ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2025
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Вариационное происхождение ступенчато-неавтономного уравнения Бихари на геометрическом графе

Н. Д. Арахов*, В. Л. Прядиев**, Н. Н. Рябцева***

*,**Воронежский государственный университет, ***Белгородский университет потребительской кооперации

*arahovnikita@gmail.com, **pryad@mail.ru, ***riabceva-nn@yandex.ru

Аннотация. Для обыкновенного дифференциального уравнения вида $y''(x) + p(x)f(y(x))g(y'(x)) = 0$, расматриваемого сначала при $p \equiv \mathrm{const} \neq 0$ на интервале, а затем при кусочно-постоянной p на геометрическом графе, решена обратная задача вариационного исчисления, причём без предположения о дифференцируемости g, которая предполагается в известных общего вида решениях этой задачи.

Ключевые слова: нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, геометрический граф, обратная задача вариационного исчисления.

Введение.

Исходным предметом исследования в статье является обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y''(x) + p(x)f(y(x))g(y'(x)) = 0, \tag{1}$$

в котором аргумент x и искомая функция y вещественны. В статьях Бихари [1] и [2] для этого уравнения получен ряд глубоких качественных результатов в предположении, что коэффициенты p, f и g удовлетворяют следующим условиям[1)] (назовём их *условиями Бихари*): 1) p равномерно непрерывна на любом ограниченном интервале, а её инфимум на таком интервале больше 0; 2) f возрастает на $\mathbb{R}$; 3) $g \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – множество положительных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, неубывающих на $(-\infty; 0]$ и невозрастающих на $[0; +\infty)$; 4) $f'(0)$ существует, а функция φ, определяемая формулой

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{f(y)}{y}, & \text{если } y \neq 0 \\ f'(0), & \text{если } y = 0 \end{cases},$$

принадлежит $\mathcal{F}$; далее уравнение (1) при условиях Бихари мы называем, для краткости[2)], *уравнением Бихари.*

Обратим сейчас внимание только на один из результатов, установленных в указанных работах Бихари – это теоремы сравнения по коэффициенту p, являющиеся *точными* аналогами классических теорем Штурма о сравнении для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка[3)]. В [4] и [5] эти аналоги развиты до теорем сравнения по всем трём коэфициентам p, f и g, а затем ужé эти теоремы эффективно применены в [3] и [5] к исследованию спектральной задачи для уравнения Бихари, аналогичной задаче Штурма-Лиувилля с краевыми условиями первого рода. В последующем теоремы сравнения по всем трём коэфициентам p, f и g были перенесены в [6] и [5] на случай уравнения Бихари на геометрическом графе. Таким образом, свойства решений уравнения Бихари, установленные, по совокупности, в перечисленных работах, оказались близкими – и по форме, и по эффективности их использования при исследовании соответствующей спектральной задачи – к свойствам решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, которое, как хорошо известно, имеет вариационную природу, являясь уравнением Эйлера для квадратичного функционала[4)].

Учитывая значимость вариационных методов при решении краевых задач (см., например, в [9] главу IV, второй абзац пункта 27), естественно поставить вопрос о вариационном происхождении уравнения Бихари, и этот вопрос, в том числе для уравнения Бихари на геометрическом графе, был поставлен Ю. В. Покорным на его семинаре по качественной теории краевых задач ещё

[1)] На самом деле, в этих статьях есть ещё некоторые требования к f и g, в частности, требовалась их липшицевость, но, как было показано в [3] и [4], эти требования можно снять – без ущерба для установленных в [1] и [2] свойств решений уравнения (1).

[2)] И отдавая должное тому, что именно Бихари выделил указанные свойства коэффициентов при исследовании уравнения (1); важность выделения этих свойств обоснована в следующем абзаце.

[3)] Точными потому, что условия Бихари включают в себя случай линейности уравнения (1) (когда $f(y) = y$ при всех $y \in \mathbb{R}$, а $g \equiv 1$), в котором эти аналоги совпадают с теоремами сравнения Штурма.

[4)] См., например, в [7] подпункт 6.3.3 или в [8] пример 9.12 из пункта 9.3.

в 1991 году. В настоящей статье получен положительный ответ на этот вопрос в случае, когда p кусочно-постоянна[5)].

Важную роль при обосновании этого ответа играет теорема 1 из [11][6)]. Знаковым обстоятельством, дополняющим вышеизложенное, является то, что уравнением Эйлера для квадратичного функционала, заданного на функциях, определённых на геометрическом графе Γ (в других терминах, на одномерной пространственной сети Γ) является линейное дифференциальное уравнение второго порядка на Γ – см. подпункт 3.1.2 в [12], а также статьи [13] и [14][7)].

Всюду далее все функции вещественны, а их аргументы – в § 1 вещественны, а в § 2 и в § 3 вещественны или принадлежат геометрическому графу.

§ 1. Автономное уравнение типа Бихари на интервале и обратная задача вариационного исчисления для этого уравнения.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда в уравнении (1), во-первых, $x \in (a;b)$, где a и b конечны, во-вторых, $p \equiv \mathrm{const} \neq 0$, и в-третьих, f и g непрерывны, причём g не имеет нулей. Уравнение (1) при таких условиях будем называть *автономным уравнением типа Бихари на интервале*. Поскольку в автономном уравнении типа Бихари на интервале непрерывность функции pf равносильна непрерывности f, то, не ограничивая общности, можно считать, что в этом уравнении $p \equiv 1$. Другими словами, в этом параграфе вместо уравнения Бихари мы рассмотрим уравнение

$$y''(x) + f(y(x))g(y'(x)) = 0, \quad a < x < b, \tag{2}$$

в котором f и g непрерывны на $\mathbb{R}$, а g ещё и не имеет нулей.

