ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Упрощение формул для модального управления по выходу линейными стационарными системами четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами при неравных индексах управляемости и наблюдаемости

Лапин А. В.[1,*], Зубов Н. Е.[1,**]

[1] Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (МГТУ им. Н. Э. Баумана)

e-mail:

[*] avlapin@bmstu.ru
[**] nezubov@bmstu.ru

Аннотация. Получена компактная модификация формул для модального управления по выходу линейными стационарными системами четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами при неравных индексах управляемости и наблюдаемости. В отличие от существующих формул, предлагаемые формулы не зависят от порядка следования полюсов в желаемом спектре и благодаря свойствам матричных аннуляторов позволяют упростить и ускорить расчёт регулятора по выходу. Упрощённые формулы могут применяться к системам, у которых индекс управляемости как больше, так и меньше индекса наблюдаемости. Сформулированы и доказаны теоремы о предлагаемых упрощениях. Рассмотрены примеры с обоими соотношениями индексов управляемости и наблюдаемости, решённые ранее на базе существующих формул модального управления по выходу. Показано, что новые формулы позволяют быстрее и проще получить уже проверенные решения указанных примеров.

Ключевые слова: модальное управление по выходу, система управления четвёртого порядка, матричный аннулятор, индекс управляемости, индекс наблюдаемости, матричный характеристический полином.

1. Введение и постановка задачи

Рассматриваются линейные стационарные системы (ЛСС) управления четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами [1]:

$$\begin{aligned}&\sigma\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),\\ &\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned} \tag{1}$$

где σ – оператор, соответствующий дифференцированию $\sigma\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ по времени t в непрерывном случае $t \in \mathbb{R}$ или сдвигу $\sigma\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$ на шаг вперёд в дискретном случае $t \in \mathbb{Z}$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ и $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ – соответственно векторы состояния, управления (входов) и наблюдения (выходов); $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ и $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ – постоянные матрицы состояния, управления и наблюдения. Здесь и далее запись вида $\mathbb{R}^{n\times m}$ обозначает множество вещественных матриц, имеющих размерность $n \times m$.

Предполагается, что ЛСС (1) полностью управляема и полностью наблюдаема, а её индексы [2] управляемости и наблюдаемости не равны между собой, т.е. одна из двухблочных матриц

$$\mathbf{U}_2 = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}], \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix}$$

имеет полный ранг 4, а другая – неполный ранг 3.

Требуется определить матрицу $\mathbf{F}$ регулятора по выходу [3], обеспечивающую матрице замкнутой ЛСС

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BFC}$$

желаемый спектр

$$\Lambda^* = \{\phi_{B,1}, \quad \phi_{B,2}, \quad \phi_{C,1}, \quad \phi_{C,2}\} \tag{2}$$

или (что эквивалентно) желаемый характеристический полином [4]

$$p^*(\lambda) = \sum_{i=0}^{4} p_i^* \lambda^{4-i} = (\lambda - \phi_{B,1})(\lambda - \phi_{B,2})(\lambda - \phi_{C,1})(\lambda - \phi_{C,2}), \tag{3}$$

соответствующий спектру (2).

2. Существующие решения

В работе [5] получены две формулы для аналитического решения рассматриваемых задач управления по выходу с использованием матриц

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}_B = (\mathbf{A} - \phi_{B,1}\mathbf{I}_4)(\mathbf{A} - \phi_{B,2}\mathbf{I}_4) = \mathbf{A}^2 \underbrace{-(\phi_{B,1} + \phi_{B,2})}_{s_B}\mathbf{A} + \underbrace{\phi_{B,1}\phi_{B,2}}_{m_B}\mathbf{I}_4,\\ &\mathbf{D}_C = (\mathbf{A} - \phi_{C,1}\mathbf{I}_4)(\mathbf{A} - \phi_{C,2}\mathbf{I}_4) = \mathbf{A}^2 - \underbrace{(\phi_{C,1} + \phi_{C,2})}_{s_C}\mathbf{A} + \underbrace{\phi_{C,1}\phi_{C,2}}_{m_C}\mathbf{I}_4,\end{aligned} \tag{4}$$

которые разбивают желаемый спектр (2) на две пары полюсов: $\phi_{B,1}$, $\phi_{B,2}$ и $\phi_{C,1}$, $\phi_{C,2}$. Здесь и далее $\mathbf{I}_n$ – единичная матрица порядка n. Справедливы следующие теоремы [5].

