

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

и

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N. 3, 2019

Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

О диапазоне захвата без проскальзывания для систем фазовой синхронизации с кусочно-линейной характеристикой фазового детектора

Благов М.В.¹, Кузнецов Н.В.^{1,2}, Юлдашев М.В.¹, Юлдашев Р.В.¹

¹ Санкт-Петербургский Государственный Университет,
mikhail.blagov@gmail.com, nkuznetsov239@gmail.com

² Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Аннотация

Системы фазовой синхронизации (СФС) являются классическими нелинейными системами управления для подстройки частоты и фазы в электрических цепях. В данной работе рассматривается задача оценки диапазона захвата без проскальзывания для классической СФС с кусочно-линейной характеристикой фазового детектора. Рассматриваются системы с фильтром типа «идеальный интегратор» и пропорционально-интегрирующим фильтром. Приводится аналитико-численный метод для оценки диапазона захвата без проскальзывания, результаты сравниваются с ранее известными.

Ключевые слова: СФС, системы фазовой синхронизации, ФАПЧ, фазовая автоподстройка частоты, нелинейный анализ, диапазон захвата без проскальзывания.

Abstract

PLL (Phase-locked loops) are classical nonlinear control systems that tune frequency and phase in electrical circuits. In this article a problem of the lock-in range estimation for classical PLL with piecewise-linear phase detector characteristic is considered. Systems with PI and Lead-lag filters are considered.

An analytical-numerical method of the lock-in range estimation is given, results are compared with previously known.

Key words: PLL, Phase-locked looks, nonlinear analysis, lock-in range.

1 Введение

Системы фазовой автоподстройки (СФС) получили широкое применение в телекоммуникациях и компьютерной архитектуре [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Важными характеристиками системы являются *диапазоны удержания, захвата и захвата без проскальзывания*. Понятия диапазона удержания и диапазона захвата широко известны и хорошо изучены (см., например [9]).

Идея определения диапазона захвата без проскальзывания была рассмотрена в 1966 году Ф. Гарднером и широко используется в современной инженерной литературе¹.

В данной статье уточняются оценки диапазона захвата без проскальзывания, полученные ранее в работах [24, 9, 25] с использованием более строгого определения для СФС с фильтром типа «идеальный интегратор» и обобщённой треугольной характеристикой фазового детектора. Аналитические результаты проверяются моделированием.

2 Математическая модель СФС

Рассмотрим математическую модель СФС в пространстве фаз сигналов [26, 1, 27, 28], изображенную на рис. 1.

¹ См. работы [10, стр.34-35], [11, стр.49], [12, стр.4],[13, стр.24], [14, стр.749], [15, стр.56], [16, стр.112], [17, стр.138], [18, стр.576], [19, стр.809], [20, стр.258], [21, стр.417], [22, стр.92], [23, стр.387].

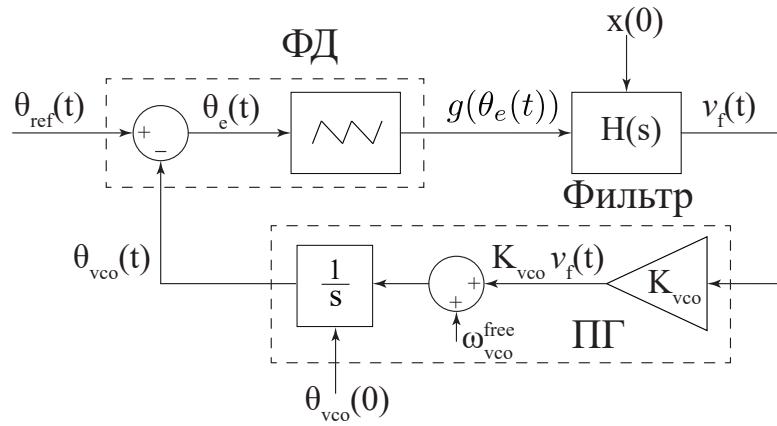


Рис. 1: Модель классической СФС с треугольной характеристикой фазового детектора в пространстве фаз сигналов.

Здесь $\theta_{\text{ref}}(t)$ — это входной сигнал с постоянной частотой $\dot{\theta}_{\text{ref}}(t) = \omega_{\text{ref}}(t)$. Фаза подстраиваемого генератора — $\theta_{\text{vco}}(t)$, мгновенная частота подстраиваемого генератора — $\dot{\theta}_{\text{vco}}(t) = \omega_{\text{vco}}(t)$. Фазовый детектор генерирует сигнал $v_e(t)$, который называется характеристикой фазового детектора. В общем случае он зависит от форм сигналов и конструкции СФС [28]. У СФС, работающей с импульсными сигналами, характеристика фазового детектора будет треугольной. Другим примером СФС с треугольной характеристикой является модифицированная квадратурная схема Костаса [29, 8, 7, 30]. В данной работе рассматривается обобщённая кусочно-линейная характеристика (1), которая в частном случае $k = \frac{2}{\pi}$ даёт треугольную (см. рис. 2)²:

$$v_e(\theta_e) = \begin{cases} k\theta_e - 2\pi kn, & \text{if } -\frac{1}{k} + 2\pi n \leq \theta_e(t) \leq \frac{1}{k} + 2\pi n, \\ -\frac{1}{\pi - \frac{1}{k}}\theta_e + \frac{1}{\pi - \frac{1}{k}}(\pi + 2\pi n), & \text{if } \frac{1}{k} + 2\pi n \leq \theta_e(t) \leq -\frac{1}{k} + 2\pi(n+1), \end{cases} \quad (1)$$

где $k \in (\frac{1}{\pi}, +\infty)$, $n \in \mathbb{Z}$.

