ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2003
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97

http://www.wplus.net/pp/diffur
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НЕВАРИАЦИОННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А.Н.Кусюмов Россия, 420111, Казань, ул. К. Маркса, д. 10,
Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева,
кафедра Аэрогидродинамики,
e-mail: postbox7@mail.ru

Аннотация.

Рассматриваются системы уравнений в частных производных второго порядка, которые в общем случае не могут быть получены из вариационного принципа. Каждое уравнение, входящее в такую систему, может быть представлено в виде суммы двух выражений. Первое выражение следует из вариационного принципа. Второе выражение не имеет вариационного характера. Системы данного типа называются в работе квазиэйлеровыми. При определенных требованиях к группе преобразований Ли законы сохранения квазиэйлеровой системы могут быть выписаны явным образом (также как и для систем полученых из вариационного принципа).

1 Введение

Одна из наиболее известных методик построения законов сохранения для систем уравнений в частных производных опирается на теорему Э. Нетер, или на ее обобщение Н.Х. Ибрагимовым [1]. Необходимым условием для использования этой методики является то, что исходная система уравнений должна получаться как уравнения Эйлера - Лагранжа для некоторого функционала. Системы такого класса будем далее называть вариационными или эйлеровыми. Каждый закон сохранения эйлеровой системы можно выписать явным образом, зная вариационные симметрии функционала [2].

Требование “вариационности” системы уравнений является определенным ограничением на использование теоремы Нетер. Эти ограничения несколько снимаются при использовании понятия дивергентных симметрий функционала, введенного Бессель-Хагеном [2]. Однако, исходная система уравнений и в этом случае также должна быть эйлеровой.

В настоящей работе рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. При этом рассматриваются системы уравнений, которые в общем случае не получаются из вариационного принципа. Выражение для каждого уравнения, входящего в такую систему, всегда можно представить в виде суммы двух выражений. Одно из выражений имеет “вариационный характер”. Второе выражение не имеет вариационного характера. Системы такого вида будем называть в дальнейшем системами с эйлеровой частью (“квазиэйлеровыми”), или просто QEL системами.

При определенных требованиях к группе преобразований Ли законы сохранения QEL системы могут быть выписаны явным образом (также как и для систем полученых из вариационного принципа).

Отметим, что законы сохранения для более ограниченного класса QEL систем рассматривались также в [3].

2 Квазиэйлерова система уравнений

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка запишем в виде

$$F^j(t, x, p_1, p_2) = 0. \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

где t – время; x^j – координаты m-мерного вектора зависимых переменных. Через p_1^j, p_2^j обозначены производные вектора зависимых переменных соответственно первого и второго порядка.

Напомним, что законом сохранения для системы уравнений (1) называется выражение [2]

$$\theta^j F^j(t,x,p_1,p_2) = \frac{d}{dt} P(t,x,p_1). \tag{3}$$

Здесь $P(t,x,p_1)$ – некоторая гладкая функция (компонента закона сохранения). Функции $\theta^j(t,x,p_1)$, удовлетворяющие (3), называются характеристиками закона сохранения.

Известно, что если система уравнений (1) является эйлеровой, то функции $F^j(t,x,p_1,p_2)$ могут быть представлены в виде

$$F^j(t,x,p_1,p_2) = E_j(g), \tag{4}$$

где $g(t,x,p_1)$ рассматривается как лагранжиан некоторого функционала

$$I[\,x\,] = \int_{t_0}^{t_1} g(t,x,p_1)dt. \tag{5}$$

Оператор Эйлера E_j с номером j задается формулой [2]

$$E_j = \sum_{J=0}^{1} (-D)_J \frac{\partial}{\partial p_J^j}. \tag{6}$$

Здесь $(-D)_0 = 1$; $(-D)_1 = -D_t$, где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + p_1^j \frac{\partial}{\partial x^j} + p_2^j \frac{\partial}{\partial p_1^j} + \ldots$$

Кроме того, в (6) полагаем $p_0^j = x^j$. Если система уравнений (1) является эйлеровой, т.е., удовлетворяет (4), и известны вариационные симметрии функционала (5), то в этом случае ее законы сохранения определяются с помощью теоремы Нетер [2].

