

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N 4, 2018

Электронный журнал,

рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

## Прикладные задачи

### Математическое моделирование переходных процессов гидроагрегата Саяно-Шушенской ГЭС.

Г.А. Леонов<sup>1</sup>, Б.Р. Андриевский<sup>1,2</sup>, Н.В. Кузнецов<sup>1,2</sup>, М.В. Юлдашев<sup>1</sup>,  
Р.В. Юлдашев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский Государственный Университет, каф. прикладной кибернетики, Санкт-Петербург, Россия, nkuznetsov239@gmail.com

<sup>2</sup>Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук,  
Санкт-Петербург, Россия

### Аннотация

Данная работа посвящена исследованию колебаний в турбогенераторах и является продолжением работы, мотивированной аварией на Саяно-Шушенской ГЭС в 2009г. Рассмотренная ранее математическая модель гидроагрегата дополнена моделями электрической нагрузки и системы возбуждения. Выбрана математическая модель регулятора скорости вращения, описывающая систему, применявшуюся на СШ ГЭС, а в модели турбины учтены изменение КПД и колебания напора под крышкой, выявленные при натуральных испытаниях. Проведено численное моделирование переходных процессов системы при изменении нагрузки.

**Ключевые слова:** уравнения гидроагрегата, динамические системы, математическая модель гидроагрегата

### Abstract

This work is devoted to the study of oscillations in hydroelectric power plants (HPPs). It represents an extension of the previous work motivated by the

accident at the Sayano-Shushenskaya HPP in 2009. The mathematical model of the hydraulic unit is supplemented by the models of electrical load and excitation system. The mathematical model of the speed governor describing the system used at the Sayano-Shushenskaya HPP was considered. In the turbine model the changes in the efficiency and pressure fluctuations under the cover, which were identified during field tests, were took into account. A numerical simulation of the transient processes in the system with changing load was performed.

**Key words:** hydroelectric power plant equations, dynamical systems, mathematical model of the hydraulic unit

## 1 Введение

Данная работа посвящена исследованию колебаний в турбогенераторах и является продолжением работы [1]. В этой работе были обнаружены скрытые колебания, соответствующие зоне нежелательной работы гидроагрегата из-за колебаний напора под крышкой турбины. Согласно акту технической экспертизы [2], колебания напора стали одной из причин аварии на Саяно-Шушенской ГЭС в 2009г. Однако математическая модель, использованная в [1] для исследования динамики гидроагрегата, была упрощенной. В частности, она не учитывала изменение КПД турбины и колебания напора под крышкой, вызванные вихревым жгутом. Также регулятор скорости вращения турбины и система возбуждения, модели которых были использованы, значительно отличались от реально используемых на СШ ГЭС. В данной работе выбраны модели, точнее описывающие работу гидроагрегата, а также иная модель электрической нагрузки.

## 2 Математическая модель гидроагрегата.

Рассмотрим основные конструктивные элементы гидроагрегата на примере Саяно-Шушенской гидроэлектростанции (см. рис. 1).

С помощью искусственных сооружений (плотин) создается необходимый перепад высот (и соответственно напор воды) между верхним и нижним бьефом. Протекая через водовод, вода из верхнего бьефа попадает в спиральную камеру, задающую необходимое направление потока воды. Объем жидкости попадающей из спиральной камеры на лопасти турбины ограничивается открытием лопаток направляющего аппарата (НА) с помощью регулятора. Р-

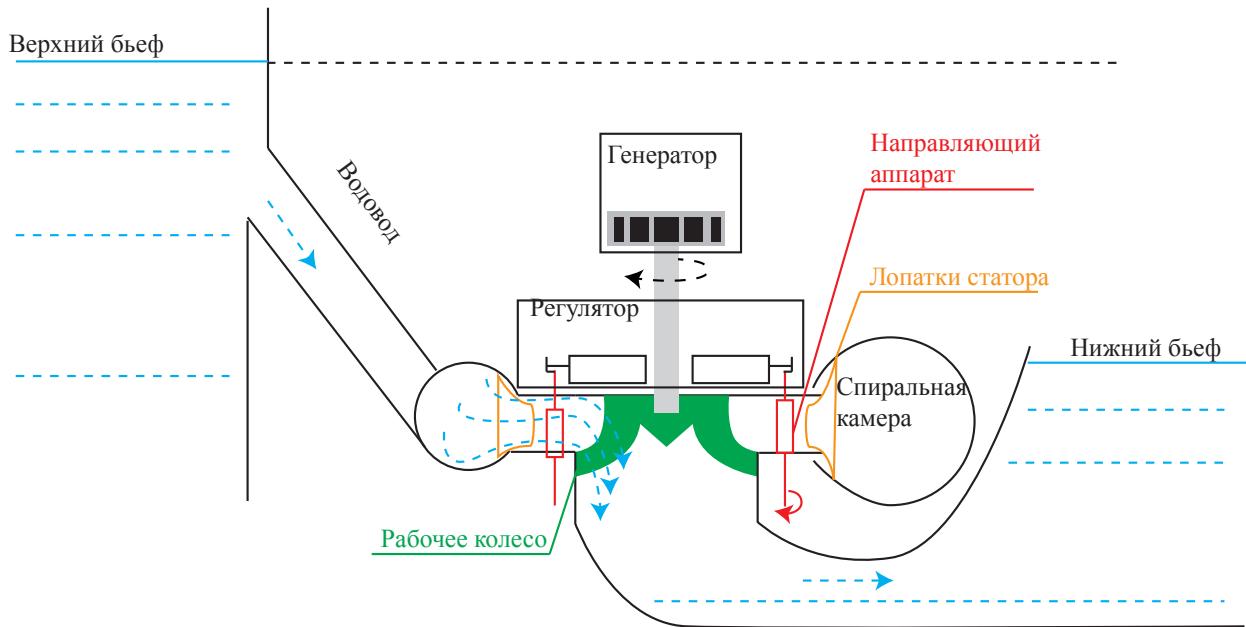


Рис. 1: Общая схема гидроагрегата.

гулятор позволяет поддерживать необходимую скорость вращения рабочего колеса турбины при изменяющейся нагрузке. Турбина с помощью жесткого вала соединена с ротором генератора, вращение которого генерирует трехфазный ток в обмотках статора. Управление напряжением на выводах статора осуществляется через управление токами в обмотке возбуждения на роторе. Турбина, генератор и вспомогательные системы образуют гидроагрегат. Далее электроэнергия распределяется по потребителям с помощью сети подстанций и линий электропередач.

Схема, описывающая функциональные связи синхронного генератора, системы возбуждения, турбины и связанных с ними элементов управления показана на рис. 2. Для построения полной модели системы рассмотрим мате-



Рис. 2: Основные структурные элементы гидроагрегата.

матические модели каждого из элементов.

## 2.1 Дифференциальные уравнения турбины и водяного столба

Рассмотрим упрощенную модель водовода, подразумевающую, что вода это несжимаемая жидкость (эффектом гидроудара можно пренебречь, так как длина водовода мала):

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{A_{\text{penstock}} a_g}{L_{\text{full}}} (Z_{\text{forebay}} - Z_{\text{tailrace}} - H_{\text{loss}}(t) - H(t)), \quad (1)$$

где  $A_{\text{penstock}}$  — площадь сечения водовода;  $a_g$  — ускорение свободного падения;  $L_{\text{full}}$  — длина осевой линии напорного водовода с учетом спиральной камеры и отводящей трубы (м);  $Q(t)$  — объемный расход воды через турбину;  $Z_{\text{forebay}}$  — высота верхнего бьефа;  $Z_{\text{tailrace}}$  — высота нижнего бьефа;  $H_{st} = Z_{\text{forebay}} - Z_{\text{tailrace}}$ ;  $H_{\text{loss}}(t)$  — потери напора в водоводе на трение о стенки;  $H(t)$  — изменение напора на турбине. Для моделирования потерь напора в водоводе  $H_{\text{loss}}$  будем использовать уравнение Дарси - Вейсбаха [3]

$$H_{\text{loss}}(t) = F_C L_{\text{full}} \frac{v_{\text{water}}^2(t)}{D_{\text{penstock}} 2 a_g} = F_C L_{\text{full}} \frac{8 Q^2(t)}{\pi^2 D_{\text{penstock}}^5 a_g} = C_{\text{loss}} Q^2(t), \quad (2)$$

где коэффициент трения  $F_C$  определяется материалом, диаметром  $D_{\text{penstock}}$ , параметрами поверхности водовода и жидкости (кинематическая вязкость  $F_C$  и скорость  $v_{\text{water}}$ ) согласно уравнению [3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{F_C}} &= -2 \log \left( \frac{2.51}{Re \sqrt{F_C}} \left( \frac{R_*}{3.3} + 1 \right) \right), \\ R_* &= \frac{1}{\sqrt{8}} (Re \sqrt{F_C}) \frac{\epsilon}{D_{\text{penstock}}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\epsilon$  — шероховатость водовода (м);  $Re$  — число Рейнольдса.

