

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2025

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

Единственность положительного положения равновесия в n -мерной модели шумпетеровской динамики с амортизацией

Кириллов А.Н., Сазонов А.М.

Институт прикладных математических исследований, ФИЦ «Карельский
научный центр РАН»

e-mail: sazon-tb@mail.ru

Аннотация Статья посвящена исследованию модели шумпетеровской динамики капитала с амортизацией произвольной размерности. В работе показано существование единственного положения равновесия в положительном квадранте фазового пространства. Проведены численные эксперименты, позволяющие выдвинуть гипотезу о глобальной устойчивости положения равновесия. Также численно исследован вопрос относительно влияния параметра интенсивности амортизации на положение равновесия.

Ключевые слова: шумпетеровская динамика, динамические системы, нелинейные ОДУ, положение равновесия.

1 Введение

Предложенная австрийским экономистом Й Шумпетером теория эндогенного экономического развития [1], в основе которого лежат процессы инноваций и имитаций, продолжает активно развиваться в настоящее время [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Математическая формализация данной теории в виде непрерывных динамических систем представлена в работах [8, 9, 10, 11, 12, 13], в которых разработаны различные модели, описывающие динамику переходов предприятий

на более высокие уровни технологического развития посредством механизмов инноваций и имитаций. Отметим, что модели на основе систем дифференциальных уравнений широко применяются для моделирования экономических процессов [14, 15, 16, 17].

Особый интерес с математической точки зрения представляют модели шумпетеровской динамики, учитывающее действие процесса амортизации, в результате которого часть предприятий может понижать уровень эффективности. Впервые подобная модель была предложена в работе В. М. Полтеровича, Г. М. Хенкина [10], где был проведен ее численный анализ. Однако задача качественного аналитического исследования подобных моделей оставалась открытой. Авторами была предложена модель шумпетеровской динамики капитала отрасли по уровням эффективности с амортизацией и был проведен ее качественный анализ [18]. В [18] было показано, что для двухуровневой модели существует глобально устойчивое положение равновесия. Для модели с тремя уровнями была показана глобальная устойчивость положения равновесия в случае отсутствия амортизации со второго уровня на первый, мотивированного с экономической точки зрения слишком сильным устареванием низшего уровня [18]. В общем случае было найдено инвариантное множество, в которое входят все положительные полутраектории системы [18]. В данной статье представлено развитие полученных в [18] результатов для n -мерной модели шумпетеровской динамики капитала с амортизацией. В работе показано существование единственного положения равновесия в положительном квадранте фазового пространства. Кроме того, проведены численные эксперименты, позволяющие выдвинуть гипотезу о глобальной устойчивости положения равновесия. Также численно исследован вопрос относительно влияния параметра интенсивности амортизации на положение равновесия.

2 Модель шумпетеровской динамики с амортизацией

Рассмотрим модель с амортизацией с n уровнями эффективности вида

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1 (V - \sum_{j=1}^n C_j) + \mu_2 C_2 = f_1(C), \\ \dot{C}_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i} C_i (V - \sum_{j=1}^n C_j) + \varphi_{i-1} C_{i-1} - \mu_i C_i + \mu_{i+1} C_{i+1} = f_i(C), \\ i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{C}_n = \frac{1}{\lambda_N} C_N (V - \sum_{j=1}^n C_j) + \varphi_{n-1} C_{n-1} - \mu_n C_n = f_n(C), \end{cases} \quad (1)$$

где: C_i — суммарный капитал отрасли на уровне i (одно и то же предприятие может иметь капитал на различных уровнях), V — емкость экономической ниши, $\varphi_i \in [0, 1)$ — доля средств, которую предприятия на уровне i тратят на развитие производства на уровне $i + 1$ в единицу времени, $\lambda_i > 0$ — удельная себестоимость товара на уровне i (стоимость производства единицы товара), $\mu_i \in [0, 1)$ — интенсивность амортизации (доля капитала, переходящего с уровня i на уровень $i - 1$ под действием процесса амортизации в единицу времени), $i = 1, \dots, n$. Величины V , φ_i , λ_i , μ_i полагаются постоянными. Естественно полагать, что $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$, поскольку технология на более высоком уровне более эффективная, что приводит к снижению себестоимости. Введем обозначения $a_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, $a_n = \frac{1}{\lambda_n}$.

Нетрудно показать, положив $C_i = 0$ в правой части i -го уравнения системы, что область $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ инвариантна для системы (1). Последнее дает возможность использовать систему для моделирования экономического процесса, в котором $C_i = C_i(t) \geq 0$.

Более того, в [18] для системы (1) было построено инвариантное притягивающее множество

$$W = \{(C_1, \dots, C_n) : V \leq \sum_{j=1}^n C_j \leq V + \Delta V\}, \quad \text{где} \quad \Delta V = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi_j}{a_j}, \quad (2)$$

в которое входят и остаются в нем все положительные полутраектории системы (1), начинающиеся в точках, принадлежащих $\mathbb{R}_+^n \setminus \{O\}$, где O — нулевой вектор, $O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Основные вопросы относительно системы (1) — это существование и единственность ее положений равновесия в $\mathbb{R}_+^n \setminus \{O\}$ и их устойчивость.

