ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

Устойчивость и сходимость монотонных разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени производной и оператором Бесселя

З.В. Бештокова, М.Х. Бештоков
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Аннотация. Изучены краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени производной и оператором Бесселя. Для решения рассматриваемых задач получены априорные оценки в дифференциальной трактовке, из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части. Для численного решения краевых задач построены монотонные разностные схемы с направленными разностями и для них доказываются аналоги априорных оценок, приводятся оценки погрешности в предположений достаточной гладкости решений уравнений. Из полученных априорных оценок в разностной форме следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также в силу линейности разностных задач сходимость со вторым порядком по параметрам сетки. Предложен алгоритм приближенного решения краевой задачи с условием третьего рода, проведены численные расчеты тестового примера, иллюстрирующего полученные в работе теоретические результаты, касающиеся сходимости и порядка аппроксимации разностной схемы.

Ключевые слова: краевые задачи, дробная производная Герасимова-Капуто, априорная оценка, монотонные схемы, интегро-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение дробного порядка.

1 Введение.

Важное теоретическое и практическое значение имеет построение математических моделей, учитывающих фрактальные свойства различных сред и явлении природы, которые описываются с помощью дифференциальных уравнений дробного порядка. В [1]-[5] дан достаточно полный обзор работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. Монография [1] посвящена качественно новым свойствам операторов дробного интегро-дифференцирования и их применению к дифференциальным уравнениям дробного порядка.

В настоящей работе приводится численное исследование решения трехмерного интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени производной в смысле Герасимова-Капуто порядка α

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{0.1}$$

где

$$Lu = \sum_{s=1}^{3} L_s u, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$L_s u = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(k_s(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) + r_s(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_s} + \int_0^t p_s(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau.$$

Переходя к цилиндрической системе координат (r, φ, z) в случае, когда решение $u = u(r)$ не зависит ни от z, ни от φ (имеет место осевая симметрия) (0.1) принимает вид (обозначим $x = r$):

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{r}\Big(rk(r,t)u_r\Big)_r + h(r,t)u_r + \int_0^t p(r,t,\tau)u(r,\tau)d\tau + f(r,t),$$

а в случае сферической симметрии уравнение (0.1) принимает вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{r^2}\Big(r^2k(r,t)u_r\Big)_r + h(r,t)u_r + \int_0^t p(r,t,\tau)u(r,\tau)d\tau + f(r,t).$$

где

$$k(r,t) = k_1(x,t) = k_2(x,t) = k_3(x,t),$$

$$h(r,t) = h_1(x,t) = h_2(x,t) = h_3(x,t), \quad q(r,t) = q_1(x,t) = q_2(x,t) = q_3(x,t)$$

есть условия симметрии на коэффициенты в силу симметрии r относительно переменных x_1, x_2, x_3.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [6] - [10], работы [11]-[13] - для уравнения Аллера дробного порядка, а [14], [15] нелокальным краевым задачам для уравнения псевдопараболического типа с оператором Бесселя.

1. Постановка задачи.

В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени производной в смысле Герасимова-Капуто порядка α

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ 0 < t \leq T, \tag{1.1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m k(x,t)u_x(x,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \tag{1.2}$$

$$u(l,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leq x \leq l, \tag{1.4}$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x,t) \leq c_1,\ |r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), p(x,t,\tau)| \leq c_2, \tag{1.5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau,$ $-$ дробная производная в смысле Герасимова-Капуто порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ [3], $c_i, i = 0,1,2-$ положительные числа, $0 \leq m \leq 2$.

Заметим, что при $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (1.2), равносильному в свою очередь тождеству $k(0,t)u_x(0,t) = 0$ [16], если функции $r(0,t), \rho(0,t), f(0,t)$ конечны.

Предположим, что решение задачи (1.1) $-$ (1.4) существует и обладает нужными по ходу изложения производными, коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать $M_i = const > 0,\ i = 1,2,...,$ зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2 Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1.1) - (1.4) в дифференциальной форме умножим уравнение (1.1) скалярно на $x^m u$:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha} u, x^m u\Big) = \Big(\big(x^m k u_x\big)_x, u\Big) +$$

$$+\Big(r u_x, x^m u\Big) + \Big(\int_0^t p u d\tau, x^m u\Big) + \Big(f, x^m u\Big), \tag{2.1}$$

где $\Big(u, v\Big) = \int_0^l uvdx,\ \Big(u, u\Big) = \|u\|_0^2,$ где $u, v-$ заданные на $[0, l]$ функции.

Преобразуя интегралы, входящие в тождество (2.1), с помощью неравенства Коши с ε, леммы 1 [9], после несложных преобразований с учетом (1.2) из (2.1) получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M_1\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + M_2\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau + M_3\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2. \tag{2.2}$$

Применяя к обеим частям (2.2) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M_1 D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 +$$

$$+M_2 D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau + M_4\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\Big). \tag{2.3}$$

Второе слагаемое в правой части (2.3) оценим так

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^{\tau}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 ds\int_s^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 ds \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2(t-\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \le \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2.$$

Итак, получаем

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau \le \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2. \tag{2.4}$$

С учетом (2.4) из (2.3) находим

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le$$

$$\le M_5 D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + M_4\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\Big). \tag{2.5}$$

С помощью леммы 2 [9] из (2.5) получаем следующую априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leq M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\Big), \qquad (2.6)$$

где $M = const > 0$, зависящая только от входных данных задачи (1.1)-(1.4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.5), тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1.1)-(1.4) справедлива априорная оценка (2.6), из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

3 Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)-(1.4) поставим в соответствие монотонную разностную схему с порядком аппроксимации $O\Big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\Big)$:

$$\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y = \frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\Big) + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{s,i}^j y_i^s \bar{\tau} + \varphi_i^j,\ (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \qquad (3.1)$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{(x,0)}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau}\Big) - \mu,\ t \in \overline{\omega}_\tau,\ x = 0, \qquad (3.2)$$

$$y_N^{(\sigma)} = 0,\ t \in \overline{\omega}_\tau,\ x = l, \qquad (3.3)$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t = 0, \qquad (3.4)$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$– дискретный аналог дробной производной в смысле Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ [10], обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$,