Для уравнения (2) рассмотрим обратную задачу вариационного исчисления (далее, сокращённо, ОЗВИ), то есть задачу об отыскании не обнуляющейся нигде функции (интегрирующего множителя[8)]) $\mu : (a;b) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такой, что дифференциальное уравнение

$$\mu(x, y(x), y'(x))\big[y''(x) + f(y(x))g(y'(x))\big] = 0, \quad a < x < b, \tag{3}$$

[5)] В [10] приведён положительный конструктивный ответ и для кусочно-непрерывной p, но подробности этого ответа – предмет отдельной статьи.

[6)] Суть этой теоремы изложена в § 2, в абзаце, следующем за замечанием 1.

[7)] Этот факт из указанных трёх публикаций совпадает в главном, отличие – только в том, каков вид так называемых *условий трансмиссии* во внутренних вершинах (узлах) Γ (термин "условие трансмиссии" разъясняется в замечании 1 из § 2). На нюансах понятийного, терминологического и технического характера, порождающих это отличие, мы не останавливаемся, так как они для целей настоящей статьи не важны.

[8)] Согласно терминологии [15], см. там подпункт I.3.3.

является уравнением Эйлера

$$F'_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad a < x < b,$$

для некоторого функционала Φ, заданного на функциях из $C^1[a;b]$ и определяемого формулой

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx, \tag{4}$$

в которой $F : (a;b) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Конечно, ОЗВИ для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на интервале была поставлена достаточно давно и давно решена, на первый взгляд, в общем виде – см. [16] (пункты 604 и 605), [17] (§ 6, пункт с) на стр. 37-39), [18], [19] (§ 18), [20], [15] (пункт I.3). Однако решения этой задачи из только что перечисленных работ предполагают, в применении к уравнению (2), как самое малое, дифференцируемость g, чего мы не предполагаем. Поэтому, если от g требовать лишь непрерывности в уравнении (2), то надо искать свой способ решить ОЗВИ для этого уравнения. Приём, использованный нами ниже, основан на *внешнем* наблюдении[9)]: в нелинейном члене $f(y)g(y')$ уравнения (2) y и y' разделены; это и подталкивает к поиску F – при решении ОЗВИ для уравнения (2) – в виде:

$$F(x, y, y') = H(y)K(y'), \tag{5}$$

где $H \in C^1(\mathbb{R})$, $K \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда уравнение Эйлера для дважды дифференцируемой точки экстремума функционала (4) имеет вид (аргумент x опускаем):

$$H'(y)K(y') - H'(y)y'K'(y') - H(y)K''(y')y'' = 0. \tag{6}$$

Сравнивая (6) и (3), видим, что если μ существует, то, ввиду того, что μ определяется с точностью до постоянного ненулевого множителя, можно считать, что

$$\mu(x, y, y') = H(y)K''(y'). \tag{7}$$

Это, в частности, влечёт, что ни H, ни K'' не имеют нулей, что мы дальше и предполагаем. Далее, выражая y'' из (6), получим:

$$y'' = \frac{H'(y)}{H(y)} \cdot \frac{K(y') - y'K'(y')}{K''(y')}, \tag{8}$$

9) По сути, наш способ несильно отличается от того, что реализован в [8] (см. там пример 9.14 в пункте 9.3, формулу (9.50) на стр. 342), где ОЗВИ для автономного уравнения типа Бихари решена в случае $g \equiv \text{const}$. Нами лишь дополнительно использован ресурс интегрирующего множителя μ.

откуда следует, что (8) совпадает с (2), если, например,

$$\frac{H'(y)}{H(y)} = -f(y) \tag{9}$$

и

$$\frac{K(y') - y'K'(y')}{K''(y')} = g(y'). \tag{10}$$

Интегрируя (9) относительно H, находим:

$$H(y) = C\exp\left(-\int\limits_0^y f(s)ds\right), \tag{11}$$

где C – любое ненулевое число. Сразу же отметим, что F в ОЗВИ опреде-деляется, как минимум, с точностью до постоянного ненулевого множителя. Поэтому, имея ввиду представление (5), положим $C = 1$ в (11):

$$H(y) = \exp\left(-\int\limits_0^y f(s)ds\right). \tag{12}$$

Из (12) вытекает, что важно, отсутствие нулей у H.

В силу отсутвия нулей у K'' вкупе с тем, что g непрерывна и нигде не обнуляется, из (10) следует, что $K(y') - y'K'(y') \neq 0$ при всех y'. Но тогда тождество (10), с учётом непрерывности его левой и правой частей, эквивалентно тождеству:

$$\frac{y'K''(y')}{K(y') - y'K'(y')} = \frac{y'}{g(y')}. \tag{13}$$

Ввиду того, что $(K(y') - y'K'(y'))'_{y'} = -y'K''(y')$, после интегрирования (13) получим:

$$K(y') - y'K'(y') = C_1E(y'), \tag{14}$$

где

$$E(y') = \exp\left(-\int\limits_0^{y'} \frac{\sigma\, d\sigma}{g(\sigma)}\right), \tag{15}$$