Определение 1 Назовем вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положительным (неотрицательным), если $x_i > 0$ ($x_i \geq 0$) при всех $i = 1, \dots, n$. При этом будем писать $x > 0$ ($x \geq 0$).

В [19] доказано, что система (1) в случае отсутствия амортизации, то есть при $\mu_i = 0$, $i = 2, \dots, n$, имеет единственное неотрицательное положение равновесия $(0, \dots, 0, V) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{O\}$ которое при этом глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+^n \setminus \{O\}$. Последнее означает, что все положительные полутраектории с начальными точками в $\mathbb{R}_+^n \setminus \{O\}$ с ростом времени к бесконечности неограниченно приближаются к положению равновесия.

Для системы с амортизацией исследование существования и единственности равновесий и их глобальной устойчивости усложняется. Авторами были

получены следующие результаты. В [18] для системы (1) при $n = 2$, $\mu_2 > 0$ было показано существование единственного положительного равновесия и его глобальная устойчивость в \mathbb{R}_+^2 . Также при $n = 3$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$ в [18] было доказано существование единственного положительного равновесия, а при $\mu_2 = 0$, $\mu_3 > 0$ — доказана его глобальная устойчивость в $\mathbb{R}_+^n \cup \{O\}$.

Цель настоящей работы — доказать существование и единственность положительного положения равновесия системы (1) в общем случае, то есть при любом $n \in \mathbb{N}$ и при $\mu_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, $\varphi_j > 0$, $j = 1, \dots, n - 1$, а также — провести численный анализ его глобальной устойчивости в \mathbb{R}_+^n .

Положения равновесия системы (1) являются решениями системы алгебраических уравнений второй степени

$$\begin{cases} \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1 (V - \sum_{j=1}^n C_j) + \mu_2 C_2 = 0, \\ \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i} C_i (V - \sum_{j=1}^n C_j) + \varphi_{i-1} C_{i-1} - \mu_i C_i + \mu_{i+1} C_{i+1} = 0, \\ i = 2, \dots, n-1, \\ \frac{1}{\lambda_n} C_n (V - \sum_{j=1}^n C_j) + \varphi_{n-1} C_{n-1} - \mu_n C_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \varphi_j > 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \mu_s > 0, \quad s = 2, \dots, n. \quad (4)$$

Замечание 1 Нарушение условий (4), то есть допущение возможности нулевых значений параметров φ_j, μ_s может привести к различным патологическим случаям. Например, при $\varphi_j = 0$ и $\mu_s = 0$ при $j = 1, \dots, n-1$, $s = 2, \dots, n$, множество неотрицательных положений равновесия — континуум $C_1 + \dots + C_n = V$, $C_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. С содержательной точки зрения, всегда можно считать, что даже незначительные инновационные и амортизационные процессы в экономической системе имеют место, то есть все φ_j, μ_s положительны, хотя и, возможно, достаточно малы.

Перед тем как доказывать существование и единственность положительного решения системы (3) при условии положительности всех входящих в нее параметров, преобразуем систему (3) и докажем несколько вспомогательных результатов.

Введем замену переменных

$$x_1 = \sum_{j=1}^n C_j - V, \quad x_i = \frac{C_i}{C_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (5)$$

При этом, учитывая, что положительное положение равновесия системы (1), если оно существует, принадлежит области W (см. (2)) имеем, что $x_1 > 0$. Естественно, и $x_i > 0$, $i = 2, \dots, n$.

Из (3), получим

$$\begin{cases} -a_1x_1 + \mu_2x_2 = 0, \\ -a_ix_1 + \frac{\varphi_{i-1}}{x_i} - \mu_i + \mu_{i+1}x_{i+1} = 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ -a_nx_1 + \frac{\varphi_{n-1}}{x_n} - \mu_n = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) равносильна системе вида

$$\begin{cases} x_2 = \frac{a_1}{\mu_2}x_1, \\ x_i = \frac{1}{\mu_i} \left(a_{i-1}x_1 + \mu_{i-1} - \frac{\varphi_{i-2}}{x_{i-1}} \right), \quad i = 3, \dots, n, \\ x_n = \frac{\varphi_{n-1}}{a_nx_1 + \mu_n}. \end{cases} \quad (7)$$

Решение системы (7) производим «сверху вниз»: из первого уравнения выражаем x_2 через x_1 и подставляем это выражение во второе уравнение, из которого получаем выражение x_3 через x_1 и т.д. В итоге получаем уравнение относительно x_1

$$\begin{aligned} a_{n-1}x_1 + \mu_{n-1} - \frac{\varphi_{n-2}\mu_{n-1}}{a_{n-2}x_1 + \mu_{n-2} - \frac{\varphi_{n-3}\mu_{n-2}}{a_{n-3}x_1 + \mu_{n-3} + \dots + \frac{\varphi_2\mu_3}{a_2x_1 + \mu_2 - \frac{\varphi_1\mu_2}{a_1x_1}}} &= \quad (8) \\ &= \frac{\varphi_{n-1}\mu_n}{a_nx_1 + \mu_n}. \end{aligned}$$

Обозначим, $g_n(x_1) \doteq \frac{\varphi_{n-1}\mu_n}{a_nx_1 + \mu_n}$. Если уравнение (8) имеет положительное решение x_1^* , то подставляем его в правые части (7) и получаем решение системы. Далее следует проверить его положительность. Будем рассматривать систему (7) (за исключением последнего уравнения) как рекуррентную последова-

тельность функций $x_i(x_1)$

$$\begin{cases} x_2(x_1) = \frac{a_1}{\mu_2} x_1, \\ x_i(x_1) = \frac{1}{\mu_i} \left(a_{i-1} x_1 + \mu_{i-1} - \frac{\varphi_{i-2}}{x_{i-1}(x_1)} \right), \quad i = 3, \dots, n. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда, используя метод математической индукции, легко получить следующий результат.

