эквивалентным образом редуцируется к решению интегрального уравнения

$$\varphi + T(bc\bar\varphi) = \phi + f^0, \tag{21}$$

где $f^0 = Tf_0$, функция $\phi \in L^p(D)$ аналитична в $D_0 = D \setminus \{0\}$.

Обратно, если для заданной функции $\phi \in L^p(D)$, аналитичной в $D_0 = D \setminus \{0\}$, уравнение (21) разрешимо в классе $L^p(D)$, то $u = e^{\Omega}\varphi$ является регулярным решением уравнения (1) в рассматриваемом классе.

Оператор $Tbc$ (или $Tb_1$, при $b_1 = bc$), фигурирующий в этом представлении, охватывается леммой 3 при $\alpha = 1$. Таким образом, при

$$m + \mu + 2/p < 1$$

оператор $Tb_1$ ограничен $L^p(D) \to C^\mu\big(\,\overline{D}\,\big)$ и компактен в каждом из пространств $L^p(D)$, $C^\mu\big(\,\overline{D}\,\big)$, а также в пространстве кусочно-непрерывных функций, принадлежащих классу $C^\mu$ в каждой из компонент связности множества $D_0$.

В случае регулярных коэффициентов уравнение, подобное (21), возникало у И.Н. Векуа [1]. Для обращения интегрального оператора в левой части (21) И.Н. Векуа предложил метод последовательных приближений. Однако этот метод применим лишь в предположении, что коэффициент $b_1$ по модулю достаточно мал. В общем случае необходимо исследовать условия разрешимости этого уравнения, что и является предметом рассмотрения в следующем пункте.

## 5 Исследование интегрального уравнения

Согласно (21), в представлении общего решения уравнения (1) важную роль играет $\mathbb{R}$-линейный интегральный оператор $K\varphi = Tb_1\bar\varphi$, где черта означает комплексное сопряжение, или в явном виде,

$$(K\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{b_0(\zeta)\, c(\zeta)}{|\zeta|^m\,(\zeta - z)}\overline{\varphi(\zeta)}\, d_2\zeta, \quad z \in D, \tag{22}$$

а также связанное с ним уравнение Фредгольма

$$\varphi + K\varphi = f.$$

**Теорема 2.** a) *Однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ в классе $C\big(\overline{D}\big)$ имеет конечное число линейно независимых (над полем $\mathbb{R}$) решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H\big(\overline{D}\big)$ и существуют такие линейно независимые суммируемые функции $h_1, \ldots, h_n$, что условия ортогональности*

$$\operatorname{Re}\int_D f(\zeta)\, h_j(\zeta)\, d_2\zeta = 0, \quad 1 \le j \le n, \tag{23}$$

*необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$.*

b) *Существуют такие функции $p_1(z,\zeta), p_2(z,\zeta) \in C\big(\overline{D}\times\overline{D}\big)$ и число $\alpha$ в интервале $1 \le \alpha < (3-m)/2$, что оператор*

$$(Pf)(z) = \frac{1}{\pi}\int_D \frac{[p_1(z,\zeta)\, f(\zeta) + p_2(z,\zeta)\overline{f(\zeta)}]\, d_2\zeta}{|\zeta|^m\,|\zeta - z|^\alpha} \tag{24}$$

*ограничен $C\big(\overline{D}\big) \to C^\varepsilon\big(\overline{D}\big)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, и при выполнении условий (23) одно из решений неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$ дается формулой $\varphi = f + Pf$.*

*Доказательство.* a) К оператору $K$ можно применить лемму 3 с $\mu < 1 - m - 2/p$. Согласно этой лемме оператор $K$ ограничен $L^p(D) \to C^\mu\big(\overline{D}\big)$ и, в частности, компактен в пространстве $C\big(\overline{D}\big)$. На основании теоремы Рисса [26, с. 117] отсюда следует, что однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, которые, очевидно, принадлежат $H\big(\overline{D}\big)$.