²Случай $k = \frac{1}{\pi}$ соответствует пилообразной характеристике фазового детектора.

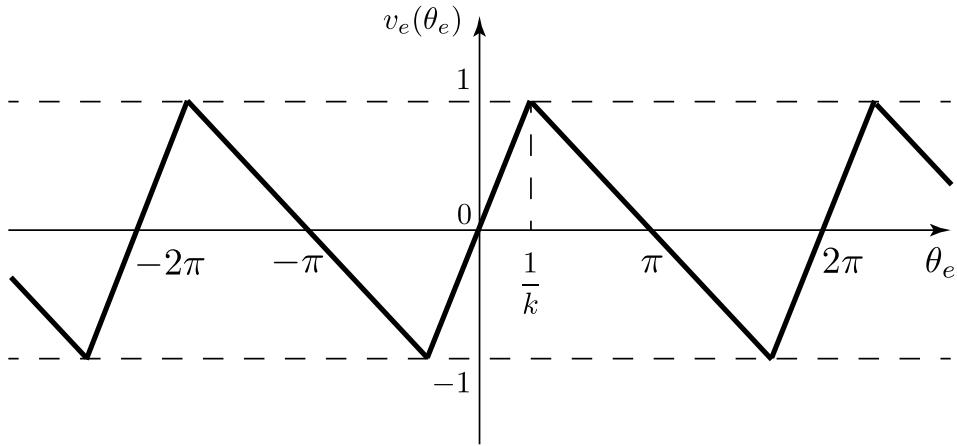


Рис. 2: Кусочно-линейная характеристика фазового детектора

Связь между входом $v_e(\theta_e(t))$ и выходом $v_f(t)$ фильтра описывается соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{1}{\tau_1}v_e(\theta_e(t)), \\ v_f(t) &= x(t) + \frac{\tau_2}{\tau_1}v_e(\theta_e(t)), \\ H(s) &= \frac{1 + \tau_2 s}{\tau_1 s}, \quad \tau_1 > 0, \quad \tau_2 > 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где $x(t)$ — состояние фильтра, $H(s)$ — передаточная функция.

Сигнал управления $v_f(t)$ изменяет частоту подстраиваемого генератора:

$$\dot{\theta}_{\text{vco}}(t) = \omega_{\text{vco}}(t) = \omega_{\text{vco}}^{\text{free}} + K_{\text{vco}}v_f(t),\tag{3}$$

где $\omega_{\text{vco}}^{\text{free}}$ — частота свободных колебаний подстраиваемого генератора $K_{\text{vco}} > 0$ — усиление.

Частота входного сигнала полагается постоянной:

$$\dot{\theta}_{\text{ref}}(t) = \omega_{\text{ref}}(t) \equiv \omega_{\text{ref}}.\tag{4}$$

Разность между частотой входного сигнала и частотой свободных колебаний подстраиваемого генератора обозначается как ω_e^{free} :

$$\omega_e^{\text{free}} \equiv \omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{vco}}^{\text{free}}.\tag{5}$$

Объединяя уравнения (2), и (3)–(5) получаем *нелинейную математическую модель в пространстве фаз сигналов* (т.е. в пространстве состояний):

состояние фильтра x и разность между фазами сигналов θ_e):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{\tau_1} v_e(\theta_e(t)), \\ \dot{\theta}_e = \omega_e^{\text{free}} - K_{\text{vco}} \left(x(t) + \frac{\tau_2}{\tau_1} v_e(\theta_e(t)) \right). \end{cases} \quad (6)$$

Начальное состояние системы определяется $\theta_e(0)$ (начальный сдвиг фазы сигнала подстраиваемого генератора по отношению к фазу входного сигнала) и $x(0)$ (начальное состояние фильтра).

