

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N. 4, 2025

Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

РЕГУЛЯРИЗОВАННОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО

Елисеев А.Г., Кириченко П.В.

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

yeliseevag@mpei.ru, kirichenkopy@mpei.ru

Аннотация. Статья посвящена построению регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения Гросса-Питаевского, представляющего собой нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью. Выбранный в работе профиль потенциальной энергии приводит с позиций метода регуляризации к особенности в спектре предельного оператора в виде сильной точки поворота. В рамках идей асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром А.Г. Елисеева показано каким образом строить асимптотическое решение для рассматриваемой задачи любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

Введение.

Хорошо известно, что предсказанная в 1925 г. Альбертом Эйнштейном конденсация атомов с целочисленным спином в наинизшем квантовом состоянии [1] (т.н. "бозе-эйнштейновская конденсация", или кратко БЭК) играет существенную роль в теоретическом описании многих явлений физики конденсированного состояния: сверхтекучести гелия, сверхпроводимости металлов, поведении экситонов в полупроводниках при низких температурах и т.д. При этом экспериментально наблюдать БЭК удалось относительно недавно,

в 1995 г., в сериях опытов с парами атомов щелочноземельных металлов при сверхнизких температурах [2, 3, 4]. Эта экспериментальная реализация бозе-эйнштейновской конденсации привела к новому витку повышенного интереса исследователей к уравнению Гросса-Питаевского, полученному независимо в 1961 г. Е.П. Гросом [5] и Л.П. Питаевским [6] и описывающее динамику слабо неоднородного бозе-газа при нулевой температуре в приближении среднего поля. С основными положениями соответствующей теории и некоторыми на тот момент свежими экспериментальными результатами можно познакомиться в обзорах [7, 8]. Здесь мы ограничимся тем, что выпишем уравнение Гросса-Питаевского для волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в стандартных обозначениях:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U_{\text{ext}}(\mathbf{r})\Psi + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Psi|^2 \Psi, \quad (1)$$

где m — масса атома БЭК, Δ — оператор Лапласа, $U_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ — потенциал внешнего поля, действующего на атомы, \hbar — приведённая постоянная Планка, а параметр a характеризует длину рассеяния атомов друг на друге.

В рамках концепции неидеального бозе-газа при нулевой температуре уравнение (1) рассматривается как классическое в том смысле, что функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ подобно полю Максвелла в классической электродинамике имеет вполне конкретный физический смысл:

$$\Psi = |\Psi| \cdot e^{i\Phi}, n(\mathbf{r}, t) = |\Psi|^2, \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \Phi, \quad (2)$$

где n и \mathbf{V} — концентрация атомов БЭК и их скорость соответственно.

В настоящей работе с математической точки зрения рассматривается задача Коши для уравнения Гросса-Питаевского (1) на бесконечной прямой в квазиклассическом приближении (формально, при $\hbar \rightarrow 0$). Указанный квазиклассический переход и выбор потенциала¹ $U_{\text{ext}}(x) = x^2$ порождает сингулярно возмущенную задачу со спектральными особенностями у предельного оператора в виде точечной нестабильности (см. ниже), что позволяет применить к ней идеи асимптотического интегрирования, разработанные для линейного неоднородного уравнения Шредингера в работах [9] и [10].

Здесь уместно отметить, что в представленной работе применяется современная модификация метода регуляризации, который для задач со стабильным спектром предельного оператора был окончательно сформулирован в монографии [11], хотя в теории сингулярных возмущений успешно развиваются большое количество других методов асимптотического интегрирования.

¹Такой выбор потенциала обусловлен тем, что, как сказано в [7], в условиях указанных выше экспериментах с БЭК потенциал можно считать гармоническим.

Чтобы не загромождать введение, отсылаем читателя к монографиям [12, 13], где на ряду с описанием современного состояния метода регуляризации приведены подробные библиографии по альтернативным подходам построения асимптотического решения.

Также стоит обратить внимание читателя на то, что в нашей статье мы пользуемся классификацией точечных особенностей в спектре предельного оператора, которая была принята в ряде последних работ (см., например, [14]-[19]) по асимптотическому интегрированию задач с нестабильным спектром в рамках метода регуляризации:

- 1) *простая точка поворота* — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга и одно собственное значение в отдельных точках обращается в нуль;
- 2) *слабая точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения, а базис из собственных векторов сохраняет гладкость;
- 3) *сильная точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения, а базис собственных векторов теряет гладкость.