Пусть теперь функции $F^j(t,x,p_1,p_2)$ представлены в виде

$$F^j(t,x,p_1,p_2) = E_j(g) + F_n^j(t,x,p_1,p_2), \tag{7}$$

где $g(t,x,p_1)$ – некоторая функция (которую можно рассматривать как лагранжиан функционала (5)), $F_n^j(t,x,p_1,p_2)$ - функции, определяющие “неэйлерову” часть системы уравнений (1).

Наличие функций $F_n^j(t,x,p_1,p_2)$, определяет “отклонение” исходной системы от эйлерова вида. В соответствии с этим “отклонением” условие дивергентной инвариантности, используемое в теореме Нетер, также должно быть записано в измененном виде. Ниже определим вид условия инвариантности QEL системы (1), при выполнении которого законы сохранения системы (1) определяются явным образом (аналогично теореме Нетер).

3 Симметрии QEL систем и законы сохранения

Пусть группа преобразований G определяется с помощью векторного поля X

$$X = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

где $\xi_t(t,x), \xi^j(t,x)$ – некоторые гладкие функции. Определим также векторное поле Ли $\overline{X}$ как продолженное векторное поле X [2].

Если система (1) является эйлеровой системой, то выполняются соотношения (4) и функция g – лагранжиан функционала $I[\,x\,]$. Векторное поле $\overline{X}$ называется инфинитезимальной вариационной симметрией функционала $I[\,x\,]$, если выполняется условие

$$\overline{X}\, g + gD_t(\xi_t) = D_t(B) \tag{8}$$

где $B(t,x,p_1)$ – некоторая функция [2].

Согласно теореме Нетер, если функционал $I[\,x\,]$ имеет группу вариационных симметрий, то существует

функция P, такая, что

$$\frac{d}{dt} P(t,x,p_1) = Q^j E_j(g).$$

Здесь функции Q^j – характеристики векторного поля X, определяемые выражением

$$Q^j = \xi^j - \xi_t p_1^j.$$

Функция $P(t,x,p_1)$, согласно [2], имеет вид

$$P = B - A - \xi_t g, \tag{9}$$

где

$$A = Q^j \frac{\partial g}{\partial p_1^j}. \tag{10}$$

Определение. *Будем называть векторное поле $\overline{X}$ инфинитезимальной вариационной симметрией QEL системы (1), или QEL симметрией если на интегральных многообразиях системы (1) выполняется условие*

$$\overline{X}\, g + Q^j F_n^j + gD_t(\xi_t) = D_t(B). \tag{11}$$

Условие (11) является обобщением условия дивергентной инвариантности, используемого при формулировке теоремы Нетер. Если исходная система уравнений является эйлеровой, то $F_n^j = 0$ и тогда (11) есть условие дивергентной инвариантности [2]. Если же система не имеет эйлеровой части (т.е., $g \equiv 0$), то из (11) следует выражение (3), определяющее характеристики закона сохранения.

Теорема 1. *Пусть система уравнений (1) является QEL системой, т.е., функции F^j имеют вид (7). Тогда, если векторное поле $\overline{X}$ является QEL симметрией системы (1), то характеристики Q^j векторного поля $\overline{X}$ являются характеристиками закона сохранения системы уравнений (1). При этом компонента закона сохранения P определяется выражением (9).*

Доказательство этой теоремы возникает из того факта, что, согласно [2],

$$\overline{X}\, g = Q^j E_j(g) + D_t(A) + \xi_t D_t(g), \tag{12}$$

где $A(t, x, p_1)$ определяется выражением (10). Подставляя (12) в (11), имеем

$$Q^j E_j(g) + D_t(A) + \xi_t D_t(g) + Q^j F_n^j + g D_t(\xi_t) = D_t(B),$$

откуда, с учетом (7), следует

$$Q^j F^j = D_t(B - A - \xi_t g)$$

и теорема доказана.

Используя данную теорему можно также как и по теореме Нетер явным образом выписать законы сохранения QEL системы если известны ее QEL симметрии.

4 Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

Как известно, обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $p_2 - H(t, u, p_1) = 0$ (здесь $H(t, u, p_1)$ – произвольная функция) можно привести к эйлерову виду с помощью умножения на некоторую функцию, которая называется интегрирующим множителем. Задача отыскания интегрирующего множителя сводится к интегрированию уравнения в частных производных [2] и в некоторых случаях является достаточно сложной. Используя теорему, доказанную в предыдущем разделе, можно получить законы сохранения для уравнения второго порядка не приводя исходное уравнение к эйлеровому виду.

