ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория нелинейных колебаний

Метод "перехода в пространство производных". 40 лет эволюции

И.М.Буркин

Тульский государственный университет
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. В 1975 году был предложен "метод перехода в пространство производных" – эффективно проверяемый частотный критерий существования нетривиального периодического решения у многомерных моделей систем автоматического регулирования с одной дифференцируемой нелинейностью. Предложенный метод, использующий классический принцип тора, позволил, с одной стороны, вообще избежать каких-либо построений в фазовом пространстве исследуемой системы, а с другой – расширить класс систем, для исследования которых он может быть применен. В работе дан обзор результатов, представляющих обобщение и развитие этого метода. Продемонстрирована связь метода перехода в пространство производных с широко известным в настоящее время обобщенным принципом Пуанкаре-Бендиксона R. A. Smith, а также результатами современных авторов, работающих в области теории колебаний в многомерных системах. Изложены полученные в последние годы автором статьи частотные критерии существования орбитально устойчивых циклов в многосвязных системах автоматического регулирования (MIMO систем), а также методы синтезирования многомерных систем, имеющих единственное состояние равновесия и обладающих любым наперед заданным числом орбитально устойчивых циклов. Приведено распространение обобщенного принципа Пуанкаре-Бендиксона на многомерные системы с угловой координатой. Показано применение излагаемых методов исследования колебательных процессов в многомерных динамических системах к решению известной задачи С.Смейла из теории химической кинетики биологических клеток, а также к поиску скрытых аттракторов обобщенной системы Чуа и минимального глобального аттрактора системы с полиномиальной нелинейностью. Изложение иллюстрируется многочисленными примерами.

Abstract. In 1975 the so called “method of transfer to the derivative space” was proposed. It is an efficiently verified frequency criterion of the existence of a nontrivial periodic solution in multidimensional models of automatic control systems with one differentiable nonlinear term. The method used the classical torus principle and refrained from any constructions in the phase space of the system under study. Moreover, the method allowed researchers to broaden the class of systems to that it may be applied. In this work we give a survey of the results presenting generalization and expansion of the method. We also show the connection between the method of transfer to the derivative space, well known the Poincare-Bendixon generalized principle proposed by R. A. Smith and the results of contemporary authors who are active in the theory of oscillations in multidimensional systems. During recent years the author obtained frequency criteria of the existence of orbitally stable cycles in multivariable automatic control systems (MIMO systems) and the methods of construction of multidimensional systems having the only equilibrium state and any given in advance number of orbitally stable cycles, which are described in the paper. The extension of the Poincare-Bendixon generalized principle to multidimensional systems with angular coordinate is presented. We show the application of described methods of investigation of oscillation processes in multidimensional dynamical systems to the solving S. Smale problem from the biological cells chemical kinetics theory and also to the finding hidden attractors of the Chua generalized system and minimal global attractor of a system with a polynomial nonlinear term. The publication is illustrated by numerous examples.

1.Первый результат

Метод "перехода в пространство производных" был анонсирован в 1975 году [1] и подробно изложен в опубликованной в 1977 году работе [2]. Основной целью этой работы было получение эффективно проверяемого критерия существования нетривиального цикла у многомерной системы вида

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \sigma = c^{*}x, x \in R^{n}, \tag{1}$$

где A - вещественная невырожденная $n \times n$ матрица, b и c - n векторы, $\varphi(\sigma)$ - скалярная нелинейность. Знак (*) здесь означает транспонирование. Ниже, в комплексном случае, мы этим знаком будем обозначать также эрмитово сопряжение.

На протяжении более чем 30 лет, предшествующих появлению работы [2], основным приемом, используемым для доказательства существования периодических решений в автономных системах, возникающих в различных областях науки и технологий, был принцип тора. Это принцип состоит в следующем. Предположим, что траектории решений $x(t, x_0)$ автономной системы

$$\dot{x} = f(x), x \in R^{n}, \tag{2}$$

встречающие при $t = t_0$ границу тороидальной области $T \subset R^n$,не содержащей точек покоя системы, остаются внутри этой области при $t > t_0$. Пусть существует бесконтактное $(n-1)$-мерное сечение S области T, обладающее возвращаемостью, то есть такое, что из условия $x(0, x_0) \in S$ следует, что $x(t(x_0), x_0) \in S$ для некоторого $t(x_0) > 0$. Тогда в T содержится по крайней мере одна периодическая орбита (цикл) системы (2). Использование именно этого принципа позволило авторам работ [3-18] доказать существование периодических решений у автономных систем (2) для $n \geq 3$. При этом уже в случае трехмерных систем авторам приходилось преодолевать значительные технические трудности в процессе явного построения инвариантного тора и, особенно, при отыскании его бесконтактного сечения. Эти трудности иногда удавалось обойти, либо используя специфику рассматриваемых систем [12], либо накладывая излишне жесткие ограничения на их параметры [14].

Предложенный в [2] частотный критерий существования цикла у систем вида (1) позволил, с одной стороны, вообще избежать каких-либо построений в фазовом пространстве исследуемой системы, а с другой стороны – расширить класс систем, для исследования которых он может быть применен. Однако, наиболее существенным является тот факт, что сама идея метода перехода в пространство производных, предложенная в работе [2], оказалась настолько плодотворной, что, по-видимому, именно ее дальнейшее развитие позволило Р.А.Смиту получить обобщенный принцип Пуанкаре-Бендиксона для многомерных систем (2) [19-25]. Многие другие результаты, связанные с обобщенным принципом Пуанкаре-Бендиксона, были получены в работах [26-32].

Приведем здесь условия существования цикла у системы (1), полученные в работе [2]. Эти условия формулируются в терминах ограничений, накладываемых на поведение нелинейности $\varphi(\sigma)$ и свойства передаточной функции $\chi(p) = c^*(A - pI_n)^{-1}b$, где I_n-единичная матрица. Функция $\chi(p)$ предполагается невырожденной, то есть ее нельзя представить в виде отношения двух многочленов, со степенью знаменателя меньшей n.

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция* $\varphi(\sigma)$ *дважды непрерывно дифференцируема при* $\sigma \in (-\infty, \infty)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\mu_1 \le \varphi'(\sigma) \le \mu_2,\ \mu_1 < \varphi'(0) < \mu_2,\ \varphi(0) = 0 \tag{3}$$

где возможно $\mu_2 = +\infty$ *или* $\mu_1 = -\infty$;

2) *система (1) диссипативна по Левинсону, то есть существует такое число* $R > 0$, *что* $\overline{\lim_{t\to\infty}} | x(t, p) | < R$ *для любого решения* $x(t, p)$ *этой системы(* $x(0, p) = p$ *);*

3) *матрица* $A + \varphi'(0)bc^*$ *имеет два собственных значения в правой открытой полуплоскости и не имеет их в некоторой полосе* $-\lambda_0 \le \operatorname{Re} p \le 0, \lambda_0 > 0$;

4) *для некоторого* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *при всех вещественных* $\omega \ge 0$ *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{[1 + \mu_1\chi(i\omega - \lambda)][1 + \mu_2\chi(i\omega - \lambda)]^*\} \ge 0 \ \text{при}\ \mu_2 \ne +\infty.\ \mu_1 \ne -\infty, \\ &-\operatorname{Re}\{\chi(i\omega - \lambda)[1 + \mu_2\chi(i\omega - \lambda)]^*\} \ge 0 \ \text{при}\ \mu_2 \ne +\infty.\ \mu_1 = -\infty, \\ &\operatorname{Re}\{[1 + \mu_1\chi(i\omega - \lambda)][\chi(i\omega - \lambda)]^*\} \ge 0 \ \text{при}\ \mu_2 = +\infty.\ \mu_1 \ne -\infty; \end{aligned} \tag{4}$$

5) *либо* $\chi(0) = 0$, *либо* $-\chi^{-1}(0) \notin [\mu_1, \mu_2]$ *при конечных* μ_1 *и* μ_2, *либо* $-\chi^{-1}(0) \notin [\mu_1, \mu_2], -\chi^{-1}(0) \notin [\mu_1, \infty]$ *соответственно.*

Тогда система (1) имеет нетривиальное периодическое решение.

Кроме оригинальной работы [2], доказательство этой теоремы можно найти в книге [34, Теорема 6.1]. Поэтому доказательство теоремы мы здесь не приводим. Остановимся только на некоторых его принципиальных моментах, демонстрирующих связь развитых в [2] идей с работами R. A. Smith и недавними работами Luis A. Sanchez [31,32].

Пусть $f(x)$ – правая часть системы (1). Оказывается, что условие 5) теоремы гарантирует, что функция $f(x)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство R^n на себя. То есть существует однозначное непрерывное обратное отображение $x = f^{-1}(y)$, определенное при всех $y \in R^n$. Последнее обстоятельство позволяет задать динамическую систему в R^n следующим образом

$$y(t, y_0) = f[x(t, x_0)],\ y_0 = f^{-1}(x_0), \tag{5}$$

Динамическая система (5) и есть система в "пространстве производных" Для ее решений выполнено соотношение

$$\dot{y}(t, y_0) = Df[x(t, x_0)]y(t, y_0), \tag{6}$$

где $Df(x)$-матрица Якоби. Оказалось, что для системы (6) при выполнении предположений теоремы 1 можно легко доказать существование инвариантной тороидальной области, не содержащей единственную точку покоя $x = 0$ этой системы и обладающей бесконтактным сечением. Тем самым удается доказать существование цикла. При этом одним из элементов границы инвариантного тора является часть поверхности двумерного квадратичного конуса (конуса ранга 2, по терминологии работы [31]), то есть множества $K = \{y : y^* Hy \le 0\}$, где H – симметрическая $n \times n$-матрица, имеющая ровно 2 отрицательных и $n-2$ положительных собственных значения. Само множество K является положительно инвариантным для траекторий динамической системы (6). В частности, для $V[y(t, y_0)] = y(t, y_0)^* Hy(t, y_0)$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt} V[y(t, y_0)] + 2\lambda V[y(t, y_0)] \le 0. \tag{7}$$

Условия выполнения неравенства (7) для траекторий системы (6) могут быть легко сформулированы в терминах ограничений на функцию $f(x)$.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$-дифференцируемая везде в R^n функция. Пусть существуют такая $n \times n$-матрица $H = H^*$ и число λ, что для произвольных x_1 и x_2 из R^n выполнено*

$$(x_1 - x_2)^* H[f(x_1) - f(x_2) + \lambda_1 (x_1 - x_2)] \le 0\ . \tag{8}$$

Тогда для траекторий системы (6) выполнено соотношение (7) для $V(y) = y^* Hy$.

Доказательство. Положим в (8) $x_1 = x + \eta\theta, x_2 = x$, где $\eta \in R^1, \theta \in R^n$. Тогда (8) примет вид $\eta\theta^* H[f(x + \eta\theta) - f(x) + \lambda\eta\theta] \le 0$. Откуда следует неравенство

$$2\theta^* \eta^{-1}[f(x + \eta\theta) - f(x)] + 2\lambda\theta^* H\theta \le 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\eta \to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\eta \to 0} \eta^{-1}[f(x + \eta\theta) - f(x)] = Df(x)\theta$, получим справедливое при всех $x \in R^n$ неравенство

$$(Df(x))^* H + HDf(x) + 2\lambda H \le 0. \tag{9}$$

Из (9) и (6) и следует выполнение неравенства (7) с $V(y) = y^* Hy$.

Отметим также, что из (8) для определенной выше функции $V(y)$ и любой пары решений $x_1(t), x_2(t)$ системы (2) следует неравенство

$$\frac{d}{dt} V[x_1(t) - x_2(t)] + 2\lambda V[x_1(t) - x_2(t)] \le 0\ . \tag{10}$$

Покажем, что в условиях теоремы 1 для $f(x) = Ax + b\varphi(c^* x)$ выполняется условие (8) с некоторой неособой матрицей $H = H^*$, имеющей 2 отрицательных и $n-2$ положительных собственных значения. Для простоты ограничимся рассмотрением случая конечных μ_1 и μ_2. В этом случае из первого неравенства (4) по теореме 1.2.6 [34] вытекает существование матицы $H = H^*$ такой, что при всех $y \in R^n$, $\xi \in R^1$ справедливо неравенство

$$2y^* H[(A+\lambda I_n)y + b\xi] + (\mu_2 c^* y - \xi)(\xi - \mu_1 c^* y) \le 0. \tag{11}$$

Положим в (11) $y = x_1 - x_2, \xi = \varphi(c^* x_1) - \varphi(c^* x_2)$ Так как

$$\varphi(c^* x_1) - \varphi(c^* x_2) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \varphi[c^*(\tau x_1 + (1-\tau)x_2)] d\tau =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{d\sigma} \varphi[c^*(\tau x_1 + (1-\tau)x_2)] c^*(x_1 - x_2) d\tau,$$

то

$$\mu_2 c^* y - \xi = (c^* y) \int_0^1 \{\mu_2 - \frac{d}{d\sigma} \varphi[c^*(\tau x_1 + (1-\tau)x_2)]\} d\tau,$$

$$\xi - \mu_1 c^* y = (c^* y) \int_0^1 \{\frac{d}{d\sigma} \varphi[c^*(\tau x_1 + (1-\tau)x_2)] - \mu_1\} d\tau$$

Поэтому в силу (3)

$$(\mu_2 c^* y - \xi)(\xi - \mu_1 c^* y) =$$

$$= \int_0^1 [\mu_2 - \varphi'(c^*(\tau x_1 + (1-\tau)x_2))][\varphi'(c^*(\tau x_1 + (1-\tau)x_2)) - \mu_1] d\tau \le 0.$$

Отсюда и из (11) следует, что для выбранных указанным выше образом y и ξ выполняется неравенство

$$2(x_1 - x_2)H[A(x_1 - x_2) + b(\varphi(c^* x_1) - \varphi(c^* x_2)) + \lambda(x_1 - x_2)] \le 0,$$

совпадающее с (8) .

Положив в (11) $\xi = \varphi'(0) b c^* y$, получим

$$H(A + \varphi'(0) b c^* + \lambda I) + (A + \varphi'(0) b c^* + \lambda I)^* H \le -[\mu_2 - \varphi'(0)][\varphi'(0) - \mu_1] c c^*. \tag{12}$$

Из предположения 3) теоремы вытекает, что матрица $A + \varphi'(0) b c^* + \lambda I$ имеет ровно два собственных значения в правой открытой полуплоскости и не имеет их на мнимой оси.. Поэтому из неравенства (12) и невырожденности функции $\chi(p)$ и леммы 1.2.4 [34] следует, что $\det H \ne 0$ и матрица H имеет ровно 2 отрицательных и $n-2$ положительных собственных значения.

Как будет ясно из дальнейшего, именно выполнение предположений, аналогичных соотношениям (8)-(10), играет определяющую роль в построениях работ [19,20,31,32].

В заключение данного раздела приведем некоторые результаты, которые могут быть получены с использованием теоремы 1.

Пример 1. (Система Рауха [4]). В 1950 *году Rauch L.L. исследовал вопрос существования цикла у системы третьего порядка, описывающей электрическую цепь с пентодной лампой

$$\begin{aligned} \dot\sigma &= a[f(\sigma) - (1+b)\sigma - z], \\ \dot y &= -c[f(\sigma) - \sigma - z], \\ \dot z &= -d(y+z), \end{aligned} \tag{13}$$

где a, b, c, d - положительные параметры.

Предполагая функцию $f(\sigma)$ непрерывной при $\sigma \in (-\infty, \infty)$, дифференцируемой при $\sigma = 0$ и пользуясь принципом тора, Раух доказал существование по крайней мере одного цикла у системы (13) при выполнении следующих предположений:

(i) $\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$, $|f(\sigma)| \leq M < \infty$,

(ii) $f'(0) > g = \dfrac{c+d}{2a} + 1 + b - \sqrt{\left(\dfrac{c-d}{2a}\right)^2 + \dfrac{bc}{a}}$,

(iii) $d - 9.7c - 5a - 2.4ab > 4.6c \sup\limits_{\sigma} \dfrac{f(\sigma)}{\sigma}, \forall \sigma \neq 0$.

Положим

$$\rho = d + a(1 + b - g),$$

$$q = \begin{cases} \dfrac{d+\rho}{2a} \ \text{ďđč}\ ab > d, \\ \dfrac{(\sqrt{d} - \sqrt{d-\rho})^2}{a} \ \text{ďđč}\ ab < d. \end{cases}$$

В книге [33, стр.107] доказано, что в предположении дифференцируемости функции $f(\sigma)$ использование теоремы 1 позволяет гарантировать существование цикла у системы (13) при выполнении следующих условий:

$$g - q \leq f'(\sigma) \leq g + q,\ g < f'(0) \leq g + q,\ \lim_{|\sigma| \to \infty} \sigma^{-1} f(\sigma) = h < g. \tag{14}$$

В [33] показано, что при некоторых значениях параметров a, b, c, d системы (13) можно указать неограниченную функцию $f(\sigma)$, для которой, к тому же, не выполнены предположения (iii), но выполнены условия (14). То есть для таких значений параметров класс нелинейностей, для которых система (13) имеет цикл, может быть существенно расширен.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi(x_n) - k_1 x_1 \\ \dot{x}_\nu &= x_{\nu-1} - k_\nu x_\nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots, n, \end{aligned} \tag{15}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – положительные числа, а $\varphi(x_n)$ – дифференцируемая функция.

Системы вида (15) рассматривались в работах [35,36]. При этом для функции $\varphi(\sigma)$, заданной только при $\sigma \geq 0$ и обладающей свойствами

$$\begin{aligned} &\varphi(\sigma) \to 0 \ \ \text{ďđč}\ \ \sigma \to 0 \\ &\varphi'(\sigma) < 0 \ \ \text{ďđč}\ \sigma \in (0, \infty) \end{aligned} \tag{16}$$

эти системы служат моделями биохимических реакций протеинового синтеза в клетках [36], а также моделью процессов, протекающих в нервных сетях [35].

Можно показать [36], что из вида системы (15) и свойств нелинейности следует, что открытый конус $R^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^n : x_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n\}$ положительно инвариантен для траекторий этой системы. В этом конусе мы и будем устанавливать наличие цикла. Поэтому нам будет важна только информация о поведении нелинейности $\varphi(\sigma)$ при $\sigma > 0$.