Теорема 1

Матрица регулятора по выходу для ЛСС (1) *четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами при условии, что индекс управляемости **больше** индекса наблюдаемости, определяется формулой:*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{B}^{-}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{-}\mathbf{L}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{B}^{-} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{U}_2}^{L}\mathbf{D}_B, \quad \mathbf{L} = \mathbf{D}_C\overline{\mathbf{C}}^{R*}, \quad \overline{\mathbf{C}}^{R*} = \mathbf{N}_2^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix},$$

а $\overline{\boldsymbol{U}_2}^{L} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ *– произвольный левый аннулятор* [6] *матрицы* $\boldsymbol{U}_2$.

Теорема 2

Матрица регулятора по выходу для ЛСС (1) *четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами при условии, что индекс управляемости **меньше** индекса наблюдаемости, определяется формулой:*

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{C}^{-}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{-})^{-1}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{K} = \overline{\mathbf{B}}^{L*}\mathbf{D}_B, \quad \overline{\mathbf{B}}^{L*} = [\mathbf{0}_{2\times 2} \quad \mathbf{I}_2]\mathbf{U}_2^{-1}, \quad \mathbf{C}^{-} = [\mathbf{c} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{c}], \quad \mathbf{c} = \mathbf{D}_C\overline{\mathbf{N}_2}^{R},$$

а $\overline{\boldsymbol{N}_2}^{R} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ *– произвольный правый аннулятор* [7] *матрицы* $\boldsymbol{N}_2$.

Как отмечено выше, использование матриц (4) делает формулы (5) и (6) зависящими от порядка следования полюсов в желаемом спектре (2), что не совсем целесообразно. Кроме того, произведения $\overline{\mathbf{U}_2}^{L}\mathbf{D}_B\mathbf{U}_2$ и $\mathbf{C}\mathbf{D}_C\overline{\mathbf{C}}^{R*}$ в формуле (5), а также $\overline{\mathbf{B}}^{L*}\mathbf{D}_B\mathbf{B}$ и $\mathbf{N}_2\mathbf{D}_C\overline{\mathbf{N}_2}^{R}$ в формуле (6) можно существенно упростить благодаря свойствам аннуляторов [8].

Упрощённая формула применена в работе [9] для решения конкретной практической задачи управления боковым движением воздушного судна. В этой формуле вместо матриц (4) используется матричный полином $p^*(\mathbf{A})$, который, как и в формуле Аккермана [10], не зависит от порядка следования полюсов в спектре (2). Матрицы (4) и матричный полином $p^*(\mathbf{A})$ связаны соотношениями:

$$\mathbf{D}_B\mathbf{D}_C = p^*(\mathbf{A}), \quad \mathbf{D}_B\mathbf{A}\mathbf{D}_C = \mathbf{A}p^*(\mathbf{A}) = p^*(\mathbf{A})\mathbf{A}. \tag{7}$$

Однако, во-первых, в работе [9] упрощённая формула не доказана теоретически. А во-вторых, упрощение касается только случая, когда индекс управляемости, равный двум, оказывается меньше индекса наблюдаемости, равного трём. Случай, когда индекс управляемости больше индекса наблюдаемости, в статье [9] не рассмотрен.

В настоящей работе формулируются и доказываются две теоремы об упрощённом результате, не зависящем от порядка следования полюсов в спектре (3). Теоремы охватывают оба случая неравных индексов управляемости и наблюдаемости.