Утверждение 1

1. $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} x_i(x_1) = +\infty, \quad i = 2, \dots, n.$
2. $\frac{dx_i(x_1)}{dx_1} > 0, \quad i = 2, \dots, n.$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2 Пусть найдется $0 < w \in \mathbb{R}$ такое, что $x_{i-1}(w) = 0$ для некоторого $i = 3, \dots, n$. Тогда $x_1 = w$ — вертикальная асимптота для функции $x_i(x_1)$, причем

$$\lim_{x_1 \rightarrow w-0} x_i(x_1) = +\infty, \quad \lim_{x_1 \rightarrow w+0} x_i(x_1) = -\infty, \quad i = 2, \dots, n. \quad (10)$$

И наоборот, из (10) следует, что $x_{i-1}(w) = 0$.

Доказательство.

Доказательство, проводимое методом индукции, очевидно следует из вида функций $x_i(x_1)$ (9) и Утверждения 1.

□

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1 Пусть

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \varphi_j > 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \mu_s > 0, \quad s = 2, \dots, n. \quad (11)$$

Тогда система (7) имеет единственное положительное решение $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) > 0$.

Доказательство.

Доказательство будет проводиться методом математической индукции по размерности системы. В качестве базы индукции рассмотрим случаи $n = 2, 3, 4$.

Пусть $n = 2$. Система (6) имеет вид

$$\begin{cases} -a_1x_1 + \mu_2x_2 = 0, \\ -a_2x_1 + \frac{\varphi_1}{x_2} - \mu_2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда

$$x_2(x_1) = \frac{a_1}{\mu_2}x_1. \quad (13)$$

Уравнение (8) имеет вид

$$a_1x_1 = \frac{\varphi_1\mu_2}{a_2x_1 + \mu_2} \doteq g_2(x_1). \quad (14)$$

Очевидно, уравнение (14) имеет единственное положительное решение $x_1^* = r_2 > 0$ (обозначение r_2 соответствует $n = 2$). Следовательно, из (13), система (12) имеет единственное положительное решение $x^* = (r_2, x_2(r_2))$ (см. рис. 1).

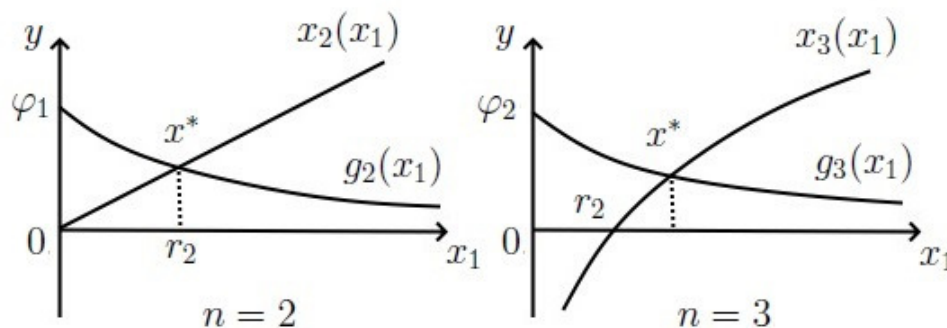


Рис. 1: Случаи $n = 2, n = 3$. Поведение графиков функций $x_i(x_1), g_i(x_1), i = 2, 3$.

Пусть $n = 3$. Система (6) имеет вид

$$\begin{cases} -a_1x_1 + \mu_2x_2 = 0, \\ -a_2x_1 + \frac{\varphi_1}{x_2} - \mu_2 + \mu_3x_3 = 0, \\ -a_3x_1 + \frac{\varphi_2}{x_3} - \mu_3 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{cases} x_2(x_1) = \frac{a_1}{\mu_2}x_1, \\ x_3(x_1) = \frac{1}{\mu_3} \left(a_2x_1 + \mu_2 - \frac{\varphi_1}{x_2(x_1)} \right). \end{cases} \quad (16)$$

Уравнение (8) имеет вид

$$a_2x_1 + \mu_2 - \frac{\varphi_1\mu_2}{a_1x_1} = \frac{\varphi_2\mu_3}{a_3x_1 + \mu_3} \doteq g_3(x_1). \quad (17)$$

Из (16) очевидно, что у функции $x_3(x_1)$ существует единственная вертикальная асимптота $x_1 = 0$. При этом,

$$\lim_{x_1 \rightarrow -0} x_3(x_1) = +\infty, \quad \lim_{x_1 \rightarrow +0} x_3(x_1) = -\infty. \quad (18)$$

Согласно Утверждению 1, справедливо $x'_3(x_1) > 0$, и

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} x_3(x_1) = +\infty. \quad (19)$$