Для системы (15) $\chi(p) = -[(p + k_1)(p + k_2) \cdots (p + k_n)]^{-1} = -[\delta(p)]^{-1}$. Состояния равновесия системы находятся из уравнения $\sigma + \chi(0)\varphi(\sigma) = 0$, которое в данном случае приобретает вид $\varphi(\sigma) = k_1 k_2 \cdots k_n \sigma$. Из условий (16) следует, что последнее уравнение имеет единственное решение $\sigma = \sigma_0 > 0$, то есть система (15) имеет единственное состояние равновесия $\bar{x} \in R^n_+$.

Без ограничения общности можно предположить, что $0 < k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$. Ниже мы ограничимся рассмотрением случая, когда $n \leq 5$. Как будет ясно из дальнейшего, это ограничение не принципиально., просто с ростом n резко возрастает объем вычислений. Будем также считать, что

$$k_1 \le k_2 < k_3 \le k_4 \le k_5, \tag{17}$$

а при $n = 5$ дополнительно выполнено неравенство

$$(2(k_1 + k_4 + k_5) \ge 3(k_2 + k_3). \tag{18}$$

Предположим, что состояние равновесия $\bar{x}$ неустойчиво и покажем, что при выполнении (17) при $n = 3,4,5$, а при $n = 5$ дополнительно (18), система (15) имеет цикл в множестве R_+^n. Выполним в системе (15) замену переменных, положив $y = x - \bar{x}$. Тогда она может быть записана в виде

$$\dot{y} = Ay + b\varphi_1(\sigma), \sigma = c^* y, \tag{19}$$

где $\varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma + \sigma_0) - \varphi(\sigma_0)$,

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -k_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -k_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица A гурвицева, а функция $\varphi_1(\sigma)$ ограничена, то система (19) диссипативна. Так как для функции $\varphi_1(\sigma)$ выполнены условия $\varphi_1(0) = 0, \varphi_1'(\sigma) < 0$, то можно воспользоваться теоремой 1. Положим $\lambda = 0.5(k_2 + k_3)$. Условие 4) теоремы приобретает вид $\operatorname{Re}\chi(i\omega - \lambda) \le 0$. Для данного примера имеем : $\operatorname{Re}\left[\prod_{i=1}^{n}(i\omega - \lambda + k_i)\right] \ge 0$. Выражение в левой части последнего неравенства запишется:

$$(\omega^2 + \lambda^2)(\lambda - k_1), \quad n = 3,$$

$$(\omega^2 + \lambda^2)[(\lambda - k_1)(k_4 - \lambda) + \omega^2], n = 4,$$

$$(\omega^2 + \lambda^2)[(\lambda - k_1)(k_4 - \lambda)(k_5 - \lambda) + \omega^2(k_1 + k_4 + k_5 - 3\lambda)], n = 5.$$

Из определения λ и предположений (17), (18) вытекает, что для $n = 3,4,5$ выполнено строгое неравенство $\operatorname{Re}\chi(i\omega - \lambda) < 0$. Поэтому все матрицы $A + \mu bc^* + \lambda I_n$ для $\mu \in (-\infty, 0]$ имеют одно и то же число собственных значений в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и не имеют их на мнимой оси. Поскольку матрица $A + \lambda I_n$ в силу выбора λ имеет ровно 2 собственных значения в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$,то это же справедливо для всех матриц $A + \mu bc^* + \lambda I_n$. Рассмотрим матрицу $A + \varphi'(0)bc^*$. По предположению эта матрица имеет по крайней мере одно собственное значение в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Но ее характеристический полином $\delta(p) - \varphi_1'(0)$ не имеет положительных вещественных корней, поэтому собственных значений в правой открытой полуплоскости у матрицы $A + \varphi'(0)bc^*$ не менее чем 2. Но из предыдущих рассуждений следует, что их ровно 2 и, более того, эта матрица не имеет собственных значений в полосе $-\lambda \le \operatorname{Re} p \le 0$. Таким образом, выполнено условие 3) теоремы 1. Условие 5) этой теоремы также, очевидно, выполнено. Итак, система (15) при сделанных предположениях имеет цикл в множестве R_+^n.

Отметим, что в работе [36] при решении вопросов существования циклов у систем вида (15) были применены иные методы, которые также основаны на использовании идеи принципа тора, но при этом существенно опираются на специфику исследуемых систем. Эти идеи получили дальнейшее развитие в работах [29,30] посвященных исследованию предельных множеств траекторий так называемых монотонных циклических систем с обратной связь(Monotone Cyclic Feedback Systems). Используя специфические особенности таких систем, авторам удалось получить очень глубокие и исчерпывающие результаты относительно структуры предельных множеств их ограниченных полутраекторий.

Пример 3. В недавних работах [31,32] Санчес рассмотрел класс автономных систем (2), обладающих некоторым свойством обобщенной монотонности по отношению к двумерному конусу K. В частности, если конус $K=\{x: x^* Hx \le 0\}$, где $H=H^*$ - матрица, имеющая 2 отрицательных и $n-2$ положительных собственных значения, то обобщенная монотонность по отношению к такому конусу эквивалентна существованию функции $\lambda(x)$ такой, при всех $x\in R^n$ справедливо неравенство

$$(Df(x))^* H + HDf(x) + \lambda(x)H < 0. \qquad (20)$$

Заметим, что условие (20) гарантирует выполнение для любой пары решений $x_1(t), x_2(t)$ системы (2) и функции $V(y)=y^* Hy$ неравенства, аналогичного (10). Как показано в заботе [32], при выполнении предположения (20) справедливо утверждение: *если система (2) диссипативна и имеет единственное неустойчивое гиперболическое состояние равновесия, то она имеет по крайней мере один цикл.*

Иллюстрируя развитую им теорию, Санчес рассматривает уравнение

$$x^{IV} + 2x''' + 2x'' + 2x' + x = f(x) \qquad (21)$$

в предположении, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируемая, а также выполнены условия:

$a) \, f(x) = x \Leftrightarrow x = 0,$

$b) \, f'(0) < 0,$

$c) \lim\limits_{|x|\to} \dfrac{f(x)}{x} = L \in (0,1).$

Условие *a)* означает, что рассматриваемое уравнение имеет единственное состояние равновесия $x=0$. Предположение $b)$ гарантирует, что характеристический полином линеаризованного в нуле уравнения имеет два корня с положительными вещественными частями и два с отрицательными. Наконец, предположение *c)* гарантирует диссипативность по Левинсону. Ставится задача: найти пределы изменения производной $f'(x)$, гарантирующие наличие цикла у уравнения (21). Техника исследования, развитая в работах [31,32], позволила автору гарантировать наличие цикла при $f'(x) \in (-11.9, 0.2)$. Больший сектор автору найти не удалось.

Применим к рассматриваемому уравнению теорему 1. Здесь

$$\chi(p) = -(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 2p + 1)^{-1}.$$

Положим $\lambda = 0.18$. График функции $r(\omega) = \mathrm{Re}\{[1+\mu_1\chi(i\omega-\lambda)][1+\mu_2\chi(i\omega-\lambda)]^*\}$ для $\mu_1 = -13, \mu_2 = 0.4$ приведен на рисунке 1.

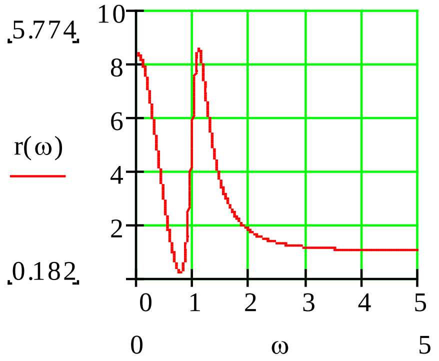

Рис.1

Таким образом, теорема 1 гарантирует наличие цикла у уравнения (21) при $f'(x) \in (-13{,}0.4)$. На рисунке 2 показан цикл уравнения (21) с $f(x) = -13.4\,\mathrm{atan}\,x + 0.4x$ (проекция на плоскость $(x, \dot{x})$).

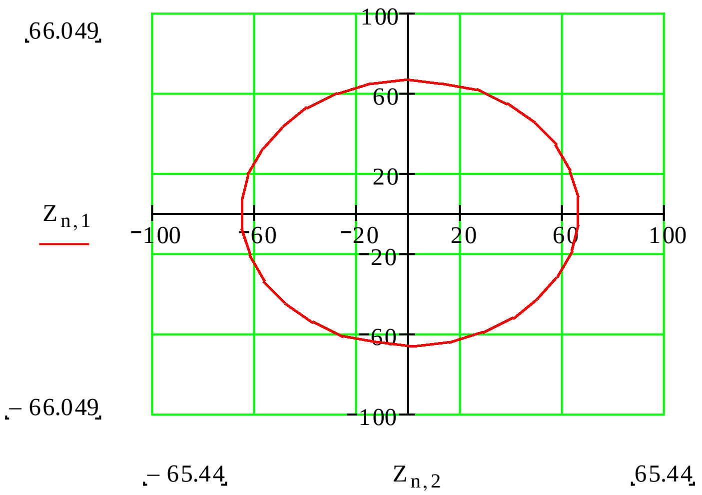

Рис.2

2. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ С ПРОСТОЙ ДИНАМИКОЙ. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ПУАНКАРЕ-БЕНДИКСОНА

Вплоть до 70-х годов XX века единственно возможными наблюдаемыми состояниями динамических систем считались стационарные состояния, автоколебания, математическим образом которых являются предельные циклы и биения, вызванные модуляциями – инвариантные торы с квазипериодическими траекториями. Первые два типа состояний присущи двумерным системам, третье состояние может возникнуть уже при переходе в пространство размерности 3. В принципе все эти состояния могут быть объяснены при помощи линейной теории. Несмотря на то, что была понятна принципиальная возможность возникновения новых типов движений при выходе в пространство, в шестидесятых годах оставалось неясным могут ли в многомерных системах существовать более сложные движения.

Традиционные представления о характере динамических процессов в многомерных системах коренным образом изменились после появления знаменитой работы Е.Лоренца [37], в которой впервые был обнаружен странный хаотический аттрактор. Благодаря этой работе, а также исследованиям Смейла [38] появилось новое понятие – динамический хаос и родилась новая математическая дисциплина – хаотическая динамика с собственными моделями и методами исследования. Тот неожиданный факт, что странные хаотические аттракторы могут возникать даже в системах, имеющих достаточно простую структуру, например, в кусочно-линейных системах [39] , побудило многих математиков обратиться к изучению классов систем "с простой динамикой". Под системами с простой динамикой понимаются системы, которые могут содержать только структуры, присущие системам на плоскости (состояния равновесия, циклы) и, возможно, плотно покрывающие инвариантный тор квазипериодические траектории. В той области пространства параметров изучаемой системы, где она имеет простую динамику, эта система может быть детально проанализирована.

Один из классов систем с простой динамикой, который подвергся детальному изучению – монотонные системы , а именно "сотрудничающие" и "конкурирующие" системы (cooperative and competitive systems). Хотя подобные системы изучались в течение долгого времени, однако именно Hirsch в [40-45] дал полное описание их главных динамических свойств. Дальнейшее распространение на другие классы уравнений (периодические уравнения и уравнения с запаздыванием) и объединение с некоторыми существующими аналогичными результатами для параболических уравнений в частных производных позволили построить обширную теорию, которой были посвящены некоторые монографии [46,47] и (см. также [48] для приложений к параболическим уравнениям в частных производных). Благодаря широкому спектру приложений данной теории в биологии, химии, биохимии, медицине ее развитие продолжается и в настоящее время [49-52].

Если K некоторый одномерный телесный конус в R^n, то система (2) называется K-cooperative, если из предположения $p-q\in K$ следует, что для ее решений $x(t,p)$ и $x(t,q)$ справедливо включение $x(t,p)-x(t,q)\in K$ при всех $t\geq 0$ (в предположении, что оба решения определены при $t\in[0,\infty)$).Система (2) называется K-competitive, если система $\dot{x}=-f(x)$ является K-cooperative. Основной вывод, справедливый для рассматриваемых систем, – стремление почти каждой положительной полутраектории к состоянию равновесия. Вот как авторы работы [46] сами описывают ее основные результаты: " Мы увидим, что набор вариантов предельного поведения траекторий монотонных систем строго ограничен. Типичные заключения относительно вариантов такого поведения, справедливые при естественных ограничения, следующие:

1) Если все положительные полутраектории ограничены, то почти все полутраектории стремятся к некоторому состоянию равновесия.

2) Не существует никаких притягивающих периодических орбит, кроме состояний равновесия, поскольку любой аттрактор содержит устойчивое состояние равновесия.

3) В R^3 каждое компактное предельное множество, не содержащее состояний равновесия, есть периодическая орбита, которая ограничивает инвариантный диск, содержащий состояние равновесия.

4) В R^2 каждая компонента любого решения с течением времени возрастает или убывает."

Оставаясь в рамках теории монотонных систем, не удается получить эффективно проверяемые условия существования циклов для систем размерности большей, чем 3. Дело в том, что траектории монотонного потока проектируются либо на прямые, содержащиеся в $K\cup -K$, либо на гиперплоскости, расположенные вне $K\cup -K$ В первом случае мы получаем одномерную, а, следовательно, тривиальную динамику. Во втором случае может появиться сложное движение, если на гиперплоскости имеется полностью неустойчивая точка. Если к тому же эта гиперплоскость имеет размерность 2, то динамика проекции потока на нее может обладать свойствами, обеспечивающими существование цикла. Исходя именно из этих соображений авторs работы [53], используя теорию монотонных систем, сумели получить условия существования орбитально устойчивого цикла у системы (2) в R^3, которые близки по смыслу к теореме 1.

Другой класс систем с простой динамикой был выделен и детально изучен в серии работ R.A.Smith [19-25]

Для удобства изложения некоторых результатов работ [19-25], касающихся динамики системы (2), сформулируем здесь типичные предположения, используемые в большинстве этих работ.

(H_1) *Существует открытое множество* $S \subset R^n$, *в котором функция* $f(x)$ *удовлетворяет локальному условию Липшица.*

(H_2) *Существуют положительные постоянные* λ, ε, *и неособая* $n \times n$*-матрица* $H = H^*$, *такие, что для произвольных* x_1 *и* x_2 *из* $S \subset R^n$ *выполнено*

$$(x_1 - x_2)^* H[f(x_1) - f(x_2) + \lambda(x_1 - x_2)] \le -\varepsilon |x_1 - x_2|^2. \tag{22}$$

Заметим сразу, что предположение (H_2) эквивалентно требованию: для любой пары решений $x_1(t), x_2(t)$ системы (2) справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} V[x_1(t) - x_2(t)] + 2\lambda V[x_1(t) - x_2(t)] \le -\varepsilon |x_1(t) - x_2(t)|^2, \tag{23}$$

где $V(x) = x^* H x$.

(H_3) *Неособая* $n \times n$*- матрица* $H = H^*$ *имеет* j *отрицательных и* $n - j$ *положительных собственных значений.*

(H_4) $x = 0$ *- единственная точка покоя системы (2).*

(H_5) *Существует открытое ограниченное множество* $D \subset R^n$ *такое, что его граница* ∂D *пересекается вовнутрь всеми траекториями системы (1), которые ее встречают, то есть из условия* $x(t_0) \in \partial D$ *следует, что* $x(t) \in D$ *при всех* $t > t_0$.

Первый результат Смита [19] был посвящен распространению принципа Пуанкаре-Бендиксона на многомерные системы вида (1), где A, b и c матрицы порядка $n \times n$, $n \times m$ и $n \times l$ соответственно. Все последующие результаты формулировались для системы (2), а система (1) рассматривалась как частный случай, для которого условия формулируемых теорем допускают непосредственную проверку.

Приведем здесь формулировки некоторых утверждений, доказанных в упомянутых работах в удобной для нас форме. Предположим, что решение $x(t, x_0)$ системы (2) определено при всех $t \in (0, \infty)$ и ограничено. Тогда ω-предельное множество $\Omega(\Gamma)$ положительной полутраектории $\Gamma = \{x : x = x(t, x_0), t \ge 0\}$ этого решения ограничено, замкнуто и состоит из целых траекторий, то есть из условия $q \in \Omega(\Gamma)$ следует, что $x(t, q) \in \Omega(\Gamma)$ при $t \in (-\infty, \infty)$. Один из результатов, вытекающих из построений работы [24], может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Если выполнены предположения* (H_2) *и* (H_3), *то существует непрерывное отображение* $\Pi : \Omega(\Gamma) \to R^j$, *имеющее непрерывное обратное отображение*

$\eta : \Pi\Omega(\Gamma) \to R^n$ *такое, что соотношения* $\xi(t) = \Pi x(t), x(t) = \eta[\xi(t)]$ *обеспечивают взаимно однозначное соответствие между траекториями системы(2), содержащимися* в $\Omega(\Gamma)$, и траекториями системы $\dot{\xi}(t) = \Pi f[\eta(\xi)]$.

Таким образом, при выполнении предположений (H_2) и (H_3) динамика траекторий в ω-предельном множестве любой ограниченной полутраектории системы (2) оказывается такой же, как динамика некоторой системы в пространстве размерности j. Если $j = 2$, то это динамика системы, обладающей свойствами Пуанкаре-Бендиксона. Именно эти соображения составляют суть основных построений теории, развитой в работах R. A. Smith , позволивших ему получить исчерпывающие результаты относительно структуры предельных множеств траекторий исследуемых систем.

Обратим внимание на связь гипотез $(H_1)-(H_5)$ с предположениями теоремы 1. Предположение (22) является более жестким, чем условие (8). Однако, как оказалось, именно это ужесточение предположения является ключевым в построениях R. A. Smith. Условия, формулируемые в гипотезах (H_2) и (H_3) будут, например, выполнены, если выполнено предположение 3) теоремы 1, и имеет место строгое неравенство в (4) для конечных μ_1 и μ_2. Однако, в случае, когда хотя бы одно значение μ_1 или μ_2 бесконечно, теорема 1 позволяет [54] получать условия существования цикла для систем, не охватываемых критериями Смита. Выполнение условий гипотезы (H_5) вытекает, как известно, из предположения о диссипативности системы. Предположения (H_4) справедливы при выполнении условий 5) теоремы 1. В то же время требования гипотезы (H_1) ослабляют требования к гладкости нелинейности в системе (1), что оказывается очень полезным при решении некоторых прикладных задач.

Следующая теорема, доказанная в работе [20], дает достаточно общие условия существования цикла у системы (2).