3. Упрощённое решение при условии, что индекс управляемости больше индекса наблюдаемости

Если индекс управляемости, равный трём, больше индекса наблюдаемости, равного двум, то упрощение формулы (5) из теоремы 1 описывается следующей теоремой.

Теорема 3

Матрица регулятора по выходу для ЛСС (1) *четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами при условии, что индекс управляемости* ***больше*** *индекса наблюдаемости, определяется* ***упрощённой*** *формулой:*

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} p_1^* \mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{r}_{B,2}^{\mathrm{T}} - \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B,1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где $\mathbf{M}_0 = \mathbf{CB}$, *векторы* $\mathbf{d}_{B,1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ *и* $\mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{r}_{B,2}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ *таковы, что*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B,1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{U}_2}^L p^*(\mathbf{A}) \mathbf{N}_2^{-1}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{r}_{B,2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{A}^2 \mathbf{U}_2, \tag{9}$$

а $\overline{\mathbf{U}_2}^L \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ *– произвольный левый аннулятор* [6] *матрицы* $\mathbf{U}_2$.

Доказательство

Рассчитаем произведения $\mathbf{B}^-\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^-\mathbf{L}$ из формулы (5), используя тождества (7):

$$\mathbf{B}^-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{D}_B \\ \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{D}_B \left(\mathbf{A} - \mathbf{D}_C \overline{\mathbf{C}}^{R*} \mathbf{C}\right) \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{D}_B \\ \overline{\mathbf{U}_2}^L \left(\mathbf{D}_B \mathbf{A} - p^*(\mathbf{A}) \overline{\mathbf{C}}^{R*} \mathbf{C}\right) \end{bmatrix} \mathbf{B}, \tag{10}$$

$$\mathbf{B}^-\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{D}_B \\ \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{D}_B \left(\mathbf{A} - \mathbf{D}_C \overline{\mathbf{C}}^{R*} \mathbf{C}\right) \end{bmatrix} \mathbf{D}_C \overline{\mathbf{C}}^{R*} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^L p^*(\mathbf{A}) \\ \overline{\mathbf{U}_2}^L p^*(\mathbf{A}) \left(\mathbf{A} - \overline{\mathbf{C}}^{R*} \mathbf{C} \mathbf{D}_C\right) \end{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}^{R*}. \tag{11}$$

Учитывая полученные на основе свойств аннуляторов $\overline{\mathbf{U}_2}^L$ и $\overline{\mathbf{C}}^{R*}$ равенства

$$\overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{D}_B \mathbf{U}_2 = \overline{\mathbf{U}_2}^L (\mathbf{A}^2 + s_B \mathbf{A} + m_B \mathbf{I}_4) [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \overline{\mathbf{U}_2}^L [\mathbf{A}^2 \mathbf{B} \quad (\mathbf{A} + s_B \mathbf{I}_4) \mathbf{A}^2 \mathbf{B}],$$

$$\mathbf{C} \mathbf{D}_C \overline{\mathbf{C}}^{R*} = \mathbf{C} (\mathbf{A}^2 + s_C \mathbf{A} + m_C \mathbf{I}_4) \overline{\mathbf{C}}^{R*} = \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \overline{\mathbf{C}}^{R*} + s_C \mathbf{I}_2,$$

упростим соотношения (10) и (11):

$$\mathbf{B}^-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{A}^2 \\ \overline{\mathbf{U}_2}^L \left((\mathbf{A} + s_B \mathbf{I}_4)\mathbf{A}^2 - p^*(\mathbf{A}) \overline{\mathbf{C}}^{R*} \mathbf{C}\right) \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_B & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{A}^2 \\ \overline{\mathbf{U}_2}^L \left(\mathbf{A}^3 - p^*(\mathbf{A}) \overline{\mathbf{C}}^{R*} \mathbf{C}\right) \end{bmatrix} \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}^{-}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^{L} p^*(\mathbf{A}) \\ \overline{\mathbf{U}_2}^{L} p^*(\mathbf{A}) \left(\mathbf{A} - \left(\overline{\mathbf{C}}^{R*} \mathbf{C}\mathbf{A}^2 + s_C \mathbf{I}_2 \right) \right) \end{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}^{R*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^{L} p^*(\mathbf{A}) \\ \overline{\mathbf{U}_2}^{L} p^*(\mathbf{A}) \left(\mathbf{I}_4 - \overline{\mathbf{C}}^{R*} \mathbf{C}\mathbf{A} \right) \mathbf{A} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}^{R*}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{I}_4 - \overline{\mathbf{C}}^{R*}\mathbf{C}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \right) = \mathbf{N}_2^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{2\times 2} \end{bmatrix} \mathbf{C}.$$