В теории сингулярных возмущений принято использовать для малого параметра обозначение ε , не будем нарушать этой традиции и везде в дальнейшем будем считать $\hbar = \varepsilon$.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гросса-Питаевского ($\varepsilon \equiv \hbar$) с потенциалом $V_{\text{ext}}(x) = x^2$:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \cdot u = \varepsilon^2 \cdot |u|^2 \cdot u, & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3)$$

где выполнены условия:

- 1) $T < \pi/4$ (это обеспечивает отсутствие фокальных точек);
- 2) $u_0(x)$ лежит в пространстве Шварца $S(\mathbb{R})$;
- 3) ε — малый параметр, т.е. задача изучается при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Асимптотику решения задачи Коши ищем в пространстве Шварца S .

Замечание. Множество гладких функций, вообще говоря комплексно-значных на \mathbb{R} , принадлежит пространству Шварца, если любая ее производная убывает на бесконечности быстрее любой степени модуля аргумента x . Другими словами, для функции $f(x)$ из пространства Шварца верны следующие оценки: для всяких целых положительных чисел m , n и $x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{0 \leq p \leq m} \left\{ (1 + |x|^n) \cdot |f^{(p)}(x)| \right\} = C_{nm} < \infty.$$

Классическим решением задачи (3) называется функция $u(x, t, \varepsilon)$, непрерывная в $\overline{Q}_T = (-\infty, +\infty) \times [0, T]$, имеющая непрерывные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в Q_T , удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению поставленной задачи и непрерывно примыкающая к начальным условиям $u_0(x)$. Справедлива следующая теорема

Теорема 1 Классическое решение задачи (3) при выполненных условиях 1)–3) существует и единствено [20].

Сингулярно возмущенная задача (3) относится к задачам с нестабильным спектром предельного оператора. Для того чтобы в этом убедиться и определить характер спектральной особенности, необходимо перейти к матричной форме записи исходного уравнения:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ |u|^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u / \partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Легко видеть, что она обладает следующими свойствами: а) матрица (4) диагонализуема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, б) в точке пересечения собственных значений (т.е при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x . Согласно принятой во введении классификации, такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

Построение регуляризирующих функций тесно связано с канонической формой предельного оператора $A(x)$ (см., например, работу [21]) и соответствующий базис из собственных векторов, но в рассматриваемой задаче в таких построениях нет необходимости, т.к. оператор уже имеет каноническую форму. Более того, в силу однородности уравнения Гросса-Питаевского здесь не возникает в процессе построения асимптотического ряда проблем с вложением неоднородности в образ предельного оператора, как это имеет место в задачах с неоднородными уравнениями. В этом смысле задача (3) проще тех, в которых рассматривались неоднородные уравнения Шрёдингера [9, 10]. В указанных работах эта проблема решается путем введения дополнительных регуляризирующих операторов, здесь подобных конструкций вводить не нужно. Также отметим, что ограничение 1) в задаче (3) обусловлено желанием ограничиться в этой работе рассмотрением проблем асимптотического интегрирования без особенностей по переменной t , т.е. без так называемых фокальных точек (в следующем разделе при построении регуляризирующей функции станет ясно, в чем причина именно такого ограничение на T).

3. Формализм метода регуляризации.

Поиск регуляризирующей функции для задачи (3) будем осуществлять в стандартной форме $e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$, такого рода сингулярности были выделены ещё Ж. Лиувиллем в [22]. Для этого подставим $u(x, t) = v(x, t) \cdot e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon}$ в соответствующее лианезированное уравнение задачи (3) и, собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , получим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - x^2 \right) v + i\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot v - 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Слагаемое перед ε^0 в последнем соотношении позволяет сразу выписать задачу для поиска $\varphi(x, t)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = x^2, \quad \varphi(x, 0) = 0. \quad (6)$$

Здесь стоит отметить, что выбранное начальное условие для $\varphi(x, t)$ обеспечит в дальнейшем отсутствие сингулярной зависимости от ε в начальном условии для $v(x, t)$. Более того, при таком выборе начальное условие для $v(x, t)$ будет просто совпадать с начальным условием исходной задачи (3).