Из свойств $x_3(x_1)$ и $g_3(x_1)$, получим, что уравнение (17) имеет единственное положительное решение $x_1^* = r_3$, дающее решение $x^* = (r_3, x_2(r_3), x_3(r_3))$ системы (16) (см. рис. 1). Поскольку уравнение (14) является первым уравнением системы (16), то из анализа случая $n = 2$ имеем $x_2(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > 0$. Из второго уравнения системы (16) имеем, что уравнение $x_3(x_1) = 0$ равносильно второму уравнению системы (12) (при $n = 2$). Следовательно, первая компонента $x_1^* = r_2$ решения системы (12) является нулем функции $x_3(x_1)$. Тогда ясно, что $r_3 > r_2$, а также $x_3(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > r_2$. Итак, получили необходимое и достаточное условие положительности $x^* = (r_3, x_2(r_3), x_3(r_3))$: $x_1 > r_2$.

Пусть $n = 4$. Система (6) имеет вид

$$\begin{cases} -a_1x_1 + \mu_2x_2 = 0, \\ -a_2x_1 + \frac{\varphi_1}{x_2} - \mu_2 + \mu_3x_3 = 0, \\ -a_3x_1 + \frac{\varphi_2}{x_3} - \mu_3 + \mu_4x_4 = 0, \\ -a_4x_1 + \frac{\varphi_4}{x_4} - \mu_4 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Тогда

$$\begin{cases} x_2(x_1) = \frac{a_1}{\mu_2}x_1, \\ x_3(x_1) = \frac{1}{\mu_3} \left(a_2x_1 + \mu_2 - \frac{\varphi_2}{x_2(x_1)} \right), \\ x_4(x_1) = \frac{1}{\mu_4} \left(a_3x_1 + \mu_3 - \frac{\varphi_3}{x_3(x_1)} \right). \end{cases} \quad (21)$$

Уравнение (8) имеет вид

$$a_3x_1 + \mu_3 - \frac{\varphi_2\mu_3}{a_2x_1 + \mu_2 - \frac{\varphi_1\mu_2}{a_1x_1}} = \frac{\varphi_3\mu_4}{a_4x_1 + \mu_4} \doteq g_4(x_1). \quad (22)$$

Каждое положительное решение $x_1 = r_4$ уравнения (8), если оно существует, порождает решение системы (21). Будем искать положительное решение

$x^* = (r_4, x_2(r_4), x_4(r_4), x_4(r_4))$ этой системы. Поскольку два первых уравнения систем (16), (21) совпадают, то из анализа случая $n = 3$ имеем

$$\begin{cases} x_2(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > 0, \\ x_3(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > r_2. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы (21) имеем, что уравнение $x_4(x_1) = 0$ равносильно уравнению (17) для $n = 3$. Следовательно, решение $x_1 = r_3 > 0$ уравнения (17) является нулем функции $x_4(x_1)$. Кроме того, последовательно подставляя $x_2(x_1)$, $x_3(x_1)$ в уравнение для $x_4(x_1)$, получим, что уравнение для положительной вертикальной асимптоты функции $x_4(x_1)$ имеет вид $x_1 = r_2 > 0$. При этом, согласно Утверждениям 1, 2

$$x_4'(x_1) > 0, \quad (23)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow r_2 - 0} x_4(x_1) = +\infty, \quad \lim_{x_1 \rightarrow r_2 + 0} x_4(x_1) = -\infty, \quad (24)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} x_4(x_1) = +\infty. \quad (25)$$

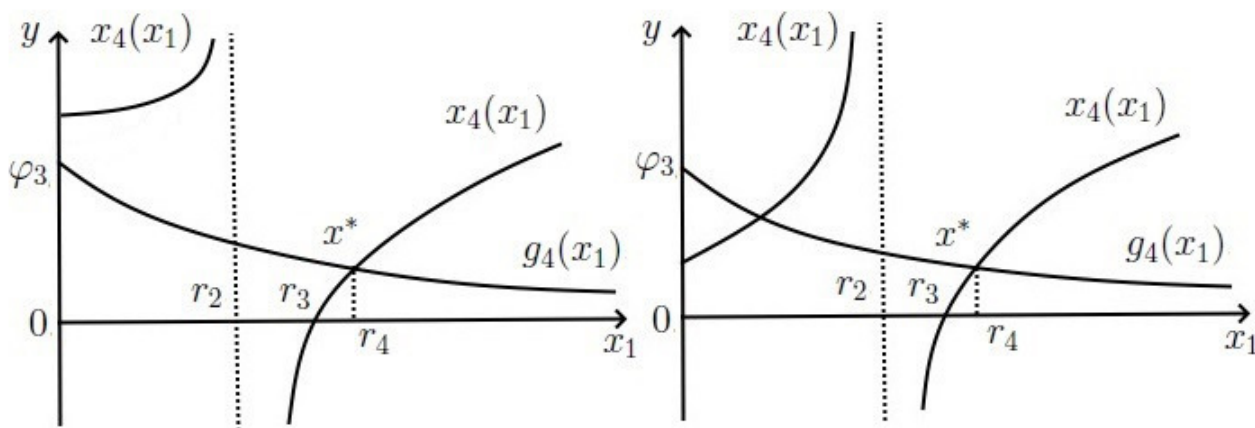


Рис. 2: Случай $n = 4$. Возможные варианты поведения графиков функций $x_4(x_1)$, $g_4(x_1)$.