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ..., m,\ m\tau = T\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, ..., N,\ Nh = l\},$$

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},\ a_l^{(\alpha,\sigma)} = \Big(l+\sigma\Big)^{1-\alpha} - \Big(l-1+\sigma\Big)^{1-\alpha},\ l \ge 1, \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big] - \frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big],\ l \ge 1,$$

$$\text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1 \le s \le j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)},\ s = j, \end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0,\ a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}),\ b_i^{\pm j} = \frac{\overline{\varkappa}_i r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j, r_N = r(l,t) = r_N^{j+\sigma} \ge 0,\ r_0 = r(0,t) = r_0^{j+\sigma} \le 0,$$

$$r = r^+ + r^-,\ r^+ = 0.5(r + |r|) \ge 0,\ r^- = 0.5(r - |r|) \le 0,$$

$$\overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\ i = \overline{1, N-1},$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{1+R_i},\ \rho_{i,s}^j = p_{i,s}^{j+\sigma}, \varphi_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma},\ i \ne 0, N, \\ f_i^{j+\sigma},\ i = 0, N. \end{cases} \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, i = 0, \\ h, i \ne 0, N, \end{cases}$$

$$R_i = \frac{0.5h|r_i|\overline{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}},\ \varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{(m+1)a_1}},\ r_0 \le 0,\ |r| = r^+ - r^-,\ \overline{x}^m = x_{i-0.5}^m,$$

$$\mu = \frac{0.5h}{m+1}\varphi_0,\ Y = \hat{y} + y,\ \hat{y} = y^{j+1},\ y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau},\ y = y_i^j = y(x_i, t_j),\ t^* = t^{j+\sigma}.$$

$$\varkappa = \frac{1}{1+R},\ R = \frac{0.5h|r|}{k} - \text{разностное число Рейнольдса},$$

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} v^s \bar{\tau} = \sum_{s=1}^{j-1} v^s \tau + 0.5\tau\left(v^0 + v^j + v^{j+\frac{1}{2}}\right),\ \bar{\tau} = \begin{cases} 0.5\tau,\ j = 0, m, m + \frac{1}{2}, \\ \tau,\ j \ne 0, m, m + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Введем скалярные произведения и норму:

$$\Big(u, v\Big) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h,\ \Big(1, u^2\Big) = \|u\|_0^2,\ \Big(1, u_{\bar{x}}^2\Big] = \|u_{\overline{x}}]|_0^2,\ \Big(1, u^2\Big] = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar.$$

Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (3.1) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$:

$$\Big(\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)}\Big) = \Big(\varkappa(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^{-j} x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(b^{+j}x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i},y^{(\sigma)}\Big)+\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{s,i}y^s_i\bar{\tau},x^my^{(\sigma)}\Big)+\Big(\varphi,x^my^{(\sigma)}\Big). \tag{3.5}$$

Справедлива следующая [10]

Лемма 3. Для любой функции $y(t)$, определенной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство

$$y^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y\geq\frac{1}{2}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y^2).$$

Оценим суммы, входящие в (3.5), с учетом леммы 3:

$$\Big(\overline{\varkappa}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y,x^my^{(\sigma)}\Big)\geq M_1\Big(\frac{1}{2},\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)\geq\frac{1}{4}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y\|^2_0, \tag{3.6}$$

$$\Big(\varkappa(x^m_{i-0.5}a^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x}})_x,y^{(\sigma)}\Big)=\varkappa x^m_{i-0.5}a^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\Big|_0^N-\Big(\bar{x}^m_{i-0.5}a^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x}},(\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\Big]=$$

$$=\varkappa x^m_{i-0.5}a^j_iy^{(\sigma)}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big|_0^N-\Big(\bar{x}^ma\varkappa_{\bar{x}},y^{(\sigma)}_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\Big]-\Big(x^m_{i-0.5}a\varkappa^{(-1)},(y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\Big]\leq$$

$$\leq x^m_{i-0.5}y^{(\sigma)}\varkappa a^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big|_0^N+\varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0+M^\varepsilon_3\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_0-M_4\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0. \tag{3.7}$$

$$\Big(b^{-j}x^m_{i-0.5}a^j_iy^{(\sigma)}_{\bar{x},i},y^{(\sigma)}\Big)+\Big(b^{+j}x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i},y^{(\sigma)}\Big)\leq$$

$$\leq\varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0+M^\varepsilon_5\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_0. \tag{3.8}$$

$$\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}y^s_i\bar{\tau},x^my^{(\sigma)}\Big)\leq\Big(\frac{1}{2},(x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)})^2+\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}x^{\frac{m}{2}}y^s_i\bar{\tau}\Big)^2\Big)\leq\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_0+$$

$$+\Big(\frac{1}{2},\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}(\rho^s)^2\bar{\tau}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}(x^{\frac{m}{2}}y^s_i)^2\bar{\tau}\Big)\leq\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_0+M_6\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|^2_0\bar{\tau}. \tag{3.9}$$

$$\Big(\varphi,x^my^{(\sigma)}\Big)\leq\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_0+\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|^2_0. \tag{3.10}$$

Учитывая преобразования (3.6)-(3.10) , из (3.5) находим

$$\frac{1}{4}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y\|^2_0+M_4\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\leq\bar{x}^my^{(\sigma)}\varkappa ay^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big|_0^N+$$

$$+2\varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0+M^\varepsilon_8\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|^2_0+M_7\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|^2_0\bar{\tau}+\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|^2_0. \tag{3.11}$$

Преобразуем первое выражение в правой части (3.11), тогда получим

$$\bar{x}^m y^{(\sigma)} \varkappa a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big|_0^N = -x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} =$$

$$= -x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Big[\frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau}\Big) - \mu\Big] =$$

$$= x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \mu - \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + \frac{h x_{0.5}^m}{2(m+1)} y_0^{(\sigma)} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} \leq \mu^2 +$$

$$+ M_9 \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)}\Big)^2 - \frac{0.5h}{2(m+1)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\Big)^2 + M_{10} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^s\Big)^2 \bar{\tau}. \qquad (3.12)$$

Учитывая (3.12), из (3.11) получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leq \varepsilon M_{11} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_{12}^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 +$$

$$+ M_{13} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + M_{14} \Big(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu^2\Big), \qquad (3.13)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\Big)^2$.