Для радиально-осевой турбины расход воды мало меняется при изменении скорости вращения, поэтому его зависимость от напора может быть записана следующим образом [4]:

$$Q(t) = CG(t) \sqrt{H(t)}, \quad H(t) = \left( \frac{Q(t)}{CG(t)} \right)^2, \quad (4)$$

где  $C$  — некоторая постоянная величина,  $G$  — открытие направляющего аппарата. В относительных единицах ( $q(t) = \frac{Q(t)}{Q_{\text{base}}}$ ,  $h(t) = \frac{H(t)}{H_{\text{base}}}$ ,  $Q_{\text{base}} = CG_{\text{base}} \sqrt{H_{\text{base}}}$ ,  $g(t) = \frac{G}{G_{\text{base}}}$ ) имеем

$$q(t) = g(t) \sqrt{h(t)}. \quad (5)$$

Гидравлическая мощность турбины  $N_{turb}(t)$  и крутящий момент  $T_{turb}(t)$  определяются по формулам [5]

$$N_{turb}(t) = \rho a_g \eta Q(t) H(t), \quad T_{turb}(t) = \frac{1}{\omega} N_{turb}(t), \quad (6)$$

где  $\rho$  — плотность воды,  $\eta = \eta(G, Q, \omega)$  — коэффициент полезного действия (КПД), которые определяется по главной универсальной характеристике турбины (рис. 3) либо принимается постоянным (возможны и другие способы определения).

Для задания зависимости расхода, напора, скорости вращения, открытия НА и КПД турбины можно использовать значения полученные на модельной турбине. График такой зависимости называется главной универсальной характеристикой турбины (рис. 3 [6]). Характеристики реальной турбины пересчитываются по законам подобия. Здесь  $Q'_I(t)$  и  $n'_I(t)$  это приведенные расход

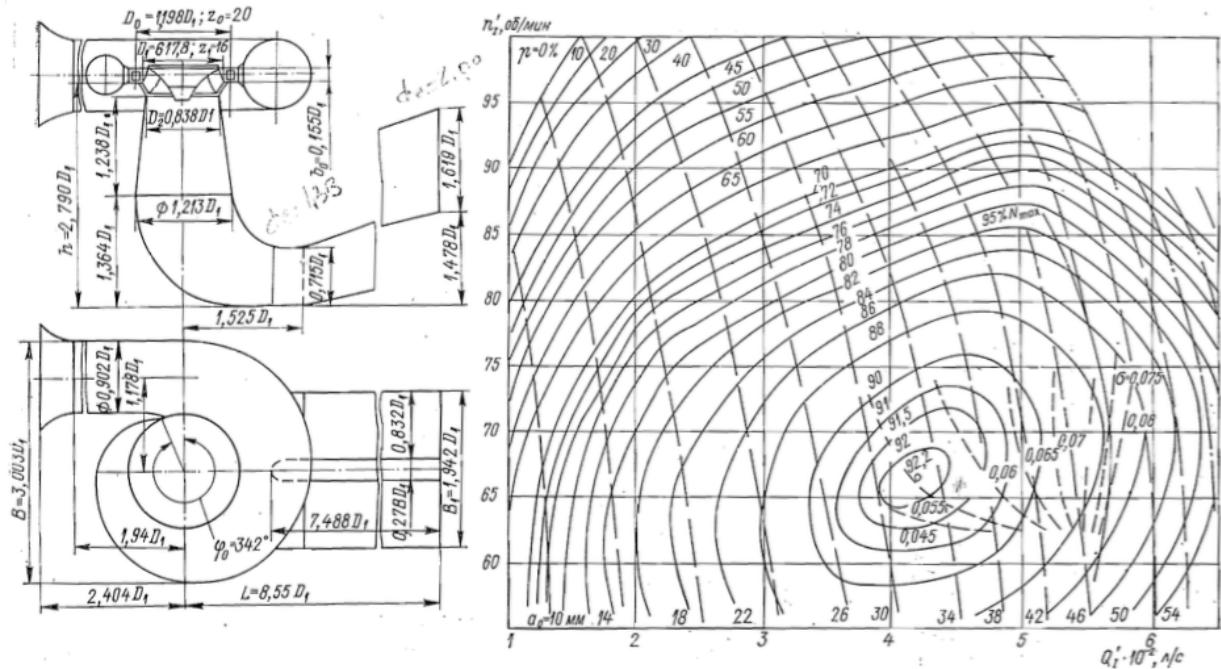


Рис. 3: Главная универсальная характеристика турбины РО230 [6].

и частота вращения к турбине-эталону:

$$\begin{aligned} Q'_I(t) &= \frac{1000Q(t)}{D_{\text{runner}}^2 \sqrt{H(t)}}, & n'_I(t) &= \frac{n(t)D_{\text{runner}}}{\sqrt{H(t)}}, \\ Q(t) &= \frac{Q'_I(t)D_{\text{runner}}^2 \sqrt{H(t)}}{1000}, & H(t) &= \left( \frac{n(t)D_{\text{runner}}}{n'_I(t)} \right)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $n(t) = 60 \frac{\omega(t)}{2\pi}$  — скорость вращения рабочего колеса (об/мин),  $D_{\text{runner}}$  — диаметр рабочего колеса,  $Q'_I(t)$  — расход в (л/с).

В конце 80-х годов XX века на Саяно-Шушенской ГЭС были проведены натурные испытания десятого агрегата. По результатам этих испытаний главным инженером В.К. Глухих был утвержден технический отчет, в котором были определены характерные зоны работы гидроагрегатов Саяно-Шушенской ГЭС (рис. 4). Разрешается работа турбин в зонах I и III. Работа турбин в зоне II не рекомендуется, так как работа турбины сопровождается сильными пульсациями, а в зоне IV — не допускается [7]. В зоне II наблю-

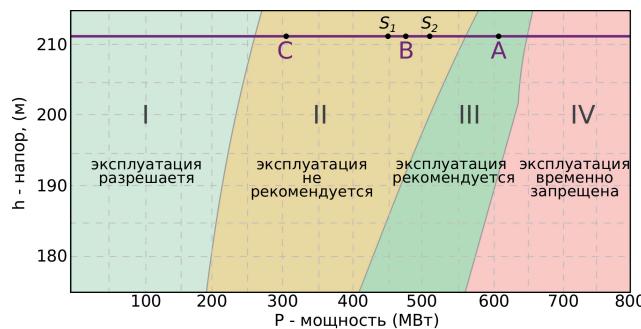
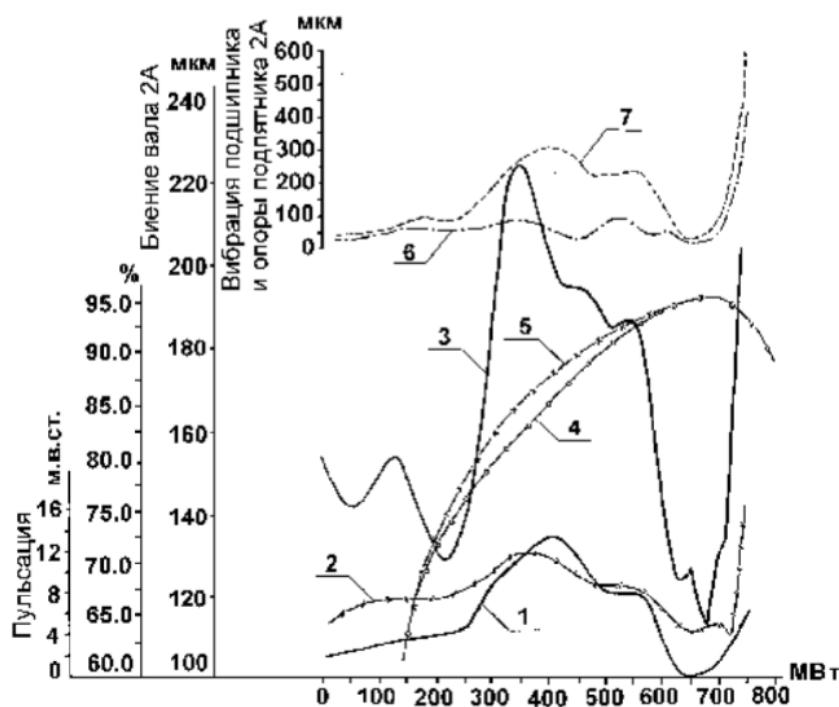


Рис. 4: Характерные зоны работы гидроагрегатов Саяно-Шушенской ГЭС.

дался мощный кавитационный жгут с определяющей частотой пульсаций в отсасывающей трубе  $0.4 - 0.8 \text{ Гц}$  (см. рис. 5). Размах пульсаций в отсасывающей трубе составлял  $15 - 22 \text{ м}$  водяного столба, а под крышкой -  $36 \text{ м}$ . Для моделирования пульсации давления в отсасывающей трубе и под крышкой турбины будем добавлять к напору  $H(t)$  величину  $H_{\text{osc}}(G) \sin(\omega_{\text{osc}} t)$ , где  $\omega_{\text{osc}}(t) = 0.4\omega(t)$ , а амплитуда  $H_{\text{osc}}(G)$  определяется согласно рис. 6.

## 2.2 Дифференциальные уравнения синхронного генератора

На Саяно-Шушенской ГЭС, как и на большинстве гидроэлектростанций, применяются генераторы вертикального типа (по направлению оси вращения). На гидроэлектростанциях высокой мощности в качестве генератора используются явнополюсные синхронные электрические машины (см. схематичное изображение на рис. 7). Генератор состоит из неподвижного статора (якорь), и вращающегося ротора (индуктор). На роторе расположены короткозамкнутые демпферные обмотки и обмотки возбуждения. Демпферные обмотки призваны гасить колебания в переходных процессах. Через обмотки возбуждения протекает постоянный ток (в случае стационарного режима), регулируемый системой автоматического регулирования возбуждением (АРВ). На статоре



**Рис. 3.28 Механические характеристики, полученные при испытаниях агрегата № 10, и зависимость условного коэффициента полезного действия турбины от мощности**

1 – пульсация в отсасывающей трубе; 2 – пульсация в спиральной камере; 3 – бение вала;  
4 – натурный КПД турбины; 5 – модельный КПД турбины; 6 – вертикальная вибрация подшипника;  
7 – вертикальная вибрация опоры под пятника

Рис. 5: Основная частота пульсаций давления в проточной части 1.39-1.45 Гц [7].