Согласно приведенным свойствам $x_4(x_1)$, имеем, что уравнение (22) имеет наибольшее решение $x_1^* = r_4 > r_3 > r_2$, порождающее решение $x^* = (r_4, x_2(r_4), x_3(r_4), x_4(r_4))$ системы (21) (см. рис. 2). Проведя аналогичное рассуждение, как в случае $n = 3$, получим, что

$$\begin{cases} x_2(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > 0, \\ x_3(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > r_2, \\ x_4(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > r_3. \end{cases}$$

Итак, получили необходимое и достаточное условие положительности $x^* = (r_4, x_2(r_4), x_3(r_4), x_4(r_4))$: $x_1 > r_3$.

Далее докажем утверждение теоремы для произвольной размерности. Отметим, что говоря о нулях и асимптотах функций $x_i(x_1)$, мы имеем в виду только положительные нули и асимптоты, проходящие через точки $x_1 > 0$, которые, для краткости, будем также называть положительными асимптотами.

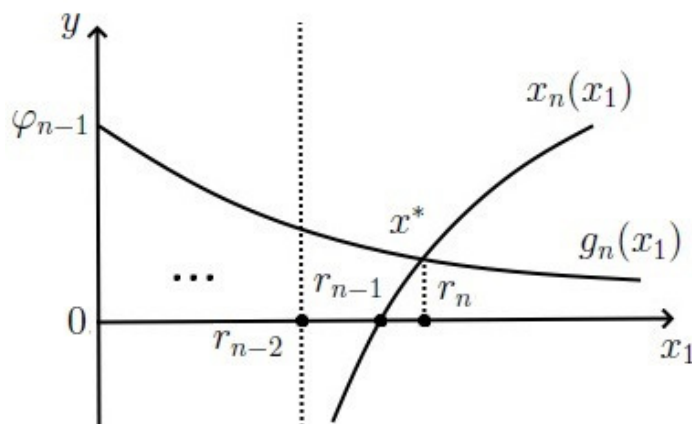


Рис. 3: Правая асимптота ($x_1 = r_{n-2}$), нуль ($x_1 = r_{n-1}$) функции $x_n(x_1)$, решение r_n уравнения (8).

Все $x_i(x_1)$, $i = 3, \dots, n$ имеют конечное число нулей и вертикальных асимптот. Пусть, w_i — правая асимптота, v_i — правый нуль $x_i(x_1)$. Под правой асимптотой (нулем) будем понимать такую асимптоту $x_1 = w$ (нуль $x_1 = v$), что для любой другой асимптоты $x_1 = q$ (нуля $x_1 = q'$) справедливо $q < w$ ($q' < v$). Очевидно, $w_i < v_i$. Пусть r_i — правое (то есть, наибольшее) решение уравнения (8), существующее вследствие конечного числа асимптот у $x_i(x_1)$. Очевидно, $w_i < v_i < r_i$. Из вышеизложенного, $w_{i+1} = v_i$, $v_{i+1} = r_i$.

Покажем, что правое решение r_n уравнения (8) порождает единственное положительное решение $x^* = (r_n, x_2(r_n), \dots, x_n(r_n))$ системы (7). Пусть, $x_1 = w_n$ — правая (то есть значение w_n максимальное) асимптота функции $x_n(x_1)$. Следовательно, из вида $x_n(x_1)$, существует единственное решение $x_1^* = r_n > v_n > w_n$ уравнения (8). Покажем, что $x_1^* = r_n$ порождает положительное решение $x^* = (r_n, x_2(r_n), \dots, x_n(r_n))$ системы (7) (см. рис. 3). Имеем, $x_2(r_n) = \frac{a_1}{\mu_2} r_n > 0$. Подставив полученное $x_2(r_n)$ в уравнение для $x_3(x_1)$ системы (7) получим

$$x_3(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > r_2. \quad (26)$$

Далее проведем доказательство по индукции. Базой индукции является (26).

Предположим, что

$$x_i(x_1) > 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > r_{n-2}. \quad (27)$$

Покажем, что при выполнении (27) будет справедливо

$$x_i(x_1) > 0, \quad i = 2, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > r_{n-1}. \quad (28)$$

Поскольку (28) отличается от (27) только добавлением неравенства $x_n(x_1) > 0$, а $r_{n-2} < r_{n-1}$ остается доказать, что $x_n(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > r_{n-1}$. Из вышеизложенного имеем, r_{n-1} — правый нуль $x_n(x_1)$, а $x_1 = r_{n-2}$ — правая асимптота $x_n(x_1)$. Следовательно, можно выделить два множества положительности $x_n(x_1)$

$$x_n(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 \in D_n \cup (r_{n-1}, +\infty), \quad (29)$$

где $D_n \subset (0, r_{n-2})$. Поскольку все положительные решения уравнения (8), принадлежащие множеству D_n не удовлетворяют (27), то единственным решением, обеспечивающим выполнение (27) является $x_1^* = r_n$, порождающее $x^* = (r_n, x_2(r_n), \dots, x_n(r_n))$. Итак, доказано требуемое для индукционного перехода утверждение $x_n(x_1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > r_{n-1}$. Единственность решения r_n на промежутке $(r_{n-1}, +\infty)$ очевидно следует из того, что $x_1 = r_{n-2}$ — правая асимптота $x_n(x_1)$ (см. Утверждение 2).