а C_1 – любое ненулевое число. Устремив здесь y' к 0, получим:

$$K(0) = C_1. \tag{16}$$

Поделив, далее, обе части (14) на $-y'^2$ и проинтегрировав ещё раз, получим:

$$y' \neq 0 \Rightarrow K(y') = -y' \cdot C_1 \int \frac{E(y')}{y'^2}\, dy'. \tag{17}$$

Равенство (17) означает выполнение следующих двух импликаций:

$$y' > 0 \Rightarrow K(y') = -C_1 y' \left(\int\limits_1^{y'} \frac{E(t)}{t^2}\, dt + C_+ \right) \tag{18}$$

и

$$y' < 0 \Rightarrow K(y') = -C_1 y' \left(\int\limits_{-1}^{y'} \frac{E(t)}{t^2}\, dt + C_- \right), \tag{19}$$

где C_+ и C_- – любые числа.

Поскольку функция K, как и H, определяется, как минимум, с точностью до ненулевого числового множителя, то, разделив равенства в (16), (18) и (19) на C_1, придём к тому, что в формулах (16), (18) и (19) можно считать $C_1 = 1$. Далее, как известно (см., например, в [21] замечание в конце § 7, на стр. 42-43), $F dx$ в ОЗВИ определяется с точностью до слагаемого, являющегося полным дифференциалом какой-либо функции, а таковым слагаемым является $kH(y)y'dx$, где k – любое число. Поэтому K, вдобавок к предыдущему, определяется также и с точностью до слагаемого вида ky', где $k \in \mathbb{R}$ – любое. Но тогда, прибавив к правым частям в формулах (18) и (19) (уже при $C_1 = 1$) функцию $C_+ y'$ и учтя, что $C_+ y'\big|_{y'=0} = 0$, получим, что функцию K можно считать определяемой формулами:

$$K(0) = 1, \tag{20}$$

$$y' > 0 \Rightarrow K(y') = -y' \int\limits_1^{y'} t^{-2} E(t)\, dt, \tag{21}$$

$$y' < 0 \Rightarrow K(y') = -y' \int\limits_{-1}^{y'} t^{-2} E(t)\, dt + C_2 y', \tag{22}$$

где C_2 – некоторое вещественное число.

Итак, вопрос свёлся к существованию C_2 такого, что функция K, определяемая формулами (20)–(22), в самом деле принадлежит $C^2(\mathbb{R})$, а её вторая производная нигде не обнуляется. В силу формул (21) и (22) K дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Поэтому, чтобы доказать, что функция K, определяемая формулами (20)–(22), принадлежит $C^2(\mathbb{R})$ при некотором C_2, достаточно доказать существование C_2 такого, что

$$\lim_{y' \to 0} K(y') = 1, \tag{23}$$

$$\lim_{y' \to 0} K'(y') \text{ существует и конечен,} \tag{24}$$

$$\lim_{y' \to 0} K''(y) \text{ существует и конечен.} \tag{25}$$

Начнём с (23). Поскольку $C_2 y' \to 0$ при $y' \to 0$, то в силу (21) и (22), с последующим применением правила Лопиталя, имеем:

$$\lim_{y' \to \pm 0} K(y') = -\lim_{y' \to \pm 0} \frac{\int\limits_{\pm 1}^{y'} t^{-2} E(t)\, dt}{(y')^{-1}} = \lim_{y' \to \pm 0} E(y') = 1,$$

то есть (23) выполнено при любом C_2. Далее, обозначив, для однообразия, $D_+ = 0$, $D_- = C_2$, получим:

$$\lim_{y' \to \pm 0} K'(y') = D_\pm - \lim_{y' \to \pm 0} \left(\int\limits_{\pm 1}^{y'} \frac{E(t)}{t^2}\, dt + \frac{E(y')}{y'} \right) =$$

$$= D_\pm - \lim_{y' \to \pm 0} \left(\int\limits_{\pm 1}^{y'} \frac{1}{t^2} \big([E(t) - 1] + 1 \big) dt + \frac{E(y')}{y'} \right) =$$

$$= D_\pm - \lim_{y' \to \pm 0} \left(\int\limits_{\pm 1}^{y'} \frac{E(t) - 1}{t^2}\, dt - \left(\frac{1}{t} \Big|_{t = \pm 1}^{t = y'} \right) + \frac{E(y')}{y'} \right) =$$

$$= D_\pm - \lim_{y' \to \pm 0} \left(\int\limits_{\pm 1}^{y'} \frac{E(t) - 1}{t^2}\, dt \pm 1 + \frac{E(y') - 1}{y'} \right) = D_\pm - \int\limits_{\pm 1}^{0} \frac{E(t) - 1}{t^2} dt \mp 1,$$

так как, во-первых,

$$\lim_{y' \to 0} \frac{E(y') - 1}{y'} = \lim_{y' \to 0} E'(y') = \lim_{y' \to 0} \left(E(y') \cdot \frac{-y'}{g(y')} \right) = 0,$$

а во-вторых, последний интеграл сходится ввиду непрерывности подынтегральной функции на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и того, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{E(t)-1}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{E'(t)}{2t}=-\lim_{t\to 0}\frac{E(t)}{2g(t)}=-\frac{1}{2g(0)}\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, для выполнения (24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$1-\int\limits_0^1\frac{E(t)-1}{t^2}dt=-C_2+\int\limits_{-1}^0\frac{E(t)-1}{t^2}dt-1,$$

или, что то же самое,

$$C_2=\int\limits_{-1}^1 G(t)\,dt-2, \tag{26}$$

где

$$G(t)=\begin{cases} t^{-2}\big(E(t)-1\big), \text{ если } t\neq 0\\ -[2g(0)]^{-1}, \text{ если } t=0\end{cases} \tag{27}$$

есть функция непрерывная.