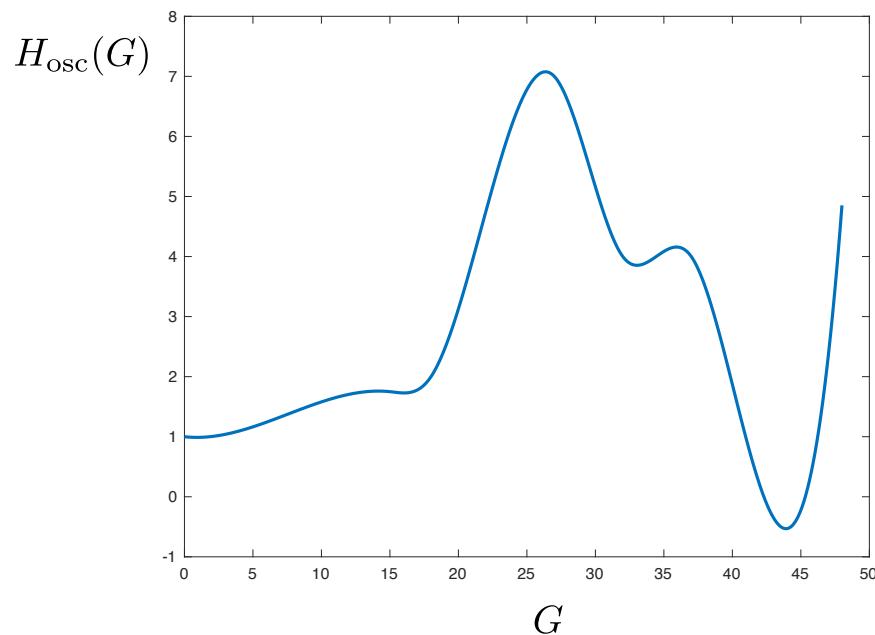


Рис. 6: Зависимость амплитуды колебаний от открытия НА модельной турбины.

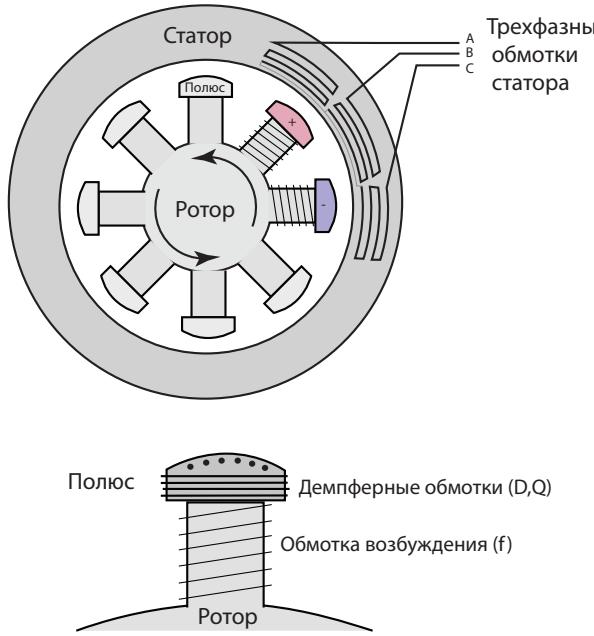


Рис. 7: Схема основных обмоток генератора.

расположены трехфазные обмотки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , соединенные по схеме  $Y$ . Турбина передает вращающий момент на ротор, вращение которого создает потокосцепление через обмотки статора.

Уравнения генератора в именованных единицах имеют вид (см., например [8]):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Psi_d &= -\omega_{er} \Psi_q - I_d R_s - V_d; \quad \Psi_d = L_d I_d + M_{ad}(I_r + I_{rd}), \\
 \frac{d}{dt} \Psi_q &= \omega_{er} \Psi_d - I_q R_s - V_q; \quad \Psi_q = L_q I_q + M_{aq}(I_{rq}), \\
 \frac{d}{dt} \Psi_r &= -I_r R_r + V_r; \quad \Psi_r = \frac{3}{2} M_{ad} I_d + L_r I_r + M_{ad} I_{rd}, \\
 \frac{d}{dt} \Psi_{rd} &= -I_{rd} R_{rd}; \quad \Psi_{rd} = \frac{3}{2} M_{ad} I_d + L_{rd} I_{rd} + M_{ad}(I_r + I_{rd}), \\
 \frac{d}{dt} \Psi_{rq} &= -I_{rq} R_{rq}; \quad \Psi_Q = \frac{3}{2} M_{aq} I_q + L_{rq} I_{rq} + M_{aq} I_{rq}, \\
 T_{gen} &= -\frac{3}{2} p (\Psi_d I_q - \Psi_q I_d); \\
 \frac{d\theta_{er}}{dt} &= \omega_{er}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь  $\Psi_d$ ,  $\Psi_q$ ,  $\Psi_r$ ,  $\Psi_{rd}$ ,  $\Psi_{rq}$  — постоянные потокосцепления;  $I_d(t)$ ,  $I_q(t)$ ,  $I_{rd}(t)$ ,  $I_{rq}(t)$ ,  $I_r(t)$  — токи через обмотки статора и ротора;  $R_s$ ,  $R_d$ ,  $R_{rq}$ ,  $R_{rd}$  — посто-

янные сопротивления обмоток;  $L_d, L_q$  — постоянные индуктивности;  $M_{ad}, M_{aq}$  — постоянные взаимные индуктивности;  $p$  — число пар полюсов. Для записи уравнений (8) в относительных единицах будем рассматривать следующие базисные величины:

- $U_{\text{nom}} = 15.75 \cdot 10^3$  — действующее (среднеквадратичное, RMS Voltage) напряжение статора (В);
- $V_{\text{base}} = \sqrt{2}U_{\text{nom}}$  — базисное напряжение (В), номинальное пиковое фазное напряжение статора (В);
- $S_{\text{base}}$  — номинальная полная мощность (ВА) (nominal apparent power);
- $I_{\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{\frac{3}{2}V_{\text{base}}}$  — базисное значение силы тока (А), номинальная амплитуда фазного тока на статоре;
- $\Omega_{\text{base}} = 2\pi \cdot 50 \approx 314.159$  — базисное значение угловой скорости (эл. рад./с);
- $z_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base}}}{I_{\text{base}}} = \frac{\frac{3}{2}V_{\text{base}}^2}{S_{\text{base}}}$  — базисное значение сопротивления (Ом);
- $L_{\text{base}} = \frac{z_{\text{base}}}{\Omega_{\text{base}}}$  — базисное значение индуктивности (Гн);
- $\Psi_{\text{base}} = L_{\text{base}}I_{\text{base}}$  — базисное значение врачающего момента сил (нМ);
- $I_r \text{ base} = \frac{U_n}{\Omega_{\text{base}}M_{ad}}$  — базисное значение тока возбуждения (А);
- $I_{rd} \text{ base} = I_r \text{ base}, I_{rq} \text{ base} = I_r \text{ base} \frac{M_{ad}}{M_{aq}}$  — базисные значения токов демпферных контуров (А);

Далее величины в относительных единицах будем обозначать прописными

буквами. Тогда, согласно [8] уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\psi_d &= \Omega_{\text{base}}(-\omega_{\text{pu}}\psi_q - ri_d - v_d), \\
 \frac{d}{dt}\psi_q &= \Omega_{\text{base}}(\omega_{\text{pu}}\psi_d - ri_q - v_q), \\
 \frac{d}{dt}\psi_r &= \frac{1}{T_r}(e_r - e_q), \\
 \frac{d}{dt}\psi_{rd} &= -\frac{1}{T_{rd}}e_{rq}, \\
 \frac{d}{dt}\psi_{rq} &= \frac{1}{T_{rq}}e_{rd}, \\
 \psi_d &= x_d i_d + e_q + e_{rq}, \\
 \psi_q &= x_q i_q - e_{rd}, \\
 \psi_r &= \frac{x_{ad}^2}{x_r} i_d + e_q + \frac{x_{ad}}{x_r} e_{rq}, \\
 \psi_{rd} &= \frac{x_{ad}^2}{x_{rd}} i_d + e_{rq} + \frac{x_{ad}}{x_{rd}} e_q, \\
 \psi_{rq} &= \frac{x_{aq}^2}{x_{rq}} i_q - e_{rd}, \\
 t_{\text{gen}} &= \psi_d i_q - \psi_q i_d,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где следующие величины не зависят от времени:

- $x_d = x_{ad} + x_s$ ,  $x_q = x_{aq} + x_s$  — синхронные индуктивные сопротивления машины по продольной и поперечной осям;
- $x_{ad}$ ,  $x_{aq}$  — реактивные сопротивления реакции статора по продольной и поперечной осям;
- $x_s$  — реактивное сопротивление рассеяния статора;
- $x_r = x_{ad} + x_{sr}$ ,  $x_{rd} = x_{ad} + x_{srd}$ ,  $x_{rq} = x_{aq} + x_{srq}$  — реактивные сопротивления обмотки возбуждения, продольного и поперечного демпферных контуров;
- $x_{sr}$ ,  $x_{srd}$ ,  $x_{srq}$  — реактивные сопротивления рассеяния обмотки возбуждения, продольного и поперечного демпферных контуров;
- $e_q = \frac{I_r}{I_{r \text{ base}}}$ ,  $e_{rq} = \frac{I_{rq}}{I_{rd \text{ base}}}$ ,  $e_{rd} = -\frac{I_{rq}}{I_{rq \text{ base}}}$  — ЭДС, индуцируемые в статоре магнитным полем токов роторных контуров при синхронной частоте вращения ротора (c);

- $T_r = \frac{L_r}{r_r} = \frac{x_r}{\omega_s r_r}$  — постоянная времени обмотки возбуждения при прочих разомкнутых контурах (с);
- $T_{rd}, T_{rq}$  — постоянные времени демпферных контуров при прочих разомкнутых контурах (с).