Таким образом, используя равенство $\mathbf{C}\mathbf{A}\overline{\mathbf{C}}^{R*} = \mathbf{I}_2$, можно записать:

$$\mathbf{B}^{-}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_B & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^{L} \mathbf{A}^2 \mathbf{U}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{2\times 2} \end{bmatrix} \\ \overline{\mathbf{U}_2}^{L} \left(\mathbf{A}^2 \mathbf{U}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} - p^*(\mathbf{A}) \mathbf{N}_2^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{M}_0 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_B & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{r}_{B,2}^{\mathrm{T}} - \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}_2}^{L} p^*(\mathbf{A}) \mathbf{N}_2^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\ \overline{\mathbf{U}_2}^{L} p^*(\mathbf{A}) \mathbf{N}_2^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_{2\times 2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s_C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{d}_{B,1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

где двумерные векторы-строки $\mathbf{d}_{B,1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{r}_{B,2}^{\mathrm{T}}$ имеют вид (9).

После перемножения матриц $(\mathbf{B}^{-}\mathbf{B})^{-1}$ и $\mathbf{B}^{-}\mathbf{L}$, с учётом равенства $s_B + s_C = p_1^*$, получается требуемая формула (8). Теорема доказана. ▲

4. Упрощённое решение при условии, что индекс управляемости меньше индекса наблюдаемости

Если индекс управляемости, равный двум, меньше индекса наблюдаемости, равного трём, то упрощение формулы (6) из теоремы 2 описывается следующей теоремой.

Теорема 4

Матрица регулятора по выходу для ЛСС (1) *четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами при условии, что индекс управляемости* ***меньше*** *индекса наблюдаемости, определяется* ***упрощённой*** *формулой:*

$$\mathbf{F} = [\mathbf{d}_{C,1} \quad \mathbf{d}_{C,2}][p_1^* \mathbf{r}_{C,1} + \mathbf{r}_{C,2} - \mathbf{M}_0 \mathbf{d}_{C,2} \quad \mathbf{r}_{C,1}]^{-1}, \tag{12}$$

где $\mathbf{M}_0 = \mathbf{C}\mathbf{B}$, *векторы* $\mathbf{d}_{C,1}, \mathbf{d}_{C,2} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ *и* $\mathbf{r}_{C,1}, \mathbf{r}_{C,2} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ *таковы, что*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{C,1} \\ \mathbf{d}_{C,2} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_2^{-1} p^*(\mathbf{A}) \overline{\mathbf{N}_2}^{R}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C,1} \\ \mathbf{r}_{C,2} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_2 \mathbf{A}^2 \overline{\mathbf{N}_2}^{R}, \tag{13}$$

а $\overline{\mathbf{N}_2}^{R} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ – *произвольный правый аннулятор* [7] *матрицы* $\mathbf{N}_2$.

