ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы

Три свойства одной дискретной динамической системы в пространстве бесконечно дифференцируемых функций

И.А. Подлужный, А.А. Флоринский

Санкт-Петербургский Государственный Университет
sherman97@mail.ru ,florinskiy.a@gmail.com

Аннотация

Рассматривается нелинейный оператор, порожденный некоторой функцией двух вещественных переменных и действующий в пространстве бесконечно дифференцируемых вещественных функций одного переменного, пробегающего фиксированный замкнутый промежуток на вещественной прямой. Каждой такой функции одного переменного оператор сопоставляет результат подстановки ее производной в качестве второго аргумента в упомянутую порождающую функцию. Первый аргумент порождающей функции предполагается пробегающим упомянутый промежуток, второй - всю вещественную ось. Также предполагается, что функция является гладкой по совокупности аргументов, строго возрастающей и билипшицевой по второму аргументу. Для каждой траектории порожденной таким оператором дискретной динамической системы (в общем случае хаотической) доказываются следующие три утверждения: поточечная ограниченность траектории сверху эквивалентна ее равномерной ограниченности сверху; поточечная сходимость траектории эквивалентна ее метрической сходимости в пространстве бесконечно дифференцируемых функций; два свойства точной (поточечной) верхней границы траектории эквивалентны: свойство являться точной нижней границей некоторой другой траектории системы и свойство быть неподвижной точкой рассматриваемого оператора. Последнее утверждение является порядковой характеристикой неподвижных точек данного оператора, не являющегося, вообще говоря, монотонным.

Ключевые слова: нелинейный оператор, бесконечномерная динамическая система, траектория, равномерная ограниченность сверху, поточечная ограниченность сверху, наименьшая поточечная верхняя граница, неподвижная точка

Abstract

A nonlinear operator generated by a fixed function of two real variables is considered. The function is supposed to be smooth, the first argument is defined on a closed interval, the second one on the real line. We also assume that this function to be both strictly increasing and bilipshitz by the second argument. The operator acts on the space of all infinitely differentiable real functions defined on the same closed interval as the first argument of the fixed function, and assigns to any such a function the result of the substitution of its derivative instead of the second argument in the fixed function of two variables. For any trajectory of the discrete infinite dimensional dynamical system (which is chaotic in general case) generated by the operator we prove the following properties: a trajectory of the system is uniformly bounded iff it is pointwise bounded ; a trajectory is uniformly convergent with all its derivatives iff it is pointwise convergent; the least pointwise upper bound of the trajectory is also the greatest lower bound of an other trajectory of the system iff it is a fixed point of this system. The last statement gives serial characteristics of fixed points of the operator, which is not monotonous.

Keywords: nonlinear operator; infinite dimensional dynamical system; pointwise bounded trajectory; uniformly bounded trajectory; the least pointwise upper bound of the trajectory; fixed point.

1. Введение

Пусть $f(x,y)$ гладкая (то есть класса C^∞) функция, определенная на полосе $[a,b]\times R\subset R^2$. Функция f порождает нелинейный оператор T, действующий в пространстве $C^\infty[a;b]$ по формуле $T(y)(x)=f(x,y'(x))$; мы будем рассматривать в этой работе указанный оператор T, а также отвечающую ему дискретную динамическую систему, т.е. последовательность $\{T^n\}_{n=0}^\infty$, где $T^0(y)=y, T^n(y)=T^{n-1}(T(y)), y\in C^\infty[a,b]$. В частном случае, когда $f(x,y)=y$, оператор T является оператором дифференцирования ; в этом случае траектория (или орбита) $T^n(v_0)$ произвольной начальной функции $v_0\in C^\infty[a,b]$ совпадает с последовательностью производных этой функции. В работе [5], ставшей одной из отправных точек исследования бесконечномерных динамических систем был установлен ряд хаотических свойств оператора дифференцирования ; обзор различных результатов в этом направлении можно найти в работе [4]. Заметим, что наличие хаотических свойств является одним из источников интереса к изучению рассматриваемой системы, также как и некоторых трудностей при ее исследовании .
Основной интерес к изучению оператора T связан с тем, что его неподвижные точки являются решениями достаточно общего вида дифференциального уравнения $y=f(x,y')$. Наличие в пространстве $C^\infty[a;b]$ порядковой структуры (поточечного порядка, индуцированного из пространства $\mathrm{R}^{[a;b]}$ всех заданных на $[a;b]$ вещественных функций) влечет вопрос о возможности чисто порядковой характеризации неподвижных точек оператора T . Хотя рассматриваемый оператор ни в каком смысле не является монотонным, порядковая характеризация его неподвижных точек оказывается возможной. Такая характеризация получена в теореме 2 настоящей работы. Ее доказательство связано с установлением некоторого дифференциального неравенства для точных граней траекторий оператора; подобного типа неравенства изучаются в литературе с различных точек зрения (см.[3]). Теорема 1 настоящей работы посвящена установлению связей между порядковой (поточечной) и равномерной ограниченностью траекторий системы, порядковой и равномерной их сходимостью; интерес к различным свойствам такого типа традиционен в пространствах имеющих порядковую и метрическую структуры; различные типы ограниченности последовательности производных функции существенны также в вопросах представления этой функции в виде суммы ее ряда Тейлора (см. обсуждение в [1]; ряд фактов о последовательности производных заданной функции, идейно близких частному случаю теоремы 1, можно найти в [2])