### 2.3 Дифференциальные уравнения регулятора скорости вращения

Изменение открытия направляющего аппарата производятся *гидравлическими сервомоторами*, действие которых обеспечивается подачей масла под высоким давлением. Этот механизм должен обеспечить строго одинаковую установку всех лопаток при любых открытиях (обеспечивается кольцом) и иметь достаточную мощность для того, чтобы он был способен преодолеть усилия, вызываемые давлением воды на направляющие лопатки и силами трения на звеньях механизма привода [5].

Сервомотор управляет золотником, при перемещении которого масло под давлением поступает в одну из полостей сервомотора. Под действием разности давлений в полостях сервомотора его поршень будет двигаться, пока золотник открыт. Таким образом, гидравлический сервомотор без учета насыщения представляет собой интегрирующее звено с передаточной функцией [9, стр. 138]

$$W_{servo}(s) = \frac{k_{servo}}{s}, \quad (10)$$

где  $k_{servo}$  — коэффициент передачи сервомотора. Так как ход сервомоторов ограничен, то уравнение сервомотора с учетом насыщения имеет вид

$$\dot{x} = k_{servo} f_{sat}(y, x, x_{min}, x_{max}),$$

$$f_{sat}(y, x, x_{min}, x_{max}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq x_{max}, y \geq 0; \\ 0, & \text{если } x \leq x_{min}, y < 0; \\ y, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (11)$$

где  $y$  — перемещение золотника;  $x_{min}, x_{max}$  — крайние положения сервомотора.

Регулятор частоты вращения турбин на СШ ГЭС до аварии в 2009г. был реализован по схеме с индивидуальными сервомоторами, см. рис. 8. Так как индивидуальные сервомоторы синхронизированы тягами, в математической модели будем рассматривать их как один сервомотор, см. рис. 9. Регулятор

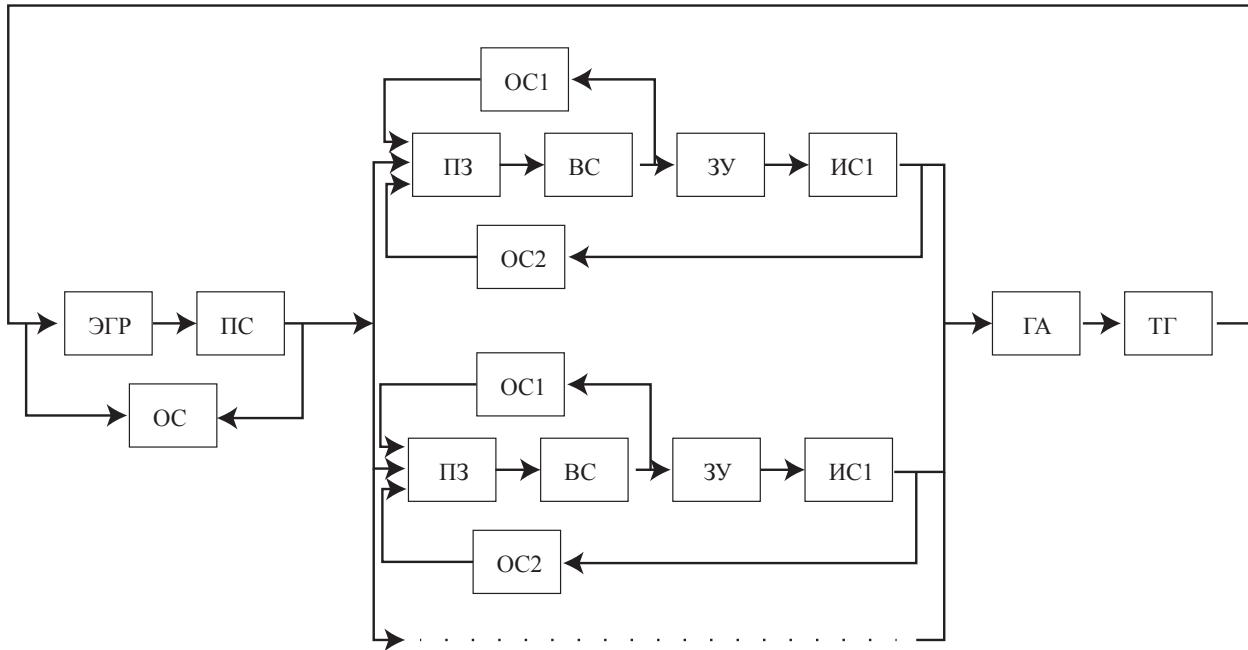


Рис. 8: Схема регулятора согласно [6]. ЭКГ — электрогидравлический регулятор, ПС — промежуточный сервомотор, ОС — обратная связь, ПЗ — побудительный золотник, ВС — вспомогательный сервомотор, ЗУ — золотник управления, ИС — исполнительный сервомотор, ГА — гидроагрегат, ТГ — тахогенератор (сравнивает скорость вращения с эталонной).

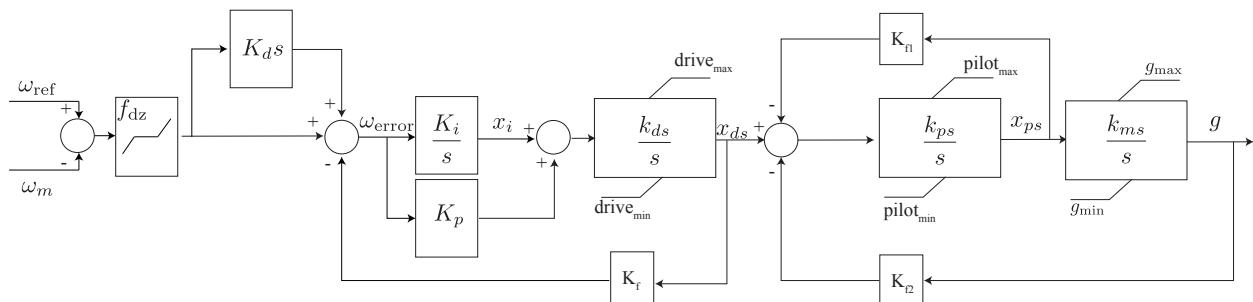


Рис. 9: Математическая модель регулятора частоты вращения.  $\text{drive}_{\min}$ ,  $\text{drive}_{\max}$ ,  $\text{pilot}_{\min}$ ,  $\text{pilot}_{\max}$ ,  $g_{\min}$ ,  $g_{\max}$  — крайние положения побудительного, вспомогательного и исполнительного сервомоторов соответственно;  $\omega_{\text{ref}}$  — номинальная угловая скорость вращения;  $f_{dz}$  — мертвая зона регулятора;  $K_i$ ,  $K_p$ ,  $K_d$  — параметры ПИД регулятора;  $K_f$ ,  $K_{f2}$  — коэффициенты жесткой обратной связи;  $k_{ps}$  — коэффициент усиления сервомотора.

обладает мертвой зоной (зона нечувствительности к изменению частоты). Ти-

личные значения мертвых зон  $\omega_{dz} \approx 0.005 - 0.0025\%$  [9, 260]:

$$f_{dz}(\omega) = \begin{cases} \omega - \omega_{dz}/2, & \text{for } \omega < -\omega_{dz}/2, \\ \omega + \omega_{dz}/2, & \text{for } \omega > \omega_{dz}/2, \\ 0, & \text{for } |\omega| < \omega_{dz}/2. \end{cases} \quad (12)$$

Функция  $f_{dz}$  не дифференцируема в двух точках (выход блока с передаточной функцией  $K_{ds}$  — разрывная функция), поэтому для описания работы регулятора необходимо использовать аппарат дифференциальных уравнений с разрывной правой частью (дифференциальные включения). Кроме этого, система с мертвым зоной регулятора может обладать не единственным состоянием равновесия, что дополнительно усложняет анализ и моделирование таких систем. Так как  $\omega_{dz}$  как правило мало, далее будем рассматривать упрощенную систему без мертвых зон, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{error}} &= x_d + K_d \dot{\omega} - K_f x_{\text{ds}}, \\ \dot{x}_i &= K_i \omega_{\text{error}}, \\ \dot{x}_{\text{ds}} &= K_{\text{ds}} f_{\text{sat}}(x_i + K_p \omega_{\text{error}}, x_{\text{ds}}, \text{drive}_{\min}, \text{drive}_{\max}), \\ \dot{x}_{\text{ps}} &= k_{\text{ps}} f_{\text{sat}}(x_{\text{ds}} - K_{\text{f1}} x_{\text{ps}} - K_{\text{f2}} g, x_{\text{ps}}, \text{pilot}_{\min}, \text{pilot}_{\max})), \\ \dot{g} &= k_{\text{ms}} f_{\text{sat}}(x_{\text{ps}}, g, \text{drive}_{\min}, \text{drive}_{\max}). \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.4 Вывод математической модели системы управления обмоткой возбуждения

