

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2025

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Инвариантные торы периодических систем с девятью особенностями в гамильтоновой невозмущенной части

В. В. Басов

Санкт-Петербургский государственный университет,

e-mail: vlvbasov@rambler.ru

А. С. Жуков

Лаборатория Непрерывного Математического Образования,

e-mail: artzhukov1111@gmail.com

Аннотация. Исследуется семейство T -периодических систем ОДУ с малым параметром $\varepsilon \geq 0$

$$\dot{x} = (\gamma(y^3 - y) + X^\nu(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \quad \dot{y} = (-(x^3 - x) + Y^\nu(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \quad (*)$$

у которых $\gamma \in (0, 1]$, $\nu = 0, 1$; $X^\nu(t, x, y, 0)$, $Y^\nu(t, x, y, 0)$ — вещественно-аналитические функции, а невозмущенная часть, порождаемая гамильтонианом $H = (2x^2 - x^4 + \gamma(2y^2 - y^4))\varepsilon^\nu/4$, имеет девять нулей.

Для любого нуля гамильтониана в явном виде выписаны условия на функции $X^\nu(t, x, y, 0)$, $Y^\nu(t, x, y, 0)$, при выполнении которых удастся выделить наборы начальных данных для решений задач Коши невозмущенной системы, параметризующих так называемые порождающие циклы. Доказано, что в малой по ε окрестности цилиндрической поверхности, образующей которой является порождающий цикл, любая система из семейства (*) при любых малых значениях параметра имеет двупериодическую инвариантную поверхность, гомеоморфную тору, если факторизовать время по периоду.

Приведены формула и асимптотическое разложение этой поверхности, установлен ряд ее свойств. Построен оригинальный пример семейства систем как с «быстрым» ($\nu = 1$), так и с «медленным» ($\nu = 0$) временем, у которых среднее по t значение независимого от параметра возмущения является многочленом третьего порядка с тремя слагаемыми и которые, как установлено, имеют одиннадцать инвариантных торов.

Перечисленные результаты получены так называемым методом выделения порождающих торов (метод ВПТ). Достаточно подробное описание алгоритма метода ВПТ, подкрепленное демонстрацией его применения к системе (*), является второй целью предлагаемой работы. Разработанный метод поиска сохраняющихся при любых малых значения параметра инвариантных торов универсален, поскольку может применяться к системам с невозмущенной частью, порожденной любым полиномиальным гамильтонианом, у которого, конечно, можно найти особые точки и сепаратрисы. Метод ВПТ, в частности, является альтернативой так называемым методам поисковых функций и функций Мельникова. Последние применяются для решения ослабленной XVI проблемы Гильберта по оценке снизу числа предельных циклов, но только к автономным системам с гамильтоновой невозмущенной частью. Таким образом, метод ВПТ позволяет оценивать снизу аналог числа Гильберта, указывающий количество инвариантных торов в периодических двумерных системах с «быстрым» и «медленным» временем и различными гамильтоновыми невозмущенными частями. Он применяется также для исследования периодических систем любого четного порядка с общим множителем ε в правой части (случай $\nu = 0$). Именно к таким системам сводятся системы уравнений второго порядка, описывающие колебания слабо-связанных осцилляторов.

Ключевые слова: гамильтонова система, инвариантный тор, бифуркация, предельный цикл, усреднение, число Гильберта.

0 Введение

0.1 Постановка задачи, цели, результаты

Будем исследовать вещественную двумерную T -периодическую систему с гамильтоновой автономной невозмущенной частью и малым параметром ε

$$\dot{x} = (\gamma(y^3 - y) + X^\nu(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \quad \dot{y} = (-(x^3 - x) + Y^\nu(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \quad (0.1)$$

в которой $\gamma \in (0, 1]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, $\nu = 0, 1$; функции X^ν, Y^ν — непрерывные по совокупности аргументов и T -периодические по t ;

$$X^0 = X_0^0(t, x, y) + X_1^0(t, x, y)\varepsilon + X_2^0(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon^2,$$

$$X^1 = X_0^1(t, x, y) + X_1^1(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon;$$

функции X_0^0, X_0^1, X_1^0 — равномерно относительно t вещественно-аналитические по x, y в области

$$D_{\sigma, \sigma}^{x, y} = \{(t, x, y) : t \in \mathbb{R}, |x|, |y| < \sigma\}, \quad \sigma > \sqrt{1 + \gamma^{-1/2}};$$

функции $X_1^1 \in C_{t, x, y, \varepsilon}^{0, 1, 1, 1}(G_{\sigma, \sigma, \varepsilon_0}^{x, y, \varepsilon})$, $X_2^0 \in C_{t, x, y, \varepsilon}^{0, 1, 1, 0}(G_{\sigma, \sigma, \varepsilon_0}^{x, y, \varepsilon})$, где множество

$$G_{\sigma, \sigma, \varepsilon_0}^{x, y, \varepsilon} = \{(t, x, y, \varepsilon) : t, x, y \in \mathbb{R}, |x|, |y| \leq \sigma, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\};$$

функции Y^ν устроены аналогично функциям X^ν .

Здесь и в дальнейшем непрерывную, T -периодическую по t функцию $Z(t, z_1, z_2)$ будем называть *равномерно относительно t вещественно-аналитической по z_1, z_2 в области $D_{z_1^0, z_2^0}^{z_1, z_2} = \{(t, z_1, z_2) : t \in \mathbb{R}, |z_1| < z_1^0, |z_2| < z_2^0\}$ ($z_1^0, z_2^0 > 0$), если ряд $Z(t, z_1, z_2) = \sum_{m, n=0}^{\infty} Z^{(m, n)}(t) z_1^m z_2^n$ с вещественными, непрерывными и T -периодическими по t коэффициентами для всякого $t \in \mathbb{R}$ абсолютно сходится при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < z_1^0$, $|z_2| < z_2^0$.*

По существу, формула (0.1) задает две различные системы: в одной $\nu = 0$, в другой $\nu = 1$. Сравнивая, можно сказать, что система с $\nu = 1$, обычно называемая стандартной, имеет «быстрое» время, поскольку при сведении ее заменой времени к системе с $\nu = 0$ в последней получаем период, равный $T\varepsilon$, т. е. «медленное» время. Именно в этом заключается существенное отличие периодической системы (0.1) от автономной, в которой заменой времени всегда можно получить систему с $\nu = 0$.

Системой первого приближения или невозмущенной по отношению к системе (0.1) будем называть автономную систему

$$\dot{x} = \gamma(y^3 - y)\varepsilon^\nu, \quad \dot{y} = -(x^3 - x)\varepsilon^\nu. \quad (0.2)$$

Система (0.2) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H(x, y) = (x^4 - 2x^2 + \gamma(y^4 - 2y^2))\varepsilon^\nu/4.$$

Ее фазовая плоскость помимо девяти точек покоя (см. рис. 0.1), заполнена замкнутыми траекториями (циклами) и сепаратрисами.

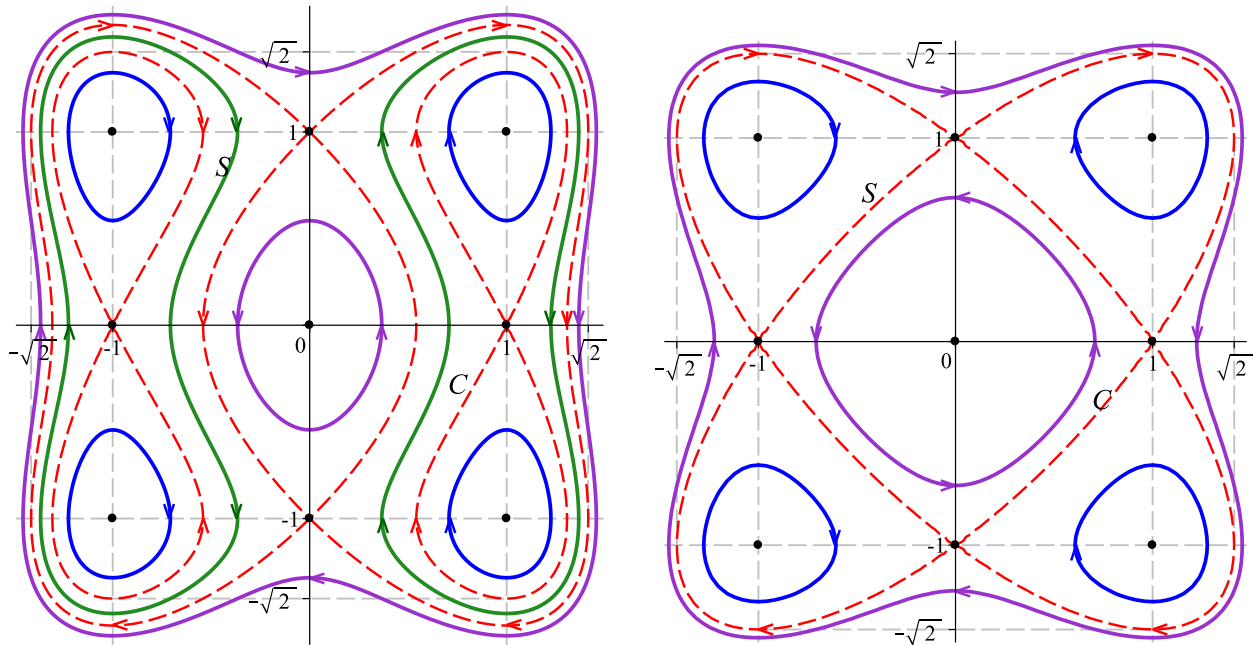


Рис. 0.1. Фазовые портреты невозмущенной системы (0.2) при $\gamma = 1/2$ и $\gamma = 1$.

Предлагаемая работа преследует две цели.

1. Конструктивное нахождение у системы (0.1) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ двумерных инвариантных поверхностей, гомеоморфных торах, если факторизовать время t по периоду.

В результате в работе в явном виде выписываются зависящие от γ условия на функции $X_0^\nu, X_1^0, Y_0^\nu, Y_1^0$, при выполнении которых в системе (0.1) указанные инвариантные поверхности имеются, и представляется асимптотическое разложение каждой такой инвариантной поверхности по степеням малого параметра (см. теорему 6.1). В качестве примера приводится класс 2π -периодических систем вида (0.1), среднее значение возмущения в которых при $\varepsilon = 0$ не имеет членов выше третьего порядка, и любая система как с $\nu = 0$, так и с $\nu = 1$, при достаточно малых значениях ε сохраняет одиннадцать инвариантных торов (см. теорему 7.1).

Полученные результаты позволяют обобщить понятие «числа Гильберта» на системы с периодическим возмущением и осуществить оценку числа Гильберта снизу для системы (0.1), чему посвящено большое количество

работ для автономных систем в рамках решения сформулированной в [1] В. И. Арнольдом «ослабленной XVI проблемы Гильберта» (см. п. 0₄).

2. Описание метода, реализующего выполнение первой цели, который мы назвали методом выделения порождающих торов (кратко — методом ВПТ), и демонстрация его применения на примере системы (0.1).

Дело в том, что предлагаемый метод ВПТ представляет самостоятельный интерес, поскольку позволяет находить инвариантные торы в периодических системах с практически любыми автономными невозмущенными гамильтоновыми частями, конечно такими, у которых, как минимум, можно найти нули гамильтониана, но, желательно, и сепаратрисы, т. е. построить фазовый портрет невозмущенной системы. В противном случае теряется возможность практического нахождения сохраняющихся инвариантных поверхностей.

0.2 Алгоритм метода ВПТ

Метод ВПТ может применяться к исходной (возмущенной) T -периодической системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \dot{H}(x, y, \gamma)}{\partial y} \varepsilon^\nu + \dot{X}^\nu(t, x, y, \varepsilon) \varepsilon^\nu, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \dot{H}(x, y, \gamma)}{\partial x} \varepsilon^\nu + \dot{Y}^\nu(t, x, y, \varepsilon) \varepsilon^\nu \end{aligned} \quad (0.3)$$

в которой $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\nu = 0, 1$, полиномиальный (возможно, вещественно-аналитический) относительно x, y гамильтониан \dot{H} допускает, как это часто бывает при исследовании автономных систем, зависимость от параметра γ , принадлежащего некоторому промежутку $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ (возможно, γ — вектор), а условия на возмущенную часть системы (0.3) непосредственно зависят от вида $\dot{H}(x, y, \gamma)$ и накладываются на младшие члены разложения в ряд по степеням ε непрерывных по совокупности аргументов, T -периодических по t функций \dot{X}^ν, \dot{Y}^ν . В частности, всегда предполагается, что

$$\dot{X}_0^\nu(t, x, y) = \dot{X}^\nu(t, x, y, 0), \quad \dot{Y}_0^\nu(t, x, y) = \dot{Y}^\nu(t, x, y, 0) \quad (0.4)$$

являются функциями, равномерно относительно t вещественно-аналитическими по x, y в некоторой области $D_{\sigma, \sigma}^{x, y} = \{(t, x, y) : t \in \mathbb{R}, |x|, |y| < \sigma\}$ с $\sigma > \sigma_0 > 0$.

Наряду с системой (0.3) рассматривается невозмущенная по отношению к ней автономная система

$$\dot{x} = \frac{\partial \dot{H}(x, y, \gamma)}{\partial y} \varepsilon^\nu, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \dot{H}(x, y, \gamma)}{\partial x} \varepsilon^\nu, \quad (0.5)$$

для которой при каждом значении γ можно построить фазовый портрет, находя из общего интеграла $\dot{H}(x, y, \gamma) = a$ значения свободной константы a , отвечающие точкам покоя, сепаратрисам и замкнутым траекториям.

В дальнейшем через (x_*, y_*) будем обозначать произвольную особую точку системы (0.5), не исключая ситуацию, когда $(x_*, y_*) = (x_*(\gamma), y_*(\gamma))$.

В статье в качестве объекта применения метода ВПТ используются возмущенная система (0.1), для правой части которой указаны ограничения, достаточные для реализации метода, и невозмущенная система (0.2), произвольная особая точка которой $(x_*, y_*) = (k, l)$ ($k, l \in \{0, \pm 1\}$).

Описание алгоритма метода ВПТ удобно разбить на шесть частей, выделяя наклонным шрифтом в конце каждой части пояснения, отсылающие к системе (0.1) и любым связанным с ней объектам. При этом номера частей соответствуют номерам разделов в которых метод ВПТ со всеми доказательствами реализуется для системы (0.1).

1) Параметризация циклов. Параметризация каждого класса замкнутых траекторий невозмущенной системы (0.5), расположенного между сепаратрисами или вне замкнутого «сепаратрисного контура», осуществляется, учитывая ее автономность, решениями задач Коши системы

$$\frac{d\dot{C}}{d\varphi} = \frac{\partial \dot{H}(\dot{C}, \dot{S}, \gamma)}{\partial \dot{S}}, \quad \frac{d\dot{S}}{d\varphi} = -\frac{\partial \dot{H}(\dot{C}, \dot{S}, \gamma)}{\partial \dot{C}}, \quad (0.6)$$

с начальными данными $\dot{C}(0) = b_C(\tau)$, $\dot{S}(0) = b_S(\tau)$, когда в любом из существующих классов произвольный цикл Γ^τ взаимно однозначно определяется величиной τ из явного выделенного множества \mathcal{T} , являющегося объединением интервалов, на которых определены непрерывные функции b_C и b_S . Эти решения являются ненормированным аналогом введенных А. М. Ляпуновым в [2, стр. 290] обобщенных синусов и косинусов. При этом для любого цикла необходимо иметь возможность вычислять период $\dot{\omega}$ параметризующего его вещественно-аналитического решения $(\dot{C}(\varphi), \dot{S}(\varphi))$. Понятно, что функции C, S , множество \mathcal{T} и все вводимые в дальнейшем объекты зависят от γ . На эту зависимость мы будем при необходимости обращать внимание.

Циклы невозмущенной системы (0.2) при $\gamma \in (0, 1)$ — невырожденный случай — в соответствии с расположением сепаратрис разбиваются на классы: $0], 1], 2]$. На рис. 0.1 при $\gamma = 1/2$ они окрашены соответственно фиолетовым, зеленым и синим цветом, а при $\gamma = 1$ — в вырожденном случае — часть сепаратрис «склеивается», и класс $1]$ (зеленый) отсутствует. При этом класс циклов $0]$ разбивается на внешний подкласс $0^e]$ и внутренний подкласс $0^i]$.

Циклы параметризуются вещественно-аналитическими ω_{kl} -периодическими решениями $CS_{kl}(\varphi) = (C(\varphi), S(\varphi))$ задачи Коши системы (1.1)

$$C'(\varphi) = \gamma(S^3(\varphi) - S(\varphi)), \quad S'(\varphi) = -(C^3(\varphi) - C(\varphi))$$

с начальными данными $C(0) = b_{kl}$, $S(0) = l$ ($k, l = 0, \pm 1$, $(k, l) \neq (0, \pm 1)$), где величина $|k| + |l|$ задает номер класса, к которому относится параметризуемый цикл, границы изменения b_{kl} и l определены в (1.4), а периоды решений — в (1.7). Таким образом, $b_C(\tau) = \tau = b_{kl}$, $b_S(\tau) = l$.

2) Переход в окрестность замкнутой траектории произвольного цикла. Эта часть алгоритма посвящена конструированию и выполнению в исходной системе (0.3) так называемой специальной полярной замены

$$x = \phi_{x_*}(\varphi, \rho), \quad y = \phi_{y_*}(\varphi, \rho) \quad (|\rho| \leq \rho_* < 1), \quad (0.7)$$

где $\phi_{x_*} = \dot{C}(\varphi) + (\dot{C}(\varphi) - x_*)\rho$, $\phi_{y_*} = \dot{S}(\varphi) + (\dot{S}(\varphi) - y_*)\rho$, осуществляющей переход в окрестность произвольного цикла системы (0.2), наблюдаемого из произвольно выбранной точки покоя (x_*, y_*) , которую он охватывает.

Формально, замена (0.7) приводит (0.3) к системе в специальных полярных координатах, или «полярной» системе

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\dot{\alpha}^{-1}(\varphi)(\dot{\mathcal{P}}(\varphi, \rho) + \varepsilon \dot{\mathcal{R}}^\nu(t, \varphi, \rho, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \\ \dot{\varphi} &= \dot{\alpha}^{-1}(\varphi)(\dot{\mathcal{Q}}(\varphi, \rho) + \varepsilon \dot{\mathcal{S}}^\nu(t, \varphi, \rho, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \end{aligned} \quad (0.8)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(\varphi) &= \dot{C}'(\varphi)(\dot{S}(\varphi) - y_*) - \dot{S}'(\varphi)(\dot{C}(\varphi) - x_*); \\ \dot{\mathcal{P}} &= \dot{C}' \frac{\partial \dot{H}(\phi_{x_*}, \phi_{y_*}, \gamma)}{\partial x} + \dot{S}' \frac{\partial \dot{H}(\phi_{x_*}, \phi_{y_*}, \gamma)}{\partial y}, \\ \dot{\mathcal{R}}^\nu &= -\dot{C}''\dot{Y}^\nu(t, \phi_{x_*}, \phi_{y_*}, \varepsilon) + \dot{S}''\dot{X}^\nu(t, \phi_{x_*}, \phi_{y_*}, \varepsilon); \\ \dot{\mathcal{Q}} &= (1 + \rho)^{-1} \left((\dot{S} - y_*) \frac{\partial \dot{H}(\phi_{x_*}, \phi_{y_*}, \gamma)}{\partial y} + (\dot{C} - x_*) \frac{\partial \dot{H}(\phi_{x_*}, \phi_{y_*}, \gamma)}{\partial x} \right), \\ \dot{\mathcal{S}}^\nu &= (1 + \rho)^{-1} \left((\dot{S} - y_*) \dot{X}^\nu(t, \phi_{x_*}, \phi_{y_*}, \varepsilon) - (\dot{C} - x_*) \dot{Y}^\nu(t, \phi_{x_*}, \phi_{y_*}, \varepsilon) \right), \end{aligned}$$

причем $\dot{\mathcal{P}}(\varphi, 0) \equiv 0$, $\dot{\mathcal{Q}}(\varphi, 0) = \dot{\alpha}(\varphi)$, поскольку в (0.7) $\phi_{x_*}(\varphi, 0) = \dot{C}(\varphi)$, $\phi_{y_*}(\varphi, 0) = \dot{S}(\varphi)$, и все функции, входящие в систему, являются вещественно-аналитическими, ω_* -периодическими функциями φ .

Аналоги специальных полярных координат ρ, φ были названы В. И. Арнольдом в [3, § 50] «действие – угол», а мы будем называть как переменные ρ, φ , так и переменные, получаемые из них в результате последующих замен, соответственно радиальными и угловыми.

При переходе к системе (0.8) дополнительно требуется:

а) для любой точки (x_*, y_*) исследование функций $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\varphi, x_*, y_*)$, по сути отвечающих за монотонность изменения угловой переменной.

Несмотря на то, что движение по замкнутым траекториям из некоторой окрестности выбранного цикла, получаемого при $\rho = 0$, наблюдается из лежащей внутри него точки покоя (x_*, y_*) , близость цикла к изоклине, имеющей на некотором участке большую кривизну, может привести к знакопеременности $\dot{\alpha}(\varphi)$. Чтобы исключить подобную ситуацию, в (0.6) придется сужать область определения \mathcal{T} функций $b_C(\tau)$ и $b_S(\tau)$ на некоторое множество $\mathcal{T}_\gamma^\diamond \subset \mathcal{T}$ так, чтобы ближайшие к сепаратрисе «плохие» траектории из соответствующего класса были удалены;

б) получение оценки снизу числа ρ_* , при выполнении которой подстановка (0.7) в систему (0.3) возможна, и система (0.8) будет обладать теми же свойствами, что и система (0.3), а также, что все циклы невозмущенной системы (0.5) при указанных τ относятся к тому же классу, что и выбранный цикл, получаемый в замене (0.7) при $\rho = 0$.

Еще раз подчеркнем, что любая система (0.8) является представителем однопараметрического с параметром $\tau \in \mathcal{T}_\gamma^\diamond$ семейства полярных систем. Все входящие в нее функции, начиная с $\dot{C}(\varphi)$ и $\dot{S}(\varphi)$, однозначно зависят от τ , задающего начальные данные $\dot{C}(0) = b_C(\tau)$, $\dot{S}(0) = b_S(\tau)$.

Для перехода в окрестность произвольного цикла, охватывающего любую из девяти особых точек (k, l) ($k, l \in \{-1, 0, 1\}$) невозмущенной системы (0.2), в системе (0.1) производится специальная полярная замена (2.6)

$$x = C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\rho, \quad y = S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\rho \quad ((k, l) \neq (0, \pm 1), \quad |\rho| \leq \rho_* < 1).$$

Проверка показала, что монотонность изменения угловой переменной нарушается при попытке перехода в окрестность некоторых циклов из класса 1] (см. лемму 3.1), охватывающих точку $(1, 0)$ или $(-1, 0)$. Эти циклы удалось конструктивно выделить и исключить из рассмотрения, сузив ин-

тервалы, в которых могут изменяться начальные данные параметризующих эти циклы решений задач Коши. Поэтому в замене (2.6) для решения $CS_{kl}(\varphi) = (C(\varphi), S(\varphi))$ системы (1.1) границы изменения начальных данных $b_{10}, b_{-1,0}$, приведенных в (1.4), уточнены в (2.5).

В лемме 2.3 доказано, что замена (2.6) при условии (2.7) на ρ^* преобразует исходную возмущенную систему (0.1) в полярную систему (2.8)

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(\mathcal{P}(\varphi, \rho) + \varepsilon \mathcal{R}_{kl}^{\nu}(t, \varphi, \rho, \varepsilon))\varepsilon^{\nu}, \\ \dot{\varphi} &= \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(\mathcal{Q}(\varphi, \rho) + \varepsilon \mathcal{S}_{kl}^{\nu}(t, \varphi, \rho, \varepsilon))\varepsilon^{\nu},\end{aligned}$$

являющуюся частным случаем системы (0.8), в которой

$$\begin{aligned}\alpha_{kl} &= C'(\varphi)(S(\varphi) - l) - S'(\varphi)(C(\varphi) - k); \\ \mathcal{P} &= \alpha'_{kl}(\varphi)\rho + p_{kl}^*(\varphi)\rho^2 + \check{p}_{kl}^*(\varphi)\rho^3, \\ \mathcal{Q} &= (1 + \rho)^{-1}(\alpha_{kl}(\varphi) + q_{kl}^*(\varphi)\rho + \check{q}_{kl}^*(\varphi)\rho^2), \\ \mathcal{R}_{kl}^{\nu} &= -C'Y^{\nu}(\mathfrak{x}_{\rho}) + S'X^{\nu}(\mathfrak{x}_{\rho}), \\ \mathcal{S}^{\nu} &= (1 + \rho)^{-1}((S - l)X^{\nu}(\mathfrak{x}_{\rho}) - (C - k)Y^{\nu}(\mathfrak{x}_{\rho})),\end{aligned}$$

$p_{kl}^*, \check{p}_{kl}^*, q_{kl}^*, \check{q}_{kl}^*$ — вещественно-аналитические, ω_{kl} -периодические функции, аргумент $\mathfrak{x}_{\rho} = (t, C + (C - k)\rho, S + (S - l)\rho, \varepsilon)$.

3) Первичное радиальное усреднение. В невозмущенной части $\dot{\mathcal{P}}(\varphi, \rho)$ радиального уравнения полученной специальной полярной системы (0.8) необходимо осуществить усредняющую замену

$$\rho = \dot{\alpha}^{-1}(\varphi)(r + \dot{\beta}(\varphi)r^2) \quad (0.9)$$

с вещественно-аналитической, $\dot{\omega}$ -периодической функцией $\dot{\beta}(\varphi)$.

Используя идею доказательства леммы 3.1, можно показать, что при должном выборе $\dot{\beta}$ замена (0.9) позволяет аннулировать линейный и квадратичный по ρ члены в радиальном уравнении.

После этого в возмущенной части полученной системы необходимо выделить свободный и линейные члены по радиальной переменной и параметру ε , записав систему в виде

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ((\dot{R}^{\nu}(t, \varphi) + (\dot{R}^{\nu})'_r(t, \varphi)r + (\dot{R}^{\nu})'_\varepsilon(t, \varphi)\varepsilon) + \dot{R}^{\nu*}(t, \varphi, r, \varepsilon))\varepsilon^{\nu}, \\ \dot{\varphi} &= (1 + \dot{q}(\varphi)r + \dot{\Phi}^{\nu}(t, \varphi)\varepsilon + \dot{\Phi}^{\nu*}(t, \varphi, r, \varepsilon))\varepsilon^{\nu},\end{aligned} \quad (0.10)$$

где $\dot{R}^\nu, (\dot{R}^\nu)'_r, (\dot{R}^\nu)'_\varepsilon(t, \varphi), \dot{\Phi}^\nu$ — дупериодические, вещественно-аналитические по φ функции, $R_{kl}^{\nu*} = O((|r| + \varepsilon)^3)$, $\Phi_{kl}^{\nu*} = O((|r| + \varepsilon)^2)$, в частности, согласно (0.9), (0.8), (0.7) и (0.4)

$$\dot{R}^\nu(t, \varphi) = \dot{C}'\dot{Y}_0^\nu(t, \dot{C}', \dot{S}') - \dot{S}'\dot{X}_0^\nu(t, \dot{C}', \dot{S}'). \quad (0.11)$$

В лемме 3.1 доказано, что радиально-усредняющая замена (3.1)

$$\rho = \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(r + \beta_{kl}(\varphi)r^2), \quad \beta_{kl} = \int_0^\varphi (\alpha_{kl}^{-1}(s)(\alpha'_{kl}(s)q_{kl}(s) - p_{kl}(s))) ds,$$

где $|r| \leq r_* < 1$, $p_{kl} = \alpha_{kl}^{-1}(3\gamma CS((S^2 - 1)(C - k)^2 - (C^2 - 1)(S - l)^2))$, $q_{kl} = \alpha_{kl}^{-2}((C - k)^3(2C + k) + \gamma(S - l)^3(2S + l))$, преобразует специальную полярную систему (2.8) в систему (3.7) (частный случай (0.10))

$$\begin{aligned} \dot{r} &= ((R_{kl}^\nu(t, \varphi) + R_{klr}^{\nu'}(t, \varphi)r + R_{kl\varepsilon}^{\nu'}(t, \varphi)\varepsilon)\varepsilon + R_{kl}^{\nu*}(t, \varphi, r, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \\ \dot{\varphi} &= (1 + q_{kl}(\varphi)r + \Phi_{kl}^\nu(t, \varphi)\varepsilon + \Phi_{kl}^{\nu*}(t, \varphi, r, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \end{aligned}$$

где

$$R_{kl}^\nu(t, \varphi) = C'Y_0^\nu(t, C, S) - S'X_0^\nu(t, C, S),$$

$$\Phi_{kl}^\nu(t, \varphi) = \alpha_{kl}^{-1}((S - l)X_0^\nu(t, C, S) - (C - k)Y_0^\nu(t, C, S)),$$

функции $R_{klr}^{\nu'}, R_{kl\varepsilon}^{\nu'}$ описаны в (3.5); $R_{kl}^{\nu*} = O((|r| + \varepsilon)^3)$, $\Phi_{kl}^{\nu*} = O((|r| + \varepsilon)^2)$; $R_{kl}^{\nu*}, \Phi_{kl}^{\nu*} \in C_{t, \varphi, r, \varepsilon}^{0,1,1,0}(G_{\mathbb{R}, r_*, \varepsilon_0}^{\varphi, r, \varepsilon})$, $G_{\mathbb{R}, r_*, \varepsilon_0}^{\varphi, r, \varepsilon} = \{(t, \varphi, r, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4: |r| \leq r_*, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$.

4) Порождающее уравнение и порождающие циклы. Выберем в невозмущенной системе (0.2) произвольную особую точку (x_*, y_*) и произвольный цикл $\Gamma^\tau = \Gamma_{x_*, y_*}^\tau$, охватывающий точку (x_*, y_*) и параметризуемый решением задачи Коши системы (0.6) с начальными данными $\dot{C}(0) = b_C(\tau)$, $\dot{S}(0) = b_S(\tau)$, где $\tau \in \mathcal{T}_\gamma^\diamond$. Тогда дуги интегральных кривых решений системы (0.10) расположены в некоторой окрестности цикла Γ^τ .

Покажем теперь, как из семейства циклов Γ^τ выделить набор так называемых *порождающих циклов* Γ^{τ_μ} ($\mu = 1, 2, \dots$), являющихся образующими двумерных цилиндрических поверхностей CIS^{τ_μ} , в малой по ε окрестности которых при любом малом ε лежит дупериодическая по t и φ цилиндрическая инвариантная поверхность TIS^{ν, τ_μ} , гомеоморфная тору, если факторизовать время t по периоду.

Конечно, может так оказаться, что система (0.1) с выбранным возмущением не будет иметь предельных циклов, охватывающих особую точку

(x_*, y_*) невозмущенной системы. Это значит, что надо искать возмущение, при котором предельные циклы не только появятся, но и, следуя цели нашей работы, их окажется максимально большое количество.

Учитывая, что в системе (0.10) радиальное уравнение имеет вид $\dot{\varphi} = 1 + \dots$ при $\nu = 0$ и $\dot{\varphi} = \varepsilon + \dots$ при $\nu = 1$, последующие усредняющие замены и условия для их существования будут зависеть от ν .

В этой связи для непрерывных, T -периодических по t , ω -периодических по φ функций $\eta^\nu(t, \varphi)$ будем использовать разложение

$$\eta^\nu(t, \varphi) = \bar{\eta}^\nu + \widehat{\eta}^\nu(\varphi) + \widetilde{\eta}^\nu(t, \varphi) \quad (\nu = 0, 1),$$

$$\text{где } \bar{\eta}^\nu = \frac{1}{\omega T} \int_0^\omega \int_0^T \eta^\nu(t, \varphi) dt d\varphi, \quad \widehat{\eta}^0 = 0, \quad \widehat{\eta}^1 = \frac{1}{T} \int_0^T \eta^1(t, \varphi) dt - \bar{\eta}^1.$$

Запишем функцию $\dot{R}^\nu = \dot{R}_\tau^\nu$, введенную (0.11), в виде

$$\dot{R}_\tau^\nu = \overline{\dot{R}_\tau^\nu} + \widehat{\dot{R}_\tau^\nu}(\varphi) + \widetilde{\dot{R}_\tau^\nu}(t, \varphi), \quad \overline{\dot{R}_\tau^\nu} = \frac{1}{T\dot{\omega}_\tau} \int_0^{\dot{\omega}_\tau} \int_0^T \dot{R}_\tau^\nu(t, \varphi) dt d\varphi. \quad (0.12)$$

Главную роль в нахождении начальных данных $b_C(\tau_\mu) = \dot{C}(0)$, $b_S(\tau_\mu) = \dot{S}(0)$ решения $(\dot{C}(\varphi), \dot{S}(\varphi))$, параметризующего предельный цикл, играет так называемое *порождающее* интегральное уравнение

$$\overline{\dot{R}_\tau^\nu} = 0, \quad \text{или} \quad \int_0^{\dot{\omega}_\tau} \int_0^T (\dot{C}' \dot{Y}_0^\nu(t, \dot{C}', \dot{S}') - \dot{S}' \dot{X}_0^\nu(t, \dot{C}', \dot{S}')) dt d\varphi = 0, \quad (0.13)$$

решения которого должны принадлежать множеству \mathcal{T}^\diamond .