□

Таким образом, система (1) имеет единственное положение равновесия в $W \subset \mathbb{R}_+^n$, поскольку

$$\begin{cases} C_1 = \frac{x_1 + V}{1 + x_2 x_3 + \dots + x_2 \dots x_n} > 0, \\ C_i = \frac{x_2 \dots x_i (x_1 + V)}{1 + x_2 x_3 + \dots + x_2 \dots x_n} > 0, \quad i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (30)$$

3 Численные эксперименты

Вопрос об устойчивости единственного положения равновесия системы (1) остается открытым. Отметим, что в данной работе невозможно использование метода линейного приближения для качественного анализа локального поведения траекторий в окрестности положения равновесия, который был проведен, например, в [15], поскольку в исследуемой модели уже в трехмерном случае не удастся получить конкретный вид положения равновесия, а лишь доказать его существование. Далее будут представлены результаты некоторых численных экспериментов, позволяющих выдвинуть гипотезу о

глобальной устойчивости положения равновесия. Кроме того, будет проведено исследование относительно влияния интенсивности амортизации на положение равновесия. Результаты численного моделирования представлены на рисунках 4—7.

Рассмотрим случай $n = 4$. Пусть $C^* = (C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*)$ — положение равновесия (1).

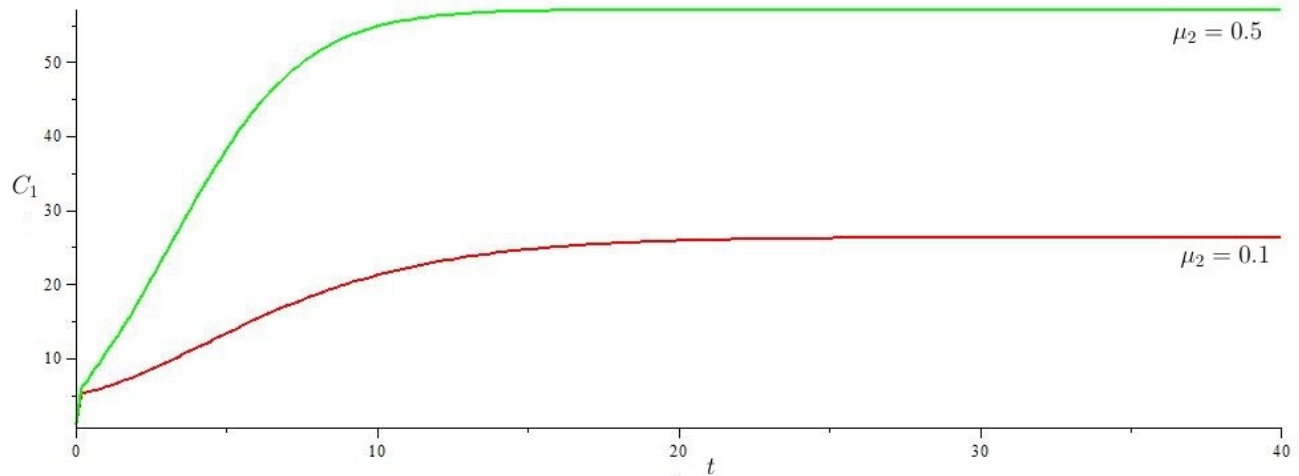


Рис. 4: $C_1(t)$.