Задача (6) представляет собой задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, решать которую

будем методом характеристик (см. [23], Гл. 5, §4, с. 268–272). Обозначив $p = \partial\varphi/\partial t$ и $q = \partial\varphi/\partial x$, получим следующую характеристическую систему для уравнения задачи (6):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{2x} = \frac{d\varphi}{p - 2q^2} = dr, \quad (7)$$

Н.У.: $t = 0$, $x = s$, $\varphi = 0$, $q = 0$, $p = s^2$ при $r = 0$.

Начальные условия в последней системе получены параметризацией (s — параметр) начального условия задачи (6).

Интегрируя систему (7), получаем исковую поверхность в параметрическом виде:

$$t = r, \quad x = s \cos(2r), \quad \varphi = \frac{s^2}{4} \sin(4r).$$

Тогда окончательно для функции $\varphi(x, t)$ в явном виде имеем:

$$\varphi(x, t) = \frac{x^2}{2} \operatorname{tg}(2t). \quad (8)$$

Теперь очевидно, что построенная регуляризирующая функция (8) имеет особенность в точках $t = \pi/4 + \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. Такие особенности по переменной t принято называть фокальными точками. Отметим, что регуляризирующая функция в работах [9, 10] по построению асимптотики для неоднородного уравнения Шрёдингера с потенциалом $V_{\text{ext}}(x) = x$ фокальных точек не имела. Как уже отмечалось, в этой работе мы не будем затрагивать проблемы построения асимптотики решения вблизи фокальных точек, поэтому нами было введено ограничение 1) в постановке задачи (3).

Далее действуем по стандартной схеме метода регуляризации: считая, что вся сингулярная зависимость решения от малого параметра выделена и содержится в найденной регуляризующей функции (8), оставшуюся часть решения $v(x, t)$ ищем в виде степенного ряда по ε . Т.е. поиск решения исходной задачи будем осуществлять в следующей форме:

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k, \quad (9)$$

Подставим (9) в задачу (3). Сокращая в уравнении на регуляризующую

функцию и множитель $i\varepsilon$, будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \dot{v}_k \varepsilon^k - \operatorname{tg}(2t) \sum_{k=0}^{\infty} v_k \varepsilon^k - 2x \operatorname{tg}(2t) \sum_{k=0}^{\infty} v'_k \varepsilon^k - i \sum_{k=0}^{\infty} v''_k \cdot \varepsilon^{k+1} = \\ = -i \left| \sum_{k=0}^{\infty} v_k \varepsilon^k \right|^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v_k \varepsilon^{k+1}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k = u_0(x), \end{array} \right. \quad (10)$$

здесь $v_k = v_k(x, t)$, точкой обозначена частная производная по времени, штрихом — частная производная по координате.

Выделив в (10) группы слагаемых при одинаковых степенях ε , приходим к серии итерационных задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_k - \operatorname{tg}(2t) v_k - 2x \operatorname{tg}(2t) v'_k = i(v''_{k-1} - \omega_{k-1}), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, t) \varepsilon^{k+1} \equiv \left| \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) \varepsilon^k \right|^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) \varepsilon^{k+1}, \\ v_k(x, 0) = \delta_0^k \cdot u_0(x), \quad k = \overline{0, \infty}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Из контекста ясно, что функции $v_{-1}(x, t)$ и $\omega_{-1}(x, t)$ необходимо считать равными нулю (этих слагаемых просто нет в определяющих эти функции рядах).

Переходим к последовательному решению итерационных задач. Для начала рассмотрим задачу на нулевом шаге (т.е. при $k = 0$ в (11)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_0(x, t) - \operatorname{tg}(2t) v_0(x, t) - 2x \operatorname{tg}(2t) \cdot v'_0(x, t) = 0, \\ v_0(x, 0) = u_0(x). \end{array} \right. \quad (12)$$

Характеристическая система в симметричном виде для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка задачи (12) имеет вид:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2x \operatorname{tg}(2t)} = \frac{dv_0}{\operatorname{tg}(2t) v_0}.$$

Соответствующие первые интегралы этой характеристической системы:

$$\frac{x}{\cos(2t)} = C_1, \quad v_0 \sqrt{\cos(2t)} = C_2.$$

Учитывая начальное условие задачи (12), окончательно получаем:

$$v_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} \cdot u_0 \left(\frac{x}{\cos(2t)} \right), \quad (13)$$

здесь учтено, что $0 \leq t \leq T$, $T < \pi/4$.

