

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
N 4, 2018  
Электронный журнал,  
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru>  
e-mail: jodiff@mail.ru

Стochastic differential equations

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

С программами в среде MATLAB

Издание шестое, переработанное и дополненное

Кузнецов Д.Ф.

Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого  
кафедра "Высшая Математика"  
e-mail: sde\_kuznetsov@inbox.ru

# Предисловие

Настоящая книга является переработанным и дополненным изданием монографии:

*Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С Программами в среде MatLab, 5-е изд. Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления", 2017, № 2. 1000 с. (A.1 - A.1000). DOI: 10.18720/SPBPU/2/z17-4.

Доступно по ссылке:

[http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov\\_book3.pdf](http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov_book3.pdf)

Для данной книги в основном переработаны главы 5 – 7. Раздел 5.4 (нумерация разделов и теорем соответствует настоящему изданию) дополнен результатами работы [63]: сформулирована и доказана теорема 5.3\*, которая является аналогом теоремы 5.3 и ослабляет ее условия. Добавлен разд. 5.10, в котором сформулирована и доказана теорема 5.7\* о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича 5 кратности [175]. В конце разд. 5.12.1 приведено другое доказательство теоремы 5.3\*, которое было найдено в работе [171]. Кроме этого добавлен разд. 5.14, а разд. 5.17 дополнен теоремой 5.17 [173], которая является обобщением теоремы 5.1. В главу 6 добавлен разд. 6.3 (результаты которого можно найти в [178]), разд. 6.5 переработан, а разд. 6.8 дополнен (см. [164]). Разд. 7.3.3 – 7.3.6 и 7.4.3 – 7.4.6 переработаны и дополнены результатами работ [64], [176] – [179], [181] и [182], а разд. 7.4.2 добавлен. Кроме этого дополнен разд. 3.1.3, а список литературы расширен и скорректирован.

Настоящая монография посвящена проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (далее СДУ), в большей степени СДУ Ито.

---

Набор и верстка в L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Кузнецов Д.Ф.

В связи с этим следует особо отметить четыре монографии, в которых приводится систематическое изложение проблемы численного решения СДУ Ито:

[I] *Milstein G.N.* Numerical integration of stochastic differential equations. Kluwer, 1995. 228 p. (издание на русском, 1988 г.);

[II] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin, Springer-Verlag, 1992. 632 p. (2-е и 3-е изд. 1995 и 1999 гг. соответственно);

[III] *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin, Springer-Verlag, 2004. xx+596 p.;

[IV] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MatLab, 5-е изд. Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления", 2017, № 2. 1000 с. (A.1 - A.1000). DOI: 10.18720/SPBPU/2/z17-4. (1-е и 2-е изд. 2007 г., 3-е и 4-е изд. 2009 и 2010 гг. соответственно).

Доступно по ссылке:

[http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov\\_book3.pdf](http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov_book3.pdf)

Следует также отметить следующую монографию:

*Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2. С.-Петербург, Изд-во Политехнического Ун-та, 2006. 764 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-227,

которая оказалась предвестницей 1 изд. книги [IV] и в которой была впервые сформулирована и доказана теорема 5.1 — одна из основных теорем, входящих в настоящее издание.

Сначала скажем несколько слов о преимуществах численного подхода, который применяется к СДУ Ито во всех четырех монографиях ([I] – [IV]), а затем кратко поясним существенные отличия книги [IV] и настоящего издания от монографий [I – III].

Хорошо известен достаточно общий метод В. Бьюси [114], которым может быть в принципе численно исследован широкий класс стохастических систем с использованием метода Монте–Карло. Этот метод, в силу своей общности, недостаточно эффективен в рамках весьма специфической проблемы численного решения СДУ, поскольку он ориентируется на общие свойства стохастических систем и, в силу этого, не учитывает в достаточной степени специфическую структуру СДУ, характеризуемую их коэффициентами диффузии и сноса.

Другой известный численный подход Г.Дж. Кушнера [155] к стохастическим системам основывается на дискретизации как временной переменной, так и пространственных переменных. В результате такой дискретизации аппроксимации случайных процессов превращаются в цепи Маркова с конечным числом состояний. При численной реализации этого подхода приходится иметь дело с матрицами перехода цепей Маркова, использование которых приводит к значительным вычислительным затратам, вследствие чего данный подход применим к задачам с небольшой размерностью пространства состояний.

В данной книге и книгах [I – IV] интенсивно развивается перспективный подход к численному интегрированию СДУ Ито, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений. Этот подход использует конечную дискретизацию временной переменной и предполагает численное моделирование решения СДУ в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов формулы Тейлора.

Принципиальной особенностью такого подхода является то, что переменные состояния в нем, в отличие от упоминавшегося подхода Г.Дж. Кушнера, не подвергаются дискретизации.

Необходимо отметить, что при этом вычислительные затраты (время и память) растут полиномиально, как отмечается в книге [II], с увеличением размерности задачи, что позволяет говорить о вычислительных резервах данного подхода.

Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решений СДУ Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов в форме Ито или Стратоновича, которые являются функционалами сложной структуры относительно компонент векторного винеровского процесса.

В одной из наиболее общих форм записи в данной книге указанные повторные стохастические интегралы имеют следующий вид:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$$

(интегралы Ито),

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$$

(интегралы Стратоновича),

где  $\psi_l(\tau)$  ( $l = 1, \dots, k$ ) — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции (как правило в приложениях они тождественно равны 1 или имеют биномиальный вид);  $\mathbf{w}_\tau$  — случайный вектор с  $m+1$  компонентой вида:  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ; величины  $i_1, \dots, i_k$  принимают значения  $0, 1, \dots, m$ ;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые стандартные винеровские процессы;  $k$  — кратность повторного стохастического интеграла.

Приведенные повторные стохастические интегралы являются довольно специфическими объектами теории случайных процессов. С одной стороны, неслучайность весовых функций  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$  является упрощающим их структуру фактором. С другой стороны (см. главы 5 и 6), векторность винеровского процесса  $\mathbf{f}_\tau$  с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ , а также то, что функции  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$ , вообще говоря, различны при различных  $l$ ;  $l = 1, \dots, k$ , являются существенными усложняющими структуру повторных стохастических интегралов факторами.

Ввиду сказанного выше, системы повторных стохастических интегралов Ито играют исключительно важную и, пожалуй, ключевую роль при решении проблемы численного интегрирования СДУ и являются, своего рода, блоками, на которые распадается решение СДУ Ито.

Проблема эффективного совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича помимо своей важности является еще и достаточно непростой как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения.

Казалось бы, повторные стохастические интегралы можно аппроксимировать повторными интегральными суммами. Однако, этот подход подразумевает дробление промежутка интегрирования  $[t, T]$  повторных стохастических интегралов (его длина  $T - t$  и без того является достаточно малой величиной, поскольку играет роль шага интегрирования в численных методах для СДУ), что ведет, как показывают численные эксперименты, к неприемлемо большим вычислительным затратам. Задача снижения указанных затрат в разы (а то и на порядки) оказалась весьма непростой и требующей новых нетривиальных исследований. Исключение составляет лишь узкий частный случай, когда  $i_1 = \dots = i_k \neq 0$  и  $\psi_1(s), \dots, \psi_k(s) \equiv \psi(s)$  (см. главы 5 и 6). Изучение этого случая возможно с помощью формулы Ито.

В более общем случае, когда не все числа  $i_1, \dots, i_k$  совпадают между собой, отмеченная задача оказалась гораздо сложнее (она не может быть

решена с помощью формулы Ито и требует более глубокого и сложного исследования). Заметим, что даже в случае упомянутого совпадения ( $i_1 = \dots = i_k \neq 0$ ), но при различных  $\psi_1(s), \dots, \psi_k(s)$ , указанные трудности сохраняются и достаточно простые совокупности повторных стохастических интегралов Ито, которые часто встречаются в приложениях, не могут быть эффективно выражены в конечной форме (при среднеквадратической аппроксимации) через систему стандартных гауссовских случайных величин. Формула Ито также не "спасает" в этом случае, в результате чего приходится прибегать к достаточно сложным, но эффективным, разложениям.

Поскольку СДУ Ито являются адекватными математическими моделями динамических систем различной физической природы, находящихся под воздействием случайных возмущений (см. главу 2), то, в некотором смысле, указанные повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича описывают, в определенном приближении, упомянутые природные процессы. Этим обуславливается важность задачи эффективной совместной аппроксимации систем повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Почему же задача эффективной среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича столь сложна?

Во-первых, указанные стохастические интегралы при фиксированных пределах интегрирования  $t$  и  $T$  являются случайными величинами, плотности распределения которых, в общем случае неизвестны, да и вряд ли они принесли бы пользу для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Во-вторых, требуется аппроксимировать не один стохастический интеграл, а совместно несколько различных стохастических интегралов, которые зависимы, в вероятностном смысле, сложным образом.

В-третьих, обозначенная проблема является действительно проблемой как в случае векторного, так и скалярного стохастического возмущения для многих СДУ даже с точно известными решениями, т.е., зная точное решение СДУ, далеко не всегда возможно его смоделировать численно без привлечения численного моделирования повторных стохастических интегралов.

Проблема эффективного совместного численного моделирования сово-

купностей повторных стохастических интегралов является, кроме всего прочего, весьма новой. Одним из главных и неожиданных достижений данной книги (и ее более ранних изданий) является успешное применение методов функционального анализа (обобщенных кратных и повторных рядов Фурье (сходящихся как в  $L_2([t, T]^k)$ , так и поточечно) по различным системам базисных функций) в данной научной области. В связи с этим можно сказать, что одной из целей данной монографии является разработка и применение метода Фурье к численному решению СДУ Ито. Ряды Фурье широко используется в различных областях прикладной математики и физики. Однако, метод рядов Фурье применительно к численному решению СДУ Ито изучен явно недостаточно. Монография частично заполняет указанный пробел.