Системы автоматического регулирования возбуждения (APB) призваны поддерживать постоянное напряжение на обмотке статора (выводы генератора), демпфировать колебания ротора, реагировать на изменение нагрузки и повышать динамическую устойчивость генератора. Для математического описания систем возбуждения в инженерной практике принято использовать упрощенные модели. Рассмотрим далее одну из стандартных системы регулирования возбуждения «AC4A», (см. «IEEE Std 421.5 TM -2005, Revision of IEEE Std 421.5-1992», рис. 10). Уравнения системы возбуждения на рис. 10 имеют

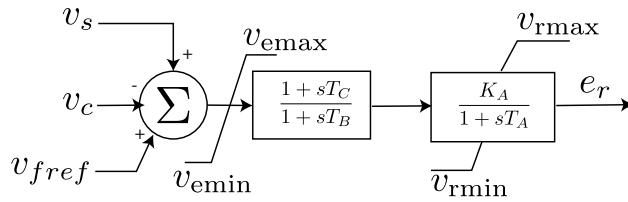


Рис. 10: Модель системы возбуждения AC4A, IEEE Std 421.5 TM -2005 (Revision of IEEE Std 421.5-1992) в относительных единицах.  $v_{emin}$ ,  $v_{emax}$  — верхняя и нижняя границы напряжения токов возбуждения;  $v_{fref} = 1$  — референсное (контрольное) напряжение;  $v_c$  — напряжение якоря;  $e_r$  — напряжение возбудителя;  $v_{rmin}$ ,  $v_{rmax}$  — ограничения напряжений;  $v_s$  — сигнал управления от стабилизатора (необходим для устранения статической ошибки);  $T_C$ ,  $T_B$ ,  $T_A$  — параметры регулятора.

вид

$$\begin{aligned}
 v_c(t) &= \sqrt{v_q(t)^2 + v_d(t)^2}, \\
 v_{\text{error}}(t) &= \text{sat}_{v_{emin}}^{v_{emax}}(v_{fref} - v_c(t) + v_s), \\
 \dot{e}_1 &= -\frac{1}{T_B}e_1 + \frac{1}{T_B}v_{\text{error}}, \\
 \dot{e}_2 &= -\frac{1}{T_A}e_2 + K_A \frac{1}{T_A} \left( (1 - \frac{T_C}{T_B})e_1 + \frac{T_C}{T_B}v_{\text{error}} \right), \\
 e_r &= \text{sat}_{v_{rmin}}^{v_{rmax}}(e_2),
 \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\text{sat}_a^b(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x \leq a; \\ x, & \text{если } a < x < b; \\ b, & \text{если } x \geq b. \end{cases} \tag{15}$$

## 2.5 Уравнения нагрузки

Термин «нагрузка» может быть определен как устройство, подключенное к энергосистеме (шине), которая потребляет реактивную или активную мощность [10]. При моделировании нагрузки, в отличии от моделирования генераторов, математическое описание каждого конкретного типа нагрузки, например лампы, нагревателя или холодильника, может быть достаточно простым. Однако, из-за большого количества разных потребителей и непредсказуемой природы их включения в сеть, полная модель становится очень сложной. Так некоторые модели потребления зависят от погоды, стиля жизни потребителей, времени суток, географии и многих других факторов [11]. Даже если бы состав нагрузки был точно известен, было бы нецелесообразно моделиро-

вать каждый отдельный компонент нагрузки. Для решения этой проблемы часто применяют упрощенные модели статической и динамической нагрузки [12, 13]. Статическая нагрузка описывает зависимость активной и реактивной мощности от напряжения и частоты

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 \left( \frac{V_{\text{ampl}}(t)}{V_{\text{base}}} \right)^a (1 + D_{pf} \Delta f(t)), \\ Q(t) &= Q_0 \left( \frac{V_{\text{ampl}}(t)}{V_{\text{base}}} \right)^b (1 + D_{qf} \Delta f(t)), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $a$  принимает значения от 0 до 2,  $b$  выбирается в диапазоне от 0 до 3,  $P_0$  и  $Q_0$  определяют начальные значения мощностей,  $\frac{V(t)}{V_0} = \sqrt{v_d^2(t) + v_q^2(t)}$  — напряжение,  $\Delta f(t)$  — изменение частоты, а  $D_{pf}$  и  $D_{qf}$  определяют чувствительность к изменению частоты. Далее для простоты будем полагать  $D_{pf} = D_{qf} = 0$ . При  $a = b = 0$  получим модель с постоянным значением мощности (MVA model),  $a = b = 2$  соответствует модели нагрузки постоянного импеданса, а  $a = b = 1$  — модели нагрузки постоянного тока. В относительных единицах имеем

- $a = b = 0$ , постоянная мощность (constant MVA model),

$$\begin{aligned} v_d(t) &= \frac{i_d(t)p_{\text{active}}(t) - i_q(t)q_{\text{reactive}}(t)}{i_d^2(t) + i_q^2(t)}, \\ v_q(t) &= \frac{i_d(t)p_{\text{active}}(t) - i_q(t)q_{\text{reactive}}(t)}{i_d^2(t) + i_q^2(t)}, \end{aligned} \quad (17)$$

- $a = b = 2$ , постоянный импеданс (constant impedance model),

$$\begin{aligned} v_d(t) &= \frac{i_d(t)p_{\text{active}}(t) - i_q(t)q_{\text{reactive}}(t)}{p_{\text{active}}^2(t) + q_{\text{reactive}}^2}, \\ v_q(t) &= \frac{i_q(t)p_{\text{active}}(t) + i_d(t)q_{\text{reactive}}(t)}{p_{\text{active}}^2(t) + q_{\text{reactive}}^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

- Также широко используется модель  $a = 1, b = 2$

$$\begin{aligned} v_d(t) &= \\ &- \frac{i_d(t)^2 i_q(t) - i_q(t) p_{\text{active}}^2(t) + i_q^3(t) \pm i_d(t) p_{\text{active}}(t) (i_d^2(t) + i_q^2(t) - p_{\text{active}}^2(t))^{1/2}}{q_{\text{reactive}}(t) (i_d^2(t) + i_q^2(t))} \\ v_q(t) &= \\ &\frac{i_d(t) i_q^2(t) - i_d(t) p_{\text{active}}^2(t) + i_d^3(t) \pm i_q(t) p_{\text{active}}(t) (i_d^2(t) + i_q^2(t) - p_{\text{active}}^2(t))^{1/2}}{q_{\text{reactive}}(t) (i_d^2(t) + i_q^2(t))}. \end{aligned} \quad (19)$$

Динамическая нагрузка предполагает зависимость мощности от времени. Также нагрузка может представлять из себя комбинацию статической нагрузки постоянной мощности и модели электрической машины, выполняющей некоторую работу. Однако, такие модели сильно усложняют анализ и увеличивают время моделирования, поэтому применяются только на финальных стадиях проектирования систем.

Объединяя (5), (9), (13), (14) получим систему уравнений описывавшую замкнутую динамику гидроагрегата с учетом модели нагрузки (17)

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \left( \rho\eta(q, g, \omega) a_g T_{\text{tbase}} \left( \frac{q^2}{g^2} + h_{\text{osc}}(g) \sin(0.4\omega t) \right) \frac{1}{\omega} - (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \frac{S_{\text{base}}}{\Omega_{\text{base}}} \right), \\
 \dot{q} &= \frac{1}{T_w} \left( H_{st} - C_{\text{loss}} q^2 - \left( \frac{q^2}{g^2} + h_{\text{osc}}(g) \sin(0.4\omega t) \right) \right), \\
 \dot{x}_i &= K_i \omega_{\text{error}}, \\
 \dot{x}_{\text{ds}} &= K_{\text{ds}} f_{\text{sat}}(x_i + K_p \omega_{\text{error}}, x_{\text{ds}}, \text{drive}_{\min}, \text{drive}_{\max}), \\
 \dot{x}_{\text{ps}} &= k_{\text{ps}} f_{\text{sat}}(x_{\text{ds}} - K_{\text{f1}} x_{\text{ps}} - K_{\text{f2}} g, x_{\text{ps}}, \text{pilot}_{\min}, \text{pilot}_{\max})), \\
 \dot{g} &= k_{\text{ms}} f_{\text{sat}}(x_{\text{ps}}, g, \text{drive}_{\min}, \text{drive}_{\max}), \\
 \dot{\psi}_d &= \Omega_{\text{base}} \left( -\frac{\omega}{\Omega_{\text{base}}} \psi_q - r i_d - v_d \right), \\
 \dot{\psi}_q &= \Omega_{\text{base}} \left( \frac{\omega}{\Omega_{\text{base}}} \psi_d - r i_q - v_q \right), \\
 \dot{\psi}_r &= \frac{1}{T_r} (e_r - e_q), \quad \dot{\psi}_{rd} = -\frac{1}{T_{rd}} e_{rq}, \quad \dot{\psi}_{rq} = \frac{1}{T_{rq}} e_{rd}, \\
 \dot{e}_1 &= -\frac{1}{T_B} e_1 + \frac{1}{T_B} v_{\text{error}}, \\
 \dot{e}_2 &= -\frac{1}{T_A} e_2 + K_A \frac{1}{T_A} \left( (1 - \frac{T_C}{T_B}) e_1 + \frac{T_C}{T_B} v_{\text{error}} \right),
 \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 \omega_{\text{error}} &= x_d + K_d \dot{\omega} - K_f x_{\text{ds}}, \\
 \psi_d(t) &= x_d i_d(t) + e_q(t) + e_{rq}(t), \\
 \psi_q(t) &= x_q i_q(t) - e_{rd}(t), \\
 \psi_r(t) &= \frac{x_{ad}^2}{x_r} i_d(t) + e_q(t) + \frac{x_{ad}}{x_r} e_{rq}(t), \\
 \psi_{rd}(t) &= \frac{x_{ad}^2}{x_{rd}} i_d(t) + e_{rq}(t) + \frac{x_{ad}}{x_{rd}} e_q(t), \\
 \psi_{rq}(t) &= \frac{x_{aq}^2}{x_{rq}} i_q(t) - e_{rd}(t), \\
 v_d(t) &= \frac{i_d(t)p_{\text{active}}(t) - i_q(t)q_{\text{reactive}}(t)}{p_{\text{active}}^2(t) + q_{\text{reactive}}^2(t)}, \\
 v_q(t) &= \frac{i_q(t)p_{\text{active}}(t) + i_d(t)q_{\text{reactive}}(t)}{p_{\text{active}}^2(t) + q_{\text{reactive}}^2(t)}, \\
 v_c(t) &= \sqrt{v_q(t)^2 + v_d(t)^2}, \\
 \omega_{\text{error}}(t) &= \omega_{\text{ref}} - \omega(t) + K_d \dot{\omega}(t) - K_f g(t), \\
 e_r(t) &= \text{sat}_{v_{\text{rmin}}}^{v_{\text{rmax}}}(e_2(t)), \\
 \alpha &= \frac{p_{\text{active}}(t)}{s_{\text{full}}^2(t)}, \quad \beta = \frac{q_{\text{reactive}}(t)}{s_{\text{full}}^2(t)}. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Здесь