Для выбранной из однопараметрического семейства систем (0.10) системы с $\tau = \tau^*$ и периодом $\dot{\omega}_{\tau^*}$, где $\tau^* \in \mathcal{T}_\gamma^\diamond$ — любое решение уравнения (0.13), должно выполняться так называемое *условие невырожденности*:

$$\dot{K}_{\tau^*}^\nu \neq 0; \quad \dot{K}_{\tau^*}^0 = \overline{\dot{R}_{\tau^*r}^{0'} - \widetilde{g}_{\tau^*}^{0'} \dot{q}}, \quad \dot{K}_{\tau^*}^1 = \overline{\dot{R}_{\tau^*r}^{1'} - \widehat{\dot{R}_{\tau^*}^1} \dot{q}}. \quad (0.14)$$

В формуле для константы $\dot{K}_{\tau^*}^0$ в (0.14) используется производная функции $\widetilde{g}_{\tau^*}^0(t, \varphi)$. Сама функция $\widetilde{g}_{\tau^*}^0$ по лемме 4.1 является единственным решением уравнения

$$\dot{\widetilde{g}}_{\tau^*}^0(t, \varphi) + \widetilde{g}_{\tau^*}^{0'}(t, \varphi) = \widetilde{\dot{R}_{\tau^*}^0}(t, \varphi) \quad (0.15)$$

и обладает теми же свойствами, что и правая часть (0.15), если периоды T и $\dot{\omega}_{\tau^*}$ удовлетворяют *условию Зигеля*:

$$|m\omega_{\tau^*} + nT| > \vartheta(|m| + |n|)^{-3} \quad (\vartheta > 0; m, n \in \mathbb{Z}, m^2 + n^2 \neq 0).$$

Отметим, что функция $\tilde{g}_{\tau^*}^0(t, \varphi)$ и константы K_{kl}^ν согласно формулам (0.10) зависят только от \dot{H} и возмущений \dot{X}_0, \dot{Y}_0 системы (0.1).

Корень τ^* порождающего уравнения (0.13) будем называть *допустимым* для системы (0.3) и обозначать τ_* , если после выбора $\tau = \tau_*$ в системе (0.10) и во всех предшествующих заменах и системах при $\nu = 0$ периоды $T, \dot{\omega}_{\tau_*}$ удовлетворяют условию Зигеля и как при $\nu = 0$, так и при $\nu = 1$, выполняется условие невырожденности (0.14).

Применяя предложенный план к системе (3.7)

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ((R_{kl}^\nu(t, \varphi) + R_{klr}^{\nu'}(t, \varphi)r + R_{kl\varepsilon}^{\nu'}(t, \varphi)\varepsilon) + R_{kl}^{\nu*}(t, \varphi, r, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \\ \dot{\varphi} &= (1 + q_{kl}(\varphi)r + \Phi_{kl}^\nu(t, \varphi)\varepsilon + \Phi_{kl}^{\nu*}(t, \varphi, r, \varepsilon))\varepsilon^\nu,\end{aligned}$$

полученной из полярной системы (2.8), в разделе 4 находим допустимые корни порождающего уравнения (4.11) $\overline{R_{kl}^\nu}(b_{kl}) = 0$ (см. определение 4.1).

Зафиксируем теперь произвольный допустимый корень b_{kl}^* , а с ним вместе порождающий цикл, относящийся к одному из трех классов, специальную полярную систему (2.8), описывающую движения в малой окрестности этого цикла, и частично усредненную систему (3.7).

Все последующие замены и системы также фиксируются выбором b_{kl}^* . В частности, для них выполняются условия (4.1) и (4.10), и в системе (3.7) функция $R_{kl}^\nu(t, \varphi)$, введенная в (3.5), имеет нулевое среднее значение (4.8).

Рассуждения, приведенные в разделах 5 и 6, позволят доказать существование инвариантного тора, сохранившегося в возмущенной системе (0.1) при любых малых ε в известной близости от порождающего цикла.

5) Построение инвариантной поверхности. Проведенная работа привела к тому, что после выбора и фиксации допустимого корня $\tau_* = b_{kl}^*$ полученная из системы (0.3) с произвольным гамильтонианом \dot{H} система (0.10), фактически, совпала с исследуемой далее системой (3.7) из раздела 3₂, полученной из системы (0.1), гамильтониан невозмущенной части которой является частным случаем гамильтониана \dot{H} . Остается только ввести общие обозначения.

В дальнейшем нижний индекс функций и констант $_{kl}$, означающий фиксацию корня b_{kl}^* для системы (0.1), будем для краткости заменять нижним индексом $_*$, например, $R_{kl}^\nu = R_*^\nu$, $K_{kl}^\nu = K_*^\nu$, $q = q_*$. Также поступим с нижним индексом $_{\tau^*}$ и верхним индексом $\{\cdot\}$ во всех заменах и системах, связанных с системой (0.3).

На данном этапе алгоритм заключается в построении ряда замен, сводящих систему (3.7) (или (0.10)) к системе, для которой удастся доказать теорему о существовании двупериодической инвариантной поверхности.

Сделаем последовательно три замены переменных:

1) двупериодическую по t и φ замену (5.3)

$$r = u + G_{\star}^{\nu}(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon + H_{\star}^{\nu}(t, \varphi, \varepsilon)u\varepsilon + F_{\star}^{\nu}(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon^2,$$

завершающую усреднения в уравнении для радиальной переменной, а именно: усредняющую в системе (3.7) функции R_{kl}^{ν} и R_{klr}^{ν} .

Замена (5.3) согласно лемме 5.1 приводит к системе (5.4)

$$\dot{u} = (K_{\star}^{\nu}u\varepsilon + U_{\star}^{\nu}(t, \varphi, u, \varepsilon))\varepsilon^{\nu},$$

$$\dot{\varphi} = (1 + \Theta_{\star}^{\nu}(t, \varphi)\varepsilon + q_{\star}(\varphi)u + \check{\Phi}_{\star}^{\nu}(t, \varphi, u, \varepsilon))\varepsilon^{\nu},$$

в которой K_{\star}^{ν} — ненулевая константа из условия невырожденности;

2) двупериодическую замену по t и φ (5.6)

$$\varphi = \psi + \Delta_{\star}^{\nu}(t, \psi, \varepsilon)\varepsilon,$$

усредняющую согласно лемме 5.2 в уравнении для угловой переменной системы (5.4) функцию Θ_{\star}^{ν} ;

3) масштабирующую замену (5.9)

$$u = v\varepsilon^{3/2} \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*),$$

которая согласно лемме 5.3 приводит к системе (5.10)

$$\dot{v} = (K_{\star}^{\nu}v\varepsilon + V_{\star}^{\nu}(t, \psi, v, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^{\nu},$$

$$\dot{\psi} = (\mathcal{K}_{\star\varepsilon}^{\nu} + \Psi_{\star}^{\nu}(t, \psi, v, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^{\nu},$$

в которой $\mathcal{K}_{\star\varepsilon}^{\nu} = 1 + \overline{\Theta}_{\star}^{\nu}\varepsilon > 0$; $V_{\star}^{\nu} = O((|v|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^3)\varepsilon^{-3}$, $\Psi_{\star}^{\nu} = q_{\star}(\psi)v + O((|v|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^2)\varepsilon^{-3/2}$ — непрерывные, двупериодические по t и ψ функции класса $C_{t,\psi,v,\varepsilon}^{0,1,1,0}(G_{\mathbb{R},v_*,\varepsilon_*}^{\psi,v,\varepsilon})$, где $G_{\mathbb{R},v_*,\varepsilon_*}^{\psi,v,\varepsilon} = \{(t, \psi, v, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4: |v| \leq v_*, \varepsilon \in [0, \varepsilon_*]\}$.

Для системы (5.10) существуют две константы: M ограничивает сверху $|V_{\star}^{\nu}|$ и $|\Psi_{\star}^{\nu}|$, L — глобальная константа Липшица по ψ и v для V_{\star}^{ν} и Ψ_{\star}^{ν} , что позволяет при должном уменьшении ε_* добиться выполнения неравенств (5.12) $\mathcal{M} = M/|K_{\star}^{\nu}| \leq v_*\varepsilon_*^{-1/2}$, $\mathcal{L} = 4L/|K_{\star}^{\nu}| \leq \varepsilon_*^{-1/2}$;

4) завершающую масштабирующую замену (5.13)

$$v = z\varepsilon^{1/2} \quad (|z| \leq v_*\varepsilon_*^{-1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*),$$

преобразующую систему (5.10) в систему (5.14)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (K_\star^\nu z + V_\star^\nu(t, \psi, z\varepsilon^{1/2}, \varepsilon))\varepsilon^{\nu+1}, \\ \dot{\psi} &= (\mathcal{K}_{\star\varepsilon}^\nu + \Psi_\star^\nu(t, \psi, z\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu.\end{aligned}$$

Для системы (5.10) установлен следующий ключевой результат.

Теорема 5.1. Система (5.14) при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star]$ имеет двумерную инвариантную поверхность (5.15) $z = A_\varepsilon^\nu(t, \psi)$ ($t, \psi \in \mathbb{R}$), параметризуемую непрерывной, T -периодической по t , ω_\star -периодической и удовлетворяющей условию Липшица по ψ с глобальной константой \mathcal{L} функцией A_ε^ν , причем $\max_{t, \psi \in \mathbb{R}} |A_\varepsilon^\nu(t, \psi)| \leq \mathcal{M}$, где \mathcal{M} и \mathcal{L} введены в (5.12).

Затем в леммах 5.4–5.6 описаны свойства инвариантной поверхности (5.15), а именно: ее асимптотическая устойчивость, а также гладкость по ψ и непрерывность по ε функции $A_\varepsilon^\nu(t, \psi)$.

Отметим, что при $\nu = 0$ в основе доказательства как теоремы 5.1, как и теоремы 1, доказанной Ю. Н. Бибиковым в [4, гл. 1], лежат идеи, использовавшиеся при доказательстве лемм Хейла в [5].

6) Теоретические результаты. Здесь подводятся итоги применения к системе (0.1) метода ВПТ.

Сначала в лемме 6.1 доказывается, что полярная система (2.8) при любых b_{kl}^\star и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star]$ имеет двумерную инвариантную поверхность (6.1)

$$\rho = \Upsilon_\varepsilon^\nu(t, \varphi) \quad (t, \varphi \in \mathbb{R}),$$

параметризуемую непрерывной, T -периодической по t , непрерывно дифференцируемой и ω_\star -периодическую по φ функцией

$$\Upsilon_\varepsilon^\nu = \alpha_\star^{-1}(\varphi)(Z_\varepsilon^\nu(t, \varphi) + \beta_\star(\varphi)Z_\varepsilon^{\nu 2}(t, \varphi)),$$

где $Z_\varepsilon^\nu = G_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon + (A_\varepsilon^\nu(t, \varphi + \Omega_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon)(1 + H_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon) + F_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon))\varepsilon^2$. При этом Υ_ε^ν как функция ε ограничена и непрерывна по ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star)$, а также равномерно относительно t, φ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Затем доказывается основной теоретический результат статьи.

Теорема 6.1. Пусть b_{kl}^\star — произвольный допустимый корень из определения 4.1, тогда: 1) система (0.1) при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star]$ имеет двумерную инвариантную поверхность

$$TIS_\varepsilon^\nu = \{(x, y, t): x = x_\varepsilon(t, \varphi), y = y_\varepsilon(t, \varphi), t \in \mathbb{R} \quad (\varphi \in \mathbb{R})\}, \quad (0.16)$$

в которой $x_\varepsilon = C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\Upsilon_\varepsilon^\nu(t, \varphi)$, $y_\varepsilon = S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\Upsilon_\varepsilon^\nu(t, \varphi)$ — непрерывные, T -периодические по t , непрерывно дифференцируемые и ω_\star -периодические по φ функции, где $(C(\varphi), S(\varphi))$ — решение системы (1.1) с начальными данными $C(0) = b_{kl}^\star$, $S(0) = l$, а функция Υ_ε^ν из (6.1);

2) TIS_ε^ν , гомеоморфная двумерному тору, если факторизовать время t по периоду T , в указанном в лемме 5.4 смысле асимптотически устойчива при $t \rightarrow -\infty$, если в (4.10) $K_\star^\nu > 0$, а если $K_\star^\nu < 0$, то при $t \rightarrow +\infty$;

3) непрерывные по ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star)$ функции $x_\varepsilon(t, \varphi)$ и $y_\varepsilon(t, \varphi)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t и φ стремятся соответственно к $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$.

Таким образом, инвариантная поверхность TIS_ε^ν при малых ε расположена в сколь угодно малой окрестности цилиндрической поверхности CIS_\star из определения 4.2.

В разделе 6₂ метод ВПТ адаптируется для применения к автономным системам и с соответствующими поправками формулируются результаты, которые имеют место для автономных систем.

В автономном случае метод ВПТ естественно называть методом выделения предельных циклов (метод ВПЦ). Реализация метода ВПЦ выглядит значительно более простой в связи с тем, что в возмущенной системе всегда $\nu = 1$ и выполнение условия Зигеля не требуется.

На этом описание алгоритма метода ВПТ завершено.

0.3 Применение метода ВПТ к конкретным семействам систем

1. В разделе 7 «Практические результаты» сначала проводится анализ порождающего уравнения (4.11) периодической системы (0.1) и разрабатывается аппарат, позволяющий находить допустимые решения уравнения (4.11) как при $\nu = 0$, так и при $\nu = 1$. Затем выделяется конкретное семейство периодических систем (0.1), к которым применяется метод ВПТ.

Пусть в системе (0.1) ряды $X_0^\nu(t, x, y)$, $Y_0^\nu(t, x, y)$ записаны в виде (7.1) $X_0^\nu = \sum_{m,n=0}^{\infty} X_0^{(m,n)}(t)x^m y^n$, $Y_0^\nu = \sum_{m,n=0}^{\infty} Y_0^{(m,n)}(t)x^m y^n$ и $\overline{X_0^{(m,n)}}$, $\overline{Y_0^{(m,n)}}$ — средние значения коэффициентов. Тогда условия (7.3)

$$\begin{aligned} \gamma &= 1/2, \quad T = 2\pi, \quad \sigma > \sqrt{6}; \quad \nu = 1: \quad \overline{X_0^{(m,n)}} = 0, \quad \overline{Y_0^{(m,n)}} = 0, \\ &\text{кроме } \overline{Y_0^{(0,1)}} = -3.314, \quad \overline{Y_0^{(0,3)}} = -0.361, \quad \overline{Y_0^{(2,1)}} = 4.493; \\ \nu &= 0: \quad X_0^0 = \cos t, \quad Y_0^0 = \tau_0(y + \sin t) + \tau_1 y^3 + \tau_2(x^2 y + \sin t) \end{aligned}$$

позволяют выделить такое семейство систем (0.1), что для любой системы из этого семейства найдены одиннадцать интервалов, в каждом из которых лежит по одному допустимому корню порождающего уравнения (4.11) (см. лемму 7.1, теорему 7.1). Порождающие циклы невозмущенной системы (0.1) построены на рис. 7.2 при помощи пакета Maple.

Таким образом, при $\nu = 1$ повторен результат работы [6] по числу предельных циклов, но в [6] рассматривались только автономные системы, и возмущения в них имели большее количество слагаемых. Результаты, связанные с наличием одиннадцати инвариантных торов при $\nu = 0$, являются новыми.

Также в статье проведены исследования, связанные с оценкой правой границы промежутка $(0, \varepsilon_*]$, на котором прослеживается наличие предельных циклов. Теоретические результаты подтверждены визуально портретами интегральных кривых, выполненных при помощи пакета Maple при $\varepsilon_* = 0.05$, а при $\varepsilon_* = 0.001$ — при помощи таблиц пересечения спиралей с осью абсцисс в малых окрестностях порождающих циклов. Правда, для наглядности условия (7.3) накладывались на автономную систему (0.1).

2. Разработка и применение метода ВПТ для нахождения инвариантных торов в периодическом случае или предельных циклов в автономном случае проводились ранее в работах [7, 8, 9, 10], где метод ВПТ либо не имеет названия, либо называется «стандартным модифицированным» в связи с тем, что представляет собой существенную модификацию метода, примененного Ю. Н. Бибиковым в работе [11] к уравнению Дуффинга $\ddot{x} + x^3 + \varepsilon bx = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$, описывающему колебания осциллятора с бесконечно малой по отношению к амплитуде частотой колебаний.

В [7] методом ВПТ была исследована в известном смысле предшествующая (0.1) система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (-y + \varepsilon X(t, x, y, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \\ \dot{y} &= (x^3 - 2\varsigma x^2 + \eta x + \varepsilon Y(t, x, y, \varepsilon))\varepsilon^\nu,\end{aligned}\tag{0.17}$$

где $\varsigma = 0, 1$; $\eta = -1, 0, 1$ при $\varsigma = 0$ и $\eta \in \mathbb{R}^1$ при $\varsigma = 1$, а невозмущенная часть имеет гамильтониан $H = (x^4 - 8\varsigma x^3/3 + 2\eta x^2 + 2y^2)\varepsilon^\nu/4$.

Система (0.17) является обобщением системы, невозмущенная часть второго уравнения которой представляет собой однородный кубический многочлен относительно x, y и ε . Такая система была исследована в [8], где также был приведен пример класса систем, сохраняющих три инвариантных тора.

Именно в [8] метод ВПТ был впервые продемонстрирован в полном объеме. Отметим, что исследованное в [11] уравнение Дуффинга является частным случаем системы (0.17) при $\nu = 1$.

Метод ВПТ позволяет исследовать не только двумерные, но и многомерные периодические системы, и устанавливать бифуркации торов различных размерностей, ответвляющихся от точки покоя при любых достаточно малых значениях параметра.

На этом пути в [9] исследована система размерности $2n$ ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -\gamma_i y_i \varepsilon^\nu + X_i(t, x, y, \varepsilon) \varepsilon^{1+\nu}, \\ \dot{y}_i &= \gamma_i (x_i^3 - \eta_i x_i) \varepsilon^\nu + Y_i(t, x, y, \varepsilon) \varepsilon^{1+\nu},\end{aligned}$$

где $i = \overline{1, n}$, $\nu = 0, 1$, $\gamma_i \in (0, +\infty)$, $\eta_i = -1, 0, 1$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, а значит, ее невозмущенная часть имеет от одного до 3^n нулей.

Метод ВПТ позволил выписать условия на периодические возмущения, при которых в системе сохраняются инвариантные торы размерности $n + 1$. В качестве примера приведена четырехмерная система, для которой найдены шесть точек, через малую окрестность каждой из которой проходит своя трехмерная инвариантная поверхность, гомеоморфная тору.

Наконец, в работе [10], которую можно трактовать, как препринт данной статьи, авторами была исследована система (0.1), но при других ограничениях на возмущение в ее правой части. Кроме того, в [10] не ставилась задача найти системы, сохраняющие как можно большее число инвариантных торов.

К сожалению, позднее мы обнаружили пробелы в доказательствах, из-за которых при наложенных на исходную систему ограничениях ее не удастся свести к системе, имеющей по лемме Хейла инвариантные поверхности. Выяснилось, что при каждом преобразовании системы (0.1) необходимо в соответствующих «полосах» комплексной плоскости отслеживать вещественную аналитичность и двупериодичность определенных слагаемых в правых частях получаемых систем. И даже после этого не удастся «попасть» в условия известных теорем о существовании инвариантной поверхности (см. [5, 11]).

Указанные проблемы привели к появлению настоящей статьи и доказательству в ней аналога теорем о наличии инвариантной поверхности.

Уточнение. В перечисленных выше работах [7, 8, 9], как и в [10], на возмущения исследуемых периодических систем необходимо накладывать ограничения, аналогичные тем, что сделаны для системы (0.1), тогда все полученные в статьях результаты будут верны.

3. Приведем возможные области применения метода ВПТ.

a) Исследование периодических систем со все более сложными гамильтонианами, взятыми, например, из обзора [12] или нашей библиографии.

b) Применение метода ВПТ для усиления уже имеющихся результатов.

b₁) Самое очевидное — оценить число Гильберта в системе (0.17) из [7], частными случаями которой являются системы, исследуемые на предмет оценок числа Гильберта в работах [13] и [14]. Можно также исследовать системы с гамильтонианом из [15] и периодическими возмущениями.

b₂) В уже исследованных многомерных автономных системах с малым параметром использовать периодические или даже квазипериодические возмущения, как это делается в работах [11, 8] в предположении, что базисные частоты удовлетворяют условию диофантового типа (условию Зигеля на «малые знаменатели»). Например, периодические возмущения можно рассмотреть в системах с невозмущенными частями $(x_2, -x_1^{2n-1}, x_4, -x_3^{2n+1})$ из [16] или $(x_{1+d}, -x_1^{2n-1}, \dots, x_{2d}, -x_d^{2n-1})$ с $d \geq 2$ из [17].

b₃) Отдельный интерес представляет возможность построения инвариантного тора той же размерности, что и сама система. Для этого надо в системе порядка 2^d из [18], где конструктивно построен класс автономных систем, в том числе полиномиальных, в которых происходит бифуркация рождения инвариантного тора коразмерности единица, рассмотреть периодические или квазипериодические возмущения.

Следует отметить, что алгоритм, позволяющий находить бифуркации инвариантных торов различных размерностей, ответвляющихся от точки покоя разработан Ю. Н. Бибиковым (см. напр. [4]).

c) Применение метода ВПТ для систем, в которых ищутся критические периоды. Например, можно исследовать систему из [19]

$$\dot{x} = y \prod_{j=1}^k ((y - \alpha_j)^2 + \varepsilon), \quad \dot{y} = -x \prod_{j=1}^k ((x - \beta_j)^2 + \varepsilon).$$

0.4 Описание альтернативных методов

Рассмотрим автономную систему с гамильтонианом \mathcal{H} , задающим ее невозмущенную часть:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}(u, v)}{\partial v} + \varepsilon P(u, v), \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}(u, v)}{\partial u} + \varepsilon Q(u, v), \quad (0.18)$$

в которой \mathcal{H}, P, Q — полиномы степеней n, m_1, m_2 с вещественными коэффициентами, $\varepsilon \geq 0$ — малый параметр.

Очевидно, что система (0.18) является частным случаем системы (0.1), а точнее, автономной системы (0.1^a) из раздела 6.2.

Согласно теореме Понтрягина-Пуанкаре (ее формулировку можно найти, например, в [12, теорема 6.1]) число нулей функции

$$I(h) = \int \int_{\mathcal{H} \leq h} \left(\frac{\partial P(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial Q(u, v)}{\partial v} \right) du dv,$$

задает верхнюю оценку числа предельных циклов системы (0.18), сохранившихся при возмущении системы (0.18) с $\varepsilon = 0$, обозначаемую $N(n, m) = N(n, m, \mathcal{H}, P, Q)$ ($m = \max\{m_1, m_2\}$), при этом $N(n-1, n-1)$ — число Гильберта, обозначаемое $H(n)$.

Отметим, что оценка числа нулей функции $I(h)$ является частным случаем ослабленной XVI проблемы Гильберта, сформулированной В. И. Арнольдом в работе [1]. Таким образом, оценка числа Гильберта тесно связана с решением ослабленной XVI проблемы Гильберта.

С доказательствами конечности числа $N(n, m)$ можно ознакомиться в работах [20, 21].

Дальнейшая оценка числа $N(n, m)$, как правило, осуществляется при помощи метода функций Мельникова (см. [22, 23]), сводящегося в конечном итоге к вычислению числа нулей абелевых интегралов. Метод функций Мельникова требует рассмотрения функции

$$M(h, \varepsilon) = \varepsilon M_1(h) + \varepsilon^2 M_2(h) + \dots + \varepsilon^k M_k(h) + \dots,$$

где аргумент h — это значения, принимаемые функцией $\mathcal{H}(x, y)$ в окрестности особой точки, а M_k — автономная функция Мельникова порядка k .

Оказывается, что число нулей с учетом кратностей первой отличной от тождественного нуля функции Мельникова $M_{k^*}(h)$ ($k^* = 1, 2, \dots$) определяет количество возникающих при возмущении предельных циклов.

Методом функций Мельникова в работах [14, 24, 13] были получены результаты для конкретных систем Льенара с $n = 4$ и $m = 3$, в [25] — с $n = 4$ и $m = \overline{3, 100}$, в [27] — с $n = 4$ и $m \leq 124$, в [28] — с $n = 4$ и произвольным m , а в [26] — с $n = 7$ и $m = 4$.

В работе [29] методом функций Мельникова была получена оценка числа $N(n, m)$ для систем (0.18) с гамильтонианом, задающим невозмущенную

часть и являющимся (j, l) -однородным многочленом степени k , т.е. таким, что $\mathcal{H}(r^j x, r^l y) = r^k \mathcal{H}(x, y)$, где $j, l, k \in \mathbb{N}$, $r > 0$ ($n = \max\{j, l\}$). При этом степени многочленов P, Q произвольны. Стоит отметить, что в данный класс гамильтонианов не входят ни гамильтонианы, порождающие системы Лъенара из упомянутых выше работ, ни гамильтониан системы (0.1).

Что касается периодических систем, то их исследование с использованием периодических функций Мельникова, вероятно, наталкивается на трудноразрешимые технические трудности. Известная авторам попытка исследования периодических систем была сделана в работе [30], но там рассматривалась система, периодические возмущения в которой появляются только при ε^2 , а функции Мельникова, порождаемые стоящими при ε возмущениями, остаются автономными.

Достаточно полный обзор имеющихся к 2003 году результатов приведен J. Li в статье [12].

Другой подход к оценке числа Гильберта применили J. Li и Q. Huang в [6]. При помощи метода «поисковых функций» (detection functions) для «грубых» возмущений они доказали, что для системы вида (0.18)

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= v(1 - \mu_1 v^2) + \varepsilon u(k_1 v^2 + k_2 u^2 - \lambda), \\ \frac{dv}{d\tau} &= -u(1 - \mu_2 u^2) + \varepsilon v(k_1 v^2 + k_2 u^2 - \lambda), \end{aligned} \quad (0.19)$$

где $\mathcal{H}(u, v) = (\mu_1 v^4 - 2v^2 + \mu_2 u^4 - 2u^2)/4$ и $0 < \mu_1 < \mu_2$, число $H(3) \geq 11$.

Пользуясь результатами работы [6], J. Li в [12] уточнил нижнюю оценку числа Гильберта для $n = 2^k - 1$ ($k \geq 3$), рассматривая последовательность \mathbb{Z}_q -эquivariantных систем ($q \geq 2$)

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}_k(u, v)}{\partial v} + \varepsilon P_k(u, v), \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}_k(u, v)}{\partial u} + \varepsilon Q_k(u, v),$$

где $\mathcal{H}_k(u, v) = \mathcal{H}_{k-1}(u^2 - \eta^{k-2}, v^2 - \eta^{k-2})$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}(u, v)$ из системы (0.19); $P_k(u, v) = P_{k-1}(u^2 - \eta^{k-2}, v^2 - \eta^{k-2})$, $Q_k(u, v) = Q_{k-1}(u^2 - \eta^{k-2}, v^2 - \eta^{k-2})$; $P_2(u, v) = u(k_1 v^2 + k_2 u^2 - \lambda)$, $Q_2(u, v) = v(k_1 v^2 + k_2 u^2 - \lambda)$, а η — достаточно большое положительное число.

Сделано это было при помощи метода «учетверения» системы, предложенного C. J. Christopher и N. G. Lloyd в [31].

Позднее, в [15] была построена система вида (0.18) с более сложным, чем в системе (0.19) гамильтонианом

$$\mathcal{H}(u, v) = (u^4 + 4(1 - \lambda)u^3/3 - 2\lambda u^2 + (v^2 - k^2)^2 - k^4)/4$$

и возмущенной частью $P \equiv 0$, $Q = v(a_1 + a_2u + a_3u^2 + a_4v^2)$, у которой при определенных значениях параметров сохраняется тринадцать предельных циклов, т. е. $H(3) \geq 13$.

0.5 Сравнение результатов, полученных разными методами

Сравним полученные в статье результаты с уже имеющимися.

В работе [6] для системы (0.19) с $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $k_1 = -3$, $k_2 = 1$ приведена классификация, указывающая в зависимости от значения параметра λ количество предельных циклов и их расположение на плоскости.

В частности, система (0.19) при $-4.80305 + O(\varepsilon) < \lambda < -4.79418 + O(\varepsilon)$ имеет одиннадцать предельных циклов.

Система (0.19) — это частный случай системы (0.1). При выбранных значениях параметров μ и k заменой $\tau = 2^{-1/2}t$, $u = 2^{-1/2}y$, $v = x$ она сводится к автономной системе (0.1) с $\nu = 0$, $\gamma = 1/2$ и возмущением

$$X(t, x, y, \varepsilon) = 2^{-1/2}x(y^2/2 - 3x^2 - \lambda), \quad Y(t, x, y, \varepsilon) = 2^{-1/2}y(y^2/2 - 3x^2 - \lambda),$$

т. е. в системе (0.1) $X = X_0(x, y)$, $Y = Y_0(x, y)$.

Методом ВПТ установлено, что полученная система имеет одиннадцать допустимых решений порождающего уравнения (4.11) (см. определение 4.1), задающих точки на оси абсцисс, через малую окрестность каждой из которых согласно теореме 6.1 проходит предельный цикл, порождающий цилиндрическую инвариантную поверхность.

Таким образом, результат работы [6] повторен и может быть усилен благодаря возможности: а) добавить в возмущение любые функции, зависящие от ε ; б) сделать системы (0.1) периодическими с сохранением приведенных выше функций X и Y в качестве средних значений; в) применить метод ВПТ к стандартным системам с $\nu = 1$, не рассматриваемым в [6].

С другой стороны, в теореме 7.1 приведен класс систем (0.1), задаваемый условиями (7.3), с $\gamma = 1/2$ и 2π -периодическими по t возмущениями не выше третьего порядка по фазовым переменным (7.3), которые также имеют одиннадцать допустимых решений порождающего уравнения, выделяющих сохранившиеся инвариантные торы.

В частности, условиям теоремы 7.1 при $\nu = 0$ удовлетворяет автономная система, у которой

$$X(t, x, y, \varepsilon) = 0, \quad Y(t, x, y, \varepsilon) = -3.314y - 0.361y^3 + 4.493x^2y.$$

Замена $t = \sqrt{2}\tau$, $x = v$, $y = \sqrt{2}u$ приведет ее к системе (0.19) с

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad P(u, v) = (4.493\sqrt{2}v^2 - 0.722\sqrt{2}u^2 - 3.314)u, \quad Q(u, v) = 0,$$

также имеющей одиннадцать предельных циклов, и эта система в работе [6] не рассматривается.

1 Параметризация траекторий невозмущенной системы

1.1 Фазовый портрет

Рассмотрим двумерную автономную гамильтонову систему с девятью точками покоя, аналогичную системе (0.2)

$$C'(\varphi) = \gamma(S^3(\varphi) - S(\varphi)), \quad S'(\varphi) = -(C^3(\varphi) - C(\varphi)) \quad (0 < \gamma \leq 1). \quad (1.1)$$

Для любого $a > 0$ обозначим через Γ_a семейство замкнутых кривых на плоскости (C, S) , удовлетворяющих общему интегралу системы (1.1)

$$(C^2 - 1)^2 + \gamma(S^2 - 1)^2 = a. \quad (1.2)$$

Очевидно, что траектории систем (1.1) и (0.2) совпадают, но при $\nu = 1$ решения систем задают различную параметризацию каждой траектории.

Из девяти особых точек системы (1.1) пять являются центрами, причем $(\pm 1, 1)$, $(\pm 1, -1)$ удовлетворяют (1.2) при $a = 0$, а $(0, 0)$ при $a = 1 + \gamma$. Остальные особые точки — седловые, причем точки $(\pm 1, 0)$ удовлетворяют уравнению (1.2) при $a = \gamma$, а точки $(0, \pm 1)$ — при $a = 1$ (см. рис. 1.1).