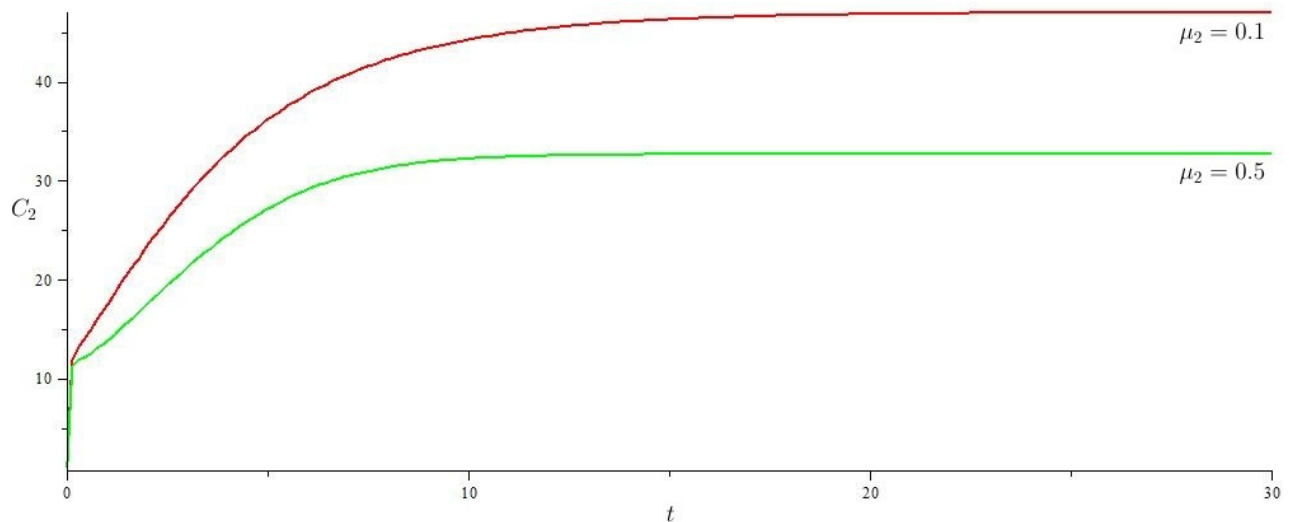
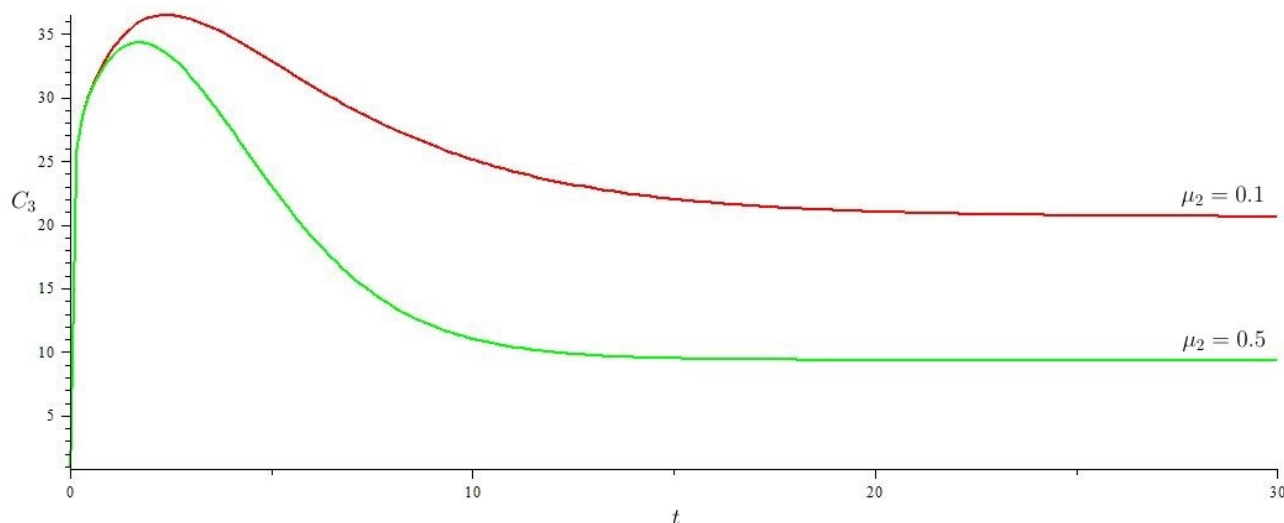
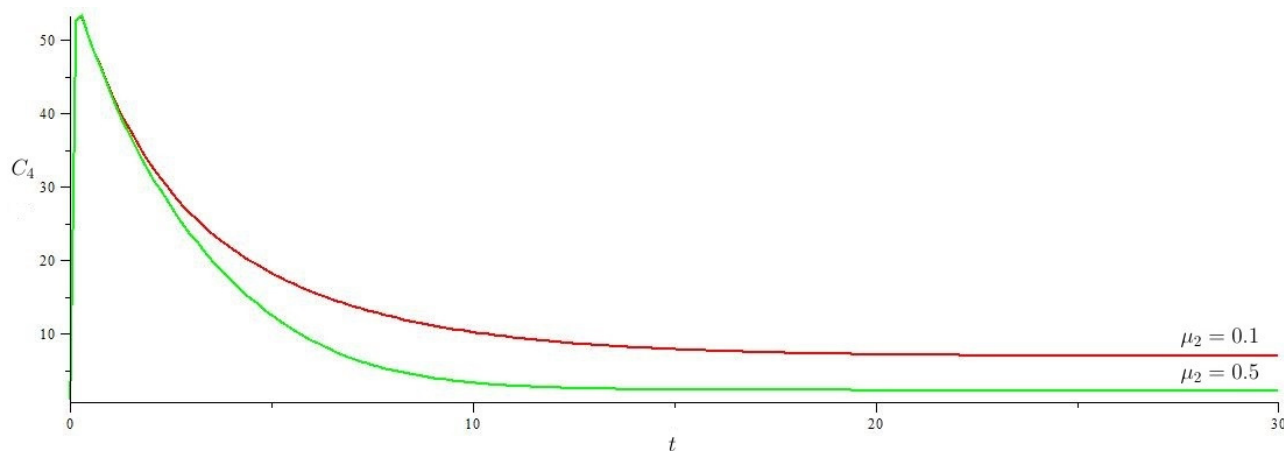


Рис. 5: $C_2(t)$.

Пусть $V = 100$, $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.4$, $a_4 = 0.5$, $\varphi_1 = 0.5$, $\varphi_2 = 0.2$, $\varphi_3 = 0.25$, $\mu_3 = 0.2$, $\mu_4 = 0.3$, $C_1(0) = C_2(0) = C_3(0) = C_4(0) = 1$, для параметра μ_2 будут рассмотрены два различных значения — 0.1, 0.5. Из

Рис. 6: $C_3(t)$.Рис. 7: $C_4(t)$.

представленных на рисунках 4—7 результатов можно выдвинуть гипотезу о глобальной устойчивости положения равновесия.