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{2M_{11}}$ из (3.11) получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leq$$

$$\leq M_{15} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_{16} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + M_{17} \Big(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu^2\Big). \qquad (3.14)$$

Учитывая, что

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^s\Big)^2\Big) \bar{\tau} =$$

$$= \sum_{s=0}^{j} \Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^s\Big)^2\Big) \bar{\tau} + 0.5\tau \Big(\|x^{\frac{m}{2}} y^j\|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^j\Big)^2\Big)$$

перепишем (3.14) в другой форме

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 \leq M_{18}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 + M_{19}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^j\|_1^2 + M_{20} F^j. \qquad (3.15)$$

где $F^j=\sum\limits_{s=0}^{j}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar\tau+\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\mu^2$.
На основании леммы 7 [12] из (3.15) получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\|_1^2\le M_{21}\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0\|_1^2+\max_{0\le j'\le j}F^{j'}\right). \tag{3.16}$$

где M_{21} - положительная постоянная, не зависящая от h и τ.
Из (3.16) получим

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\|_1^2\le M_{22}\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0\|_1^2+\max_{0\le j'\le j}\left(\sum_{s=0}^{j}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar\tau+\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\mu^2\right)\right). \tag{3.17}$$

Введя обозначение $g^j=\max\limits_{0\le j'\le j}\|x^{\frac{m}{2}}y^{j'}\|_1^2$, из (3.17) получим

$$g^{j+1}\le M_{23}\sum_{s=0}^{j}g^s\bar\tau+M_{24}F_1^j\le M_{25}\sum_{s=0}^{j}g^s\tau+M_{24}F_1^j, \tag{3.18}$$

где $F_1^j=\|x^{\frac{m}{2}}y^0\|_1^2+\max\limits_{0\le j'\le j}\left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\mu^2\right)$.

На основании леммы 4 (см.[17, стр.171]) из (3.18) получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\|_1^2\le M\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0\|_1^2+\max_{0\le j'\le j}\left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi^{j'}\|_0^2+\mu^2\right)\right). \tag{3.19}$$

где M - положительное постоянное, не зависящее от h и τ.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.5), тогда существуют такие h_0,τ_0, что если $h\le h_0,\tau\le\tau_0$, то для решения разностной задачи (3.1)-(3.4) справедлива априорная оценка (3.19).

Из оценки (3.19) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (3.1)-(3.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи $(1.1)-(1.4)$, $y(x_i,t_j)=y_i^j$-решение разностной задачи $(3.1)-(3.4)$. Для оценки точности разностной схемы $(3.1)-(3.4)$ рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения $(3.1)-(3.4)$, получаем задачу для функции z

$$\bar\varkappa\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\frac{\varkappa}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}a_i^jz_{\bar x}^{(\sigma)}\right)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\left(x^m_{i-0.5}a_i^jz_{\bar x,i}^{(\sigma)}\right)+$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}\right)+\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{s,i}^j z_i^s\overline{\tau}+\Psi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{3.20}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{(x,0)}^{(\sigma)}=\frac{0.5h}{m+1}\left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}z_0-\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^j z_0^s\overline{\tau}\right)-\nu,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0, \tag{3.21}$$

$$z_N^{(\sigma)}=0,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=l, \tag{3.22}$$

$$z(x,0)=0,\ x\in\overline{\omega}_h,\ t=0, \tag{3.23}$$

где $\Psi=O\left(\frac{h^2+\tau^2}{x}\right)$, $\nu=O\left(h^2+\tau^2\right)$ - погрешности аппроксимации дифференциальной задачи $(1.1)-(1.4)$ разностной схемой $(3.1)-(3.4)$ в классе решении $u=u(x,t)$ задачи $(1.1)-(1.4)$.

Применяя априорную оценку (3.19) к решению задачи $(3.20)-(3.23)$, получаем неравенство

$$\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}\|_1^2\le M\max_{0\le j'\le j}\left(\|x^{\frac{m}{2}}\Psi^{j'}\|_0^2+\nu^2\right), \tag{3.24}$$

где M - положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (3.24) следует сходимость решения разностной задачи $(3.1)-(3.4)$ к решению дифференциальной задачи $(1.1)-(1.4)$ в смысле нормы $\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}\|_1^2$ на каждом слое так, что если существуют такие τ_0, h_0, то при $\tau\le\tau_0, h\le h_0$ справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}}\left(y^{j+1}-u^{j+1}\right)\|_1\le M\|x^{\frac{m}{2}-1}\|_1\left(h^2+\tau^2\right)\le\overline{M}\left(h^2+\tau^2\right),$$

где $\overline{M}=const>0$, не зависящая от h и τ.

4 Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1.1) с условием третьего рода. Для этого заменим условие (1.3) условием вида

$$-k(l,t)u_x(l,t)=\beta(t)u(l,t)-\mu(t),\ |\beta|\le c_2. \tag{4.1}$$

Для получения априорной оценки решения умножим (1.1) скалярно на $x^m u$. Тогда, учитывая преобразования (2.2)-(2.6), получим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+c_0\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|\le x^m uku_x\Big|_0^l+\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+$$

$$+M_1^\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+M_2\int_0^t\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2d\tau+\frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2. \tag{4.2}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (4.2)

$$x^mukuu_x|_0^l=l^mu(l,t)\Big(\mu(t)-\beta(t)u(l,t)\Big)=l^m\mu(t)u(l,t)-$$

$$-l^m\beta(t)u^2(l,t)\le\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+M_3^\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\mu^2(t). \tag{4.3}$$

Учитывая (4.3), из (4.2) при $\varepsilon=\dfrac{c_0}{4}$ получим

$$\partial_{0t}^\alpha\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\le M_4\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+$$

$$+M_5\int_0^t\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2d\tau+M_6\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu^2(t)\Big), \tag{4.4}$$

Применяя к обеим частям неравенства(4.4) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, на основании леммы 2 [9] из (4.4) находим априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\le$$

$$\le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu^2(t)\big)+\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\Big), \tag{4.5}$$

где $M=const>0$, зависящее только от входных данных задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4).

Справедлива следующая

Теорема 3. Если выполнены условия (1.5) тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.2),(4.1),(1.4) справедлива априорная оценка (4.5).