Поскольку уравнение (1.2) не меняется при замене C на $-C$ и S на $-S$, из соображений симметрии достаточно описать только замкнутые кривые из семейства Γ_a , или их части, лежащие в первой четверти, обозначая такое семейство Γ_a^* .

Список экстремальных значений координат кривых из семейства Γ_a^* :

$$\begin{aligned} r^s &= \sqrt{1 + \gamma^{1/2}}, \quad l^s = \sqrt{1 - \gamma^{1/2}}, \quad r^i = \sqrt{1 - (1 - \gamma)^{1/2}}, \\ r^e &= \sqrt{1 + (1 - \gamma)^{1/2}}, \quad u^e = \sqrt{1 + \gamma^{-1/2}}; \\ r_0^{0i}, l_1^0 &= \sqrt{1 - (a - \gamma)^{1/2}}, \quad r_0^{0e}, r_1^0 = \sqrt{1 + (a - \gamma)^{1/2}}, \\ u_0^{0i} &= \sqrt{1 - ((a - 1)/\gamma)^{1/2}}, \quad u_0^{0e} = \sqrt{1 + ((a - 1)/\gamma)^{1/2}}, \\ r_0^{1e}, r_1^1, r_2^1 &= \sqrt{1 + a^{1/2}}, \quad u_0^{1e}, u_1^1, u_2^1 = \sqrt{1 + (a/\gamma)^{1/2}}, \\ l_1^1, l_2^1 &= \sqrt{1 - a^{1/2}}, \quad lo_2^1 = \sqrt{1 - (a/\gamma)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь r — *right*, l — *left*, u — *upper*, lo — *lower*, s — *separatrix*, i — *internal*, e — *external*, первые пять констант характеризуют кривые Γ_γ^* и Γ_1^* при $\gamma < 1$, у остальных верхний индекс задает значение другой координаты, а нижний индекс — номер одного из вводимых ниже классов.

Выделим сначала «сепаратрисные» кривые уравнения (1.2), т. е. кривые, проходящие через особые точки системы (1.1).

Семейство Γ_γ ($a = \gamma$) при $\gamma < 1$ состоит из четырех замкнутых кривых (или двух «восьмерок»), две из которых соприкасаются в особой точке $(1, 0)$, охватывая точки $(1, \pm 1)$, и две — в особой точке $(-1, 0)$, охватывая особые точки $(-1, \pm 1)$. Тогда Γ_γ^* — это верхний нуль правой восьмерки. Экстремумы Γ_γ^* находятся в точках $(r^s, 1)$, $(1, \sqrt{2})$, $(l^s, 1)$, $(1, 0)$.

Семейство Γ_1 ($a = 1$) при $\gamma < 1$ состоит из двух замкнутых кривых: внутренней Γ_1^i и внешней Γ_1^e , соприкасающихся в особых точках $(0, 1)$ и $(0, -1)$. Внутри Γ_1^i лежит особая точка $(0, 0)$, а в каждой из двух областей между Γ_1^i и Γ_1^e лежит по восьмерке из Γ_γ . Тогда $(r^i, 0)$, $(0, 1)$ — экстремумы Γ_1^{i*} , а $(r^e, 0)$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(1, u^e)$, $(0, 1)$ — экстремумы Γ_1^{e*} .

Если же $a = \gamma = 1$, то $r^i, r^e = 1$ и Γ_γ совпадает с Γ_1 , т. е. Γ_1^{i*} соприкасается с Γ_1^{e*} в точке $(1, 0)$, образуя верхний нуль правой восьмерки.

При $a \neq \gamma, 1$ семейство Γ_a состоит из замкнутых траекторий или циклов системы (1.1). Сепаратрисные кривые разбивают семейства Γ_a на три класса, обозначаемые в дальнейшем $0], 1], 2]$. Приведем их описание.

$0]$ $a > 1$. При $1 < a < 1 + \gamma$ семейство Γ_a состоит из двух циклов: внутреннего — Γ_a^i , охватывающего $(0, 0)$ и лежащего внутри Γ_1^i , и внешнего — Γ_a^e , охватывающего Γ_1^e . Тогда $(r_0^{0i}, 0)$, $(0, u_0^{0i})$ — экстремумы Γ_a^{i*} , $(r_0^{0e}, 0)$, $(r_0^{1e}, 1)$, $(1, u_0^{1e})$, $(0, u_0^{0e})$ — последовательно идущие экстремумы Γ_a^{e*} , причем $r_0^{0i} \in (0, r^i)$, $r_0^{0e} \in (r^e, \infty)$. А при $a \geq 1 + \gamma$ имеется только цикл Γ_a^e , так как

Γ_a^i уже при $a = 1 + \gamma$ вырождается в точку $(0, 0)$.

В результате класс $0]$ естественным образом распадается на два класса: $0^i]$ для циклов Γ_a^i с $1 < a < 1 + \gamma$ и $0^e]$ для циклов Γ_a^e с $a > 1$.

1] $\gamma < a < 1$. Семейство Γ_a состоит из двух циклов. Верхняя половина правого цикла Γ_a^* , располагаясь между Γ_γ^* и $\Gamma_1^{i*} \cup \Gamma_1^{e*}$, имеет экстремумы в точках $(r_1^0, 0)$, $(r_1^1, 1)$, $(1, u_1^1)$, $(l_1^1, 1)$, $(l_1^0, 0)$, причем $r_1^0 \in (1, r^e)$.

2] $0 < a < \gamma$. Семейство Γ_a образуют четыре цикла. Цикл Γ_a^* охватывает $(1, 1)$ и лежит внутри Γ_γ^* , его экстремумы — $(r_2^1, 1)$, $(1, u_2^1)$, $(l_2^1, 1)$, $(1, lo_2^1)$, причем $r_2^1 \in (1, r^s)$.

1.2 Параметризация циклов

Параметр a не позволяет выделить конкретный цикл, входящий в Γ_a , и осуществить его параметризацию. Сделать это возможно при помощи экстремальных точек $(r_0^{0i}, 0)$, $(r_0^{0e}, 0)$ в классе $0]$, $(\pm r_1^0, 0)$ в классе $1]$, $(\pm r_2^1, 1)$ и $(\pm r_2^1, -1)$ в классе $2]$. Каждая такая точка фиксирует свой цикл, а параметр a из (1.2) однозначно выражается через выбранный параметр r с индексами.

В результате любой цикл системы (1.1) будем параметризовать вещественно-аналитическим ω_{kl} -периодическим решением $CS_{kl}(\varphi) = (C(\varphi), S(\varphi))$ задачи Коши с начальными данными $0, b_{kl}, l$, т. е.

$$C(0) = b_{kl}, \quad S(0) = l \quad (k, l = 0, \pm 1, (k, l) \neq (0, \pm 1)), \quad (1.4)$$

$$\text{где } b_{00} = \begin{cases} b_{00}^i = r_0^{0i} \in (0, r^i), & b_{10} = r_1^0 \in (1, r^e), \quad b_{1,\pm 1} = r_2^1 \in (1, r^s), \\ b_{00}^e = r_0^{0e} \in (r^e, r^\sigma); & b_{-10} = -r_1^0, \quad b_{-1,\pm 1} = -r_2^1; \end{cases}$$

$$r^\sigma = \sqrt{1 + (\gamma\sigma^2(\sigma^2 - 2))^{1/2}}.$$

Здесь индекс k задает «сдвиг» вдоль оси абсцисс, l — вдоль оси ординат; $|k| + |l|$ — номер класса, к которому относится параметризуемый цикл; константы r с индексами введены в (1.3).

Решение $CS_{kl}(\varphi) = CS_{kl}(\varphi, 0, b_{kl}, l)$ обладает указанными свойствами по теореме Коши, так как правая часть (1.1) вещественна и полиномиальна.

Обозначим через a_{kl} значение параметра a из интеграла (1.2), соответствующее начальному данному b_{kl} , и пересчитаем через b_{kl} те экстремальные

константы из (1.3), которые потребуются в дальнейшем. Имеем:

$$\begin{aligned} a_{kl} &= (1 - |l|)\gamma + (b_{kl}^2 - 1)^2; \quad u_0^{1e} = (1 + ((\gamma + ((b_{00}^e)^2 - 1)^2)\gamma^{-1})^{1/2})^{1/2}, \\ r_0^{1e} &= (1 + (\gamma + ((b_{00}^e)^2 - 1)^2)^{1/2})^{1/2}, \quad r_1^1 = (1 + ((b_{10}^2 - 1)^2 + \gamma)^{1/2})^{1/2}, \quad (1.5) \\ l_1^0 &= (2 - b_{01}^2)^{1/2}, \quad l_2^1 = (2 - b_{11}^2)^{1/2}, \quad l_1^1 = (1 - ((b_{10}^2 - 1)^2 + \gamma)^{1/2})^{1/2}. \end{aligned}$$

Замечание 1.1. Ограничение снизу на константу σ : $\sigma > \sqrt{1 + \gamma^{-1/2}}$, входящее в область определения правой части системы (0.1), выбрано таким образом, чтобы в нее обязательно попали все циклы из класса 0^e , а значит, и циклы из остальных классов. Действительно, в (1.4) $b_{00}^e \in (r^e, r^\sigma)$, поэтому в (1.5) $a_{00}^e = \gamma + ((b_{00}^e)^2 - 1)^2 < \gamma + ((r^\sigma)^2 - 1)^2 = \gamma(1 + \sigma^2(\sigma^2 - 2))$. Теперь, как установлено для циклов из класса 0^e ,

$$\max |C(\varphi)| = r_0^{1e} \leq u_0^{1e} = \max |S(\varphi)| = (1 + (a_{00}^e/\gamma)^{1/2})^{1/2} < \sigma.$$

1.3 Вычисление периодов

Введем вспомогательные функции

$$S_\pm(C^2(\varphi)) = (1 \pm \gamma^{-1/2}(a_{kl} - (C^2(\varphi) - 1)^2)^{1/2})^{1/2}. \quad (1.6)$$

Утверждение 1.1. Период ω_{kl} вещественно-аналитического решения $CS_{kl}(\varphi)$ с начальными данными из (1.4) находится по формулам:

$$\begin{aligned} \omega_{00}^i &= 4\varphi_-^i, & \omega_{\pm 10} &= 2(\varphi_-^l + \varphi_+^u + \varphi_-^r), \\ \omega_{00}^e &= 4(\varphi_+^e + \varphi_-^e), & \omega_{1,\pm 1} &= \omega_{-1,\pm 1} = \varphi_-^2 + \varphi_+^2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\varphi_-^i = \int_{b_{0i}^{0i}}^0 \zeta_- dC$; $\varphi_+^e = \int_0^{r_0^{1e}} \zeta_+ dC$, $\varphi_-^e = \int_{r_0^{1e}}^{b_{00}^{0e}} \zeta_- dC$; $\varphi_-^l = \int_{l_1^0}^{l_1^1} \zeta_- dC$,
 $\varphi_+^u = \int_{l_1^1}^{r_1^1} \zeta_+ dC$, $\varphi_-^r = \int_{r_1^1}^{b_{10}^{10}} \zeta_- dC$; $\varphi_-^2 = \int_{b_{11}^{11}}^{l_2^1} \zeta_- dC$, $\varphi_+^2 = \int_{l_2^1}^{b_{11}^{11}} \zeta_+ dC$, пределы интегрирования описаны в (1.5), а $\zeta_\pm(C^2) = (\gamma(S_\pm^3(C^2) - S_\pm(C^2)))^{-1}$.

Доказательство. Описывая движение по циклу, когда φ изменяется от нуля до ω_{kl} , функцию $S(\varphi)$ для каждого класса можно представить в виде $S(C(\varphi))$, используя формулу (1.2) для интеграла и константы из (1.4) и (1.5), а также то, что в системе (1.1) $S'(0) > 0$ для циклов из класса 0^i и $S'(0) < 0$ для циклов из остальных классов. Имеем:

$$0^i] S(C(\varphi)) = \{S_- \text{ при } C \downarrow_{-b_{00}^i}, -S_- \text{ при } C \uparrow_{-b_{00}^i}\};$$

$$0^e] S(C(\varphi)) = \{-S_- \text{ при } C \uparrow_{b_{00}^{1e}}, -S_+ \text{ при } C \downarrow_{-r_0^{1e}}, -S_- \text{ при } C \uparrow_{-r_0^{1e}}, \\ S_- \text{ при } C \downarrow_{-r_0^{1e}}, S_+ \text{ при } C \uparrow_{-r_0^{1e}}, S_- \text{ при } C \downarrow_{b_{00}^{1e}}\};$$

$$1] S(C(\varphi)) = \{-kS_- \text{ при } kC \uparrow_{kb_{k0}}^{kr_1^1}, -kS_+ \text{ при } kC \downarrow_{kl_1^1}^{kr_1^1}, -kS_- \text{ при } kC \uparrow_{kl_1^1}^{kl_1^0}, \\ kS_- \text{ при } kC \downarrow_{kl_1^1}^{kl_1^0}, kS_+ \text{ при } kC \uparrow_{kl_1^1}^{kr_1^1}, kS_- \text{ при } kC \downarrow_{kb_{k0}}^{kr_1^1}\};$$

$$2] S(C(\varphi)) = \{lS_- \text{ при } kC \downarrow_{kl_2^1}^{kb_{kl}}, lS_+ \text{ при } kC \uparrow_{kl_2^1}^{kb_{kl}} \quad (kl = 1); \\ lS_- \text{ при } kC \uparrow_{kl_2^1}^{kb_{kl}}, lS_+ \text{ при } kC \downarrow_{kl_2^1}^{kb_{kl}} \quad (kl = -1)\}.$$

Запишем первое уравнение системы (1.1) в виде

$$d\varphi = (\gamma(S^3(\varphi) - S(\varphi)))^{-1} dC(\varphi)$$

и проинтегрируем его по φ от нуля до ω_{kl} , подставляя в правую часть для каждого класса свою функцию $S(C(\varphi))$. Приводя подобные члены с учетом того, что ζ_{\pm} — четные функции C , получаем формулы (1.7). \square

Попутно установлено, что $C(\omega_{00}^i/4) = 0$, $S(\omega_{00}^i/4) = u_0^{0i}$; $C(\omega_{00}^e/4) = 0$, $S(\omega_{00}^e/4) = -u_0^{0e}$; $C(\omega_{10}/2) = l_1^0$, $S(\omega_{10}/2) = 0$.

1.4 Вещественно-аналитические дупериодические функции

В дальнейшем наряду с решением $CS_{kl}(\varphi)$ системы (1.1) будут рассматриваться другие вещественно-аналитические ω_{kl} -периодические функции, а также дупериодические по t и φ функции. Опишем их свойства.

Непрерывную, T -периодическую по t и ω -периодическую по φ функцию $\zeta(t, \varphi)$ будем называть равномерно относительно t вещественно-аналитической по φ , если для любого $\varphi_* \in \mathbb{R}$ существует $r_{\varphi_*} > 0$ такое, что ряд $\zeta(t, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta^{(m)}(t)(\varphi - \varphi_*)^m$ с вещественными, непрерывными и T -периодическими по t коэффициентами для всякого $t \in \mathbb{R}$ абсолютно сходится при любых $\varphi \in \mathbb{C}$ таких, что $|\varphi - \varphi_*| < r_{\varphi_*}$.

Для любого $\varrho > 0$ введем два множества

$$B_{\varrho} = \{(\operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi) : \operatorname{Re} \varphi \in \mathbb{R}, |\operatorname{Im} \varphi| \leq \varrho\}, \\ \mathcal{B}_{\varrho} = \{(t, \varphi) : t \in \mathbb{R}, \varphi \in B_{\varrho}\}. \quad (1.8)$$

Лемма 1.1. Пусть функция $\zeta(t, \varphi)$ — непрерывная, T -периодическая по t , ω -периодическая по φ , равномерно относительно t вещественно-аналитическая по φ и пусть $M^r = \max_{t, \varphi \in \mathbb{R}} |\zeta(t, \varphi)|$, тогда

1) для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varrho > 0$, что $\zeta(t, \varphi)$ — двупериодическая, равномерно относительно t аналитическая функция на B_ϱ и

$$\exists M \quad (0 < M \leq M^r + \delta): \quad M = \max_{(t, \varphi) \in B_\varrho} |\zeta(t, \varphi)|;$$

2) для разложения $\zeta(t, \varphi)$ в комплексный ряд Фурье на отрезке $[0, \omega]$

$$\zeta(t, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) e^{2\pi i n \varphi / \omega}, \quad \zeta_n(t) = \omega^{-1} \int_0^\omega \zeta(t, \varphi) e^{-2\pi i n \varphi / \omega} d\varphi, \quad (1.9)$$

где $\zeta_{-n}(t) = \overline{\zeta_n(t)}$ в силу вещественности $\zeta(t, \varphi)$, имеем:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad |\zeta_n(t)| \leq M e^{-2\pi |n| \varrho / \omega}. \quad (1.10)$$

Доказательство. 1) Для всякого $\varphi \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \varphi \in [0, \omega]$ обозначим через $K_{r_\varphi}(\varphi)$ круг сходимости степенного ряда $\zeta(t, \varphi)$ радиуса $r_\varphi > 0$ с центром в точке $(\operatorname{Re} \varphi, 0)$, а через $K_{r_0}(\varphi_0), \dots, K_{r_m}(\varphi_m)$ — конечное покрытие такими кругами отрезка $\{\operatorname{Re} \varphi \in [0, \omega], \operatorname{Im} \varphi = 0\}$.

Положим $\varrho_0 = \min \{\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_m\}$, где z_μ с $\operatorname{Im} z_\mu > 0$ ($\mu = \overline{1, m}$) — это точки пересечения окружностей $|z - \varphi_{\mu-1}| = r_{\mu-1}$ и $|z - \varphi_\mu| = r_\mu$. Тогда в качестве ϱ можно взять любое число, меньшее ϱ_0 .

Для всякого t функция $\zeta(t, \varphi)$ является ω -периодической в полосе B_ϱ из (1.8), так как аналитическая функция $\zeta(t, \varphi + \omega) - \zeta(t, \varphi) \equiv 0$ на отрезке $\{\operatorname{Re} \varphi \in [0, \omega], \operatorname{Im} \varphi = 0\}$, а значит, в силу единственности равна нулю при любых $\varphi \in B_\varrho$. Поэтому непрерывная двупериодическая функция $|\zeta(t, \varphi)|$ на множестве B_ϱ достигает своего максимума, обозначаемого M . При этом константу ϱ можно выбрать столь малой, чтобы M была δ -близка к M^r .

2) Для всякого фиксированного t интеграл по замкнутому контуру

$$0 \rightarrow \omega \rightarrow \omega + i\varrho \operatorname{sgn} n \rightarrow i\varrho \operatorname{sgn} n \rightarrow 0,$$

лежащему в B_ϱ , от функции $\zeta(t, \varphi) e^{-2\pi i n \varphi / \omega}$ равен нулю, как и сумма интегралов по вертикальным путям от той же функции в силу ω -периодичности $\zeta(t, \varphi)$. Поэтому сумма интегралов по горизонтальным путям равна нулю, а значит, в силу (1.9)

$$\omega \zeta_n = - \int_{\omega + i\varrho \operatorname{sgn} n}^{i\varrho \operatorname{sgn} n} \zeta(t, \varphi) e^{-2\pi i n \varphi / \omega} d\varphi = e^{2\pi |n| \varrho / \omega} \int_0^\omega \zeta(t, \psi + i\varrho \operatorname{sgn} n) e^{-2\pi i n \psi / \omega} d\psi.$$

Из этого равенства вытекает оценка функции $|\zeta_n(t)|$ в формуле (1.10). \square

Очевидно, что любое уменьшение константы ϱ сохраняет имеющиеся оценки и «приближает» M к M^r . Кроме того, лемму 1.1 можно применять к любым вещественно-аналитическим, ω -периодическим и не зависящим от t функциям, например, к $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$.

Лемма 1.2 Пусть $CS_{kl}(\varphi) = (C(\varphi), S(\varphi))$ — решение системы (1.1) с начальными данными $0, b_{kl}, l$ из (1.4), тогда для σ — из (0.1)

$$\exists \varrho > 0: M = \max_{\varphi \in B_\varrho} \{|C(\varphi)|, |S(\varphi)|\} < \sigma. \quad (1.11)$$

Доказательство. Для решения $CS_{00}(\varphi)$ с $b_{00} = b_{00}^e \in (r^e, r^\sigma)$, параметризующему произвольный цикл из класса $0^e]$, с учетом замечания 1.1 $M_s^r = \max_{\varphi \in \mathbb{R}} |S(\varphi)| = u_0^{1e} < \sigma$, а $M_c^r = \max_{\varphi \in \mathbb{R}} |C(\varphi)| \leq M_s^r$.

Выберем в лемме 1.1 константу δ так, чтобы выполнялось неравенство $M_s^r + \delta < \sigma$. Тогда найдется такое $\varrho_s > 0$, что функция $S(\varphi)$ аналитична в полосе B_{ϱ_s} из (1.8), $M_s = \max_{\varphi \in B_{\varrho_s}} |S(\varphi)| < \sigma$, и найдется такое $\varrho_c > 0$, что $\max_{\varphi \in B_{\varrho_c}} |C(\varphi)| \leq M_c < \sigma$.

Поскольку экстремальные значения циклов из остальных классов не превосходят u_0^{1e} , для параметризации произвольного цикла из них найдется ϱ , при котором в соответствующей полосе $|CS_{kl}(\varphi)| \leq M_s$. \square

2 Переход в окрестность замкнутой траектории

2.1 Индикатор монотонности угловой переменной

Для любого b_{kl} из (1.4) рассмотрим вещественно-аналитическую, ω_{kl} -периодическую функцию

$$\alpha_{kl}(\varphi) = C'(\varphi)(S(\varphi) - l) - S'(\varphi)(C(\varphi) - k), \quad (2.1)$$

которая после упрощения при помощи формулы (1.2) принимает вид:

$$\alpha_{kl} = a_{kl} - 1 - \gamma + C^2(\varphi) + \gamma S^2(\varphi) - k(C^3(\varphi) - C(\varphi)) - \gamma l(S^3(\varphi) - S(\varphi)).$$

Дифференцируя данное выражение в силу системы (1.1), получаем:

$$\alpha'_{kl}(\varphi) = \gamma(S^3 - S)(2C - 3kC^2 + k) - \gamma(C^3 - C)(2S - 3lS^2 + l). \quad (2.2)$$

Изучим изменения знака функции $\alpha_{kl}(\varphi)$ при движении по циклам, которое с ростом φ происходит против часовой стрелки для циклов из класса $0^i]$ и по часовой стрелке для остальных классов.

Дело в том, что предстоящий переход в окрестность произвольного цикла возможен, если на нем функция $\alpha_{kl}(\varphi)$ знакоопределена, так как геометрически знак α_{kl} отражает монотонность изменения полярного угла при движении по циклу, наблюдаемое из точки (k, l) .

Именно поэтому нельзя использовать единую функцию α_{00} для циклов из классов 1] и 2]. При движении по ним полярный угол, наблюдаемый из начала координат, очевидно, меняется не монотонно. А в формуле (2.1) вычитание констант k и l из C и S как раз означает сдвиг начала координат в системе (1.1) в точку (k, l) .

2.2 Проверка монотонности угловой переменной в классе 0]

Покажем, что функция $\alpha_{00} = a_{00} - 1 - \gamma + C^2(\varphi) + \gamma S^2(\varphi)$ является знакоопределенной.

Подставляя $k = l = 0$ в (2.2), имеем: $\alpha'_{00} = 2\gamma C(\varphi)S(\varphi)(S^2(\varphi) - C^2(\varphi))$.

В классе $0^i]$ ($a = a_{00}^i \in (1, 1 + \gamma)$) траектории при $\varphi \in [0, \omega/4]$ расположены в первой четверти и проходят через точки $(r_0^{0i}, 0)$ при $\varphi = 0$ и $(0, u_0^{0i})$ при $\varphi = \omega/4$, где $r_0^{0i} = b_{00}^i$ и u_0^{0i} из (1.3). Поэтому $C(0) = r_0^{0i} > 0 = S(0)$ и $C(\omega/4) = 0 < u_0^{0i} = S(\omega/4)$, причем $\alpha'_{00}(\varphi) < 0$ при $C(\varphi) > S(\varphi)$ и $\alpha'_{00}(\varphi) > 0$ при $C(\varphi) < S(\varphi)$. Это значит, что функция $\alpha_{00}(\varphi)$ принимает максимальные значения на концах отрезка $[0, \omega/4]$. Но

$$\begin{aligned}\alpha_{00}(0) &= a - 1 - \gamma + (r_0^{0i})^2 = (a - \gamma)^{1/2}((a - \gamma)^{1/2} - 1) < 0, \\ \alpha_{00}(\omega/4) &= a - 1 - \gamma + \gamma(u_0^{0i})^2 = (a - 1)^{1/2}((a - 1)^{1/2} - \gamma^{1/2}) < 0.\end{aligned}$$

Из соображений симметрии заключаем, что $\alpha_{00}(\varphi) < 0$ для любого φ .

В классе $0^e]$ ($a = a_{00}^e > 1$) траектории при $\varphi \in [3\omega/4, \omega]$ расположены в первой четверти и проходят через точку $(0, u_0^{0e})$ при $\varphi = 3\omega/4$ и через точку $(r_0^{0e}, 0)$ при $\varphi = \omega$, где $r_0^{0e} = b_{00}^e$ и u_0^{0e} из (1.3). Поэтому $C(3\omega/4) = 0 < u_0^{0e} = S(3\omega/4)$ и $C(\omega) = r_0^{0e} > 0 = S(\omega)$, причем $\alpha'_{00}(\varphi) > 0$ при $C(\varphi) < S(\varphi)$ и $\alpha'_{00}(\varphi) < 0$ при $C(\varphi) > S(\varphi)$. Это значит, что функция $\alpha_{00}(\varphi)$ принимает минимальные значения на концах отрезка $[3\omega/4, \omega]$. Но

$$\alpha_{00}(3\omega/4) = a - 1 - \gamma + \gamma(u_0^{0e})^2 > 0, \quad \alpha_{00}(\omega) = a - 1 - \gamma + (r_0^{0e})^2 > 0.$$

Из соображений симметрии заключаем, что $\alpha_{00}(\varphi) > 0$ для любого φ .

2.3 Проверка монотонности угловой переменной в классе 1]

Пусть в (2.1) $k = 1, l = 0$, тогда $\alpha_{10}(\varphi) = a_{10} - 1 - \gamma - C^3 + C^2 + C + \gamma S^2$, причем $C \in (0, \sqrt{2})$. Согласно (1.2) $S^2 = 1 \pm \gamma^{-1/2}(a_{10} - (C^2 - 1)^2)^{1/2}$, поэтому $\alpha_{10}^{\pm} = a_{10} - (C - 1)^2(C + 1) \pm \gamma^{1/2}(a_{10} - (C^2 - 1)^2)^{1/2}$, причем $a_{10} - (C^2 - 1)(C - 1) > a_{10} - (C^2 - 1)^2 \geq 0$. Тогда $\alpha_{10}^{+} > 0$, если $S \geq 1$.

Пусть $S \in [0, 1]$. Согласно (1.5) $a_{10} = \gamma + (b_{10}^2 - 1)^2$, следовательно

$$\alpha_{10}^{-} = \alpha_{10}^{-}(b_{10}, C, \gamma) = \theta + \gamma - (C - 1)^2(C + 1) - \gamma^{1/2}(\theta + \gamma - (C^2 - 1)^2)^{1/2},$$

где $\theta = (b_{10}^2 - 1)^2$, $b_{10} \in (1, r^e)$ в силу (1.4). Тогда $\theta \in (0, 1 - \gamma)$ ($0 < \gamma < 1$).

Уравнение $\alpha_{10}^{-} = 0$ равносильно квадратному уравнению

$$\theta^2 - 2((C - 1)^2(C + 1) - \gamma/2)\theta + (C - 1)^3(C + 1)(C^2 - 1 + \gamma) = 0. \quad (2.3)$$

Подставляя его корни в равенство $b_{10} = (\sqrt{\theta} + 1)^{1/2}$, получаем две функции:

$$b_{10}^{\mp}(C, \gamma) = \left(1 + ((C^2 - 1)(C - 1) - \gamma/2 \mp (\gamma/4)^{1/2}(\gamma - \tilde{\gamma}(C))^{1/2})^{1/2}\right)^{1/2},$$

где $\tilde{\gamma}(C) = 4C(C^2 - 1)(C - 1)$, такие, что $\alpha_{10}(b_{10}^{\mp}(C, \gamma), C, \gamma) \equiv 0$.

Положим

$$C_* = (\sqrt{17} - 1)/8, \quad \gamma_* = (51\sqrt{17} - 107)/128, \quad b_* = (1 + (297 - 65\sqrt{17})^{1/2}/16)^{1/2}.$$

Поскольку $\tilde{\gamma}'(C) = 4(C - 1)(4C^2 + C - 1)$, имеем:

$$\gamma_* = \tilde{\gamma}(C_*) = \max_{C \in [0, \sqrt{2}]} \tilde{\gamma}(C) \approx 0.807 \quad (C_* \approx 0.39),$$

$$b_* = b_{10}^{\mp}(C_*, \gamma_*) = (1 + ((C_*^2 - 1)(C_* - 1) - \gamma_*/2)^{1/2})^{1/2} \approx 1.156.$$

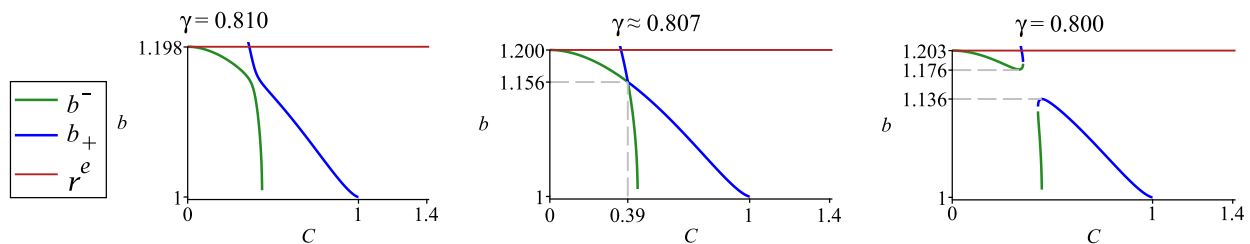


Рис. 2.1. Кривые аргументов, при которых функция $\alpha_{10}(b_{10}, C, \gamma) = 0$.

Таким образом, установлено, что при любом $\gamma \in [\gamma_*, 1)$ уравнение (2.3) имеет хотя бы одно решение, так как его дискриминант $\gamma(\gamma - \tilde{\gamma}(C)) \geq 0$, а значит, для любого $b_{10} \in (1, r^e)$, где $r^e = r^e(\gamma) = \sqrt{1 + (1 - \gamma)^{1/2}}$, функция $\alpha_{10}^{-}(b_{10}, C, \gamma)$ обращается в нуль (см. рис. 2.1(1), 2.1(2)).

Пусть $\gamma \in (0, \gamma_*)$. Тогда уравнение $\tilde{\gamma}(C) = \gamma$ имеет два корня $C_1^\gamma < C_2^\gamma$ таких, что $(C_1^\gamma, b_{10}^-(C_1^\gamma, \gamma))$ и $(C_2^\gamma, b_{10}^+(C_2^\gamma, \gamma))$ являются точками соприкосновения графиков функций $b_{10}^-(C, \gamma)$ и $b_{10}^+(C, \gamma)$ (см. рис. 2.13, 2.2).

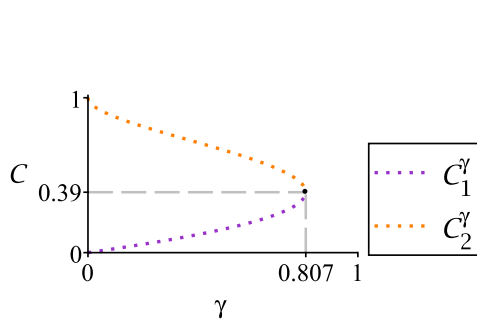


Рис. 2.2. Кривые точек соприкосновения функций $b_{10}^\pm(C, \gamma)$.

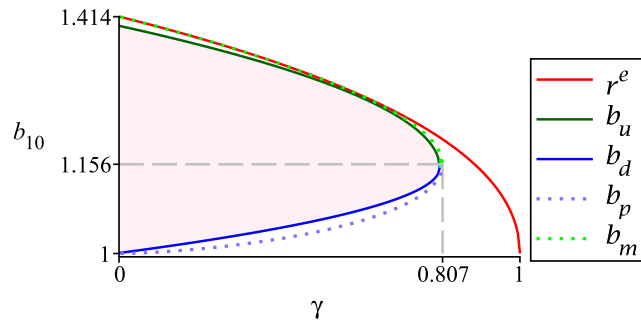


Рис. 2.3. Область знакоположительности функции $\alpha(b_{10}, C, \gamma)$.