Отметим, что система (6) не меняется при трансформации

$$(\omega_e^{\text{free}}, x(t), \theta_e(t)) \rightarrow (-\omega_e^{\text{free}}, -x(t), -\theta_e(t)), \quad (7)$$

что позволяет проводить исследование (6) только для $\omega_e^{\text{free}} > 0$ и ввести понятие *отклонения частоты*:

$$|\omega_e^{\text{free}}| = |\omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{vco}}^{\text{free}}|. \quad (8)$$

Рассмотрим условия полной синхронизации для нелинейной математической модели СФС в пространстве фаз сигналов (6), т.е. разность частот равняется 0 и разность фаз $\theta_e(t)$ постоянна:

$$\dot{\theta}_e(t) \equiv 0, \quad \theta_e(t) \equiv \theta_{eq}.$$

Для второго уравнения из (6) соотношение, приведённое выше означает, что состояние фильтра также постоянно: $x(t) \equiv x_{eq}$, что в свою очередь влечёт $\dot{x}(t) \equiv 0$. Состояния равновесия (θ_{eq}, x_{eq}) определяются из равенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_1} v_e(\theta_{eq}(\omega_e^{\text{free}})) &= 0, \\ \omega_e^{\text{free}} - K_{\text{vco}} x_{eq}(\omega_e^{\text{free}}) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь состояния равновесия

$$(\theta_{eq}^{nu}, x_{eq}^{nu}) = \left(\pi + 2\pi n, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} \right), n \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

устойчивы, а состояния равновесия

$$(\theta_{eq}^{ns}, x_{eq}^{ns}) = \left(2\pi n, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} \right), n \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

являются сёдлами. Здесь и далее верхний индекс ' s ' означает устойчивое состояние равновесия, а верхний индекс ' u ' — седло.

3 Диапазон захвата без проскальзывания

Отклонения частоты, для которых модель СФС в пространстве фаз сигналов достигает состояния равновесия для любого начального состояния соответствует *диапазону захвата* $[0, \omega_p)$ (см., например, [31, 25]). Для модели (6) может быть показано, что диапазон захвата неограничен (см., например, [32, 33]).

Определение 1 Если $\sup_{t \rightarrow +\infty} |\theta_e(0) - \theta_e(t)| \geq 2\pi$, говорят, что происходит проскальзывание циклов.

Для любого ω_e^{free} фазовый портрет системы (6) имеет области, где у траекторий нет проскальзывания циклов (область притяжения без проскальзывания циклов $D_{\text{lock-in}}(\Omega)$). Область притяжения без проскальзывания является объединением локальных областей притяжения без проскальзывания $D_{\text{lock-in}}(\omega_e^{\text{free}})$, каждая из которых имеет свою форму.

Определение 2 [31, 25, 34] Диапазоном захвата без проскальзывания называется такой наибольший интервал отклонения частот $|\omega_e^{\text{free}}| \in [0, \omega_l)$, что математическая модель СФС в пространстве фаз сигналов является глобально асимптотически устойчивой и все её состояния равновесия содержатся в области

$$D_{\text{lock-in}}((-\omega_l, \omega_l)) = \bigcap_{|\omega_e^{\text{free}}| < \omega_l} D_{\text{lock-in}}(\omega_e^{\text{free}}).$$

Определение 3 Отклонение частот ω_l называется частотой захвата без проскальзывания.

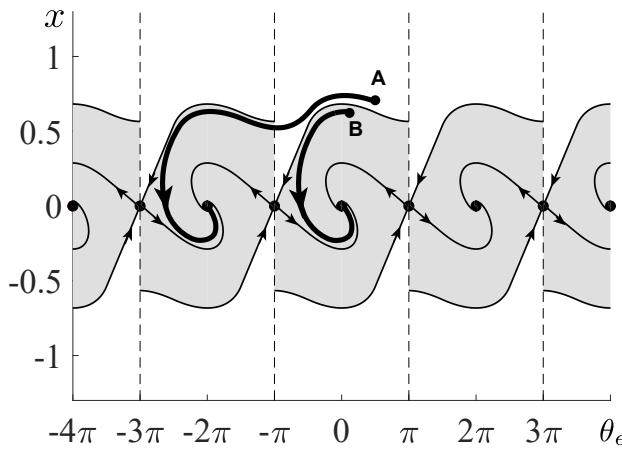


Рис. 3: Фазовый портрет модели (6) с параметрами $H(s) = \frac{1+s\tau_2}{s\tau_1}$, $\tau_1 = 0.0633$, $\tau_2 = 0.0225$, $K_{\text{vco}} = 250$, $\omega_e^{\text{free}} = 0$ $v_e(\theta_e)$ определённой формулой (1). Серой заливкой отмечены локальные области захвата без проскальзывания $D_{\text{lock-in}}$ вокруг каждого состояния равновесия.

Область захвата без проскальзывания $D_{\text{lock-in}}(\omega_e^{\text{free}})$ согласно определению 1 отмечена серой заливкой на рис. 3. На этой иллюстрации для траектории, начинающейся в точке A происходят проскальзывания циклов, в отличие от траектории, начинающейся в точке B . Таким образом, даже для нулевой расфазировки для некоторых траекторий можно наблюдать проскальзывание циклов.

4 Аналитическая оценка диапазона захвата без проскальзывания

Положим отклонение частот $|\tilde{\omega}| = 0$. Симметричные состояния равновесия системы (6), $(\theta_{eq}^{nu}, x_{eq}(|\tilde{\omega}|))$ и $(\theta_{eq}^{nu}, x_{eq}(-|\tilde{\omega}|))$, совпадают и находятся внутри $D_{\text{lock-in}}(0)$. Далее увеличиваем $|\tilde{\omega}|$, до тех пор, пока $(\theta_{eq}^{nu}, x_{eq}(|\tilde{\omega}|))$ и $(\theta_{eq}^{nu}, x_{eq}(-|\tilde{\omega}|))$ не достигнут границы $D_{\text{lock-in}}(-|\tilde{\omega}|)$ и $D_{\text{lock-in}}(|\tilde{\omega}|)$ соответственно. Этот случай соответствует частоте захвата без проскальзывания ω_l . Дальнейшее увеличение $|\tilde{\omega}|$ ведёт к тому, что симметричные состояния равновесия (6) покидают пересечение областей захвата без проскальзывания.