Существуют два основных критерия сходимости численных методов для СДУ: сильный или близкий к нему среднеквадратический критерий и слабый критерий, в котором аппроксимируется не само решение СДУ, а математическое ожидание от некоторой гладкой функции от решения СДУ в фиксированный момент времени, т.е. упрощенно говоря, аппроксимируется распределение решения СДУ.

Поскольку сильные численные методы, т.е. построенные в соответствии с сильным (или среднеквадратическим) критерием сходимости, используют достаточно много информации о решении СДУ (в отличии от слабых численных методов, построенных в соответствии со слабым критерием сходимости), то они оказываются существенно сложнее, чем слабые численные методы.

Оба упомянутых критерия являются самостоятельными, т.е. в общем случае нельзя утверждать, что из выполнения сильного критерия следует выполнение слабого критерия и наоборот.

Каждый из двух критериев сходимости ориентирован на решение специфических классов математических задач, связанных с СДУ.

С помощью сильных численных методов можно численно строить отдельные выборочные траектории решения СДУ. Именно эти численные методы требуют совместной среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, что, как уже отмечалось, является сложной проблемой.

Ввиду сказанного, сильные численные методы применяются при построении новых математических моделей на основе СДУ, численном ре-

шении задачи фильтрации сигнала на фоне случайной помехи в различных постановках (линейная фильтрация Калмана-Бьюси, нелинейная оптимальная фильтрация, фильтрация марковской цепи с непрерывным временем и конечным пространством состояний и т.д.), задачи стохастического оптимального управления (в том числе по неполным данным), задачи тестирования процедур оценивания параметров стохастических систем и др.

Основным применением слабых численных методов является их применение к численному решению задач математической физики (задачи Коши, Дирихле и Неймана для уравнений в частных производных второго порядка), причем данные численные методы способны преодолеть, в силу своей экономичности, так называемое "проклятие размерности" при размерности пространственной переменной  $n > 3$ . Как известно, сеточные численные методы, которые не используют сведений из теории вероятностей, ведут при  $n > 3$  к гигантскому объему вычислений. Слабые численные методы применяются при численном решении некоторых других задач, например, задачи о стохастической устойчивости.

Теперь скажем несколько слов об отличиях книг [I – IV] друг от друга.

Небольшая монография [I] является первой монографией в мире по численному интегрированию СДУ, в которой систематически изучаются сильные и слабые численные методы, причем понятие слабого численного метода было по-видимому впервые введено автором монографии [I].

Книга [III] условно состоит из двух частей. Первая содержит результаты книги [I] по численным методам для СДУ в дополненной форме, а вторая и большая часть посвящена преимущественно численному решению задач математической физики с помощью слабых численных методов.

Авторы книг [I] и [III] отмечают сложность проблемы совместной среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича и, в силу этого, тяготеют к задачам (безусловно важным с практической точки зрения), в которых указанная проблема несколько упрощается (СДУ с коммутативным шумом, СДУ со скалярным шумом или с векторным, но аддитивным шумом, СДУ с малым параметром и т.д.).

В книгах [I] и [III] разобран вопрос о среднеквадратической аппроксимации только двух простейших повторных стохастических интегралов Ито первой и второй кратностей ( $k = 1$  и  $2$ ;  $\psi_1(s)$  и  $\psi_2(s) \equiv 1$ ) для многомерного случая:  $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, m$ . При этом, основная идея основана на

разложении, так называемого, процесса броуновского моста в ряд Фурье со случайными коэффициентами. Данный метод назван в [I] и [III] методом Фурье.

В монографии [II] дается большее по объему, чем в [I] и [III] и выдержанное в пропорциональном отношении между сильными и слабыми численными методами изложение теории численного интегрирования СДУ Ито. Авторы уделяют примерно одинаковое внимание как сильным, так и слабым численным методам, а также их приложениям.

В [II] методом Фурье из [I] предпринята попытка среднеквадратической аппроксимации простейших повторных стохастических интегралов третьей кратности ( $k = 3$ ;  $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv 1$ ) для многомерного случая:  $i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \dots, m$ .

Идеология книги [IV] и настоящего издания отличается от идеологии монографий [I – III]. В данной книге уделяется существенно большее (если не основное) внимание сильным численным методам и, как следствие, проблеме эффективной среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (этим вопросам посвящены по меньшей мере восемь глав книги: 5 – 9, 13 – 15), нежели слабым численным методам (этим вопросам полностью посвящены только две главы: 10 и 16). В главах 11 и 12 затрагиваются вопросы, связанные как с сильными, так и со слабыми численными методами.

Одной из основных целей данной монографии и книги [IV] является развеять сложившееся представление о том, что проблема среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича является слишком сложной для более глубокого (по сравнению с результатами книг [I – III]) изучения, а для практических нужд достаточно уже тех результатов, которые получены в данном направлении в [I – III].

Автор настоящей монографии не вполне согласен с указанными представлениями.

Во-первых, в [IV] (главы 5 и 6 настоящей монографии) предложен новый эффективный метод среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито, который основан на обобщенных кратных рядах Фурье (сходящихся в среднем в пространстве  $L_2([t, T]^k)$ ) и который по многим показателям (см. ниже) превосходит метод Фурье из [I – III]. Более того, данный метод не столь сильно

чувствителен к кратности повторного стохастического интеграла Ито и делает процедуры аппроксимации и оценки средеквадратической погрешности весьма прозрачными и удобными в применении на практике.

Во-вторых, СДУ, как математический объект, существуют лишь несколько десятилетий и процесс построения новых и все более сложных математических моделей на их основе весьма бурно протекает в настоящее время. В силу этого, эффективные методы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (в том числе кратностей выше второй), как средство более глубокого изучения математических моделей и более эффективного численного решения задач на основе СДУ, востребованы уже сейчас и интерес к ним будет, по мнению автора, только расти.

Есть еще одно отличие монографии [IV] и данной книги от книг [I – III].

В настоящей монографии и в [IV] подробно рассмотрены стационарные системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (ССЛ-СДУ), которые весьма часто встречаются в приложениях. Помимо своей важности для приложений ССЛСДУ допускают построение специальных и особенно эффективных численных методов своего решения, которые не используют численного моделирования повторных стохастических интегралов и основаны на интегральном представлении решения ССЛСДУ в форме Коши.

Кроме того, указанные численные методы весьма "спокойно" реагируют на повышение размерности системы СДУ. В подтверждение этого в главе 13 данной книги и книги [IV] приводится текст программы в системе MATLAB 7.0, которая позволяет численно моделировать решения ССЛ-СДУ общего вида, при этом допускается выбор размерности вектора состояния (решения) ССЛСДУ, размерности векторного винеровского процесса (стохастического возмущения) и размерностей матриц правой части ССЛСДУ.

В монографиях [I – III] линейные СДУ Ито рассматриваются в основном на уровне интегральных представлений их решений и на уровне отдельных частных примеров численного моделирования решений линейных СДУ Ито. По-видимому, это обстоятельство объясняется тем, что с теоретической точки зрения численное интегрирование ССЛСДУ не является слишком сложной проблемой.

Если говорить более подробно об истории решения проблемы среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, то перспективной оказалась идея отыскания базисов случайных величин, с помощью которых можно представлять интересующие нас совокупности повторных стохастических интегралов. Эта идея претерпевала с течением времени ряд трансформаций.

Пожалуй до середины 80-х годов XX века осуществлялись попытки аппроксимировать повторные стохастические интегралы с помощью разного рода интегральных сумм, т.е. промежуток интегрирования  $[t, T]$  стохастического интеграла разбивался на  $n$  частей и повторный стохастический интеграл приближенно представлялся повторной интегральной суммой, в которую входила система независимых стандартных гауссовских случайных величин, численное моделирование которой не является проблемой.

Однако, как уже отмечалось ранее, бросается в глаза то обстоятельство, что длина промежутка интегрирования  $[t, T]$  повторных стохастических интегралов есть не что иное, как шаг интегрирования численного метода для СДУ Ито, который и без дополнительного дробления уже является достаточно малой величиной. Численные эксперименты [IV] показывают, что такой подход ведет к резкому увеличению вычислительных затрат при росте кратности стохастических интегралов (начиная уже со 2 кратности), что необходимо для построения более точных численных методов или при уменьшении шага интегрирования численного метода и, в силу этих причин, не выдерживает критики.

Новый шаг в направлении решения проблемы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов был сделан Г.Н. Мильштейном в монографии [I] ([76], 1988 г.), который предложил использовать сходящиеся в среднеквадратическом смысле тригонометрические разложения Фурье для винеровских процессов, по которым строится повторный стохастический интеграл. В [76] данным методом получены разложения в ряды из независимых стандартных гауссовских случайных величин двух простейших стохастических интегралов Ито 1 и 2 кратности и доказана их сходимость в среднеквадратическом смысле.

Попытка развития этой идеи для повторных стохастических интегралов 3 кратности была предпринята в монографии [II] ([148], 1992 г.). Однако, в силу ряда ограничений и технических трудностей, присущих методу [76], в [148] и последующих публикациях, рассматриваемая проблема дальнейшего решения не получила. Кроме того, у автора вызывает обосново-

ванное сомнение трактовка в [148] способа суммирования рядов, относящихся к интегралам З кратности (см. разд. 6.10.4 настоящей книги). Этих результатов, тем не менее, оказалось достаточно для построения в упомянутых монографиях сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 для СДУ Ито с многомерным шумом. Важно отметить, что метод [76] в разы, а то и на порядки, превзошел метод интегральных сумм по вычислительным затратам в смысле их уменьшения.