Из оценки (4.5) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

5 Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1),(1.2),(4.1),(1.4) поставим в соответствие разностную схему

$$\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big)+$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\Big)+\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^j y_i^s\bar{\tau}+\varphi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{5.1}$$

$$\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} = \frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{0,s} y^s_0 \bar{\tau}\Big) - \mu_1,\ t \in \overline{\omega}_\tau,\ x=0, \tag{5.2}$$

$$-\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} = \tilde{\varkappa}\beta^{j+\sigma} y^{(\sigma)}_N + 0.5h\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{N,s} y^s_N \bar{\tau}\Big) - \mu_2,\ t \in \overline{\omega}_\tau,\ x=l, \tag{5.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t=0, \tag{5.4}$$

где

$$\mu_1 = 0.5h\varphi^j_0, \quad \mu_2 = \tilde{\varkappa}\mu^{j+\sigma} + 0.5h\varphi^j_N, \quad \tilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l} = \frac{1}{1-\frac{0.5hm}{l}},$$

$$\varkappa_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k^{j+\sigma}_{0.5}}},\ r^{j+\sigma}_0 \le 0, \varkappa_N = \frac{1}{1+0.5h\frac{|r^{j+\sigma}_N|}{k_{N-0.5}}},\ \text{если}\ r^{j+\sigma}_N \ge 0,\ t^* = t^{j+1/2},$$

Перепишем задачу (5.1)-(5.4) в операторной форме

$$\begin{cases} \overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \overline{\Lambda}(t^{j+\sigma}) y^{(\sigma)} + \overline{\Phi}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{5.5}$$

где

$$\overline{\overline{\varkappa}} = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i,\ x \in \omega_h, \\ 1,\ x = 0, l, \end{cases} \qquad \overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad \overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i,\ (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ \varphi^- = \frac{m+1}{0.5h}\mu_1,\ x=0 \\ \varphi^+ = \frac{1}{0.5h}\mu_2,\ x=l. \end{cases}$$

$$\overline{\Lambda} y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda} y^{(\sigma)}_i = \frac{\varkappa_i}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5} a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5} a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big) + \\ \qquad\qquad + \frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+0.5} a^j_{i+1} y^{(\sigma)}_{x,i}\Big) + \sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau}, \\ \Lambda^- y^{(\sigma)}_0 = \dfrac{m+1}{0.5h}\Big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + \frac{h}{2}\sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{0,s} y^s_0 \bar{\tau}\Big),\ i=0 \\ \Lambda^+ y^{(\sigma)}_N = -\dfrac{1}{0.5h}\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \tilde{\varkappa}\beta y^{(\sigma)}_N - 0.5h\sum\limits_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho^j_{N,s} y^s_N \bar{\tau}\Big),\ x=l, \end{cases}$$

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде

$$\Big(u, v\Big] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar,\ \|u]|^2_0 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h,\ i=N, \\ h, i \ne N. \end{cases}$$

Умножим (5.5) теперь скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\left(\overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y, x^m y^{(\sigma)}\right] = \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\right] + \left(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)}\right]. \tag{5.6}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (5.6):

$$\left(\overline{\overline{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y, x^m y^{(\sigma)}\right] \geq \left(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t}\left(x^{\frac{m}{2}}y\right)^2\right]. \qquad (5.7),$$

$$\left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\right] = \left(\tilde{\Lambda}y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\right) + 0.5h\Lambda^+ y_N^{(\sigma)} x_N^m y_N^{(\sigma)} =$$

$$= \left(\varkappa\left(x^m_{i-0.5}a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^{-j}\left(x^m_{i-0.5}a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right), y^{(\sigma)}\right) +$$

$$+\left(b^{+j}\left(x^m_{i+0.5}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\right), y^{(\sigma)}\right) + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}y_i^s\bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)}\right) +$$

$$+x_N^m y_N^{(\sigma)}\left(-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \tilde{\varkappa}\beta y_N^{(\sigma)} + 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{N,s}y_N^s\bar{\tau}\right) =$$

$$= -\left(\overline{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\right] + \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\left(\overline{x}^m_N - x^m_N\right)y_N^{(\sigma)} -$$

$$-\varkappa_0 x^m_{0.5}a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - \widetilde{\varkappa}x_N^m\beta(y_N^{(\sigma)})^2 + 0.5hx_N^m y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{N,s}y_N^s\bar{\tau} + \left(b^{-j}\,\overline{x}^m a_i, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right) +$$

$$+\left(b^{+j}x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right) + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}y_i^s\bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)}\right). \tag{5.8}$$

Преобразуем первое, шестое и седьмое слагаемые в правой части (5.8)

$$-\left(\overline{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\right] = -\left(\overline{x}^m a_i\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\right] - \left(\overline{x}^m a_i\varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\right] \leq$$

$$\leq -M_1\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + \varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_2^{\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2. \tag{5.9}$$

$$\left(b^{-j}\left(\overline{x}^m a_i, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right), y^{(\sigma)}\right) + \left(b^{+j}\left(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y_x^{(\sigma)}\right), y^{(\sigma)}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_3^{\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2. \tag{5.10}$$

$$\left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}y_i^s\bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)}\right) + 0.5hx_N^m y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{N,s}y_N^s\bar{\tau} = \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}y_i^s\bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)}\right] \leq$$

$$\le \Big(\frac{1}{2},(x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)})^2+\Big(x^{\frac{m}{2}}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^{j}y_i^s\bar\tau\Big)^2\Big) \le \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+\Big(\frac{1}{2},x^m\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_s^2\bar\tau\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}(y_i^s)^2\bar\tau\Big] \le$$

$$\le \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+M_4\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y^s]|_0^2\bar\tau. \qquad (5.11)$$