2. Определения и формулировка результатов.

Для формулировки результатов работы введем некоторые определения.

Определение 1. Будем говорить, что некоторый оператор S, действующий в пространстве $C^\infty[a;b]$, обладает свойством инвариантной ограниченности траекторий (ИОТ), если для любой из его траекторий поточечная ограниченность этой траектории сверху равносильна ее равномерной ограниченности сверху, и аналогичное утверждение справедливо в отношении ограниченности траекторий снизу.

Определение 2.Будем говорить, оператор S обладает свойством инвариантной сходимости траекторий (ИСТ) в случае, если поточечная сходимость любой из траекторий оператора S равносильна ее метрической сходимости в пространстве $C^\infty[a;b]$, т.е. ее равномерной сходимости вместе со всеми производными.

Определение 3. Будем говорить, что элемент $y \in \mathrm{R}^{[a;b]}$ является разделяющей точкой траекторий оператора S, если существуют элементы $u_0, v_0 \in C^\infty[a,b]$, такие, что справедливо равенство $\sup_{n\geq 0} S^n(u_0) = y = \inf_{n\geq 0} S^n(v_0)$.

Если каждая разделяющая траектории оператора S точка $y \in \mathrm{R}^{[a;b]}$ лежит в $C^\infty[a,b]$ и выполнено равенство $Sy = y$, то мы будем говорить, что оператор S обладает свойством неподвижности разделяющих (траектории) точек (НРТ).

Заметим, что легко формулируется ряд неэквивалентных модификаций данного, как и предыдущих, определений; возможна также замена пространств $C^\infty[a;b]$ и $\mathrm{R}^{[a;b]}$ в рассмотренных определениях различными другими полуупорядоченными пространствами. Мы не будем останавливаться здесь на обсуждении упомянутых модификаций; отметим лишь, что легко проверяется, что не каждый оператор S, действующий в пространстве $C^\infty[a;b]$, обладает свойством НРТ.

Мы будем рассматривать далее описанный в начале работы нелинейный, действующий в пространстве $C^\infty[a;b]$ оператор T, заданный формулой $T(y)(x) = f(x, y'(x))$, где $f(x,y) -$ некоторая функция от двух вещественных аргументов. Мы будем рассматривать только гладкие (класса C^∞) функции $f(x,y)$ заданные на полосе $[a,b] \times R \subset R^2$, строго возрастающие и билипшицевы по второй переменной, то есть такие, что $C_2|t-u| \leqslant |f(x,t) - f(x,u)| \leqslant C_1|t-u|$ при всех допустимых значениях переменных x, t, u . Уравнение

$$y = f(x, y') \tag{1}$$

в этом случае равносильно разрешенному относительно производной неизвестной функции уравнению

$$y' = h(x,y); \tag{2}$$

здесь функция h однозначно определяется по функции f , задана на той же полосе $[a,b] \times R \subset R^2$, что и функция f и принадлежит классу C^∞.

Основными результатами работы являются следующие теоремы 1 и 2.

Теорема 1.

При сделанных выше предположениях, нелинейный оператор T действующий в пространстве $C^\infty[a;b]$, обладает свойствами ИОТ и ИСТ.

Теорема 2.

Оператор T обладает свойством НРТ.