Теорема 3. *Пусть для системы (2) справедливы предположения* $(H_1)-(H_3)$ *и она имеет ограниченную полутраекторию* Γ, *содержащуюся в* S. *Если* $\Omega(\Gamma)$ *не содержит точек покоя системы (2), то* $\Omega(\Gamma)$ *состоит из единственной периодической траектории этой системы.*

Сформулированная теорема не дает условий существования полутраектории, ω-предельное множество которой не содержит точек покоя системы (2), а также информацию о поведении остальных ее траекторий. Такую информацию дают следующие теоремы [20].

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица глобально в* $S = R^n$. *Пусть предположение* (H_2) *выполнено везде в* R^n, *справедливо* (H_4), *а также выполнены следующие предположения:*

(H_6) *Матрица* $Df(x) = J(x)$ *непрерывна в некоторой окрестности точки* $x = 0$ *и* $J(0)$ *не имеет собственных значений в полосе* $-\lambda \leq \operatorname{Re} p \leq 0$.

(H_7) *Существуют постоянная* $\beta < 1$ *и* $n \times n$*-матрица* L, *для которых*

$$|x|^{-\beta}\,[f(x) - Lx] \to 0 \text{ при } |x| \to \infty$$

Тогда, если матрица L *имеет по крайней мере одно собственное значение в полосе* $-\lambda < \operatorname{Re} p < 0$ *и не имеет собственных значений в полуплоскости* $\operatorname{Re} p \geq 0$, *то полутраектории* Γ *системы (2) обладают следующими свойствами:*

A) Если $\Omega(\Gamma)$ *не пусто, то* Γ *– ограниченная полутраектория;*

B) Если $0 \in \Omega(\Gamma)$ *, то 0 – единственная точка* $\Omega(\Gamma)$ *;*

C) Существует по крайней мере одна ограниченная полутраектория Γ *системы (2), для которой* $0 \notin \Omega(\Gamma)$.

Если к тому же выполнено предположение (H_3) *с* $j = 2$*, то система (2) имеет по крайней мере один цикл.*

Теорема 5. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица глобально в* $S = R^n$ *. Пусть предположение* (H_2) *выполнено везде в* R^n*, справедливы* (H_4), (H_7) *а также выполнены следующие предположение:*

(H_8) *Матрица* $Df(x) = J(x)$ *непрерывна в некоторой окрестности точки* $x = 0$ *и* $J(0)$ *не имеет собственных значений в полуплоскости* $\operatorname{Re} p \geq 0$.

Тогда, если матрица L *имеет по крайней мере одно собственное значение* p_0*, для которого* $\operatorname{Re} p_0 > 0$ *и не имеет собственных значений в полосе* $-\lambda \leq \operatorname{Re} p \leq 0$*, то полутраектории* Γ *системы (2) обладают свойствами A) – C). Если к тому же выполнено предположение* (H_3) *с* $j = 2$*, то система (2) имеет по крайней мере один цикл.*

Наконец, следующая теорема, доказанная в работе [25] дает условия существования орбитально устойчивых циклов у системы (2).

Теорема 6 . *Пусть справедливо предположение* (H_5)*, а также предположения* (H_2) *и* (H_3) *с* $j = 2$*. Пусть множество* D *не содержит состояний равновесия системы (2). Тогда любая полутраектория системы (2) в* D *сходится при* $t \to \infty$ *к замкнутой траектории этой системы и* D *содержит по крайней мере одну замкнутую траекторию, которая орбитально устойчива. Если к тому же функция* $f(x)$ *аналитическая в* R^n *(то есть разлагается в сходящийся ряд по степеням* $(x - x_0)$ *в окрестности любой точки* $x_0 \in R^n$ *), то* D *содержит только конечное число замкнутых траекторий, по крайней мере одна из которых орбитально асимптотически устойчива.*

Для конкретных классов систем, встречающихся в приложениях, например, для многомерных моделей систем автоматического регулирования, сформулированные теоремы позволяют получить эффективно проверяемые условия существования и орбитальной устойчивости циклов.

Широкий класс систем автоматического регулирования с m входами и m нелинейными блоками может быть описан системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\xi, \xi = \varphi(\sigma), \sigma = C^* x. \tag{24}$$

Здесь A, B, C – вещественные постоянные матрицы порядков, соответственно $n \times n$, $n \times m$ и $n \times m$, где $m \leq n$, $x \in R^n$. Предполагается, что каждый нелинейный блок системы регулирования имеет один скалярный вход и один выход, то есть $\xi_j = \varphi_j(\sigma_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ где $\varphi_j(\sigma_j)$ – непрерывные функции.

Комплекснозначная $m \times m$-матрица $W(p) = C^*(A - pI_n)^{-1} B$, где p – комплексная переменная, называется передаточной матрицей системы (1). Будем предполагать, что пара (A, B) полностью управляема, а пара (A, C) полностью наблюдаема. В этом случае говорят, что система (24) управляема и наблюдаема. Согласно теореме 1.2.4 [34], управляемость и наблюдаемость системы (1) эквивалентна невырожденности ее передаточной матрицы $W(p)$.

Типичные ограничения, накладываемые на поведение функций $\varphi_j(\sigma_j)$ при изучении систем автоматического регулирования – "секторные ограничения", то есть требования выполнения при всех $\sigma_j \neq 0$ условий $\alpha_j \leq \varphi_j(\sigma_j)/\sigma_j \leq \beta_j$, $\varphi_j(0)=0$, $j=1,2,\ldots,m$, где α_j,β_j – некоторые числа. Если все эти числа конечные, то без ограничения общности можно считать, что $\alpha_j=0$, $\beta_j>0$. Везде в дальнейшем будем предполагать выполненными условия

$$0 \leq \frac{\varphi_j(\sigma_j^2)-\varphi_j(\sigma_j^1)}{\sigma_j^2-\sigma_j^1} \leq \mu_j \text{ для всех } \sigma_j \in (-\infty,\infty), \sigma_j^1 \neq \sigma_j^2,\ \varphi_j(0)=0,\ j=1,2,\ldots,m. \tag{25}$$

Кроме того, будем предполагать все функции $\varphi_j(\sigma_j)$ дифференцируемы при $\sigma_j=0$.

Предположения (25), очевидно, означают, что для системы (24) выполнено предположение (H_1) с $S=R^n$, и эта система имеет точку покоя $x=0$. Если x_0 – какая-либо точка покоя системы (24), то для нее справедливо соотношение $C^*x_0+C^*A^{-1}B\varphi(C^*x_0)=0$, которое можно записать в виде

$$\sigma_0+W(0)\varphi(\sigma_0)=0, \text{ где } \sigma_0=col(\sigma_1^0,\ldots\sigma_m^0),\ \varphi(\sigma_0)=col(\varphi_1(\sigma_1^0),\ldots,\varphi_m(\sigma_m^0)). \tag{26}$$

Для того, чтобы $x=0$ была единственной точкой покоя системы (24) необходимо и достаточно, чтобы система (26) имела только тривиальное решение $\sigma_0=0$. Условия, гарантирующие выполнение этого требования, получены в [55] и формулируются ниже.

Положим $W(0)=(w_{ij})_{m\times m}$. Будем говорить, что матрица $W(0)$ "допускает редуцирование по варианту 1", если все элементы i-ой строки этой матрицы, кроме элемента w_{ii} равны нулю. Будем говорить, что матрица $W(0)$ "допускает редуцирование по варианту 2", если все элементы в каких-либо строках i и j этой матрицы, кроме элементов w_{ii}, w_{jj}, w_{ij} и w_{ji} равны нулю. Редуцированием матрицы по варианту 1 будем называть матрицу, в которой все элементы в строке и столбце с номером i заменены нулями. Редуцированием матрицы по варианту 2 будем называть матрицу, в которой все элементы в столбцах с номерами i и j заменены нулями.

Лемма 2. *Пусть матрица $W(0)$ допускает последовательные редуцирования по вариантам 1 или 2 до тех пор, пока она не станет нулевой $m\times m$-матрицей. Если при редуцировании по варианту 1 всякий раз выполнено условие $w_{ii}>-\mu_i^{-1}$, а при редуцировании по варианту 2 выполняются условия*

$$w_{ii}>-\mu_i^{-1},\ w_{jj}>-\mu_j^{-1}, w_{ij}w_{ji}\leq 0, \tag{27}$$

то система (26) имеет только тривиальное решение $\sigma_1^0=\sigma_2^0=\cdots=\sigma_m^0=0$ (система (24) имеет единственное состояние равновесия $x=0$).

Приведем теперь условия, гарантирующие выполнение для системы (24) предположений (H_2) и (H_3) с $j=2$.

Лемма 3. *Пусть существует такое число $\lambda>0$, что при всех $\omega\in(-\infty,\infty)$ справедливо частотное неравенство*

$$\det \mathrm{Re}[I_m+MW(i\omega-\lambda)]\neq 0,\ M=diag(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m) \tag{28}$$

и при этом для некоторой матрицы $\tilde{M}=diag(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\ldots,\tilde{\mu}_m)$, где $0\leq\tilde{\mu}_i\leq\mu_i$, ($i=1,2,\ldots,m$), матрица $A+B\tilde{M}C^*$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda\leq\mathrm{Re}\,p\leq 0$. Тогда для системы (24) выполнены предположения (H_2) и (H_3) с $j=2$.

Доказательство. Положим $y(t)=x_1(t)-x_2(t)$. Очевидно, $y(t)$ является решением системы

$$\frac{dy}{dt} = Ay + B\psi(t,\sigma), \quad \sigma = C^* y\,, \tag{29}$$

где, как это следует из (25), для функции $\psi(t,\sigma)$ и любых решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ справедливы неравенства

$$0 \le \psi_j(t,\sigma_j)\sigma_j \le \mu_j\sigma_j^2\,, \; j = 1,2,\ldots,m\,. \tag{30}$$

Введем в рассмотрение функцию $V(y) = y^* H y$, где $H = H^*$ – $n \times n$-матрица, которая будет определена ниже. Матрицу H попытаемся подобрать так, чтобы для любого решения $y(t)$ системы (29) выполнялось условие

$$\frac{d}{dt}V[y(t)] + 2\lambda V[y(t)] \le -\varepsilon\,|\,y(t)\,|^2 \tag{31}$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Для выполнения соотношения (31) достаточно, чтобы для любых $y \in R^n$ и любых $\psi \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям (30), было справедливо неравенство

$$2y^* H[(A + \lambda I_n)y + B\psi] + \sum_{j=1}^{m}\psi_j(\mu_j\sigma_j - \psi_j) \le -\varepsilon(|\,y\,|^2 + |\,\psi\,|^2)\,. \tag{32}$$

По частотной теореме 1.2.7 [34] для существования матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей неравенству (32), необходимо и достаточно, чтобы при всех $\omega \in (-\infty,\infty)$ выполнялось условие $\mathrm{Re}[I_m + MW(i\omega - \lambda)] < 0$. Последнее неравенство эквивалентно условию (28).

Полагая в (32) $\psi = \tilde{M}\sigma$, приходим к матричному неравенству

$$H[A + B\tilde{M}C^* + \lambda I_n] + [A + B\tilde{M}C^* + \lambda I_n]^* H \le -\varepsilon I_n\,.$$

Из этого неравенства и леммы 1.2.4 [34] вытекает, что матрица H неособая и имеет ровно 2 отрицательных и $n-2$ положительных собственных значения.

Считая выполненными предположения леммы 2, опираясь на лемму 3, а также теоремы 4 - 6 можно доказать справедливость следующих утверждений [55-57] .

Теорема 7. *Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что выполнены следующие условия.*

1) Матрица $A + B\varphi'(0)C^*$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \le \mathrm{Re}\, p \le 0$.

2) Матрица $A + BhC^*$, где $h = diag(h_1,h_2,\ldots,h_m)$ является гурвицевой и $|\,\varphi(\sigma) - hC^* x\,| < \gamma < \infty$.

3) При всех $\omega \in (-\infty,\infty)$ справедливо неравенство

$$\det \mathrm{Re}[I_m + \mu W(i\omega - \lambda)] \ne 0, \quad \mu = diag(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)\,. \tag{33}$$

Тогда система (24) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$.

Теорема 8. *Пусть существует число $\lambda > 0$ такое, что выполнены следующие условия.*

1) Матрица $A + B\varphi'(0)C^*$ является гурвицевой.

2) Матрица $A + BhC^*$, где $h = diag(h_1,h_2,\ldots,h_m)$, имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \le \mathrm{Re}\, p \le 0$.

3) При всех $\omega \in (-\infty,\infty)$ справедливо неравенство (33).

Тогда система (24) имеет по крайней мере один цикл.

Предположение 2) теоремы 7 гарантирует диссипативность системы (24) по Левинсону и, тем самым, существование множества D, для которого выполнены предположения (H_5). Можно расширить класс нелинейностей, для которых справедливо заключение теоремы 7, воспользовавшись более слабым условием диссипативности.

Теорема 9. *Пусть выполнены предположения 1) и 3) теоремы 7. Пусть существуют такие числа* $\nu_j \in (0, \mu_j),\ j = 1,2,\ldots,m$, *что при* $|\sigma_j| > \sigma_j^0 > 0$ *выполнены соотношения*

$$0 \le \frac{\varphi_j(\sigma_j)}{\sigma_j} \le \nu_j, \tag{34}$$

пусть, наконец, матрица $A + BMC^*, M = diag(\eta_1,\ldots,\eta_m)$, $\eta_j \in (0, \nu_j)$ *гурвицева и выполнено неравенство*

$$\det \mathrm{Re}[I_m + \nu W(i\omega)] \ne 0, \nu = diag(\nu_1,\ldots,\nu_m), \omega \in (-\infty, \infty). \tag{35}$$

Тогда система (24) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$.

Пользуясь теоремами 7 и 9, можно показать, что в рассмотренных выше примерах 1-3 исследуемые системы имеют по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, область притяжения которого содержит почти все точки сколь угодно малой окрестности единственного состояния равновесия $x = 0$. Приведем здесь пример применения теорем 7 -9 к исследованию проблемы существования циклов у систем вида (24).

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = -3.5x_1 - 0.75x_2 - 3.25x_3 + 0.5\varphi_1(\sigma_1) - 3.75\varphi_2(\sigma_2),\\
&\frac{dx_2}{dt} = -2.25x_1 + 0.125x_2 - 3.125x_3 - 0.25\varphi_1(\sigma_1) - 1.875\varphi_2(\sigma_2),\\
&\frac{dx_3}{dt} = 0.75x_1 + 0.625x_2 + 0.375x_3 - 0.25\varphi_1(\sigma_1) + 0.625\varphi_2(\sigma_2),\\
&\sigma_1 = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3,\ \sigma_2 = x_1 - 2x_2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} -3.5 & -0.75 & -3.25 \\ -2.25 & 0.125 & -3.125 \\ 0.75 & 0.625 & 0.375 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.5 & -3.75 \\ -0.25 & -1.875 \\ -0.25 & 0.625 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{-p(p+3)}{p^3+3p^2+p+1} & \dfrac{5(p+1)}{p^3+3p^2+p+1} \\ \dfrac{-(3p+p^2+1)}{p^3+3p^2+p+1} & \dfrac{5}{p^3+3p^2+p+1} \end{bmatrix}.$$

Передаточная матрица $W(p)$ невырожденная, поэтому рассматриваемая система управляема и наблюдаема. Для $\mu_1 = 2, \mu_2 = 3, \lambda = 1$ находим

$$\det \mathrm{Re}[I_2 + \mu W(i\omega - \lambda)] = 0.25\frac{4\omega^6 + 15\omega^4 - 19\omega^2 + 399}{\omega^6 + 4\omega^4 + 4\omega^2 + 4} > 0.$$

Таким образом, выполнено соотношение (33). Возьмем $\varphi_1(\sigma_1) = 2th\sigma_1$, $\varphi_2(\sigma_2) = 3arctg\sigma_2$. Поскольку матрица A гурвицева, то выполнены предположения 2) теоремы 7 ($h_1 = h_2 = 0$). Так как $\varphi_1'(\sigma_1) \le 2, \varphi_2'(\sigma_2) \le 3, w_{11} = 0, w_{22} = 5, w_{12}w_{21} = -5$, то, согласно лемме 2, рассматриваемая система имеет единственное состояние равновесия $x=0$. Наконец, как легко проверить, матрица $A+B\varphi'(0)C^*$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-1\le \operatorname{Re} p\le 0$. Итак, выполнены все условия теоремы 7, согласно которой данная система имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл.

Возьмем теперь $\varphi_1(\sigma_1)=2th\sigma_1+0.065\sigma_1\cos^2\sigma_1$, $\varphi_2(\sigma_2)=3arctg\sigma_2+\ +0.065\sigma_2\sin^2\sigma_2$. Для таких нелинейностей теорема 7 не может быть применена, поскольку для них не выполняются условия 2) этой теоремы. В то же время, для этих нелинейностей, очевидно, выполнены соотношения (34) с $\nu_1=\nu_2=0.7$ и достаточно большими σ_1^0,σ_2^0. Легко проверить, что матрица $A+BMC^*, M=diag(0.05,0.05)$ гурвицева. Для $\nu=diag(0.07,0.07)$ имеем

$$\det \operatorname{Re}[I_2+\nu W(i\omega)]=\frac{\omega^6+6.998775\omega^4-6.2537\omega^2+1.3304}{\omega^6+7\omega^4-5\omega^2+1}>0, \omega\in(-\infty,\infty),$$

то есть, выполнено неравенство (35). Поэтому в данном случае может быть применена теорема 9, согласно которой система (36) с указанными нелинейностями имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл.

На рисунках 3 и 4 приведены результаты численного интегрирования системы (36) с $\varphi_1(\sigma_1)=2th\sigma_1+0.065\sigma_1\cos^2\sigma_1$, $\varphi_2(\sigma_2)=3arctg\sigma_2+0.065\sigma_2\sin^2\sigma_2$. Даны две проекции решения на координатные плоскости.