Таким образом частота захвата без проскальзывания ω_l системы (6) соответствует случаю

$$x_{eq}(-\omega_l) = Q_0 \left(\theta_{eq}^{(-1)u}, \omega_l \right), \quad (11)$$

где $Q_0(\theta_{eq}^{(-1)u}, \omega_l)$ — сепаратриса седла $(\theta_{eq}^{0u}, \omega_l)$. Отсюда для частоты захвата

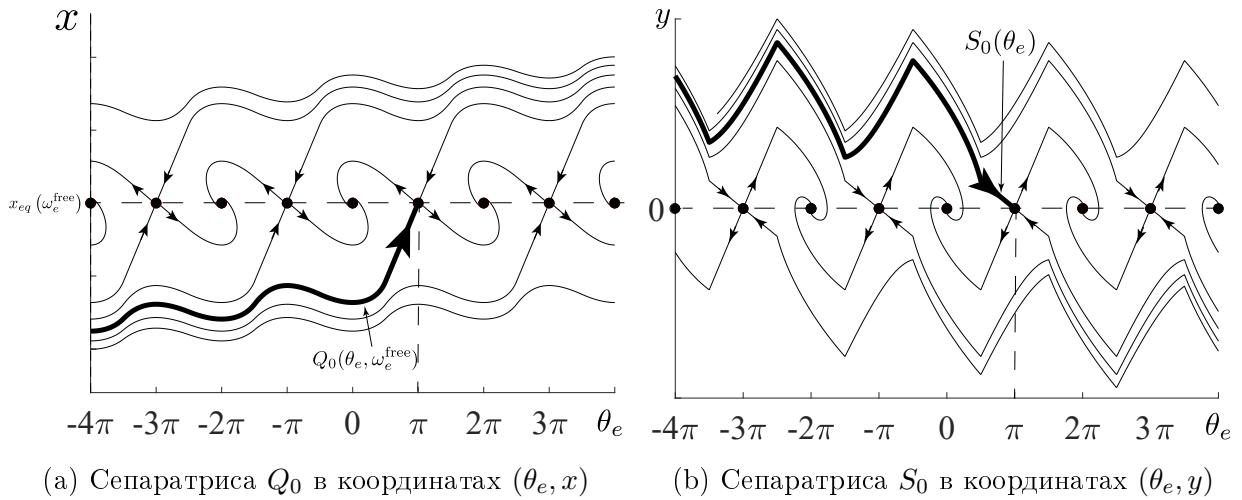


Рис. 4: Фазовые портреты (14) и (17) соответственно.

без проскальзывания ω_l имеем:

$$-\frac{\omega_l}{K_{\text{vco}}} = \frac{\omega_l}{K_{\text{vco}}} + Q_0 \left(\theta_{eq}^{(-1)u}, 0 \right), \quad (12)$$

$$\omega_l = -\frac{K_{\text{vco}} Q_0 \left(\theta_{eq}^{(-1)u}, 0 \right)}{2}. \quad (13)$$

Для определённой характеристики фазового детектора (k в (1) фиксировано) частота захвата без проскальзывания может быть рассмотрена как функция от параметров системы (6): $\omega_l = \omega_l(K_{\text{vco}}, \tau_1, \tau_2)$, т.е. каждой тройке $(K_{\text{vco}}, \tau_1, \tau_2)$ соответствует своё значение ω_l . Для того, чтобы представить зависимость частоты захвата без проскальзывания ω_l от параметров модели (6) на двумерном графике, проведём следующую процедуру. Рассмотрим линейное преобразование $x \rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1}x$, $t \rightarrow \tau_2t$. Система (6) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_e(\theta_e), \\ \dot{\theta}_e = \tau_2 \omega_e^{\text{free}} - \frac{K_{\text{vco}} \tau_2^2}{\tau_1} (x + v_e(\theta_e)). \end{cases} \quad (14)$$

Такое линейное преобразование изменяет масштаб фазового портрета системы (6) по переменной x и не влияет на проскальзывания циклов и диапазон захвата без проскальзывания.

Для системы с изменённым масштабом (14) значение $\tau_2 \omega_l$ является функцией *одного* параметра $\frac{K_0 \tau_2^2}{\tau_1}$. Отметим, что для системы (14) соотношение (13) принимает вид³

$$\omega_l = -\frac{K_{\text{vco}} \tau_2 Q_0(\theta_{eq}^{(-1)u}, 0)}{2 \tau_1}. \quad (15)$$

³Здесь и далее $Q(\theta_e, \omega_e^{\text{free}})$ обозначает сепаратрису системы с изменённым масштабом (14).