Учитывая (5.9)-(5.11), из(5.8) находим

$$\Big(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},x^my^{(\sigma)}\Big] \le -M_1\|\bar x^{\frac{m}{2}}y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2+\varepsilon\|\bar x^{\frac{m}{2}}y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2+$$

$$+M_5^{\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+M_3\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y^s]|_0^2\bar\tau+$$

$$+\big(\bar x_N^m-x_N^m\big)y_N^{(\sigma)}\varkappa_Na_Ny_{\bar x,N}^{(\sigma)}-\varkappa_0x_{0.5}^ma_1y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)}-\widetilde{\varkappa}\beta x_N^m\Big(y_N^{(\sigma)}\Big)^2. \qquad (5.12)$$

$$\Big(\overline{\Phi},x^my^{(\sigma)}\Big]=\Big(\varphi,x^my^{(\sigma)}\Big)+0.5h\varphi^+x_N^my_N^{(\sigma)}=\Big(\varphi,x^my^{(\sigma)}\Big)+x_N^m\mu_2y_N^{(\sigma)}. \quad (5.13)$$

Учитывая преобразования (5.7)-(5.13), из(5.6) получим

$$\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(x^{\frac{m}{2}}y\Big)^2\Big]+M_1\|\bar x^{\frac{m}{2}}y_{\bar x}]|_0^2 \le 2\varepsilon\|\bar x^{\frac{m}{2}}y_{\bar x}^{(\sigma)}]|_0^2+M_5^{\varepsilon}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+$$

$$+M_6\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y^s]|_0^2\bar\tau+y_N^{(\sigma)}\Big(\bar x_N^m-x_N^m\Big)\varkappa_Na_Ny_{\bar x,N}^{(\sigma)}-$$

$$-x_{0.5}^my_0^{(\sigma)}\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\widetilde{\varkappa}\beta x_N^m\Big(y_N^{(\sigma)}\Big)^2+\Big(\varphi,x^my^{(\sigma)}\Big)+x_N^m\mu_2y_N^{(\sigma)}. \qquad (5.14)$$

Преобразуем четвертое, пятое, шестое и восьмое слагаемые в правой части (5.14) с учетом (5.2),(5.3)

$$\Big(\bar x_N^m-x_N^m\Big)y_N^{(\sigma)}\varkappa_Na_Ny_{\bar xN}^{(\sigma)}-x_{0.5}^my_0^{(\sigma)}\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}+x_N^my_N^{(\sigma)}\Big(\mu_2-\widetilde{\varkappa}\beta y_N^{(\sigma)}\Big)=$$

$$=\Big(\bar x_N^m-x_N^m\Big)y_N^{(\sigma)}\Big[\mu_2-\tilde{\varkappa}\beta y_N^{(\sigma)}-0.5h\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{N,s}^{j}y_N^s\bar\tau\Big)\Big]+$$

$$+x_{0.5}^my_0^{(\sigma)}\Big[\mu_1-\frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0-\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^{j}y_0^s\bar\tau\Big)\Big]-\widetilde{\varkappa}\beta x_N^m(y_N^{(\sigma)})^2+x_N^m\mu_2y_N^{(\sigma)}=$$

$$=\bar x_N^my_N^{(\sigma)}\mu_2-\bar x_N^m\tilde{\varkappa}\beta(y_N^{(\sigma)})^2-0.5h\Big(\bar x_N^m-x_N^m\Big)y_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N+$$

$$+0.5h\Big(\bar{x}_N^m - x_N^m\Big)y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{N,s}^j y_N^s\bar{\tau} + x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\mu_1-$$

$$-\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + \frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^j y_0^s\bar{\tau} \le \mu_1^2 + \mu_2^2+$$

$$+M_7\bigg(\Big(\bar{x}_N^{\frac{m}{2}}y_N^{(\sigma)}\Big)^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0^{(\sigma)}\Big)^2\bigg) + \varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+$$

$$+M_8^\varepsilon\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2 - 0.5h(\bar{x}_N^m - x_N^m)y_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N-$$

$$-\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + \Big(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{N,s}^j y_N^s\bar{\tau}\Big)^2 + \Big(x_{0.5}^m\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^j y_0^s\bar{\tau}\Big)^2 \le$$

$$\le -0.5h(\bar{x}_N^m - x_N^m)y_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0+$$

$$+\mu_1^2 + \mu_2^2 + \varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_9^\varepsilon\bigg(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0^{(\sigma)}\Big)^2\bigg)+$$

$$+M_{10}^\varepsilon\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\bigg(\|x^{\frac{m}{2}}y^s]|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^s]|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0^{(\sigma)}\Big)^2\bigg)\bar{\tau}. \qquad (5.15)$$

$$\Big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\Big) \le \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2. \qquad (5.16)$$

Учитывая (5.15),(5.16), из (5.14) получаем

$$\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\Big(x^{\frac{m}{2}}y\Big)^2\Big] + M_2\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + 0.5h(\bar{x}_N^m - x_N^m)y_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N+$$

$$+\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 \le 2\varepsilon\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_{11}^\varepsilon\bigg(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2 + \Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0^{(\sigma)}\Big)^2\bigg)+$$

$$+M_{12}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\bigg(\|x^{\frac{m}{2}}y^s]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^s]|_0^2+\Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0\Big)^2\bigg)\bar{\tau}+M_{13}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\Big). \quad (5.17)$$

Учитывая,что $x_{N-0.5}^m \ge \frac{1}{6}x_N^m$, преобразуем первое и четвертое слагаемые в (5.17)

$$\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big] + \frac{h}{4}\Big(\bar{x}_N^m - x_N^m\Big)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \ge$$

$$\ge \Big(\frac{\overline{\varkappa}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big) + \frac{h}{4}x_{N-0.5}^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \ge$$

$$\geq \frac{M_{14}}{2}\Big(1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big) + \frac{0.5h}{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(x_N^{\frac{m}{2}}y_N\Big)^2 \geq \frac{1}{12}\Big(1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big) +$$

$$+\frac{0.5h}{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(x^{\frac{m}{2}}y_N\Big)^2 \geq \frac{1}{12}\Big(1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big] \geq \frac{1}{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2, \qquad (5.18)$$

где

$$M_{14} = \begin{cases} 1, \text{если } m = 0, m \geq 1, \\ \frac{1}{2}, \text{если } m \in (0,1),\ h \leq h_0 = \sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}, \end{cases}$$

$$\frac{0.5h}{m+1}x^m_{0.5}y_0^{(\sigma)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0 \geq \frac{0.5h}{2(m+1)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0)^2. \qquad (5.19)$$

Учитывая (5.18),(5.19), из (5.17) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{\sigma}_{\bar{x}}]|_0^2 \leq \varepsilon M_{15}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{\sigma}_{\bar{x}}]|_0^2 + M^{\varepsilon}_{16}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_1^2 + M_{17}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y^s]|_1^2\bar{\tau} +$$

$$+M_{18}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^s_{\bar{x}}]|_0^2\bar{\tau} + M_{19}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi|]_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big). \qquad (5.20)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2 + \Big(x^{\frac{m}{2}}_{0.5}y_0\Big)^2$.