Введем функции $b_{10} = b_m(\gamma)$ и $b_{10} = b_p(\gamma)$: $b_m(\gamma_*) = b_p(\gamma_*) = b_*$,

$$b_m = \min_{C \in (0, C_1^\gamma]} b_-(C, \gamma), \quad b_p = \max_{C \in [C_2^\gamma, 1)} b_+(C, \gamma) \quad \text{при } \gamma \in (0, \gamma_*). \quad (2.4)$$

Их приближенные значения, как и значения $C_{1,2}^\gamma$, найдены при помощи пакета вычислительной алгебры MAPLE при дискретном изменении параметра γ с шагом 10^{-3} .

В частности, $1 < b_p(\gamma) < b_m(\gamma) < r^e(\gamma)$ при $\gamma \in (0, \gamma_*)$. На рисунке 2.13 константы $b_p \approx 1.136$, $b_m \approx 1.176$ при $\gamma = 0.8 < \gamma_*$.

Итак, пусть $\gamma \in (0, \gamma_*)$, $b_{10} \in (b_p(\gamma), b_m(\gamma))$, $CS_{10} = (C(\varphi), S(\varphi))$ — ω_{10} -периодическое решение задачи Коши системы (1.1) с н. д. $C(0) = b_{10}$, $S(0) = 0$, параметризующее некий цикл Γ . При этом параметризация части Γ , расположенной в первой четверти, происходит при $\varphi \in [\omega_{10}/2, \omega_{10}]$ (см. доказательство утверждения 1.1).

Установлено, что функция $\alpha_{10}(\varphi)$, заданная на решении $CS_{10}(\varphi)$, при таких φ принимает только положительные значения. А если $b_{10} \in (1, b_p(\gamma)) \cup (b_m(\gamma), r^e)$ или $\gamma \in [\gamma_*, 1)$, то найдутся значения φ , при которых $\alpha_{10}(\varphi)$ имеет разный знак.

Лемма 2.1. При $k = \pm 1$ имеем:

- 1) для любого $\gamma \in (0, \gamma_*)$ с $\gamma_* = (51\sqrt{17} - 107)/128$:
 - а) $\alpha_{k0}(\varphi) > 0$ при $kb_{k0} \in (b_p(\gamma), b_m(\gamma))$, где b_p, b_m из (2.4);
 - б) $\alpha_{k0}(\varphi) > 0$ при $kb_{k0} = b_p(\gamma)$ и $kb_{k0} = b_m(\gamma)$;
 - в) $\alpha_{k0}(\varphi) > 0$ знакопеременна при $kb_{k0} \in (1, b_p(\gamma)) \cup (b_m(\gamma), r^e(\gamma))$;

2) $\alpha_{k0}(\varphi)$ знакопеременна при $kb_{k0} \in (1, r^e(\gamma))$ для любого $\gamma \in [\gamma_*, 1)$.

Доказательство. Результат уже получен для $k = 1$ и $S \geq 0$, т.е. для той части циклов, относящихся к классу 1], которые лежат в первой четверти плоскости. Он автоматически распространяется на $S \leq 0$ и на левую полуплоскость, когда $k = -1$, так как интеграл (1.2) не меняется при замене C на $-C$ и S на $-S$. \square

Поскольку значения функций $b_p(\gamma)$ и $b_m(\gamma)$ из (2.4) в явном виде не заданы, для класса 1] предлагается использовать следующие ограничения:

$$0 < \gamma \leq 0.8, \quad kb_{k0} \in [b_d(\gamma), b_u(\gamma)] \quad (k = \pm 1) \quad (d - \text{down}, u - \text{up}), \quad (2.5)$$

где $b_u = 1.15 + 0.28(0.8 - \gamma)^{1/2}$, $b_d = 1.15 - 0.16(0.8 - \gamma)^{1/2}$, поскольку установлено, что $b_d(\gamma) > b_p(\gamma)$, $b_u(\gamma) < b_m(\gamma)$ для любых $\gamma \in (0, 0.8]$, а значит, при γ и b_{k0} из (2.5) положительность функции $\alpha_{k0}(\varphi)$ гарантируется.

При необходимости ограничения (2.5) можно ослаблять, приближая величины γ, b_d, b_u соответственно к γ_*, b_p, b_m .

2.4 Проверка монотонности угловой переменной в классе 2]

Покажем, что функция $\alpha_{kl}(\varphi)$ ($k, l = \pm 1$) из (2.1) знакоположительна.

Запишем (2.2) в виде:

$$\alpha'_{kl}(\varphi) = \gamma(C - k)(S - l)(kC - lS)(3klCS + kC + lS + 1).$$

Поскольку $-(C + k)/(3C + k) < 0 < lS$ и $k(3C + k) > 0$, заключаем, что $3klCS + kC + lS + 1 > 0$.

Анализ изменения знака α'_{kl} с учетом того, что обход траектории происходит по часовой стрелке, показывает, что функция $\alpha_{kl}(\varphi)$ достигает своих локальных минимумов в точках $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, определяемых равенствами $C(\varphi_1) = k$, $S(\varphi_1) = l \cdot lo_2^1$; $S(\varphi_2) = l$, $C(\varphi_2) = kl_2^1$; $kC(\varphi_3) = lS(\varphi_3) > 1$.

Согласно формулам (1.3) $l_2^1 = \sqrt{1 - a^{1/2}}$, $lo_2^1 = \sqrt{1 - (a/\gamma)^{1/2}}$, откуда $a = \gamma(1 - (lo_2^1)^2)^2 = (1 - (l_2^1)^2)^2$, тогда

$$\alpha_{kl}(\varphi_1) = a + \gamma((lo_2^1)^2 - 1)(1 - lo_2^1) = \gamma lo_2^1(lo_2^1 - 1)^2(lo_2^1 + 1) > 0.$$

Аналогично, $\alpha_{kl}(\varphi_2) = a + ((l_2^1)^2 - 1)(1 - l_2^1) = l_2^1(l_2^1 - 1)^2(l_2^1 + 1) > 0$, $\alpha_{kl}(\varphi_3) = (1 + \gamma)(S^2 - 1)S(S - l) > 0$.

Итак, в пунктах 2.2–2.4 получен следующий результат.

Лемма 2.2. Вещественно-аналитическая ω_{kl} -периодическая функция $\alpha_{kl}(\varphi)$, заданная (2.1) на решениях $CS_{kl}(\varphi)$ системы (1.1), параметризующих циклы системы (0.2), знакоположительна для всех классов циклов, кроме циклов из класса $0^i]$, на которых она знакоотрицательна. При этом для класса $1]$ знакоположительность функций $\alpha_{10}(\varphi)$ и $\alpha_{-1,0}(\varphi)$ доказана при дополнительном ограничении (2.5).

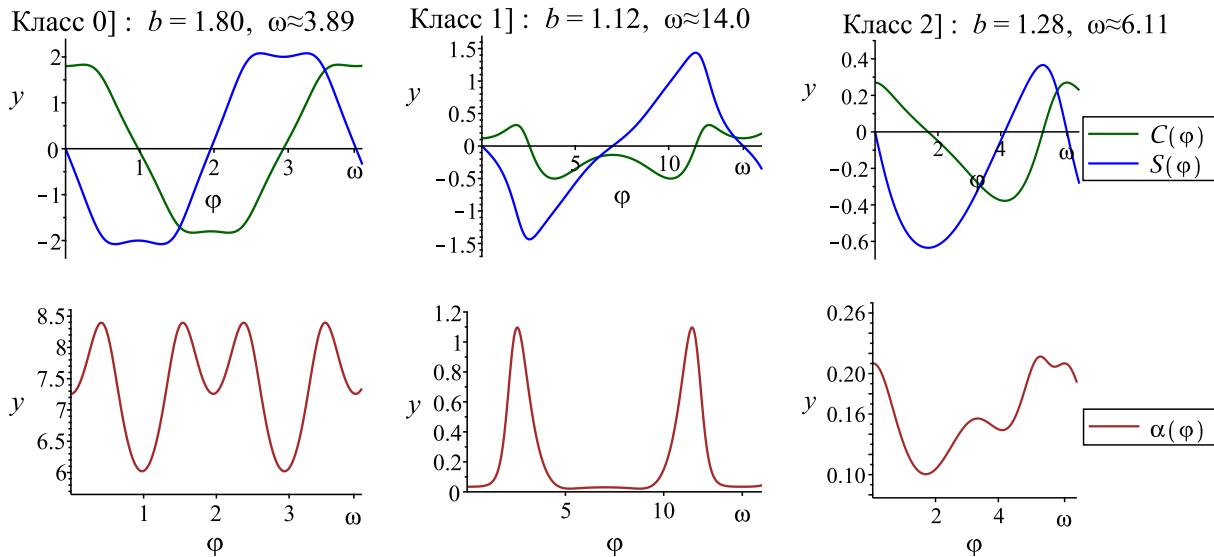


Рис. 2.4. Графики функций C, S, α при $\gamma = 1/2$.

2.5 Переход к специальной полярной системе

Рассмотрим специальную полярную замену переменных, которая будет сделана в системе (0.1). Замена имеет вид:

$$x = C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\rho, \quad y = S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\rho \quad (|\rho| \leq \rho_* < 1), \quad (2.6)$$

где $k, l = 0, \pm 1$, $(k, l) \neq (0, \pm 1)$; $CS_{kl}(\varphi) = (C(\varphi), S(\varphi))$ — это вещественно-аналитическое ω_{kl} -периодическое решение системы (1.1) с начальными данными $C(0) = b_{kl}$, $S(0) = l$, границы изменения b_{kl} приведены в (1.4) и для $b_{10}, b_{-1,0}$ уточнены в (2.5).

Замена (2.6) является композицией следующих трех замен.

1) Замена $x = x_k + k$, $y = y_l + l$ осуществляет сдвиг начала координат в особые точки (k, l) невозмущенной системы (0.2), что позволяет отслеживать движения по циклам из классов $1]$ и $2]$, находясь внутри каждого из них, как это происходит для классе $0]$, когда $k = l = 0$. Отметим, что аналогичный

сдвиг $C = C_k + k$, $S = S_l + l$ в системе (1.1) преобразует ее в систему $C'_k(\varphi) = \gamma(S_l^3(\varphi) - S_l(\varphi))$, $S'_l(\varphi) = -(C_k^3(\varphi) - C_k(\varphi))$.

2) Ненормированная полярная замена $x_k = C_k(\varphi)\tilde{\rho}$, $y_l = S_l(\varphi)\tilde{\rho}$ ($\tilde{\rho} > 0$) проводится в окрестности точки (k, l) и при $\tilde{\rho} = 1$ задает цикл, параметризуемый выбранным решением $CS_{kl}(\varphi)$ невозмущенной системы.

Отметим, что в предложенной замене, фактически, используются ненормированные аналоги обобщенных косинусов и синусов, введенных А. М. Ляпуновым в качестве решения системы $Cs'\theta = -dSn\theta$, $Sn'\theta = Cs^{2n-1}\theta$ с начальными данными $Cs0 = 1$, $Sn0 = 0$. Та же нормировка применялась, например, и в работе [11]. Отказ от нормировки приводит в получении порождающего уравнения иной, интегральной природы.

3) Аффинная замена $\tilde{\rho} = \rho + 1$ осуществляет переход в окрестность цикла, проходящего через точку (b_{kl}, l) и получаемого при $\rho = 0$.

Утверждение 2.1. *Предположим, что в замене (2.6)*

$$\rho_* \in (0, \min\{\rho_{kl}, \rho_0\}), \quad (2.7)$$

где

$$\rho_{00}^i = \min\{1, r^i/b_{00}^i - 1\}, \quad \rho_{00}^e = \min\{1 - r^e/b_{00}^e, r^\sigma/b_{00}^e - 1\},$$

$$\rho_{k0} = \min\{(b_{k0} - kb_d)/(b_{k0} - k), (kb_u - b_{k0})/(b_{k0} - k)\} < 1,$$

$$\rho_{kl} = \min\{1, (kr^s - b_{kl})/(b_{kl} - k)\} \quad (k, l \neq 0),$$

а $\rho_0 = (\sigma - M)/(M + 1)$ с константой M из (1.11). Тогда

1) при $|\rho| \leq \rho_* < \rho_{kl}$ цикл невозмущенной системы (0.2), проходящий через точку (ρ, l) , относится к тому же классу с номером $|k| + |l|$, что и выбранный цикл, параметризованный решением $CS_{kl}(\varphi)$ и получаемый в замене (2.6) при $\rho = 0$;

2) при $|\rho| \leq \rho_* < \rho_0$ в полосе B_ρ из (1.11) имеем: $|C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\rho| < \sigma$ и $|S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\rho| < \sigma$, а значит, в правой части системы (0.1) можно делать подстановку (2.6).

Доказательство. 1) Проверим для класса $0^e]$, что $x(0, \rho) = b_{00}^e(1 + \rho) \in (r^e, r^\sigma)$ при $|\rho| < \rho_{00}^e$. Согласно (2.7) $r^e/b_{00}^e \leq 1 - \rho_{00}^e$ и $\rho_{00}^e + 1 \leq r^\sigma/b_{00}^e$, поэтому $r^e \leq b_{00}^e(1 - \rho_{00}^e) < b_{00}^e(1 + \rho) < b_{00}^e(1 + \rho_{00}^e) \leq r^\sigma$.

Проверим еще для класса $1]$, что $kx(0, \rho) = kb_{k0} + k(b_{k0} - k)\rho \in (b_d, b_u)$ при $|\rho| < \rho_{k0}$, где b_d, b_u из (2.5), а $k = \pm 1$.

Согласно (2.7) $(kb_d - b_{k0})/(b_{k0} - k) \leq -\rho_{k0}$ и $(kb_u - b_{k0})/(b_{k0} - k) \geq \rho_{k0}$.

Тогда $b_d = kb_{k0} + k(kb_d - b_{k0}) \leq kb_{k0} - k(b_{k0} - k)\rho_{k0} < kb_{k0} + k(b_{k0} - k)\rho$,
 $b_u = kb_{k0} + k(kb_u - b_{k0}) \geq kb_{k0} + k(b_{k0} - k)\rho_{k0} > kb_{k0} + k(b_{k0} - k)\rho$.

Аналогично доказываются неравенства для классов $0^i]$ и $2]$.

2) В силу леммы 1.2 имеем: $M = \max_{\varphi \in B_\sigma} \{|C(\varphi)|, |S(\varphi)|\} < \sigma$, поэтому, например, $|S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\rho| < M + (M + 1)\rho_0 = \sigma$. \square

Лемма 2.3. Замена (2.6) при условии (2.7) на ρ^* преобразует систему (0.1) в систему

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(\mathcal{P}(\varphi, \rho) + \varepsilon \mathcal{R}_{kl}^\nu(t, \varphi, \rho, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \\ \dot{\varphi} &= \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(\mathcal{Q}(\varphi, \rho) + \varepsilon \mathcal{S}_{kl}^\nu(t, \varphi, \rho, \varepsilon))\varepsilon^\nu,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{kl} &= C'(\varphi)(S(\varphi) - l) - S'(\varphi)(C(\varphi) - k); \\ \mathcal{P} &= \alpha'_{kl}(\varphi)\rho + p_{kl}^*(\varphi)\rho^2 + \check{p}_{kl}^*(\varphi)\rho^3, \\ p_{kl}^* &= 3\gamma CS((S^2 - 1)(C - k)^2 - (C^2 - 1)(S - l)^2), \\ \check{p}_{kl}^* &= \gamma((S^3 - S)(C - k)^3 - (C^3 - C)(S - l)^3); \\ \mathcal{Q} &= (1 + \rho)^{-1}(\alpha_{kl}(\varphi) + q_{kl}^*(\varphi)\rho + \check{q}_{kl}^*(\varphi)\rho^2), \\ q_{kl}^* &= (C - k)^3(2C + k) + \gamma(S - l)^3(2S + l), \\ \check{q}_{kl}^* &= 3C(C - k)^3 + 3\gamma S(S - l)^3; \\ \mathcal{R}_{kl}^\nu &= -C'Y^\nu(\mathfrak{x}_\rho) + S'X^\nu(\mathfrak{x}_\rho), \\ \mathcal{S}_{kl}^\nu &= (1 + \rho)^{-1}((S - l)X^\nu(\mathfrak{x}_\rho) - (C - k)Y^\nu(\mathfrak{x}_\rho));\end{aligned}$$

$p_{kl}^*, \check{p}_{kl}^*, q_{kl}^*, \check{q}_{kl}^*$ — вещественно-аналитические, ω_{kl} -периодические функции; аргумент $\mathfrak{x}_\rho = (t, C + (C - k)\rho, S + (S - l)\rho, \varepsilon)$.

Доказательство. Дифференцируя замену (2.6) по t и разрешая полученные равенства относительно $\dot{\rho}$ и $\dot{\varphi}$ с использованием (2.1), имеем:

$$\alpha_{kl}(\varphi)\dot{\rho} = C'(\varphi)\dot{y} - S'(\varphi)\dot{x}, \quad (\rho + 1)\alpha_{kl}(\varphi)\dot{\varphi} = (S(\varphi) - l)\dot{x} - (C(\varphi) - k)\dot{y}.$$

Подставляя сюда правые части системы (0.1), получаем

$$\begin{aligned}\alpha_{kl}\dot{\rho} &= \left(C'(-(C + (C - k)\rho)^3 + C + (C - k)\rho + \varepsilon Y^\nu) - \right. \\ &\quad \left. - S'(\gamma((S + (S - l)\rho)^3 - (S + (S - l)\rho)) + \varepsilon X^\nu)\right)\varepsilon^\nu, \\ (\rho + 1)\alpha_{kl}\dot{\varphi} &= \left((S - l)(\gamma((S + (S - l)\rho)^3 - (S + (S - l)\rho)) + \varepsilon X^\nu) - \right. \\ &\quad \left. - (C - k)(-(C + (C - k)\rho)^3 + C + (C - k)\rho + \varepsilon Y^\nu)\right)\varepsilon^\nu.\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях ρ , убеждаемся, что полученная система с учетом того, что $|\rho| \leq \rho_* < 1$, может быть записана в виде (2.8). \square

Преобразуем невозмущенную часть системы (2.8).

Утверждение 2.2. В системе (2.8)

$$\begin{aligned}\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)\mathcal{P}(\varphi, \rho) &= -\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}(\varphi)\rho - p_{kl}(\varphi)\rho^2 + \check{p}_{kl}(\varphi)\rho^3, \\ \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)\mathcal{Q}(\varphi, \rho) &= 1 + \alpha_{kl}(\varphi)q_{kl}(\varphi)\rho + \check{q}_{kl}(\varphi)\rho^2 + \mathcal{Q}^*(\varphi, \rho)\rho^3,\end{aligned}\tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned}p_{kl} &= \alpha_{kl}^{-1}p^*, \quad \check{p}_{kl} = -\alpha_{kl}^{-1}\check{p}^*; \\ q_{kl} &= \alpha_{kl}^{-2}((C-k)^3(2C+k) + \gamma(S-l)^3(2S+l)), \\ \check{q}_{kl} &= \alpha_{kl}^{-1}((C-k)^4 + \gamma(S-l)^4),\end{aligned}$$

\mathcal{Q}^* — сходящийся при $|\rho| < \rho_*$ степенной ряд с вещественно-аналитическими ω_{kl} -периодическими по φ коэффициентами.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\varphi, \rho) &= (1 - \rho + \rho^2 + O(|\rho|^3))(\alpha_{kl}(\varphi) + q_{kl}^*(\varphi)\rho + \check{q}_{kl}^*(\varphi)\rho^2) = \\ &= \alpha_{kl}(\varphi) + (q_{kl}^*(\varphi) - \alpha_{kl}(\varphi))\rho + (\alpha_{kl}(\varphi) - q_{kl}^*(\varphi) + \check{q}_{kl}^*(\varphi))\rho^2 + \alpha_{kl}(\varphi)\mathcal{Q}^*(\varphi, \rho)\rho^3.\end{aligned}$$

Простые, но громоздкие вычисления показывают, что при записи \mathcal{Q} в виде (2.9) функции $q_{kl} = \alpha_{kl}^{-2}(q_{kl}^* - \alpha)$, $\check{q}_{kl} = \alpha_{kl}^{-1}(\alpha - q_{kl}^* + \check{q}_{kl}^*)$. \square

3 Первичное радиальное усреднение

3.1 Усреднение членов из невозмущенной части радиального уравнения

Усредним первые два слагаемых в правой части радиального уравнения специальной полярной системы (2.8).

Рассмотрим квадратичную по r и вещественно-аналитическую по φ в некоторой полосе B_ϱ из (1.8) радиально-усредняющую замену

$$\rho = \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(r + \beta_{kl}(\varphi)r^2), \quad \beta_{kl} = \int_0^\varphi (\xi_{kl}(s) - \bar{\xi}_{kl}) ds \quad (|r| \leq r_* < 1), \tag{3.1}$$

где $\xi_{kl}(\varphi) = \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(\alpha'_{kl}(\varphi)q_{kl}(\varphi) - p_{kl}(\varphi))$, $\bar{\xi}_{kl} = \frac{1}{\omega_{kl}} \int_0^{\omega_{kl}} \xi_{kl}(s) ds$ — это среднее значение функции $\xi_{kl}(\varphi)$.

Утверждение 3.1. *Предположим, что в замене (3.1)*

$$0 < r_* < \min \{(4\beta^*)^{-1}, r_0\}, \quad (3.2)$$

где $\beta^* = \max_{\varphi \in B_\varrho} |\beta_{kl}(\varphi)|$, $r_0 = \alpha_*(1 + \beta^*)^{-1}\rho_*$, $\alpha_* = \min_{\varphi \in B_\varrho} |\alpha_{kl}(\varphi)| > 0$, ρ_* из (2.7). Тогда имеем:

$$1) \quad 1/2 < |1 + 2\beta_{kl}r| < 3/2 \text{ при } |r| \leq r_* < (4\beta^*)^{-1};$$

$$2) \quad |\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(r + \beta_{kl}(\varphi)r^2)| < \rho_* \text{ при } |r| \leq r_* < r_0,$$

а значит, в правой части (2.8) можно делать подстановку (3.1).

Лемма 3.1. *Вещественно-аналитическая ω_{kl} -периодическая по φ замена (3.1), в которой $\bar{\xi}_{kl} = 0$, преобразует систему (2.8) в систему*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (P_{kl}(\varphi, r)r^3 + R_{kl}^{\nu\Diamond}(t, \varphi, r, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \\ \dot{\varphi} &= (1 + q_{kl}(\varphi)r + Q_{kl}(\varphi, r)r^2 + \Phi_{kl}^{\nu\Diamond}(t, \varphi, r, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $Q_{kl}(\varphi, r), P_{kl}(\varphi, r)$ — сходящийся при $|r| < r_*$ степенные ряды с вещественно-аналитическими ω_{kl} -периодическими по φ коэффициентами,

$$Q_{kl}(\varphi, 0) \equiv \beta_{kl}(\varphi)q_{kl}(\varphi) + \alpha_{kl}^{-2}(\varphi)\check{q}_{kl}(\varphi),$$

$$\begin{aligned} P_{kl}(\varphi, 0) &\equiv \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(2\alpha'_{kl}(\varphi)\beta_{kl}(\varphi)q_{kl}(\varphi) - \alpha_{kl}(\varphi)\beta'_{kl}(\varphi)q_{kl}(\varphi) + \\ &\quad + \alpha_{kl}^{-2}(\varphi)\alpha'_{kl}(\varphi)\check{q}_{kl}(\varphi) - 2\beta_{kl}(\varphi)p_{kl}(\varphi) + \alpha_{kl}^{-1}\check{p}_{kl}(\varphi)); \end{aligned}$$

$$\Phi_{kl}^{\nu\Diamond}(t, \varphi, r, \varepsilon) = \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)\mathcal{S}_{kl}^\nu(t, \varphi, \alpha_{kl}^{-1}(r + \beta_{kl}r^2), \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} R_{kl}^{\nu\Diamond}(t, \varphi, r, \varepsilon) &= (\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)\alpha'_{kl}(\varphi)r + (\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)\alpha'_{kl}(\varphi)\beta_{kl}(\varphi) - \beta'_{kl})r^2) \times \\ &\quad \times \mathcal{S}_{kl}^\nu(t, \varphi, \alpha_{kl}^{-1}(r + \beta_{kl}r^2), \varepsilon) - \mathcal{R}_{kl}^\nu(t, \varphi, \alpha_{kl}^{-1}(r + \beta_{kl}r^2), \varepsilon))(1 + 2\beta_{kl}(\varphi)r)^{-1} \end{aligned}$$

при условии, что r_* удовлетворяет неравенству (3.2) и неравенству

$$(2r_*)^{-1} > \max_{|r| \leq 1, \varphi \in B_\varrho} |q_{kl}(\varphi) + Q_{kl}(\varphi, r)r|. \quad (3.4)$$

Доказательство. Подставляя замену (3.1) во второе уравнение системы (2.8), получаем второе уравнение системы (3.3).

Дифференцируя замену (3.1) по t , имеем:

$$\dot{\rho} = (1 + 2\beta_{kl}r)\dot{r} - \alpha_{kl}^{-1}(\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}r + (\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}\beta_{kl} - \beta')r^2)\dot{\varphi}.$$

Подставляя в это равенство вместо \dot{r} правую часть первого уравнения системы (2.8), вместо $\dot{\varphi}$ уже найденную правую часть второго уравнения системы (3.3), умножая все на α_{kl} и приводя подобные члены, получаем

$$\dot{r} = (\bar{\xi}_{kl}(1 + 2\beta_{kl}(\varphi)r)^{-1}r^2 + Q_{kl}(\varphi, r)r^3 + R_{kl}^\nu(t, \varphi, r, \varepsilon)\varepsilon)^\nu,$$

так как согласно (3.1) среднее значение $\bar{\xi}_{kl} = \alpha_{kl}^{-1}(\alpha'_{kl}q_{kl} - p_{kl}) - \beta'_{kl}$.

Если допустить, что $\bar{\xi}_{kl} \neq 0$, то композиция замен (2.6) и (3.1)

$$x = C + (C - k)\alpha_{kl}^{-1}r(1 + \beta_{kl}r), \quad y = S + (S - l)\alpha_{kl}^{-1}r(1 + \beta_{kl}r),$$

примененная не к системе (0.1), а к гамильтоновой невозмущенной системе (0.2), приведет ее к «укороченной» системе

$$\dot{r} = (\bar{\xi}_{kl}(1 + 2\beta_{kl}(\varphi)r)^{-1} + Q_{kl}(\varphi, r)r)r^2\varepsilon^\nu, \quad \dot{\varphi} = (1 + q_{kl}(\varphi)r + \mathcal{Q}_{kl}(\varphi, r)r^2)\varepsilon^\nu,$$

описывающей движение в окрестности произвольно выбранного цикла.

Поскольку в замене (3.1) $|r| \leq r_* < 1$, с учетом (3.4) и (3.2), имеем:

$$\varepsilon^{-\nu}\dot{\varphi} > 1 - (2r_*)^{-1}|r| \geq 1/2, \quad \varepsilon^{-\nu}|\dot{r}| > (2|\bar{\xi}_{kl}|/3 - |Q_{kl}(\varphi, r)r|)r^2 > |\bar{\xi}_{kl}|r^2/3$$

при дополнительном ограничении $|\bar{\xi}_{kl}|(3r_*)^{-1} > \max_{|r| \leq 1, \varphi \in B_\varphi} |Q_{kl}(\varphi, r)|$.

В результате укороченная система, а с ней вместе и невозмущенная система (0.2), в малой окрестности произвольного цикла не имеют замкнутых траекторий. Это противоречие означает, что $\bar{\xi}_{kl} = 0$.

Следовательно, замена (3.1) приводит систему (2.8) к системе (3.3). \square

Замечание 3.1. Функция $\xi_{00}(\varphi)$ из (3.1) интегрируется в явном виде. Действительно,

$$p_{00} = 3\gamma\alpha^{-1}C(\varphi)S(\varphi)(S^2(\varphi) - C^2(\varphi)) = 3\alpha_{00}^{-1}\alpha'_{00}(\varphi)/2,$$

а для q_{00} верна цепочка равенств:

$$\begin{aligned} q_{00} &\stackrel{(2.8)}{=} 2\alpha_{00}^{-2}(C^4 + \gamma S^4) \stackrel{(1.2)}{=} 2\alpha_{00}^{-2}(a_{00} - 1 - \gamma + 2C^2 + 2\gamma S^2) \stackrel{(2.1)}{=} \\ &= 2\alpha_{00}^{-2}(2\alpha_{00} - (a_{00} - 1 - \gamma)) \stackrel{(1.5)}{=} 2\alpha_{00}^{-2}(2\alpha_{00} - (b_{00}^4 - 2b_{00}^2)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\xi_{00} = \alpha_{00}^{-2}(5/2 - 2(b_{00}^4 - 2b_{00}^2)\alpha_{00}^{-1})\alpha'_{00},$$

$$\beta_{00} = (b_{00}^4 - 2b_{00}^2)\alpha_{00}^{-2}(\varphi) - 5\alpha_{00}^{-1}(\varphi)/2 + (3b_{00}^2 - 1)(b_{00}^3 - b_{00})^{-2}/2,$$

т. е. $\beta_{00} = \beta_{00}(\alpha_{00}(\varphi))$.

3.2 Структура возмущенной части системы (3.3)

Выделим коэффициенты при младших степенях r, ε в функциях $R_{kl}^{\nu\diamond}, \Phi_{kl}^{\nu\diamond}$ системы (3.3).

Пусть $\mathfrak{x}_0 = (t, C, S, 0) \stackrel{(2.8)}{=} \mathfrak{x}_\rho|_{\rho, \varepsilon=0}$, тогда с учетом (2.8) и (0.1) имеем:

$$\begin{aligned} R_{kl}^\nu(t, \varphi) &= -\mathcal{R}_{kl}^\nu(t, \varphi, 0, 0) = C'Y^\nu(\mathfrak{x}_0) - S'X^\nu(\mathfrak{x}_0) = \\ &= C'Y_0^\nu(t, C, S) - S'X_0^\nu(t, C, S), \\ \Phi_{kl}^\nu(t, \varphi) &= \alpha_{kl}^{-1}\mathcal{S}_{kl}^\nu(t, \varphi, 0, 0) = \\ &= \alpha_{kl}^{-1}((S-l)X^\nu(\mathfrak{x}_0) - (C-k)Y^\nu(\mathfrak{x}_0)) = \\ &= \alpha_{kl}^{-1}((S-l)X_0^\nu(t, C, S) - (C-k)Y_0^\nu(t, C, S)); \\ \mathcal{R}_{klr}^{\nu'}(t, \varphi) &= \alpha_{kl}^{-1}(S'((C-k)X_{0x}^{\nu'}(\mathfrak{x}_0) + (S-l)X_{0y}^{\nu'}(\mathfrak{x}_0)) - \\ &\quad - C'((C-k)Y_{0x}^{\nu'}(\mathfrak{x}_0) + (S-l)Y_{0y}^{\nu'}(\mathfrak{x}_0))) = \\ &= \alpha_{kl}^{-1}(S'((C-k)X_{0x}^{\nu'}(t, C, S) + (S-l)X_{0y}^{\nu'}(t, C, S)) - \\ &\quad - C'((C-k)Y_{0x}^{\nu'}(t, C, S) + (S-l)Y_{0y}^{\nu'}(t, C, S))), \\ R_{klr}^{\nu'}(t, \varphi) &= -(\mathcal{R}_{klr}^{\nu'})^\diamond + \alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}\Phi_{kl}^{\nu\diamond} - 2\beta_{kl}R_{kl}^{\nu\diamond}, \\ R_{kl\varepsilon}^{\nu'}(t, \varphi) &= -(\mathcal{R}_{kl\varepsilon}^{\nu'})^\diamond(t, \varphi) = C'Y_\varepsilon^{\nu'}(\mathfrak{x}_0) - S'X_\varepsilon^{\nu'}(\mathfrak{x}_0) = \\ &= \begin{cases} C'Y_1^0(t, C, S) - S'X_1^0(t, C, S) & \text{при } \nu = 0, \\ C'Y_1^1(\mathfrak{x}_0) - S'X_1^1(\mathfrak{x}_0) & \text{при } \nu = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Лемма 3.2. *Существует $\varrho > 0$ такое, что функции, введенные в (3.5), являются непрерывными, двупериодическими, равномерно относительно t вещественно-аналитическими по φ на множестве B_ϱ из (1.8), за исключением функции $R_{kl\varepsilon}^{1'} \in C_{t,\varphi}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\mathcal{X}_\iota^\nu(t, \varphi, r) = X_\iota^\nu(t, \check{x}(\varphi, r), \check{y}(\varphi, r)), \quad \mathcal{Y}_\iota^\nu(t, \varphi, r) = Y_\iota^\nu(t, \check{x}(\varphi, r), \check{y}(\varphi, r)), \quad (3.6)$$

где $\iota = 0, 1$, причем $(\iota, \nu) \neq (1, 1)$; аргументы $\check{x} = C + (C-k)\alpha_{kl}^{-1}r(1 + \beta_{kl}r)$, $\check{y} = S + (S-l)\alpha_{kl}^{-1}r(1 + \beta_{kl}r)$ образует композиция замен (2.6) и (3.1).