Несмотря на позитивные черты метода [76], наметился и ряд его очевидных недостатков: отсутствие общей явной формулы для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла произвольной кратности  $k$  (как следствие получены упомянутые аппроксимации только простейших повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, причем с некоторыми оговорками для интегралов З кратности); практическая невозможность точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации стохастических интегралов, за исключением простейших интегралов 1 и 2 кратности (в результате приходится учитывать избыточные члены разложения, что ведет к росту вычислительных затрат и усложнению численных методов); существует жесткое ограничение на систему базисных функций при аппроксимации — это могут быть только тригонометрические функции; имеются проблемы технического характера (связанные с суммированием повторных рядов) при использовании данного метода применительно к стохастическим интегралам кратности выше второй (см. разд. 6.10.4) и др.

Следует отметить, что рассматриваемый метод является очевидным шагом вперед в данной научной области.

Прорывом, на взгляд автора, на пути решения проблемы эффективной среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито является метод, предложенный им в теореме 5.1 (см. также [56], 2006 г.). Далее указанный метод называется методом, основанным на кратных рядах Фурье.

Идея данного метода состоит в следующем: повторный стохастический интеграл Ито представляется в виде кратного стохастического интеграла от неслучайной разрывной функции  $k$  переменных, определенной на гиперкубе  $[t, T]^k$ , где  $k$  — кратность стохастического интеграла Ито, а  $[t, T]$  — его промежуток интегрирования. Далее указанная неслучайная функция разлагается в гиперкубе  $[t, T]^k$  в обобщенный кратный ряд Фурье, сходящийся в среднем в пространстве  $L_2([t, T]^k)$ . После ряда нетривиальных

преобразований приходим к сходящемуся в среднеквадратическом смысле разложению повторного стохастического интеграла Ито в кратный ряд из произведений независимых стандартных гауссовых случайных величин (коэффициентами данного ряда являются коэффициенты обобщенного кратного ряда Фурье для упоминавшейся неслучайной функции нескольких переменных, которые вычисляются по явной формуле независимо от кратности стохастического интеграла).

В результате мы получаем следующие новые возможности и преимущества по сравнению с методом Фурье из [76]:

1. Имеется явная формула для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности  $k$ . Иными словами мы можем вычислить (без какой-либо подготовительной и дополнительной работы) коэффициент разложения с любым фиксированным номером в разложении повторного стохастического интеграла заданной фиксированной кратности, например, коэффициент с номером 123456 в разложении стохастического интеграла 6 кратности. При этом нам не потребуется знаний о коэффициентах с другими номерами или о других стохастических интегралах, входящих в рассматриваемую совокупность.

2. Открываются новые возможности для точного вычисления и эффективного оценивания среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов произвольной кратности  $k$ . Эти возможности реализуются точными формулами и эффективными оценками (см. главу 6) для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито. В результате не потребуется учитывать избыточные члены разложения, что усложнило бы численные методы.

3. Поскольку используемый кратный ряд Фурье является обобщенным в том смысле, что он строится с использованием различных полных ортонормированных систем функций в пространстве  $L_2([t, T])$ , то появляются новые возможности для аппроксимации — можно использовать не только тригонометрические функции, но и полиномы Лежандра, а также системы функций Хаара и Радемахера–Уолша.

4. Как оказалось, работать при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов, удобнее всего именно с полиномами Лежандра — существенно проще вычислять коэффициенты кратного ряда Фурье (используется по сути только формула первообразной для степенной функции с целым неотрицательным показателем; при работе с тригономе-

рическими функциями это не так — скажем при вычислении интеграла от произведения синуса на косинус с аргументами  $nt$  и  $mt$  ( $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ) мы уже получим три существенно различных первообразных в случаях:  $n - m \neq 0$ ,  $n + m \neq 0$ ;  $n - m = 0$ ,  $n + m \neq 0$ ;  $n - m = 0$ ,  $n + m = 0$ ). При росте кратности повторного стохастического интеграла отмеченная особенность резко усложняет вычисление коэффициентов разложения.

Кроме того, сами аппроксимации по виду получаются гораздо проще при использовании полиномов Лежандра. Это связано с тем, что система полиномов Лежандра более однородна в том смысле, что каждая ее функция — многочлен. Тригонометрическая же система устроена сложнее — первая ее функция является многочленом нулевой степени, остальные представляют собой две бесконечные серии синусов и косинусов соответственно.

Для систем функций Хаара и Радемахера–Уолша разложения повторных стохастических интегралов получаются пожалуй чересчур сложными (см. главу 5).

5. Вопрос о том, какая же система функций полиномиальная или тригонометрическая лучше с точки зрения вычислительных затрат на аппроксимацию повторных стохастических интегралов оказался не простым, поскольку требуется сравнивать аппроксимации не одного интеграла, а нескольких интегралов одновременно. При этом может случиться так, что для одних интегралов вычислительные затраты окажутся меньше для полиномов Лежандра, а для других — для тригонометрических функций. Отметим, что сами формулы для полученных аппроксимаций существенно проще для системы полиномов Лежандра.

Автор (см. нижние строки таблиц 6.43 и 6.44) считает, что вычислительные затраты в 3 раза меньше при использовании полиномов Лежандра по крайней мере при аппроксимации совокупности повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, необходимых для построения сильного численного метода порядка точности 1.5 для СДУ. Ито с многомерным неаддитивным шумом (в настоящей монографии все примеры численного моделирования решений СДУ реализованы впервые с применением системы полиномов Лежандра).

Кроме того, автор полагает, что данный эффект будет еще более выразительным при рассмотрении более сложных совокупностей повторных стохастических интегралов, что объясняется тем, что полиномиальная система функций имеет существенное преимущество перед тригонометри-

ческой системой функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов, у которых не все весовые функции тождественно равны 1 (ср. формулы (6.85), (6.86), (6.88), (6.89) с формулами (6.136), (6.141), (6.140), (6.139) соответственно).

6. Существенно, что метод Г.Н. Мильштейна приводит к повторным рядам (в противоположность кратным рядам из теоремы 5.1 в данной книге) начиная с третьей кратности повторного стохастического интеграла для случая тождественно равных единице весовых функций (здесь имеется ввиду не менее чем трехкратное интегрирование по винеровским процессам). Для случая тождественно не равных единице весовых функций отмеченная особенность проявляется уже для повторных стохастических интегралов второй кратности. Кратные ряды гораздо более предпочтительны с точки зрения аппроксимации, чем повторные, поскольку, частичные суммы кратных рядов сходятся при любом способе одновременного стремления к бесконечности их верхних пределов суммирования (обозначим их через  $p_1, \dots, p_k$ ). В частности, в наиболее простом и удобном для практики случае при  $p_1 = \dots = p_k = p \rightarrow \infty$ . Для повторных рядов это очевидно не так. Однако, в [148] авторы, тем не менее, не обоснованно используют в рамках метода Г.Н. Мильштейна именно условие  $p_1 = p_2 = p_3 = p \rightarrow \infty$  (см. разд. 6.10.4).

7. Доказана сходимость в среднем степени  $2n$ ,  $n \in N$  аппроксимаций, полученных на основе теоремы 5.1, а также сходимость с вероятностью 1 для этих аппроксимаций (см. разд. 6.8) при 1 и 2 кратности некоторых повторных стохастических интегралов (для случая  $T - t < \infty$ ) и произвольной фиксированной кратности  $k$  повторных стохастических интегралов (для случая достаточно малого  $T - t$ ).

Отметим, что книга не претендует на полное освещение круга вопросов, связанного с обсуждаемой проблемой, однако автор надеется, что монография вносит определенный вклад в развитие теории (главным образом среднеквадратической) и практики численного интегрирования СДУ.

В заключении предисловия несколько слов о содержании и некоторых особенностях настоящей книги.

Данная монография является своего рода уникальным изданием. В ней как ни где полно освещена проблема среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов применительно к численному интегрированию СДУ, причем центральное место в этой части книги занимают полученные автором результаты, которые могут расцениваться

как отдельная теория. Речь идет о главах 5 и 6, которые опубликованы отдельной монографией [159].

Монография может рассматриваться как энциклопедия, не имеющая аналогов на русском языке, по численным методам и схемам для СДУ.

В книге представлен широкий охват приложений и примеров численного решения математических задач, связанных с СДУ.

Изложение подробно и доступно, несмотря на достаточно высокую степень новизны изучаемой проблемы (проблема численного интегрирования СДУ получила интенсивное развитие лишь в 70–80-х годах XX века) и ее высокую "формулоемкость".

Коснемся содержания настоящей монографии по главам.

Книга состоит из четырех частей, разделенных на 17 глав.

Часть I содержит две вводные главы. В главе 1 приводятся необходимые в дальнейшем сведения из теории СДУ и стохастических интегралов. В главе 2 рассмотрены математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Приведены примеры физических и технических систем, описываемых данными математическими моделями. Показано (см. разд. 2.1.1), что системы СДУ с цветным шумом в ряде случаев могут быть сведены к системам СДУ Ито более высоких размерностей. Рассмотрен также ряд математических задач, в которых встречается необходимость численного решения СДУ.

В часть II книги входят четыре главы (главы 3–6), в которых представлены теоретические результаты, положенные в основу численных методов решения СДУ.

Глава 3 монографии знакомит с некоторыми свойствами стохастических интегралов. В частности, рассмотрена новая технология замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалам (подробно рассмотрен случай стохастических интегралов Ито) и выведены соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности  $k$ . Приведена таблица стохастических интегралов.