Перепишем (14) обозначая $a = \sqrt{\frac{K_{\text{vco}}\tau_2^2}{\tau_1}}$ и применяя линейное преобразование $t \rightarrow \frac{1}{a}t$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{a}v_e(\theta_e), \\ \dot{\theta}_e = \frac{\tau_2\omega_e^{\text{free}}}{a} - a(x + v_e(\theta_e)). \end{cases} \quad (16)$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_e = y, \\ \dot{y} = -av'_e(\theta_e)y - v_e(\theta_e), \end{cases} \quad (17)$$

где $y = \frac{\tau_2\omega_e^{\text{free}}}{a} - a(x + v_e(\theta_e))$. Она эквивалентна системе (14) и позволяет исключить ω_e^{free} из дальнейшего рассмотрения.

Отметим, что состояния равновесия (θ_{eq}, y_{eq}) системы (14) и соответствующие состояния равновесия (θ_{eq}, x_{eq}) системы (17) одного и того же типа и связаны соотношением

$$(\theta_{eq}, y_{eq}) = \left(\theta_{eq}, \frac{\tau_2\omega_e^{\text{free}}}{a} - ax_{eq} \right). \quad (18)$$

Сепаратриса $Q_0(\theta_e, \omega_e^{\text{free}})$ из (15) соответствует сепаратрисе $S_0(\theta_e)$ на фазовой плоскости (17) и выполнено соотношение

$$Q_0(\theta_e, \omega_e^{\text{free}}) = \frac{1}{a} \left(\frac{\tau_2\omega_e^{\text{free}}}{a} - S_0(\theta_e) \right). \quad (19)$$

Следовательно ω_l определяется формулой

$$\omega_l = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_{\text{vco}}}{\tau_1}} S_0(\theta_{eq}^{-1u}). \quad (20)$$

Чтобы получить $S_0(\theta_{eq}^{-1u}) = S_0(-\pi)$ поделим второе уравнение системы (17) на первое⁴:

$$\frac{dy}{d\theta_e} = -av'_e(\theta_e) - \frac{v_e(\theta_e)}{y} \quad (21)$$

После этого следует рассмотреть траектории (21) на трёх отрезках по θ_e и найти для них траектории системы на фазовой плоскости (см. рис. 5).

⁴Подобный способ рассмотрения используется в работе [35] для оценки частоты выхода из синхронизма для СФС с треугольной характеристикой фазового детектора.

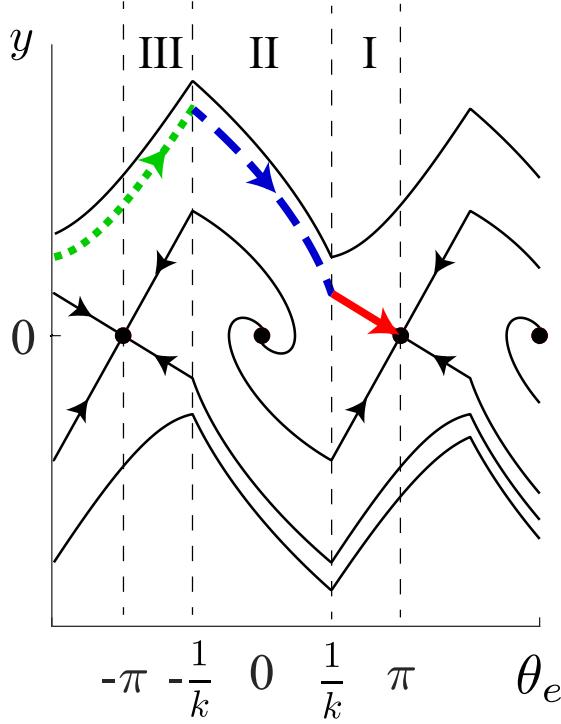


Рис. 5: Фазовый портрет (17), иллюстрирующий шаги процесса интегрирования сепаратрисы. Красная (жиная сплошная) линия на отрезке I — собственный вектор седла $(\pi, 0)$. Синяя (прерывистая) линия на отрезке II и зелёная (изображена точками) линия на отрезке III — интегральные кривые

Для отрезка $\theta_e \in I = [\frac{1}{k}, \pi]$, сепаратрисой является собственный вектор седлового состояния равновесия. Траектория системы представляет из себя прямую

$$y = \frac{\sqrt{a^2 + 4(\pi - \frac{1}{k})} - a}{2(\pi - \frac{1}{k})} (\pi - x), \quad (22)$$

Тогда

$$S\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\sqrt{a^2 + 4(\pi - \frac{1}{k})} - a}{2}. \quad (23)$$

Для $\theta_e \in II = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ уравнение (21) примет вид

$$\frac{dy}{d\theta_e} = -ak - \frac{k\theta_e}{y}. \quad (24)$$

После замены $z = \frac{y}{\theta_e}$ уравнение (24) сводится к уравнению с разделёнными переменными

$$\frac{zdz}{z^2 + akz + k} = -\frac{d\theta_e}{\theta_e}. \quad (25)$$

Взяв интеграл от левой и правой частей и вернувшись обратно к координатам (θ_e, y) , получаем общее решение уравнения (24) в виде $F(\theta_e, y, a, k) + C_F = 0$.