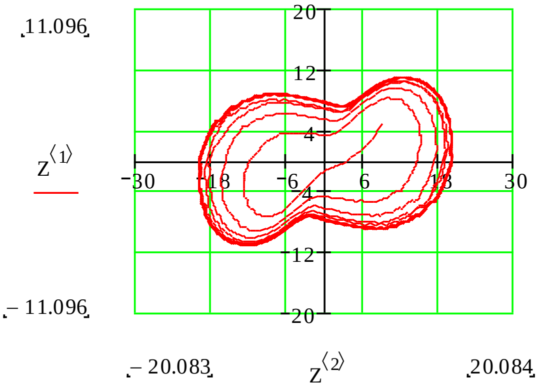

Рис.3

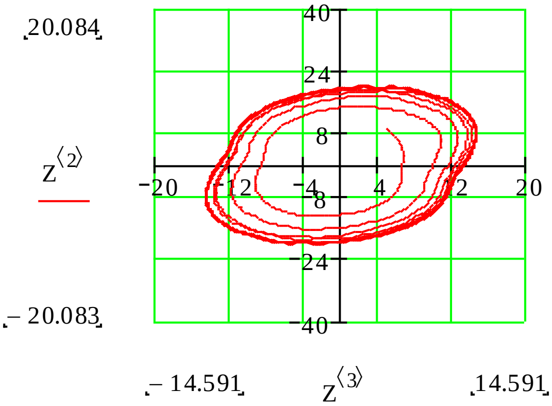

Рис. 4

Пусть теперь $\varphi_1(\sigma_1)=\dfrac{\sigma_1^3}{1+\sigma_1^2}, \varphi_2(\sigma_2)=\dfrac{1.5\sigma_2^5}{1+\sigma_2^4}$. Поскольку $\varphi_1'(0)=\varphi_2'(0)=0$, а матрица A гурвицева, то выполнено условие 1) теоремы 8. Легко проверить, что матрица $A+BhC^*$, где $h=diag(1,2)$, имеет два собственных значения с положительными вещественными частями и отрицательное собственное значение, меньшее (-4). Поэтому выполнены условия 2) теоремы 8. Так как производные рассматриваемых функций удовлетворяют условиям $0\le\varphi_1'(\sigma_1)<2$, $0\le\varphi_2'(\sigma_2)<3$, то выполнены все условия теоремы 8, согласно которой система имеет по крайней мере один цикл.

Обобщенный принцип Пуанкаре- Бендиксона в работах [19-26] был развит для систем, имеющих не более конечного числа состояний равновесия и обладающих свойством диссипативности по Левинсону. Циклы таких систем – замкнутые траектории в их фазовом пространстве. В то же время имеется обширный класс систем, имеющих бесконечное число состояний равновесия – так называемые системы с угловой координатой. Такими системами, в частности, являются математические модели систем фазовой и частотной автоподстройки частоты в теории связи и радиотехнике, а также систем, встречающихся в теории синхронных электрических машин [58]. Системы с угловой координатой могут иметь циклы, траектории которых не ограничены, не замкнуты в фазовом пространстве, но замкнуты на фазовом цилиндре. Это так называемые *циклы второго рода*. Оказалось, что аналог теории Пуанкаре - Бендиксона может быть построен и для таких систем [59,60] Приведем здесь некоторые результаты, полученные в упомянутых работах.

Систему (2) будем называть системой с угловой координатой, если существует такой вектор $d \neq 0$, что для произвольного $x \in R^n$ справедливо равенство $f(x+d) = f(x)$.

Определение 1. Точка q называется ω_d- предельной точкой положительной полутраектории $\Gamma = \{x : x = x(t, x_0), t \geq t_0\}$ решения $x(t, x_0)$, если существуют такие последовательности $t_n \to +\infty$ и $k_n \to +\infty$ (или $-k_n \to +\infty$), $k_n \in N$, что $|q + k_n d - x(t_n, x_0)| \to 0$.

Из определения ω_d- предельной точки вытекает, что вместе с точкой q ω_d- предельной будет и точка $q + md$ для любого целого m.

Определение 2. Будем говорить, что полутраектория Γ обладает свойством (A) (является ограниченной по неугловой координате), если на $[t_0, \infty)$ выполнено

$$|x(t, x_0) - d^* x(t, x_0)|d|^{-2} d| < const.$$

Определение 3. Будем говорить, что полутраектория Γ обладает свойством (B) (является неограниченной по угловой координате), если

$$\lim_{t \to +\infty} |d^T x(t, x_0)| = \infty$$

Определение 4. Решение $x(t, x_0)$ – цикл второго рода, если существуют такие числа $T > 0$ и целое $j \neq 0$, что $x(t+T, x_0) - x(t, x_0) = jd$.

Теорема 10. *(Обобщенная теорема Пуанкаре-Бендиксона для систем с цилиндрическим фазовым пространством). Пусть выполнены предположения* (H_2) *и* (H_3) *с* $j = 2$, *и система (2) с угловой координатой имеет решение* $x(t, x_0)$, *обладающее свойствами (A) и (B). Тогда если* ω_d*-предельное множество полутраектории* Γ *этого решения не содержит стационарных точек, то оно состоит из единственного цикла второго рода этой системы.*

Теорема 11. *Пусть для системы (2) выполнены предположения* (H_2) *и* (H_3) *с* $j = 2$, *а также существует открытое множество* $D \subset R^n$ *такое, что*

а) для некоторого $C > 0$ *и произвольного* $x \in D$ *справедливо соотношение*

$$|x - d^* x|d|^{-2} d| < C;$$

в) для некоторого $\delta > 0$ *и произвольного* $x \in D$ *справедливо соотношение*

$$d^T f(x) \geq \delta;$$

с) граница ∂D *множества* D *пересекается вовнутрь всеми траекториями системы (2), которые ее встречают.*

Тогда любая траектория в D *сходится к циклу второго рода при* $t \to +\infty$ *и* D *содержит по крайней мере один цикл второго рода, который орбитально устойчив. Если, кроме того, известно что в* D *содержится только конечное число циклов второго рода, то по крайней мере один из них асимптотически орбитально устойчив.*

Пример 5. Математической моделью многих важных для приложений систем фазовой синхронизации может служить следующая многомерная система с угловой координатой

$$\begin{aligned} &\dot{z} = Az + b\varphi(\sigma), \\ &\dot{\sigma} = c^T z + \rho\varphi(\sigma). \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь A – постоянная неособая $(n-1)\times(n-1)$-матрица, b и c– $(n-1)$-векторы, ρ-число. Функцию $\varphi(\sigma)$ предполагаем непрерывно дифференцируемой и 2π-периодической. Будем также предполагать существование такого числа $\mu > 0$, что

$$|\varphi'(\sigma)| < \mu\,. \tag{38}$$

Условия (A) и (B) для решения $(z(t),\sigma(t))$ рассматриваемой системы сводятся, соответственно, к требованию ограниченности $|z(t)|$ на $[t_0,\infty)$ и выполнению соотношения $\lim\limits_{t\to+\infty} |\sigma(t)| = \infty$.

Введем обозначения $w(p) = c^T (A - pI)^{-1} b, \chi(p) = p^{-1}[w(p) - \rho]$, Следующие два утверждения дают условия выполнения для системы (37) предположений теоремы 11.

Лемма 4. Пусть существует такое число $\lambda_2 > 0$, что матрица $A + \lambda_2 I$ имеет одно положительное собственное значение и $(n-2)$ собственных значений с отрицательными вещественными частями, а также выполнено условие

$$1 - \mu^2 |\chi(i\omega - \lambda_2)|^2 > 0 \text{ при } \omega \geq 0. \tag{39}$$

Тогда выполнены предположения (H_2), (H_3) с $j = 2$ для $\lambda = \lambda_2$ и $f(X) = \tilde{A}X + B\varphi(C^* X)$, где

$$X = \begin{pmatrix} z \\ \sigma \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^* & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ \rho \end{pmatrix}, C^* = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Лемма 5. [33, теоремы 2.4, 2.5] *Пусть все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и существует такое число $\lambda_1 > 0$, что выполнены условия*

1) $\tau = -c^T b = \lim\limits_{p\to+\infty} pw(p) > 0, \rho \leq 0;$

2) $\operatorname{Re} w(i\omega - \lambda_1) < 0 (\omega \geq 0), \lim\limits_{\omega\to+\infty} \omega^2 \operatorname{Re} w(i\omega - \lambda_1) < 0;$

3) матрица $A + \lambda_1 I$ имеет одно положительное собственное значение и $(n-2)$ собственных значений с отрицательными вещественными частями;

4) система второго порядка

$$\begin{aligned} &\dot{\theta} = y + \frac{\rho}{\sqrt{\tau}}\varphi(\theta), \\ &\dot{y} = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{\tau}} y - \varphi(\theta) \end{aligned}$$

имеет круговое решение, то есть такое решение $(y_0(t),\theta_0(t))$, для которого выполнено условие $\dot{\theta}_0(t) \geq \delta > 0$ при $t \geq t_0$.

Тогда для системы (37) выполнено предположения a) – c) теоремы 11

Рассмотрим систему (37) третьего порядка с $\rho = 0$, $w(p) = (\tau\, p + 1)(p^2 + \alpha p + \beta)^{-1}, \varphi(\sigma) = \sin(\sigma + \sigma_0) - \sin\sigma_0, \sigma \in (0, \pi/2)$. Такая система описывает динамику некоторых поисковых систем фазовой синхронизации [58]. В книге [61, стр.261-265] проведено подробное исследование этой системы. В частности, для $\sigma_0 = \pi/6, \tau = 0.5$ указаны соотношения между параметрами α и β, обеспечивающие выполнение условий леммы 5. Так как в рассматриваемом случае $\mu = 1$, то условия леммы 4 выполнены, если $\alpha^2 > 4\beta$ и существует такое $\lambda_2 \in \left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}, \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} \right)$, что $1 - |\chi(i\omega - \lambda_2)|^2 > 0$ при $\omega \geq 0$. Последнее соотношение принимает вид

$$(\omega^2 + \lambda_2^2)[(\lambda_2^2 - \omega^2 - \alpha\lambda_2 + \beta)^2 + \omega^2(\alpha - 2\lambda_2)^2] - (1 - 0.5\lambda_2)^2 - 0.25\omega^2 > 0. \tag{41}$$

Для $\alpha = 2.2, \beta = 0.5$, как это следует из результатов, полученных в [61], выполнены все условия леммы 5. Если взять $\lambda_2 = 1.9$, то выполнено и неравенство (41) , и тем самым выполнены условия леммы 4. Из приведенных рассуждений и теоремы 11 вытекает, что при указанных значениях параметров α, β, τ рассматриваемая система с $\varphi(\sigma) = \sin(\sigma + \sigma_0) - \sin\sigma_0$, $\sigma_0 = \pi/6$ имеет орбитально устойчивый цикл второго рода.

В заключение данного раздела отметим, что обобщенный принцип Пуанкаре-Бендиксона, несмотря на довольно обширную сферу его применения, оказывается далеко не универсальным. Известны и другие методы доказательства существования циклов автономных систем, например, метод апостериорных оценок погрешности [62], топологические методы [63]. Имеется также класс систем вида (24) и (37), для которых вопрос существования циклов не может быть решен с использованием этого принципа, но в то же время успешно решается с использованием классического принципа тора. Такие системы рассмотрены в разделах 3.7 и 6.4 книги [33] , а также в работах [64,65].

3.Структура притягивающих множеств многомерных систем

Проблема, исследованию которой посвящен данный раздел, может быть кратко сформулирована следующим образом: *насколько предсказуемым является поведение траекторий диссипативной динамической системы с простой структурой?* Мы уже видели выше, что почти все ограниченные полутраектории монотонных систем стремятся к состояниям равновесия. Если справедливы предположения обобщенного принципа Пуанкаре-Бендиксона и система (2) имеет единственное состояние равновесия, то любая ограниченная полутраектория системы стремится либо к этому состоянию равновесия, либо к замкнутой траектории. Однако в последнем случае нет ответа на вопрос о количестве асимптотически орбитально устойчивых циклов системы. Если система обладает несколькими орбитально устойчивыми циклами, каждый из которых имеет свою область притяжения, то предельное поведение такой системы оказывается непредсказуемым. Иными словами, эта ситуация является, в определенном смысле, промежуточной между порядком и хаосом. Выбор начальных условий в областях притяжения различных циклов выводит систему на различные устойчивые периодические режимы. В этом случае говорят, что в системе наблюдается «эффект буферности» [66,67].

Разработка техники обнаружения эффекта буферности для многомерных динамических систем стимулировалась появлением обобщенного принципа Пуанкаре-Бендиксона. В работе [67] был предложен общий подход к оценке структуры глобального аттрактора (числа циклов и областей притяжения орбитально устойчивых циклов) многомерных динамических систем с единственным состоянием равновесия. В работах [68,69] на основе этого подхода были развиты методы оценки числа циклов многомерных моделей систем автоматического регулирования с одним нелинейным блоком, позволяющие, благодаря использованию специфики рассматриваемых систем, существенно упростить процедуру проверки условий общих теорем из [67]. Наконец, в работе [55] некоторые результаты этих работ были распространены на случай моделей многосвязных систем автоматического регулирования (24).

Приведем здесь формулировку и схему доказательства основного утверждения работы [55].

Теорема 12. *Пусть для системы (24) выполнены условия леммы 2, а также справедливы следующие предположения:*

(Hyp.1). Существует такое число $\lambda > 0$, что при всех $\omega \in (-\infty, \infty)$ справедливо неравенство

$$\det \operatorname{Re}[I_m + MW(i\omega - \lambda)] \neq 0, \quad M = diag(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \tag{45}$$

и при этом для некоторой матрицы $\tilde{M} = diag(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \ldots, \tilde{\mu}_m)$, где $0 \le \tilde{\mu}_i \le \mu_i$, ($i = 1, 2, \ldots, m$), матрица $A + B\tilde{M}C^*$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \le \operatorname{Re} p \le 0$.

(Hyp.2). Для некоторой матрицы $\hat{M} = diag(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_m)$, где $\hat{\mu}_i \in [0, \tilde{\mu}_i)$, матрица $A + B\hat{M}C^*$ гурвицева.

. Тогда нелинейности $\varphi_j(\sigma_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ в системе (24) всегда могут быть выбраны так, что они удовлетворяют соотношениям (25), система имеет единственное состояние равновесия $x = 0$, является диссипативной по Левинсону и имеет любое наперед заданное число орбитально устойчивых циклов.

Схема доказательства. Согласно доказанной выше лемме 3, при выполнении предположений *(Hyp.1)* для системы (24) с нелинейностями, удовлетворяющими соотношениям (25), выполнены предположения (H_2) и (H_3) с $j = 2$.

Полагая в неравенстве (23) $x_2(t) = 0$, убеждаемся, что множество $\Omega = \{x : x^* Hx \le 0\}$ положительно инвариантно для траекторий системы (24), а его граница $\partial\Omega = \{x : x^* Hx = 0\}$ бесконтактна для траекторий этой системы.

Запишем систему (24) в виде $\dot{x} = (A + B\tilde{M}C^*)x + B(\varphi(\sigma) - \tilde{M}\sigma)$. После этого линейным неособым преобразованием $x = Qy$ приведем ее к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -D_1 y_1 + g_1(y), \\ \dot{y}_2 &= D_2 y_2 + g_2(y). \end{aligned} \quad \varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma) - \tilde{M}\sigma, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Fy = col(0, y_2).$$

Здесь D_1 и D_2 – антигурвицевы матрицы размерностей $(n-2)\times(n-2)$ и 2×2 соответственно, причем матрица $D_2 + D_2^*$ положительно определена, $g_2(y) = FQ^{-1}B\varphi_1(\sigma)$, $\sigma = c^* By$.

Положим $N = Q^* HQ$. Можно показать [Моя статья ДУ 2014], что $y^* Ny < 0$ при $y_1 = 0, y_2 \ne 0$. Пусть θ – наименьшее собственное значение положительно определенной матрицы $D_2 + D_2^*$, $C^* = col(c_1^*, c_2^*, \ldots, c_m^*)$, $\alpha > 0$ – некоторое число. Положим

$$v_i = \max_{T_1} |c_i^* Qy|, \text{ где } T_1 = \{y : y^* Ny \le 0, |y_2| \le 2\theta^{-1} \| FQ^{-1}B \| \alpha\}.$$

Лемма 6. *Пусть $|\varphi_i(\sigma_i) - \tilde{\mu}_i\sigma_i| < \alpha_i$ при $\sigma_i \in [-v_i, v_i]$. Тогда поверхность $\partial T_1 = \{x : x^* Hx \le 0, |FQ^{-1}x| = 2\theta^{-1} \| FQ^{-1}B \| \alpha\}$, где $\alpha = \max \alpha_i$, бесконтактна для траекторий системы (1) и пересекается наружу (то есть по направлению "от точки покоя $x = 0$") всеми траекториями этой системы, которые ее встречают.*

Запишем теперь систему (24) в виде $\dot{x} = (A + B\hat{M}C^*)x + B(\varphi(\sigma) - \hat{M}\sigma)$. Положим $\beta_i = \max\limits_{\sigma_i \in [-\nu_i, \nu_i]} |\varphi_i(\sigma_i) - \hat{\mu}_i \sigma_i|$, $\beta = \max \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В силу предположения *(Hyp.2)* существует матрица, $P = P^* > 0$ являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$P(A + B\hat{M}C^*) + (A + B\hat{M}C^*)^* P = -I .$$

Положим $\delta = 4q \| PB \|^2 \beta^2$, где q - наибольшее собственное значение матрицы P. Определим числа $\tau_i = \max\limits_{\bar{T}_2} | c_i^* x |$, где $T_2 = \{ x : x^* H x < 0, x^* P x < \delta \}$.

Лемма 7. *Если при* $\sigma_i \in [-\tau_i, \tau_i]$ *справедливы соотношения*

$$| \varphi_i(\sigma_i) - \hat{\mu}_i \sigma_i | \le \beta_i ,$$

то поверхность $\partial T_2 = \{ x : x^* H x \le 0, x^* P x = \delta \}$ *бесконтактна для траекторий системы (24) и пересекается вовнутрь всеми траекториями этой системы, которые ее встречают.*

Рассмотрим область $D \subset R^n$, ограниченную поверхностями ∂T_1, ∂T_2, $\partial \Omega$. Эта область ограничена, положительно инвариантна для траекторий системы (24), ее граница бесконтактна для траекторий этой системы. Поскольку в области D нет состояний равновесия системы (24) и к тому же для любых двух решений системы (24) выполнено условие (23), то из теоремы 6 следует, что в области D содержится по крайней мере один орбитально устойчивый цикл системы (24).