Учитывая, что

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau} = \sum_{s=0}^{j}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau} + 0.5\tau\|x^{\frac{m}{2}}y^j\|_1^2,$$

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^s_{\bar{x}}]|_0^2\bar{\tau} = \sum_{s=0}^{j}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^s_{\bar{x}}]|_0^2\bar{\tau} + 0.5\tau\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^s_{\bar{x}}]|_0^2$$

перепишем (5.20) в другой форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{\sigma}_{\bar{x}}]|_0^2 \leq \Big(0.5\tau M_{18} + \varepsilon M_{15}\Big)\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2 + M_{20}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_1^2 +$$

$$+M_{16}\sum_{s=0}^{j}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau} + M_{18}\sum_{s=0}^{j}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^s_{\bar{x}}]|_0^2\bar{\tau} + M_{17}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi|]_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big). \qquad (5.21)$$

Выбирая $\tau \leq \tau_0 = \dfrac{1}{2M_{18}},\ \varepsilon = \dfrac{1}{4M_{15}}$, из (5.21) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{\sigma}_{\bar{x}}]|_0^2 \leq M_{21}\sum_{s=0}^{j}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^s_{\bar{x}}]|_0^2\bar{\tau} +$$

$$+M_{22}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_1^2+M_{23}\sum_{s=0}^{j}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau}+M_{24}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi||_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\Big). \qquad (5.22)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (5.22), тогда перепишем (5.22) в другой форме

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{\sigma}]|_0^2\le M_{21}\sum_{s=0}^{j}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{s}]|_0^2\tau+F, \qquad (5.23)$$

где $F=M_{22}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_1^2+M_{23}\sum\limits_{s=0}^{j}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau}+M_{24}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi||_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\Big)$.

Применяя лемму 4 (см.[17, стр.171]), из (5.23) получаем

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{\sigma}]|_0^2\le M_{25}F, \qquad (5.24)$$

С учетом (5.24) из (5.22) находим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{\sigma}]|_0^2\le M_{26}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_1^2+$$

$$+M_{27}\sum_{s=0}^{j}\|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau}+M_{28}\sum_{s=0}^{j}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi||_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\Big)\bar{\tau}. \qquad (5.25)$$

На основании леммы 7 [12] из (5.25) получаем априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}]|_1^2\le M\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0]|_1^2+\max_{0\le j'\le j}\sum_{s=0}^{j}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi||_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\Big)\bar{\tau}\right), \qquad (5.26)$$

где $M=const>0$, не зависящее от h и τ.

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.5), тогда существуют такие h_0,τ_0, что если $h\le h_0,\tau\le\tau_0$, то для решения разностной задачи (5.1)-(5.4) справедлива априорная оценка (5.26).

Из оценки (5.26) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (5.1)-(5.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи $(1.1),(1.2),(4.1),(1.4)$ $y(x_i,t_j)=y_i^j$- решение разностной задачи $(5.1)-(5.4)$. Для оценки точности разностной схемы $(5.1)-(5.4)$ рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения $(5.1)-(5.4)$, получаем задачу для функции z

$$\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}z=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big)+$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}\Big)+\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^j z_i^s\overline{\tau}+\Psi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{5.27}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)}=\frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}z_0-\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^j z_0^s\overline{\tau}\Big)-\nu_1,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0, \tag{5.28}$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\tilde{\varkappa}\beta^{j+\sigma}z_N^{(\sigma)}+0.5h\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}z_N-\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{N,s}^j z_N^s\overline{\tau}\Big)-\nu_2,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=l, \tag{5.29}$$

$$z(x,0)=0,\ x\in\overline{\omega}_h,\ t=0, \tag{5.30}$$

где $\Psi=O\Big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\Big)$, $\nu_1=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\nu_2=O\big(h^2+\tau^2\big)$– погрешности аппроксимации дифференциальной задачи $(1.1),(1.2),(4.1),(1.4)$ разностной схемой $(5.1)-(5.4)$ в классе решении $u=u(x,t)$ задачи $(1.1),(1.2),(4.1),(1.4)$.

Применяя оценку (5.26) к решению задачи $(5.27)-(5.30)$, получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}]|_1^2\le M\max_{0\le j'\le j}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\Psi^{j'}\|_0^2+\nu_1^2+\nu_2^2\Big). \tag{5.31}$$

где $M=const>0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (5.31) следует сходимость решения разностной задачи $(5.1)-(5.4)$ к решению дифференциальной задачи $(1.1),(1.2),(4.1),(1.4)$ в смысле нормы $\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}]|_1^2$ на каждом слое так, что если существуют такие τ_0,h_0, то при $\tau\le\tau_0,h\le h_0$, справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}}\big(y^{j+1}-u^{j+1}\big)\|_1\le M\|x^{\frac{m}{2}-1}\|_1\left(h^2+\tau^2\right)\le\overline{M}\left(h^2+\tau^2\right),$$

где $\overline{M}=const>0$, не зависящая от h и τ.