В силу утверждения 3.1 и леммы 3.1 $|\check{x}(\varphi, r)|, |\check{y}(\varphi, r)| < \sigma$ при $|r| \leq r_*$ и $\varphi \in B_\varrho$, поэтому введенные в (3.6) функции являются непрерывными, двупериодическими, равномерно относительно t вещественно-аналитическими по φ, r на множестве $D_{\varphi,r} = \{(t, \varphi, r) : t \in \mathbb{R}, \varphi \in B_\varrho, |r| \leq r_*\}$, как композиции аналитических функций.

Запишем эти функции в следующем виде:

$$\mathcal{X}_l^\nu(t, \varphi, r) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{X}_{lj}^\nu(t, \varphi) r^j, \quad \mathcal{Y}_l^\nu(t, \varphi, r) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{Y}_{lj}^\nu(t, \varphi) r^j,$$

где $\mathcal{X}_{lj}^\nu(t, \varphi), \mathcal{Y}_{lj}^\nu(t, \varphi)$ — это непрерывные, двупериодические, равномерно относительно t вещественно-аналитические по φ функции на множестве \mathcal{B}_ϱ (см. лемму 1.1), ряды $\mathcal{X}^\nu, \mathcal{Y}^\nu$ абсолютно сходятся при $|r| < r_*$. Очевидно, что теми же свойствами обладают производные $\mathcal{X}_{0r}^{\nu'}(t, \varphi, r)$ и $\mathcal{Y}_{0r}^{\nu'}(t, \varphi, r)$.

Согласно (3.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{l0}^\nu(t, \varphi) &= X_l^\nu(t, C(\varphi), S(\varphi)), \quad \mathcal{Y}_{l0}^\nu(t, \varphi) = Y_l^\nu(t, C(\varphi), S(\varphi)), \\ \mathcal{X}_{01}^\nu(t, \varphi) &= X_{0x}^{\nu'}(t, C(\varphi), S(\varphi))\check{x}'(\varphi, 0) + X_{0y}^{\nu'}(t, C(\varphi), S(\varphi))\check{y}'(\varphi, 0), \\ \mathcal{Y}_{01}^\nu(t, \varphi) &= Y_{0x}^{\nu'}(t, C(\varphi), S(\varphi))\check{x}'(\varphi, 0) + Y_{0y}^{\nu'}(t, C(\varphi), S(\varphi))\check{y}'(\varphi, 0), \end{aligned}$$

поэтому в (3.5) $\mathcal{R}_{klr}^{\nu'}(t, \varphi) = -C'(\varphi)\mathcal{Y}_{01}^\nu(t, \varphi) + S'(\varphi)\mathcal{X}_{01}^\nu(t, \varphi)$. \square

В результате система (3.3) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{r} &= ((R_{kl}^\nu(t, \varphi) + R_{klr}^{\nu'}(t, \varphi)r + R_{kl\varepsilon}^{\nu'}(t, \varphi)\varepsilon)\varepsilon + R_{kl}^{\nu*}(t, \varphi, r, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \\ \dot{\varphi} &= (1 + q_{kl}(\varphi)r + \Phi_{kl}^\nu(t, \varphi)\varepsilon + \Phi_{kl}^{\nu*}(t, \varphi, r, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где функции $R_{kl}^{\nu*}, \Phi_{kl}^{\nu*}$ непрерывны, $R_{kl}^{\nu*} = O((|r| + \varepsilon)^3)$, $\Phi_{kl}^{\nu*} = O((|r| + \varepsilon)^2)$, $R_{kl}^{\nu*}, \Phi_{kl}^{\nu*} \in C_{t, \varphi, r, \varepsilon}^{0,1,1,0}(G_{\mathbb{R}, r_*, \varepsilon_0}^{\varphi, r, \varepsilon})$, $G_{\mathbb{R}, r_*, \varepsilon_0}^{\varphi, r, \varepsilon} = \{(t, \varphi, r, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4: |r| \leq r_*, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$.

Действительно, введенные в системе (3.3) функции $P_{kl}, Q_{kl}, R_{kl}^{\nu\diamond}, \Phi_{kl}^{\nu\diamond}$ как минимум принадлежат классу $C_{t, \varphi, r, \varepsilon}^{0,1,1,0}(G_{\mathbb{R}, r_*, \varepsilon_0}^{\varphi, r, \varepsilon})$ и непрерывны по совокупности аргументов. При этом указанных в (3.7) свойств функций $R_{kl}^{\nu*}, \Phi_{kl}^{\nu*}$ достаточно для получения всех последующих результатов.

4 Порождающее уравнение и порождающие циклы

4.1 Цель дальнейших преобразований

Итак, формула (3.7) задает семейство полученных из (0.1) систем, каждая из которых фиксируется выбором начального данного b_{kl} , удовлетворяющего ограничениям (1.4) и (2.5). Теперь надо выделить те b_{kl} , при каждом из которых соответствующая система (3.7) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ обладает двупериодической инвариантной поверхностью, имеющей непустое пересечение с произвольной наперед выбранной окрестностью точки (b_{kl}, l) .

Для этого в системе (3.7) предстоит осуществить ряд усредняющих и масштабирующих замен, включая замену угловой переменной, в результате которых будет получена система, к которой будет применима теорема 6.1 о существовании инвариантной поверхности.

4.2 Разложения двупериодических функций, условие Зигеля

Следуя предложенному алгоритму, в первую очередь усредним в системе (3.7) функции R_{kl}^ν , $R_{klr}^{\nu'}$, $R_{kl\varepsilon}^{\nu'}$, позаботившись о том, чтобы среднее значение $R_{kl}^\nu(t, \varphi)$ обратилось в нуль за счет выбора начального данного b_{kl} .

Но в системе (3.7) радиальные уравнения имеют вид $\dot{\varphi} = 1 + \dots$ при $\nu = 0$ и $\dot{\varphi} = \varepsilon + \dots$ при $\nu = 1$, поэтому последующие усредняющие замены и условия для их существования будут различны для разных значений ν .

Для непрерывных, T -периодических по t , ω -периодических по φ функций $\eta^\nu(t, \varphi)$ будем использовать разложение

$$\eta^\nu(t, \varphi) = \bar{\eta}^\nu + \hat{\eta}^\nu(\varphi) + \tilde{\eta}^\nu(t, \varphi) \quad (\nu = 0, 1),$$

в котором $\bar{\eta}^\nu = \frac{1}{\omega T} \int_0^\omega \int_0^T \eta^\nu(t, \varphi) dt d\varphi$ — среднее значение функции η^ν , $\hat{\eta}^0 = 0$, $\hat{\eta}^1 = \frac{1}{T} \int_0^T \eta^1(t, \varphi) dt - \bar{\eta}^1$.

Тогда функция $\tilde{\eta}^\nu(t, \varphi)$ имеет нулевое среднее значение по t , что влечет за собой, в частности, периодичность функции $\int_{t_*}^t \tilde{\eta}^\nu(s, \varphi) ds$, также имеющей нулевое среднее значение при должном выборе константы $t_* \in [0, T]$.

В дальнейшем производную по t любой двупериодической функции t и φ будем обозначать точкой, а по φ — штрихом.

Лемма 4.1. Пусть $\tilde{\eta}(t, \varphi)$ — это непрерывная, T -периодическая по t , вещественно-аналитическая и ω -периодическая по φ функция с нулевым средним значением, причем ее периоды удовлетворяет условию Зигеля на «малые знаменатели»

$$|m\omega + nT| > \vartheta(|m| + |n|)^{-3} \quad (\vartheta > 0; m, n \in \mathbb{Z}, m^2 + n^2 \neq 0). \quad (4.1)$$

Тогда уравнение

$$\dot{\tilde{\chi}}(t, \varphi) + \tilde{\chi}'(t, \varphi) = \tilde{\eta}(t, \varphi) \quad (4.2)$$

имеет единственное решение $\tilde{\chi}(t, \varphi)$, обладающее теми же свойствами, что и функция $\tilde{\eta}(t, \varphi)$. И его разложение в ряд Фурье по φ можно почленно дифференцировать по t и по φ .

Доказательство. По лемме 1.1 найдется такое $\varrho > 0$, что $\tilde{\eta}$ — двупериодическая на множестве \mathcal{B}_ϱ функция, для нее существует константа $M_\eta > 0$ такая, что $M_\eta = \max_{(t, \varphi) \in \mathcal{B}_\varrho} |\tilde{\eta}(t, \varphi)|$, и коэффициенты разложения $\eta_n(t) = \omega^{-1} \int_0^\omega \tilde{\eta}(t, \varphi) e^{-2\pi i n \varphi / \omega} d\varphi$ из (1.9) функции $\tilde{\eta}$ в ряд Фурье $\tilde{\eta}(t, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_n(t) e^{2\pi i n \varphi / \omega}$ на отрезке $[0, \omega]$ удовлетворяют оценке (1.10) $|\eta_n(t)| \leq M_\eta e^{-2\pi |n| \varrho / \omega}$ для всякого $t \in \mathbb{R}$; кроме того, $\eta_0(t) \equiv 0$.

Рассмотрим линейное уравнение

$$\dot{\chi}_n(t) = (-2\pi i n / \omega) \chi_n(t) + \eta_n(t) \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0). \quad (4.3)$$

Его единственное T -периодическое решение имеет вид:

$$\chi_n^p(t) = d_n^{-1} \int_{t-T}^t e^{2\pi i n (s-t) / \omega} \eta_n(s) ds, \quad d_n = 1 - e^{-2\pi i n T / \omega}. \quad (4.4)$$

Используя разложение $1 = e^{2\pi i m}$ ($m \in \mathbb{Z}$) и формулу Эйлера, получаем:

$$\forall m \in \mathbb{Z} : |d_n| = 2 |\sin(\pi(m + nT/\omega))|.$$

Положим

$$m_n = -[nT/\omega + 1/2],$$

тогда аргумент $|\pi(m_n + nT/\omega)| \leq \pi/2$, поскольку $0 \leq m_n + nT/\omega + 1/2 < 1$. Отсюда же вытекает, что $|m_n| \leq (T/\omega + 1)|n|$.

Используя оценку $|\sin x| \geq (2/\pi)|x|$ при $|x| \leq \pi/2$, заключаем, что

$$|d_n| \geq 4\omega^{-1} |m_n \omega + nT| > 4\vartheta \omega^{-1} (|m_n| + |n|)^{-3} \geq 4\vartheta \omega^{-1} ((T/\omega + 2)|n|)^{-3},$$

так как $n \neq 0$ и условие Зигеля (4.1) верно, в частности, при $m = m_n$.

В результате в формуле (4.4) с учетом (1.10) получаем

$$|\chi_n^p(t)| < M_* ((T/\omega + 2)|n|)^{-3} e^{-2\pi |n| \varrho / \omega}, \quad M_* = M_\eta T \omega (4K)^{-1}.$$

Тогда существует не зависящая от n положительная константа $M_\chi > 0$ такая, что $M_* ((T/\omega + 2)|n|)^3 e^{-2\pi |n| (\varrho/4) / \omega} \leq M_\chi$.

Следовательно, для $\chi_n^p(t)$ справедлива оценка, аналогичная (1.10):

$$\forall t \in \mathbb{R}: |\chi_n^p(t)| < M_\chi e^{-2\pi|n|(3\varrho/4)/\omega} \quad (n \neq 0). \quad (4.5)$$

Поэтому для функции $\chi_n^p(t)e^{2\pi in\varphi/\omega}$ на множестве $\mathcal{B}_{\varrho/2}$ справедлива оценка

$$|\chi_n^p(t)e^{2\pi in\varphi/\omega}| < M_\chi e^{-2\pi|n|(\varrho/4)/\omega},$$

гарантирующая, что для любого $t_* \in \mathbb{R}$ функция $\chi_n^p(t_*)e^{2\pi in\varphi/\omega}$ равномерно аналитична по φ в полосе $\mathcal{B}_{\varrho/2}$.

По теореме Вейерштрасса о равномерной сходимости функциональных рядов непрерывная, T -периодическая по t и ω -периодическая по φ , вещественная при вещественных φ функция

$$\tilde{\chi}(t, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n^p(t) e^{2\pi in\varphi/\omega} \quad (\chi_0^p(t) \equiv 0) \quad (4.6)$$

является аналитической по φ на множестве $\mathcal{B}_{\varrho/2}$.

Коэффициенты ряда, полученного почленным дифференцированием ряда (4.6) по φ , удовлетворяют не зависящей от t, φ экспоненциальной оценке, аналогичной (4.5) (возможно изменится константа M_χ), поэтому его сумма равна частной производной $\tilde{\chi}'(t, \varphi)$ на $\mathcal{B}_{\varrho/2}$.

Согласно (4.5) и (1.10) в (4.3)

$$|\dot{\chi}_n^p(t)| < (2\pi n M_\chi / \omega + M_\eta) e^{-2\pi|n|(3\varrho/4)/\omega}.$$

Тогда $|\dot{\chi}_n^p(t)e^{2\pi in\varphi/\omega}| < (2M_\chi \pi n / \omega + M_\eta) e^{-2\pi|n|(\varrho/4)/\omega}$ для любых $(t, \varphi) \in \mathcal{B}_{\varrho/2}$, т. е. коэффициенты ряда, полученного почленным дифференцированием ряда (4.6) по t , удовлетворяют экспоненциальной оценке, не зависящей от t, φ , а значит, его сумма равна частной производной $\tilde{\chi}(t, \varphi)$ на $\mathcal{B}_{\varrho/2}$.

Непосредственной подстановкой устанавливаем, что функции $\tilde{\chi}(t, \varphi)$ является решением уравнения (4.2) на множестве $\mathcal{B}_{\varrho/2}$. \square

4.3 Выбор порождающих циклов

Ключевую роль в дальнейшем будет играть введенная в (3.5) функция

$$R_{kl}^\nu(t, \varphi) = C'(\varphi) Y_0^\nu(t, C(\varphi), S(\varphi)) - S'(\varphi) X_0^\nu(t, C(\varphi), S(\varphi)), \quad (4.7)$$

где $(C(\varphi), S(\varphi))$ — вещественно-аналитическое ω_{kl} -периодическое решение задачи Коши системы (1.1) с начальными данными $C(0) = b_{kl}$, $S(0) = l$, параметр b_{kl} — любое число из (1.4) и (2.5), а период ω_{kl} подсчитан в (1.7).

Используя введенное в пункте 4.2 разложение, запишем R_{kl}^ν в виде

$$\begin{aligned} R_{kl}^\nu(t, \varphi) &= \overline{R_{kl}^\nu} + \widehat{R_{kl}^\nu}(\varphi) + \widetilde{R_{kl}^\nu}(t, \varphi), \\ \overline{R_{kl}^\nu} &= \overline{R_{kl}^\nu}(b_{kl}) = \frac{1}{T\omega_{kl}} \int_0^{\omega_{kl}} \int_0^T R_{kl}^\nu(t, \varphi) dt d\varphi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В случае, когда $\nu = 0$, рассмотрим уравнение

$$\dot{\widetilde{g}}_{kl}^0(t, \varphi) + \widetilde{g}_{kl}^{0'}(t, \varphi) = \widetilde{R_{kl}^0}(t, \varphi). \quad (4.9)$$

По лемме 4.1 оно имеет единственное решение $\widetilde{g}_{kl}^0(t, \varphi)$, обладающее установленными в лемме свойствами, а именно: $\widetilde{g}_{kl}^0(t, \varphi)$ — непрерывная, T -периодическая по t , вещественно-аналитическая и ω -периодическая по φ функция с нулевым средним значением.

Теперь сформулируем так называемое *условие невырожденности*:

$$K_{kl}^\nu \neq 0; \quad K_{kl}^0 = \overline{R_{klr}^{0'} - \widetilde{g}_{kl}^{0'} q_{kl}}, \quad K_{kl}^1 = \overline{R_{klr}^{1'} - \widehat{R_{kl}^1} q_{kl}}. \quad (4.10)$$

Отметим, что функция $\widetilde{g}_{kl}^0(t, \varphi)$ и константы K_{kl}^ν согласно формулам (3.5) зависят только от возмущений X_0^ν, Y_0^ν системы (0.1).

Определение 4.1. Корень порождающего уравнения

$$\overline{R_{kl}^\nu}(b_{kl}) = 0 \quad (4.11)$$

с $\overline{R_{kl}^\nu}$ из (4.8), будем называть допустимым для системы (0.1) и обозначать b_{kl}^* , если он удовлетворяет ограничениям (1.4) и (2.5), после выбора $b_{kl} = b_{kl}^*$ при $\nu = 0$ периоды T и ω_{kl} из (1.7) удовлетворяют условию Зигеля (4.1), а также выполняется условие невырожденности (4.10).

С этого момента зафиксируем какой-либо допустимый для системы (0.1) корень b_{kl}^* порождающего уравнения (4.11), выбирая, тем самым, ω_{kl} -периодическое решение задачи Коши $CS_{kl}(\varphi, 0, b_{kl}, l)$ системы (1.1), параметризующее цикл, относящийся к классу с номером $|k| + |l|$.

Все последующие замены и системы также фиксируются выбором b_{kl}^* . В частности, для них выполняются условия (4.1) и (4.10) и в системе (3.7) функция $R_{kl}^\nu(t, \varphi)$, введенная в (3.5), имеет нулевое среднее значение (4.8).

Обозначения. В дальнейшем нижний индекс функций и констант kl , подразумевающий фиксацию корня b_{kl}^* , будем для краткости заменять нижним индексом \star . Например, $R_{kl}^\nu = R_\star^\nu$, $K_{kl}^\nu = K_\star^\nu$, $q = q_\star$.

Определение 4.2. Для любого допустимого корня b_{kl}^* цикл $GC_\star = \{(x, y): x = C(\varphi), y = S(\varphi) \ (\varphi \in \mathbb{R})\}$ невозмущенной системы (0.2), параметризованный решением задачи Коши системы (1.1) с начальными данными $0, b_{kl}^*, l$, будем называть порождающим. Он является образующей цилиндрической инвариантной поверхности $CIS_\star = \{(x, y, t): x = C(\varphi), y = S(\varphi), t \in \mathbb{R} \ (\varphi \in \mathbb{R})\}$ системы (0.2).

Замечание 4.1. Интерес представляют системы (0.1) с непустым множеством допустимых корней уравнения (4.11). Ниже для любого b_{kl}^* будет доказано, что при всех достаточно малых ε в малой по ε окрестности CIS_\star возмущенная система (0.1) сохраняет двумерную инвариантную поверхность, гомеоморфную тору, если факторизовать время t по периоду T .

5 Построение инвариантной поверхности

5.1 Вторичное радиальное усреднение

В первом уравнении системы (3.7) усредним коэффициент, стоящий при $r\varepsilon$, и аннулируем коэффициент, стоящий при ε^2 .

Утверждение 5.1 Существует $\varrho > 0$ такое, что решения уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{h}}_\star^0 + \tilde{h}_\star^{0'} &= R_{\star r}^{0'} - \tilde{g}_\star^{0'} q_\star - K_\star^0, \quad \tilde{g}_\star^0 \text{ из (4.9),} \\ \dot{\tilde{f}}_\star^{0'} + \tilde{f}_\star^0 &= R_{\star r}^{0'}(\bar{g}_\star^0 + \tilde{g}_\star^0) + R_{\star \varepsilon}^{0'} - \tilde{g}_\star^{0'}(\Phi_\star^0 + (\bar{g}_\star^0 + \tilde{g}_\star^0)q_\star); \\ \widehat{\tilde{g}}_\star^{1'} &= \widehat{R}_\star^1, \quad \dot{\tilde{g}}_\star^1 = \widehat{R}_\star^1, \quad \widehat{\tilde{h}}_\star^{1'} = \widehat{R}_{\star r}^{1'} - \widehat{R}_\star^1 q_\star, \quad \dot{\tilde{h}}_\star^1 = \widehat{R}_{\star r}^{1'}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$\bar{g}_\star^0 = \frac{\overline{\tilde{g}_\star^{0'} \Phi_\star^0} - \overline{R_{\star \varepsilon}^{0'}} - \overline{\tilde{g}_\star^0 (R_{\star r}^{0'} - \tilde{g}_\star^{0'} q_\star)}}{K_\star^0}, \quad \bar{g}_\star^1 = \frac{\overline{\widehat{R}_\star^1 \Phi_\star^1} - \overline{R_{\star \varepsilon}^{1'}} - \overline{\widehat{\tilde{g}}_\star^1 (R_{\star r}^{1'} - \widehat{R}_\star^1 q_\star)}}{K_\star^1},$$

существуют, единственны и являются функциями непрерывными, T -периодическими и непрерывно дифференцируемыми по t , равномерно относительно t вещественно-аналитическими и ω_\star -периодическими по φ на множестве \mathcal{B}_ϱ из (1.8), а решения уравнений

$$\dot{\widehat{\tilde{f}}}_\star^{1'} = \widehat{\mathfrak{F}}_\star^1, \quad \dot{\widehat{\tilde{f}}}_\star^1 = \widehat{\mathfrak{F}}_\star^1, \quad (5.2)$$

где $\mathfrak{F}_\star^1 = \bar{g}_\star^1(R_{\star r}^{1'} - \widehat{R}_\star^1 q_\star) - (\widehat{R}_\star^1 \Phi_\star^1 - R_{\star \varepsilon}^{1'} - \widehat{\tilde{g}}_\star^1(R_{\star r}^{1'} - \widehat{R}_\star^1 q_\star) + \widehat{\tilde{g}}_\star^{1'})$, также единственны и принадлежат классу $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. К уравнениям (5.1) с $\nu = 0$, аналогичным (4.9), применима лемма 4.1, поскольку константы K_\star^0 и \bar{g}_\star^0 обращают средние значения правых частей в нуль.

Свойства решений уравнений (5.1) с $\nu = 1$ очевидны.

Решения уравнений (5.2) являются не аналитическими, а гладкими функциями, так как в \mathfrak{F}_\star^1 входит функция $R_{\star\epsilon}^{1'}$, обладающая только гладкостью по φ (см. лемму 3.2).

А единственность решения каждого уравнения, входящего в (5.1), (5.2) вытекает из условия равенства нулю его среднего значения. \square

Замечание 5.1. Только функция $R_{\star\epsilon}^{0'}$, введенная в (3.5), зависит от существенно-аналитических функций $X_1^0(t, x, y)$ и $Y_1^0(t, x, y)$, специально выделенных в системе (0.1) для того, чтобы иметь возможность находить при помощи леммы 4.1 двупериодическую функцию \tilde{f}_\star^0 из (5.1).

Рассмотрим двупериодическую по t и φ замену радиальной переменной

$$r = u + G_\star^\nu(t, \varphi, \epsilon)\epsilon + H_\star^\nu(t, \varphi, \epsilon)u\epsilon + F_\star^\nu(t, \varphi, \epsilon)\epsilon^2 \quad (\nu = 0, 1), \quad (5.3)$$

в которой

$$\begin{aligned} G_\star^0 &= \bar{g}_\star^0 + \tilde{g}_\star^0(t, \varphi), \quad H_\star^0 = \tilde{h}_\star^0(t, \varphi), \quad F_\star^0 = \tilde{f}_\star^0(t, \varphi); \\ G_\star^1 &= \bar{g}_\star^1 + \hat{g}_\star^1(\varphi) + \tilde{g}_\star^1(t, \varphi)\epsilon, \quad H_\star^1 = \hat{h}_\star^1(\varphi) + \tilde{h}_\star^1(t, \varphi)\epsilon, \quad F_\star^1 = \hat{f}_\star^1(\varphi) + \tilde{f}_\star^1(t, \varphi)\epsilon. \end{aligned}$$

Утверждение 5.2. Существуют $u_\star > 0$ и ϵ_\star ($0 < \epsilon_\star \leq \epsilon_0$) такие, что в (5.3) $|u + G_\star^\nu(t, \varphi, \epsilon)\epsilon + H_\star^\nu(t, \varphi, \epsilon)u\epsilon + F_\star^\nu(t, \varphi, \epsilon)\epsilon^2| \leq r_\star$ при любых $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in B_\varrho$, $|u| \leq u_\star$, $\epsilon \in [0, \epsilon_\star]$.

Действительно, с учетом леммы 1.1 и утверждения 5.1 модули функций $G_\star^\nu, H_\star^\nu, F_\star^0$ достигают своего максимума на множестве B_ϱ .

В результате при выбранных $\varrho, u_\star, \epsilon_\star$ в функции, входящие в систему (3.7), не нарушая их свойств, можно осуществлять подстановку (5.3).

Лемма 5.1. Система (3.7) заменой (5.3) сводится к системе

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (K_\star^\nu u\epsilon + U_\star^\nu(t, \varphi, u, \epsilon))\epsilon^\nu, \\ \dot{\varphi} &= (1 + \Theta_\star^\nu(t, \varphi)\epsilon + q_\star(\varphi)u + \check{\Phi}_\star^\nu(t, \varphi, u, \epsilon))\epsilon^\nu, \end{aligned} \quad (5.4)$$

в которой $\Theta_\star^0 = \Phi_\star^0 + (\bar{g}_\star^0 + \tilde{g}_\star^0)q_\star$, $\Theta_\star^1 = \Phi_\star^1 + (\bar{g}_\star^1 + \hat{g}_\star^1)q_\star$, q_\star — из (2.8), непрерывные, двупериодические по t и φ функции $U_\star^\nu, \check{\Phi}_\star^\nu \in C_{t, \varphi, u, \epsilon}^{0, 1, 1, 0}(G_{\mathbb{R}, u_\star, \epsilon_\star}^{\varphi, u, \epsilon})$,

где $G_{\mathbb{R}, u_*, \varepsilon_*}^{\varphi, u, \varepsilon} = \{(t, \varphi, u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4: |u| \leq u_*, \varepsilon \in [0, \varepsilon_*]\}$, и $U_*^\nu = O((|u| + \varepsilon)^3)$, $\check{\Phi}_*^\nu = O((|u| + \varepsilon)^2)$.

Доказательство. Подставляя замену (5.3) во второе уравнение системы (3.7), получаем: $\dot{\varphi} = (1 + q_*(u + G_*^\nu \varepsilon) + \Phi_*^\nu \varepsilon + O((|u| + \varepsilon)^2))\varepsilon^\nu$. Отсюда находим Θ_*^ν . Остальные слагаемые образуют функцию $\check{\Phi}_*^\nu(t, \varphi, u, \varepsilon)$.

Дифференцируя теперь замену (5.3) по t в силу систем (3.7) и (5.4) и сокращая на ε^ν , получаем тождество

$$\begin{aligned} & \varepsilon(R_*^\nu + R_{*r}^{\nu'}(u + G_*^\nu \varepsilon) + R_{*\varepsilon}^{\nu'}) + O((|u| + \varepsilon)^3) = \\ & = K_*^\nu u \varepsilon + G_*^{\nu'} \varepsilon(1 + \Theta_*^\nu \varepsilon + q_* u) + H_*^{\nu'} u \varepsilon + F_*^{\nu'} \varepsilon^2 + (\dot{G}_*^\nu + \dot{H}_*^\nu u + \dot{F}_*^\nu \varepsilon)\varepsilon^{1-\nu}, \end{aligned}$$

в котором все слагаемые, имеющие порядок не ниже третьего по u и ε собраны в непрерывной по $t, \varphi, u, \varepsilon$ из $G_{\mathbb{R}, u_*, \varepsilon_*}^{\varphi, u, \varepsilon}$ функции $O((|u| + \varepsilon)^3)$.

Если $\nu = 0$, то, приравнявая коэффициенты при $\varepsilon, u\varepsilon, \varepsilon^2$, получаем первые уравнения из (5.1). А если $\nu = 1$, то, приравнявая в тождестве коэффициенты при тех же степенях, получаем уравнения

$$\begin{aligned} R_*^1 &= \widehat{g}_*^{1'} + \dot{\widehat{g}}_*^1, \quad \widehat{h}_*^{1'} = \widehat{R}_{*r}^{1'} - \widehat{R}_*^1 q_*, \quad \dot{\widehat{h}}_*^1 = \widetilde{R}_{*r}^{1'}, \\ (\widehat{g}_*^1 + \widehat{g}_*^{1'})R_{*r}^{1'} + R_{*\varepsilon}^{1'} &= \widetilde{g}_*^{1'} + \widehat{g}_*^{1'}(\Phi_*^1 + (\widehat{g}_*^1 + \widehat{g}_*^{1'})q_*) + \widehat{f}_*^{1'} + \dot{\widehat{f}}_*^1, \end{aligned}$$

сводящиеся к уравнениям из (5.1¹) и (5.2). \square

5.2 Угловое усреднение

Остается сделать еще одно усреднение, а именно: во втором уравнении системы (5.4) предстоит усреднить непрерывную, T -периодическую по t , равномерно относительно t вещественно-аналитическую и ω_* -периодическую по φ функцию $\Theta_*^\nu(t, \varphi)$.

Утверждение 5.3. *Найдется такое $\varrho > 0$, что решения уравнений*

$$\widetilde{\delta}_*^{0'} + \dot{\widetilde{\delta}}_*^0 = \Theta_*^0(t, \psi) - \overline{\Theta_*^0}; \quad \widehat{\delta}_*^{1'} = \widehat{\Theta}_*^1(\psi), \quad \dot{\widehat{\delta}}_*^1 = \widetilde{\Theta}_*^1(t, \psi) \quad (5.5)$$

будут непрерывными, T -периодическими и непрерывно дифференцируемыми по t , равномерно относительно t вещественно-аналитическими и ω_ -периодическими по ψ функциями на множестве $\mathcal{B}_\varrho^\psi = \{(t, \psi) : t \in \mathbb{R}, \psi \in B_\varrho^\psi\}$ с $B_\varrho^\psi = \{(\operatorname{Re} \psi, \operatorname{Im} \psi) : \operatorname{Re} \psi \in \mathbb{R}, |\operatorname{Im} \psi| \leq \varrho\}$.*

Действительно, полученная в (5.4) функция $\Theta_*^0(t, \psi)$ удовлетворяет лемме 4.1. Остальное — очевидно.

Рассмотрим двупериодическую по t и ψ замену угловой переменной

$$\varphi = \psi + \Delta_\star^\nu(t, \psi, \varepsilon)\varepsilon, \quad (5.6)$$

в которой $\Delta_\star^0 = \tilde{\delta}_\star^0(t, \psi)$, $\Delta_\star^1 = \hat{\delta}_\star^1(\psi) + \tilde{\delta}_\star^1(t, \psi)\varepsilon$.

Утверждение 5.4. *Найдется $\varepsilon_\star > 0$ такое, что $|\psi + \Delta_\star^\nu(t, \psi, \varepsilon)\varepsilon| \leq \varrho$ при любых $(t, \psi) \in \mathcal{B}_\varrho^\psi$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_\star]$.*

В результате при выбранных $\varrho, \varepsilon_\star$ в функции, входящие в систему (5.4), не нарушая их свойств, можно осуществлять подстановку (5.6).

Лемма 5.2. *Система (5.4) непрерывной, T -периодической по t , равномерно относительно t вещественно-аналитической и ω_\star -периодической по ψ заменой угловой переменной (5.6) сводится к системе*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (K_\star^\nu u \varepsilon + \check{U}_\star^\nu(t, \psi, u, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \\ \dot{\psi} &= (1 + \overline{\Theta}_\star^\nu \varepsilon + q_\star(\psi)u + \check{\Psi}_\star^\nu(t, \psi, u, \varepsilon))\varepsilon^\nu, \end{aligned} \quad (5.7)$$

в которой непрерывные, двупериодические по t и ψ функции $\check{U}_\star^\nu, \check{\Psi}_\star^\nu \in C_{t, \psi, u, \varepsilon}^{0,1,1,0}(G_{\mathbb{R}, u_\star, \varepsilon_\star}^{\psi, u, \varepsilon})$, где $G_{\mathbb{R}, u_\star, \varepsilon_\star}^{\psi, u, \varepsilon} = \{(t, \psi, u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4 : |u| \leq u_\star, \varepsilon \in [0, \varepsilon_\star]\}$, при этом $\check{U}_\star^\nu = O((|u| + \varepsilon)^3)$, $\check{\Psi}_\star^\nu = O((|u| + \varepsilon)^2)$.