Последнее соотношение позволяет выписать главный член асимптотики:

$$u_{0\varepsilon}(x, t, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{i}{2\varepsilon} \cdot x^2 \operatorname{tg}(2t)\right) \frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}} \cdot u_0\left(\frac{x}{\cos(2t)}\right) \quad (14)$$

Так как $u_0(x) \in S$, то $u_{0\varepsilon}(x, t, \varepsilon) \in S$.

Рассмотрим теперь задачу с $k = 1$ в (11):

$$\begin{cases} \dot{v}_1(x, t) - \operatorname{tg}(2t)v_1(x, t) - 2x \operatorname{tg}(2t)v'_1(x, t) = \\ = i(v''_0(x, t) - |v_0(x, t)|^2 \cdot v_0(x, t)), \\ v_1(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Подставляя $v_0(x, t)$ из (13) в уравнение (15), приходим к аналогичной нулевому итерационному шагу задаче для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка на функцию $v_1(x, t)$. Здесь удобно сделать замену $v_1(x, t) = w(x, t)/\sqrt{\cos(2t)}$. Тогда, учитывая (13), уравнения задачи (15) примет вид:

$$\dot{w}(x, t) - 2x \operatorname{tg}(2t)w'(x, t) = i \left(\frac{u''_0}{\cos^2(2t)} - \frac{|u_0|^2 u_0}{\cos(2t)} \right), \quad (16)$$

здесь

$$u_0 \equiv u_0\left(\frac{x}{\cos(2t)}\right).$$

Характеристическая система для этого дифференциального уравнения:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2x \operatorname{tg}(2t)} = \frac{dw}{i(u''_0/\cos^2(2t) - |u_0|^2 u_0/\cos(2t))}$$

Соответствующие первые интегралы:

$$\frac{x}{\cos(2t)} = C_1, \quad w(x, t) - \frac{i}{2} \left(\operatorname{tg}(2t)u''_0 - \ln \frac{1 + \operatorname{tg}(t)}{1 - \operatorname{tg}(t)} |u_0| \right)^2 u_0 = C_2.$$

Учитывая начальное условие в (15), отсюда получим решение итерационной задачи на первом итерационном шаге:

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= \frac{i}{2\sqrt{\cos(2t)}} \left[u''_0 \left(\frac{x}{\cos(2t)} \right) \cdot \operatorname{tg}(2t) - \left| u_0 \left(\frac{x}{\cos(2t)} \right) \right|^2 \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot u_0 \left(\frac{x}{\cos(2t)} \right) \cdot \ln \frac{1 + \operatorname{tg}t}{1 - \operatorname{tg}t} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Продолжая по аналогии описанный процесс для $k = 2, 3, \dots$ в (11), можно построить любой член ряда (9). В конце данного раздела, опираясь на (17), выпишем первый по ε член асимптотики:

$$u_{1\varepsilon}(x, t, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{i}{2\varepsilon} \cdot x^2 \operatorname{tg}(2t)\right) \cdot \frac{i}{2\sqrt{\cos(2t)}} \cdot \left[u_0''\left(\frac{x}{\cos(2t)}\right) \cdot \operatorname{tg}(2t) - \left| u_0\left(\frac{x}{\cos(2t)}\right) \right|^2 \cdot u_0\left(\frac{x}{\cos(2t)}\right) \cdot \ln \frac{1 + \operatorname{tg}t}{1 - \operatorname{tg}t} \right].$$

Так как $u_0(x) \in S$, то $u_{1\varepsilon}(x, t, \varepsilon) \in S$.

4. Оценка остаточного члена.

Пусть члены ряда (9) определены в результате решения итерационных задач (11) для $0 \leq k \leq n+1$. Запишем соотношение для остатка:

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k(x, t) + \varepsilon^{n+1} R_n(x, t, \varepsilon). \quad (18)$$

Заметим, так как $u(x, t, \varepsilon) \in S$, $v_k(x, t) \in S$, то $R(x, t, \varepsilon) \in S$. Подставив (18) в исходную задачу (3), получим:

$$\begin{aligned} & (i\varepsilon^{n+2} \frac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^{n+3} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - \varepsilon^{n+1} x^2 R_n) + \\ & + i \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon^k \left(\frac{\partial v_{k-1}}{\partial t} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial v_{k-1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} v_{k-1} \right) = \\ & = \left[- \sum_{k=2}^{n+2} \varepsilon^k \frac{\partial^2 v_{k-2}}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{3n+2} \varepsilon^k \sum_{k_1=0}^{k-2} \sum_{m=0}^{k_1} v_m v_{(k_1-m)} \bar{v}_{(k-2-k_1)} + \right. \\ & + 2 \widetilde{R}_n \sum_{k=n+3}^{3n+3} \varepsilon^k \sum_{k_1=0}^{k-(n+3)} v_{k_1} \bar{v}_{(k-(n+3)-k_1)} + \\ & + \widetilde{\widetilde{R}_n} \sum_{k=n+3}^{3n+3} \varepsilon^k \sum_{k_1=0}^{k-(n+3)} v_{k_1} v_{(k-(n+3)-k_1)} + \widetilde{R}_n^2 \sum_{k=2n+4}^{3n+4} \varepsilon^k \bar{v}_{(k-(2n+4))} + \\ & \left. + 2 |\widetilde{R}_n|^2 \sum_{k=n+3}^{2n+3} \varepsilon^k v_{(k-(n+3))} + \varepsilon^{3n+5} |\widetilde{R}_n|^2 \widetilde{R}_n \right] \exp\left(-\frac{i\varphi(x, t)}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\widetilde{R}_n = \exp(i\varphi(x, t)/\varepsilon) R_n$, а черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Учитывая решения итерационных задач (11) и разделив соотношение

(19) на ε^{n+1} , приходим к следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - x^2 R_n = \varepsilon H(x, t, \varepsilon), \\ R_n(x, 0, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon H(x, t, \varepsilon) &= \\ &= -\varepsilon \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \sum_{p=0}^{2n} \varepsilon^p \sum_{m=0}^{p+n} \left(\sum_{k=0}^m v_k v_{(m-k)} \right) \bar{v}_{(p+n-m)} + \right. \\ &\quad + 2\widetilde{R}_n \sum_{p=1}^{2n+1} \varepsilon^p \sum_{k=0}^{p-1} v_k \bar{v}_{(p-k-1)} + \\ &\quad + \overline{\widetilde{R}_n} \sum_{p=1}^{2n+1} \varepsilon^p \sum_{k=0}^{p-1} v_k v_{(p-k-1)} + \widetilde{R}_n^2 \sum_{p=n+2}^{2n+2} \varepsilon^p \bar{v}_{(p-n-2)} + \\ &\quad \left. + 2|R_n|^2 \sum_{p=n+2}^{2n+2} \varepsilon^p v_{(p-n-2)} + \varepsilon^{2n+3} |R_n|^2 \widetilde{R}_n \right] \exp\left(-\frac{i\varphi(x, t)}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что функции $v_k(x, t)$, $R_n(x, t, \varepsilon)$ $\in S$ по x равномерно и по $t \in [0, T]$, правую часть $H(x, t, \varepsilon)$ можно представить в виде:

$$H(x, t, \varepsilon) = \left(\psi_0(x, t, \varepsilon) + \varepsilon \psi_1(x, t, \varepsilon) \widetilde{R}_n(x, t, \varepsilon) + \varepsilon \psi_2(x, t, \varepsilon) \overline{\widetilde{R}_n}(x, t, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \varepsilon^{n+2} \psi_3(x, t, \varepsilon) \widetilde{R}_n^2(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2} \psi_4(x, t, \varepsilon) |R_n|^2(x, t, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \varepsilon^{2n+3} \widetilde{R}_n(x, t, \varepsilon) |R_n|^2(x, t, \varepsilon) \right) \exp\left(-\frac{i\varphi(x, t)}{\varepsilon}\right).$$

Теорема 2 Пусть итерационные задачи решены до порядка $n+1$ и выполнены следующие требования:

1. условия 1)–3) для задачи Коши (3);
2. $\forall x \in R$ $H(x, t, \varepsilon) \in S$ с оценками, равномерными по $t \in [0, T]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$;

Тогда, $\exists C > 0$ такое, что:

$$|R_n(x, t, \varepsilon)| \leq C \quad \forall (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T], \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Доказательство. Решение задачи (20) запишется в виде:

$$R_n(x, t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi, \tau, \varepsilon) K(x, \xi, t - \tau, \varepsilon) d\xi \quad (21)$$

где

$$K(x, \xi, t, \varepsilon) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\varepsilon \sin(2t)}} \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon \sin(2t)} (\cos(2t)(x^2 + \xi^2) - 2x\xi)\right)$$