Переходим к (25) и отсутствию нулей у второй производной функции K, определяемой формулами (20)–(22). Из (21) и (22) следует, что при $y'\neq 0$

$$K''(y')=-\left[\frac{E(y')}{y'^2}+\frac{E'(y')y'-E(y')}{y'^2}\right]=-\frac{1}{y'}\cdot\left(-\frac{E(y')y'}{g(y')}\right)=\frac{E(y')}{g(y')}.$$

Поэтому, во-первых, $K''(y')\neq 0$ при $y'\neq 0$, а во-вторых,

$$\lim_{y'\to 0}K''(y')=\frac{E(0)}{g(0)}=\frac{1}{g(0)}\neq 0.$$

Таким образом, и (25) выполнено, и вторая производная функции K, определяемой формулами (20)–(22), нигде не обнуляется.

Переход от (10) к (16), (18) и (19) был эквивалентным в предположении, что K'' не имеет нулей. В то же время, функция (20)–(22) есть одна из функций семейства (16), (18), (19), и её вторая производная непрерывна и не имеет нулей. Значит, функция (20)–(22) есть решение уравнения (10).

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Для уравнения (2) обратная задача вариационного исчисления разрешима. При этом в качестве F в формуле (4) можно взять функцию (5), где H и K даются формулами (12) и (20)–(22), (15), (26), (27);

интегрирующий множитель в этом случае даётся формулой (7), в которой $K''(y') = E(y')[g(y')]^{-1}$.

§ 2. Порёберно автономное уравнение типа Бихари на геометрическом графе и ОЗВИ для этого уравнения.

Пусть Γ – геометрический граф из $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, понимаемый в соответствии с монографией [12] (см. там подпункт 3.1.1, первый абзац). Это означает, что Γ есть связное множество, являющееся объединением конечного числа интервалов конечной длины, называемых рёбрами, и некоторого подмножества J из множества всех концов этих интервалов. При этом о рёбрах дополнительно предполагается, что $\gamma_1 \cap \overline{\gamma}_2 = \varnothing$ для любых различных рёбер γ_1 и γ_2; здесь и далее: $\overline{M}$ – замыкание $M \subseteq \mathbb{R}^n$ по евклидовой метрике. Объединение рёбер обозначается $R(\Gamma)$. Точки из J называются внутренними вершинами Γ. Концы рёбер, не вошедшие в J, называются граничными вершинами Γ, а их множество обозначается $\partial\Gamma$.

Рёбра Γ далее предполагаются занумерованными: γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_m, m – количество рёбер Γ. Для любой $a \in J \cup \partial\Gamma$ через $I(a)$ обозначается множество индексов рёбер Γ, примыкающих к a, то есть $\left\{i = \overline{1,m} \,\middle|\, \overline{\gamma_i} \ni a\right\}$. Для каждой $a \in J \cup \partial\Gamma$ элементы набора $I(a)$ считаются как-то занумерованными: $I(a) = \left\{i_1(a); i_2(a); \ldots ; i_{|I(a)|}(a)\right\}$; если $i \mapsto \beta_i$, то запись $(\beta_i)_{i\in I(a)}$ будет обозначать упорядоченный набор $\left(\beta_{i_1(a)}; \beta_{i_2(a)}; \ldots ; \beta_{i_{|I(a)|}(a)}\right)$. Если $i \in I(a)$, то полагаем $\varkappa_i(a) = 1$, если γ_i выходит из a (в соответствии с ориентацией γ_i), и $\varkappa_i(a) = -1$, если γ_i входит в a.

Для определения производной от функции, определённой в точках рёбер Γ, все рёбра Γ ориентируются: каждому γ_i, $i = \overline{1,m}$, ставится в соответствие единичный вектор h_i – любой из тех двух, которые параллельны с γ_i. Этот вектор обозначается h_i. Если функция w определена в точках ребра γ_i и $x \in \gamma_i$, то производной функции w в точке x называется число $w'(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}[w(x + \varepsilon h_i) - w(x)]$, то есть производная w в точке x по вектору h_i.

Для каждого $i = \overline{1,m}$ рассмотрим функции $\widetilde{f}_i$ и $\widetilde{g}_i$ из $C(\mathbb{R})$, предполагая, что $\widetilde{g}_i$ не имеет нулей, и построим по ним функции $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$, определённые на $R(\Gamma) \times \mathbb{R}$ по формулам:

$$x \in \gamma_i \Rightarrow \left[\widetilde{f}(x, y) = \widetilde{f}_i(y) \text{ и } \widetilde{g}(x, y') = \widetilde{g}_i(y')\right]. \tag{28}$$

На функциях, определённых на Γ, рассмотрим дифференциальный оператор[10] L, определяемый правилом:

$$(Ly)(x) = \begin{cases} y''(x) + \widetilde{f}(x, y(x))\widetilde{g}(x, y'(x)), & \text{если } x \in R(\Gamma) \\ \ell_x\left(y(x), (y_i'(x))_{i \in I(x)}\right), & \text{если } x \in J \end{cases},$$

где для любого $x \in J$ функция $\ell_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{|I(x)|} \to \mathbb{R}$ непрерывна, а $y_i'(x)$ обозначает, здесь и далее, предел в точке x сужения на γ_i функции y'.