Рассмотрим союзный с $K$ оператор $K'$ относительно билинейной формы $\langle\varphi,\psi\rangle$, определяемой левой частью (23). Другими словами, этот оператор связан с $K$ тождеством

$$\langle K\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, K'\psi\rangle. \tag{25}$$

В явном виде оператор $K'$ действует по формуле

$$(K'\psi)(z) = \frac{\overline{(cb_0)(z)}}{\pi|z|^m}\int_D \frac{\psi(\zeta)\, d_2\zeta}{\bar{z} - \bar{\zeta}}.$$

Выберем $p_0 > 1$ столь близким к 1 и $p_1 > 1$ столь большим, чтобы $|\zeta|^{-m}\,\psi(\zeta) \in L^{p_0}(D)$ для любой функции $\psi \in L^{p_1}(D)$ (с оценкой соответствующих норм). С другой стороны, интеграл в правой части (25) представляет собой свертку функции $\widetilde{\psi}$, полученной продолжением $\psi$ нулем на всю плоскость, с функцией $\bar{\zeta}^{-1}$. Поэтому на основании неравенства Юнга для сверток (см., например, [27, с. 42]) оператор $K'$ ограничен в $L^{p_0}(D)$. Аппроксимируя $\bar{\zeta}^{-1}$ гладкими срезывающими функциями, убеждаемся, что этот оператор и компактен в данном пространстве.

По теореме Рисса однородное уравнение $\psi + K'\psi = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $h_j \in L^{p_0}(D)$, $1 \le j \le n'$. Утверждается, что $n' = n$ и условия (23) необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$. В самом деле, по теореме Рисса коядро оператора $1+K$ в сопряженном пространстве $\left[C\left(\overline{D}\right)\right]^*$ имеет размерность $n$. В силу (25) условия $\langle f, h_j\rangle = 0$, $1 \le j \le n'$, необходимы для разрешимости уравнения $\varphi + K\varphi = f$. Другими словами, функции $h_j$ входят в коядро оператора $1 + K$ и, следовательно, $n' \le n$. В частности, при $n' = n$ условия (23) будут и достаточными для разрешимости этого уравнения. Остается заметить, что аналогичные соображения, примененные к уравнению $\psi + K'\psi = g$, приводят к неравенству $n \le n'$.

b) Выберем в пространстве $H\left(\overline{D}\right)$ системы функций $f_j$, $1 \le j \le n$, и $g_j$, $1 \le j \le n$, биортогональные к $h_j$, $1 \le j \le n$, и $\varphi_j$, $1 \le j \le n$, соответственно, т.е.

$$\langle f_i, h_j\rangle = \langle g_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{26}$$

где $\delta_{ij}$ означает символ Кронекера. Утверждается, что оператор

$$N\varphi = \varphi + K\varphi + 2\sum_{j=1}^{n}\langle \varphi, g_j\rangle f_j \tag{27}$$

обратим в пространстве $C\left(\overline{D}\right)$. В самом деле, в соответствии с теоремой Рисса достаточно убедиться, что его ядро нулевое. Пусть $N\varphi = 0$, тогда $\varphi + K\varphi = -2f$, где $f$ означает сумму в правой части (27), так что $f$ удовлетворяет условиям (23). На основании (26) отсюда $\langle \varphi, g_j\rangle = 0$ для всех $j$. Поскольку по условию $\varphi$ есть линейная комбинация функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, в силу (26) функция $\varphi = 0$.

Согласно (27), оператор $N$ действует по формуле

$$(N\varphi)(z) = \varphi(z) + \frac{1}{\pi}\int_D \frac{c_0(z,\zeta)\,\varphi(\zeta) + [(bc)(\zeta) + \overline{c_0(z,\zeta)}]\,\overline{\varphi(\zeta)}}{|\zeta|^m\,(\zeta - z)} d_2\zeta, \quad z \in D,$$

где положено $c_0(z,\zeta) = |\zeta|^m\,(\zeta - z)\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^n f_j(z)\,g_j(\zeta)$. Переходя от $\varphi$ к паре $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ вещественных функций $\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\varphi$ и $\varphi_2 = \mathrm{Im}\,\varphi$ и полагая

$$c_0(z,\zeta) = c_1(z,\zeta) + ic_2(z,\zeta), \quad (cb)(\zeta) = b_1(\zeta) + ib_2(\zeta),$$
$$(z-\zeta)^{-1}\,|z-\zeta|^\alpha = d_1(z,\zeta) + id_2(z,\zeta)$$

с вещественными $c_j$, $b_j$ и $d_j$, этот оператор можем записать в форме

$$N\varphi = \varphi + T(q)\varphi, \quad [T(q)\varphi](z) = \int_D \frac{q(z,\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d_2(\zeta)}{|\zeta|^m\,|\zeta - z|^\alpha}\,d_2\zeta, \quad z \in D, \tag{28}$$