Рассмотрим класс уравнений второго порядка для которых интегрирующий множитель есть функция вида $\phi(t, u)$ (не зависит от производных). Тогда можно показать, что интегрирующий множитель определяет связь не только между различными формами записи уравнения, но также и между симметриями, соответствующими различным формам записи уравнения.

Предложение 1. *Пусть Q - характеристика векторного поля X, определяющего QEL симметрию уравнения второго порядка*

$$E(g) + F_n = 0. \tag{13}$$

Пусть также $\phi(t, u)$ – интегрирующий множитель уравнения (13). Тогда $Q^* = Q/\phi$ есть характеристика векторного поля X^*, определяющего инфинитезимальную вариационную симметрию эйлерова уравнения

$$\phi(E(g) + F_n) = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть условия предложения выполнены и пусть $Q = \xi_u(t, u) - \xi_t(t, u)p_1$ – характеристика векторного поля. Тогда можно записать

$$Q(E(g) + F_n) = \frac{Q}{\phi}\phi(E(g) + F_n) = \frac{dP}{dt}. \tag{15}$$

Так как ϕ – интегрирующий множитель, то

$$\phi(E(g) + F_n) = E(g^*),$$

где $g^*(t, u, p_1)$ – некоторая функция (лагранжиан). Обозначим $Q^* = \xi_u^*(t, u) - \xi_t^*(t, u)p_1$, где $\xi_u^*(t, u) = \xi_u/\phi$, $\xi_t^*(t, u) = \xi_t/\phi$. Отсюда, с учетом (15), имеем, что Q^* – характеристика векторного поля, определяющего инфинитезимальную вариационную симметрию уравнения Эйлера - Лагранжа (14) (предложение доказано).

Из доказательства этого предложения также следует, что все векторные поля, полученные нормировкой векторного поля X^* на некоторую функцию координат t, u, могут считаться эквивалентными. Каждое из таких векторных полей определяет QEL симметрию некоторого QEL уравнения и позволяет получить один и тот же закон сохранения.

Сказанное выше можно проиллюстрировать на примере уравнения Эмдена - Фаулера [2]

$$u_{tt} + 2u_t/t + u^5 = 0.$$

Это уравнение запишем в виде

$$p_2 + 2p_1/t + u^5 = 0. \tag{16}$$

Интегрирующий множитель для уравнения (16) есть функция t^2, откуда имеем эйлерову форму уравнения (16)

$$t^2 p_2 + 2tp_1 + t^2 u^5 = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) получается как уравнение Эйлера - Лагранжа для для функционала (5) с лагранжианом $g = -t^2 p_1^2/2 + t^2 u^6/6$. Характеристика векторного поля, определяющего инфинитезимальную вариационную симметрию функционала (5), имеет вид $Q = -u/2 - tp_1$. При этом в выражении (8) функция $B \equiv 0$, а компонента закона сохранения имеет вид

$$P = -(t^3 u^6/3 + t^2 u p_1 + t^3 (p_1)^2)/2.$$

Определим теперь законы сохранения уравнения (16), записав его в не эйлеровом виде

$$tp_2 + 2p_1 + tu^5 = 0. \tag{18}$$

Характеристика векторного поля, определяющего QEL симметрию уравнения (18), имеет вид $Q = -ut/2 - t^2 p_1$. Представим уравнение (18) как QEL уравнение вида (13) и используем теорему 1.

Вид функции F_n в уравнении (13) и функции B в выражении (11) зависит от выбора лагранжиана g. В частности, если $g \equiv 0$, то $F_n = tp_2 + 2p_1 + tu^5$ и $B = P$. Для лагранжина $g = -t(p_1)^2/2$ имеем $F_n = p_1 + tu^5$ и

$$B = -t^3 u^6/6.$$

Отметим, что ограничения на выбранный класс систем уравнений не имеют принципиального характера. Теорему 1 можно обобщить на случай систем уравнений более высокого порядка и на системы уравнений в частных производных.

Автор благодарен Гараеву К.Г. и Павлову В.Г. за замечания по работе.

Литература

[1] Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. – Новосибирск: Изд. НГУ, 1972. 160 с.

[2] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям - М.: Мир, 1989. 689 с.

[3] Кусюмов А.Н. Функционал с фиксированными пределами интегрирования и законы сохранения систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Электронный журнал “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. 2000. N 2. С. 37 - 49.