Основной объект исследования в настоящем пункте – это дифференциальное уравнение

$$(Ly)(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{29}$$

Под решением уравнения (29) нами понимается функция $y \in C(\Gamma)$, удовлетворяющая уравнению (29); понятно, что это, в частности, означает, что y дважды дифференцируема на $R(\Gamma)$.

Имея ввиду ведённый нами в § 1 термин "автономное уравнение типа Бихари на интервале" и учитывая (28), назовём уравнение (29) *порёберно автономным уравнением типа Бихари на геометрическом графе*. Отметим также, что если $J = \varnothing$ (и тогда Γ есть интервал), то (29) совпадает с (2).

Замечание 1. Вытекающий из (29) набор равенств

$$\ell_x\left(y(x), (y_i'(x))_{i \in I(x)}\right) = 0, \quad x \in J, \tag{30}$$

часто называют условиями трансмиссии для функции y во внутренних вершинах Γ. Некоторые классы линейных условий вида (30) изучались в [22], [23], [24], [12] (условие (3.17) в пункте 3.2)[11]; примеры классов вообще говоря нелинейных условий вида (30) можно найти в[12] [11], [13], [25], [26]. В частности, в работе [5], в которой были доказаны аналоги теорем Бихари о сравнении для уравнения (29), рассмативались условия трансмиссии вида

$$\sum_{i \in I(x)} \varkappa_i(x)\alpha_i(x)y_i'(x) = 0, \quad x \in J,$$

в которых $\alpha_i(x)$ – фиксированные положительные числа, и которые рассматривались в [22], [23], [24][13].

[10] Здесь мы отдаём предпочтение *синтетическому* подходу, развитому в [12] – см. там подпункты 3.1.5 и 3.2.1 (подход (д)).

[11] Здесь мы указываем только некоторые из пионерских работ, поскольку на сегодняшний день список работ, в которых изучались задачи с линейного вида условиями (30), очень велик.

[12] Перечень работ, в которых изучались задачи с вообще говоря нелинейного вида условиями (30), невелик. Собственно говоря, нам известны только те, которые указаны. В настоящей статье, кстати, выделяется новый важный класс вообще говоря нелинейных условий вида (30) – см. замечание 2 после теоремы 3 в § 3.

[13] Класс условий (3.17) из [12] шире.

Так же, как и в [11], обозначим через $\mathfrak{M}(\Gamma)$ множество функций $y \in C(\overline{\Gamma})$ с фиксированным набором значений

$$(y(b))_{b\in\partial\Gamma}$$

и таких, что $y\big|_{\overline{\gamma_i}} \in C^1(\overline{\gamma_i})$ для любого $i = \overline{1,m}$, и на $\mathfrak{M}(\Gamma)$ рассмотрим функционал $\widetilde{\Phi}$, определяемый формулой:

$$\widetilde{\Phi}(y) = \int\limits_{\Gamma} \widetilde{F}(x, y(x), y'(x))\, dx, \tag{31}$$

где интеграл по Γ понимается как сумма интегралов по рёбрам Γ. Относительно $\widetilde{F} : R(\Gamma) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ при этом предполагается её непрерывность, а также что для любого $i = \overline{1,m}$ сужение $\widetilde{F}\big|_{\gamma_i\times\mathbb{R}^2}$ (обозначаем его далее $\widetilde{F_i}$) непрерывно доопределяемо на $\overline{\gamma_i} \times \mathbb{R}^2$. Множество таких функций $\widetilde{F}$ обозначим $C\left([R(\Gamma)] \times \mathbb{R}^2\right)$. В [11] доказано (см. там теорему 1), что если, дополнительно, $\widetilde{F}'_y$, $\widetilde{F}''_{y'x}$, $\widetilde{F}''_{y'y}$ и $\widetilde{F}''_{y'y'}$ тоже принадлежат $C\left([R(\Gamma)] \times \mathbb{R}^2\right)$, то точка экстремума y_0 функционала $\widetilde{\Phi}$ в случае её двукратной непрерывной дифференцируемости на любом ребре Γ является решением уравнения Эйлера

$$\widetilde{F}'_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\widetilde{F}'_{y}(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in R(\Gamma), \tag{32}$$

удовлетворяющим *естественным*[14)] условиям трансмиссии

$$\sum_{i\in I(x)} \varkappa_i(x) \left(\widetilde{F_i}\right)'_{y'} (x, y(x), y_i'(x)) = 0, \quad x \in J; \tag{33}$$

другими словами, y_0 есть решение уравнения

$$(My)(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где $(My)(x)$ совпадает с левой частью (32), если $x \in R(\Gamma)$, и $(My)(x)$ совпадает с левой частью (33), если $x \in J$.

ОЗВИ для уравнения (29) есть задача о существовании функции $\widetilde{\mu} : R(\Gamma) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ без нулей и такой, что, первое, уравнение

$$\widetilde{\mu}(x, y(x), y'(x))\cdot(Ly)(x) = 0, \quad x \in R(\Gamma), \tag{34}$$

14) Условия трансмиссии, возникающие как необходимые для точки экстремума функционала $\widetilde{\Phi}$, называют естественными – см., например, в [12] подпункт 3.1.3. Это понятие аналогично понятию естественных граничных условий в вариационной задаче со свободной границей – см., например, в [27] гл. IV, § 5.