Найдем теперь $\alpha_i^1 = \max\limits_{\sigma_i \in [-\tau_i, \tau_i]} | \varphi_i(\sigma_i) - \tilde{\mu}_i \sigma_i |$, положим $\alpha^1 = \max \alpha_i^1$ и потребуем, чтобы неравенства $| \varphi_i(\sigma_i) - \tilde{\mu}_i \sigma_i | \le \alpha_i^1$ выполнялись на промежутке $\sigma_i \in [-\nu_i^1, \nu_i^1]$, где $\nu_i^1 = \max\limits_{T_1^1} | c_i^* Q y |$, $T_1^1 = \{ y : y^* N y \le 0, | y_2 | \le 2\theta^{-1} \| FQ^{-1} B \| \alpha^1 \}$. Тогда, согласно лемме 6, поверхность $\partial T_1^1 = \{ x : x^* H x \le 0, | FQ^{-1} x | = 2\theta^{-1} \| FQ^{-1} B \| \alpha^1 \}$ будет бесконтактной для траекторий системы (24) и пересекаться наружу всеми траекториями, которые ее встречают. Рассмотрим область G, ограниченную поверхностями ∂T_1^1, ∂T_2, $\partial \Omega$. Это ограниченная область, которая, как нетрудно убедиться, содержит по крайней мере одно ограниченное на $[0, \infty)$ решение $x(t)$ системы (24). По тереме 6 в ω-предельном множестве положительной полутраектории этого решения содержится по крайней мере один цикл, который, очевидно, отличен от орбитально устойчивого цикла, содержащегося в множестве D.

Опираясь на лемму 7, продолжим нелинейности $\varphi_i(\sigma_i)$ вне отрезка $[-\nu_i^1, \nu_i^1]$ так, чтобы внутри множества Ω "появилась" еще одна поверхность ∂T_2^1, пересекающаяся вовнутрь всеми траекториями системы (24), которые ее встречают. Это даст возможность утверждать наличие области $\tilde{D} \subset R^n$, обладающей такими же свойствами, что и рассмотренная выше область D и не пересекающейся с областями D и G. В области $\tilde{D}$ содержится по крайней мере один орбитально устойчивый цикл.

Продолжая рассуждать подобным образом, мы "сконструируем" нелинейность $\varphi(\sigma)$ так, чтобы система была диссипативной по Левинсону и имела любое наперед заданное число циклов, среди которых будет заданное число орбитально устойчивых циклов.

Отметим, что утверждение, аналогичное теореме 12, может быть легко сформулировано для произвольной динамической системы (2), что и было сделано в работе [67]. Однако непосредственное применение такой теоремы для синтезирования динамической системы, обладающей заданным числом орбитально устойчивых циклов, немедленно наталкивается на необходимость явного нахождения матрицы H, для которой выполнены предположения (H_2)

и (H_3). В случае, когда речь идет о системе вида (24), такая матрица может быть найдена как решение матричного неравенства (32) с использованием, например, алгоритма, описанного в книге [70, с. 75 -77]. Пример построения системы вида (24), имеющей три цикла, два из которых орбитально устойчивы, приведен в работе [55].

Для многомерных моделей систем регулирования с одним нелинейным блоком, то есть для систем вида (1), в работе [68] предложен "метод шаблонов", позволяющий получать оценки числа циклов таких систем и находить области притяжения асимптотически орбитально устойчивых циклов в фазовом пространстве. Некоторые методы, использованные в этой работе, были распространены на многосвязные системы (24) и привели в итоге к результату, сформулированному в теореме 12. В то же время другие результаты работы [68] существенно опираются на специфику системы (1). Поэтому "метод шаблонов" ниже излагается независимо, без ссылок на теорему 12.

В книге [71] академик А.А.Воронов выдвинул гипотезу, получившую среди математиков и специалистов по теории управления название "гипотеза Воронова". Суть этой гипотезы в следующем.

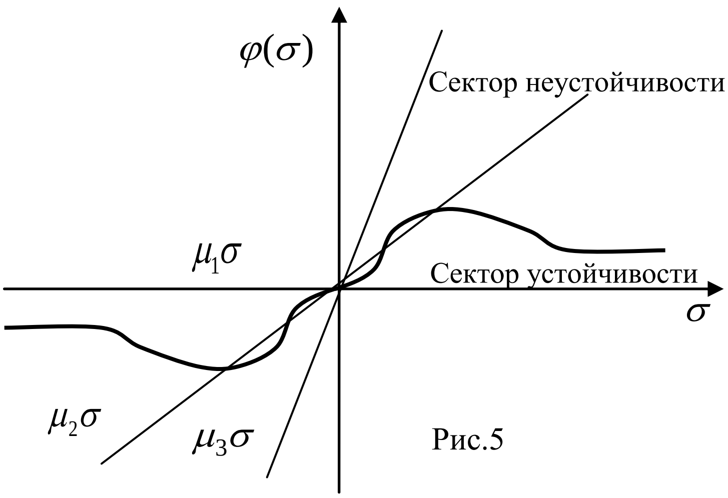

Рис.5

Пусть $\varphi(\sigma)=\mu\sigma$, тогда система (1) перепишется в виде $\dot{x}=(Ax+\mu bc^*)x$. Если, к примеру, при $\mu\in(\mu_1,\mu_2)$ матрица $A+\mu bc^*$ гурвицева, то говорят, что (μ_1,μ_2) – сектор устойчивости. Если при $\mu\in(\mu_2,\mu_3)$ матрица $A+\mu bc^*$ имеет k собственных значений с положительными вещественными частями, то (μ_2,μ_3) – сектор неустойчивости степени *k*. А.А.Воронов предположил, что в системе (1) возникнет "автоколебание с жестким возбуждением", если нелинейность $\varphi(\sigma)$ ведет себя так, как показано на рис. 5. Последнее означает, что решения системы с достаточно малыми начальными условиями будут асимптотически приближаться к единственному состоянию равновесия $x=0$, а "почти все" остальные решения будут являться автоколебаниями. В случае неавтономной системы гипотеза Воронова была опровергнута Г.А.Леоновым [72]. В случае же автономной системы ни подтверждения, ни опровержения предположения Воронова не известно. В то же время, как интуитивные соображения, так и численные эксперименты [69]., подсказывают, что и в этом случае гипотеза Воронова, скорее всего, неверна. Естественным образом возникает проблема отыскания условий, при выполнении которых гипотеза Воронова является справедливой. Более того, задачу можно обобщить и сформулировать так. Пусть график нелинейной функции $\varphi(\sigma)$ в системе (1) l раз попеременно оказывается в секторе устойчивости и неустойчивости. "Как долго" должен он пребывать в каждом из секторов, чтобы возникли колебания с жестким возбуждением, частным случаем которых являются циклы? Оценку "продолжительности" пребывания графика нелинейности $\varphi(\sigma)$ в каждом из секторов, гарантирующую существование у системы (1) нескольких циклов, и дает "метод шаблонов", который позволяет, выполнив анализ свойств линейной части системы, графически получить оценку числа ее циклов.

Основная гипотеза. Существуют числа $\mu_1 \le 0, \mu_2 > 0, \lambda > 0$ такие, что

$$\mu_1 \le \frac{\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \le \mu_2 \text{ для всех } \sigma \in (-\infty, \infty),\ \sigma_1 \ne \sigma_2,$$

для всех вещественных $\omega \ge 0$ выполнено условие

$$\mathrm{Re}[1 + \mu_1 \chi(i\omega - \lambda)]^* [1 + \mu_2 \chi(i\omega - \lambda)] > 0$$

и при этом для некоторого $\tilde{\mu} \in (\mu_1, \mu_2]$ матрица $A + \tilde{\mu} bc^*$ имеет ровно 2 собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \le \mathrm{Re}\, p \le 0$. Здесь $\chi(p) = c^*(A - pI_n)^{-1} b$.

При выполнении предположений основной гипотезы существуют матрица $H = H^*$, имеющая ровно два отрицательных и $(n-2)$ положительных собственных значения, и число $\varepsilon > 0$ такие, что при всех $z \in R^n$ и $\psi \in R^1$ справедливо неравенство

$$2z^* H[(A + \lambda I)z + b\psi] + (\mu_2 c^* z - \psi)(\psi - \mu_1 c^* z) \le -\varepsilon(|y|^2 + \psi^2). \quad (46)$$

При выполнении сделанных предположений существует неособое преобразование $x = By$, приводящее систему (1) к виду

$$\begin{aligned} y_1 &= -D_1 y_1 + b_1 \varphi_1(\sigma), \\ \dot{y}_2 &= D_2 y_2 + b_2 \varphi_1(\sigma). \end{aligned} \quad \varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma) - \tilde{\mu}\sigma,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Fy = col(0, y_2),$$

где D_1 и D_2 – антигурвицевы матрицы размерностей $(n-2)\times(n-2)$ и 2×2 соответственно, причем матрица $D_2 + D_2^*$ положительно определена, $B^{-1}b = col(b_1, b_2), \sigma = c^* By$. Обозначим $N = B^* HB$. Можно показать, что $y^* Ny < 0$ при $y_1 = 0, y_2 \ne 0$. Пусть k - наименьшее собственное значение матрицы $D_2 + D_2^*$. Считая матрицу H, являющуюся решением неравенства (48), известной, определим

$$T_0 = \{ y : y^* Ny \le 0, |y_2| \le 2k^{-1} |FB^{-1} b| \},\ \nu_0 = \max_{T_0} |c^* By|.$$

Вспомогательная гипотеза 1. Существует $\mu_0 \in [\mu_1, \mu_2)$, для которого матрица $A + \mu_0 bc^*$ гурвицева.

Найдем матрицу $Q = Q^* > 0$ из уравнения Ляпунова

$$Q(A + \mu_0 bc) + (A + \mu_0 bc)^* Q = -I_n$$

и положим $\delta = 4q|Qb|^2$, где q - наибольшее собственное значение матрицы Q. Найдем $\nu_1 = \max_{T_1} c^* x$, где $T_1 = \{ x : x^* Hx \le 0, x^* Qx \le \delta \}$.

Используя найденные числа ν_0 и ν_1, построим на плоскости (σ, φ) множество, называемое "шаблон 1" (рис. 6).

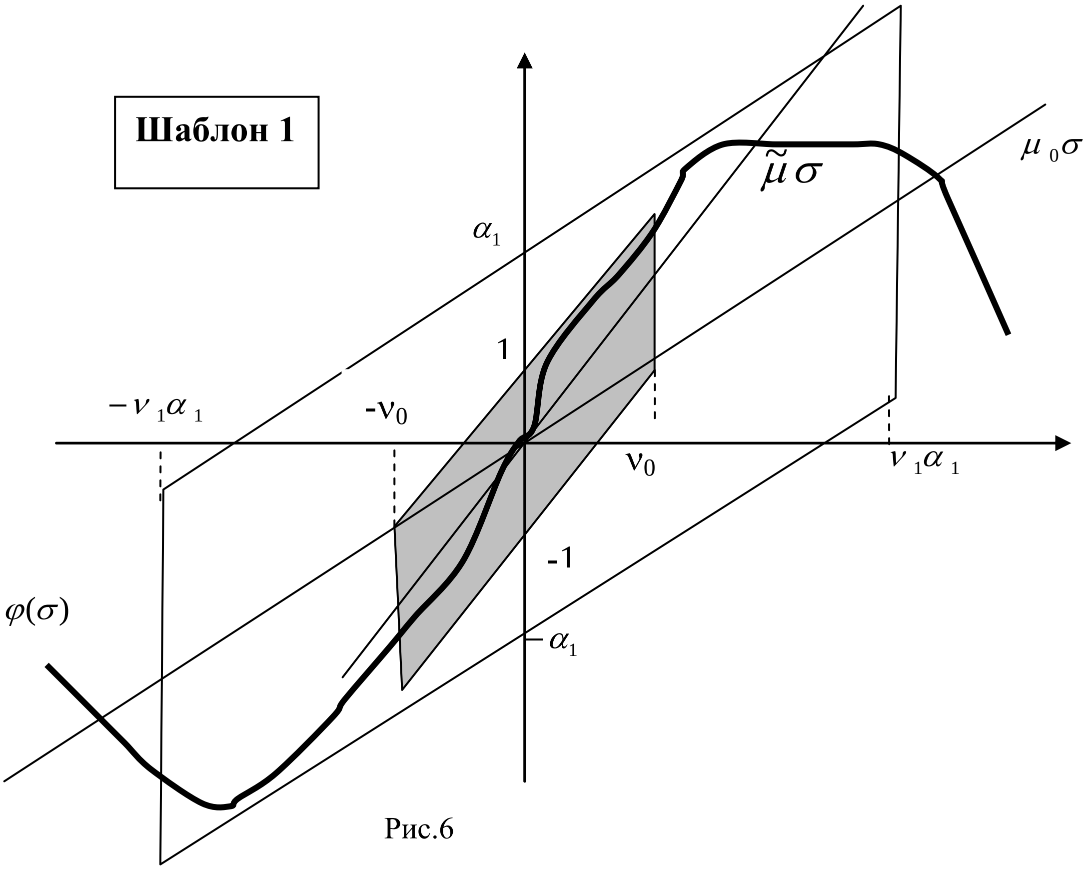

Рис.6

Будем говорить, что "график функции $\varphi(\sigma)$ может быть помещен в шаблон типа 1", если существует такое число $\alpha_1 > 0$, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &\tilde{\mu}\sigma - 1 \le \varphi(\sigma) \le \tilde{\mu}\sigma + 1, \sigma \in [-\nu_0, \nu_0], \\ &\mu_0\sigma - \alpha_1 < \varphi(\sigma) < \mu_0\sigma + \alpha_1, \sigma \in [-\nu_1\alpha_1, \nu_1\alpha_1]. \end{aligned} \tag{47}$$

Предположим теперь существование $\bar{\mu} \in (\mu_1, \mu_2)$, для которого матрица $A + \bar{\mu}bc^*$ имеет одно нулевое собственное значение и $n-1$ собственных значений с отрицательными вещественными частями. Без ограничения общности можем считать, что $\mu_1 < 0, \bar{\mu} = 0$.

Вспомогательная гипотеза 2. Пусть $\tau = -c^T b \ge 0$ с, и существуют числа $\lambda_1 > 0, \mu_3 > 0$ такие, что матрица $A + \lambda_1 I$ имеет ровно одно положительное собственное значение и при всех $\omega \ge 0$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}\chi(i\omega - \lambda_1) + \mu_3 |\chi(i\omega - \lambda_1)|^2 \le 0.$$

Положим $\nu_2 = \mu_3^{-1}$. Будем говорить, что график функции $\varphi(\sigma)$ может быть помещен в шаблон типа 2, если он такой, как изображено на рис.7, т. е. если для функции $\varphi(\sigma)$ выполнены условия

$$\begin{aligned} &\tilde{\mu}\sigma - 1 \le \varphi(\sigma) \le \tilde{\mu}\sigma + 1, \sigma \in [-\nu_0, \nu_0], \\ &\mu_3\sigma - \alpha_2 < \varphi(\sigma) < \mu_3\sigma + \alpha_2, \sigma \in [-\nu_2\alpha_2, \nu_2\alpha_2]. \end{aligned}$$

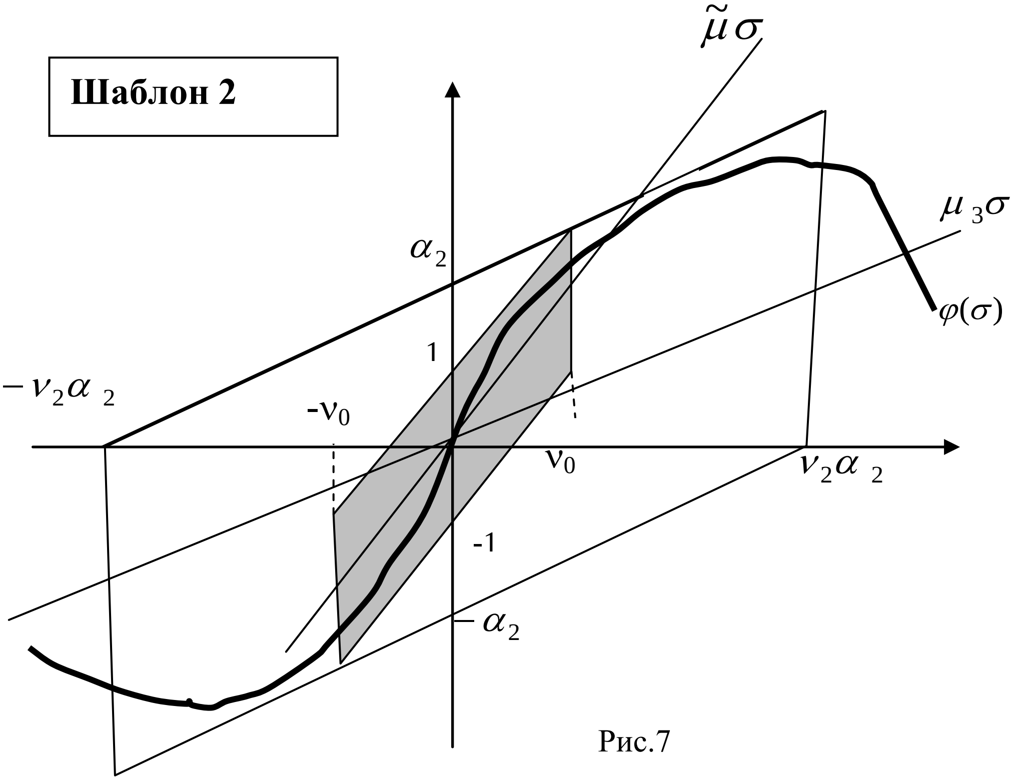

Рис.7

Для построения еще одного шаблона используются некоторые результаты работы [73], которые мы приведем в удобной для нас форме. По–прежнему будем считать, что $n\times n$-матрица A в (1) имеет одно нулевое собственное значение и $n-1$ собственных значений с отрицательными вещественными частями и $\tau=-c^{*}b\geq 0$. Введем обозначения

$$K(p)=p\chi(p),\ n(p)=p^{-1}\det(pI_n-A),\ \varepsilon(\lambda)=\inf_{\omega\geq 0}\frac{-2\lambda\operatorname{Re}\chi(i\omega-\lambda)}{|K(i\omega-\lambda)-\tau|^2}.$$

Пусть a – число из отрезка $[-2\sqrt{\lambda\varepsilon(\lambda)};2\sqrt{\lambda\varepsilon(\lambda)}],\nu_3$ – параметр. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dF}{ds}=\frac{-[a-2a\tau\lambda^{-1}\varphi'(s)]F-\varphi'(s)(s-\nu_3)-\varphi(s)}{F-2a\tau\lambda^{-1}\varphi(s)} \qquad (48)$$

Пусть $F(s,\lambda,\nu)$ – решение уравнения (48) с начальным условием $F\big|_{s=\nu}=0$.