Доказательство

Рассчитаем произведения $\mathbf{K}\mathbf{C}^{-}$ и $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-}$ из формулы (6), используя тождества (7):

$$\begin{aligned}\mathbf{KC}^{-} &= \overline{\mathbf{B}}^{L*}\mathbf{D}_B\left[\mathbf{D}_C\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*}\mathbf{D}_B\right)\mathbf{D}_C\overline{\mathbf{N}_2}^R\right] = \\ &= \overline{\mathbf{B}}^{L*}\left[p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \left(\mathbf{A}-\mathbf{D}_B\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*}\right)p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R\right],\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{CC}^{-} &= \mathbf{C}\left[\mathbf{D}_C\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*}\mathbf{D}_B\right)\mathbf{D}_C\overline{\mathbf{N}_2}^R\right] = \\ &= \mathbf{C}\left[\mathbf{D}_C\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \left(\mathbf{A}\mathbf{D}_C-\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*}p^*(\mathbf{A})\right)\overline{\mathbf{N}_2}^R\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Учитывая полученные на основе свойств аннуляторов $\overline{\mathbf{B}}^{L*}$ и $\overline{\mathbf{N}_2}^R$ равенства

$$\overline{\mathbf{B}}^{L*}\mathbf{D}_B\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}^{L*}(\mathbf{A}^2+s_B\mathbf{A}+m_B\mathbf{I}_4)\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}^{L*}\mathbf{A}^2\mathbf{B}+s_B\mathbf{I}_2,$$

$$\mathbf{N}_2\mathbf{D}_C\overline{\mathbf{N}_2}^R = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix}(\mathbf{A}^2+s_C\mathbf{A}+m_C\mathbf{I}_4)\overline{\mathbf{N}}^R = \begin{bmatrix}\mathbf{CA}^2\\ \mathbf{CA}^2(\mathbf{A}+s_C\mathbf{I}_4)\end{bmatrix}\overline{\mathbf{N}_2}^R,$$

упростим соотношения (14) и (15):

$$\begin{aligned}\mathbf{KC}^{-} &= \overline{\mathbf{B}}^{L*}\left[p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \left(\mathbf{A}-\left(\mathbf{A}^2\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*}+s_B\mathbf{I}_2\right)\right)p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R\right] = \\ &= \overline{\mathbf{B}}^{L*}\left[p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_4-\mathbf{A}\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*}\right)p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R\right]\begin{bmatrix}1 & -s_B\\ 0 & 1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{CC}^{-} &= \mathbf{C}\left[\mathbf{A}^2\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \left(\mathbf{A}^2(\mathbf{A}+s_C\mathbf{I}_4)-\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*}p^*(\mathbf{A})\right)\overline{\mathbf{N}_2}^R\right] \\ &= \mathbf{C}\left[\mathbf{A}^2\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \left(\mathbf{A}^3-\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*}p^*(\mathbf{A})\right)\overline{\mathbf{N}_2}^R\right]\begin{bmatrix}1 & s_C\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathbf{I}_4-\mathbf{A}\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^{L*} = ([\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]-\mathbf{AB}[\mathbf{0}_{2\times2} \quad \mathbf{I}_2])[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1} = \mathbf{B}[\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{0}_{2\times2}]\mathbf{U}_2^{-1}.$$

Таким образом, используя равенство $\overline{\mathbf{B}}^{L*}\mathbf{AB} = \mathbf{I}_2$, можно записать:

$$\begin{aligned}\mathbf{KC}^{-} &= \left[[\mathbf{0}_{2\times2} \quad \mathbf{I}_2]\mathbf{U}_2^{-1}p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{0}_{2\times2}]\mathbf{U}_2^{-1}p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R\right]\begin{bmatrix}1 & -s_B\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{d}_{C,2} \quad \mathbf{d}_{C,1}]\begin{bmatrix}1 & -s_B\\ 0 & 1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{CC}^{-} &= \left[[\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{0}_{2\times2}]\mathbf{N}_2\mathbf{A}^2\overline{\mathbf{N}_2}^R \quad \left([\mathbf{0}_{2\times2} \quad \mathbf{I}_2]\mathbf{N}_2\mathbf{A}^2-\mathbf{M}_0[\mathbf{0}_{2\times2} \quad \mathbf{I}_2]\mathbf{U}_2^{-1}p^*(\mathbf{A})\right)\overline{\mathbf{N}_2}^R\right]\begin{bmatrix}1 & s_C\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{r}_{,C1} \quad \mathbf{r}_{C,2}-\mathbf{M}_0\mathbf{d}_{C,2}]\begin{bmatrix}1 & s_C\\ 0 & 1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

где двумерные векторы-столбцы $\mathbf{d}_{C,1}$, $\mathbf{d}_{C,2}$ и $\mathbf{r}_{C,1}$, $\mathbf{r}_{C,2}$ имеют вид (13).