где $1 < \alpha < 2$ и $q$ означает $2\times 2$-матрицу-функцию

$$q(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} d_1(2c_1 + b_1) + d_2 b_2 & d_1(b_2 - 2c_2) - d_2 b_1 \\ -d_2(2c_1 + b_1) + d_1 b_2 & -d_2(b_2 - 2c_2) - d_1 b_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $c_j \in C^{\varepsilon_1}\big(\overline{D}\times\overline{D}\big)$, $\varepsilon_1 = \min(m,\mu)$, и $d_j \in C^{\varepsilon_2}\big(\overline{D}\times\overline{D}\big)$, $\varepsilon_2 = \alpha - 1$. Поэтому функция $q(z,\zeta)$ непрерывна на $\overline{D}\times\overline{D}$ и по переменной $z$ принадлежит $C^\varepsilon\big(\overline{D}\big)$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, равномерно по $\zeta \in D$.

В частности, на основании леммы 3 оператор $T(q)$ указанного вида компактен в пространстве $C\big(\overline{D}\big)$.

Утверждается, что

$$[1 + T(q)]^{-1} = 1 + T(p) \tag{29}$$

с некоторой матрицей-функцией $p \in C\big(\overline{D}\times\overline{D}\big)$. При $m = 0$ этот факт установлен в [28], в общем случае действуем по этой же схеме. Именно, введем в классе $C\big(\overline{D}\times\overline{D})$ билинейную операцию $p * q$ по формуле

$$(p*q)(z,\zeta) = |z-\zeta|^\alpha \int_D \frac{p(z,t)\,q(t,\zeta)\,d_2 t}{|t|^m\,|t-z|^\alpha\,|t-\zeta|^\alpha}, \quad z \neq \zeta.$$

Это определение мотивировано тем, что перестановка повторного интегрирования $T(p)[T(q)\varphi]$ приводит к равенству $T(p)T(q) = T(p*q)$.

Аналогично лемме 3 проверяется, что функция $p * q$ непрерывна и $(p*q)(z,\zeta) = |z-\zeta|^{2-m-\alpha}\,O(1)$ при $|z-\zeta| \to 0$, причем билинейное отображение $(p,q) \to p*q$ ограничено $C\times C \to C$. Кроме того при фиксированном $p$ линейный оператор $R(p)q = p*q$ компактен в пространстве $C\big(\overline{D}\times\overline{D}\big)$. Пользуясь этими фактами, совершенно аналогично [28] устанавливается существование ядра $p \in C\big(\overline{D}\times\overline{D}\big)$ со свойством (28). Возвращаясь от пары $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ вещественных функций к одной комплексной $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, оператор $T(p)f$ можем записать в форме оператора $Pf$, фигурирующего в (24), где комплексные функции $P_j(z,\zeta)$ обладают тем же свойством, что и матрица-функция $p(z,\zeta)$.

Остается показать, что в предыдущих обозначениях оператор $T(p)$ ограничен $C\big(\overline{D}\big) \to C^{\varepsilon}\big(\overline{D}\big)$. Легко видеть, что при $\varepsilon \le 3-2\alpha-m$ этот факт будет следовать из оценки

$$|p(z_1,\zeta)-p(z_2,\zeta)| \le C|z_1-z_2|^{\varepsilon}\left[|\zeta-z_1|^{-m}+|\zeta-z_2|^{-m}\right], \tag{30}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от $z_j$ и $\zeta$.

В самом деле, тогда разность $\big|[T(p)\varphi](z_1)-[T(p)\varphi](z_2)\big|$ не превосходит

$$C|\varphi|_0\left[\int_{|\zeta-z_1|\le R}\left(\frac{1}{|\zeta-z_1|^m}+\frac{1}{|\zeta-z_2|^m}\right)\frac{|z_1-z_2|^{\varepsilon}\,d_2\zeta}{|\zeta|^m\,|\zeta-z_1|^{\alpha}}+\right.$$
$$\left.+\int_{\mathbb{C}}\frac{|z_1-z_2|\,d_2\zeta}{|\zeta|^m\,|\zeta-z_1|^{\alpha}\,|\zeta-z_2|^{\alpha}}\right]$$