Аналогично для $\theta_e \in \text{III} = [-\pi, -\frac{1}{k}]$:

$$\frac{dy}{d\theta_e} = \frac{1}{\pi - \frac{1}{k}} \left(a + \frac{\theta_e + \pi}{y} \right). \quad (26)$$

После замены $z = \frac{y}{\theta_e + \pi}$ получаем

$$\left(\pi - \frac{1}{k} \right) \frac{zdz}{(\pi - \frac{1}{k}) z^2 - az - 1} = -\frac{d\theta_e}{\theta_e + \pi}, \quad (27)$$

взяв интеграл от левой и правой частей и вернувшись обратно к координатам (θ_e, y) , получаем общее решение уравнения (26) в виде $G(\theta_e, y, a, k) + C_G = 0$.

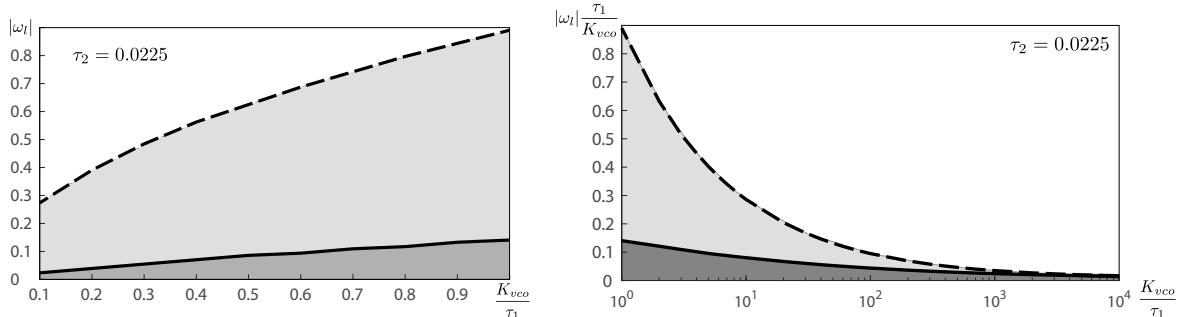


Рис. 6: Диаграммы диапазона захвата без проскальзывания для классической СФС с треугольной характеристикой фазового детектора и фильтром типа "идеальный интегратор". Здесь диаграммы даны для фиксированного $\tau_2 = 0.0225$. Прерывистая линия и светло сеярая заливка соответствуют оценке, данной в [24], сплошная линия и тёмно-серая заливка — оценке, данной в этой работе.