Глава 4 посвящена стохастическим аналогам разложения Тейлора для процессов Ито. В ней представлены как известные стохастические разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, так и четыре новых и весьма неожиданных представления разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, названных автором унифицированными. Унифицирован-

ные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича строятся с помощью введенной в главе 3 технологии замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито и минимизируют общее число различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, которые изучались в [76], [148], [207], [212] и ряде других работ.

В главе 5 книги рассматриваются сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения повторных стохастических интегралов Ито в кратные ряды из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин, которые основаны на обобщенных кратных рядах Фурье (теорема 5.1). Об этом подробно говорилось выше. Данные результаты адаптированы для повторных стохастических интегралов Стратоновича 1–5 кратностей при различных условиях гладкости весовых функций и различных способах суммирования кратных рядов (теоремы 5.3–5.7\*).

В главе 5 также рассмотрен другой метод разложения повторных стохастических интегралов кратности  $k$  (в данном случае интегралов Стратоновича), основанный на обобщенных повторных (в отличие от кратных) рядах Фурье (теоремы 5.9, 5.11).

Глава 6, завершающая часть II монографии, посвящена в основном методам сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов (слабая аппроксимация рассмотрена в разд. 6.16) Ито и Стратоновича, входящих в разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича соответственно.

На результатах главы 5 в главе 6 предложен метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным в пространстве  $L_2([t, T])$  системам функций. Данным методом получены аппроксимации повторных стохастических интегралов 1–5 кратностей с применением полиномов Лежандра и 1–3 кратностей с применением тригонометрических функций.

Вычислены точно в явном виде среднеквадратические погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито кратностей 1–5 и получен метод (теорема 6.1), согласно которому можно получать точные выражения для указанных погрешностей, в принципе, для стохастических интегралов Ито произвольной кратности  $k$ . Кроме этого получена эффективная оценка для упомянутых среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности  $k$ .

В части III книги (главы 7–12) приведены различные численные методы решения СДУ.

В главах 7–9 представлены явные и неявные одношаговые, двухшаговые и трехшаговые, в том числе конечно-разностные (типа Рунге–Кутта) сильные численные методы решения СДУ Ито порядка точности 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 и 3.0.

Значительная часть из приведенных численных методов является новой вследствие использования унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, метода сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанного на теоремах 5.1–5.7\* (главным образом), а также новых конечно-разностных аппроксимаций частных производных функций, входящих в правую часть соответствующего СДУ Ито.

Глава 10 посвящена слабым численным методам решения СДУ Ито. Большая часть представленных в этой главе результатов принадлежит другим авторам [74] – [76], [148], [230], [235], [236] (см. также библиографии к указанным работам). Однако, здесь предложено также несколько новых слабых численных методов.

В главе 11 рассматриваются методы численного интегрирования ССЛ–СДУ Ито, которые основываются на точном интегральном представлении решений этих систем.

Один из предложенных методов строится на спектральном разложении дисперсионной матрицы стохастической составляющей решения ССЛСДУ, а другой — на аппроксимации указанной стохастической составляющей при помощи кусочно-постоянных случайных процессов. Поясняется также, как численно решать стационарные линейные стохастические системы в соответствии с общей теорией для нелинейных стохастических систем.

Глава 12, завершающая часть III книги, содержит общие представления сильных и слабых явных одношаговых численных методов решения СДУ со скачкообразной компонентой. При написании данной главы автор опирался на результаты других авторов [192], [211]. При этом новизна результатов, представленных в главе 12, обусловлена выбором способа численного моделирования решения СДУ со скачкообразной компонентой на промежутках времени между скачками, на которых данное уравнение превращается в СДУ Ито.

В части IV книги (главы 13–17) представлены примеры численного моделирования и тексты программ в системе MATLAB 7.0.

В главе 13 приведен текст программы в системе MATLAB 7.0 для численного решения ССЛСДУ Ито, которая реализует алгоритмы из главы 11. Приводятся примеры численного моделирования систем второго и шестого порядка с помощью указанных алгоритмов.

Глава 14 содержит примеры численного моделирования выборочных траекторий решений нелинейных систем СДУ Ито второго и третьего порядка. При численном моделировании впервые применена аппроксимация повторных стохастических интегралов, основанная на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра.

Содержание главы 15 составляют примеры численного решения математических задач с использованием сильных численных методов для СДУ. Рассмотрены задачи тестирования процедур оценивания параметров, фильтрации марковской цепи с непрерывным временем и конечным числом состояний, линейной фильтрации Калмана–Бьюси, нелинейной оптимальной фильтрации, оптимального стохастического управления.

Материал 16 главы составляют примеры численного решения математических задач с использованием слабых численных методов для СДУ. Рассмотрена задача о вычислении наибольшего стохастического ляпуновского показателя, а также примеры численного решения задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа, основанные на вероятностных представлениях решений данных задач.

В заключительной 17 главе приведены выборочные тексты программ в системе MATLAB 7.0, которые реализуют численные эксперименты по тексту книги в целом.

Санкт-Петербург, 2018 г.

Кузнецов Д.Ф.

# Кому адресована книга

Монография адресована широкому кругу читателей, среди которых:

- Специалисты по теории случайных процессов.
- Прикладные математики в смежных научных областях, где встречаются математические модели в виде СДУ и прикладные задачи связанные с такими уравнениями.
- Лица, интересующиеся новыми направлениями в современной вычислительной математике, численными методами, программированием на РС.
- Студенты старших курсов и аспиранты университетов, а также технических ВУЗов.

Первой категории читателей окажутся интересными новые результаты, положенные в основу книги. В первую очередь главы 5–6, которые представляют собой целую новую теорию аппроксимации повторных стохастических интегралов применительно к численному интегрированию СДУ. Также интересными окажутся новые представления стохастической формулы Тейлора для решений СДУ (глава 4) и развитая в главе 3 технология замены порядка интегрирования в стохастических интегралах.

Вторую группу читателей заинтересует глава 2, в которой собраны применения СДУ в различных научных областях, главы 7–12 являющиеся своего рода уникальным по объему и содержанию материалом по численным методам и схемам для СДУ, а также примеры численного моделирования и численного решения задач на основе СДУ (главы 13–16).

Для третьей категории читателей окажутся интересными главы 7–17.

Студентам старших курсов и аспирантам технических ВУЗов (по близким к тематике книги специальностям) будет полезно ознакомиться с главами 1–2, 7–17, а их коллегам из университетов с главами 1, 3–12.

# Оглавление

Предисловие	2
Кому адресована книга	20
<b>I Стохастические дифференциальные уравнения: определения, свойства, проблемы, применения</b>	<b>33</b>
<b>1 Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения</b>	<b>34</b>
1.1 Некоторые сведения из теории вероятностей . . . . .	34
1.1.1 Сходимость случайных последовательностей . . . . .	34
1.1.2 Неравенства для математических ожиданий . . . . .	37
1.1.3 Случайные процессы . . . . .	38
1.1.4 Марковские и диффузионные процессы . . . . .	42
1.1.5 Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский и пуассоновский случайные процессы . . . . .	53
1.1.6 Численное моделирование пуассоновского и гауссовского распределений . . . . .	59
1.2 Стохастические интегралы по винеровскому процессу и стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа . . . . .	61
1.2.1 Стохастический интеграл Ито . . . . .	61
1.2.2 Процессы Ито . . . . .	67
1.2.3 Формула Ито . . . . .	69
1.2.4 Стохастические дифференциальные уравнения Ито . . . . .	71
1.2.5 Стохастический интеграл Стратоновича . . . . .	78
1.2.6 Стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича . . . . .	84
1.3 Стохастические интегралы по мартингалам и стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой . . . . .	86
1.3.1 Стохастический интеграл по мартингалу . . . . .	86
1.3.2 Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере . . . . .	90

1.3.3	Формула Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой . . . . .	93
1.3.4	Оценки моментов стохастических интегралов по пуассоновским мерам	95
1.3.5	Стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой . . . . .	97
1.3.6	Интегральное представление решения линейного СДУ со скачкообразной компонентой . . . . .	98
<b>2</b>	<b>Применения стохастических дифференциальных уравнений</b>	<b>101</b>
2.1	Диффузионные математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений . . . . .	101
2.1.1	Общий вид нелинейных диффузионных моделей . . . . .	101
2.1.2	Линейные диффузионные модели . . . . .	105
2.2	Диффузионные модели физических и технических систем . . . . .	110
2.2.1	Модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста . . . . .	110
2.2.2	Автоколебательная электрическая система . . . . .	113
2.2.3	Чандлеровские колебания . . . . .	115
2.2.4	Модели химической кинетики и регуляции численности конкурирующих видов животных . . . . .	116
2.2.5	Модели стохастической финансовой математики . . . . .	117
2.2.6	Модель солнечной активности . . . . .	118
2.2.7	Модель лагранжевой динамики частицы жидкости . . . . .	118
2.2.8	Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	119
2.3	Математические модели диффузионно-скачкообразного типа . . . . .	120
2.3.1	Диффузионно-скачкообразные модели стохастической финансовой математики . . . . .	120
2.3.2	Скачкообразная модель лагранжевой динамики частицы жидкости .	121
2.4	Математические задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями . . . . .	122
2.4.1	Фильтрация . . . . .	122
2.4.2	Оптимальное стохастическое управление . . . . .	123
2.4.3	Стохастическая устойчивость . . . . .	126
2.4.4	Оценивание параметров . . . . .	131
2.5	Вероятностные представления решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа . . . . .	133
2.5.1	Вероятностные представления решения задачи Дирихле . . . . .	133
2.5.2	Вероятностные представления решения задачи Коши . . . . .	136