Вспомогательная гипотеза 3. Предположим, что для некоторого положительного числа λ_2 выполнены следующие условия:

1) если $\tau=0$, то $\operatorname{Re}\chi(i\omega-\lambda_2)<0$ для всех $\omega\geq 0$, если $\tau>0$, то $\operatorname{Re}\chi(i\omega-\lambda_2)<0$ для всех $\omega\geq 0$ и $\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega^2\operatorname{Re}\chi(i\omega-\lambda_2)<0$;

2) все нули полинома $n(p-\lambda_2)$ имеют отрицательные вещественные части;

3) существует такое число $\nu_3 > 0$, что решения $F(s,\lambda_2,\nu_3)$ и $F(s,\lambda_2,-\nu_3)$ определены на отрезке $[-\nu_3,\nu_3]$, причем $F(s,\lambda_2,\nu_3) > 0$ при $s \in [-\nu_3,\nu_3)$, а $F(s,\lambda_2,-\nu_3) < 0$ при $s \in (-\nu_3,\nu_3]$.

Будем говорить, что график функции $\varphi(\sigma)$ может быть помещен в шаблон типа 3, если выполнено первое из соотношений (47) и для некоторого $\nu_3 > \nu_0$ выполнены все предположения гипотезы 3.

Иными словами, на отрезке $[-\nu_3,\nu_3]$ график $\varphi(\sigma)$ такой, как изображено на рис. 8, и при этом для указанного ν_3 решения $F(\sigma,\lambda_2,\nu_3)$ и $F(\sigma,\lambda_2,-\nu_3)$ имеют вид, который изображен на этом рисунке пунктиром.

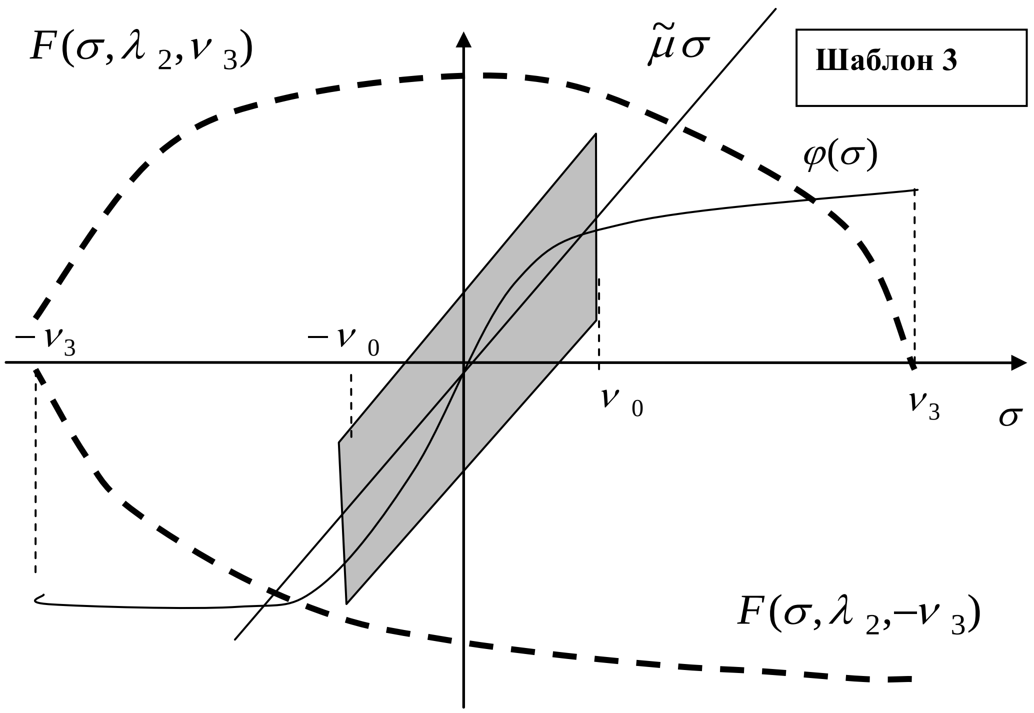

Рис.8

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение работы [68].

Теорема 13. Пусть существует последовательность $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_l$ такая, что график каждой из функций

$$\psi_{k_i}(\sigma) = \frac{1}{k_i}\varphi(k_i\sigma), i = 1,2,\ldots,l$$

может быть помещен в один из существующих шаблонов, и если при этом график функции $\psi_{k_j}(\sigma)$ помещен в шаблон с номером m $(m = 1,2,3)$, то выполняется соотношение

$$\frac{k_{j+1}}{k_j} > \frac{\nu_m \alpha_m}{\nu_0}, \ (\alpha_3 = 1).$$

Тогда система (1) имеет не менее $2l-1$ циклов, не менее чем l из которых орбитально устойчивы. Если к тому же функция $\varphi(\sigma)$ аналитическая, то не менее l циклов орбитально асимптотически устойчивы.

Пример 6. Рассмотрим систему (1) третьего порядка с

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1.92 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

и нечетной кусочно-линейной функцией $\varphi(\sigma)$, заданной при $\sigma \geq 0$ соотношениями

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases} 8\sigma, & 0 \leq \sigma < 0{,}25 \\ 2, & 0{,}25 \leq \sigma < 0{,}7 \\ 8.34\sigma - 3.84 & 0{,}7 \leq \sigma < 17 \\ 137, & 17 \leq \sigma < 373 \\ 8.22\sigma - 2944.5 & 373 \leq \sigma < 13381 \\ 3\sigma + 66907 & 13381 \leq \sigma \end{cases}$$

В работе [68] с использованием теоремы 13 показано, что эта система имеет не менее 5 циклов, не менее чем три из которых орбитально устойчивы.

Пример 7. В предыдущем примере была построена система с кусочно-линейной функцией $\varphi(\sigma)$, обладающая нескольким орбитально устойчивыми циклами. Другой пример системы с гладкой нелинейностью, для которой использование теоремы 6 позволяет утверждать наличие нескольких орбитально асимптотически устойчивых циклов, был предложен в работе [74]. Рассмотрена система вида (1) третьего порядка с

$$A=\begin{pmatrix} -2.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 0.1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c=\frac{1}{111{,}36}\begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\sigma)=2.6\sigma[e^{-(5\sigma)^2}+e^{-(0.01\sigma)^2}+e^{-(5500^{-1}\sigma)^2}-e^{-(1000\sigma)^2}-1]$$

Доказано, что такая система имеет не менее 4 циклов, не менее чем 2 из которых орбитально асимптотически устойчивы.

4. Задача Смейла

В работе [75] С.Смейл предложил пример системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть интерпретирована как модель, описывающая функционирование двух одинаковых биологических клеток, взаимодействующих путем диффузии через мембрану. Система уравнений, описывающая химическую кинетику ферментов, содержащихся в каждой клетке, имеет четвертый порядок, то есть клетки содержат четыре реагирующих между собой фермента. Динамика системы каждой клетки в отдельности, обладает тем свойством, что каждое ее решение стремится к единственной стационарной точке, когда время стремится к бесконечности. Иными словами каждая клетка сама по себе "мертва" (концентрация ее ферментов достигает равновесного состояния), однако, если клетки начинают взаимодействовать между собой путем диффузии через мембрану, то клеточная система начинает пульсировать ("оживает"). Математически это означает, что почти любое решение новой динамической системы стремится к некоторому периодическому решению.

Математически указанная ситуация описывается следующим образом. Пространство состояний каждой клетки, это пространство $R_+^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^n : x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n\}$, где n - число ферментов. Имеется гладкое отображение $f : R_+^n \to R^n$ и $n \times n$-матрица D такие, что система дифференциальных уравнений порядка n, описывающая изолированную клетку $\dot{x} = f(x)$ имеет единственное асимптотически устойчивое в целом состояние равновесия, тогда как система дифференциальных уравнений порядка $2n$, описывающая взаимодействие двух примыкающих клеток

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= f(x^{(1)}) + D(x^{(2)} - x^{(1)}) \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= f(x^{(2)}) + D(x^{(1)} - x^{(2)}) \end{aligned} \tag{49}$$

является глобальным осциллятором, то есть имеет нетривиальное устойчивое периодическое решение, к которому стремятся почти все остальные решения системы.

В [75] сам С.Смейл построил пример системы с нужными свойствами для случая $n = 4$, подчеркнув при этом, что "*проблемой является уменьшение числа веществ в задаче до двух или даже до трех* ($n \leq 3$)". Иными словами, он поставил вопрос об "аксиоматизации" свойств пары (f, D) (где f "мертво"), гарантирующей глобальную осцилляцию замкнутой системы в результате диффузии.

Ниже приводится результат, позволяющий получить решение поставленной Смейлом задачи.

Отметим, что как показал С.Смейл в работе [75], на самом деле достаточно построить отображение f не из R_+^n в R^n, а из R^n в R^n, при этом нужно, однако, потребовать, чтобы цикл системы (49) имел "достаточно малую" амплитуду. Кроме того, по смыслу задачи матрица D должна быть подобной положительной диагональной матрице.

Следуя идее Смейла [75], исходную систему возьмем в виде

$$\frac{dx}{dt} = Rx + q\xi,\ \xi = \varphi(\sigma),\ \sigma = r^* x, \tag{50}$$

где R – $n \times n$-матрица, q и r – n-векторы, $\varphi(\sigma)$ – непрерывная функция. Тогда система (49) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= Rx^{(1)} + q\xi_1 + D(x^{(2)} - x^{(1)}); \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= Rx^{(2)} + q\xi_2 + D(x^{(1)} - x^{(2)}), \end{aligned} \tag{51}$$

где $\xi_1 = \varphi(\sigma_1)$, $\xi_2 = \varphi(\sigma_2)$, $\sigma_1 = r^* x^{(1)}$, $\sigma_2 = r^* x^{(2)}$. Функции $W_1(p) = r^*(R - pI_n)^{-1}q$ и $W_2(p) = r^*(R - 2D - pI_n)^{-1}q$ предполагаем невырожденными.

Систему (51) можно записать так

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\zeta(\sigma), \sigma = c^* x. \tag{52}$$

Здесь $x = col(x^{(1)}, x^{(2)}), \zeta = col(\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 = \varphi(\sigma_1)$, $\xi_2 = \varphi(\sigma_2)$, $\sigma_i = r^* x^{(i)}$, $i = 1,2$, а $2n \times 2n$-матрица A и $2n \times 2$ матрицы b и c имеют вид

$$A = \begin{Vmatrix} R-D & D \\ D & R-D \end{Vmatrix},\ b = \begin{Vmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{Vmatrix},\ c = \begin{Vmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{Vmatrix}.$$

Использование теорем 7 и 9 позволило доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 14 [76]. *Пусть функция $\varphi(\sigma)$ дифференцируема при $\sigma = 0$ и выполнены следующие условия:*

1) $\varphi(0) = 0$ и для некоторого $\mu_1 > 0$ при всех $\sigma \in (-\infty, \infty)$ справедливо неравенство

$$0 < \frac{\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \le \mu_1 \quad . \tag{53}$$

2) Существует такое число $\lambda > 0$, что все собственные значения матрицы R расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \lambda$ и справедливы соотношения

$$\mu_1^{-1} + \operatorname{Re} W_1(i\omega - \lambda) > 0 \quad \text{при } \omega \ge 0, \tag{54}$$

$$\mu_1^{-1} + \operatorname{Re} W_2(i\omega - \lambda) > 0 \text{ при } \omega \ge 0. \tag{55}$$

3) Все собственные значения матрицы $R - 2D$ имеют отрицательные вещественные части (матрица $R - 2D$ гурвицева) и существуют положительные числа $\mu_2 < \mu_1$ и σ_0 такие, что

$$\mu_2^{-1} + \operatorname{Re} W_1(i\omega) > 0,\ \mu_2^{-1} + \operatorname{Re} W_2(i\omega) > 0 \text{ при } \omega \ge 0, \tag{56}$$

$$0 < \varphi(\sigma)\sigma \le \mu_2 \sigma^2 \text{ при } |\sigma| \ge \sigma_0. \tag{57}$$

4) Матрица $R - 2D + \varphi'(0)qr^*$ имеет ровно 2 собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \le \operatorname{Re} p \le 0$.

5) Справедливы неравенства $W_1(0) \ge -\mu_1^{-1}$, $W_2(0) \ge -\mu_1^{-1}$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1^0. Состояние равновесия $x = 0$ системы (50) устойчиво в целом.

2^0. Система (51) имеет единственное состояние равновесия $x^{(1)} = 0$, $x^{(2)} = 0$ (система (52) имеет единственное состояние равновесия $x = 0$).

3^0. Существует замкнутое ограниченное множество $\Pi \subset R^{2n}$, не содержащее точку $x = 0$, такое, что для произвольного $x_0 \in \Pi$ траектория решения $x(t, x_0)$ системы (52) сходится при $t \to +\infty$ к замкнутой траектории этой системы. Множество Π содержит по крайней мере одну замкнутую траекторию, которая орбитально устойчива. Если функция $\varphi(\sigma)$ аналитическая, то множество Π содержит не более конечного числа замкнутых траекторий, по крайней мере одна из которых асимптотически орбитально устойчива.

4^0. Существует множество $\Xi \subset R^{2n}$ нулевой меры такое, что $x(t, x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$ для $x_0 \in \Xi$, и $x[t(x_0), x_0] \subset \Pi$ для $x_0 \notin \Xi$.

Замечание 1. Если выполнены условия (55) – (57) теоремы, то функция $\varphi(\sigma)$ всегда может быть выбрана так, что для произвольного числа $h > 0$ справедливо включение $\Pi \subset \{x : |x| \le h\}$. Иными словами, амплитуда циклов системы (52) может быть сделана сколь угодно малой.

Замечание 2. Теорема 14 не полностью решает поставленную С.Смейлом задачу конструирования глобального осциллятора, поскольку не гарантирует существование единственного устойчивого цикла в области Π, к которому сходятся все остальные траектории в этой области. Более того, как показывает приведенная ниже теорема, при выполнении условий теоремы 1 нелинейность $\varphi(\sigma)$ всегда можно выбрать так, что система (51) будет иметь любое наперед заданное число асимптотически орбитально устойчивых циклов.

Теорема 15. *Пусть существуют числа* μ_1, μ_2, λ, *удовлетворяющие условиям* $0<\mu_2<\mu_1$, $\lambda>0$, *такие, что справедливы соотношения (54)–(56), а также условие 5) теоремы 14. Пусть для некоторого* $\tilde{\mu}\in(\mu_2,\mu_1)$ *матрица* $R+\lambda I_n+\tilde{\mu}qr^*$ *гурвицева, а матрица* $R-2D+\tilde{\mu}qr^*$ *имеет ровно 2 собственных значения в полуплоскости* $\operatorname{Re}p>0$ *и не имеет их в полосе* $-\lambda\le\operatorname{Re}p\le 0$. *Тогда функцию* $\varphi(\sigma)$ *можно выбрать так, что будут справедливы все утверждения теоремы 14, и при этом система (51) будет иметь любое наперед заданное число орбитально устойчивых циклов, расположенных в шаре* $\{x:|x|\le h\}$ *для любого заданного* $h>0$.

Теорема 15 доказывается по той же схеме, что и теорема 12. Она показывает, что в постановке, предложенной С. Смейлом, задача конструирования глобального осциллятора в принципе не может быть решена без наложения дополнительных ограничений на поведение нелинейности $\varphi(\sigma)$.

Пример 8. Рассмотрим систему "кинетики двух клеток с тремя химикалиями", а именно, систему (51) с

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-\delta&-\beta&-\alpha\end{pmatrix},\ q=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ r=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&0\\\nu&0&\varepsilon_3\end{pmatrix},$$

где $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3$, $\delta=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ и $0<\alpha_3<\alpha_2<\alpha_1$.

Тогда $W_1(p)=\left(p^3+\alpha p^2+\beta p+\delta\right)^{-1}$. Разложив $W_1(p)$ на простейшие дроби, находим:

$$\operatorname{Re}W_1(i\omega)=\frac{\alpha_1}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)(\omega^2+\alpha_1^2)}-\frac{\alpha_2}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\omega^2+\alpha_2^2)}+$$

$$+\frac{\alpha_3}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)(\omega^2+\alpha_3^2)}\ge-\frac{\alpha_2}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\omega^2+\alpha_2^2)}\ge-\frac{1}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)}.$$

Значит, $\mu_2^{-1}+\operatorname{Re}W_2(i\omega)>0$ при $\mu_2<\alpha_2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\alpha_2-\alpha_3\right)$. Рассуждая аналогично, получим $\mu_1^{-1}+\operatorname{Re}W_1(i\omega-\lambda)>0$ при $\mu_1<\left(\alpha_2-\lambda\right)\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\alpha_1-\alpha_3\right)$. Таким образом, если λ мало, то $\mu_1<\mu_2$ может быть взято достаточно близким к μ_2.

Рассмотрим матрицу D с $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$. Тогда $W_2(p)=\left(p^3+\alpha p^2+\beta p+\delta+2\nu\right)^{-1}$. При этом $\det\left(R-2D+\mu\cdot qr^*-pI\right)=p^3+\alpha p^2+\beta p+\delta+2\nu+\mu$. Матрица $R-2D+\mu\cdot qr^*$ будет гурвицевой при $\mu<\alpha\beta-\delta-2\nu$. Поэтому число $\nu>0$ можно выбрать так чтобы, выполнялись условия $0<\mu<\alpha\beta-\delta-2\nu<<\alpha_2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\alpha_2-\alpha_3\right)$. Всегда существует положительное $\mu_2<\mu$, для которого выполнены соотношения (56).

Выберем ν так, чтобы полином $p^3+\alpha p^2+\beta p+\delta+2\nu+\mu$ имел один действительный корень γ, $\gamma>\alpha_1$, и пару комплексно-сопряженных корней $m\pm ni$,где m мало, а n близко к $\sqrt{\beta}$. Тогда

$\mu^{-1}+\operatorname{Re}W_2(i\omega-\lambda)\geq\mu^{-1}-\left|W_2(i\omega-\lambda)\right|\geq\mu^{-1}-\left\{(\gamma-\lambda)\left[(m-\lambda)^2+n^2\right]\right\}^{-1}>0$, $m<\lambda$, при $\mu<(\gamma-\lambda)\left[(m-\lambda)^2+n^2\right]$. Значит, можно найти λ и $\mu_1<\min\left\{(\alpha_2-\lambda)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3);(\gamma-\lambda)\left[(m-\lambda)^2+n^2\right]\right\}=(\alpha_2-\lambda)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)$ такие, что выполнены соотношения (54) и (55).