В результате перемножения матриц $\mathbf{KC}^{-}$ и $(\mathbf{CC}^{-})^{-1}$, с учётом равенства $s_B+s_C=p_1^*$, получается требуемая формула (12). Теорема доказана. ▲

5. Практические примеры

Пример 1. Решим по упрощённой формуле (8) рассмотренную в статье [5] задачу модального управления по выходу для ЛСС (1) с индексом управляемости $b = 3$ и индексом наблюдаемости $c = 2$, в которой в символьном виде заданы следующие матрицы состояния, управления и наблюдения:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,4} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,2} & 0 \\ 0 & b_{3,3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем блочные части матриц управляемости и наблюдаемости Калмана:

$$\mathbf{U}_2 = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,3}b_{3,2} \\ 0 & b_{3,2} & a_{3,2}b_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_3 = [\mathbf{U}_2 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \left[\mathbf{U}_2 \quad \begin{bmatrix} a_{1,4}b_{2,1} & 0 \\ a_{2,3}a_{3,2}b_{2,1} & 0 \\ 0 & a_{2,3}a_{3,2}b_{3,2} \\ 0 & a_{2,3}b_{3,2} \end{bmatrix}\right];$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,4} \\ 0 & a_{3,2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\mathrm{rank}\mathbf{U}_2 = 3$, $\mathrm{rank}\mathbf{U}_3 = 4$ и $\mathrm{rank}\mathbf{N}_2 = 4$, рассматриваемая ЛСС имеет индекс управляемости $b = 3$ и индекс наблюдаемости $c = 2$.

Используя левый аннулятор

$$\overline{\mathbf{U}_2}^L = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

рассчитаем векторные блоки (9)

$$\left[\mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{r}_{B,2}^{\mathrm{T}}\right] = \overline{\mathbf{U}_2}^L \mathbf{A}^2\mathbf{U}_2 = [a_{1,4}b_{2,1} \quad 0 \quad a_{1,1}a_{1,4}b_{2,1} \quad a_{1,4}a_{2,3}b_{3,2}],$$

$$\left[\mathbf{d}_{B,1}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}}\right] = \overline{\mathbf{U}_2}^L p^*(\mathbf{A})\mathbf{N}_2^{-1} = \left[p_4^* \quad a_{1,4}a_{2,3}a_{1,1}^* \quad a_{1,1}^{***} \quad a_{1,4}\left(a_{2,3} + \frac{a_{1,1}^{**}}{a_{3,2}}\right)\right],$$

где $a_{1,1}^* = a_{1,1} + p_1^*$, $a_{1,1}^{**} = a_{1,1}^2 + p_1^* a_{1,1} + p_2^*$, $a_{1,1}^{***} = a_{1,1}^3 + p_1^* a_{1,1}^2 + p_2^* a_{1,1} + p_3^*$, и матричный блок

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Определим искомую матрицу **F** по упрощённой формуле (8):

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} p_1^*\mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}}+\mathbf{r}_{B,2}^{\mathrm{T}}-\mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{r}_{B,1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{B,1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{d}_{B,2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{a_{1,1}^{***}}{a_{1,4}b_{2,1}} & \dfrac{1}{b_{2,1}}\left(a_{2,3}+\dfrac{a_{1,1}^{**}}{a_{3,2}}\right) \\ \dfrac{a_{3,2}}{a_{1,4}b_{3,2}}\dfrac{a_{1,1}^{*}a_{1,1}^{***}-p_4^*}{a_{1,1}^{**}} & \dfrac{a_{1,1}^{*}}{b_{3,2}} \end{bmatrix}.$$

Решение $\mathbf{F}$ существует при условии

$$a_{1,1}^2+p_1^*a_{1,1}+p_2^*\neq 0.$$

Полученная матрица совпадает с результатом из статьи [5], но рассчитана быстрее и проще.