2.6 О неэффективности применения эвристических обобщений численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям . . . . .	140
<b>II Теоретические результаты, положенные в основу построения численных методов</b>	<b>145</b>
<b>3 Некоторые свойства стохастических интегралов</b>	<b>146</b>
3.1 Теорема о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито . . . . .	146
3.1.1 Формулировка и доказательство . . . . .	149
3.1.2 Следствия и обобщения . . . . .	157
3.1.3 Замена порядка интегрирования для конкретных повторных стохастических интегралов Ито . . . . .	160
3.2 Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу . . . . .	164
3.3 Соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности $k$ . . . . .	168
3.4 Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов . . . . .	172
3.4.1 Аддитивное разделение переменных . . . . .	175
3.4.2 Мультипликативное разделение переменных . . . . .	180
<b>4 Унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича</b>	<b>184</b>
4.1 Дифференцируемость по Ито случайных процессов . . . . .	185
4.2 Разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена . . . . .	191
4.3 Унифицированные разложения Тейлора – Ито . . . . .	193
4.3.1 Обозначения . . . . .	193
4.3.2 Первое унифицированное разложение Тейлора–Ито . . . . .	197
4.3.3 Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито . . . . .	208
4.4 Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов . . . . .	212
4.5 Разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена . . . . .	217
4.6 Унифицированные разложения Тейлора – Стратоновича . . . . .	220
4.6.1 Первое унифицированное разложение Тейлора – Стратоновича . . . . .	220
4.6.2 Второе унифицированное разложение Тейлора – Стратоновича . . . . .	226
4.7 Сильная сходимость стохастических разложений . . . . .	229
4.8 Слабая сходимость разложений Тейлора–Ито . . . . .	233
4.9 Примеры унифицированных разложений . . . . .	234
4.10 Подведение итогов разделов 4.3 и 4.6 . . . . .	241
4.11 Стохастические базисы и их ранги . . . . .	243

<b>5 Разложения повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, основанные на кратных и повторных рядах Фурье, сходящихся в среднем и поточечно</b>	<b>249</b>
5.1 Разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности, основанное на кратных рядах Фурье, сходящихся в среднем . . . . .	250
5.2 О применении полных ортонормированных разрывных систем функций в теореме 5.1 . . . . .	278
5.3 Замечание о применении полных ортонормированных систем функций в теореме 5.1 . . . . .	282
5.4 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича 1 и 2 кратности, основанное на теореме 5.1. Полиномиальный и тригонометрический случай . . . . .	284
5.5 О разложениях повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 3, основанных на теореме 5.1. Некоторые соотношения для случая весовых функций общего вида . . . . .	319
5.6 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 3, основанное на теореме 5.1. Случай полиномов Лежандра . . . . .	328
5.6.1 Случай $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv 1; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ . . . . .	328
5.6.2 Случай $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau) \equiv (t - \tau)^l, \psi_3(\tau) \equiv (t - \tau)^{l_3}; i_1 = i_2 \neq i_3$ . . . . .	348
5.6.3 Случай $\psi_3(\tau), \psi_2(\tau) \equiv (t - \tau)^l, \psi_1(\tau) \equiv (t - \tau)^{l_1}; i_3 = i_2 \neq i_1$ . . . . .	355
5.6.4 Случай $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv (t - \tau)^l; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ . . . . .	361
5.7 Теоремы о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 3, основанные на теореме 5.1. Случай полиномов Лежандра и тригонометрических функций . . . . .	364
5.8 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 3, основанное на теореме 5.1. Тригонометрический случай . . . . .	382
5.9 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 4, основанное на теореме 5.1. Полиномиальный и тригонометрический случаи . . . . .	388
5.10 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 5, основанное на теореме 5.1 . . . . .	410
5.11 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности $k$ , основанное на теореме 5.1. Полиномиальный и тригонометрический случаи . . . . .	426
5.12 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности $k$ , основанное на повторных рядах Фурье . . . . .	428
5.12.1 Случай интегралов второй кратности. Другое доказательство формулы (5.50) . . . . .	428
5.12.2 Случай интегралов третьей и четвертой кратности . . . . .	435
5.12.3 Случай интегралов произвольной кратности . . . . .	441

5.13	Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 2, 3 и 4, основанное на обобщенных кратных и повторных рядах Фурье. Другие доказательства теорем 5.3, 5.5* и 5.7 . . . . .	453
5.13.1	Случай интегралов 2 кратности. Другое доказательство теоремы 5.3	453
5.13.2	Случай интегралов 3 кратности. Другое доказательство теоремы 5.5*	457
5.13.3	Случай интегралов 4 кратности. Другое доказательство теоремы 5.7	463
5.14	Еще раз о теореме 5.8 и ее модификациях. Общие идеи, связанные с разложениями повторных стохастических интегралов Стратоновича . . . . .	476
5.15	Разложение повторных стохастических интегралов по мартингальным пуссоновским мерам . . . . .	478
5.16	Обобщение теоремы 5.1 для повторных стохастических интегралов по мартингалам . . . . .	483
5.17	Обобщение теоремы 5.1 для повторных стохастических интегралов по мартингалам. Случай полных ортонормированных с весом $r(x) \geq 0$ систем функций в $L_2([t, T])$ . . . . .	488
<b>6</b>	<b>Аппроксимация повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича</b>	<b>495</b>
6.1	Введение . . . . .	495
6.2	Вычисление и определение среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученных по теореме 5.1 . . . . .	496
6.2.1	Точное вычисление для случая любого фиксированного $k$ и попарно различных чисел $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ . . . . .	496
6.2.2	Оценка для случая любого фиксированного $k$ и $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ .	500
6.2.3	Оценка для случая любого фиксированного $k$ и $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$	500
6.2.4	Другое доказательство леммы 6.1 . . . . .	502
6.2.5	Точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации. Случай $k = 1, 2; i_1, i_2 = 1, \dots, m$ . . . . .	505
6.2.6	Точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации. Случай $k = 2, 3, 4; i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, m$ (другой подход) . . . . .	508
6.2.7	Точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации для случая любого фиксированного $k$ и произвольных чисел $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ (решение проблемы в общем случае) . . . . .	517
6.2.8	Точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации с помощью теоремы 6.1 для случая $k = 5$ и произвольных чисел $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$ . . . . .	526
6.3	О вычислении среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича . . . . .	535
6.4	Некоторые особенности вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации для систем полиномиальных и тригонометрических функций	538

6.5 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов кратностей 1–5 с помощью теоремы 5.1 и полиномов Лежандра . . . . .	542
6.6 О коэффициентах Фурье–Лежандра . . . . .	569
6.7 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов кратностей 1–3 с помощью теоремы 5.1 и тригонометрической системы функций . . . . .	573
6.8 Сходимость в среднем степени $2n$ и с вероятностью 1 разложений повторных стохастических интегралов из теоремы 5.1 . . . . .	582
6.9 О структуре функций $K(t_1, \dots, t_k)$ , используемых в приложениях . . . . .	595
6.10 Метод Г.Н. Мильштейна сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов . . . . .	597
6.10.1 Введение . . . . .	597
6.10.2 Аппроксимация повторных стохастических интегралов первой и второй кратности . . . . .	598
6.10.3 Сравнение с методом, основанным на теореме 5.1 . . . . .	601
6.10.4 О проблемах метода Г.Н. Мильштейна применительно к повторным стохастическим интегралам кратностей выше второй . . . . .	602
6.11 Представление повторных стохастических интегралов с помощью полиномов Эрмита . . . . .	604
6.12 Использование интегральных сумм для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито . . . . .	607
6.13 Сравнение эффективности рядов Фурье–Лежандра, тригонометрических рядов и интегральных сумм при аппроксимации стохастических интегралов . . . . .	610
6.14 Представления повторных стохастических интегралов как решений систем линейных стохастических дифференциальных уравнений . . . . .	621
6.15 Комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов . . . . .	622
6.15.1 Основные соотношения . . . . .	623
6.15.2 Вычисление среднеквадратической погрешности . . . . .	625
6.15.3 Численные эксперименты . . . . .	627
6.16 Слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито . . . . .	629

### **III Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений** 643

<b>7 Явные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито</b>	<b>644</b>
7.1 Сильная сходимость и тестирование сильных численных методов . . . . .	646
7.2 Явный метод Эйлера . . . . .	650

7.3 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито . . . . .	656
7.3.1 Метод порядка точности $r/2$ . Теорема о сходимости . . . . .	656
7.3.2 Метод Г.Н. Мильштейна . . . . .	663
7.3.3 Методы порядка точности 1.5 . . . . .	665
7.3.4 Метод порядка точности 2.0 . . . . .	669
7.3.5 Методы порядка точности 2.5 . . . . .	672
7.3.6 Метод порядка точности 3.0 . . . . .	677
7.4 Явные одношаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Стратоновича . . . . .	686
7.4.1 Методы порядка точности $r/2$ . Теоремы о сходимости . . . . .	686
7.4.2 Метод порядка точности 1.0 . . . . .	690
7.4.3 Метод порядка точности 1.5 . . . . .	691
7.4.4 Метод порядка точности 2.0 . . . . .	693
7.4.5 Метод порядка точности 2.5 . . . . .	694
7.4.6 Метод порядка точности 3.0 . . . . .	696
7.5 Явные одношаговые конечно–разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито . . . . .	700
7.5.1 Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций . . . . .	701
7.5.2 Метод порядка точности 1.0 . . . . .	703
7.5.3 Методы порядка точности 1.5 . . . . .	704
7.5.4 Методы порядка точности 2.0 . . . . .	707
7.5.5 Методы порядка точности 2.5 . . . . .	710
7.5.6 О сходимости явных сильных одношаговых конечно–разностных численных методов . . . . .	715
7.6 Об ослаблении достаточных условий сходимости численных методов . . . . .	717
<b>8 Неявные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито</b>	<b>720</b>
8.1 Неявный метод Эйлера . . . . .	721
8.2 Неявные одношаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито . . . . .	725
8.2.1 Методы порядка точности 1.0 . . . . .	725
8.2.2 Методы порядка точности 1.5 . . . . .	727
8.2.3 Методы порядка точности 2.0 . . . . .	729
8.2.4 Методы порядка точности 2.5 . . . . .	730
8.2.5 Метод порядка точности 3.0 . . . . .	732
8.3 Неявные одношаговые конечно–разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито . . . . .	734