Для $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, $\varepsilon_3>0$ матрица D подобна положительной диагональной матрице и $W_2(p,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\left[p^3+\alpha(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)p^2+\beta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)p+2\nu+\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\right]^{-1}\to W_2(p)$ при $\varepsilon_i\to 0$ ($i=1,2,3$).

Таким образом, для системы с указанными R, q, r всегда можно подобрать такие μ_1, μ_2 и D, чтобы выполнялись соотношение (56) и условие 2) теоремы 14. Условия 5) при этом выполнены очевидным образом. Если $\varphi(\sigma)$ – функция, удовлетворяющая условиям (53), (57), а также соотношениям $\alpha\beta-\delta-2\nu<\varphi'(0)<\mu_1$, $\varphi(0)=0$, то выполнены условия 4) теоремы 14, и тем самым справедливы все ее заключения.

В то же время, как утверждается в теореме 15, при выполнении перечисленных выше условий можно подобрать нелинейность $\varphi(\sigma)$ так, чтобы рассматриваемая система имела любое наперед заданное число орбитально асимптотически устойчивых циклов.

Пример 9. Рассмотрим систему (51) с

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-7&-12&-4\end{pmatrix},\ q=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ r=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0.01&0&0\\0&0.2&0\\35&0&1.5\end{pmatrix},$$

Здесь

$$W_1(p)=\frac{1-p}{p^3+4p^2+12p+7},\quad W_2(p)=\frac{0.98-p}{p^3+7.42p^2+14.948p+77.296}.$$

Соотношения (54)-(56), а также условие 5) теоремы 14 выполнены для $\lambda=0.3,\mu_1=6$. Пусть $\mu_2=2.5$. При $\tilde{\mu}=4.5,\lambda=0.3$ матрица $R+\lambda I_n+\tilde{\mu}qr^*$ гурвицева, а матрица $R-2D+\tilde{\mu}qr^*$ имеет ровно 2 собственных значения в полуплоскости $\operatorname{Re}p>0$ и не имеет их в полосе $-\lambda\leq\operatorname{Re}p\leq 0$. Значит выполнены все условия теоремы 15 и нелинейность $\varphi(\sigma)$ можно подобрать так, что система (51) будет иметь любое наперед заданное число орбитально устойчивых циклов.

Для отыскания функции $\varphi(\sigma)$ воспользуемся алгоритмом, изложенным при доказательстве теоремы12, учитывая, что обе нелинейности в системе (52) одинаковые. Для рассматриваемой системы шестого порядка передаточная матрица будет иметь вид

$$W(p)=\frac{1}{n(p)}\begin{pmatrix}m_1(p)&m_2(p)\\m_2(p)&m_1(p)\end{pmatrix}$$

где

$$m_1(p) = -p^4 - 4.72p^3 - 7.804p^2 - 28.794p + 42.078,$$
$$m_2(p) = -1.7p^3 + 0.276p^2 - 33.554p + 35.218,$$
$$n(p) = p^6 + 11.42p^5 + 56.628p^4 + 233.128p^3 + 540.8p^2 + 1032.188p + 541.072.$$

Непосредственная проверка показывает, что здесь выполнены все предположения теоремы 12 для $M = diag(6,6), \hat{M} = diag(2.5,2.5), \tilde{M} = diag(4.5,4.5), \lambda = 0.3$. Найдя матрицу H, являющуюся решением неравенства (32) и применив алгоритм, изложенный при доказательстве теоремы 12, сконструируем следующую нечетную функцию $\varphi(\sigma)$, заданную при $\sigma \geq 0$ соотношениями

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 4.5\sigma \quad 0 \leq \sigma \leq 0.05 \\ 2.5\sigma + 0.01 \quad 0.005 \leq \sigma \leq 1.181706642 \\ 4.5\sigma - 2.353413284 \quad 1.181706642 \leq \sigma \leq 11.48479442 \\ 2.5\sigma + 20.61617556 \quad 11.48479442 \leq \sigma \end{cases}$$

Согласно теореме 12 система (51) с $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = \varphi(\sigma)$ имеет не менее трех циклов, не менее чем 2 из которых орбитально устойчивы, тогда как состояние равновесия $x = 0$ системы (50) устойчиво в целом.

На рис.9 представлены результаты численного интегрирования системы (50) при заданных R, q, r и выбранной нелинейностью $\varphi(\sigma)$

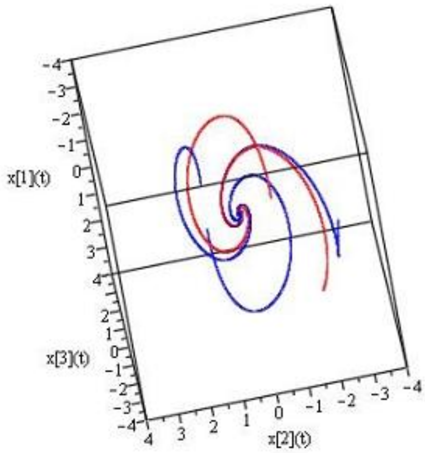

Рис. 9

На рисунках 10 и 11 представлены проекции на R^3 двух устойчивых циклов ("малого" и "большого") системы (51) шестого порядка.

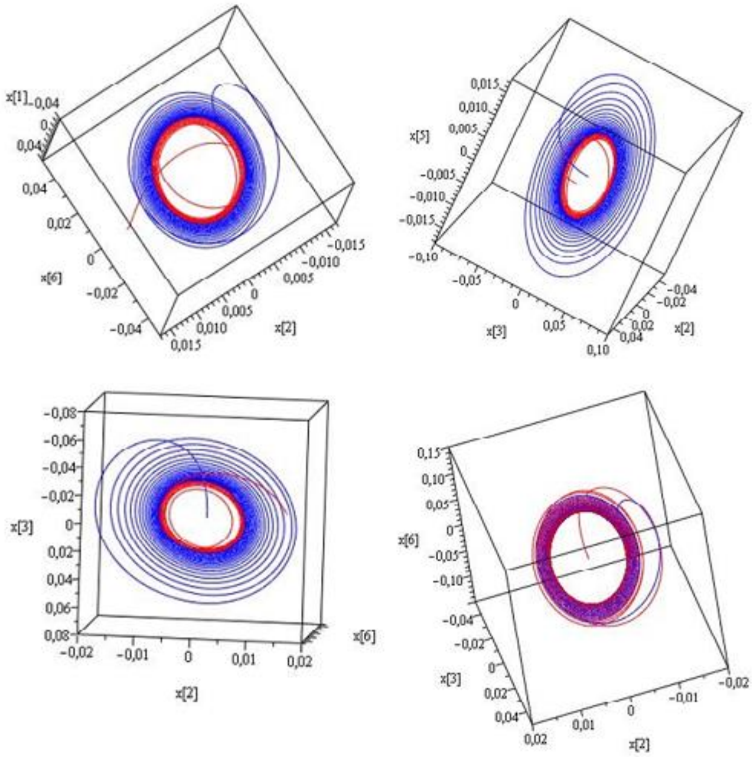

Рис. 10

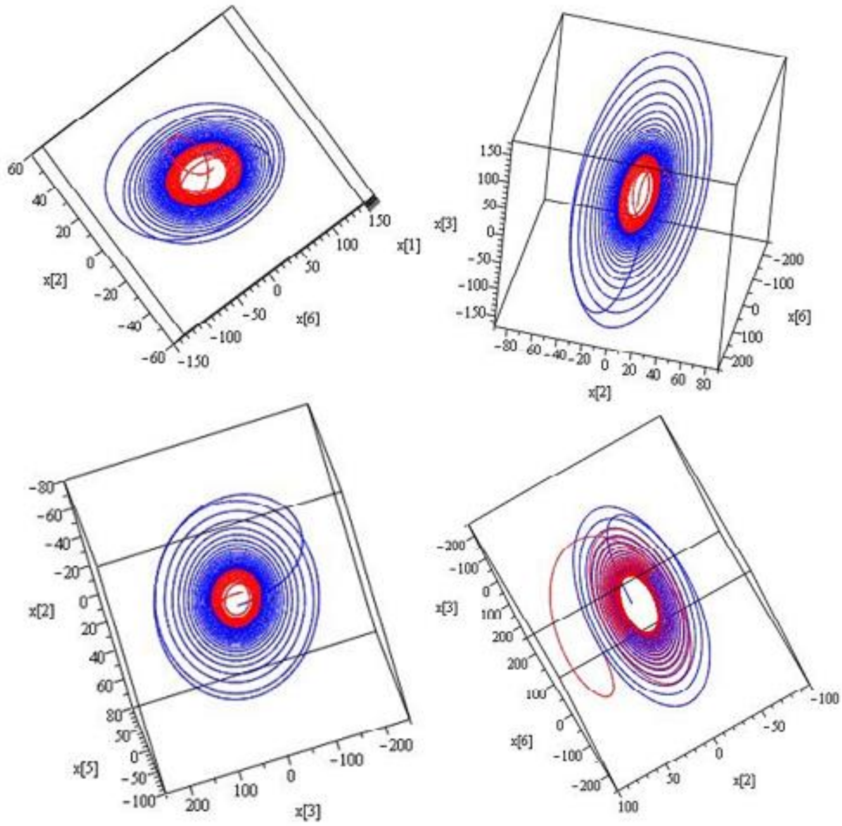

Рис. 11

5. Скрытые аттракторы многомерных систем. Поиск минимального глобального аттрактора.

Как мы уже увидели, качественный анализ некоторых многомерных систем, даже систем с простой динамикой, то есть не содержащих странных аттракторов, часто является весьма утомительной и трудно реализуемой процедурой. Для многомерных систем с хаотическими колебаниями такой анализ, как правило, вообще невозможен. Поэтому многие результаты, касающиеся механизмов возникновения аттракторов и их локализации в фазовом пространстве были получены с помощью компьютерного моделирования. Но даже возможности компьютерного моделирования оказываются крайне ограниченными в том случае, когда исследуемые системы обладают так называемыми *скрытыми аттракторами.* Аттракторы классических систем Лоренца, Рёсслера , Чуа , также как аттракторы моделей классических систем автоматического управления, содержат в своей области притяжения сколь угодно малые окрестности неустойчивых состояний равновесия. Такие аттракторы являются *самовозбуждающимися* в том смысле, что вычислительная процедура, "стартующая" из любой точки неустойчивого многообразия в окрестности состояния равновесия, "выходит" на аттрактор и рассчитывает его. В отличие от самовозбуждающихся, *скрытые* аттракторы не содержат в своей области притяжения окрестностей состояния равновесия. В рассмотренных выше примерах систем автоматического управления, обладающих несколькими орбитально устойчивыми циклами, все устойчивые циклы, за исключением одного, являлись скрытыми. Использование изложенного выше "метода шаблонов" позволяет локализовать области притяжения некоторых устойчивых циклов, хотя сама процедура построения шаблонов, зачастую, является достаточно трудоемкой.

Новый метод поиска скрытых аттракторов в многомерных динамических системах был развит в работах [77-90]. Использование этого метода позволило обнаружить скрытые аттракторы в классической системе Чуа [91], построить контрпример к известной гипотезе Калмана, обнаружить скрытые колебания в системах управления летательными аппаратами. Эти работы вызвали волну интереса к исследованию многомерных динамических систем, которые либо не имеют состояний равновесия, либо имеют устойчивые в малом состояния равновесия и одновременно обладают орбитально устойчивыми циклами, или странными аттракторами [92-101].

Оказалось, что теория, развитая в работах [55,56,67] (теоремы 7 и 12 настоящей работы) может служить мощным средством для поиска скрытых аттракторов многомерных систем и отыскания их минимального глобального аттрактора. В работах [57, 102] наглядно продемонстрировано, что к скрытым аттракторам можно прийти при помощи конечного числа преобразований гомотопии траекторий систем, имеющих простую динамику.

В качестве примеров приведем здесь два результата, касающихся структуры минимального глобального аттрактора некоторых многомерных систем.

Пример 10. В безразмерных координатах система Чуа [91] может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y-x)-\alpha\varphi(x), \\ \dot{y} &= x-y+z, \\ \dot{z} &= -\beta y-\gamma z, \end{aligned} \tag{58}$$

где функция $\varphi(x)$ характеризует нелинейный элемент ("диод Чуа"). Обобщенной системой Чуа называют [103] систему (58) с нелинейностью вида

$$\varphi(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|) + 0.5(s - m_0)(|x+\delta_0| - |x-\delta_0|) \tag{59}$$

В соотношениях (58) – (59) α, β, m_0, m_1 – параметры классической системы Чуа, δ_0 и s – параметры обобщенной системы Чуа, отвечающие за устойчивость нулевого состояния равновесия. Обобщенная система Чуа была исследована в работе [57] для значений параметров $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \quad \gamma = 0.0052, \quad m_0 = 0.14, \quad m_1 = -1.1468, \quad s = -0.9668, \delta_0 = 0.2$. Такая система имеет три состояния равновесия (одно устойчивое в малом и два седловых). Было обнаружено, что минимальный глобальный аттрактор рассматриваемой системы содержит два неустойчивых цикла, один скрытый орбитально устойчивый цикл и пару скрытых аттракторов-близнецов. На рисунках 12 и 13 представлены две проекции найденного аттрактора на координатные плоскости.

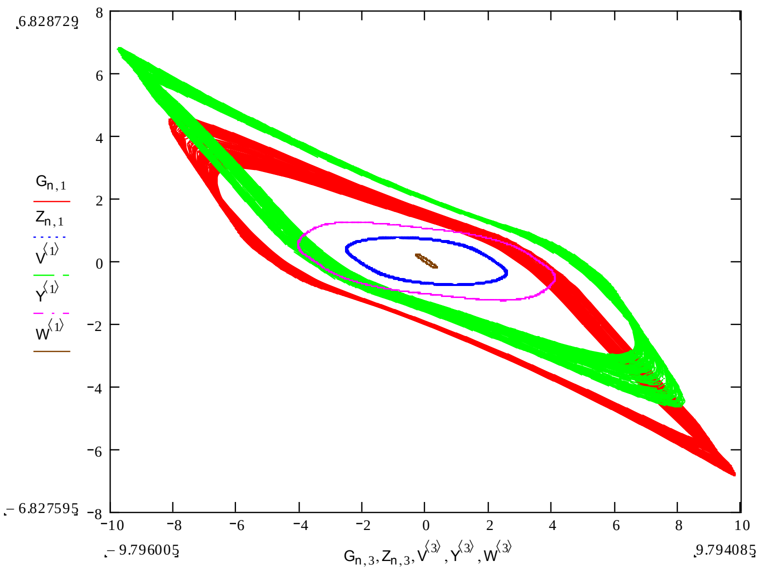

Рис. 12

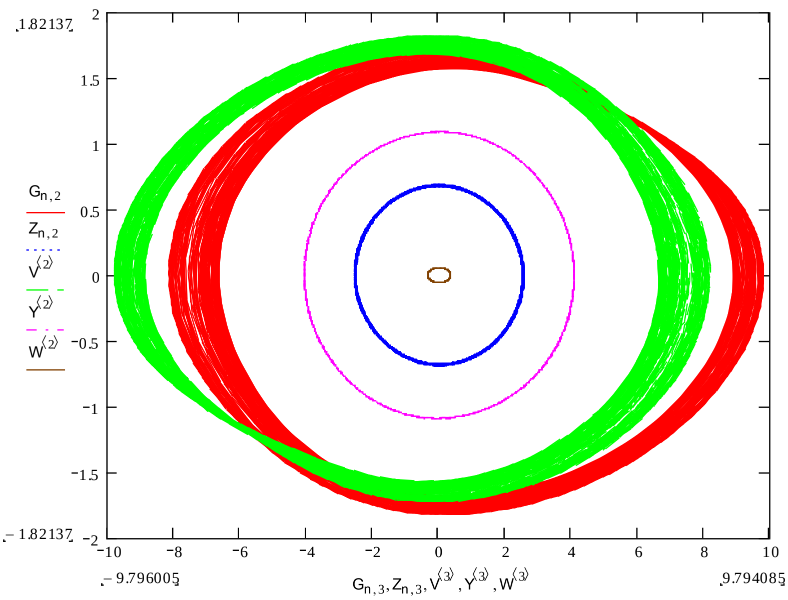

Рис.13

Пример 11. Рассмотрим систему третьего порядка с полиномиальной нелинейностью

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = x_3,\\
&\dot{x}_3 = -8.6x_2 - x_3 + \varphi(\sigma),\\
&\varphi(\sigma) = 3.3\sigma - 0.63\sigma^3 + 0.028\sigma^5,\\
&\sigma = -18x_1 - x_2 - x_3.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Эта система имеет вид (1), где

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8.6 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -18 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \chi(p) = \frac{5p^2 + 5p + 90}{5p^3 + 5p^2 + 43p}.
$$

Система (60) имеет 5 неустойчивых состояний равновесия типа седло-фокус: (0,0,0), $(\pm 0.160049, 0, 0)$, $(\pm 0.209353, 0, 0)$. Эта система была исследована в работе [102]. Минимальный глобальный аттрактор системы представлен на рисунке 14.