- $T_{\text{tbase}} = \frac{Q_{\text{base}} H_{\text{base}}}{\Omega_{\text{base}}}$ ,  $h_{\text{osc}}(g) = \frac{H_{\text{osc}}(g G_{\text{base}})}{H_{\text{base}}}$ ;
- $J$  — момент инерции ротора, турбины и вала;
- $s_{\text{full}}^2 = p_{\text{active}}^2 + q_{\text{reactive}}^2$  — квадрат полной мощности;
- $\omega$  рад/с — угловая скорость вращения турбины;
- $q$  — расход воды;
- $x_i$  — ошибка накопленная интегратором регулятора частоты;
- $x_{\text{ps}}, x_{\text{ds}}$  — положения поршней вспомогательного и побудительного сервомоторов;
- $g$  — открытие направляющего аппарата;
- $\psi_{r,q,rd,rq,q,d}$  — потокосцепления;

- $i_d, i_q$  — токи статора;
- $x_e$  — ошибка накопленная интегратором регулятора возбуждения;
- $e_{rq,rd,q}$  — напряжения на роторе;
- $e_r$  — напряжение обмотки возбуждения;
- $e_{1,2}$  — переменные состояния системы управления возбуждением.

## 2.6 Рабочий режим

Так как система (20) является неавтономной из-за наличия вихревого жгута, то для определения рабочего режима будем рассматривать упрощенную систему (20) без учета мертвых зоны регулятора ( $f_{dz}(\omega) = \omega$ ) и без колебаний вызванных вихревым жгутом ( $h_{osc}(g) \equiv 0$ ). Такому режиму будет соответствовать состояние равновесия системы (20) при постоянных активной и реактивной нагрузках  $p_{active}$  и  $q_{reactive}$ . При правильной настройке регуляторов частоты вращения и возбуждения состояния равновесия упрощенной системы для всех допустимых нагрузок должны быть устойчивыми, а соответствующие решения исходной системы колебаться в их малой окрестности. Считая что нагрузка постоянна и не больше максимальной мощности агрегата (а значит регулятор не на насыщении), состояния равновесия упрощенной

системы описываются уравнениями

$$\begin{aligned}
 0 &= \rho a_g \eta(q, g, \omega) \frac{Q_{\text{base}} H_{\text{base}}}{\Omega_{\text{base}}} \frac{q^3}{g^2 \omega} - (\psi_d i_q - \psi_q i_d) \frac{S_{\text{base}}}{\Omega_{\text{base}}}, \\
 0 &= H_{st} - C_{\text{loss}} q^2 - \left( \frac{q}{g} \right)^2, \\
 -1 &\leq g \leq 1, \\
 \omega_{\text{error}} &= 0, \\
 x_i &= 0, \\
 x_{\text{ds}} &= K_{\text{f2}} g, \quad -1 \leq x_{\text{ds}} \leq 1, \\
 x_{\text{ps}} &= 0, \quad -1 \leq x_{\text{ps}} \leq 1, \\
 \psi_q &= \frac{-r i_d - (\alpha i_d - \beta i_q)}{\omega_{\text{pu}}}, \\
 \psi_d &= \frac{r i_q + (\alpha i_q + \beta i_d)}{\omega_{\text{pu}}}, \\
 e_2 &= e_q = e_r, \\
 v_{\text{rmin}} &\leq e_r \leq v_{\text{rmax}}, \\
 e_{rq} &= 0, \quad e_{rd} = 0, \\
 e_1 &= v_{\text{error}}, \quad e_2 = K_A v_{\text{error}},
 \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
 \omega_{\text{pu}} &= \frac{\omega}{\Omega_{\text{base}}}, \\
 \psi_d &= x_d i_d + e_q, \\
 \psi_q &= x_q i_q, \\
 \psi_r &= \frac{x_{ad}^2}{x_r} i_d + e_q, \\
 \psi_{rd} &= \frac{x_{ad}^2}{x_{rd}} i_d + \frac{x_{ad}}{x_{rd}} e_q, \\
 \psi_{rq} &= \frac{x_{aq}^2}{x_{rq}} i_q, \\
 v_{\text{error}} &= 1 - \sqrt{v_q^2 + v_d^2} + v_s, \\
 \omega_{\text{error}} &= \omega_{\text{ref}} - \omega + K_d \dot{\omega} - K_f g, \\
 \alpha &= \frac{p_{\text{active}}}{s_{\text{full}}^2}, \quad \beta = \frac{q_{\text{reactive}}}{s_{\text{full}}^2}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Решение системы нелинейных уравнений (22) и (23) для каждого значения нагрузки определяется численно в пакете MATLAB.

## 2.7 Результаты численного моделирования

Результаты численного моделирования системы (20) представлены на рис. 11–14. В качестве начальных данных при моделировании выбирались значения переменных соответствующих рабочему режиму упрощенной системы (22) и (23) при фиксированной нагрузке. Значение активной и реактивной нагрузки были постоянны при  $t \in [0, 1]$  и  $t \in [5, 30]$ , и менялись линейно при  $t \in [1, 5]$ . При этом реактивная нагрузка выбиралась равной  $q_{\text{reactive}} = p_{\text{active}} \sin(\cos^{-1}(0.9))$ . При увеличении нагрузки с 673МВт до 674МВт наблюдается потеря устойчивости. Здесь при определении устойчивости рабочего режима одно из собственных чисел матрицы Якоби меняет знак вещественной части с отрицательного на положительный, что приводит к потере устойчивости, см. Рис. 15–14. Параметры турбины и схема регулятора частоты вращения выбраны согласно [6]; параметры генератора выбраны согласно [11]; параметры системы возбуждения выбраны согласно его реализации в Matlab Simulink; параметры регулятора частоты вращения выбраны так, чтобы обеспечить устойчивость рабочих режимов для моделируемых нагрузок.  $\rho = 1000$ ;  $D_{\text{penstock}} = 7.5$ ;  $A_{\text{penstock}} = \pi D_{\text{penstock}}^2 / 4$ ;  $L_{\text{full}} = 250$ ;  $a_g = 9.8$ ;  $Z_{\text{forebay}} = 539$ ;  $Z_{\text{tailrace}} = 331$ ;  $F_C = 0.013$ ;  $\epsilon = 10^{-3}$ ;  $C = 0.55$ ;  $p = 21$ ;  $D_{\text{runner}} = 6.77$ ;  $U_{\text{nom}} = 15.75 \cdot 1000$ ;  $r = 0.0034$ ;  $x_s = 0.184$ ;  $x_d = 1.58$ ;  $x_q = 0.97$ ;  $x'_d = 0.295$ ;  $x''_d = 0.43$ ;  $x''_q = 0.31$ ;  $T_r = 8.21$ ;  $T''_d = 0.143$ ;  $T''_q = 0.243$ ;  $x_{ad} = x_d - x_s$ ;  $x_{aq} = x_q - x_s$ ;  $x_r = x_{ad}^2 / (x_d - x'_d)$ ;  $x_{sr} = x_r - x_{ad}$ ;  $x_{rd} = x_{ad} + 1 / (1 / (x''_d - x_s) - 1 / x_{ad} - 1 / x_{sr})$ ;  $x_{rq} = x_{aq} + 1 / (1 / (x''_q - x_s) - 1 / x_{aq})$ ;  $T_{rd} = x_{rd} / (\Omega_{\text{base}} p r_{rd})$ ;  $T_{rq} = x_{rq} / (\Omega_{\text{base}} p r_{rq})$ ;  $K_{\text{ps}} = 1 / (0.76 \cdot 1.3)$ ;  $K_{\text{ms}} = 1 / 0.76$ ;  $K_{\text{ds}} = K_{\text{ps}}$ ;  $K_d = 0$ ;  $K_f = 1.3$ ;  $K_i = 10$ ;  $K_p = 100$ ;  $K_{f1} = K_{f2} = 1$ ;  $\text{pilot}_{\min} = \text{drive}_{\min} = -1$ ;  $\text{pilot}_{\max} = \text{drive}_{\max} = 1$ ;  $T_A = 0.015$ ;  $T_B = 10$ ;  $T_C = 1$ ;  $v_{\min} = -10$ ;  $v_{\max} = 10$ ;  $v_{r\min} = -4.53$ ;  $v_{r\max} = 5.64$ .