6 Алгоритм численного решения

Для численного решения дифференциальной задачи $(1.1),(1.2),(4.1),(1.4)$ приведем разностную схему (5.1) - (5.4) к расчетному виду. Тогда уравнение (5.1) приводится к следующему виду

$$A_i y_{i-1}^{j+1}-C_i y_i^{j+1}+B_i y_{i+1}^{j+1}=-F_i^j,\ i=\overline{1,N-1}, \tag{6.1}$$

где

$$A_i=\tau\sigma\varkappa_i^j x_{i-0.5}^m a_i^j-\tau h\sigma x_{i-0.5}^m b_i^{-j}a_i^j,\quad B_i=\tau\sigma\varkappa_i^j x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j+\tau h\sigma x_{i+0.5}^m b_i^{+j}a_{i+1}^j,$$

$$C_i = A_i + B_i + h^2\overline{\varkappa}_i x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad F_i^j = AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j +$$

$$+h^2\tau x_i^m \varphi_i^j - h^2 x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_i^{s+1} - y_i^s) + \tau h^2 x_i^m \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \overline{\tau} -$$

$$AA_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j x_{i-0.5}^m a_i^j - \tau h(1-\sigma) x_{i-0.5}^m b_i^{-j} a_i^j,$$

$$BB_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j + \tau h(1-\sigma) x_{i+0.5}^m b_i^{+j} a_{i+1}^j,$$

$$CC_i = AA_i + BB_i - h^2\overline{\varkappa}_i x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Краевое условие (5.2) принимает вид

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \widetilde{\mu}_1, \tag{6.2}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\tau\sigma\varkappa_0 a_1}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \frac{0.5h^2}{m+1}\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\widetilde{\mu}_1 = \left[\mu_1 h\tau + \tau(1-\sigma)\varkappa_0 a_1(y_1^j - y_0^j) + \frac{0.5h^2}{m+1}\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_0 + \frac{0.5h^2}{m+1}\tau \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \overline{\tau} -\right.$$

$$\left. -\frac{0.5h^2}{m+1}\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_0^{s+1} - y_0^s)\right] \Big/ \left[\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \frac{0.5h^2}{m+1}\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right].$$

Краевое условие (5.3) принимает вид

$$y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \widetilde{\mu}_2, \tag{6.3}$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{\tau\sigma\varkappa_N a_N}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \sigma h\tau\widetilde{\varkappa}\beta_2^j + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\widetilde{\mu}_2 = \left[\mu_2 h\tau - (1-\sigma)h\tau\widetilde{\varkappa}\beta_2 y_N^j - \tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N(y_N^j - y_{N-1}^j) + 0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_N -\right.$$

$$\left. -0.5h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_N^{s+1} - y_N^s) + 0.5\tau h^2 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \overline{\tau}\right] \Big/$$

$$\Big/ \left[\tau\sigma\varkappa_N a_N^j + \sigma h\tau\widetilde{\varkappa}\beta_2^j + \frac{h^2}{2}\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right].$$

Таким образом, с учетом (6.1)-(6.3), разностная схема (5.1)-(5.4) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой легко находится известным методом прогонки.

7 Результаты численного эксперимента

Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (5.1)-(5.4) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x,t) = t^3x^4$.

Ниже в таблице при различных значениях параметров $\alpha = 0.01;\ 0.5;\ 0.99$, $m = 0; 0.5; 1;\ 1.5;\ 2$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h = \tau$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле: ПС$= \log_{\frac{h_1}{h_2}} \dfrac{\|z_1]|_0}{\|z_2]|_0}$, где z_i— это погрешность, соответствующая h_i.

Таблица

Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при различных значениях $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$ и $m = 0; 0.5; 1; 1.5; 2$ на $t = 1$, когда $h = \tau$.

α	m	h	$\max\limits_{0<j<m} \|z^j]|_0$	ПС в $\|\cdot]|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.01	0	$\frac{1}{10}$	0.076879717		0.036794982	
		$\frac{1}{20}$	0.019174526	2.0034	0.008924896	2.0452
		$\frac{1}{40}$	0.004784865	2.0026	0.002196927	2.0232
		$\frac{1}{80}$	0.001194923	2.0016	0.000544949	2.0118
		$\frac{1}{160}$	0.000298556	2.0008	0.000135702	2.0059
	0.5	$\frac{1}{10}$	0.068689773		0.030780857	
		$\frac{1}{20}$	0.017138060	2.0029	0.007453397	2.0436
		$\frac{1}{40}$	0.004276783	2.0026	0.001833239	2.0223
		$\frac{1}{80}$	0.001068014	2.0016	0.000454558	2.0113
		$\frac{1}{160}$	0.000266842	2.0009	0.000113171	2.0057
	1	$\frac{1}{10}$	0.059822153		0.024798721	
		$\frac{1}{20}$	0.014884147	2.0069	0.005956540	2.0461
		$\frac{1}{40}$	0.003708226	2.0050	0.001459095	2.0235
		$\frac{1}{80}$	0.000925207	2.0029	0.000361044	2.0119
		$\frac{1}{160}$	0.000231055	2.0015	0.000089796	2.0060

α	m	h	$\max\limits_{0<j<m} \lVert z^j]\rVert_0$	ПС в $\lVert\cdot]\rVert_0$	$\lVert z\rVert_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\lVert\cdot\rVert_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
	1.5	$\frac{1}{10}$	0.050994481		0.019049512	
		$\frac{1}{20}$	0.012585331	2.0186	0.004485209	2.0577
		$\frac{1}{40}$	0.003121312	2.0115	0.001087038	2.0294
		$\frac{1}{80}$	0.000776905	2.0063	0.000267499	2.0148
		$\frac{1}{160}$	0.000193780	2.0033	0.000066344	2.0074
	2	$\frac{1}{10}$	0.042407707		0.053990105	
		$\frac{1}{20}$	0.010296342	2.0422	0.013145040	2.0865
		$\frac{1}{40}$	0.002530004	2.0249	0.003240011	2.0448
		$\frac{1}{80}$	0.000626611	2.0135	0.000804130	2.0228
		$\frac{1}{160}$	0.000155892	2.0070	0.000200299	2.0115
0.5	0	$\frac{1}{10}$	0.098777477		0.048583953	
		$\frac{1}{20}$	0.024719264	1.9985	0.011839771	2.0382
		$\frac{1}{40}$	0.006174080	2.0013	0.002919937	2.0204
		$\frac{1}{80}$	0.001542119	2.0013	0.000724931	2.0105
		$\frac{1}{160}$	0.000385289	2.0009	0.000180606	2.0053
	0.5	$\frac{1}{10}$	0.090332895		0.004221371	
		$\frac{1}{20}$	0.022617618	1.9978	0.001074403	2.0368
		$\frac{1}{40}$	0.005650220	2.0011	0.000270921	2.0196
		$\frac{1}{80}$	0.001411390	2.0012	0.000068068	2.0100
		$\frac{1}{160}$	0.000352642	2.0008	0.000017072	2.0050
	1	$\frac{1}{10}$	0.079856635		0.041714318	
		$\frac{1}{20}$	0.019946185	2.0013	0.010150116	2.0390
		$\frac{1}{40}$	0.004976000	2.0031	0.002501595	2.0206
		$\frac{1}{80}$	0.001242057	2.0023	0.000620892	2.0104
		$\frac{1}{160}$	0.000310214	2.0014	0.000154667	2.0052
	1.5	$\frac{1}{10}$	0.068899501		0.034491366	
		$\frac{1}{20}$	0.017082667	2.0120	0.008333251	2.0493
		$\frac{1}{40}$	0.004244370	2.0089	0.002046658	2.0256
		$\frac{1}{80}$	0.001057175	2.0053	0.000507111	2.0129
		$\frac{1}{160}$	0.000263748	2.0030	0.000126219	2.0064