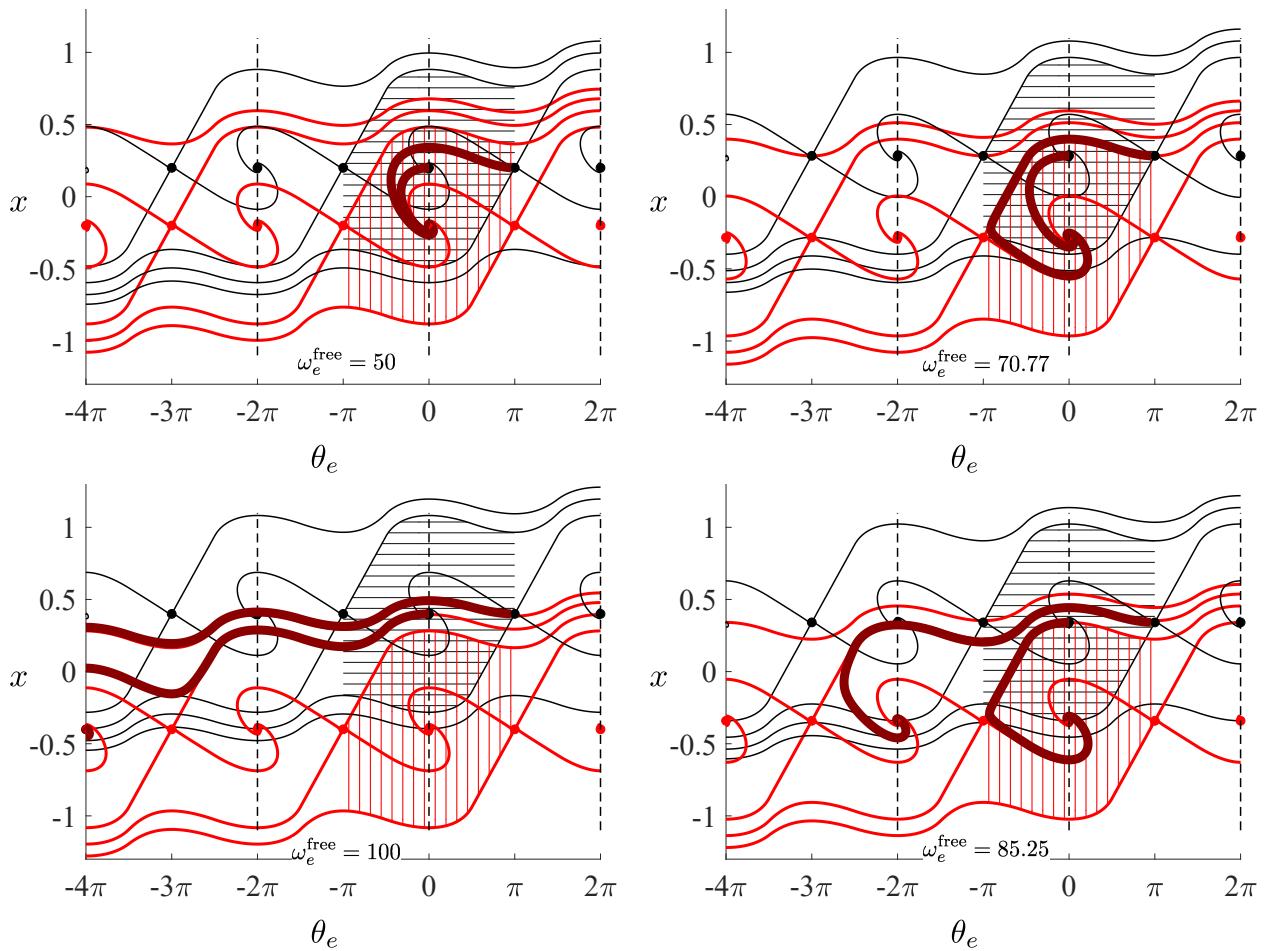


Рис. 7: Фазовый портреты для модели (6) с параметрами: $H(s) = \frac{1+st_2}{st_1}$, $\tau_1 = 0.0633$, $\tau_2 = 0.0225$, $K_{\text{vco}} = 250$, $v_e(\theta_e)$ по формуле (1). Чёрные(тонкие) линии соответствуют модели с положительным $\omega_e^{\text{free}} = |\tilde{\omega}|$. Красные (толстые) линии — модели с отрицательным $\omega_e^{\text{free}} = -|\tilde{\omega}|$. Состояния равновесия обозначены точками, сепаратрисы входят в сёдла и выходят из них, области захвата без проскальзывания заштрихованы (чёрные горизонтальные линии для $\omega_e^{\text{free}} > 0$, красные вертикальные линии для $\omega_e^{\text{free}} < 0$). Бордовые (самые толстые) линии из чёрного состояния равновесия после резкого изменения $\omega_e^{\text{free}} \rightarrow -|\tilde{\omega}|$. Левые верхняя и нижняя иллюстрации изображают поведение системы при $\omega_e^{\text{free}} < \omega_{\text{lock-in}}$ и $\omega_e^{\text{free}} > \omega_{\text{lock-in}}$, соответственно. Правые верхняя и нижняя картинки изображают оценку диапазона захвата без проскальзывания в соответствие со всеми состояниями равновесия ($\omega_{\text{lock-in}} \approx 70.77$) и только с устойчивыми состояниями равновесия ($\omega_{\text{lock-in}} \approx 85.25$), соответственно.

Константы интегрирования следует определить, установив для каждого из промежутков краевую задачу: $(\theta_e, y) = (\frac{1}{k}, S(\frac{1}{k}))$ и $(\theta_e, y) = (-\frac{1}{k}, S(-\frac{1}{k}))$ соответственно. Здесь $S(-\frac{1}{k})$ — решение уравнения $F(\theta_e, y, a, k) + C_F = 0$ относительно y . Искомое $S(-\pi)$ — решение уравнения $G(\theta_e, y, a, k) + C_G$ ⁵.

Отметим, что деление уравнений и дальнейшее рассмотрение решений в

⁵ Для пропорционально интегрирующего фильтра с передаточной функцией $H(s) = \frac{1+\tau_2 s}{1+(\tau_1+\tau_2)s}$ можно провести аналогичные построения.

виде неявных функций позволяет избавиться от времени и упросить выкладки, использовавшиеся для анализа СФС в работе [36].

На рис.6 для $\tau_2 = 0.0225$ приведены диаграммы, полученные с помощью описанного метода и их сравнение с результатами из работы [24], где в определении диапазона учитывалось только устойчивое состояние равновесия.

5 Заключение

В данной работе обсуждается строгое определение диапазона захвата без проскальзывания, приводится метод для вычисления диапазона захвата без проскальзывания для классической СФС с обобщённой кусочно-линейной характеристикой фазового детектора. Данный метод применим к СФС с различными фильтрами, например, типа "идеальный интегратор". Результаты, полученные аналитическим методом, подтверждаются численным моделированием.

6 Благодарности

Данная работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19-41-02002.