с некоторой постоянной $C$, где $R$ означает диаметр области $D$. Подстановка $\zeta-z_1=|z_1-z_2|\,t$ преобразует выражение в квадратных скобках к виду

$$|z_1-z_2|^{\varepsilon+2-\alpha-2m}\int_{|t|\le R}\left(\frac{1}{|t|^m}+\frac{1}{|t-w|^m}\right)\frac{d_2t}{|t-u|^m\,|t|^{\alpha}}+$$
$$+\,|z_1-z_2|^{3-2\alpha-m}\int_{\mathbb{C}}\frac{d_2t}{|t-u|^m\,|t|^{\alpha}\,|t-w|^{\alpha}},$$

где положено $u=-z_1/|z_1-z_2|$ и $w=-(z_1-z_2)/|z_1-z_2|$. На основании (17), (18) интегралы здесь равномерно ограничены, что и завершит доказательство (b) и теоремы.

Обратимся к обоснованию оценки (30). Равенство (29) влечет соотношение $p+q+q*p=0$ для операторных ядер. В развернутом виде

$$-p(z,\zeta)=q(z,\zeta)+\int_D\left|\frac{z-\zeta}{(z-t)(\zeta-t)}\right|^{\alpha}\frac{q(z,t)\,p(t,\zeta)}{|t|^m}\,d_2t.$$

Как было отмечено, функция $q(z,t)\,p(t,\zeta)$ по переменной $z$ принадлежит $C^{\varepsilon}\big(\overline{D}\big)$ равномерно по $\zeta,t\in D$. Поэтому с учетом того, что если $0<\beta_0<1<\beta_1<2-\beta_0$, то имеет место равномерная по $z\in\mathbb{C}$ оценка

$$\int_{|\zeta|\le 1}\frac{d_2\zeta}{|\zeta+z|^{\beta_0}\,|\zeta|^{\beta_1}}\le C_{\alpha},$$

получаем, что оценка (30) вытекает из следующей леммы для функции

$$h(z,\zeta)=\int_D\left|\frac{z-\zeta}{(z-t)(\zeta-t)}\right|^{\alpha}\frac{d_2t}{|t|^m}.$$

**Лемма 4.** *Для любых $z_1, z_2, \zeta \in D$, $z_j \neq \zeta$, справедлива оценка*

$$|h(z_1,\zeta) - h(z_2,\zeta)| \leq C\,|z_1 - z_2|^{3-2\alpha-m}\left[|z_1-\zeta|^{-m} + |z_2-\zeta|^{-m}\right], \tag{31}$$

*где постоянная $C > 0$ не зависит от $z_j$ и $\zeta$.*

*Доказательство.* Поскольку

$$y_j = \frac{z_j - \zeta}{(z_j - t)(\zeta - t)} = \frac{1}{\zeta - t} - \frac{1}{z_j - t}, \quad j = 1, 2,$$

то имеем оценку

$$|h(z_1,\zeta) - h(z_2,\zeta)| \leq \alpha|z_1 - z_2| \int_{\mathbb{C}} \frac{(|y_1|^{\alpha-1} + |y_2|^{\alpha-1})\,d_2t}{|t|^m\,|z_1 - t|\,|z_2 - t|},$$

которую можно переписать в форме

$$|h(z_1,\zeta) - h(z_2,\zeta)| \leq \alpha\,|z_1 - z_2|\big(|z_1-\zeta|^{\alpha-1}\,I_1 + |z_2-\zeta|^{\alpha-1}\,I_2\big), \tag{32}$$

где положено

$$I_1 = \int_{\mathbb{C}} \frac{d_2t}{|t|^m\,|z_1 - t|^\alpha\,|z_2 - t|\,|\zeta - t|^{\alpha-1}}, \quad I_2 = \int_{\mathbb{C}} \frac{d_2t}{|t|^m\,|z_2 - t|^\alpha\,|z_1 - t|\,|\zeta - t|^{\alpha-1}}.$$

Замена $t - z_j = |z_1 - z_2|\,s$ под знаком интеграла $I_j$ преобразует его к виду

$$I_j = |z_1 - z_2|^{2-2\alpha-m}\,\widetilde{I}_j, \quad \widetilde{I}_j = \int_{\mathbb{C}} \frac{d_2t}{|t + v_j|^m\,|t|^\alpha\,|t - u_j|\,|t - w_j|^{\alpha-1}}, \tag{33}$$