совпадает с уравнением (32) при некоторой $\widetilde{F}$ из (31), и второе, $\forall x \in J$: $(Ly)(x) = 0 \Leftrightarrow (My)(x) = 0$.

Дабы не загромождать понапрасну дальнейшее изложение, введём в рассмотрение два оператора: 1) оператор $\mathcal{A}$, который каждой непрерывной f ставит в соответствие правую часть (12), 2) оператор $\mathcal{B}$, который каждой непрерывной функции g, не имеющей нулей, ставит в соответствие функцию K, определяемую формулами (20)–(22), (15), (26), (27).

Поскольку (32) есть, по сути, набор уравнений Эйлера на рёбрах γ_i, $i = \overline{1,m}$, для функционалов $\widetilde{\Phi}_i$, определяемых формулами

$$\widetilde{\Phi}_i(z) = \int\limits_{\gamma_i} \widetilde{F}_i(x, z(x), z'(x))\, dx,$$

то из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть для любого $x \in J$ существует определённая на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{|I(x)|}$ функция ν_x без нулей и такая, что

$$\nu_x\left(y(x), (y_i'(x))_{i\in I(x)}\right)(Ly)(x) = \sum_{i\in I(x)} \varkappa_i(x) \left(\mathcal{A}\widetilde{f}_i\right)(y(x))\,(\mathcal{B}\widetilde{g}_i)'\,(y_i'(x)). \quad (35)$$

Тогда обратная задача для (29) разрешима. При этом $\widetilde{F}$ достаточно определить формулами:

$$\widetilde{F}_i(x, y, y') = \left(\mathcal{A}\widetilde{f}_i\right)(y)\,(\mathcal{B}\widetilde{g}_i)\,(y'), \quad i = \overline{1,m}, \quad (36)$$

а интегрирующий множитель $\widetilde{\mu}$ из (34) даётся формулами:

$$\widetilde{\mu}\big|_{\gamma_i\times\mathbb{R}^2}(x, y, y') = \left(\mathcal{A}\widetilde{f}_i\right)(y)\,(\mathcal{B}\widetilde{g}_i)''\,(y'), \quad i = \overline{1,m}. \quad (37)$$

§ 3. Порёберно ступенчато-неавтономное уравнение типа Бихари на геометрическом графе и ОЗВИ для этого уравнения.

Рассмотрим функцию $\widetilde{p} : R(\Gamma) \to \mathbb{R}$ без нулей, и сужение которой на любое ребро Γ есть функция ступенчатая. Пусть S – множество точек разрыва $\widetilde{p}$, содержащихся в $R(\Gamma)$. На функциях, определённых на Γ, рассмотрим дифференциальный оператор L_1, определённый правилом:

$$(L_1 y)(x) = \begin{cases} \widetilde{p}(x)(Ly)(x), \text{ если } x \in R(\Gamma) \setminus S \\ (Ly)(x), \text{ если } x \in J \\ \ell_x(y(x), y'(x+), y'(x-)), \text{ если } x \in S \end{cases},$$

где для любого $x \in S$ ℓ_x – некоторая функция из $C(\mathbb{R}^3)$. Уравнение

$$(L_1 y)(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{38}$$

назовём *порёберно ступенчато-неавтономным уравнением типа Бихари на геометрическом графе.*

Пусть Γ^S – геометрический граф, который, как множество из $\mathbb{R}^n$, совпадает с Γ, и множество J^S внутренних вершин которого есть $J \cup S$. Это в частности означает, что $R(\Gamma^S) = R(\Gamma) \setminus S$. Будем считать, что ориентация каждого ребра γ_j^S геометического графа Γ^S, $j = \overline{1, m + |S|}$, совпадает с ориентацией того γ_i, в котором γ_j^S содержится. Тогда уравнение (38) есть то же самое, что и уравнение

$$(L_1 y)(x) = 0, \quad x \in \Gamma^S, \tag{39}$$

где равенства $(L_1 y)(x) = 0$, $x \in J^S$, имеют статус условий трансмиссии. Уравнение (39) есть порёберно автономное уравнение типа Бихари на Γ^S, и потому к (39) применима теорема 2. Но прежде, чем её применить, обратим внимание на одну возможность, которой мы далее воспользуемся: если p_j – значение функции $\widetilde{p}$ на γ_j^S, то уравнение

$$(L_1 y)(x) = 0, \quad x \in \gamma_j^S,$$

не только есть автономное уравнение типа Бихари на интервале, но и его можно считать уравнением вида (2) с $f = \lambda_j \widetilde{f}_i$ и $g = p_j \lambda_j^{-1} \widetilde{g}_i$, где λ_j – любое ненулевое число, а i – номер того γ_i, которое содержит γ_j^S. Чтобы описать учёт этой возможности, нам понадобятся следующие обозначения. Если $a \in J$ и $i \in I(a)$, то через $j(a, i)$ обозначим тот номер $j = \overline{1, m + |S|}$ ребра γ_j^S геометического графа Γ^S, для которого $\gamma_j^S \subseteq \gamma_i$ и $a \in \partial \gamma_j^S$. Если $s \in S$, то через $j^+(s)$ $(j^-(s))$ обозначим номер j ребра γ_j^S, начинающегося (закачивающегося) в точке s. Теперь мы можем сформулировать следующий результат, непосредственно вытекающий после применения теоремы 2 к уравнению (39).