Доказательство. В первом уравнении системы (5.7) $\check{U}_\star^\nu(t, \psi, u, \varepsilon) = U_\star^\nu(t, \psi + \Delta_\star^\nu \varepsilon, u, \varepsilon)$. Дифференцируя теперь замену (5.6) по t в силу систем (5.4) и (5.7) и сокращая на ε^ν , получаем тождество

$$\begin{aligned} 1 + \Theta_\star^\nu(t, \psi + \Delta_\star^\nu \varepsilon)\varepsilon + q_\star(\psi + \Delta_\star^\nu \varepsilon)u + \check{\Phi}_\star^\nu(t, \psi + \Delta_\star^\nu \varepsilon, u, \varepsilon) &= \\ &= \dot{\Delta}_\star^\nu \varepsilon^{1-\nu} + (1 + \Delta_\star^{\nu'} \varepsilon)(1 + \overline{\Theta}_\star^\nu \varepsilon + q_\star(\psi)u + \check{\Psi}_\star^\nu(t, \psi, u, \varepsilon)), \end{aligned}$$

в котором $\Theta_\star^\nu(t, \psi + \Delta_\star^\nu \varepsilon) = \Theta_\star^\nu(t, \psi) + O(\varepsilon)$, $q_\star(\psi + \Delta_\star^\nu \varepsilon) = q_\star(\psi) + O(\varepsilon)$. Поэтому, приравнявая функции при ε , при $\nu = 0$ получаем первое из уравнений (5.5), а при $\nu = 1$ — уравнение $\Theta_\star^1(t, \psi) = \hat{\delta}_\star^{1'}(\psi) + \tilde{\delta}_\star^1(t, \psi) + \overline{\Theta}_\star^1$, которое распадается на два последних уравнения из (5.5).

Остальные слагаемые в тождестве задают функцию $\check{\Psi}_\star^\nu(t, \psi, u, \varepsilon)$, обладающую описанными в условии теоремы свойствами. \square

Следует отметить, что обратная к (5.6) замена имеет вид

$$\psi = \varphi + \Omega_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon, \quad (5.8)$$

где $\Omega_\star^0 = -\tilde{\delta}_\star^0(t, \varphi) + O(\varepsilon)$, $\Omega_\star^1 = -\hat{\delta}_\star^1(\varphi) + O(\varepsilon)$ — это T -периодические по t , ω_\star -периодические и равномерно относительно t вещественно-аналитические по φ функции.

5.3 Масштабирующие замены

Лемма 5.3. *Замена*

$$u = v\varepsilon^{3/2} \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*) \quad (5.9)$$

преобразует систему (5.7) в систему

$$\begin{aligned} \dot{v} &= (K_\star^\nu v\varepsilon + V_\star^\nu(t, \psi, v, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu, \\ \dot{\psi} &= (\mathcal{K}_{\star\varepsilon}^\nu + \Psi_\star^\nu(t, \psi, v, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu, \end{aligned} \quad (5.10)$$

в которой $\mathcal{K}_{\star\varepsilon}^\nu = 1 + \overline{\Theta}_\star^\nu\varepsilon > 0$; $V_\star^\nu = O((|v|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^3)\varepsilon^{-3}$, $\Psi_\star^\nu = q_\star(\psi)v + O((|v|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^2)\varepsilon^{-3/2}$ — непрерывные, двупериодические по t и ψ функции класса $C_{t,\psi,v,\varepsilon}^{0,1,1,0}(G_{\mathbb{R},v_*,\varepsilon_*}^{\psi,v,\varepsilon})$, где $G_{\mathbb{R},v_*,\varepsilon_*}^{\psi,v,\varepsilon} = \{(t, \psi, v, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4: |v| \leq v_*, \varepsilon \in [0, \varepsilon_*]\}$, причем $v_* = u_*$ из (5.7).

Введем константы $M = M_{\varepsilon_*} > 0$, и $L = L_{\varepsilon_*} > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \max_{G_{\mathbb{R},v_*,\varepsilon_*}^{\psi,v,\varepsilon}} \{|V_\star^\nu|, |\Psi_\star^\nu|\} &\leq M; \\ \forall (t, \psi_1, v_1, \varepsilon), (t, \psi_2, v_2, \varepsilon) \in G_{\mathbb{R},v_*,\varepsilon_*}^{\psi,v,\varepsilon} : \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} |V_\star^\nu(t, \psi_2, v_2, \varepsilon) - V_\star^\nu(t, \psi_1, v_1, \varepsilon)| &\leq L(|\psi_2 - \psi_1| + |v_2 - v_1|), \\ |\Psi_\star^\nu(t, \psi_2, v_2, \varepsilon) - \Psi_\star^\nu(t, \psi_1, v_1, \varepsilon)| &\leq L(|\psi_2 - \psi_1| + |v_2 - v_1|), \end{aligned}$$

т. е. выполняются условия Липшица по ψ и v с глобальной константой L .

Уменьшая при необходимости ε_* , что, очевидно, не влияет на величину M и L , добьемся выполнения неравенств

$$\mathcal{M} = M/|K_\star^\nu| \leq v_*\varepsilon_*^{-1/2}, \quad \mathcal{L} = 4L/|K_\star^\nu| \leq \varepsilon_*^{-1/2}, \quad (5.12)$$

при этом из неравенства (5.12₂) для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ вытекают оценки

$$L(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2})\varepsilon^{1/2} \leq |K_\star^\nu|/2, \quad 2L|K_\star^\nu|^{-1}\varepsilon^{1/2} \leq 1/2, \quad 2L(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2})|K_\star^\nu|^{-1} \leq \mathcal{L}.$$

Напомним, что $K_\star^\nu = K_{kl}^\nu$ — отличные от нуля константы из условия невырожденности. Они вычисляются по формулам (4.10) и зависят только от функций X_0^ν, Y_0^ν системы (0.1).

Осуществим еще одно масштабирование, положив

$$v = z\varepsilon^{1/2} \quad (|z| \leq z_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*), \quad (5.13)$$

где $z_\varepsilon = v_*\varepsilon^{-1/2}$. Тогда система (5.10) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (K_\star^\nu z + V_\star^\nu(t, \psi, z\varepsilon^{1/2}, \varepsilon))\varepsilon^{\nu+1}, \\ \dot{\psi} &= (\mathcal{K}_{\star\varepsilon}^\nu + \Psi_\star^\nu(t, \psi, z\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu. \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.4 Существование и свойства инвариантной поверхности

Теорема 5.1. Система (5.14) при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ имеет двумерную инвариантную поверхность

$$z = A'_\varepsilon(t, \psi) \quad (t, \psi \in \mathbb{R}), \quad (5.15)$$

параметризуемую непрерывной, T -периодической по t , ω_* -периодической и удовлетворяющей условию Липшица по ψ с глобальной константой \mathcal{L} функцией A'_ε , причем $\max_{t, \psi \in \mathbb{R}} |A'_\varepsilon(t, \psi)| \leq \mathcal{M}$, где \mathcal{M}, \mathcal{L} введены (5.12).

Доказательство. 1) Будем считать, что в системе (5.14) константа $K_*^\nu > 0$, в противном случае добьемся этого, заменив t на $-t$.

2) Обозначим через \mathcal{F} метрическое пространство вещественных, непрерывных, T -периодических по t , ω_* -периодических по ψ функций $F(t, \psi)$ удовлетворяющих неравенству $|F(t, \psi)| \leq \mathcal{M}$ и условию Липшица по ψ с константой \mathcal{L} , с метрикой равномерной сходимости

$$\rho(F_1, F_2) = \max_{t, \psi \in \mathbb{R}} |F_2(t, \psi) - F_1(t, \psi)|.$$

Метрическое пространство (\mathcal{F}, ρ) — полное, поскольку полными являются метрические пространства непрерывных на компакте $[0, T] \times [0, \omega_*]$ функций и двупериодических, непрерывных на \mathbb{R}^2 функций. А \mathcal{F} — это замкнутое подмножество последнего пространства.

Действительно, для любой последовательности $F_n \in \mathcal{F}$, $F_n \rightarrow F$ и для любой пары точек $(t, \psi_1), (t, \psi_2)$ рассмотрим числовые последовательности $a_n = |F_n(t, \psi_1) - F_n(t, \psi_2)|$, $b_n = \mathcal{L}|\psi_1 - \psi_2|$. По условию Липшица $a_n \leq b_n$ для любого n . Тогда по теореме о переходе к пределу в неравенствах, получаем оценку $|F(t, \psi_1) - F(t, \psi_2)| \leq \mathcal{L}|\psi_1 - \psi_2|$. А ограниченность модуля предельной функции той же константой \mathcal{M} очевидна.

3) Пусть $\psi^t = \psi(t, t_0, \psi^{t_0}, \varepsilon)$ — это решение задачи Коши уравнения

$$\dot{\psi} = (\mathcal{K}_{*\varepsilon}^\nu + \Psi_*^\nu(t, \psi, F(t, \psi)\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu \quad (F \in \mathcal{F}), \quad (5.16)$$

$$\text{т. е. } \psi^t = \psi^{t_0} + \int_{t_0}^t (\mathcal{K}_{*\varepsilon}^\nu + \Psi_*^\nu(s, \psi^s, F(s, \psi^s)\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu ds \quad (t_0, \psi^{t_0} \in \mathbb{R}).$$

Положим

$$h^t = |\psi_2^t - \psi_1^t|,$$

где ψ_j^t — решение уравнения (5.16) с $F = F_j$ ($j = 1, 2$). Тогда

$$\begin{aligned} h^t &\leq \\ h^{t_0} + \left| \int_{t_0}^t \left| \Psi_\star^\nu(s, \psi_2^s, F_2(s, \psi_2^s)\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) - \Psi_\star^\nu(s, \psi_1^s, F_1(s, \psi_1^s)\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) \right| \varepsilon^{\nu+3/2} ds \right| &\stackrel{(5.11_2)}{\leq} \\ &\leq h^{t_0} + L \left| \int_{t_0}^t (h^s + |F_2(s, \psi_2^s) - F_1(s, \psi_1^s)|\varepsilon^{1/2}) ds \right| \varepsilon^{\nu+3/2} \leq \\ &\leq h^{t_0} + L(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2}) \left| \int_{t_0}^t h^s ds \right| \varepsilon^{\nu+3/2} + L\rho(F_1, F_2)|t - t_0|\varepsilon^{\nu+2}, \end{aligned}$$

поскольку

$$|F_2(s, \psi_2^s) - F_1(s, \psi_1^s)| \leq \rho(F_1, F_2) + \mathcal{L}h^s, \quad (5.17)$$

так как $|F_2(s, \psi_2^s) - F_1(s, \psi_1^s)| \leq |F_2(s, \psi_2^s) - F_1(s, \psi_2^s)| + |F_1(s, \psi_2^s) - F_1(s, \psi_1^s)|$.

Применяя теперь усиленную лемму Гронуолла (см. [32, гл. 1, § 2]), получаем неравенство

$$\begin{aligned} h^t &\leq h^{t_0} e^{L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})|t-t_0|\varepsilon^{\nu+3/2}} + \\ &+ \rho(F_1, F_2)(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2})^{-1}(e^{L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})|t-t_0|\varepsilon^{\nu+3/2}} - 1)\varepsilon^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

4) На пространстве (\mathcal{F}, ρ) рассмотрим зависящее от параметра ε отображение $S_\varepsilon^\nu(F)$, задаваемое формулой

$$S_\varepsilon^\nu(F)(t_0, \psi^{t_0}) = - \int_{t_0}^\infty e^{-K_\star^\nu(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V_\star^\nu(s, \psi^s, F(s, \psi^s)\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds. \quad (5.19)$$

Покажем, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star]$ отображение $S_\varepsilon^\nu(F) \in \mathcal{F}$, т. е. действует из \mathcal{F} в \mathcal{F} , и является равномерно-сжимающим отображением.

а) Отображение $S_\varepsilon^\nu(F)$ — T -периодическое по t_0 . Действительно,

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^\nu(F)(t_0 + T, \psi^{t_0}) &= - \int_{t_0+T}^\infty e^{-K_\star^\nu(s-t_0-T)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V_\star^\nu(s, \tilde{\psi}^s, F(s, \tilde{\psi}^s)\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds = \\ &= - \int_{t_0}^\infty e^{-K_\star^\nu(\tau-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V_\star^\nu(\tau + T, \tilde{\psi}^{\tau+T}, F(\tau + T, \tilde{\psi}^{\tau+T})\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) d\tau, \end{aligned}$$

где по определению $\tilde{\psi}^s = \psi(s, t_0 + T, \tilde{\psi}^{t_0+T}, \varepsilon)$, причем $\tilde{\psi}^{t_0+T} = \psi^{t_0}$.

В силу T -периодичности Ψ_\star^ν по t функция $\tilde{\psi}^{t+T} = \psi(t + T, t_0 + T, \psi^{t_0}, \varepsilon)$ — это решение уравнения (5.16) с теми же начальными данными t_0, ψ^{t_0} , что и решение $\psi^t = \psi(t, t_0, \psi^{t_0}, \varepsilon)$, а значит, эти решения совпадают.

Теперь из T -периодичности функций V_\star^ν и F для всякого $t_0 \in \mathbb{R}^1$ вытекает требуемое тождество: $S_\varepsilon^\nu(F)(t_0 + T, \psi^{t_0}) = S_\varepsilon^\nu(F)(t_0, \psi^{t_0})$.

б) Покажем, что отображение $S_\varepsilon^\nu(F)$ — ω_\star -периодическое по ψ^{t_0} . В силу периодичности Ψ_\star^ν и F_ε функция $\check{\psi}^t = \psi(t, t_0, \psi^{t_0}, \varepsilon) + \omega_\star$ является решением уравнения (5.16), при этом оно имеет те же начальные данные $t_0, \psi^{t_0} + \omega_\star$, что и решение $\psi^t = \psi(t, t_0, \psi^{t_0} + \omega_\star, \varepsilon)$, а значит, они совпадают. Дальнейшее — очевидно.

$$\text{с) } |S_\varepsilon^\nu(F)(t_0, \psi^{t_0})| \leq M\varepsilon^{\nu+1} \int_{t_0}^{\infty} e^{-K_\star^\nu(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} ds \leq M(K_\star^\nu)^{-1} = \mathcal{M}.$$

д) Покажем одновременно, что $S_\varepsilon^\nu(F)$ удовлетворяет условию Липшица с константой \mathcal{L} , завершая, тем самым, доказательство принадлежности $S_\varepsilon^\nu(F)$ к \mathcal{F} , и что $S_\varepsilon^\nu(F)$ является сжимающим отображением на \mathcal{F} с коэффициентом сжимаемости, равным $1/2$.

Для любых $t_0, \psi_1^{t_0}, \psi_2^{t_0}$ и $F_1(t, \psi), F_2(t, \psi) \in \mathcal{F}$ верны неравенства:

$$\begin{aligned} & |S_\varepsilon^\nu(F_2)(t_0, \psi_2^{t_0}) - S_\varepsilon^\nu(F_1)(t_0, \psi_1^{t_0})| \stackrel{(5.11_1)}{\leq} \\ & \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-K_\star^\nu(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} L(h^s + |F_2(s, \psi_2^s) - F_1(s, \psi_1^s)|\varepsilon^{1/2}) ds \stackrel{(5.17)}{\leq} \rho(F_1, F_2)L \times \\ & \quad \times \int_{t_0}^{\infty} e^{-K_\star^\nu(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+3/2} ds + L(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2}) \int_{t_0}^{\infty} e^{-K_\star^\nu(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} h^s ds \stackrel{(5.18)}{\leq} \\ & \leq (\rho(F_1, F_2)L\varepsilon^{\nu+3/2} + \\ & \quad + L(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2})h^{t_0}\varepsilon^{\nu+1}) \int_{t_0}^{\infty} e^{(L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})\varepsilon^{\nu+1/2} - K_\star^\nu)(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} ds \stackrel{(5.12)}{\leq} \\ & \leq 2(\rho(F_1, F_2)L\varepsilon^{\nu+3/2} + L(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2})h^{t_0}\varepsilon^{\nu+1})/|K_\star^\nu\varepsilon^{\nu+1}| \stackrel{(5.12)}{\leq} \rho(F_1, F_2)/2 + \mathcal{L}h^{t_0}. \end{aligned}$$

Выбирая $F_2 = F_1 = F$, получаем неравенство Липшица

$$|S_\varepsilon^\nu(F)(t_0, \psi_2^{t_0}) - S_\varepsilon^\nu(F)(t_0, \psi_1^{t_0})| \leq \mathcal{L}h^{t_0}.$$

Выбирая $\psi_2^{t_0} = \psi_1^{t_0} = \psi^{t_0}$ ($h^{t_0} = 0$), получаем сжимающее неравенство

$$|S_\varepsilon^\nu(F_2)(t_0, \psi^{t_0}) - S_\varepsilon^\nu(F_1)(t_0, \psi^{t_0})| \leq \max_{t, \psi \in \mathbb{R}} |F_2(t, \psi) - F_1(t, \psi)|/2.$$

По теореме о принципе неподвижной точки из [33, гл. 9, § 7] (принцип сжимающих отображений) $S_\varepsilon^\nu(F)$ имеет единственную неподвижную точку A_ε^ν , т. е. $A_\varepsilon^\nu \in \mathcal{F}$ и $S_\varepsilon^\nu(A_\varepsilon^\nu)(t_0, \psi^{t_0}) = A_\varepsilon^\nu(t_0, \psi^{t_0})$.

Следовательно, для любых $t_0, \psi^{t_0} \in \mathbb{R}$ имеем:

$$A_\varepsilon^\nu(t_0, \psi^{t_0}) = - \int_{t_0}^{\infty} e^{-K_\star^\nu(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V_\star^\nu(s, \psi^s, A_\varepsilon^\nu(s, \psi^s) \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds, \quad (5.20)$$

где согласно (5.16) $\psi^s = \psi^{t_0} + \int_{t_0}^s (\mathcal{K}_{\star\varepsilon}^\nu + \Psi_\star^\nu(\tau, \psi^\tau, A_\varepsilon^\nu(\tau, \psi^\tau) \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) \varepsilon^{3/2}) \varepsilon^\nu d\tau$.

5) Выберем в качестве начальных данных для системы (5.14) произвольную точку $(t_A, \psi_A^{t_A}, z_A^{t_A})$, расположенную на поверхности $z = A_\varepsilon^\nu(t, \psi)$, т.е. $t_A, \psi_A^{t_A} \in \mathbb{R}$, $z_A^{t_A} = A_\varepsilon^\nu(t_A, \psi_A^{t_A})$.

Пусть $\psi_A^t = \psi(t, t_A, \psi_A^{t_A}, \varepsilon)$ — решение уравнения (5.16) с $F(t, \psi) = A_\varepsilon^\nu(t, \psi)$, т.е. $\psi_A^t = \psi_A^{t_A} + \int_{t_A}^t (\mathcal{K}_{\star\varepsilon}^\nu + \Psi_\star^\nu(s, \psi_A^s, A_\varepsilon^\nu(s, \psi_A^s) \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) \varepsilon^{3/2}) \varepsilon^\nu ds$. Тогда ψ_A^t удовлетворяет второму уравнению системы (5.14) с $z = A_\varepsilon^\nu(s, \psi_A^s) \varepsilon^{1/2}$.

Рассмотрим функцию

$$z_A^t = A_\varepsilon^\nu(t, \psi_A^t) \stackrel{(5.20)}{=} - \int_t^{\infty} e^{-K_\star^\nu(s-t)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V_\star^\nu(s, \psi_A^s, A_\varepsilon^\nu(s, \psi_A^s) \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds.$$

Ее график, очевидно, лежит на поверхности $z = A_\varepsilon^\nu(t, \psi)$. При этом

$$\begin{aligned} \dot{z}_A^t &= -K_\star^\nu \varepsilon^{\nu+1} \int_t^{\infty} e^{-K_\star^\nu(s-t)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V_\star^\nu(s, \psi_A^s, A_\varepsilon^\nu(s, \psi_A^s) \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds + \\ &+ V_\star^\nu(t, \psi_A^t, A_\varepsilon^\nu(t, \psi_A^t) \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) \varepsilon^{\nu+1} = (K_\star^\nu z_A^t + V_\star^\nu(t, \psi_A^t, z_A^t \varepsilon^{1/2}, \varepsilon)) \varepsilon^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, вектор-функция (z_A^t, ψ_A^t) — это решение задачи Коши системы (5.14) с начальными данными $t_A, \psi_A^{t_A}, A_\varepsilon^\nu(t_A, \psi_A^{t_A})$, а значит, поверхность (5.15) является инвариантной для системы (5.14). \square

Отметим, что при $\nu = 0$ эта теорема, как и теорема 1, доказанная Ю. Н. Бибиковым в [4, гл. 1], являются аналогами лемм Хейла (см. [5]). Доказательства упомянутых результатов имеют общую идею, но различаются, так как различаются условия на исходные системы.

Следующие три леммы описывают свойства полученной поверхности.

Лемма 5.4. Для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star]$, $\tilde{t}, \tilde{\psi}^t \in \mathbb{R}$ и $\tilde{z}^t: |\tilde{z}^t| \leq v_\star \varepsilon^{-1/2}$ рассмотрим функции $\tilde{z}^t = z(t, \tilde{t}, \tilde{\psi}^t, \tilde{z}^t, \varepsilon)$, $\tilde{\psi}^t = \psi(t, \tilde{t}, \tilde{\psi}^t, \tilde{z}^t, \varepsilon)$, являющиеся решением задачи Коши системы (5.14). Тогда

$$\tilde{z}^t - A_\varepsilon^\nu(t, \tilde{\psi}^t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0 \text{ при } K_\star^\nu > 0, \quad \tilde{z}^t - A_\varepsilon^\nu(t, \tilde{\psi}^t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ при } K_\star^\nu < 0,$$

где $A_\varepsilon^\nu(t, \psi)$ — функция, параметризующая инвариантную поверхность системы (5.14) из теоремы 5.1.

Доказательство. Пусть $K_\star^\nu > 0$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{z}_A^t = A_\varepsilon^\nu(t, \tilde{\psi}^t) \stackrel{(5.20)}{=} - \int_t^\infty e^{-K_\star^\nu(s-t)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V_\star^\nu(s, \tilde{\psi}^s, A_\varepsilon^\nu(s, \tilde{\psi}^s) \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds.$$

Тогда $\dot{\tilde{z}}_A^t = (K_\star^\nu \tilde{z}_A^t + V_\star^\nu(t, \tilde{\psi}^t, \tilde{z}_A^t \varepsilon^{1/2}, \varepsilon)) \varepsilon^{\nu+1}$, а \tilde{z}^t удовлетворяет первому уравнению системы (5.14).

Положив $w^t = \tilde{z}^t - \tilde{z}_A^t$ ($w^t \neq 0$, если $\tilde{z}^t \neq A_\varepsilon^\nu(\tilde{t}, \tilde{\psi}^{\tilde{t}})$), получаем

$$\dot{w}^t = (K_\star^\nu w^t + V_\star^\nu(t, \tilde{\psi}^t, \tilde{z}^t \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) - V_\star^\nu(t, \tilde{\psi}^t, \tilde{z}_A^t \varepsilon^{1/2}, \varepsilon)) \varepsilon^{\nu+1} = W(t) w^t \varepsilon^{\nu+1},$$

причем $|V_\star^\nu(t, \tilde{\psi}^t, \tilde{z}^t \varepsilon^{1/2}, \varepsilon) - V_\star^\nu(t, \tilde{\psi}^t, \tilde{z}_A^t \varepsilon^{1/2}, \varepsilon)| \stackrel{(5.11_2)}{\leq} L |w^t| \varepsilon^{1/2} \stackrel{(5.12)}{\leq} K_\star^\nu |w^t| / 4$.

Поэтому $W(t) \geq 3K_\star^\nu / 4$ и $\ln w^t = \ln w^{\tilde{t}} + \varepsilon^{\nu+1} \int_{\tilde{t}}^t W(s) ds \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\infty$.

Следовательно, $w^t = \tilde{z}^t - A_\varepsilon^\nu(t, \tilde{\psi}^t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

Если константа $K_\star^\nu < 0$, то, заменив t на $\tau = -t$ и действуя аналогично, получим тождество для w^τ . Подставив в него $\tau = -t$, установим, что $w^t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. \square

Будем говорить, что инвариантная поверхность (5.15) в указанном в лемме смысле асимптотически устойчива при $t \rightarrow -\infty$, если в условии невырожденности (4.10) $K_\star^\nu > 0$, или при $t \rightarrow +\infty$, если $K_\star^\nu < 0$.

Лемма 5.5. Функция $A_\varepsilon^\nu(t, \psi)$ из (5.20) имеет тот же порядок гладкости по ψ , что и правая часть системы (5.10).

Доказательство этой леммы имеется в [34].

Таким образом, в нашем случае $A_\varepsilon^\nu(t, \psi) \in C_{t,\psi}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$.

Лемма 5.6. Функция $A_\varepsilon^\nu(t, \psi)$ из (5.20) непрерывна по ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$.

Доказательство. 1) Покажем, что отображение $S_\varepsilon(F)$, введенное в (5.19), непрерывно по ε в полном метрическом пространстве (\mathcal{F}, ρ) .

Точнее говоря, для всякого $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_*)$, зафиксировав такое $c > 0$, что отрезок $\overline{P}_c = [\tilde{\varepsilon} - c, \tilde{\varepsilon} + c] \subset (0, \varepsilon_*]$, докажем, что $S_\varepsilon(F)$ непрерывно на \overline{P}_c .

Для любой $F \in \mathcal{F}$ и любых $t_0, \psi^{t_0} \in \mathbb{R}$ отображение $S_\varepsilon(F)(t_0, \psi^{t_0}) \stackrel{(5.19)}{=} \int_{t_0}^\infty h(s, \varepsilon) ds$, где $h = -e^{-K_\star^\nu(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V_\star^\nu(s, \psi^s, F(s, \psi^s) \varepsilon^{1/2}, \varepsilon)$ — непрерывная функция на множестве $R = \{(s, \varepsilon) : s \in [t_0, +\infty), \varepsilon \in \overline{P}_c\}$.

Действительно, V_\star^ν непрерывна по совокупности аргументов и решение $\psi_\varepsilon^s = \psi(s, t_0, \psi^{t_0}, \varepsilon)$ непрерывно в некоторой окрестности любой точки $(\check{s}, \check{\varepsilon}) \in$

R , так как по теореме об интегральной непрерывности оно непрерывно в трубчатой окрестности графика решения ψ_ε^s , $s \in [t_0, s_0)$ с любым $s_0 > \check{s}$.

Пусть $H(s) = M(\tilde{\varepsilon} + c)^{\nu+1} e^{-K_\star^\nu(s-t_0)(\tilde{\varepsilon}-c)^{\nu+1}}$ ($s \in [t_0, +\infty)$, M из (5.11₁)), тогда $h(s, \varepsilon) \leq H(s)$ для любых $(s, \varepsilon) \in R$ и $\int_{t_0}^\infty H(s) ds = \frac{M(\tilde{\varepsilon} + c)^{\nu+1}}{K_\star^\nu(\tilde{\varepsilon} - c)^{\nu+1}}$.

По мажорантному признаку Вейерштрасса (см. [33, гл. 17, § 2, утв. 2]) несобственный интеграл, задающий отображение $S_\varepsilon(F)$ в (5.19), сходится абсолютно и равномерно на отрезке \overline{P}_c и по теореме о непрерывности несобственного интеграла (см. [33, гл. 17, § 2, утв. 5]) он представляет собой значения непрерывной на \overline{P}_c функции S_ε .

Следовательно, согласно утверждению об устойчивости неподвижной точки из [33, гл. 9, § 7] функция A_ε^ν непрерывна по ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$. \square

6 Теоретические результаты

6.1 Существование двумерных инвариантных торов

Лемма 6.1. *Специальная полярная система (2.8) при любом b_{kl}^\star и при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ имеет двумерную инвариантную поверхность*

$$\rho = \Upsilon_\varepsilon^\nu(t, \varphi) \quad (t, \varphi \in \mathbb{R}), \quad (6.1)$$

параметризуемую непрерывной, T -периодической по t , непрерывно дифференцируемой и ω_\star -периодическую по φ функцией

$$\Upsilon_\varepsilon^\nu = \alpha_\star^{-1}(\varphi)(Z_\varepsilon^\nu(t, \varphi) + \beta_\star(\varphi)Z_\varepsilon^{\nu^2}(t, \varphi)),$$

где $Z_\varepsilon^\nu = G_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon + (A_\varepsilon^\nu(t, \varphi + \Omega_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon)(1 + H_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon) + F_\star^\nu(t, \varphi, \varepsilon))\varepsilon^2$. При этом Υ_ε^ν как функция ε ограничена и непрерывна по ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, а также равномерно относительно t, φ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . После подстановки поверхности (5.15) в композицию замен (5.3), (5.8), (5.9), (5.13) получаем поверхность $r = Z_\varepsilon^\nu(t, \varphi)$. Подставляя ее в замену (3.1), получаем поверхность (6.1). А ее ограниченность, непрерывность и равномерная сходимость к нулю вытекает из леммы 5.6, ограниченности функций $G_\star^\nu, H_\star^\nu, F_\star^\nu$, входящих в замену (5.3), и равномерной ограниченности функции A_ε^ν , поскольку $|A_\varepsilon^\nu(t, \varphi)| \leq \mathcal{M}$, где константа \mathcal{M} введена в (5.12). \square

Следствие. *Функции Υ_ε^0 и Υ_ε^1 из (6.1) имеют следующие асимптотические разложения: $\Upsilon_\varepsilon^0 = \alpha_\star^{-1}(\varphi)((\bar{g}_\star^0 + \tilde{g}_\star^0(t, \varphi))\varepsilon + (A_\varepsilon^0(t, \varphi) + \beta_\star(\varphi)(\bar{g}_\star^0 +$*

$\tilde{g}_\star^0(t, \varphi))^2 + \tilde{f}_\star^0(t, \varphi)\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3)$, $\Upsilon_\varepsilon^1 = \alpha_\star^{-1}(\varphi)((\bar{g}_\star^1 + \hat{g}_\star^1(\varphi))\varepsilon + (A_\varepsilon^1(t, \varphi) + \beta_\star(\varphi)(\bar{g}_\star^1 + \hat{g}_\star^1(\varphi))^2 + \hat{f}_\star^1(\varphi))\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3)$, где $A_\varepsilon^\nu(t, \varphi) = O(1)$ по ε .

Теорема 6.1. Пусть b_{kl}^\star — произвольный допустимый корень из определения 4.1, тогда: 1) система (0.1) при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star]$ имеет двумерную инвариантную поверхность

$$TIS_\varepsilon^\nu = \{(x, y, t): x = x_\varepsilon(t, \varphi), y = y_\varepsilon(t, \varphi), t \in \mathbb{R} \ (\varphi \in \mathbb{R})\}, \quad (6.2)$$

в которой $x_\varepsilon = C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\Upsilon_\varepsilon^\nu(t, \varphi)$, $y_\varepsilon = S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\Upsilon_\varepsilon^\nu(t, \varphi)$ — непрерывные, T -периодические по t , непрерывно дифференцируемые и ω_\star -периодические по φ функции, где $(C(\varphi), S(\varphi))$ — решение системы (1.1) с начальными данными $C(0) = b_{kl}^\star$, $S(0) = l$, а функция Υ_ε^ν из (6.1);

2) TIS_ε^ν , гомеоморфная двумерному тору, если факторизовать время t по периоду T , в указанном в лемме 5.4 смысле асимптотически устойчива при $t \rightarrow -\infty$, если в (4.10) $K_\star^\nu > 0$, а если $K_\star^\nu < 0$, то при $t \rightarrow +\infty$;

3) непрерывные по ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star)$ функции $x_\varepsilon(t, \varphi)$ и $y_\varepsilon(t, \varphi)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно относительно t, φ стремятся соответственно к $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$, т. е. TIS_ε^ν при малых ε расположена в сколь угодно малой окрестности цилиндрической поверхности CIS_\star из определения 4.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Подставляя функцию (6.1) в замену (2.6) получаем тороидальную инвариантную поверхность (6.2). А ее «равномерная сходимость» к CIS_\star автономной системы (0.2) вытекает из равномерной сходимости к нулю $\Upsilon_\varepsilon^\nu(t, \varphi)$, установленной в лемме 6.1. \square

6.2 Результаты в автономном случае

Посмотрим, какой вид принимают полученные выше результаты в важнейшем частном случае, когда система (0.1) автономна. Возможная теперь замена времени позволяет считать, что $\nu = 0$. При этом независимость от t возмущений позволяет ограничиться условиями, которым возмущения удовлетворяют при $\nu = 1$.