где положено

$$v_j = \frac{z_j}{|z_1 - z_2|}, \quad u_1 = -u_2 = \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|}, \quad w_j = \frac{z_j - \zeta}{|z_1 - z_2|}.$$

Рассмотрим зависимость интеграла $I_1$ от параметров $v_1, w_1$ и $|u_1| = 1$. Если одновременно $|w| \geq 1/4$ и $|w - u| \geq 1/4$, то, как и при доказательстве леммы 3, с помощью оценок

$$\int_{|\zeta|\leq 1} \frac{d_2\zeta}{|\zeta + z|^{\beta_0}\,|\zeta|^{\beta_1}} \leq C_\alpha$$

при $0 < \beta_0 < 1 < \beta_1 < 2 - \beta_0$ и

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\beta_0}\,(1 + |\zeta|^{\beta_2})} < \infty$$

при $0 < \beta_0 < 1$, $\beta_2 > 2$ убеждаемся, что интеграл $\widetilde{I}_1$ равномерно ограничен по всем трем параметрам. В результате для рассматриваемого случая приходим к справедливости оценки (31) леммы.

Оставшиеся два случая $|w| \leq 1/4$ и $|w-u| \leq 1/4$ рассмотрим отдельно. Пусть $|w_1| \leq 1/4$. Тогда

$$\widetilde{I}_1 \leq C\left(\int_{|t|\leq 1/2} \frac{d_2 t}{|t+v_1|^m\,|t|^\alpha\,|t-w_1|^{\alpha-1}} + \int_{|t|\geq 1/2} \frac{d_2 t}{|t+v_1|^m\,|t|^{2\alpha-1}\,|t-u_1|}\right).$$

Как и выше, убеждаемся, что второй интеграл равномерно ограничен, поэтому после переобозначений константы можем написать

$$\widetilde{I}_1 \leq C(1+I_1'), \quad I_1' = \int_{|t|\leq 1/2} \frac{d_2 t}{|t+v_1|^m\,|t|^\alpha\,|t-w_1|^{\alpha-1}}.$$

Полагая $t = s\,|w_1|$, получим

$$I_1' = |w_1|^{3-2\alpha-m} \int_{|w_1||t|\leq 1/2} \frac{d_2 t}{|t+v_1'|^m\,|t|^\alpha\,|t-w_1'|^{\alpha-1}},$$

где $|w_1'| = 1$. Нетрудно видеть, что с некоторыми константами интеграл здесь оценивается как

$$C_1 + C_2 \int_{2\leq|t|\leq 1/(2|w_1|)} \frac{d_2 t}{|t+v_1'|^m\,|t|^{2\alpha-1}} \leq C_3\,|w_1|^{2\alpha-3}.$$

Таким образом, $\widetilde{I}_1 \leq C\,|w_1|^{-m}$. Вспоминая $w$, совместно с (33) отсюда приходим к оценке

$$I_1 \leq C\,|z_1-z_2|^{2-2\alpha}\,|z_1-\zeta|^{-m}. \tag{34}$$

Пусть, далее, $|w_1-u_1| \leq 1/4$. Тогда

$$I_1 \leq C\left(\int_{|t-u_1|\leq 1/2} \frac{d_2 t}{|t+v_1|^m\,|t-u_1|\,|t-w_1|^{\alpha-1}} + \right.$$
$$\left. + \int_{|t-u_1|\geq 1/2} \frac{d_2 t}{|t+v_1|^m\,|t|^\alpha(1+|t|^\alpha)}\right).$$

Как и в предыдущем случае, второй интеграл равномерно ограничен, так что после переобозначений константы можем написать

$$I_1 \leq C(1+I_1'), \quad I_1' = \int_{|t-u_1|\leq 1/2} \frac{d_2 t}{|t+v_1|^m\,|t-u_1|\,|t-w_1|^{\alpha-1}}.$$

Полагая $t - u_1 = |u_1 - w_1|\, s$, получим

$$I_1' = |u_1 - w_1|^{2-\alpha-m} \int_{|u_1-w_1||t|\le 1/2} \frac{d_2 t}{|t + \tilde{v}_1'|^m\, |t|^\alpha\, |t - w_1'|},$$