Теорема 3. Пусть ненулевые числа λ_j, $j = \overline{1, m + |S|}$, таковы, что 1) для любой $x \in J$ существует функция $\nu_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{|I(x)|} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такая, что для любой $y \in \mathfrak{M}(\Gamma^S)$

$$\begin{aligned} &\nu_x \left(y(x), (y_i'(x))_{i \in I(x)} \right) (L_1 y)(x) = \\ &= \sum_{i \in I(x)} \varkappa_i(x) \left[\mathcal{A} \left(\lambda_{j(a,i)} \widetilde{f}_i \right) \right] (y(x)) \left[\mathcal{B} \left(p_{j(a,i)} \left(\lambda_{j(a,i)} \right)^{-1} \widetilde{g}_i \right) \right] (y_i'(x)), \end{aligned} \tag{40}$$

2) для любого $i = \overline{1,m}$ и любой $s \in S \cap \gamma_i$ существует функция $\nu_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такая, что для любой $y \in \mathfrak{M}(\Gamma^S)$

$$\begin{gathered} \nu_s(y(s), y'(s+), y'(s-))(L_1 y)(s) = \\ = \left[\mathcal{A}\left(\lambda_{j^+(s)}\widetilde{f}_i\right)\right](y(s))\left[\mathcal{B}\left(p_{j^+(s)}\left(\lambda_{j^+(s)}\right)^{-1}\widetilde{g}_i\right)\right](y'(s+)) - \\ - \left[\mathcal{A}\left(\lambda_{j^-(s)}\widetilde{f}_i\right)\right](y(s))\left[\mathcal{B}\left(p_{j^-(s)}\left(\lambda_{j^-(s)}\right)^{-1}\widetilde{g}_i\right)\right](y'(s-)). \end{gathered} \tag{41}$$

Тогда ОЗВИ для уравнения (39) (си речь для уравнения (38)) разрешима, то есть существует функция $\mu^S : (R(\Gamma) \setminus S) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такая, что уравнение

$$\mu^S(x, y(x), y'(x))(L_1 y)(x) = 0, \quad x \in R(\Gamma) \setminus S,$$

совпадает с уравнением Эйлера для некоторого функционала

$$\Phi^S(y) = \int\limits_{\Gamma^S} F^S(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

рассматриваемого на функциях из $y \in \mathfrak{M}(\Gamma^S)$ при условиях трансмиссии вида (33) (только $\widetilde{F}$ в них надо заменить на F^S). При этом функцию F^S можно определить формулой

$$x \in \gamma_j^S \subseteq \gamma_i \Rightarrow \left(F^S\big|_{\gamma_j^S \times \mathbb{R}^2}\right)(x, y, y') =$$

$$= \left[\mathcal{A}\left(\lambda_j \widetilde{f}_i\right)\right](y)\left[\mathcal{B}\left(p_j \lambda_j^{-1}\widetilde{g}_i\right)\right](y'), \quad i = \overline{1,m},$$

а функцию μ^S – формулой

$$x \in \gamma_j^S \subseteq \gamma_i \Rightarrow \left(\mu^S\big|_{\gamma_j^S \times \mathbb{R}^2}\right)(x, y, y') =$$

$$= \left[\mathcal{A}\left(\lambda_j \widetilde{f}_i\right)\right](y)\left[\mathcal{B}\left(p_j \lambda_j^{-1}\widetilde{g}_i\right)\right]''(y'), \quad i = \overline{1,m}.$$

Замечание 2. Теорема 3 поставляет, по сути, $(m+|S|)$-параметрическое решение ОЗВИ для уравнения (38); λ_j, $j = \overline{1, m+|S|}$, – параметры этого решения. Кроме того, эта теорема выделяет класс условий трансмиссии для уравнения (38) (как, впрочем, и для уравнения (29) – см. ниже следствие 1), при которых это уравнение имеет вариационное происхождение; эти условия трансмиссии получаются приравниванием правых частей в (40) к нулю.

Следствие 1. Теорема 3 позволяет усилить теорему 2: вместо $\mathcal{A}\widetilde{f}_i$ и $\mathcal{B}\widetilde{g}_i$ в (35), (36) и (37) можно взять соответственно $\mathcal{A}\left(\lambda_i \widetilde{f}_i\right)$ и $\mathcal{B}\left(\lambda_i^{-1}\widetilde{g}_i\right)$, где λ_i,

$i = \overline{1, m}$, – любые ненулевые числа. В частности, в формулах (12), (15) и (27) из теоремы 1 вместо f и g можно взять λf и $\lambda^{-1} g$, где $\lambda \neq 0$ – любое.

Следствие 2. Если в теореме 3 взять числа λ_j во включении $\gamma_j^S \subseteq \gamma_i$ независящими от j, то есть положить $\lambda_j = \rho_i \neq 0$ при выполнении включения $\gamma_j^S \subseteq \gamma_i$, то в правой части равенства (41) будет $\lambda_{j^+(s)} = \lambda_{j^-(s)} = \rho_i$, и тогда в теореме 3 ввиду положительности $\mathcal{A}\left(\rho_i \widetilde{f_i}\right)$ достаточно предполагать существование ν_s, $s \in S$, удовлетворяющей более простому, нежели (41), равенству:

$$\nu_s(y(s), y'(s+), y'(s-))(L_1 y)(s) =$$
$$= \left[\mathcal{B}\left(p_{j^+(s)}\,(\rho_i)^{-1}\,\widetilde{g_i}\right)\right](y'(s+)) - \left[\mathcal{B}\left(p_{j^-(s)}\,(\rho_i)^{-1}\,\widetilde{g_i}\right)\right](y'(s-)).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2025-1530.