8.3.1	Методы порядка точности 1.0 . . . . .	734
8.3.2	Методы порядка точности 1.5 . . . . .	735
8.3.3	Методы порядка точности 2.0 . . . . .	737
8.3.4	Методы порядка точности 2.5 . . . . .	739
8.4	О сходимости неявных сильных одношаговых численных методов . . . . .	741
8.5	Сбалансированные неявные сильные численные методы . . . . .	743
8.6	О полностью неявных сильных численных методах . . . . .	744
<b>9</b>	<b>Двухшаговые и трехшаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито</b>	<b>748</b>
9.1	Явные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито . . . . .	749
9.1.1	Метод порядка точности 1.0 . . . . .	749
9.1.2	Методы порядка точности 1.5 . . . . .	750
9.1.3	Методы порядка точности 2.0 . . . . .	752
9.2	Неявные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито . . . . .	753
9.2.1	Методы порядка точности 1.0 и 1.5 . . . . .	753
9.2.2	Методы порядка точности 2.0 и 2.5 . . . . .	755
9.3	О сходимости неявных сильных двухшаговых численных методов . . . . .	758
9.4	Двухшаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито . . . . .	761
9.4.1	Методы порядка точности 1.0 и 1.5 . . . . .	761
9.4.2	Метод порядка точности 2.0 . . . . .	764
9.5	Общие представления двухшаговых методов . . . . .	766
9.6	Трехшаговые численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито . . . . .	770
9.6.1	Методы порядка точности 1.0 . . . . .	770
9.6.2	Методы порядка точности 1.5 . . . . .	778
9.7	Об устойчивости численных методов . . . . .	783
<b>10</b>	<b>Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито</b>	<b>792</b>
10.1	Слабая сходимость и тестирование слабых численных методов . . . . .	793
10.2	Явные слабые численные методы . . . . .	794
10.2.1	Явный метод Эйлера . . . . .	794
10.2.2	Метод порядка точности 2.0 . . . . .	798
10.2.3	Методы порядка точности 3.0 . . . . .	801
10.2.4	Методы порядка точности 4.0 . . . . .	804
10.3	Теорема о сходимости слабых численных методов . . . . .	808
10.4	Экстраполяционные численные методы . . . . .	811

10.5 Явные слабые конечно-разностные численные методы . . . . .	815
10.6 Неявные слабые численные методы . . . . .	818
10.6.1 Неявные методы Эйлера . . . . .	818
10.6.2 Методы порядка точности 2.0 . . . . .	821
10.6.3 Конечно-разностные методы порядка точности 2.0 . . . . .	822
10.7 Численные методы типа "предсказатель–корректор" . . . . .	825
10.8 О сходимости слабых численных методов . . . . .	827
10.9 Устойчивость слабых численных методов в случае мультипликативного шума	830
10.10 Численное моделирование СДУ Ито с использованием метода Монте–Карло и уменьшение дисперсии . . . . .	835
<b>11 Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений</b>	<b>841</b>
11.1 Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты . . . . .	841
11.1.1 Интегральные представления решений СЛСДУ . . . . .	843
11.1.2 Моментные характеристики решений СЛСДУ . . . . .	846
11.2 Метод численного моделирования ССЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении . . . . .	848
11.2.1 Общий подход к моделированию. Структурирование проблемы . . . . .	848
11.2.2 Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения . . . . .	849
11.2.3 Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения . . . . .	853
11.2.4 Алгоритм численного моделирования стохастической составляющей решения . . . . .	859
11.3 Метод численного моделирования ССЛСДУ, основанный на кусочно-постоянных случайных процессах . . . . .	865
11.3.1 Введение . . . . .	865
11.3.2 Алгоритм численного моделирования решений ССЛСДУ . . . . .	866
11.3.3 Оценка скорости сходимости алгоритма . . . . .	868
11.4 Метод численного моделирования ССЛСДУ, основанный на разложении Тейлора–Ито и полиномах Лежандра . . . . .	873
<b>12 Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой</b>	<b>877</b>
12.1 Разложение Тейлора–Ито для решений стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой . . . . .	879
12.2 Сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой . . . . .	882

12.3 Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой . . . . .	892
<b>IV Численное моделирование: алгоритмы, программы, результаты</b>	<b>897</b>
<b>13 Компьютерная программа в системе MATLAB 7.0 для численного моделирования решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений</b>	<b>898</b>
13.1 Введение . . . . .	898
13.2 Математическая модель объекта моделирования . . . . .	899
13.3 Задачи, решаемые программой . . . . .	900
13.4 Текст программы . . . . .	901
13.5 Работа с программой . . . . .	907
13.6 Примеры численного моделирования решений ССЛСДУ . . . . .	913
13.6.1 Численное моделирование чандлеровских колебаний . . . . .	913
13.6.2 Численное моделирование солнечной активности . . . . .	916
13.6.3 Численное моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости	919
<b>14 Моделирование выборочных траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений Ито</b>	<b>921</b>
14.1 Численное интегрирование модели Блэка–Шоулза . . . . .	921
14.2 Численное интегрирование стохастической модели Лотки–Вольтерра 2 порядка . . . . .	923
14.3 Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг . . . . .	925
14.4 Численное исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца . . . . .	928
14.5 Численное исследование влияния стохастического возмущения на уравнения Рёссlera . . . . .	939
<b>15 Примеры применения сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач</b>	<b>947</b>
15.1 Тестирование процедур оценивания параметров . . . . .	947
15.1.1 Двухмерная линейная модель . . . . .	947
15.1.2 Нелинейная одномерная модель . . . . .	950
15.2 Фильтрация марковской цепи с конечным числом состояний . . . . .	952
15.3 Линейная фильтрация Калмана–Бьюси . . . . .	961
15.4 Нелинейная оптимальная фильтрация . . . . .	963
15.5 Оптимальное стохастическое управление по неполным данным . . . . .	966

15.6 Стохастическое оптимальное управление механической системой . . . . .	970
<b>16 Примеры применения слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач</b>	<b>979</b>
16.1 Вычисление наибольшего стохастического ляпуновского показателя . . . . .	979
16.2 Численные методы решения задачи Коши для уравнений параболического типа, основанные на вероятностном представлении решения . . . . .	982
16.3 Численное решение задачи Коши с помощью слабых численных методов и метода Монте-Карло . . . . .	988
16.4 Численное интегрирование задачи Коши для уравнений параболического типа, основанное на прямом статистическом моделировании . . . . .	989
<b>17 MATLAB 7.0-программы для некоторых численных экспериментов по тексту книги</b>	<b>994</b>
17.1 Введение . . . . .	994
17.2 MATLAB 7.0-программы к главе 6 . . . . .	995
17.2.1 Программа для моделирования стохастического интеграла (6.87) при $i_1 \neq i_2$ с выбором числа $q$ из условия (6.105) . . . . .	995
17.2.2 Программа для моделирования стохастического интеграла (6.88) при $i_1 \neq i_2$ с выбором числа $q$ из условия (6.106) . . . . .	996
17.2.3 Программа для проверки условия (6.106) . . . . .	996
17.2.4 Программа для проверки формулы (6.147) . . . . .	997
17.2.5 Программа для совместного численного моделирования стохастических интегралов $I_{0T,t}^{(1)}$ , $I_{1T,t}^{(1)}$ , $I_{00T,t}^{(21)}$ , $I_{000T,t}^{(321)}$ по формулам (6.84), (6.85), (6.87), (6.103) . . . . .	997
17.3 MATLAB 7.0-программы к главе 7 . . . . .	998
17.3.1 Программа для численного эксперимента 7.1 . . . . .	998
17.3.2 Программа для численного эксперимента 7.2 . . . . .	999
17.3.3 Программа для численного эксперимента 7.9 . . . . .	1001
17.3.4 Программа для численного эксперимента 7.13 . . . . .	1002
17.4 MATLAB 7.0-программы к главе 8 . . . . .	1004
17.4.1 Программа для численного эксперимента 8.1 при $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$ . . . . .	1004
17.4.2 Программа для численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$ . . . . .	1006
17.4.3 Программа для численного эксперимента 8.9 . . . . .	1007
17.4.4 Программа для численного эксперимента 8.14 . . . . .	1009
17.5 MATLAB 7.0-программы к главе 9 . . . . .	1011
17.5.1 Программа для численного эксперимента 9.3 . . . . .	1011
17.5.2 Программа для численного эксперимента 9.11 . . . . .	1013
17.5.3 Программа для численного эксперимента 9.12 (кривая 3) . . . . .	1017