— ядро Меллера. Преобразуем (21), сделав замену переменных во внутреннем интеграле $z = \xi / (2\varepsilon \sin(2(t - \tau)))$. Будем иметь:

$$\begin{aligned} R_n(x, t, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-i\frac{x^2 \operatorname{tg}(2\tau)}{2\varepsilon}\right) d\tau \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H\left(z + \frac{x}{\sqrt{2\varepsilon \sin(2\tau)}}, t - \tau, \varepsilon\right) \exp(i \cos(2\tau) z^2) dz. \end{aligned}$$

Оценим по модулю:

$$\begin{aligned} |R_n| &\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H\left(z + \frac{x}{\sqrt{2\varepsilon \sin(2\tau)}}, t - \tau, \varepsilon\right) \right| d\xi \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|\psi_0| + \varepsilon |\psi_{12}| |R_n| + \varepsilon^{n+2} |\psi_{34}| |R_n|^2 + \varepsilon^{2n+3} |R_n|^3 \right) d\xi \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{(1 + |x|^2) |\psi_0|}{(1 + |x|^2)} + \varepsilon \frac{(1 + |x|^2)^2 |\psi_{12}| |R_n|}{(1 + |x|^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{n+2} \frac{(1 + |x|^2)^3 |\psi_{34}| |R_n|^2}{(1 + |x|^2)^3} + \varepsilon^{2n+3} \frac{(1 + |x|^2)^3 |R_n|^3}{(1 + |x|^2)^3} \right) d\xi \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(C_0 \cdot \|\psi_0\|_{20} + \varepsilon C_1 \cdot \|\psi_{12}\|_{20} \cdot \|R_n\|_{20} + \varepsilon^{n+2} C_2 \cdot \|\psi_{34}\|_{20} \cdot \|R_n\|_{20}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{2n+3} C_3 \cdot \|R_n\|_{20}^3 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $|\psi_{12}| = |\psi_1| + |\psi_2|$, $|\psi_{34}| = |\psi_3| + |\psi_4|$. Перепишем неравенство в виде

$$\begin{aligned} \frac{(1 + |x|^2) |R_n|}{(1 + |x|^2)} &\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(C_0 \cdot \|\psi_0\|_{20} + \varepsilon C_1 \cdot \|\psi_{12}\|_{20} \cdot \|R_n\|_{20} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{n+2} C_2 \cdot \|\psi_{34}\|_{20} \cdot \|R_n\|_{20}^2 + \varepsilon^{2n+3} C_3 \cdot \|R_n\|_{20}^3 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Так как $\sup_x \{(1 + |x|^2)|R_n|\} \equiv \|R_n\|_{20} < \infty$, а $(1 + |x|^2) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, то $\exists C > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} \|R_n\|_{20} &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \cdot C \cdot \int_0^t \left(C_0 \cdot \|\psi_0\|_{20} + \varepsilon C_1 \cdot \|\psi_{12}\|_{20} \cdot \|R_n\|_{20} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{n+2} C_2 \cdot \|\psi_{34}\|_{20} \cdot \|R_n\|_{20}^2 + \varepsilon^{2n+3} C_3 \cdot \|R_n\|_{20}^3 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Для решения неравенства (22) упростим его правую часть. Для этого заменим известные нормы на отрезке $[0, T]$ и константы на максимальную константу M . Получим:

$$\|R_n\|_{20} \leq \varepsilon M \int_0^t \left(1 + \|R_n\|_{20} + \|R_n\|_{20}^2 + \|R_n\|_{20}^3 \right) d\tau \quad (23)$$

Теперь рассмотрим соответствующее дифференциальное неравенство:

$$\frac{dy}{dt} \leq \varepsilon M(1 + y + y^2 + y^3) \quad (24)$$

Для его решения проинтегрируем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \varepsilon M(1 + y + y^2 + y^3); \quad \int \frac{dy}{(1+y)(1+y^2)} = \varepsilon M \int dt; \\ &\ln \left(\frac{1+y}{\sqrt{1+y^2}} \right) + \operatorname{arctg}(y) = \varepsilon 2Mt + C \end{aligned}$$

Так как $y(0) = 0$, то $C = 0$. Получим:

$$\ln \left(\frac{1+y}{\sqrt{1+y^2}} \right) + \operatorname{arctg}(y) = \varepsilon 2Mt.$$

Отсюда оценка:

$$\operatorname{arctg}(y) \leq \varepsilon 2Mt \text{ или } y \leq \operatorname{tg}(\varepsilon 2Mt).$$