## 3 Заключение

В работе [1] удалось найти скрытые колебания в упрощенной системе уравнений, описывающей работу гидроагрегата. Параметры системы, при которых возникали колебания, соответствовали зоне не рекомендованной работы турбины. В данной работе была выведена более полная математическая модель

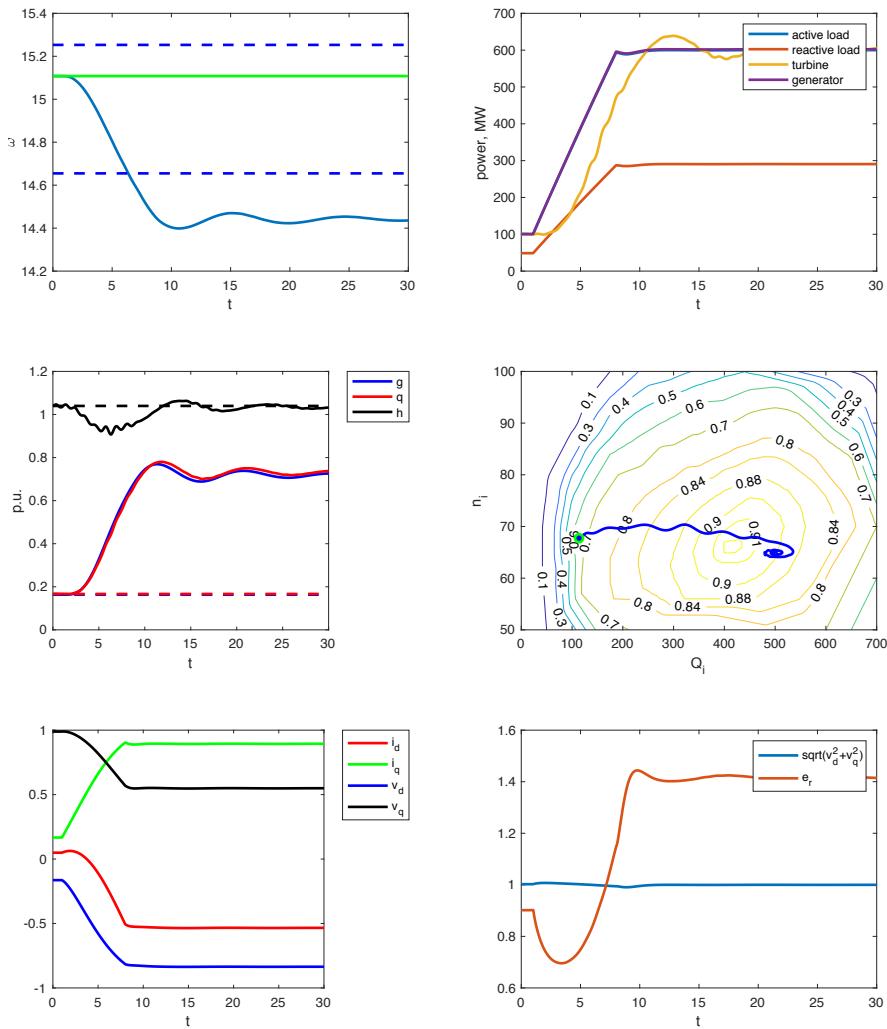


Рис. 11: Увеличение активной нагрузки со 100МВт до 600МВт.

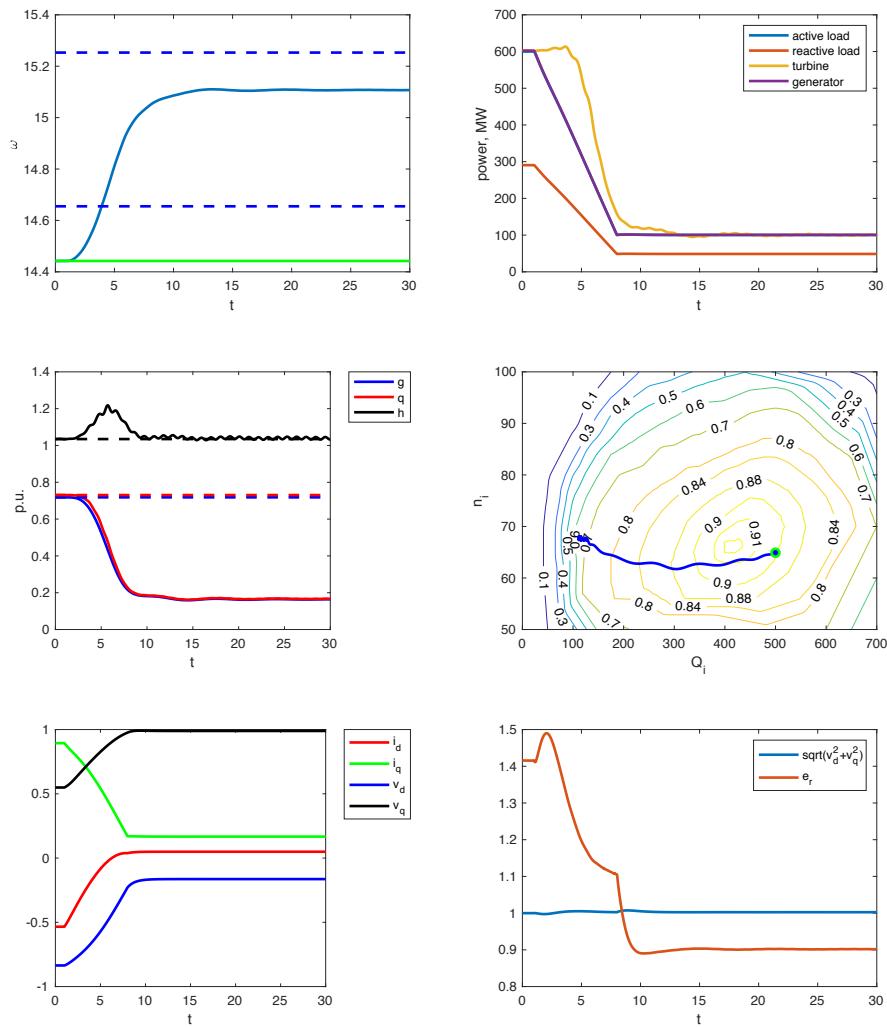


Рис. 12: Уменьшение активной нагрузки с 600МВт до 100МВт.

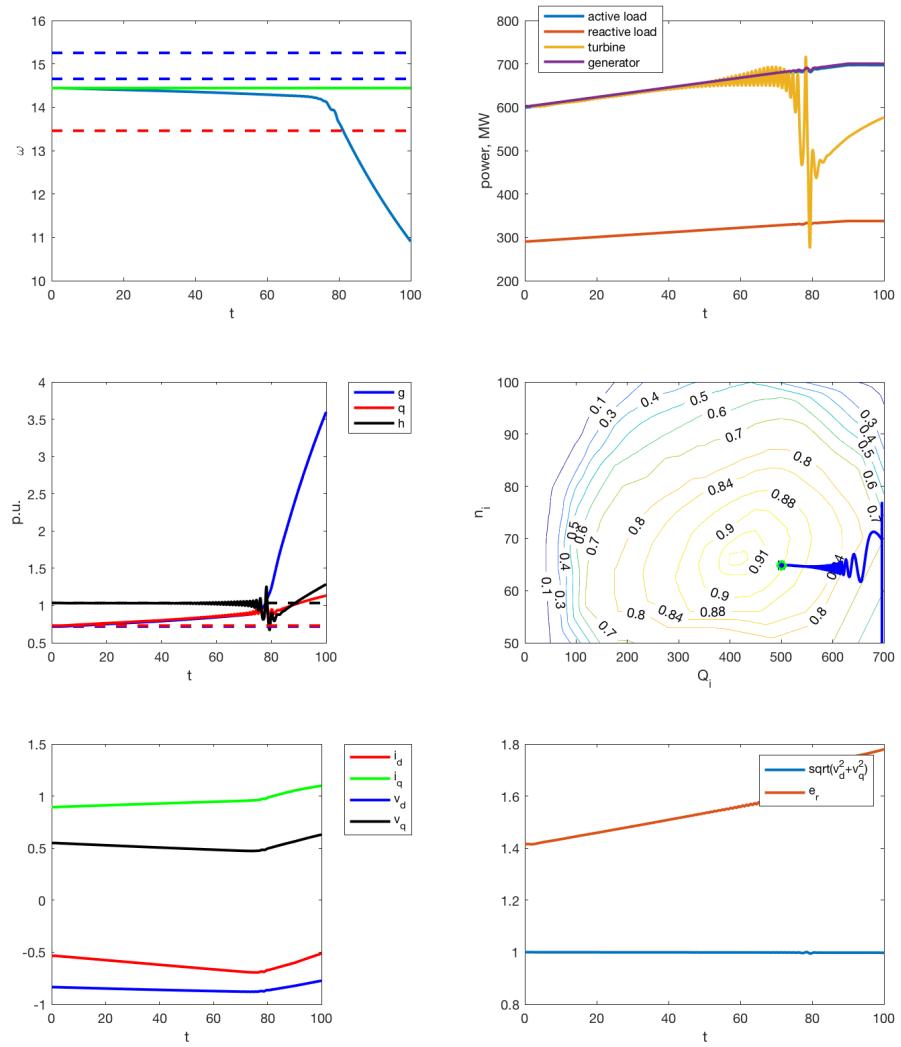


Рис. 13: Увеличения активной нагрузки с 600МВт до 700МВт. Нагрузка меняется линейно при  $t = 1 \dots 90$ .