3. **Доказательство теоремы 1.**

Пусть C - число, большее 3, для которого $h(x,y) \leqslant C - 1 + Cy$ для всех допустимых значений x и неотрицательных значений y. Его существование следует из условий, наложенных на функции f и h. Пусть $\{g_n(x)\}$ - произвольная траектория оператора T, с начальным элементом $g_0 \in C^\infty[a;b]$; это значит, что $g_{n+1}(x) = f(x, g'_n(\mathrm{x}))$ и, следовательно, $g_n(x) = h(x, g'_{n+1}(\mathrm{x}))$, для всех целых $n \geq 0$ и всех $x \in [a;b]$. Для доказательства свойства ИОТ предположим, что последовательность $\{g_n(x)\}$ является поточечно ограниченной сверху, но не является равномерно ограниченной сверху. Не умаляя общности, мы будем считать, что $g_0(x) \geq 1,\ x \in [a;b]$. Обозначим

$$g(x) = \sup_n \big(g_n(x)\big). \qquad (3)$$

Разбивая, при необходимости, промежуток $[a;b]$ на конечное число частей, каждая из которых имеет длину меньшую, чем $\frac{1}{C^4}$, и, замечая, что на одной из них последовательность $\{g_n(x)\}$ не является равномерно ограниченной сверху, мы можем, не умаляя общности, считать, что $|b - a| < \frac{1}{C^4}$. Положим, $a_0 = a$, $b_0 = b$. Имеем: существует точка $x_0 \in (a_0;b_0)$ такая, что:

$$g(x_0) > C^2 max(g(a_0), g(b_0)) \ . \qquad (3)$$

Множество тех x, для которых $g(x) > \frac{g(x_0)}{C}$ открыто в силу полунепрерывности снизу функции $g(x)$. Положим: $a_1 = \max\left\{x < x_0 : g(x) \leq \frac{g(x_0)}{C}\right\}, b_1 = x_0$ Тогда на $(a_1;b_1)$ имеем:

$$g(x) > \frac{g(x_0)}{C} \ > C max(g(a_0), g(b_0)) \geq C \min_{[a_0,b_0]} g(x) \qquad (4)$$

Далее, для некоторых $\xi_n \in (a_1;b_1)$ имеем цепочку неравенств :

$$\frac{g(b_1)-g(a_1)}{b_1-a_1} = \sup_n \frac{g_n(b_1)-g(a_1)}{b_1-a_1} \leqslant \sup_n \frac{g_n(b_1)-g_n(a_1)}{b_1-a_1} \leqslant \sup_n g'_n(\xi_n) = \sup_n h\big(\xi_n, g_{n+1}(\xi_n)\big) \leq$$
$$\sup_n \big(C - 1 + C g_{n+1}(\xi_n)\big) \leq \sup_n \big(C - 1 + C g(\xi_n)\big) \ .$$

Независимо от того, конечно или нет последнее выражение, при некотором $\xi \in (a_1;b_1)$ имеем: $\frac{g(b_1)-g(a_1)}{b_1-a_1} < C + Cg(\xi)$. Отсюда $g(\xi) > \frac{g(b_1)-g(a_1)}{b_1-a_1}\frac{1}{C} - 1$ и, при сделанных предположениях,

$$g(\xi) > \frac{g(b_1)-g(a_1)}{b_1-a_1}\frac{1}{C} - 1 > (C^3 - C^2 - \frac{1}{C})g(b_1) > C^2 g(b_1) > C^2 g(a_1) \ . \qquad (5)$$

Положив $x_1 = \xi$ и учитывая (4) и (5), получаем, что существуют промежуток $[a_1;b_1] \subset (a_0;b_0)$ и точка $x_1 \in (a_1;b_1)$, такие, что:

$$g(x_1) > C^2 max(g(a_1), g(b_1)) \text{ и } \inf_{(a_1 b_1)} g(x) > C \min_{[a_0,b_0]} g(x) \qquad (6)$$

Теперь мы можем повторить рассуждения, взяв в качестве исходного промежуток $[a_1;b_1]$ вместо $[a_0;b_0]$; используя далее индукцию, получаем, что существует последовательность вложенных промежутков $[a_n,b_n]$, такая, что для всех натуральных n выполнено:

$$[a_n,b_n] \subset (a_{n-1},b_{n-1}) \text{ и } \inf_{(a_n,b_n)} g(x) > C \min_{[a_{n-1},b_{n-1}]} g(x). \qquad (7)$$

Ясно, что $g(x) = \infty$ в любой общей точке построенных промежутков. Это противоречит поточечной ограниченности последовательности $\{g_n(x)\}$, и доказывает равносильность поточечной и равномерной ограниченности этой последовательности сверху. Аналогичная эквивалентность справедлива и для ограниченности снизу. Тем самым, оператор T обладает свойством ИОТ.