17.5.4 Программа для построения кривой 1 на рис. 9.14 . . . . .	1019
17.6 MATLAB 7.0-программы к главе 10 . . . . .	1021
17.6.1 Программа для численного эксперимента 10.1 при $N = 500, M = 100$ . . . . .	1021
17.6.2 Программа для численного эксперимента 10.2 при $N = 500, M = 200$ . . . . .	1022
17.6.3 Программа для численного эксперимента 10.4 при $N = 500, M = 100,$ $b = 0.01$ . . . . .	1024
17.6.4 Программа для численного эксперимента 10.7 при $N = 500, M = 200$ . . . . .	1025
17.6.5 Программа для численного эксперимента 10.9 при $N = 500, M = 200$ . . . . .	1026
17.6.6 Программа для численного эксперимента 10.11 при $N = 500, M = 200$ . . . . .	1028
17.6.7 Программа для численного эксперимента 10.12 при $N = 500, M = 200$ . . . . .	1029
17.7 MATLAB 7.0-программы к главе 14 . . . . .	1031
17.7.1 Программа для численного эксперимента 14.1 . . . . .	1031
17.7.2 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.2 . . . . .	1031
17.7.3 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.3 . . . . .	1032
17.7.4 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.4 . . . . .	1033
17.7.5 Программа, реализующая численный метод из раздела 14.5 . . . . .	1034
17.8 MATLAB 7.0-программы к главе 15 . . . . .	1035
17.8.1 Программа для численного эксперимента 15.1 . . . . .	1035
17.8.2 Программа для численного эксперимента 15.2 при $T = 800$ . . . . .	1036
17.8.3 Программа для численного эксперимента 15.5 . . . . .	1037
17.8.4 Программа для построения рис. 15.10, 15.11 . . . . .	1038
17.8.5 Программа для численного эксперимента 15.7 при $\sigma = c = 0.05$ . . . . .	1040
17.8.6 Программа для численного эксперимента 15.8 при $\sigma = b = 0.07$ . . . . .	1041
17.8.7 Программа для численных экспериментов 15.9 и 15.11 . . . . .	1042
17.9 MATLAB 7.0-программы к главе 16 . . . . .	1044
17.9.1 Программа, строящая реализацию процесса $\lambda_{1,25}^{0.005}(t)$ ( $t \in [0, 25]$ ) из численного эксперимента 16.1 . . . . .	1044
17.9.2 Программа для численного эксперимента 16.2 . . . . .	1045
17.9.3 Программа для численного эксперимента 16.3 . . . . .	1046
17.9.4 Упрощенная программа для численного эксперимента 16.4 . . . . .	1048
17.9.5 Программа для построения зависимостей $\log_2(\mu)$ от $\log_2(\Delta)$ и $ \mu $ от $\Delta$ при $N = 500, M = 100$ в численном эксперименте 16.5 . . . . .	1049
<b>Библиография</b>	<b>1051</b>
<b>Обозначения</b>	<b>1067</b>
<b>Индекс</b>	<b>1069</b>

## **Часть I**

**Стохастические дифференциальные  
уравнения: определения, свойства,  
проблемы, применения**

# Глава 1

## Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения

В настоящей вводной главе приводятся начальные и необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории вероятностей, стохастических интегралов и СДУ. Данная глава поможет при чтении книги, в первую очередь читателям, не являющимся специалистами в области теории вероятностей и случайных процессов.

### 1.1 Некоторые сведения из теории вероятностей

#### 1.1.1 Сходимость случайных последовательностей

Пусть заданы вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и борелевское измеримое пространство  $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B})$ . Функцию  $\xi(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ , определенную при всех  $\omega \in \Omega$ , будем называть случайной величиной, если она измерима относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ , или  $\mathcal{F}$ -измерима, т.е. для любого  $B \in \mathcal{B}$ :  $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ .

**Определение 1.1.** Последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  называется сходящейся с вероятностью 1, в среднем степени  $p$  ( $0 < p < \infty$ ), по вероятности или по распределению к случайной величине  $\xi(\omega)$ , если выполнено одно из следующих предельных соотношений:

$$P\{\omega : \xi_k \rightarrow \xi \text{ при } k \rightarrow \infty\} = 1,$$

$$M\{|\xi_k - \xi|^p\} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

$$P\{\omega : |\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$F_{\xi_k}(x) \rightarrow F_\xi(x) \text{ при } k \rightarrow \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^1,$$

где  $F_{\xi_k}(x)$ ,  $F_\xi(x)$  — функции распределения случайных величин  $\xi_k$  и  $\xi$  соответственно.

Для перечисленных видов сходимости случайных величин используют следующие обозначения:  $\xi_k \rightarrow \xi$  с в. 1 при  $k \rightarrow \infty$  (сходимость с вероятностью 1),  $\xi_k \xrightarrow{d} \xi$  при  $k \rightarrow \infty$  (сходимость по распределению),

$$p\text{-l.i.m. } \xi_k = \xi \text{ и } P\text{-lim}_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi \quad (\xi_k \xrightarrow{P} \xi \text{ при } k \rightarrow \infty)$$

(сходимость в среднем степени  $p$  и сходимость по вероятности соответственно).

Отметим, что если  $p = 2$ , то сходимость в среднем степени 2 называют сходимостью в среднеквадратическом смысле и обозначают

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi.$$

**Определение 1.2.** Последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  называется фундаментальной по вероятности, с вероятностью 1, в среднем степени  $p$  или по распределению, если выполнено одно из следующих условий:

$$P\{|\xi_k - \xi_l| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$P\{\omega : \xi_k - \xi_l \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty\} = 1,$$

$$M\{|\xi_k - \xi_l|^p\} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty,$$

$$|F_{\xi_k}(x) - F_{\xi_l}(x)| \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Отметим, что фундаментальность последовательности случайных величин является необходимым и достаточным условием существования ее предела (так называемый критерий Коши [101]), т.е. для того, чтобы последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходилась по вероятности, с вероятностью 1, в среднем степени  $p$  или по распределению к некоторой случайной величине  $\xi(\omega)$ , необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной в соответствующем смысле.

Приведем некоторые хорошо известные факты [101], касающиеся сходимости последовательностей случайных величин.

1. Для того чтобы последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходилась к случайной величине  $\xi(\omega)$  с вероятностью 1, необходимо и доста-

точно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  выполнялось условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{k \geq N} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\} = 0.$$

2. Если последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходится с вероятностью 1, то она сходится и по вероятности.

3. Если последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходится по вероятности, то из нее можно извлечь подпоследовательность случайных величин  $\xi_{k_n}(\omega)$ , сходящуюся с вероятностью 1 к случайной величине  $\xi(\omega)$ .

4. Если  $\xi_k \xrightarrow{P} \xi$  при  $k \rightarrow \infty$  и для любого  $\varepsilon > 0$  выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} P \{ |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon \} < \infty,$$

то последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходится с вероятностью 1 к случайной величине  $\xi(\omega)$ .

5. Если последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходится в среднем степени  $p$  ( $p > 0$ ), то она сходится в среднем степени  $q$  ( $q > 0$ ) при  $q < p$ .

6. Если последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходится в среднем степени  $p$  ( $p > 0$ ), то она сходится по вероятности.

7. Если для некоторого  $p > 0$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} M \{ |\xi_k - \xi|^p \} < \infty,$$

то последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходится с вероятностью 1 к случайной величине  $\xi(\omega)$ .

8. Если последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходится к  $\xi(\omega)$  по вероятности, то она сходится к  $\xi(\omega)$  и по распределению.

9. Для того чтобы последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходилась по распределению к случайной величине  $\xi(\omega)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой ограниченной непрерывной функции  $f(x)$  выполнялось условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M \{ f(\xi_k) \} = M \{ f(\xi) \}.$$

10. Если  $\xi_k \xrightarrow{P} \xi$  при  $k \rightarrow \infty$  и существует случайная величина  $\eta$  такая, что  $|\xi_k| \leq \eta$  и  $M \{ \eta \} < \infty$ , то  $M \{ |\xi| \} < \infty$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M\{\xi_k\} = M\{\xi\}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} M\{|\xi_k - \xi|\} = 0.$$

11. Если  $\xi_k \rightarrow \xi$  с в. 1 при  $k \rightarrow \infty$  и существует случайная величина  $\eta$  такая, что  $|\xi_k| \leq \eta$  и  $M\{\eta^p\} < \infty$  при некотором  $p > 0$ , то

$$M\{|\xi|^p\} < \infty \text{ и } p\text{-l.i.m. } \xi_k = \xi.$$

12. Если последовательность случайных величин  $\xi_k(\omega)$  сходится в среднем степени  $p$  ( $p > 0$ ) к случайной величине  $\xi(\omega)$  и для всех  $k$  выполнено условие  $M\{|\xi_k|^p\} < \infty$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M\{|\xi_k|^p\} = M\{|\xi|^p\}.$$

### 1.1.2 Неравенства для математических ожиданий

В дальнейшем для доказательства ряда утверждений нам потребуются различные оценки математических ожиданий. С этой целью рассмотрим основные неравенства для математических ожиданий. Предполагается, что случайные величины, используемые в приведенных ниже неравенствах 1–7, таковы, что существуют все моменты, входящие в эти неравенства.

1. Неравенство Чебышева:

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-1} M\{\xi\} \quad \forall \xi(\omega) \geq 0 \text{ с в. 1 и } \forall \varepsilon > 0.$$

Нетрудно видеть, что из этого неравенства следуют неравенства

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-2} M\{\xi^2\}, \quad P\{|\xi - M\{\xi\}| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-2} D\{\xi\},$$

где  $D\{\xi\} \stackrel{\text{def}}{=} M\{(\xi - M\{\xi\})^2\}$  — дисперсия случайной величины  $\xi$ .