Пример 2. Решим по упрощённой формуле (12) рассмотренную в статье [5] задачу модального управления по выходу для ЛСС (1) с индексом управляемости $b=2$ и индексом наблюдаемости $c=3$, в которой в символьном виде заданы следующие матрицы состояния, управления и наблюдения:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 \\ 0 & b_{3,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем блочные части матриц управляемости и наблюдаемости Калмана:

$$\mathbf{U}_2=[\mathbf{B}\quad \mathbf{AB}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1,3}b_{3,2} \\ b_{2,1} & 0 & a_{2,2}b_{2,1} & 0 \\ 0 & b_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,1} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_2=\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_3=\begin{bmatrix} \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{N}_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & a_{2,2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{1,3}a_{3,1} & a_{1,4}a_{3,1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\mathrm{rank}\mathbf{U}_2=4$, $\mathrm{rank}\mathbf{N}_2=3$ и $\mathrm{rank}\mathbf{N}_3=4$, рассматриваемая ЛСС имеет индекс управляемости $b=2$ и индекс наблюдаемости $c=3$.

Используя правый аннулятор

$$\overline{\mathbf{N}_2}^R=[0\quad 0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}},$$

рассчитаем векторные блоки (13)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C,1} \\ \mathbf{r}_{C,2} \end{bmatrix}=\mathbf{N}_2\mathbf{A}^2\overline{\mathbf{N}_2}^R=\begin{bmatrix} 0 \\ a_{1,4}a_{3,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{d}_{C,1}\\ \mathbf{d}_{C,2}\end{bmatrix}=\mathbf{U}_2^{-1}p^*(\mathbf{A})\overline{\mathbf{N}_2}^R=\begin{bmatrix}-a_{2,2}p_4^*/b_{2,1}\\ a_{1,4}a_{3,1}\left(p_2^*+a_{1,3}a_{3,1}\right)/b_{3,2}\\ p_4^*/b_{2,1}\\ a_{1,4}\left(p_3^*/a_{1,3}+a_{3,1}p_1^*\right)/b_{3,2}\end{bmatrix}$$

и матричный блок

$$\mathbf{M}_0=\mathbf{CB}=\begin{bmatrix}b_{2,1} & 0\\ 0 & b_{3,2}\end{bmatrix}.$$

Определим искомую матрицу **F** по упрощённой формуле (12):

$$\mathbf{F}=[\mathbf{d}_{C,1}\quad \mathbf{d}_{C,2}][p_1^*\mathbf{r}_{C,1}+\mathbf{r}_{C,2}-\mathbf{M}_0\mathbf{d}_{C,2}\quad \mathbf{r}_{C,1}]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{a_{2,2}-\tilde{p}_3^*}{b_{2,1}} & \dfrac{\tilde{p}_4^*}{b_{2,1}}\\ -\dfrac{a_{1,3}a_{3,1}+p_2^*+\tilde{p}_3^*(\tilde{p}_3^*+p_1^*)}{b_{3,2}\tilde{p}_4^*} & \dfrac{\tilde{p}_3^*+p_1^*}{b_{3,2}}\end{bmatrix},$$

где $\tilde{p}_3^*=p_3^*/\left(a_{1,3}a_{3,1}\right)$, $\tilde{p}_4^*=p_4^*/\left(a_{1,4}a_{3,1}\right)$. Решение **F** существует при условии

$p_4^*\neq 0.$

Полученная матрица совпадает с результатом из статьи [5], но рассчитана быстрее и проще.