Таким образом, система (0.1) принимает вид

$$\dot{x} = \gamma(y^3 - y) + \varepsilon X^a(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = -(x^3 - x) + \varepsilon Y^a(x, y, \varepsilon) \quad (\gamma \in (0, 1]), \quad (0.1^a)$$

где $X^a = X_0^a(x, y) + X_1^a(x, y, \varepsilon)\varepsilon$, $Y^a = Y_0^a(x, y) + Y_1^a(x, y, \varepsilon)\varepsilon$, X_0^a, Y_0^a — вещественно-аналитические по x, y функции в $D_{\sigma, \sigma}^{x, y} = \{(x, y): |x|, |y| < \sigma\}$ при $\sigma > \sqrt{1 + \gamma^{-1/2}} \geq \sqrt{2}$ ($0 < \gamma \leq 1$); непрерывные функции $X_1^a, Y_1^a \in C^1(G_{\sigma, \sigma, \varepsilon_0}^{x, y, \varepsilon})$, множество $G_{\sigma, \sigma, \varepsilon_0}^{x, y, \varepsilon} = \{(x, y, \varepsilon): x, y \in \mathbb{R}, |x|, |y| \leq \sigma, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$.

Опишем последовательно изменения в обозначениях, определениях, формулах и результатах, связанные с автономностью исходной системы.

Верхний индекс ν теперь не требуется, как и лемма 4.1, в нумерацию формул, аналогичных имеющимся, добавляется символ a (*autonomous*) и для любых ω -периодических функций $\eta(\varphi)$ используется разложение $\eta(\varphi) = \bar{\eta} + \hat{\eta}(\varphi)$, где $\bar{\eta} = \int_0^\omega \eta(\varphi) d\varphi$ — среднее значение η . Далее,

$$R_{kl}^a = \overline{R_{kl}^a} + \widehat{R_{kl}^a}(\varphi) = C'(\varphi)Y_0^a(C(\varphi), S(\varphi)) - S'(\varphi)X_0^a(C(\varphi), S(\varphi)), \quad (4.7^a)$$

где $(C(\varphi), S(\varphi))$ — вещественно-аналитическое ω_{kl} -периодическое решение задачи Коши системы (1.1) с начальными данными $C(0) = b_{kl}$, $S(0) = l$; необходимое для доказательства теоремы о существовании инвариантной поверхности условие невырожденности принимает вид

$$K_{kl}^a = \overline{R_{klr}'} - \overline{R_{kl}^a q_{kl}} \neq 0, \quad (4.10^a)$$

где $R_{klr}' = R_{klr}'|_{(\varphi, 0, 0)}$ — из (3.5), а $q_{kl}(\varphi)$ — из (2.8).

Определение 4.1^a. *Корень порождающего уравнения*

$$\overline{R_{kl}^a}(b_{kl}) = \frac{1}{\omega_{kl}} \int_0^{\omega_{kl}} R_{kl}^a(\varphi) d\varphi = 0 \quad (4.11^a)$$

будем называть допустимым для системы (0.1^a) и обозначать b_{kl}^* , если он удовлетворяет ограничениям (1.4) и (2.5) и при его выборе выполняется условие невырожденности (4.10^a).

Зафиксируем произвольный допустимый корень b_{kl}^* . И нижние индексы kl везде, кроме b , заменим для краткости на \star , например, $K_{kl}^a = K_\star^a$. Тогда в лемме 5.1 замена (5.3) принимает вид

$$r = u + g_\star(\varphi)\varepsilon + \widehat{h}_\star(\varphi)u\varepsilon + \widehat{f}_\star(\varphi)\varepsilon^2, \quad (5.3^a)$$

где $\widehat{g}_\star(\varphi) = \int_{\varphi_g}^\varphi R_\star^a(s)ds$, $\bar{g}_\star = (\overline{R_\star^a(\Phi_\star^a + \widehat{g}_\star q_\star)} - \overline{R_{\star\varepsilon}'} - \overline{\widehat{g}_\star R_{\star r}'})/K_\star^a$, $\widehat{h}_\star(\varphi) = \int_{\varphi_h}^\varphi (R_{\star r}' - R_\star^a q_\star - K_\star^a)ds$, $\widehat{f}_\star(\varphi) = \int_{\varphi_f}^\varphi (\bar{g}_\star K_\star^a - R_\star^a(\Phi_\star^a + \widehat{g}_\star q_\star) + R_{\star\varepsilon}' + \widehat{g}_\star R_{\star r}')ds$, а $R_{\star\varepsilon}' = C'Y_1^a(C, S) - S'X_1^a(C, S)$ согласно (3.5).

После этого в системе (5.4) функция $\Theta_\star(\varphi) = \Phi_\star^a(\varphi) + g_\star q_\star(\varphi)$.

Сформулируем утверждение, включающее теорему 5.1, леммы 5.5, 5.6.

Теорема 5.1^a. Автономная система (5.14) с $\nu = 0$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ имеет двумерную цилиндрическую инвариантную поверхность

$$z = \mathcal{A}_\varepsilon(t, \psi) \quad (t, \psi \in \mathbb{R}) \quad (5.15^a)$$

с $\mathcal{A}_\varepsilon(t, \psi) \equiv A_\varepsilon(\psi)$, где $A_\varepsilon(\psi)$ — непрерывная, ω_* -периодическая, удовлетворяющей условию Липшица с глобальной константой \mathcal{L} функция, причем $\max |A'_\varepsilon(\psi)| \leq \mathcal{M}$, а \mathcal{M} и \mathcal{L} введены (5.12).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.1, в котором в качестве \mathcal{F} надо рассматривать метрическое пространство функций $F(\psi)$.

В результате график периодической функции $z = A'_\varepsilon(\psi)$ является образующей цилиндрической поверхности (5.15^a).

Теорема 6.1^a. Пусть b_{kl}^* — произвольный допустимый корень из определения 4.1^a, тогда: 1) система (0.1^a) при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ имеет инвариантный цикл

$$LC_\varepsilon = \{(x, y): x = x_\varepsilon(\varphi), y = y_\varepsilon(\varphi)\} \quad (\varphi \in \mathbb{R}), \quad (6.3)$$

обычно называемый предельным, у которого $x_\varepsilon = C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\Upsilon'_\varepsilon(\varphi)$, $y_\varepsilon = S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\Upsilon'_\varepsilon(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемые и ω_* -периодические по φ функции;

2) LC_ε асимптотически устойчив при $t \rightarrow -\infty$, если в (4.10^a) $K_*^a > 0$, а если $K_*^a < 0$, то при $t \rightarrow +\infty$;

3) непрерывные по ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ функции $x_\varepsilon(\varphi)$, $y_\varepsilon(\varphi)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно относительно t, φ стремятся соответственно к $C(\varphi)$, $S(\varphi)$, т. е. предельный цикл LC_ε при малом ε расположен в сколь угодно малой окрестности порождающего цикла GC_* из определения 4.2.

7 Практические результаты

7.1 Анализ порождающего уравнения

В системе (0.1) предполагается, что функции X_0^ν, Y_0^ν могут быть записаны в виде

$$X_0^\nu(t, x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} X_0^{(m,n)}(t) x^m y^n, \quad Y_0^\nu(t, x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} Y_0^{(m,n)}(t) x^m y^n, \quad (7.1)$$

где степенные ряды с вещественными, непрерывными и T -периодическими по t коэффициентами абсолютно сходятся при $|x|, |y| < \sigma$. Поэтому для любого значения параметра b_{kl} , задающего согласно (1.1), (1.4) и (2.5) функции $C(\varphi), S(\varphi)$, формула (4.7) принимает вид

$$R_{kl}^\nu(t, \varphi) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(Y_0^{(m,n)}(t) C'(\varphi) - X_0^{(m,n)}(t) S'(\varphi) \right) C^m(\varphi) S^n(\varphi).$$

Отсюда левая часть порождающего уравнения (4.11) имеет вид

$$\overline{R_{kl}^\nu}(b_{kl}) = \frac{1}{\omega_{kl}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\overline{Y_0^{(m,n)}} \int_0^{\omega_{kl}} C^m S^n C' d\varphi - \overline{X_0^{(m,n)}} \int_0^{\omega_{kl}} C^m S^n S' d\varphi \right),$$

причем при $n = 0$ первый из интегралов равен нулю, при $m = 0$ — второй.

Интегрируя тождество $(C^m S^{n+1})' = m C^{m-1} S^{n+1} C' + (n+1) C^m S^n S'$ по периоду и приводя подобные члены, получаем:

$$\overline{R_{kl}^\nu}(b_{kl}) = \frac{1}{T \omega_{kl}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m+1}{n} \overline{X_0^{(m+1,n-1)}} + \overline{Y_0^{(m,n)}} \right) I_{kl}^{mn},$$

где $I_{kl}^{mn} = \int_0^{\omega_{kl}} C^m(\varphi) S^n(\varphi) C'(\varphi) d\varphi$, причем для каждого из трех классов эта формула может быть упрощена, а именно:

$$\begin{aligned} \overline{R_{00}^\nu}(b_{00}) &= \frac{4}{\omega_{00}} \sum_{m,n=0}^{\infty} P^{(2m,2n+1)} J_{00}^{mn}, \\ \overline{R_{k0}^\nu}(b_{k0}) &= \frac{2}{\omega_{k0}} \sum_{m,n=0}^{\infty} P^{(m,2n+1)} J_{k0}^{mn}, \\ \overline{R_{kl}^\nu}(b_{kl}) &= \frac{1}{\omega_{kl}} \sum_{m,n=0}^{\infty} P^{(m,n+1)} J_{kl}^{mn} \quad (k, l = \pm 1), \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \text{где } P^{(m,n)} &= \frac{m+1}{n} \overline{X^{(m+1,n-1)}} + \overline{Y^{(m,n)}}; \quad J_{00}^{mn} = \left\{ \int_0^{r_0^{1e}} \varsigma^{2m} (S_+(\varsigma^2))^{2n+1} d\varsigma + \right. \\ &+ \left. \int_{r_0^{1e}}^{b_{00}^e} \varsigma^{2m} (S_-(\varsigma^2))^{2n+1} d\varsigma, \quad b_{00}^e \in (r^e, r^\sigma); \quad \int_{b_{00}^i}^0 \varsigma^{2m} (S_-(\varsigma^2))^{2n+1} d\varsigma, \quad b_{00}^i \in (0, r^i) \right\}, \\ k J_{k0}^{mn} &= \int_{kl_1^0}^{kl_1^1} \varsigma^m (S_-(\varsigma^2))^{2n+1} d\varsigma + \int_{kl_1^1}^{kr_1^1} \varsigma^m (S_+(\varsigma^2))^{2n+1} d\varsigma + \int_{kr_1^1}^{b_{k0}} \varsigma^m (S_-(\varsigma^2))^{2n+1} d\varsigma, \\ k J_{kl}^{mn} &= l^n \int_{kl_2^1}^{b_{kl}} \varsigma^m ((S_+(\varsigma^2))^{n+1} - (S_-(\varsigma^2))^{n+1}) d\varsigma; \quad S_\pm(\varsigma^2) \text{ из (1.6).} \end{aligned}$$

Выведем, например, первую из формул (7.2), помня, что используемые в (7.2) константы введены в (1.5).

В классе 0^e], когда $b_{00}^e \in (r^e, r^\sigma)$, движение по циклу происходит по часовой стрелке и функция $S^2(\varphi) - 1$ в каждой четверти меняет знак при $|C(\varphi)| = r_{0e}^1$. Поэтому $I_{00}^{mn} = \int_{b_{00}^e}^{r_{0e}^{1e}} \varsigma^m (-S_-(\varsigma^2))^n d\varsigma + \int_{r_{0e}^{1e}}^0 \varsigma^m (-S_+(\varsigma^2))^n d\varsigma + \int_0^{-r_{0e}^{1e}} \varsigma^m (-S_+(\varsigma^2))^n d\varsigma + \int_{-r_{0e}^{1e}}^{-b_{00}^e} \varsigma^m (-S_-(\varsigma^2))^n d\varsigma + \int_{-b_{00}^e}^{-r_{0e}^{1e}} \varsigma^m (S_-(\varsigma^2))^n d\varsigma + \int_{-r_{0e}^{1e}}^0 \varsigma^m (S_+(\varsigma^2))^n d\varsigma + I_e$, где $I_e = \int_0^{r_{0e}^{1e}} \varsigma^m (S_+(\varsigma^2))^n d\varsigma + \int_{r_{0e}^{1e}}^{b_{00}^e} \varsigma^m (S_-(\varsigma^2))^n d\varsigma$.

Очевидно, что $I_{00}^{mn} = 4I_e$, если m четно, а n нечетно. В остальных случаях $I_{00}^{mn} = 0$. Остается сделать переиндексацию.

В классе 0^i], когда $b_{00}^i \in (0, r^i)$, движение происходит против часовой стрелки. Поэтому $I_{00}^{mn} = I_i + \int_0^{-b_{00}^i} \varsigma^m (S_-(\varsigma^2))^n d\varsigma + \int_{-b_{00}^i}^0 \varsigma^m (-S_-(\varsigma^2))^n d\varsigma + \int_0^{b_{00}^i} \varsigma^m (-S_-(\varsigma^2))^n d\varsigma$, где $I_i = \int_{b_{00}^i}^0 \varsigma^m (S_-(\varsigma^2))^n d\varsigma$. Далее, $I_{00}^{mn} = 4I_i$, если число m — четное, а число n — нечетное. В остальных случаях $I_{00}^{mn} = 0$.

7.2 Практическое применение полученных результатов

Приведем пример системы (0.1), в которой аналитические разложения (7.1) функций X_0^ν, Y_0^ν не содержат членов выше третьего порядка, имеющих ненулевые средние значения, а сама система имеет при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ одиннадцать двумерных инвариантных торov вида (6.2).

Лемма 7.1. Пусть в системе (0.1)

$$\begin{aligned} \gamma &= 1/2, \quad T = 2\pi, \quad \sigma > \sqrt{6}; \\ \nu = 1: \quad \overline{X_0^{(m,n)}} &= 0, \quad \overline{Y_0^{(m,n)}} = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}_+), \quad \text{кроме} \\ \tau_0 &= \overline{Y_0^{(0,1)}} = -3.314, \quad \tau_1 = \overline{Y_0^{(0,3)}} = -0.361, \quad \tau_2 = \overline{Y_0^{(2,1)}} = 4.493; \\ \nu = 0: \quad X_0^0 &= \cos t, \quad Y_0^0 = \tau_0(y + \sin t) + \tau_1 y^3 + \tau_2(x^2 y + \sin t). \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $\overline{X_0^{(m,n)}}, \overline{Y_0^{(m,n)}}$ — средние значения коэффициентов из разложения (7.1). Тогда порождающее уравнение (4.11) имеет одиннадцать корней, обозначаемых b_{kl}^j и лежащих в следующих интервалах: $b_{00}^0 \in (1.795, 1.815)$,

$kb_{k0}^1 \in (1.118, 1.148)$, $kb_{k1}^2, kb_{k,-1}^2 \in (1.266, 1.276)$, $kb_{k1}^3, kb_{k,-1}^3 \in (1.299, 1.303)$ ($k = \pm 1$), которые удовлетворяют ограничениям (1.4) и (2.5). При этом периоды ω_{kl}^j решений системы (1.1) $CS_{kl}^j(\varphi) = (C(\varphi), S(\varphi))$ с начальными данными $C(0) = b_{kl}^j$, $S(0) = l$ лежат в следующих интервалах: $\omega_{00}^0 \in (3.81, 3.94)$, $\omega_{k0}^1 \in (13.25, 14.05)$, $\omega_{kl}^2 \in (5.99, 6.29)$, $\omega_{kl}^3 \in (7.72, 8.49)$ (см. рис. 3.4), а одиннадцать констант $K_{kl}^{\nu j}$ из условия (4.10) имеют следующие значения: $K_{00}^{00} \approx 2.78$, $K_{k0}^{01} \approx -0.34$, $K_{kl}^{02} \approx -0.29$, $K_{kl}^{03} \approx 2.07$; $K_{00}^{10} \approx 2.79$, $K_{k0}^{11} \approx -0.32$, $K_{kl}^{12} \approx -0.05$, $K_{kl}^{13} \approx 0.10$ ($k, l = \pm 1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о . В рассматриваемой в лемме системе (0.1) $r^i = 2^{-1/4}(\sqrt{2} - 1) \approx 0.348$, $r^e = r^s = 2^{-1/4}(\sqrt{2} + 1) \approx 1.306$ согласно (1.3), $r^\sigma > (1 + \sqrt{12})^{1/2} > 2.113$ согласно (1.4), а $b_d(0.5) = 1.15 - 0.16 \cdot 0.3^{1/2} \approx 1.062$, $b_u(0.5) = 1.15 + 0.28 \cdot 0.3^{1/2} \approx 1.303$ согласно (2.5).

Следовательно, интервалы изменения начальных данных b_{kl} с приближенно указанными границами таковы: в классе 0] $b_{00}^i \in (0, 0.348)$, $b_{00}^e \in (1.306, 2.113)$, в классе 1] $kb_{k0} \in (1.062, 1.303)$, в классе 2] $kb_{kl} \in (1, 1.306)$. При этом каждый из них содержит соответствующий интервал из условия теоремы, для граничных значений которого по формулам (1.7) найдены граничные значения изменения периодов ω_{kl}^j .

В свою очередь, формулы (7.2) принимают вид:

$$\overline{R_{00}^\nu}(b_{00}) = 4(\overline{Y^{(0,1)}}J_{00}^{00} + \overline{Y^{(0,3)}}J_{00}^{01} + \overline{Y^{(2,1)}}J_{00}^{10})/\omega_{00},$$

$$\overline{R_{k0}^\nu}(b_{k0}) = 2(\overline{Y^{(0,1)}}J_{k0}^{00} + \overline{Y^{(0,3)}}J_{k0}^{01} + \overline{Y^{(2,1)}}J_{k0}^{20})/\omega_{k0},$$

$$\overline{R_{kl}^\nu}(b_{kl}) = (\overline{Y^{(0,1)}}J_{kl}^{00} + \overline{Y^{(0,3)}}J_{kl}^{02} + \overline{Y^{(2,1)}}J_{kl}^{20})/\omega_{kl}.$$

Отметим, что в эти три формулы вошли все одиннадцать случаев, поскольку в (7.3) ненулевыми выбраны средние значения тех коэффициентов системы, для которых в классе 1] $J_{10}^{mn} = J_{-10}^{mn}$ при четных m и любых n , а в классе 2] $J_{11}^{mn} = J_{-11}^{mn} = J_{-1,-1}^{mn} = J_{1,-1}^{mn}$ при четных m и n .

Для каждого класса, изменяя b в указанных выше допустимых пределах, вычисляем значения $\overline{R_{kl}^\nu}(b_{kl})$, скажем, с шагом 10^{-3} , наблюдая за их знаком.

Выясняется следующее:

$$\text{в классе 0] } \overline{R_{00}^\nu}(1.795) < -10^{-4}, \quad \overline{R_{00}^\nu}(1.815) > 10^{-4};$$

$$\text{в классе 1] } \overline{R_{k0}^\nu}(1.118 \cdot k) > 10^{-4}, \quad \overline{R_{k0}^\nu}(1.148 \cdot k) < -10^{-4};$$

$$\text{в классе 2] } \overline{R_{kl}^\nu}(1.266 \cdot k) > 10^{-4}, \quad \overline{R_{kl}^\nu}(1.276 \cdot k) < -10^{-4};$$

в классе 2] $\overline{R_{kl}^\nu}(1.299 \cdot k) < -10^{-4}$, $\overline{R_{kl}^\nu}(1.303 \cdot k) > 10^{-4}$

и другие изменения знака у функций $\overline{R_{kl}^\nu}$ отсутствуют. Поэтому найдутся одиннадцать значений параметра b в указанных в условиях теоремы границах, которые являются корнями порождающего уравнения (4.11).

При $\nu = 1$ для каждого найденного $b_\star = b_{kl}^j$ и соответствующего периода $\omega_\star = \omega_{kl}^j$, подсчитанного в (1.7), приближенное значение константы $K_\star^1 = K_{kl}^{1j}$ из условия невырожденности (4.10) вычисляется по формуле:

$$K_\star^1 = \overline{R_{\star r}^{1'}} - \overline{\widehat{R_{\star}^1} q_\star} = \frac{1}{\omega_\star} \int_0^{\omega_\star} \mathfrak{R}_\star^1(\varphi) d\varphi,$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\star^1 = & \alpha_\star^{-1} C' (2\tau_2 C (C - k) S + (\tau_1 + \tau_2 C^2 + 3\tau_3 S^2) (S - l)) - \\ & - (\tau_1 S + \tau_2 C^2 S + \tau_3 S^3) (\alpha_\star^{-2} \alpha'_\star (C - k) + 2\beta_\star C') - q_\star C' (\tau_1 S + \tau_2 C^2 S + \tau_3 S^3). \end{aligned}$$

При $\nu = 0$ для каждого найденного $b_\star = b_{kl}^j$ и соответствующего ему $\omega_\star = \omega_{kl}^j$ в первую очередь ищем $\tilde{g}_\star^0(t, \varphi) = \tilde{g}_{kl}^{0j}(t, \varphi)$ из уравнения (4.9). Для этого в формулах (4.2), (4.3), (4.6) из леммы 4.1 переходим к вещественной записи рядов Фурье. Положим

$$\eta_1^{(n)} = \frac{2}{\omega_\star} \int_0^{\omega_\star} \tilde{R}_\star^0(t, \varphi) \cos \frac{2\pi n \varphi}{\omega_\star} d\varphi, \quad \eta_2^{(n)} = \frac{2}{\omega_\star} \int_0^{\omega_\star} \tilde{R}_\star^0(t, \varphi) \sin \frac{2\pi n \varphi}{\omega_\star} d\varphi,$$

тогда

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\star^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\eta_1^{(n)}(t) \cos \frac{2\pi n \varphi}{\omega_\star} + \eta_2^{(n)}(t) \sin \frac{2\pi n \varphi}{\omega_\star} \right), \\ \tilde{g}_\star^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\check{\chi}_1^{(n)}(t) \cos \frac{2\pi n \varphi}{\omega_\star} + \check{\chi}_2^{(n)}(t) \sin \frac{2\pi n \varphi}{\omega_\star} \right), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где для любого n вектор $\check{\chi}^{(n)}(t)$ T -периодических коэффициентов ($T = 2\pi$) удовлетворяет линейной системе

$$\dot{\chi}^{(n)} = A^{(n)} \chi^{(n)} + \eta^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (7.5)$$

с матрицей $A^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_n = \frac{2\pi n}{\omega_\star}$ и собственными числами $\pm i\alpha_n$.

Система (7.5) является вещественным аналогом уравнения (4.3) и имеет единственное T -периодическое вещественное решение $\check{\chi}^{(n)}$ при условии, что

$\lambda_i T / (2\pi i) \notin \mathbb{Z}$ ($i = 1, 2$), или $nT - m\omega_* \neq 0$ ($m, n \in \mathbb{N}$), что верно в силу условия Зигеля (4.1). Решение записывается в виде:

$$\check{\chi}^{(n)}(t) = (E - e^{A^{(n)}T})^{-1} \int_{t-T}^t e^{A^{(n)}(t-s)} \eta^{(n)}(s) ds \quad (T = 2\pi),$$

где $e^{A^{(n)}t} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n t & -\sin \alpha_n t \\ \sin \alpha_n t & \cos \alpha_n t \end{pmatrix}$ — нормированная фундаментальная матри-

ца системы $\dot{\chi}^{(n)} = A^{(n)}\chi^{(n)}$, $(E - e^{A^{(n)}T})^{-1} = (2 - 2\cos \alpha_n T)^{-1} \begin{pmatrix} \varpi_n & -\varkappa_n \\ \varkappa_n & \varpi_n \end{pmatrix}$,

$\varpi_n = \cos \alpha_n t - \cos \alpha_n (T - t)$, $\varkappa_n = \sin \alpha_n t + \sin \alpha_n (T - t)$.

При этом $\cos \alpha_n T = \cos(2\pi\omega_*^{-1}(nT - m\omega_*))$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Приближенные значения функции \tilde{g}_*^0 вычислены в точках $(l_\varphi h_\varphi, l_t h_t)$, где $0 \leq l_\varphi, l_t \leq 101$, $h_\varphi = 0.01\omega_*$, $h_t = 0.02\pi$, с использованием в разложениях в ряды Фурье (7.4) конечных сумм из пятнадцати первых членов.

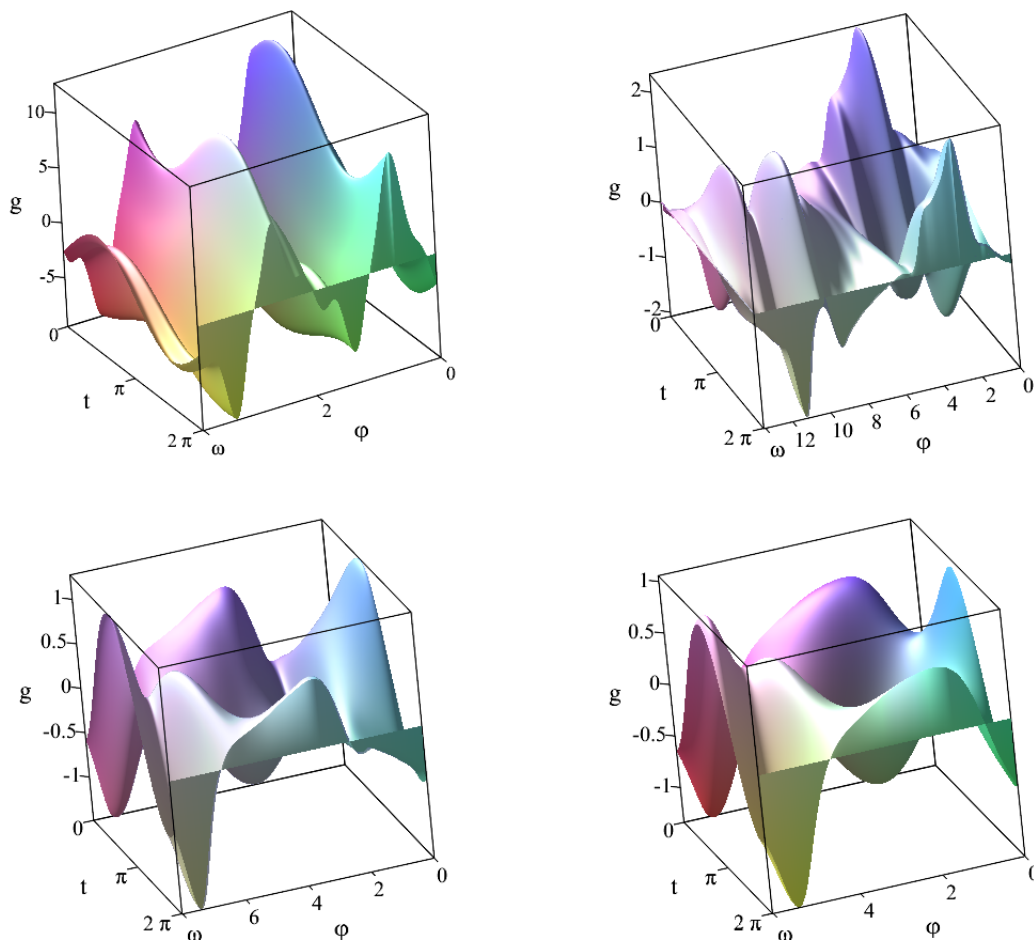


Рис. 7.1. Графики двупериодических функций $\tilde{g}_{00}^{00}(t, \varphi)$, $\tilde{g}_{10}^{01}(t, \varphi)$, $\tilde{g}_{02}^{11}(t, \varphi)$, $\tilde{g}_{11}^{03}(t, \varphi)$.

Двупериодичность \tilde{g}_\star^0 подтверждается после сравнения ее приближенных значений на концах каждого из двух отрезков длины периода:

$$|\tilde{g}_\star^0(l_\varphi h_\varphi, 0) - \tilde{g}_\star^0(l_\varphi h_\varphi, 2\pi)|, |\tilde{g}_\star^0(0, l_t h_t) - \tilde{g}_\star^0(\omega_\star, l_t h_t)| < 0.011 \quad (l_\varphi, l_t = \overline{0, 100}).$$

Согласно лемме 4.1 функция \tilde{g}_\star^0 непрерывно дифференцируема, поэтому вычисляем приближенные значения функции $\tilde{g}_{kl}^{0'}$ в тех же точках, что и \tilde{g}_\star^0 , по формуле: $\tilde{g}_{kl}^{0'}(l_\varphi h_\varphi, l_t h_t) = 100(\tilde{g}_\star^0((l_\varphi + 1)h_\varphi, l_t h_t) - \tilde{g}_\star^0(l_\varphi h_\varphi, l_t h_t))$.

Тогда приближенное значение константы $K_\star^0 = K_{kl}^{0j}$ из условия невырожденности (4.10) вычисляется по формуле:

$$K_\star^0 = \overline{R_{\star r}^{0'} - \tilde{g}_\star^{0'} q_\star} = \frac{1}{2\pi\omega_\star} \int_0^{\omega_\star} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_\star^0(\varphi) d\varphi,$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\star^0 = & \alpha_\star^{-1} C'(2\tau_2 C(C - k)S + (\tau_0 + 3\tau_1 S^3 + \tau_2 C^2)(S - l)) + \\ & + \alpha'_\star \alpha_\star^{-2} ((S - l) \cos t - (C - k)(\tau_o(S + \sin t) + \tau_1 S^3 + \tau_2(C^2 S + \sin t)) - \\ & - 2\beta_\star(C'(\tau_o(S + \sin t) + \tau_1 S^3 + \tau_2(C^2 S + \sin t) - S' \cos t) - \tilde{g}_\star^{0'} q_\star). \quad \square \end{aligned}$$

Таким образом, в лемме установлено, что при $\nu = 1$ любой из найденных корней b_{kl}^j по определению 4.1 является допустимым, а при $\nu = 0$ корень b_{kl}^j окажется допустимым, если периоды 2π и ω_{kl}^j будут удовлетворять условию Зигеля на «малые знаменатели» (4.1). К сожалению, проверить выполнение условия Зигеля не представляется возможным, так как не известно точное значение ω_{kl}^j , но следует иметь в виду следующий факт.

Утверждение 7.1. Условие Зигеля (4.1) справедливо для почти всех по мере Лебега значений ω_{kl}^j (см. [35, гл. 1, § 3]).

Замечание 7.1. Учитывая утверждение 7.1 будем считать, что условие Зигеля выполняется, а значит, и при $\nu = 0$ все корни b_{kl}^j — допустимые. Во всяком случае это верно для почти всех малых возмущений коэффициентов $X_0^{(m,n)}, Y_0^{(m,n)}$ из (7.1).

Теорема 7.1. Существует $\varepsilon_\star > 0$ такой, что система (0.1) из леммы 7.1 при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\star]$ имеет одиннадцать инвариантных поверхностей $TIS_{\varepsilon kl}^{\nu j}$, задаваемых допустимыми b_{kl}^j и описанных в теореме 6.1.

Следствие. Каждая из поверхностей $CIS_{\varepsilon kl}^{\nu j}$ имеет вид (6.2) и гомеоморфна двумерному тору, так как параметризуется двупериодическими функциями $x = x_\varepsilon(t, \varphi)$, $y = y_\varepsilon(t, \varphi)$, построенными на решении $CS_{kl}^j(\varphi)$;

поверхности $TIS_{\varepsilon 00}^{\nu 0}$, $TIS_{\varepsilon k, \pm 1}^{\nu 3}$ асимптотически устойчивы при $t \rightarrow -\infty$, а $TIS_{\varepsilon k 0}^{\nu 1}$, $TIS_{\varepsilon k, \pm 1}^{\nu 2}$ — при $t \rightarrow +\infty$, в указанном в лемме 5.4 смысле ($k = \pm 1$); непрерывные по ε функции $x_\varepsilon(t, \varphi)$ и $y_\varepsilon(t, \varphi)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно относительно t, φ стремятся соответственно к $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$, а значит, любая из одиннадцати поверхностей $TIS_{\varepsilon kl}^{\nu j}$ при малом ε расположена в сколь угодно малой окрестности цилиндрической поверхности $CIS_{kl}^{\nu j}$ из определения 4.2 с образующей, являющейся порождающим циклом, параметризованным решением $CS_{kl}^j(\varphi)$ (см. рис. 7.2).