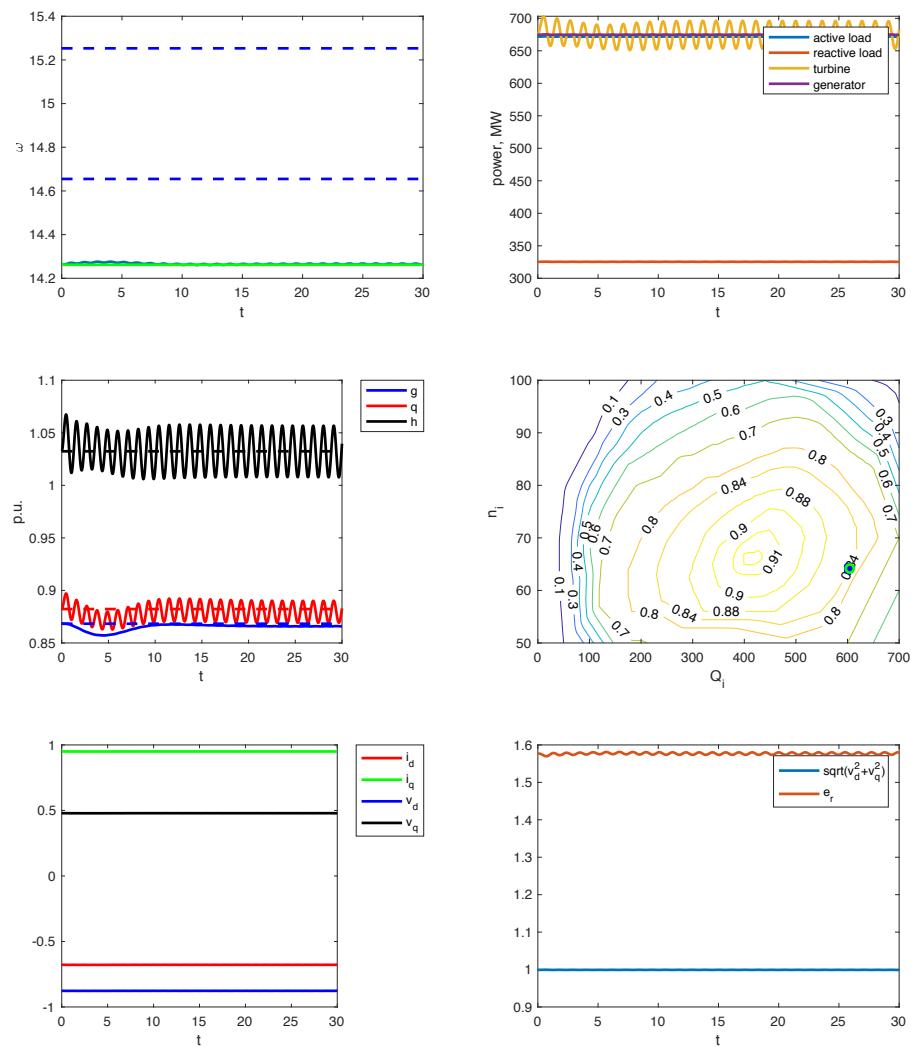


Рис. 14: Постоянная активная нагрузка 673МВт.

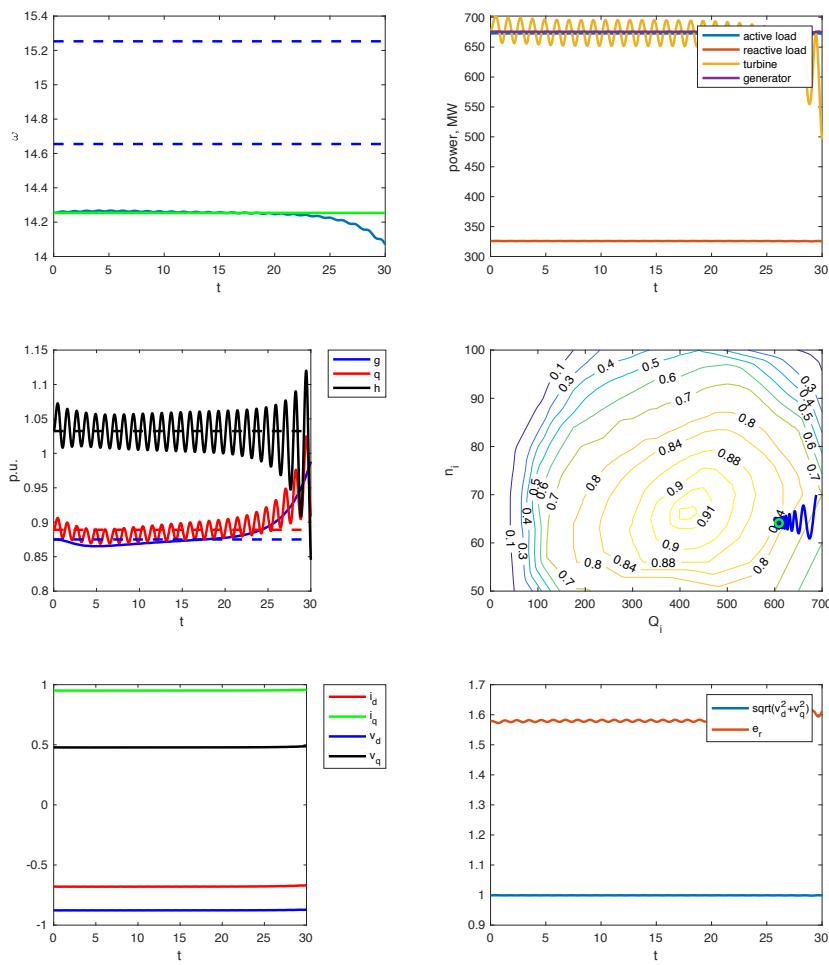


Рис. 15: Постоянная активная нагрузка 674МВт. Потеря устойчивости.

системы, для которой описан рабочий режим и численно изучено поведение системы при различных сценариях изменения нагрузки. Поиск скрытых колебаний в полученной математической модели, соответствующих не рекомендованной зоне работы, является задачей для дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке научного фонда (проект 14-21-00041)

## Список литературы

- [1] Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Соловьева Е.П. Математическое моделирование вибраций в турбогенераторах Саяно-Шушенской ГЭС // Доклады Академии Наук. 2016.
- [2] РусГидро ПАО. Акт технического расследования причин аварии на СШ

ГЭС. 2009.

- [3] Colebrook C. F., Blench T., Chatley H. et al. CORrespondence. Turbulent Flow In Pipes, With Particular Reference To The Transition Region Between The Smooth And Rough Pipe Laws.(includes Plates). // Journal of the Institution of Civil engineers. 1939. Vol. 12, no. 8. P. 393–422.
- [4] Demello F.P., Koessler R.J., Agee J. et al. Hydraulic turbine and turbine control models for system dynamic studies // IEEE Trans. on Power Systems. 1992. Vol. 7, no. 1. P. 167–179.
- [5] Кривченко Г.И. Гидравлические машины: Турины и насосы. Учебник для вузов. М.: Энергия, 1978. 320 с.
- [6] Андреев В.Б., Броновский Т.А., Веремеенко И.С. Справочник по гидротурбинам под общ. ред. Н.Н. Ковалева. Машиностроение, 1984. Р. 496.
- [7] Брызгалов В.И. Из опыта создания и освоения Красноярской и Саяно-Шушенской гидроэлектростанций. Сиб. издат. дом «Суриков» Красноярск, 1999.
- [8] Меркурьев Г.В., Шаргин Ю.М. Устойчивость энергосистем. НОУ Центр подготовки кадров энергетики, 2008. Р. 300.
- [9] Пивоваров В.А. Проектирование и расчет систем регулирования гидротурбин. Ленинград: Машиностроение, 1973. Р. 288.
- [10] Munoz-Hernandez German Ardul, Jones Dewi Ieuan et al. Modelling and controlling hydropower plants. Springer Science & Business Media, 2012. Р. 297.
- [11] Карапетян И.Г., Файбисович Д.Л. Справочник по проектированию электрических сетей. АНAC, 2012. Р. 377.
- [12] Berg G.J. Power-system load representation // Proceedings of the Institution of Electrical Engineers / IET. Vol. 120. 1973. P. 344–348.
- [13] Price W.W., Chiang H.D., Clark H.K. et al. Load representation for dynamic performance analysis // IEEE Transactions on Power Systems. 1993. Vol. 8, no. 2. P. 472–482.