Список литературы

[1] Bihari I. Oscillation and monotonity theorems concerning nonlinear differential equations of the second order // Acta Mathematica Hungarica. – 1958. – V. 9, № 1-2. – P. 83-104.

[2] Bihari I. Note to an extension of a Sturmain comparison theorem // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. – 1985. – V. 20, № 1-4. – P. 15-19.

[3] Карелина И. Г., Прядиев В. Л. О спектре нелинейной краевой задачи Бихари // Воронеж: Воронеж. ун-т, 1989. – Деп. в ВИНИТИ 19.04.89, № 2569-В89. – 46 с.

[4] Прядиев В. Л. Априорные оценки решения одной нелинейной краевой задачи // Воронеж: Воронеж. ун-т, 1992. – Деп. в ВИНИТИ 05.08.92, № 2577-В92. – 18 с.

[5] Прядиев В. Л. Свойства Штурма нелинейных уравнений на сетях : дис. ...канд. физ.-мат. наук. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1995. – 145 с.

[6] Прядиев В. Л. Теоремы сравнения для одного нелинейного уравнения на графе // Воронеж: Воронеж. ун-т, 1990. – Деп. в ВИНИТИ 19.02.91, № 825-В91. – 66 с.

[7] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

[8] Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 488 с.

[9] Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 248 с.

[10] Арахов Н. Д., Прядиев В. Л., Рябцева Н. Н. Вариационное происхождение уравнения Бихари – неавтономный случай // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXVI : материалы Международной Воронежской весенней математической школы, посвящ. памяти С. М. Никольского (30 апреля – 4 мая 2025 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2025. – С. 50-51.

[11] Покорный Ю. В., Покорная И. Ю., Прядиев В. Л., Рябцева Н. Н. Об интегрировании в вариационных неравенствах на пространственных сетях // Мат. заметки. – 2007. – Т. 81, № 6. – С. 904-911.

[12] Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

[13] Покорный Ю. В., Покорная И. Ю., Прядиев В. Л., Рябцева Н. Н. Некоторые вариационные неравенства на пространственных сетях // Вест. Воронеж. гос. ун-та. Сер. "Физика. Математика". – 2004. – № 2. – С. 179-183.

[14] Завгородний М. Г., Майорова С. П. Математическая модель связной струнно-пружинной системы // Вест. Воронеж. гос. техн. ун-та. – 2015. – Т. 11, № 6. – С. 48-52.

[15] Задорожний В. Г. Методы вариационного анализа. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 316 с.

[16] Darboux J.-G. Lecons Théorie générale des surfaces, Troisième partie. – Paris: Ixprimerie Gauthier Villars et fils, 1890. – 304 p.

[17] Bolza O. Vorlesungen über Variationsrechnung. – Leipzig und Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1909. – X+706+10* s.

[18] Рапопорт И. М. Обратная задача вариационного исчисления // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18. – С. 131-135.

[19] Коша А. Вариационное исчисление. – М.: Высш. шк., 1983. – 279 с.

[20] Задорожний В. Г. Обратная задача вариационного исчисления для систем дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 9. – С. 79–82.

[21] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 288 с.

[22] Nicaise S. Estimées du spectre du laplasien sur un réseau topologique fini // C. R. Acad. Sc. Paris. – 1986. – t. 303, série 1. – № 8. – P. 343-346.

[23] Ali-Mehmeti F. A characterization of a generalized C^∞-notion on nets // Integral Equations and Operator Theory. – 1986. – V. 9, № 6. – P. 753-766.

[24] von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks // Math. Meth. Appl. Sc. – 1988. – V. 10. – P. 383-395.

[25] Арахов Н. Д., Прядиев В. Л. Класс условий трансмиссии, сохраняющий теоремы сравнения для уравнения Бихари на геометрическом графе // Современные методы теории функций и смежные проблемы : матер. Межд. конф. : Воронеж. зимняя матем. шк. (27 января – 1 февраля 2023 г.). – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. – С. 36-37.

[26] Морозов А. В. О разрушении решений одной нелинейной системы // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXVI : матер. Междунар. Воронеж. весенней матем. шк., посвящ. памяти С. М. Никольского (30 апреля – 4 мая 2025 г.). – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2025. – С. 231-233.

[27] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, Т. 1. – М.-Л.: ГТТИ, 1933. – XIV+525 с.

Variational origin of the Bihari step-nonautonomous equation on a geometric graph

N. D. Arahov*, V. L. Pryadiev**, N. N. Ryabtseva***

*,**Voronezh State University, ***Belgorod University of Consumer Cooperatives

*arahovnikita@gmail.com, **pryad@mail.ru, ***riabceva-nn@yandex.ru

Abstract. For an ordinary differential equation of the form $y''(x) + p(x)f(y(x))g(y'(x)) = 0$, considered first for $p \equiv \text{const} \neq 0$ on an interval, and then for a piecewise constant p on a geometric graph, the inverse problem of the calculus of variations is solved, without the assumption of differentiability of g, which is assumed in the known general solutions of this problem.

Keywords: nonlinear ordinary differential equation of the second order, geometric graph, inverse problem of the calculus of variations.

FundingThe work was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Project № 075-02-2025-1530.