где $|w_1'| = 1$. Как и выше, интеграл здесь оценивается как $O(1)\, |u_1 - w_1|^{\alpha-2}$, так что $I_1' \le C\, |u_1 - w_1|^{-m}$. Учитывая выражения для $w_1$ и $u_1$, совместно с (33) отсюда приходим к оценке

$$I_1 \le C\, |z_1 - z_2|^{2-2\alpha}\, |z_2 - \zeta|^{-m}.$$

Объединив ее с (34), можем утверждать, что $I_1$ равномерно ограничен по всем трем параметрам

$$I_1 \le C\, |z_1 - z_2|^{2-2\alpha} \big[ |z_1 - \zeta|^{-m} + |z_2 - \zeta|^{-m} \big].$$

Совершенно аналогично эта оценка устанавливается и для интеграла $I_2$, что совместно с (32) приводит к справедливости (31). $\square$

Таким образом, теорема 2 доказана. $\square$

## 6 Представление решения в общем случае

Обратимся к уравнению (21):

$$\varphi + T(bc\bar{\varphi}) = \phi + f^0,$$

где функция $\phi \in L^p(D)$ аналитична в $D_0 = D \setminus \{0\}$ и, напомним,

$$b(z) = \frac{b_0(z)}{|z|^m}, \quad c(z) = e^{-2i\,\mathrm{Im}\,\Omega(z)}.$$

Функцию $\phi + f_0$, где, напомним, $f_0 = T(e^{-\Omega} f)$, рассматриваем как правую часть интегрального уравнения (21). Напомним также, что согласно лемме 1 функция $\Omega(z)$ определяется равенством (8).

Кроме того, $\phi \in C\big(\overline{D} \setminus F\big)$ — произвольная аналитическая в области $D_0$ функция, которая для заданного семейства $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел подчиняется степенному поведению

$$\phi(z) = O\big((z-\tau)^{\lambda_\tau}\big), \quad -1 < \lambda_\tau < 0, \quad \text{при } z \to \tau. \tag{35}$$

**Теорема 3.** *Пусть* $0 < m < 1$, $1 < \alpha < (3-m)/2$ *и выполнены условия теоремы 1. Пусть* $f_0 = e^{-\Omega} f \in L^p(D)$, $p > 2$, *так что функция* $f^0 = T f_0 \in H\big(\overline{D}\big)$. *Тогда в обозначениях теоремы 2 любое решение* $u$ *уравнения* (1) *в классе* $u \in C\big(\overline{D} \setminus \{0 \cup F\}\big)$ *представимо в виде*

$$u = e^{\Omega}\Big[\phi + P\phi + f^0 + Pf^0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j\Big] \tag{36}$$

*с произвольными* $\xi_j \in \mathbb{R}$, *где интегральный оператор* $P$ *определяется формулой* (24), *а функция* $\phi \in C_0^{\mu}\big(\overline{D} \setminus F\big)$ *аналитична в области* $D$ *и удовлетворяет условиям* (35) *и*

$$\operatorname{Re} \int_D (\phi + f^0)(\zeta)\, h_j(\zeta)\, d_2\zeta = 0, \quad 1 \le j \le n. \tag{37}$$

*Доказательство.* Как сказано выше (в п. 3), согласно (12) подстановка $u = e^{\Omega}\varphi$ приводит (1) к уравнению $\varphi_{\bar z} + bc\bar\varphi = e^{-\Omega} f$ с коэффициентом $b(z) = |z|^{-m}\, b_0(z)$. В свою очередь, это уравнение в классе $\varphi \in C_0^{\mu}\big(\overline{D} \setminus F\big)$ равносильно интегральному уравнению $\varphi + K\varphi = \phi + f^0$, где $f^0 = T(e^{-\Omega} f) \in H\big(\overline{D}\big)$, функция $\phi \in C_0^{\mu}\big(\overline{D} \setminus F\big)$ аналитична в области $D$ и ее поведение вблизи точек $F$ определяется формулой (35). Поэтому остается применить к этому уравнению теорему 2. $\square$

## Список литературы


[1] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. 2-е изд. — М.: Наука, 1988.

[2] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.

[3] Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его приложения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. — Душанбе: Таджик НИИНТИ, 1963.

[4] Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. — Душанбе: Таджик НИИНТИ, 1993.