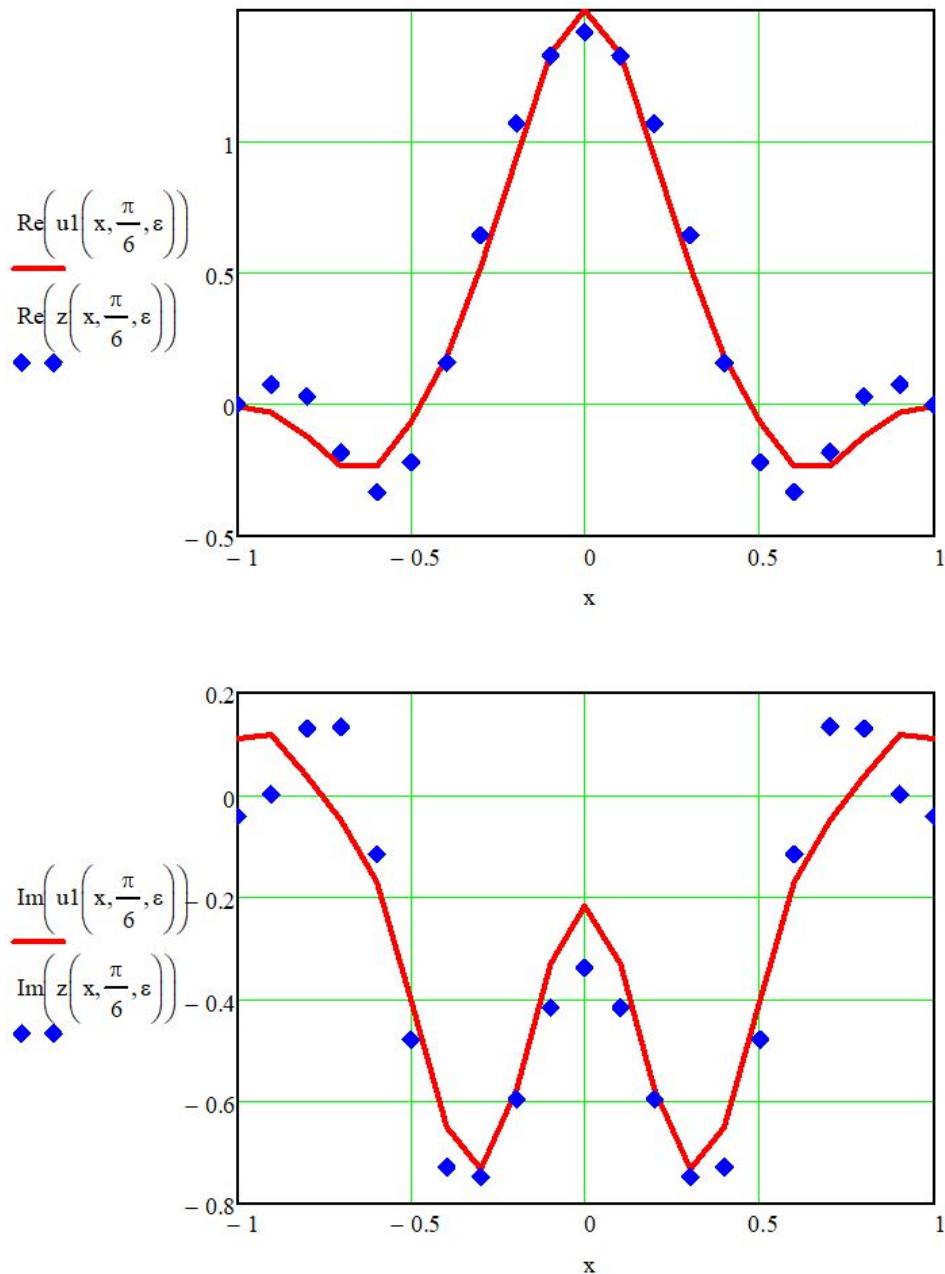
Таким образом, возвращаясь к (23), получили оценку остаточного члена на отрезке $[0, T]$:

$$\|R_n\|_{20} \leq \operatorname{tg}(\varepsilon 2MT) \leq \operatorname{tg}(T) = C, \quad \varepsilon < \frac{1}{2M}$$

Окончательно будем иметь: $\|R_n\|_{00} \leq C$.

5. Заключение.