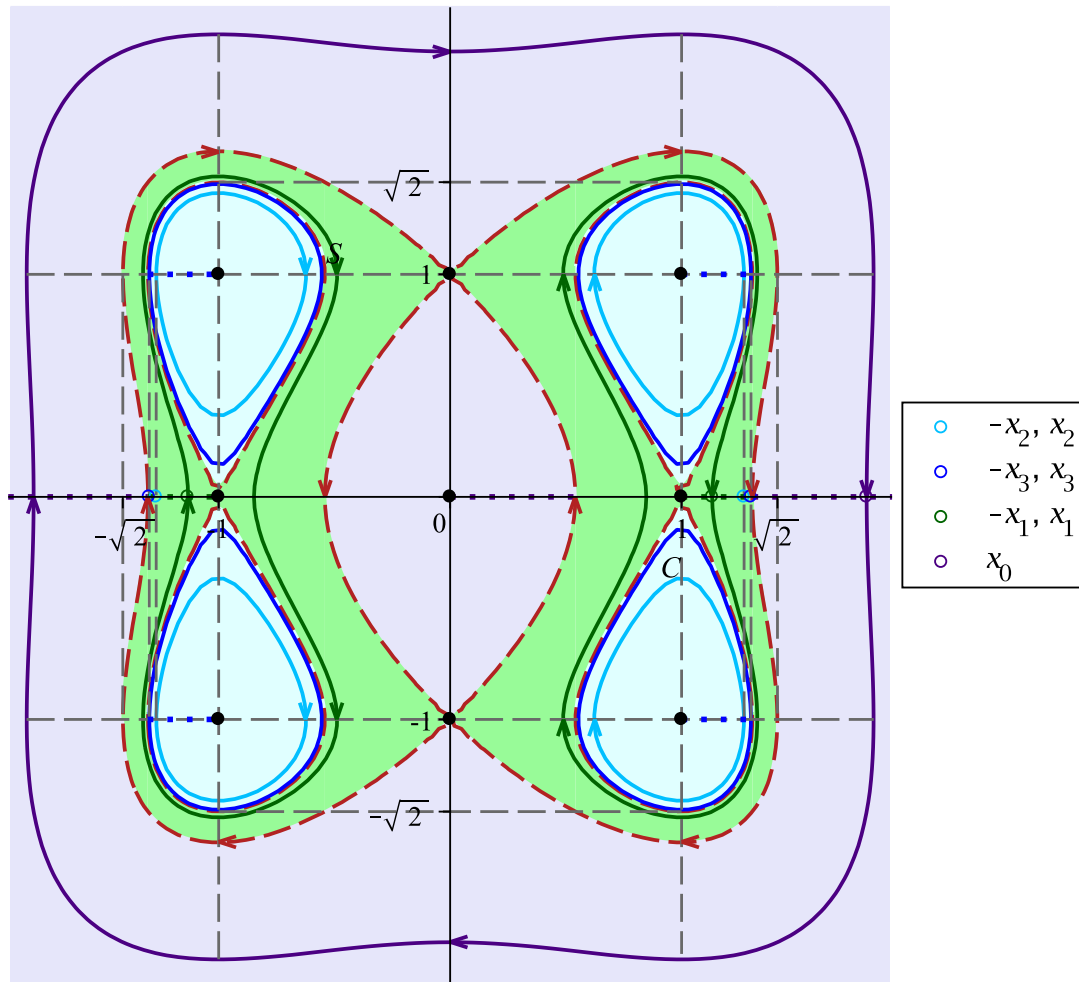


Рис. 7.2. Порождающие циклы системы (1.1) из теоремы 7.1.

Итак, на приведенном на рис. 7.2 фазовом портрете невозмущенной системы (0.2) с $\gamma = 1/2$ изображены порождающие циклы системы (0.1) из условия теоремы 7.1, проходящие соответственно через точки $(x_0, 0)$, $(\pm x_1, 0)$, $(\pm x_j, 1)$, $(\pm x_j, -1)$ ($j = 2, 3$), где $x_0 = b_{00}^0$, $x_1 = b_{10}^1$, $x_j = b_{11}^j$, а пунктиром на нем изображены сепаратрисы.

7.3 Численное подтверждение полученных результатов

Теорема 7.1 не дает оценки снизу правой границы ε_* изменения малого параметра ε , но эту оценку удастся установить вычислительными методами.

Ограничимся автономным случаем, дающим возможность наглядно продемонстрировать последовательное появление при уменьшении ε_* всех одиннадцати предельных циклов.

Итак, рассмотрим систему (0.1) с автономным возмущением (7.3)

$$\dot{x} = (y^3 - y)/2, \quad \dot{y} = -(x^3 - x) + Y_0^a(x, y)\varepsilon \quad (\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]), \quad (7.6)$$

в которой $Y_0^a = -3.314y + 4.493x^2y - 0.361y^3$.

Система (7.6) инвариантна относительно замены x на $-\tilde{x}$ и y на $-\tilde{y}$. Поэтому порождающие циклы из классов 1], 2] достаточно искать только в правой полуплоскости, т. е. выбирать параметры $b_{k0}, b_{k,\pm 1}$ с $k = 1$.

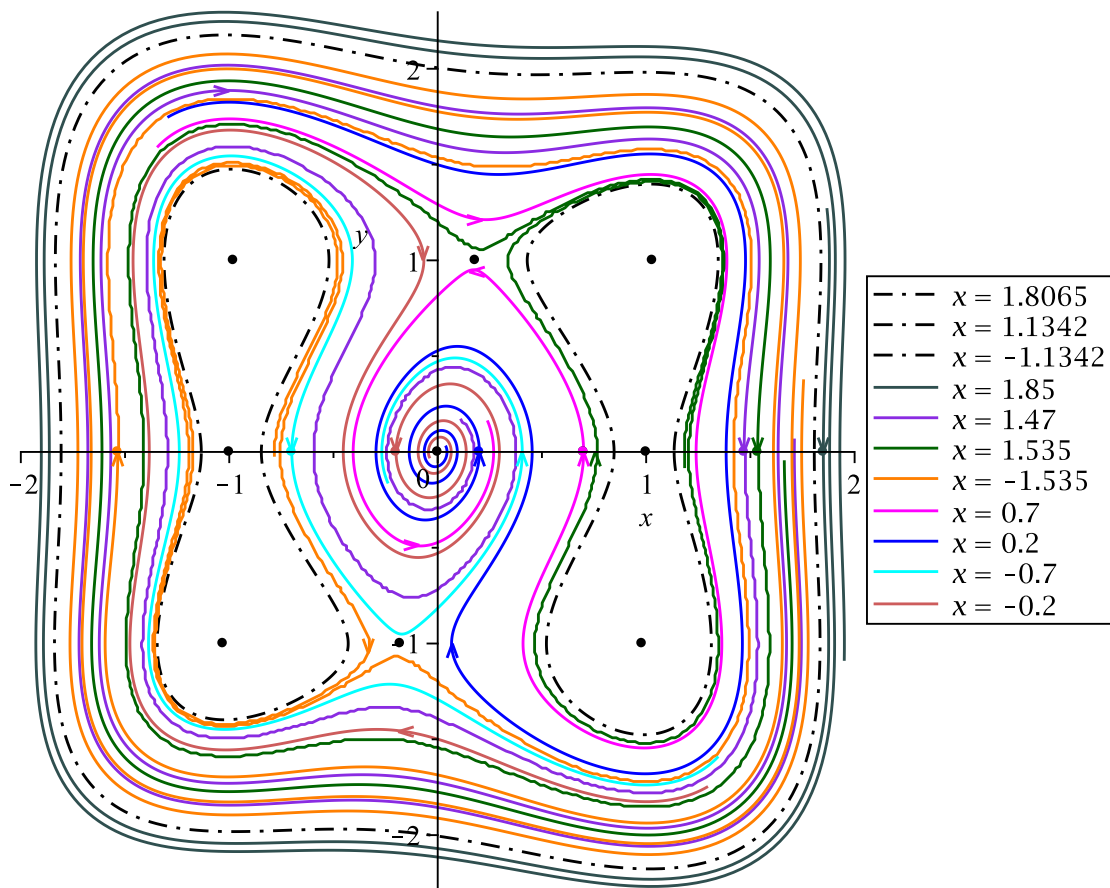


Рис. 7.3. Три предельных цикла системы (8.4) при $\varepsilon = 0.05$.

Начнем с того, что в системе (7.6) изменились абсциссы особых точек, не лежащих на оси абсцисс. Особыми стали точки $(\pm a_0^\varepsilon, \pm 1)$, $(\pm a_1^\varepsilon, \pm 1)$, $(\mp a_2^\varepsilon, \pm 1)$, где при $\varepsilon = 0.05$, например, $a_0^\varepsilon \approx 0.182$, $a_1^\varepsilon \approx 0.983$, $a_2^\varepsilon \approx 1.025$.

Далее, для системы (7.6) уже при $\varepsilon = 0.05$ удалось построить фазовый портрет траекторий (см. рис. 7.3), на котором легко прослеживаются предельные циклы $LC_{\varepsilon 00}^0$, $LC_{\varepsilon k0}^1$ из теоремы 6.1^a, заданные формулой (6.3) и лежащие в малых окрестностях соответствующих порождающих циклов GC_* , относящихся к классам $0]$, $1]$ и представленных на рисунке 7.3.

Рисунок 7.3 также позволяет понять, как ведут себя сепаратрисы, приближающиеся к особым точкам $(a_0^\varepsilon, 1)$ и $(-a_0^\varepsilon, -1)$. Понятно, что одна из двух сепаратрис, «выходящих» из точки $(a_0^\varepsilon, 1)$, с ростом времени должна *наматываться* на особую точку $(0, 0)$, другая — на правый предельный цикл $LC_{\varepsilon 10}^1$, а обе сепаратрисы, «входящие» в точку $(a_0^\varepsilon, 1)$, с убыванием времени должны *наматываться* на внешний предельный цикл $LC_{\varepsilon 00}^0$.

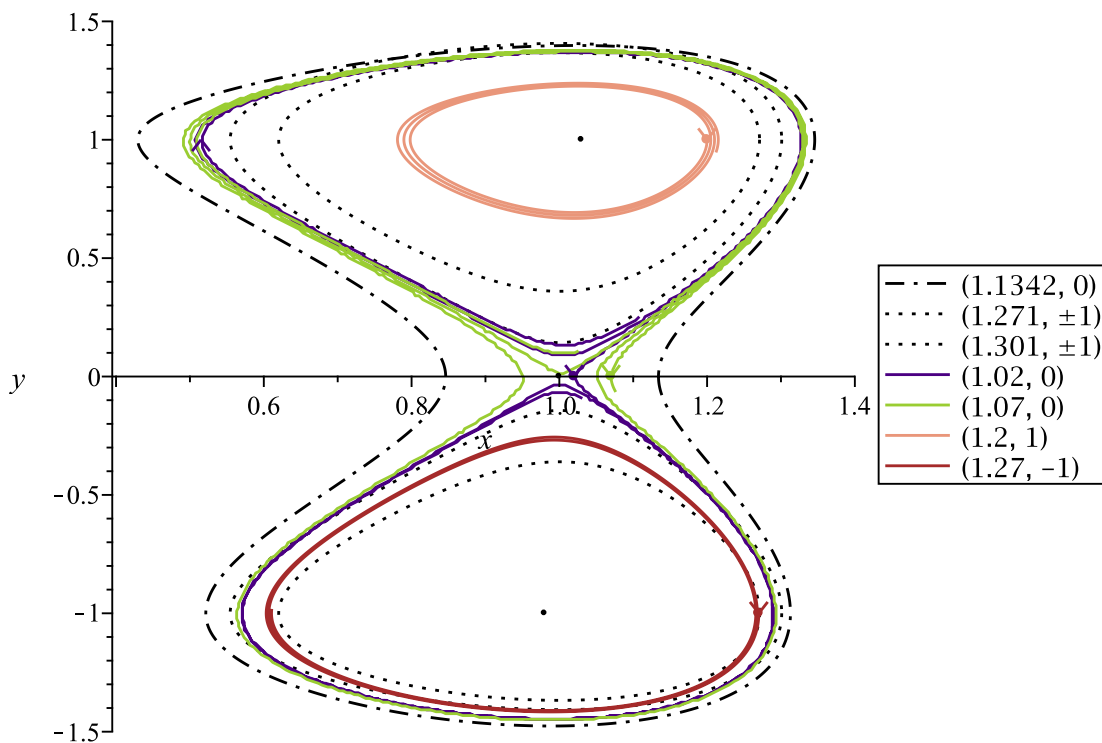


Рис. 7.4. Траектории внутри правого предельного цикла при $\varepsilon = 0.05$.

К сожалению, при $\varepsilon = 0.05$ теорема 7.1, гарантирующая наличие еще восьми предельных циклов $LC_{\varepsilon kl}^2$, $LC_{\varepsilon kl}^3$, лежащих в малых окрестностях соответствующих порождающих циклов из класса $2]$ (по два в каждой четверти), еще не работает, и внутри, скажем, правого предельного цикла $LC_{\varepsilon 10}^1$, другие предельные циклы отсутствуют. Помимо расчетов это видно на рисунке 7.4, где помимо предельного цикла $LC_{\varepsilon 10}^1$ с $\varepsilon = 0.05$ построены не лежащие в нем порождающие циклы из класса $2]$ (см. рис. 7.5), параметризованные решениями $CS_{1,\pm 1}^2(\varphi)$, $CS_{1,\pm 1}^3(\varphi)$, которые не зависят от ε , поскольку система (7.6) такова, что все допустимые b_{kl}^j не зависят от ε .

С уменьшением ε предельный цикл $LC_{\varepsilon 10}^1$ будет изменять форму и все четыре порождающих цикла из класса 2] попадут внутрь него вместе с появившимися в их малых окрестностях предельными циклами (см. рис. 7.5).

На фазовом портрете 7.4 интересно проследить поведение траекторий, которые с убыванием времени *наматываются* на особую точку $(a_0^\varepsilon, 1)$ (неустойчивый фокус), а с ростом времени часть из них *наматывается* на особую точку $(a_0^\varepsilon, -1)$ (устойчивый фокус), а другие — это зависит от расположения по отношению к сепаратрисам — *наматываются* на устойчивый предельный цикл $LC_{\varepsilon 10}^1$.

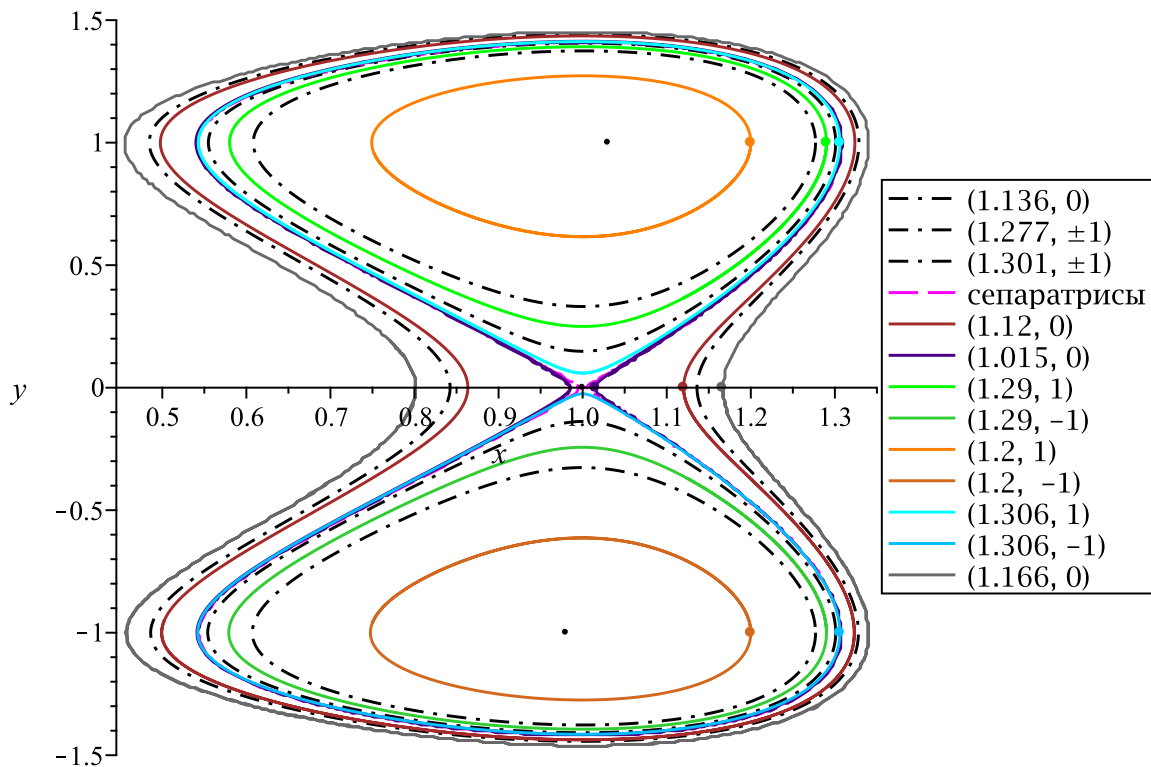


Рис. 7.5. Траектории внутри правого предельного цикла при $\varepsilon = 0.001$.

Продолжим уменьшать параметр ε .

Расчеты показали, что при $\varepsilon = 10^{-3}$ появились все восемь предельных циклов, которые относятся к классу 2] и существование которых при достаточно малых значениях параметра установлено в теореме 7.1, но поведение траекторий (спиралей) в их окрестности уже не удастся наглядно продемонстрировать, так как на фазовом портрете они выглядят циклами (см. рис. 7.5).

Практическое подтверждение наличия всех одиннадцати предельных циклов вытекает из приведенных ниже таблиц, в которых указаны значения абсцисс точек у спиралей, пересекающих прямые $y \equiv 0$ в классах $0^e]$, 1] или $y \equiv \pm 1$ в классе 2]. Эти абсциссы с ростом (убыванием) времени с раз-

ных сторон стремятся друг к другу, а точнее, к соответствующим пределам, равным $x_0^\varepsilon, x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon, x_{-2}^\varepsilon, x_{-3}^\varepsilon$, гарантируя наличие между выбранными спиралями устойчивого (неустойчивого) предельного цикла.

0]. Неустойчивый предельный цикл

н. д. $(0, x_0^\varepsilon, 0)$, $x_0^\varepsilon \approx 1.808$

t	$x(t) < x_0^\varepsilon$	t	$x(t) > x_0^\varepsilon$
00.0	1.804	00.0	1.810
-03.9	1.8040434	-03.8	1.8099799
-07.8	1.8040870	-07.7	1.8099597
-11.7	1.8041290	-11.6	1.8099404
-15.6	1.8041712	-15.4	1.8099205
-19.4	1.8042129	-19.3	1.8099011
-23.3	1.8042540	-23.1	1.8098819
-27.2	1.8042950	-26.0	1.8098631
-31.1	1.8043357	-30.8	1.8098447

1]. Устойчивый предельный цикл

н. д. $(0, x_1^\varepsilon, 0)$, $x_1^\varepsilon \approx 1.136$

t	$x(t) < x_1^\varepsilon$	t	$x(t) > x_1^\varepsilon$
00.0	1.132	00.0	1.138
13.6	1.1320219	13.5	1.1379961
27.3	1.1320438	27.0	1.1379918
40.9	1.1326554	40.5	1.1379874
54.6	1.1320873	53.0	1.1379833
68.2	1.1321088	67.5	1.1379793
81.9	1.1321304	81.0	1.1379753
95.5	1.1321518	94.4	1.1379714
109.	1.1321731	108.	1.1379673

2]. Устойчивый предельный цикл

н. д. $(0, x_2^\varepsilon, 1)$, $x_2^\varepsilon \approx 1.277$

t	$x(t) < x_2^\varepsilon$	t	$x(t) > x_2^\varepsilon$
00.0	1.272	00.0	1.282
06.2	1.2720017	06.5	1.2819995
12.3	1.2720037	13.0	1.2819988
18.3	1.2720054	19.5	1.2819980
24.6	1.2720075	26.0	1.2819979
30.8	1.2720095	32.6	1.2819974
37.8	1.2720114	39.1	1.2819967
43.8	1.2720133	45.6	1.2819960
49.3	1.2720149	52.1	1.2819955

2]. Неустойчивый предельный цикл

н. д. $(0, x_3^\varepsilon, 1)$, $x_3^\varepsilon \approx 1.301$

t	$x(t) < x_3^\varepsilon$	t	$x(t) > x_3^\varepsilon$
00.0	1.298	00.0	1.304
-07.6	1.2980020	-08.7	1.3039972
-15.1	1.2980040	-17.4	1.3039944
-22.7	1.2980059	-26.0	1.3039917
-30.2	1.2980080	-34.7	1.3039887
-37.8	1.2980101	-43.4	1.3039860
-45.4	1.2980118	-52.1	1.3039833
-52.9	1.2980140	-60.7	1.3039807
-60.5	1.2980159	-69.4	1.3039774

2]. Устойчивый предельный цикл

н. д. $(0, x_{-2}^\varepsilon, 1)$, $x_{-2}^\varepsilon \approx -1.267$

t	$x(t) > x_{-2}^\varepsilon$	t	$x(t) < x_{-2}^\varepsilon$
00.0	-1.272	00.0	-1.262
06.2	-1.2719992	05.9	-1.2620020
12.3	-1.2719985	11.8	-1.2620042
18.5	-1.2719977	17.7	-1.2620062
24.7	-1.2719970	23.6	-1.2620084
30.8	-1.2719963	29.5	-1.2620106
37.0	-1.2719957	35.4	-1.2620127
43.2	-1.2719950	41.3	-1.2620149
49.3	-1.2719939	47.2	-1.2620170

2]. Неустойчивый предельный цикл

н. д. $(0, x_{-3}^\varepsilon, 1)$, $x_{-3}^\varepsilon \approx -1.301$

t	$x(t) > x_{-3}^\varepsilon$	t	$x(t) < x_{-3}^\varepsilon$
00.0	-1.304	00.0	-1.298
-09.0	-1.3039971	-07.6	-1.2980035
-18.0	-1.3039950	-15.3	-1.2980069
-26.9	-1.3039928	-22.9	-1.2980105
-35.9	-1.3039904	-30.5	-1.2980141
-44.8	-1.3039879	-38.2	-1.2980177
-53.8	-1.3039857	-45.8	-1.2980212
-62.8	-1.3039833	-53.4	-1.2980247
-71.7	-1.3039808	-61.1	-1.2980283

Также для всех допустимых корней b_{kl}^j, l вычислены константы K_{kl}^{aj} из

условия невырожденности ($4 \cdot 10^a$), а именно: $K_{00}^{a0} \approx 10.7$, $K_{k0}^{a1} \approx -4.3$, $K_{kl}^{a2} \approx -0.28$, $K_{kl}^{a3} \approx 0.83$ ($k, l = \pm 1$).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 7.1^а. Система (7.6) при любом $\varepsilon \in [0, 0.05]$ имеет три предельных цикла: $LC_{\varepsilon 00}^0$ — устойчивый, $LC_{\varepsilon k0}^1$ — неустойчивые. При любом $\varepsilon \in [0, 10^{-3}]$ имеется еще восемь предельных циклов: циклы $LC_{\varepsilon k, \pm 1}^3$ — устойчивые, $LC_{\varepsilon k, \pm 1}^2$ — неустойчивые ($k = \pm 1$).

Благодарности. Выражаем искреннюю благодарность коллегам и друзьям С. А. Иванову, Ю. А. Ильину, С. Г. Крыжевичу за обсуждение вопросов, связанных с комплексным и функциональным анализом.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей // Функциональный анализ и его прил., 11 (1977), вып. 2, 1–10; <https://doi.org/10.1007/BF01081886>.
- [2] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2, АН СССР, М.-Л. (1956), 272–331.
- [3] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979, 432 с.
- [4] Бибиков Ю. Н. Локальные проблемы теории многочастотных нелинейных колебаний, СПб: С.-Петербург. ун-т, 2003, 169 с.
- [5] Hale J. K., Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems, *Annals of Mathematics Second Series*, 73:3 (1961), 496–531.
- [6] Li J., Huang Q., Bifurcations of limit cycles forming compound eyes in the cubic system, *Chin. Ann. Math.*, B8 (1987), 391–403.
- [7] Басов В. В. Инвариантные поверхности стандартных двумерных систем с консервативным первым приближением третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 44 (2008), вып. 1, 3–18; <http://elibrary.ru/item.asp?id=9590941>.

- [8] Басов В. В. Инвариантные поверхности двумерных периодических систем с бифурцирующей точкой покоя в первом приближении // Современная математика и ее приложения (Труды МК по динамическим системам и дифф. уравнениям. Суздаль 5-10 июля 2004 г.), 38 (2006), вып. 3, 10-27.
- [9] Басов В. В., Жуков А. С. Инвариантные поверхности периодических систем с консервативным кубическим первым приближением // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия, 6(64) (2019), вып. 3, 376-393; <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.303>.
- [10] Басов В. В., Жуков А. С. Инвариантные поверхности стандартных двумерных систем с девятью точками покоя в первом приближении // Дифференц. уравнения и процессы управления, (2017), вып. 3, 1-37; <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/basovaz.pdf>.
- [11] Библиков Ю. Н. Бифуркация рождения инвариантных торов с бесконечно малой частотой // Алгебра и анализ, 10 (1998), вып. 2, 81-92; <https://www.mathnet.ru/rus/aa987>.
- [12] Li J., Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13:1 (2003), 47-106; <https://doi.org/10.1142/S0218127403006352>.
- [13] Dumortier F., Li C., Perturbation from an elliptic Hamiltonian of degree four – IV figure eight-loop, *Diff Equat*, 188 (2003), 512-554; [https://doi.org/10.1016/S0022-0396\(02\)00111-0](https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00111-0).
- [14] Iliev I. D. Li C. Yu J., On the cubic perturbations of the symmetric 8-loop Hamiltonian, (2019); arXiv:1909.09840v1.
- [15] Li C., Liu C., Yang J., A cubic system with thirteen limit cycles, *Journal of Differential Equations*, 246 (2009), 3609-3619; <https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.01.038>.
- [16] Басов В. В. Бифуркация положения равновесия в критическом случае двух пар нулевых корней характеристического уравнения // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, 236, М.: Наука (2002), 45–60; <http://mi.mathnet.ru/tm275>.
- [17] Басов В. В. Бифуркация положения равновесия в системах с нулевыми корнями характеристического уравнения // Матем. заметки, 75 (2004), вып. 3, 323–341; <http://mi.mathnet.ru/mz35>.

- [18] Басов В. В. Бифуркация инвариантного тора коразмерности единица // Матем. заметки, 69 (2001), вып. 1, 3–17; <http://mi.mathnet.ru/mz479>.
- [19] Xiuli C., New lower bound for the number of critical periods for planar polynomial systems, *Journal of Differential Equations*, 271 (2021), 480-498; <https://doi.org/10.13140/rg.2.2.34326.98885>.
- [20] Варченко А. Н. Оценка числа нулей абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы // Функц. анализ и его прил., 18 (1984), вып. 2, 14–25; <https://doi.org/10.1007/BF01077820>.
- [21] Ильяшенко Ю. С. Теоремы конечности для предельных циклов // УМН, 45 (1990), вып. 2 (272), 143–200; <https://doi.org/10.1070/RM1990v045n02ABEH002337>.
- [22] Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. ММО, 12 (1963), 3–52.
- [23] Guckenheimer J., Holmes P., Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer-Verlag (1983).
- [24] Iliev I. D., Perko L., Higher order bifurcations of limit cycles, *Diff Equat*, 154 (1999), 339-363; <https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3549>.
- [25] Wei L., Tian Y., Xu Y., The Number of Limit Cycles Bifurcating from an Elementary Centre of Hamiltonian Differential Systems, *Mathematics*, 10 (2022), 1483-1496; <https://doi.org/10.3390/math10091483>.
- [26] Wei M., Cai J., Zhu H. Poincare Bifurcation of Limit Cycles from a Lienard System with a Homoclinic Loop Passing through a Nilpotent Saddle, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2019 (2019), 1-12; <https://doi.org/10.1155/2019/6943563>.
- [27] Wei L., Zhang Q., Zhang X., On limit cycles near two centres and a double homoclinic loop in Lienard differential system, *Journal of Differential Equations*, 300 (2021), 226-251; <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.07.032>.
- [28] Shi H., Liu C., Xiong Y., Study on limit cycles near homoclinic loops and heteroclinic loops with hyperbolic saddles, *Journal of Differential Equations*, 421 (2025), 50-72; <https://doi.org/10.1016/j.jde.2024.11.055>.

- [29] *Francois J.-P., He H., Xiao D.*, The number of limit cycles bifurcating from the period annulus of quasi-homogeneous Hamiltonian systems at any order, *Journal of Differential Equations*, 276 (2021), 318-341;
<https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.12.015>.
- [30] *Han M.-A.*, Bifurcations of invariant tori and subharmonic solutions for periodic perturbed systems, *Sci. China Ser. A*, 37:11 (1994), 1325–1336.
- [31] *Christopher C. J., Lloyd N. G.*, Polynomial systems: A lower bound for the Hilbert numbers, *Proc. Royal Soc. London Ser.*, A450 (1995), 219-224;
<https://doi.org/10.1098/rspa.1995.0081>.
- [32] *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа, М.: Наука, 1981, 384 с.
- [33] *Зорич В. А.* Математический анализ, Т. 2, М.: Наука, 1984, 640 с.
- [34] *Chow S.-N., Hale J. K.*, Methods of bifurcation theory, N.Y., *Springer-Verlag*, (1982), 515 p.
- [35] *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 18 (1963), вып. 6, 91-192;
<https://www.mathnet.ru/rus/rm6441>.

Invariant Tori of the Periodic Systems with Nine Equilibrium Points in Hamiltonian Unperturbed Part

V. V. Basov

St. Petersburg State University,
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru

A. S. Zhukov

The Laboratory of Continuous Mathematical Education,
e-mail: artzhukov1111@gmail.com

Abstract. The set of T -periodic systems of ODE with small parameter $\varepsilon \geq 0$

$$\dot{x} = (\gamma(y^3 - y) + X^\nu(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \quad \dot{y} = (-(x^3 - x) + Y^\nu(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu, \quad (*)$$

where $\gamma \in (0, 1]$, $\nu = 0, 1$; $X^\nu(t, x, y, 0), Y^\nu(t, x, y, 0)$ are real-analytic functions, and an unperturbed part, determined by the Hamiltonian

$$H = (2x^2 - x^4 + \gamma(2y^2 - y^4))\varepsilon^\nu/4,$$

has nine zeroes, is studied.

For each zero of the Hamiltonian we explicitly find the conditions on $X^\nu(t, x, y, 0), Y^\nu(t, x, y, 0)$, which allow to distinguish the sets of initial values for the initial value problem of the unperturbed system. These initial values parametrize so-called generating cycles. It is proven that in small, with respect to ε , neighbourhood of the cylindrical surface with the generating cycle as generatrix, for any small values of parameter, any system $(*)$ has a two-periodic invariant surface, homeomorphic to torus, if time is factored with the respect to the period. Formulas and asymptotic expansions of this surface are provided, the number of properties is discovered. Original example of a set of systems with both "fast" ($\nu = 1$) and "slow" ($\nu = 0$) time is constructed. The perturbation, independent of parameter, in these systems have polynomial of the third degree with three terms as an average with the respect to t . It was established that these systems have eleven invariant tori.

Aforementioned results are obtained using a generating tori splitting method (GTS method). Detailed description of the algorithm of this method and the demonstration of its application to the system $(*)$ are the second purpose of this paper. Developed method of searching for the invariant tori that remain for

each small parameter value is universal, because it can be applied to the systems with an unperturbed parts, determined by any Hamiltonian, provided that the equilibrium points and separatrices of those systems can be found. GTS method, in particular, is an alternative to the so called detection functions method and Melnikov function method, which are used in studies concerning the weakened XVI Hilbert's problem on the evaluation of a number of limit cycles of autonomous systems with the hamiltonian unperturbed part. Thus, the GTS method allows to evaluate the lower bound of the analogue of the Hilbert's cyclicity value, which determines the amount of the invariant tori in the periodic systems with "slow" and "fast" time and different hamiltonian unperturbed parts. It is also used in the case of the periodic systems of any even degree with the common factor ε in its right-hand side ($\nu = 0$), which describe the oscillations of the weakly-coupled oscillators.

Keywords: Hamiltonian system, invariant torus, bifurcation, limit cycle, averaging, Hilbert's cyclicity number.