[5] Усманов З.Д. Связь многообразия решений общей и модельной обобщенных систем Коши–Римана с сингулярной точкой // *Матем. заметки.* — 1999. — Т. 66, № 2. — С. 302–307.

[6] Begehr H. Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations: An Introductory Text. — Singapore: World Scientific, 1994.

[7] Begehr H., Gilbert R.P. On Riemann boundary value problem for certain linear elliptic systems in the plane // *J. Diff. Equations.* — 1979. — Vol. 32 — P. 1–14.

[8] Begehr H., Hile G.N. Nonlinear Riemann boundary value problem for a semilinear elliptic system in the plane // *Math. Z.* — 1982. — Vol. 179. — P. 241–261.

[9] Begehr H., Hsiao G.C. The Hilbert boundary value problem for nonlinear elliptic systems // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* — 1983. — Vol. 94A. — P. 97–112.

[10] Begehr H., Dai D.-Q. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // *J. Diff. Equations.* — 2004. — Vol. 196. — P. 67–90.

[11] Dai D.-Q. Piecewise continuous solutions of nonlinear elliptic equations in the plane // *Acta Math. Sci. Ser. B.* — 1994. — Vol. 14. — P. 383–392.

[12] Dai D.-Q. On some problems for first order elliptic systems in the plane; in: H. Begehr, O. Celebi, W. Tutschke (Eds.) Complex Methods for Partial Differential Equations. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. — P. 21–27.

[13] Dai D.-Q., Lin W. Piecewise continuous solutions of nonlinear pseudoparabolic equations in two space dimensions. // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* — 1992. — Vol. 121A. — P. 203–217.

[14] Reissig M., Timofeev A. Dirichlet problems for generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients // *Complex Var..* — 2005. — Vol. 50, no 7(11). — P. 653–672.

[15] Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б. Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. — Алматы: Наука, 2005.

[16] Meziani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // *Complex Var. and Elliptic Eq.* — 2008. — Vol. 53. — P. 1111–1130.

[17] Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. — 236 с.

[18] Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // *Дифф. уравнения.* — 2016. — Т. 52, № 5. — С. 637–650.

[19] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.

[20] Александров А.В., Солдатов А.П. Граничные свойства интегралов типа Коши. $L_p$-случай // *Дифф. уравнения.* — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 3–8.

[21] Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // *Совр. матем. Фундам. напр.* — 2017. — Т. 63, № 1. — С. 1–189.

[22] Мещерякова Е.С., Солдатов А.П. Задача Римана–Гильберта в семействе весовых пространств Гёльдера // *Дифф. уравнения.* — 2016. — Т. 52, № 4. — С. 518–527.

[23] Расулов А.Б., Якивчик Н.В. Задача линейного сопряжения для уравнения Коши–Римана с сильной особенностью в младшем коэффициенте в области с кусочно гладкой границей // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — Т. 231. — С. 115–123.

[24] Расулов А.Б., Якивчик Н.В. Интегральное представление решений и задача типа Римана–Гильберта для уравнения Коши–Римана с сильной особенностью в младшем коэффициенте в области с кусочно-гладкой границей // *Журн. выч. матем. и матем. физ.* — 2024. — Т. 64, № 11. — С. 2132–2142.

[25] Солдатов А.П. Об интеграле Помпею и некоторых его обобщениях // *Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Матем. модел. прогр.* — 2021. — Т. 14, № 1. — С. 53–67.

[26] Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

[27] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.

[28] Солдатов А.П. К теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода // *Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук.* — 2009. — Т. 11, № 1. — С. 74–78.

# An integral representation for a generalized Cauchy–Riemann system with strong singularity in the leading coefficient in a domain with piecewise smooth boundary

N. V. Yakivchik

National Research University “Moscow Power Engineering Institute”

YakivchikNV@mpei.ru

**Abstract.** The purpose of this work is to construct a general solution to a Cauchy–Riemann equation with strong singularities in the leading coefficient in a domain with piecewise smooth boundary. The explicit integral representation we found permits to setup and solve principal boundary value problems of the theory of generalized analytic functions: Riemann–Hilbert type problem and the problem of linear conjugation. For elliptic equations with singular coefficients, including that under consideration, explicit construction of solutions in domains with piecewise smooth boundaries has not yet been carried out.

**Keywords:** Cauchy–Riemann equation, strong singularities in the coefficient, Pompeiu–Vekua integral operator, piecewise smooth boundary