Чтобы проверить теперь свойство ИСТ предположим, что последовательность $g_n(x)$сходится поточечно на$[a,b]$. Тогда она поточечно ограничена, и, следовательно, равномерно ограничена на $[a,b]$. Пусть $\sup_{(a;b),n}|g_n(x)| = \mathrm{G}$; из соотношения $g'_n(x) = h\big(x, g_{n+1}(x)\big)$ и ограниченности функции $h(x,y)$на $[a,b] \times [-G,G]$ следует, что последовательность $g'_n(x)$ также равномерно ограничена на $[a,b]$. Равномерная ограниченность последовательности g'_n влечет равностепенную непрерывность последовательности g_n, а вместе с поточечной сходимостью g_n ее равномерную сходимость; равномерная сходимость производных любого порядка функций g_n легко проверяется индукцией по порядку дифференцирования; тем самым, последовательность g_n сходится в пространстве $C^\infty[a;b]$. Заметим, что пределом данной последовательности, являющейся орбитой оператора T, может быть лишь его неподвижная точка. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2.

Пусть $g(x) = \sup_{n\geq 0}\big(g_n(x)\big)$ - точная верхняя граница траектории $\{g_n\}$ оператора T и, одновременно, точная нижняя граница некоторой другой его траектории. Тогда функция $g(x)$ непрерывна (т.к. она полунепрерывна сверху и снизу). Рассмотрим любые $x, t \in [a, b]$. Для определенности будем считать, что $t < x$. Тогда, аналогично доказательству теоремы 1, имеем для некоторых $\xi_n \in (t; x)$:

$$\frac{g(x)-g(t)}{x-t} = \sup_n \frac{g_n(x)-g(t)}{x-t} \leqslant \sup_n \frac{g_n(x)-g_n(t)}{x-t} = \sup_n g'_n(\xi_n) = \sup_n h\big(\xi_n, g_{n+1}(\xi_n)\big)$$

Следовательно,

$$\frac{g(x)-g(t)}{x-t} \leq \sup_{\xi\in(t;x)} \big(h(\xi, g(\xi)\big)\,. \tag{8}$$

Учитывая непрерывность функции $h\big(x, g(x)\big)$ и переходя к верхнему пределу при $x \to t$ в обеих частях неравенства (8), получаем: $D\big(g(t)\big) \leq h\big(t, g(t)\big)$, где через $D\big(g(t)\big)$ обозначена верхняя производная функции $g(t)$. Аналогично, для нижней производной $d\big(g(t)\big)$, пользуясь тем, что функция g является точной нижней границей одной из траекторий оператора T, получим: $d\big(g(t)\big) \geq h\big(t, g(t)\big)$. Таким образом функция $y = g(x)$ дифференцируема и для нее справедливо равенство $y' = h(x, y)$; это равенство влечет, что рассматриваемая функция $y = g(x)$ бесконечно дифференцируема и является неподвижной точкой оператора T. Теорема доказана.

Заключение.

В заключение авторы выражают благодарность А.Н. Подкорытову, О.А. Виноградову, Ю.А. Ильину и Н.Б. Ампиловой за полезные обсуждения различных аспектов работы.

Список литературы

1. R. P. Boas «When is a C^∞function analytic?» Math. Intellegencer 11, №4, 1989, 34-37.
2. B.M. Makarov, M.G. Golusina, A.A. Lodkin, A.N. Podkorytov. Problemes d’analise reele. Paris, Cassini, 2010, 593 P.
3. Ilyin Y. A. “General problems of integration of differential inequalities in explicit form”, Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy. 2017, vol. 4(62), issue 4. 597-607.
4. Karl-Gosurin, Grosse Erdman “Universal Families and Hypercyclic operators”, Bulletin of the AMS, vol. 36 №3,345-381.
5.G.R. MacLane. Sequences of derivatives and normal families, J. Analise Math. (1952/53), MR 14:741d.