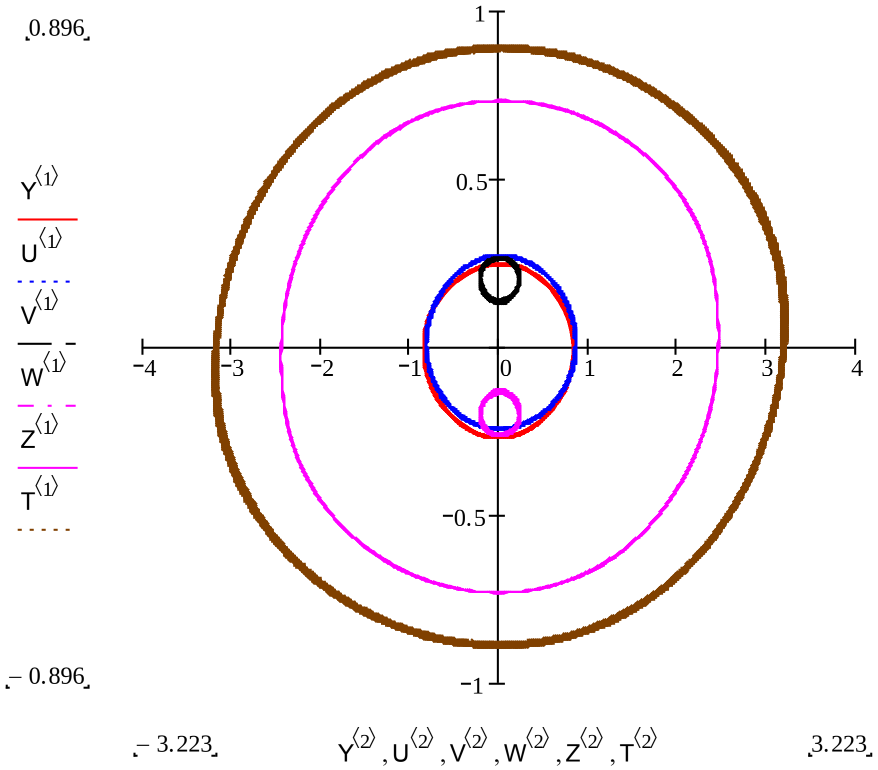

Рис.14

Итак, минимальный глобальный аттрактор системы (60) с нелинейностью – полиномом пятой степени представляет собой совокупность пяти точек покоя и шести циклов, пять из которых являются орбитально асимптотически устойчивыми. При этом "большой" цикл является скрытым аттрактором.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РНФ 14-21-00041 и Санкт-Петербургского государственного университета

Список литературы

1. Буркин И.М. Леонов Г.А. Частотные условия существования нетривиального периодического решения у нелинейной системы с одной стационарной нелинейностью. Методы и модели управления. 1975. Вып. 9. РПИ, Рига, с. 175-177.
2. Буркин И.М., Леонов Г.А. О существовании нетривиальных периодических решений в автоколебательных системах. Сиб. мат. журнал. 1977, №2,. с.251-262.
3. Friedrichs D. O. On nonlinear vibrations of third order. Studies in Nonlinear Vibrarion Theory. Institute of Mathematics and Mechanics, New York University Press, 1946, pp.65-103.
4. Rauch L. L., Oscillation of a third order nonlinear autonomous system, Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations. Univ. Press, 1950, pp. 39-88.
5. Широкорад Б.В. О существовании цикла вне условий абсолютной устойчивости трехмерной системы. Автоматика и телемеханика. 1958. Т.15, №10, с. 953-967.
6. Sherman S. A third-order nonlinear system arising from a nuclear spin generator, Contr. Dif. Eqns. 1963. no. 2, pp.197- 227.
7. Вайсборд Э. М. О существовании периодического решения у нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка,.Матем. сб. 1962, 56(98):1 , с.43–58.
8. В.А.Плисс. Нелокальные проблемы теории колебаний. 1964. М. "Наука", 367 с.
9. Виноградов Н.Н. Некоторые теоремы о существовании периодических решений одной автономной системы шести дифференциальных уравнений. Диф. уравнения. 1965, т.1, №3, с. 330-334.
10. Mulholland R. J., Nonlinear oscillations of a third-order differential equation. .J. nonlinear Mech. 1971, no 6, pp. 279- 294.
11. Kamachrin A. M. Existence and uniqueness of a periodic solution to a relay system with hysteresis. . Diff. Eqns. 1972, no. 8, pp.1505-1506.
12. Леонов Г.А. Частотные условия существования нетривиальных периодических решений в автономных системах.. Сиб. мат. журнал. 1973,Т.14, № 6, с. 1505-1506
13. Williamson D., Periodic motion in nonlinear systems . IEEE trans. Automat. Control 1975, AC-20, no. 4, pp.479-486.
14. Noldus E. A frequency domain approach to the problem of the existence of periodic motion in autonomous nonlinear feedback systems, Z. Angew. math. Mech. 1969, no.3. pp. 166-177.
15. Noldus E. A counterpart of Popov's theorem for the existence of periodic solutions. Int. J. Control 1971, vol.13, no.4, pp. 705- 719.
16. Hastings S., The existence of periodic solutions to Nagumo's equation, Q. Jl. Math., Oxford Ser. 1974, 2(25), pp. 369-378
17. Hastings S.P., Murray J. D. The existence of oscillatory solutions in the field-noyes model for the Belousov-Zhabotinskii reaction. SIAM J. Appl. Math. 1975, 28(3), pp. 678-688 .
18. Tyson J. J., On the existence of oscillatory solutions in negative feedback cellular control process, . Math. Biol. 1975, no.1, pp.311-315 .
19. Smith R. A. The Poincare-Bendixson theorem for certain differential equations of higher order. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 1979,Sect. A 83, pp.63-79
20. Smith R. A. Existence of periodic orbits of autonomous ordinary differential equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1980, Sect. A 85, pp.153-172.

21. Smith R. A. An index theorem and Bendixson's negative criterion for certain differential equations of higher dimension. . Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1981, A91, pp.63-77.
22. Smith R. A. Certain differential equations have only isolated periodic orbits. Ann. Mat. Pura. Appl. 1984, vol.137, pp. 217-244.
23. Smith R. A. Poincaré index theorem concerning periodic orbits of differential equations. Proc. London Math. Soc. 1984, vol.48, pp.341-362
24. Smith R.A. Massera's Convergence Theorem for Periodic Nonlinear Differential Equations. J. Math. Analysis and Appl.. 1986 vol.120, pp. 679-708.
25. Smith R.A. Orbital stability for ordinary differential equations. J. Diff. Eq. 1987, vol. 69. no. 2, pp. 265 -287.
26. Smith R.A. Poincaré-Bendixson theory for certain retarded functional-differential equations. Diff. Int. Eq. 1992. no.5, pp.213-240.
27. Smith R.A. Some modified Michaelis-Menten equations having stable closed trajectories. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1988, 109A, pp. 341-359
28. Smith R.A. Orbital stability and inertial manifolds for certain reaction diffusion systems. Proc. London Math. Soc. 1994,vol.69, no. 3, pp. 91-120.
29. Mallet-Paret J., Smith H.L., The Poincaré–Bendixson theorem for monotone feedback systems, J. Dynam. Diff. Eq. 1990, vol. 2, no. 4, , pp. 367–421.
30. Mallet-Paret J., Sell G.R., The Poincaré–Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay, J. Diff. Eq. 1996, 125, pp. 441–489.
31. Sanchez L.A. Cones of rank 2 and the Poincaré–Bendixson property for a new class of monotone systems, J. Diff. Eq. 2009, 216, pp. 1170–1190.
32. Sanchez L.A. Existence of periodic orbits for high-dimensional autonomous systems. J. Math. Anal. Appl. 2010,363 , pp. 409–418ю
33. Leonov G.A., Burkin I.M., Shepelijavyi A.I Frequency Methods in Oscillation Theory. Kluwer Academic Publishers. 196б, 403 p.
34. Гелиг А.Х.,Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М. "Наука",1978, 400 с.
35. Heiden U. an der, Existence of periodic solutions of a nerve equation, Biol. Cybern. 1976, 21, pp. 37-39.
36. Hastings S. P, Tyson J. J., Webster D., Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control systems, J. Diff Eqns. 1977, vol. 25, pp. 39-64.
37. Lorenz E.N. Deterministic non-periodic flow. J. Atmos. Sci. 1963. vol.20, pp. 130-141.
38. Smale S. Diffeomorphfisms with many periodic points. Combin. Topology. Princeton. Univ. Press.1965, pp. 21-30/
39. MatsumotoT. A chaotic attractor from Chua's circuit. IEEE Trans.CAS-31, 1984, pp.1055-1058.
40. Hirsch M.W. Systems of differential equations which are competitive or cooperative. I. Limit sets, SIAM J. Math. Anal. 1982, vol.13, pp. 167–179.
41. Hirsch M.W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. II. Convergence almost everywhere. SIAM J. Math. Anal. 1985, vol.16, pp.423–439.
42. Hirsch M.W. Systems of differential equations which are competitive or cooperative. III: Competing species. Nonlinearity. 1988, vol.1, pp. 51–71.

43. Hirsch M.W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. IV: Structural stability in three dimensional systems. SIAM J. Math. Anal. 1990, vol.21, pp.1225-1234.
44. Hirsch M.W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. V. Convergence in 3-dimensional systems, J. Differential Equations, 1989, vol. 80, pp. 94–106.
45. Hirsch M.W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. VI. A local C^rclosing lemma for 3-dimensional systems, Ergodic Theory Dynam. Systems, 1991, vol.11, pp. 443–454.
46. Hirsch M.W., Smith H., Monotone dynamical systems, in: Handbook of Differential Systems (Ordinary Differential Equations). Elsevier, Amsterdam, 2005, vol. 2, pp. 239–358.
47. Smith H.L., Monotone Dynamical Systems, Amer. Math. Soc., Providence, 1995.
48. P. Hess, Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity, Pitman Res. Notes Math. Ser., 1991.vol. 247, Longman Scientific and Technical, Harlow.
49. Angeli D., P. de Leenheer, Sontag E.D. Graph-theoretic characterizations of monotonicity of chemical networks in reaction coordinates. J. Mathematical Biology, 2010, vol.61, pp. 581-616.
50. Craciun G., Pantea C., Sontag E.D. Graph-theoretic analysis of multistability and monotonicity for biochemical reaction networks. Design and Analysis of Biomolecular Circuits, Springer-Verlag, 2011, pp. 63-72.
51. Angeli D. Sontag E.D.. Behavior of responses of monotone and sign-definite systems. Mathematical System Theory, 2013, Create Space, pp. 51-64.
52. Angeli D., Enciso G.A., Sontag E.D.**.** A small-gain result for orthant-monotone systems under mixed feedback**.** Systems and Control Letters, 2014, vol.68, pp. 9-19.
53. Ortega R., Sanchez L.A., Abstract competitive systems and orbital stability in R^3, Proc. Amer. Math. Soc., 2000, vol. 128, pp. 2911–2919.
54. Буркин И.М., Леонов Г.А. О существовании нетривиальных периодических решений у одной нелинейной системы третьего порядка. Дифф. уравнения, 1984, т. XX, № 12, с. 1430-1435.
55. Буркин И.М., Соболева Д.В. О структуре глобального аттрактора многосвязных систем автоматического регулирования. Известия ТулГУ. Естественные науки. Изд-во ТулГУ, 2012, вып. 1, с. 5-16.
56. Буркин И.М., Буркина Л.И. Частотный критерий существования циклов у многосвязных систем автоматического регулирования. Вестник ТулГУ. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи», 2010, вып.1. ТулГУ,. с. 3-14 .
57. Burkin I. M., Nguen N. K. Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems. Differential Equations, 2014, vol. 50, no. 13, pp. 1695–1717.
58. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Изд.-во Нижегородского университета, 2013, 366 с
59. Буркин И.М. Частотный критерий орбитальной устойчивости предельных циклов второго рода. Дифференциальные уравнения, 1993, т. 29, №6,. с. 1061-1063 .
60. Буркин И.М. Обобщенный принцип Пуанкаре-Бендиксона для динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством. Вестник ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи", 2009,Вып. 1. Тула, с. 3-20/

61. Леонов Г.А., Смирнова В.Б. Математические проблемы теории фазовой синхронизации. Санкт-Петербург. Наука 2000, 400 с.
62. Бобылев Н.А., Булатов А.В, Коровин С.К, Кутузов А.А. Об одной схеме исследования циклов нелинейных систем. Дифф. уравнения, т. 32, № 1,с 3-8.
63. Byrnes C. I. Topological Methods for Nonlinear Oscillations . Notices of the AMS, 2010, vol. 57, no 9, pp. 1080-1090
64. Буркин И.М, Буркина Л.И., Леонов Г.А. Проблема Барбашина в теории фазовых систем. Дифф. уравнения, 1981,т. XVII, №11,. с. 1932-1944.
65. Буркин И.М, Соболева Д.В. О многомерных системах с неединственным циклом и методе гармонического баланса. Известия ТулГУ. Естественные науки, Изд-во ТулГУ, 2011, вып. 3,с. 5-21.
66. Буркин И.М. О структуре минимального глобального аттрактора многомерных систем с единственным положением равновесия. Дифф. уравнения, 1997,т. 33, №3, с. 418-420.
67. Буркин И.М. О явлении буферности в многомерных динамических системах. Дифф. Уравнения, 2002, т. 38, №5, с. 585 - 595.
68. Буркин И.М., Якушин О.А. О многомерном варианте тринадцатой проблемы Смейла. Известия ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи", 2004, вып. 1, с. 12-29.
69. Буркин И.М., Якушин О.А. Колебания с жестким возбуждением и феномен буферности в многомерных моделях регулируемых систем. Известия ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи, 2005, вып.1, с. 24-31.
70. Матвеев А.С. Якубович В.А. Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи, 2003. Изд.-во С.-Петербургского ун-та, 540 с.
71. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. М., 1981, 303 с/
72. Леонов Г.А. Об одной гипотезе Воронова. Автоматика и телемеханика, 1984. №5, с.53-58.
73. Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B. Local instability and localization of attractors. Acta Applicandae Mathematicae,1995, vol.40, pp.179-243.
74. Буркин И.М., Буркина Л.И. О числе циклов трехмерной системы и шестнадцатой проблеме Гильберта. Известия Российской академии естественных наук. Дифф, уравнения, 2001, №5,с. 37-40.
75. Смейл С. Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнения Тьюринга. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., 1980, 360 с.
76. Burkin I. M, Soboleva D. V. On a Smale Problem. Diff. Equations, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 1–9.
77. Leonov G.A,. Vagaitsev V.I, Kuznetsov N.V. Algorithm for localizing Chua attractors based on the harmonic linearization method. Doklady Mathematics, 2010, vol. 82, no.1, pp. 663–666. (doi:10.1134/S1064562410040411).
78. Leonov G.A, Bragin V.O., Kuznetsov N.V. Algorithm for constructing counterexamples to the Kalman problem. Doklady Mathematics, 2010, vol. 82, no.1, pp. 540–542.. (doi:10.1134/S1064562410040101).

79. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Algorithms for searching for hidden oscillations in the Aizerman and Kalman problems. Doklady Mathematics, 2011, vol.8, no.1, pp. 475–481. (doi:10.1134/S1064562411040120).
80. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems". IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 2011, vol.18, no1, pp. 2494-2505. (doi:10.3182/20110828-6-IT-1002.03315).
81. Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M. Hidden oscillations in nonlinear control systems, IFAC Proceedings Volumes" IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 2011, vol.18, no1, pp. 2506-2510. (doi: 10.3182/20110828-6-IT-1002.03316).
82. Bragin V.O., Vagaitsev V.I., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua’s circuits. J. Comput.Syst. Sci. Int. 2011, vol. 50, no.4, pp. 511–543.
83. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev, V. I. Localization of hidden Chua’s attractors. Phys. Lett. A 2011, vol. 375, pp.2230-2233.
84. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Seledzhi S.M., Vagaitsev, V.I. Hidden oscillations in dynamical systems, Trans Syst. Contr., 2011, .no.6, pp.54-67.
85. Leonov G.A, Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I. Hidden attractor in smooth Chua systems. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2012, 241(18), pp. 1482-1486. (doi: 10.1016/j.physd.2012.05.016)
86. Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A., Vagaitsev V. I. Analytical-numerical localization of hidden attractor in electrical Chua’s circuit. Lecture Notes in Electrical Engineering, 2013,174, pp.149-158,.
87. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2013, vol.23, no.1.1330002.
88. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Analytical-numerical methods for hidden attractors localization: The 16th Hilbert problem, Aizerman and Kalman conjectures, and Chua circuit. Numerical Methods for Differential Equations, Optimization, and Technological Problems, Computational Methods in Applied Sciences, 2013,vol.27, Part 1 (Springer), pp. 41-64..
89. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Pogromsky A.Yu. Hidden Oscillations in Aircraft Flight Control System with Input Saturation. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 2013, vol.5, no.1, pp.75-79. (doi: 10.3182/20130703-3-FR-4039.00026).
90. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M. Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 2013, vol.19, no.1, pp.37-41. (doi: 10.3182/20130902-5-DE-2040.00040).
91. Chua L.O. A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits. Proc. Of the IEEE 35th Midwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No.92CH3099-9). Washington, 1992,vol. 2, pp. 916 – 926.
92. Jafari S., Sprott J. C., Golpayegani S. M. R. H. Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria. Phys. Lett. A, 2013, vol.377, pp.699-702.
93. Molaie M., Jafari S., Sprott J. C., Golpayegani, S. M. R. H. Simple chaotic flows with one stable equilibrium. Int. J. Bifurcation and Chaos. 2013, vol. 23, no. 11. 1350188.
94. Wangand X., Chen G. A chaotic system with only one stable equilibrium Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012, vol.17, no.3, pp.1264–1272.

95. Wei Z. Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria. Phys. Lett. A, 2011, vol.376, pp.102–108.
96. Wei Z. Delayed feedback on the 3-D chaotic system only with two stable node-foci. Comput.Math. Appl. 2011, vol.63, pp.728-738..
97. Wang X. ,Chen G. Constructing a chaotic system with any number of equilibria. Nonlinear Dyn., 2013, vol. 71, pp.429-436..
98. Seng-Kin Lao, Shekofteh Y., Jafari .S, Sprott, J. C. Cost Function Based on Gaussian Mixture Model for Parameter Estimation of a Chaotic Circuit with a Hidden Attractor. Int. J. Bifurcation Chaos, 2014, vol. 24, no.01.1450010.
99. Pham, V.-T., Rahma, F., Frasca, M., Fortuna, L. Dynamics and synchronization of a novel hyperchaotic system without equilibrium. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2014, 24(06). art. num.1450087.
100. Zhao H., Lin Y., Dai Y. Hidden attractors and dynamics of a general autonomous van der Pol-Duffing oscillator. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2014, 24(06). art. num. 1450080.
101. Q. Li, H. Zeng, X.-S. Yang On hidden twin attractors and bifurcation in the Chua's circuit . Nonlinear Dyn., 2014,77 (1–2) , pp. 255–266.
102. Буркин И.М., Нгуен Нгок Хиен. О структуре минимального глобального аттрактора обобщенной системы Льенара с полиномиальной нелинейностью. Известия ТулГУ. Естественные науки. Изд-во ТулГУ, 2014, вып. 2. с. 46-58.