Для первого эксперимента положим $\mu_2 = 0.1$. Тогда, полученное численно $C^* \approx (26, 47, 21, 7)$.

Пусть теперь $\mu_2 = 0.5$. Тогда, полученное численно $C^* \approx (57, 33, 9, 3)$. Как можно видеть из результатов численного эксперимента, при увеличении μ_2 увеличивается значение C_1^* , уменьшаются значения C_2^* , C_3^* , C_4^* . Объяснить данный факт можно следующим образом: при увеличении μ_2 со второго уровня на первый переходит большая часть капитала $\mu_2 C_2$, вследствие чего капитал на первом уровне растет, а на втором уменьшается. Уменьшение размера капитала на втором уровне влечет за собой уменьшение капитала на третьем,

поскольку снижается доля капитала $\varphi_2 C_2$, переходящая со второго уровня на третий. Далее, аналогичным образом, при уменьшении размера капитала на третьем уровне снижается объем капитала на четвертом.

Заключение

В статье исследована n -мерная модель шумпетеровской динамики капитала с амортизацией. В работе показано существование единственного положительного положения равновесия. Проведены численные эксперименты, позволяющие выдвинуть гипотезу о глобальной устойчивости положения равновесия. Также численно исследован вопрос относительно влияния параметра интенсивности амортизации на положение равновесия. Согласно полученным результатам, при увеличении интенсивности амортизации на некотором уровне эффективности уменьшаются объемы капиталов на данном и последующих уровнях, при этом, увеличиваются объемы капиталов на предыдущих уровнях.

Список литературы

- [1] Schumpeter J. *The theory of economic development (English translation of Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung, 1912)*. Oxford University Press, 1961.
- [2] Lukas R.E., Moll M.B. Knowledge growth and the allocation of time. *Journal of Political Economy*, 2014; 122(1):1–51.
- [3] Gallay O., Hashemi F., Hongler M.-O. Imitation, proximity, and growth: a collective swarm dynamics approach. *Advances in complex systems*, 2019; 22(5):1–43.
- [4] Acemoglu D., Cao D. Innovation by entrants and incumbents. *Journal of Economic Theory*, 2015; 157:255–294.
- [5] Thurner S., Klimek P., Hanel R. Schumpeterian economic dynamics as a quantifiable minimum model of evolution. *New Journal of Physics*, 2010; 12:1–21.
- [6] Judd K.L. Closed-loop equilibrium in a multi-stage innovation race. *Journal of Economic Theory*, 2003; 25(1):21–41.

- [7] Reinganum J. Dynamic games of innovation. *Economic Theory*, 1981; 21(2/3):673–695.
- [8] Iwai K. Schumpeterian dynamics. Part I: an evolutionary model of innovation and imitation. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 1984; 5(2):159–190.
- [9] Iwai K. Schumpeterian dynamics. Part II: technological progress, firm growth and “economic selection”. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 1984; 5(3-4):321–351.
- [10] Полтерович В.М., Хенкин Г.М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий. *Экономика и математические методы*, 1988; 24:1071–1083.
- [11] Polterovich V.M., Henkin G.M. An evolutionary model of economic growth. *Economics and Mathematical Methods*, 1989; 25(3):518–531.
- [12] Henkin G.M., Polterovich V.M. A Difference-Differential Analogue of the Burgers Equation: Stability of the Two-Wave Behavior. *Journal of Nonlinear Science*, 1994; 4:497–517.
- [13] Хенкин Г.М., Шананин А.А. Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики. *Математическое моделирование*, 2014; 26(8):3–19.
- [14] Zhang W.-B. *Differential equations, bifurcations, and chaos in economics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005. — 489 p.
- [15] Alexeeva T.A., Mokaev T.N., Polshchikova I.A. Dynamics of Monetary and Fiscal Policy in a New Keynesian Model in Continuous Time. *Differential Equations and Control Processes*, 2020; 4:88–114.
- [16] Sportelli M., De Cesare L. Fiscal policy delays and the classical growth cycle. *Applied Mathematics and Computation*, 2019; 354:9–31.
- [17] Silva. C.M., Rosa S., Alves H., Carvalho P.G. A mathematical model for the customer dynamics based on marketing policy. *Applied Mathematics and Computation*, 2016; 273:42–53.
- [18] Kirillov A.N., Sazonov A.M. The dynamics of the economic evolution with the capital depreciation. *Differential Equations and Control Processes*, 2020; 2:118–130.

- [19] Kirillov A.N., Sazonov A.M. The global stability of the Schumpeterian dynamical system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020; 16(4):348—356.

The uniqueness of the positive equilibrium in the n-dimensional model of the Schumpeterian dynamics with depreciation

Kirillov A.N., Sazonov A.M.

Institute of Applied Mathematical Research of Federal Research Center
"Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences"

e-mail: sazon-tb@mail.ru

Abstract The paper is devoted to the investigating of the arbitrary dimensional model of the Schumpeterian capital dynamics with capital depreciation. In the work the existence of the unique equilibrium in the positive quadrant of the phase space is proved. The numerical simulations allowing to formulate a hypothesis about the global stability of the equilibrium are provided. The problem of the influence of the depreciation rate to the equilibrium is numerically studied.

Keywords: Schumpeterian dynamics, dynamic systems, nonlinear ODEs, equilibrium.