Список литературы

- [1] Viterbi A. Principles of coherent communications. New York: McGraw-Hill, 1966. P. 321.
- [2] Leonov G.A. Phase-locked loops. Theory and application // Automation and Remote Control. 2006. Vol. 10. P. 1573–1609.
- [3] Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Nonlinear dynamics of phase synchronization systems (in Russian). Nizhni Novgorod University Press, 2013.
- [4] Shakhtar B.I., Sizik V.V., Sidorkina Yu.A. Sinkhronizatsiya v radiosvyazi i radionavigatsii [Synchronization in radio communication and navigation] // Moscow, Goryachaya Liniya-Telekom Publ. 2011.
- [5] Best R.E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Application. 6th edition. McGraw-Hill, 2007. P. 490.

- [6] Kolumban Geza. Software Defined Electronics: A Revolutionary Change in Design and Teaching Paradigm of RF Radio Communications Systems // ICT Express. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 44 – 54.
- [7] Best R.E. Costas Loops: Theory, Design, and Simulation. Springer International Publishing, 2018.
- [8] Ladvánszky János. A COSTAS LOOP VARIANT FOR LARGE NOISE // Journal of Asian Scientific Research. 2018. Vol. 8, no. 3. P. 144–151.
- [9] Alexandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. et al. Pull-in range of the classical {PLL} with impulse signals // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, no. 1. P. 562–567.
- [10] Best R.E. Phase-locked Loops: Design, Simulation, and Applications. McGraw Hill, 1984.
- [11] Kihara M., Ono S., Eskelinen P. Digital Clocks for Synchronization and Communications. Artech House, 2002. P. 269.
- [12] Abramovitch D. Phase-Locked Loops: A control Centric Tutorial // American Control Conf. Proc. Vol. 1. IEEE, 2002. P. 1–15.
- [13] De Muer B., Steyaert M. CMOS Fractional-N Synthesizers: Design for High Spectral Purity and Monolithic Integration. Springer, 2003.
- [14] Dyer S.A. Wiley Survey of Instrumentation and Measurement. Wiley, 2004.
- [15] Shu K., Sanchez-Sinencio E. CMOS PLL synthesizers: analysis and design. Springer, 2005.
- [16] Goldman S.J. Phase-Locked Loops Engineering Handbook for Integrated Circuits. Artech House, 2007.
- [17] Egan W.F. Phase-Lock Basics. Wiley-IEEE Press, 2007.
- [18] Baker R.J. CMOS: Circuit Design, Layout, and Simulation. IEEE Press Series on Microelectronic Systems. Wiley-IEEE Press, 2011.
- [19] Ndjountche T. CMOS Analog Integrated Circuits: High-Speed and Power-Efficient Design. CRC Press, 2017.
- [20] Kroupa V.F. Frequency Stability: Introduction and Applications. IEEE Series on Digital & Mobile Communication. Wiley-IEEE Press, 2012. P. 328.

- [21] Roush T.J. Wireless Receiver Architectures and Design: Antennas, RF, Synthesizers, Mixed Signal, and Digital Signal Processing. Elsevier Science, 2014.
- [22] Purkayastha B.B., Sarma K.K. A Digital Phase Locked Loop based Signal and Symbol Recovery System for Wireless Channel. Springer, 2015.
- [23] Middlestead R.W. Digital Communications with Emphasis on Data Modems: Theory, Analysis, Design, Simulation, Testing, and Applications. Wiley, 2017.
- [24] Aleksandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. et al. Lock-in range of classical PLL with impulse signals and proportionally-integrating filter // arXiv preprint arXiv:1603.09363. 2016.
- [25] Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory // IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, no. 10. P. 2454–2464.
- [26] Gardner F.M. Phaselock techniques. New York: John Wiley & Sons, 1966. P. 182.
- [27] Shakhgil'dyan V.V., Lyakhovkin A.A. Fazovaya avtopodstroika chastoty (in Russian). Moscow: Svyaz', 1966.
- [28] Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Analytical method for computation of phase-detector characteristic // IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: Express Briefs. 2012. Vol. 59, no. 10. P. 633–647.
- [29] Ladvánszky Janos. A Costas loop with differential coding // IJCRR. 2017. P. 20305–20310.
- [30] Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Leonov G.A. et al. Simulation of nonlinear models of QPSK Costas loop in MatLab Simulink // 2014 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). Vol. 2015-January. IEEE, 2014. P. 66–71.
- [31] Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Rigorous mathematical definitions of the hold-in and pull-in ranges for phase-locked loops // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, no. 11. P. 710–713.

- [32] Leonov G.A., Aleksandrov K.D. Frequency-Domain Criteria for the Global Stability of Phase Synchronization Systems // Doklady Mathematics. 2015. Vol. 92, no. 3. P. 764–768.
- [33] Alexandrov K.D., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. et al. Pull-in range of the PLL-based circuits with proportionally-integrating filter // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, no. 11. P. 720–724.
- [34] Best R.E., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. et al. Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop // IFAC Annual Reviews in Control. 2016. Vol. 42. P. 27–49.
- [35] Huque A.S., Stensby J. An analytical approximation for the pull-out frequency of a PLL employing a sinusoidal phase detector // ETRI Journal. 2013. Vol. 35, no. 2. P. 218–225.
- [36] Shakhtar B.I. Study of a piecewise-linear system of phase-locked frequency control // Radiotekhnika and elektronika (in Russian). 1969. no. 8. P. 1415–1424.