В завершение нашей работы приведем сравнение точного решения задачи (3) с начальным условием e^{-x^2} , $t = \frac{\pi}{6}$, $\varepsilon = 0.1$ и регуляризованной асимптотики решения, содержащей нулевой и первый члены ряда. Сплошная линия — точное решение, точки — регуляризованная асимптотика.



Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012)

Список литературы

- [1] Einstein A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases.—Sitzungsber, Preuss. Akad. Wiss, 1924, B. 22, S. 261; 1925, ibid., B. 23, S. 3. Перевод: Эйнштейн А. Квантовая теория одноатомного идеального газа.—УФН, 1965, т. 86, № 3, с. 381–403.
- [2] Anderson M.H., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor.—Science, 1995, Volume 269, Issue 5221, p. 198–201.
- [3] Davis K. B., Mewes M. -O., Andrews M. R., van Druten N. J., Durfee D. S., Kurn D. M. and Ketterle W. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms.—Phys. Rev. Lett., 1995, Volume 75, Issue 22, p. 3969–3973.
- [4] Bradley C. C., Sackett C. A., Hulet R. G. Bose-Einstein Condensation of Lithium: Observation of Limited Condensate Number.—Phys. Rev. Lett., 1997, Volume 78, Issue 6, p. 985–989.
- [5] Gross E.P. Structure of a quantized vortex in boson systems.—Nuovo Cimento, 1961, Volume 20, № 3, p. 454–477.
- [6] Питаевский Л.П. Вихревые линии в неидеальном бозе-газе.—ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 646–651.
- [7] Кадомцев Б.Б., Кадомцев М.Б. Конденсаты Бозе-Эйнштейна.—УФН, 1997, т. 167, № 6, с. 649–664.
- [8] Питаевский Л.П. Конденсация Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию.—УФН, 1998, т. 168, № 6, с. 641–653.
- [9] Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованное асимптотическое решение задачи Коши для неоднородного уравнения Шредингера в квазиклассическом приближении в присутствии «сильной» точки поворота у предельного оператора.—Дифф. урав. и процессы управл., 2023, № 1, с. 110–124.

- [10] Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Построение регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для неоднородного уравнения типа Шрёдингера с потенциалом $V(x) = x$. — Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2024, т. 231, с. 27–43.
- [11] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
- [12] Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные уравнения и метод регуляризации.— М.: МЭИ, 2012.
- [13] Ломов С. А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: МГУ, 2011.
- [14] Елисеев А. Г., Ратникова Т.А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота. — Дифф. урав. и процессы управл., 2019, № 3, с. 63–73.
- [15] Елисеев А. Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота. — Дифф. урав. и процессы управл., 2020, № 2, с. 15–32.
- [16] Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши для параболического уравнения при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора. — Математические заметки СВФУ, 2020, № 3, с. 3–15.
- [17] Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора. — Дифф. урав. и процессы управл., 2020, № 1, с. 55–67.
- [18] Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота. — Дифф. урав. и процессы управл., 2022, № 3, с. 46–58.
- [19] Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии «слабой» точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром. — Диффер. уравн., 2022, т. 58, № 6, с. 733–746.

- [20] Шабат А.Б. О задаче Коши для уравнения Гинзбурга-Ландау.— Динамика сплошной среды, Изд-во Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1969, Вып. 1, с. 180-194.
- [21] Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметров.— УМН, 1971, т. 26, № 2(158), с. 101–114.
- [22] Liouville, J. Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable. — Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1837, p. 16–35.
- [23] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

REGULARIZED ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM FOR THE GROSS-PITAEVSKII EQUATION

Alexander G. Eliseev , Pavel V. Kirichenko

National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

yeliseevag@mpei.ru, kirichenkopv@mpei.ru

Abstract. The article is devoted to the construction of a regularized asymptotics of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation, which is a nonlinear Schroedinger equation with cubic nonlinearity. The potential energy profile chosen in the work leads, from the standpoint of the regularization method, to a singularity in the spectrum of the limit operator in the form of a strong turning point. Within the framework of the ideas of asymptotic integration of problems with an unstable spectrum by A.G. Eliseev, it is shown how to construct an asymptotic solution for the considered problem of any order in a small parameter.

Keywords: singularly perturbed Cauchy problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.

The results of A.G.Eliseev were obtained as part of the state assignment of the Russian Ministry of Education and Science(project FSWF-2023-0012)