6. Заключение

Полученные в работе и строго доказанные упрощённые формулы для модального управления по выходу позволяют снизить вычислительную сложность при расчёте матрицы регулятора для линейных стационарных систем управления четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами. Формулы применимы в тех случаях, когда индекс управляемости системы не равен индексу её наблюдаемости, и не зависят от порядка записи полюсов в желаемом спектре. Решение задачи модального управления по выходу в указанных случаях, если оно существует, всегда единственно. На существование решения могут накладываться ограничения в виде определённых соотношений между коэффициентами желаемого характеристического полинома. Эти условия выявляются по обнулению знаменателей только после расчёта матрицы регулятора. Однако они либо вовсе не ограничивают множество устойчивых желаемых полиномов, либо исключают лишь малый набор полиномов, относительно которых система модально неуправляема по выходу.

Список литературы

[1] Зубов Н. Е., Лапин А. В. Приведение модального управления по выходу для стационарных систем четвёртого порядка с двумя входами и двумя выходами к управлению по состоянию системой с одним входом // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 2. С. 26 – 43. DOI: 10.31857/S0002338823010122.

[2] Лапин А. В., Зыбин Е. Ю., Гласов В. В. Об условиях достоверности непараметрического прогнозирования по выходу // Управление в аэрокосмических системах: Тез. докл. XV Мультиконф. по проблемам управления. СПб: ЦНИИ «Электроприбор», 2022. С. 178 – 181.

[3] Зубов Н. Е., Лапин А. В., Микрин Е. А., Рябченко В. Н. Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476. № 3. С. 260 – 263.

[4] Lapin A. V., Zubov N. E. Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2020. V. 89. No. 2. P. 41 – 64. DOI: 10.18698/1812-3368-2020-2-41-64.

[5] Zubov N. E., Lapin A. V. On One Approach to the Analytic Synthesis of Modal Control by Output for Fourth-Order Dynamic Systems with Two Inputs and Two Outputs // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2024. V. 63. No. 4. P. 561 – 577. DOI: 10.1134/S1064230724700424.

[6] Микрин Е. А., Зубов Н. Е., Лапин А. В., Рябченко В. Н. Аналитическая формула вычисления регулятора для линейных SIMO-систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 1 – 11.

[7] Зубов Н. Е., Лапин А. В., Рябченко В. Н. О связи модальной управляемости по выходу динамической MIMO-системы и вида матриц с желаемыми спектрами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 2. С. 1 – 12.

[8] Зубов Н. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. 666 с.

[9] Зубов Н. Е., Зыбин Е. Ю., Лапин А. В. Аналитический синтез управления по выходу боковым движением воздушного судна при отсутствии измерений углов скольжения и крена // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 3. С. 133 – 140. DOI: 10.31857/S0002338823020191.

[10] Лапин А. В., Зубов Н. Е., Пролетарский А. В. Обобщение формулы Аккермана для некоторого класса многомерных динамических систем с векторным входом // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2023. № 4 (109). С. 18 – 38. DOI: 10.18698/1812-3368-2023-4-18-38.

Simplifying the Formulas of Static Output Pole Placement for Fourth-Order Linear Time-Invariant Control Systems with Two Inputs and Two Outputs at Unequal Controllability and Observability Indices

Lapin A. V.[1,*], Zubov N. E.[1,**]

[1] Bauman Moscow State Technical University (Bauman MSTU)

e-mail:

[*] avlapin@bmstu.ru
[**] nezubov@bmstu.ru

Abstract. A compact modification of formulas of static output pole placement for fourth-order linear time-invariant control systems with two inputs and two outputs at unequal controllability and observability indices is obtained. Unlike existing formulas, the proposed formulas do not depend on the order of poles in the desirable spectrum and, due to the properties of matrix zero-divisors, make it possible to simplify and fasten the calculation of controller by output. The simplified formulas are applicable to systems with the controllability index either higher or lower than the observability index. Theorems on the proposed simplifications are formulated and proved. Examples with both ratios of controllability and observability indices, solved earlier basing the existing formulas of static output pole placement, are considered. It is shown that the new formulas make it easier and faster to obtain the already proven solutions of these examples.

Key words: modal control by output, fourth-order control system, matrix zero-divisor, controllability index, observability index, matrix characteristic polynomial.