α	m	h	$\max\limits_{0<j<m} \|z^j\|_0$	ПС в $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
	2	$\frac{1}{10}$	0.057977170		0.027315531	
		$\frac{1}{20}$	0.014161201	2.0335	0.006487950	2.0739
		$\frac{1}{40}$	0.003489152	2.0210	0.001579365	2.0384
		$\frac{1}{80}$	0.000865205	2.0118	0.000389568	2.0194
		$\frac{1}{160}$	0.000215357	2.0063	0.000096745	2.0096
0.99	0	$\frac{1}{10}$	0.128539769		0.070745599	
		$\frac{1}{20}$	0.032208933	1.9967	0.017237292	2.0371
		$\frac{1}{40}$	0.008051126	2.0002	0.004249847	2.0201
		$\frac{1}{80}$	0.002011962	2.0006	0.001054853	2.0104
		$\frac{1}{160}$	0.000502837	2.0004	0.000262754	2.0053
	0.5	$\frac{1}{10}$	0.120541979		0.065932457	
		$\frac{1}{20}$	0.030216567	1.9961	0.016067838	2.0368
		$\frac{1}{40}$	0.007554829	1.9999	0.003962394	2.0197
		$\frac{1}{80}$	0.001888178	2.0004	0.000983648	2.0102
		$\frac{1}{160}$	0.000471933	2.0003	0.000245039	2.0051
	1	$\frac{1}{10}$	0.107653172		0.057770899	
		$\frac{1}{20}$	0.026922002	1.9995	0.014051048	2.0397
		$\frac{1}{40}$	0.006722651	2.0017	0.003461966	2.0210
		$\frac{1}{80}$	0.001679095	2.0013	0.000859057	2.0108
		$\frac{1}{160}$	0.000419534	2.0008	0.000213958	2.0054
	1.5	$\frac{1}{10}$	0.093164225		0.048483177	
		$\frac{1}{20}$	0.023129167	2.0101	0.011706658	2.0502
		$\frac{1}{40}$	0.005752973	2.0073	0.002873947	2.0262
		$\frac{1}{80}$	0.001433984	2.0043	0.000711867	2.0134
		$\frac{1}{160}$	0.000357920	2.0023	0.000177141	2.0067
	2	$\frac{1}{10}$	0.078270796		0.038907159	
		$\frac{1}{20}$	0.019141843	2.0317	0.009238178	2.0744
		$\frac{1}{40}$	0.004721898	2.0193	0.002248148	2.0389
		$\frac{1}{80}$	0.001171855	2.0106	0.000554370	2.0198
		$\frac{1}{160}$	0.000291838	2.0056	0.000137638	2.0100

8 Замечание

Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда рассматривается уравнение с нелокальным линейным источником вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^x p(s,t)u(s,t)ds + f(x,t).$$

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая (ГФЕН) в рамках научного проекта №20-51-53007.

Список литературы

[1] Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение. М: Физматлит, 2003.

[2] Учайкин, В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008.

[3] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987

[4] Podlubny, I. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[5] Kilbas A.A., Trujillo J.J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems, I. Appl. Anal. 78 (2001), 153-192.

[6] Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткий И. А. Численные методы решения уравнения дробной диффузии с дробной производной по времени в одномерном случае. М.: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. ()2003) 35 с.

[7] Таукенова, Ф.И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:10 (2006), 1871-1881.

[8] Diethelm, K. Walz, G. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation, Numer. Algorithms, 16 (1997), 231-253.

[9] Алиханов, А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения, 46:5 (2010), 658-664.

[10] Alikhanov, A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation.// Journal of Computational Physics, 280 (2015), 424-438.

[11] Бештоков, М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля // Дифференц. уравнения, 54:6 (2018), 763-778.

[12] Бештоков, М.Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова-Капуто // Известия вузов. Математика, 10 (2018), 3-16.

[13] Бештоков, М.Х. Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференц. уравнения, 55:7 (2019), 919-928.

[14] Бештоков, М.Х. О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения, 52:10 (2016), 1393-1406.

[15] Бештоков, М.Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:10 (2016), 1780-1794.

[16] Самарский, А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

[17] Самарский, А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

Stability and convergence of monotone difference schemes approximating boundary value problems for an integro-differential equation with a fractional time derivative and the Bessel operator

M.KH. Beshtokov

Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

Abstract. Boundary value problems for an integro-differential equation with a fractional time derivative and the Bessel operator are studied. For the solution of the problems under consideration, a priori estimates in the differential interpretation are obtained, from which the uniqueness and stability of the solution with respect to the initial data and the right-hand side follow. For the numerical solution of boundary value problems, monotone difference schemes with directed differences are constructed and analogs of a priori estimates are proved for them, and error estimates are given for the assumptions of sufficient smoothness of the solutions of the equations. From the obtained a priori estimates in the difference form, the uniqueness and stability of the solution according to the initial data and the right-hand side, as well as the linearity of the difference problems, the convergence with the second order in the grid parameters follow. An algorithm for the approximate solution of a boundary value problem with a third-order condition is proposed, and numerical calculations are performed for a test case illustrating the theoretical results obtained in this paper concerning the convergence and the order of approximation of the difference scheme.

Keywords: boundary value problems, Gerasimov-Caputo fractional derivative, a priori estimation, monotone schemes, integro-differential equation, fractional order differential equation.

Acknowledgements

The paper was supported by RFBR and Natural Science Foundation of China (NSFC) grant №20-51-53007.