2. Неравенство Коши–Буняковского:

$$(M\{|\xi\eta|\})^2 \leq M\{\xi^2\} M\{\eta^2\}.$$

3. Неравенство Ляпунова:

$$\sqrt[s]{M\{|\xi|^s\}} \leq \sqrt[t]{M\{|\xi|^t\}} \quad \forall s, t : 0 < s \leq t.$$

4. Неравенство Гельдера:

$$|M\{\xi\eta\}| \leq \sqrt[p]{M\{|\xi|^p\}} \sqrt[q]{M\{|\eta|^q\}} \quad \forall p, q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p, \quad q < \infty.$$

5. Неравенство Минковского:

$${}^p\sqrt{M\{|\xi + \eta|^p\}} < {}^p\sqrt{M\{|\xi|^p\}} + {}^p\sqrt{M\{|\eta|^p\}} \quad \forall p : 1 \leq p < \infty.$$

6. Неравенство Иенсена:

$$\varphi(M\{\xi\}) \leq M\{\varphi(\xi)\},$$

где  $\varphi$  — определенная на множестве значений случайной величины  $\xi$  борелевская функция, обращенная выпуклостью вниз.

Для функции  $\varphi$ , обращенной выпуклостью вверх, неравенство Иенсена имеет вид

$$\varphi(M\{\xi\}) \geq M\{\varphi(\xi)\}.$$

7.  $M\{|\xi + \eta|^p\} \leq 2^{p-1} (M\{|\xi|^p\} + M\{|\eta|^p\})$  при  $p = 1, 2, \dots$

Наряду с приведенными неравенствами для математических ожиданий будем использовать также неравенство Гронуолла:

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + K \int_{t_0}^t \exp(K(t-s)) \beta(s) ds,$$

которое справедливо  $\forall t \in [t_0, t]$ , если  $\forall t \in [t_0, t]$

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + K \int_{t_0}^t \alpha(s) ds, \quad K \in (0, +\infty).$$

### 1.1.3 Случайные процессы

Семейство случайных величин, параметризованное параметром  $t$ , интерпретируемым как время, будем называть случайным процессом и обозначать  $\xi(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_t \in X \subseteq \Re^1$ , где  $t \in T \subseteq \Re^1$  — временной параметр;  $T$  — область определения, а  $X$  — множество значений случайного процесса  $\xi_t$ . Область определения  $T$  случайного процесса может быть, например, конечным, полубесконечным или бесконечным интервалом числовой прямой. В этих случаях функция  $\xi(t, \omega)$  называется случайным процессом с непрерывным временем. Если  $T$  содержит конечное или счетное множество элементов  $t_k \in T : t_k < t_{k+1}; k = 0, 1, 2, \dots$ , то  $\xi_t$  называется случайным процессом с дискретным временем, или случайной последовательностью.

Случайный процесс  $\xi(t, \omega)$  считается заданным, если заданы его конечномерные распределения — набор функций, которые определены для любого  $k \geq 1$  соотношениями

$$F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k) = P\left\{\bigcap_{j=1}^k \{\xi(t_j, \omega) \in A_j\}\right\},$$

где  $t_1, \dots, t_k \in T$ ;  $A_1, \dots, A_k$  — борелевские множества из множества  $X$  значений процесса  $\xi(t, \omega)$ .

Справедливо следующее утверждение А.Н. Колмогорова [34]:

*Пусть функции  $F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)$  определены при  $t_1, \dots, t_k \in T$ ;  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(X)$  ( $\sigma$ -алгебра борелевских множеств в конечномерном евклидовом пространстве  $X$ ). Тогда для существования такого случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ , конечномерными распределениями которого есть функции  $F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)$ , необходимо и достаточно, чтобы эти функции при  $k \geq 1$  удовлетворяли следующим условиям:*

1.  $F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)$  — совместная функция распределения  $k$  случайных величин при фиксированных  $t_1, \dots, t_k$ .
2. Для любой перестановки  $i_1, i_2, \dots, i_k$  чисел  $1, 2, \dots, k$

$$F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k) = F_\xi(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}, t_{i_1}, \dots, t_{i_k}).$$

3.  $F_\xi(A_1, \dots, A_{k-1}, X, t_1, \dots, t_k) = F_\xi(A_1, \dots, A_{k-1}, t_1, \dots, t_{k-1})$ .

В качестве вероятностного пространства можно выбрать  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где  $\Omega$  — множество всех функций  $\omega(t) : T \rightarrow X$ ;  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная цилиндрическими множествами

$$\{\omega : \omega(t_1) \in A_1, \dots, \omega(t_k) \in A_k\} \stackrel{\text{def}}{=} C(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k);$$

мера  $P$  определяется соотношением

$$P\{C(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)\} = F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k).$$

Тогда искомый случайный процесс  $\xi(t, \omega)$  на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  определяется равенством  $\xi(t, \omega) = \omega(t)$ .

Конечномерные плотности распределения процесса  $\xi(t, \omega)$  представляются выражением

$$F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k) = \int_{A_1} \dots \int_{A_k} p_\xi(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) dx_k \dots dx_1.$$

Функция  $\xi(t, \omega)$  при фиксированном  $\omega$  называется выборочной функцией (траекторией, реализацией) случайногопроцесса.

Случайный процесс называется гауссовским, например, если его конечномерные плотности распределения имеют вид

$$p_\xi(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(K)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^\top K^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right),$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)^\top$ ;  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)^\top$ ;  $K = M\{(\xi - \mathbf{m})(\xi - \mathbf{m})^\top\}$  — симметричная, положительно определенная матрица;  $\det(K)$  — ее определитель;  $M\{\xi\} = \mathbf{m}$ ;  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)^\top$ ;  $\xi(t_j, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_j$ ;  $j = 1, \dots, k$ .

Возможно также более общее определение гауссовского случайного процесса с помощью его конечномерных распределений.

Случайный процесс  $\xi_t$ , заданный на множестве  $T$ , называется стационарным в узком смысле [86], если для любого  $n \geq 1$  и любых моментов  $t_1, t_2, \dots, t_n, t$  таких, что  $t_i + t \in T$ ;  $i = 1, \dots, n$ , совместные функции распределения или плотности распределения совокупности случайных величин  $\xi_{t_1+t}, \dots, \xi_{t_n+t}$  не зависят от  $t$ .

Будем называть процесс  $\overset{\circ}{\xi}_t = \xi_t - M\{\xi_t\}$  центрированной составляющей процесса  $\xi_t$ .

Функция  $R_\xi(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\overset{\circ}{\xi}_{t_1} \overset{\circ}{\xi}_{t_2}\}$  называется корреляционной функцией процесса  $\xi_t$ , причем  $R_\xi(t, t) \stackrel{\text{def}}{=} D\{\xi_t\}$  — дисперсия этого случайного процесса.

Очевидно, что для стационарного в узком смысле случайного процесса  $\xi_t$  имеем, что  $M\{\xi_t\}$  — постоянная,  $R_\xi(t_1, t_2) \equiv R_\xi(t_1 - t_2)$ ,  $D\{\xi_t\} \equiv R_\xi(0)$ . Однако выполнение этих условий для случайного процесса  $\xi_t$ , вообще говоря, не гарантирует его стационарности в узком смысле. Поэтому процессы  $\xi_t$ , удовлетворяющие этим условиям, называются стационарными в широком смысле [86]. Понятие стационарности в широком и узком смысле оказывается эквивалентным только на классе гауссовских процессов.

Известно [19], что для того чтобы функция  $R_\xi(t)$  при  $t \in (-\infty, \infty)$  являлась корреляционной функцией стационарного в широком смысле случайного процесса  $\xi_t$ , удовлетворяющего условию  $M\{(\xi_{t+\tau} - \xi_t)^2\} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ , необходимо и достаточно, чтобы было допустимо представление

$$R_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itw) dF_\xi(w), \quad (1.1)$$

где  $F_\xi(w)$  — произвольная неотрицательная ограниченная монотонно неубывающая функция, непрерывная слева;  $i$  — мнимая единица.

Функция  $F_\xi(w)$ , входящая в представление (1.1) корреляционной функции  $R_\xi(t)$  стационарного в широком смысле случайного процесса  $\xi_t$ , называется спектральной функцией. Если  $F_\xi(w)$  абсолютно непрерывна и допустимо представление

$$F_\xi(w) = \int_{-\infty}^w S_\xi(v) dv,$$

то  $S_\xi(w)$  называется спектральной плотностью процесса  $\xi_t$ .

Спектральная функция может быть восстановлена по корреляционной функции. Так, если  $w_1$  и  $w_2$  — точки непрерывности спектральной функции  $F_\xi(w)$ , то справедливо соотношение [19]:

$$F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-itw_1) - \exp(-itw_2)}{it} R_\xi(t) dt, \quad (1.2)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения.

В точках разрыва спектральной функции  $F_\xi(w)$  соотношение (1.2) остается справедливым, если в его левую часть вместо  $F_\xi(w)$  подставить  $(F_\xi(w+0) - F_\xi(w))/2$ .

Если корреляционная функция  $R_\xi(t)$  абсолютно интегрируема на интервале  $(-\infty, \infty)$ , т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_\xi(t)| dt < \infty,$$

то существует спектральная плотность процесса  $\xi_t$ , которая определяется равенством [19]

$$S_\xi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itw) R_\xi(t) dt. \quad (1.3)$$

Пользуясь представлением (1.3), нетрудно установить следующие свойства спектральной плотности:  $S_\xi(w) \in \Re^1$ ,  $S_\xi(w) = S_\xi(-w)$ ,  $S_\xi(w) \geq 0$ .

**Определение 1.3.** Случайный процесс  $\xi_t$ , определенный при всех  $t \in [0, T]$ , называется непрерывным в момент времени  $t^* \in [0, T]$  в одном из вышеупомянутых вероятностных смыслов, если справедливо предельное соотношение  $\xi_t \rightarrow \xi_{t^*}$  при  $t \rightarrow t^*$ , понимаемое в соответствующем вероятностном смысле.

**Определение 1.4.** Случайный процесс  $\xi_t$ , определенный при всех  $t \in [0, T]$ , называется непрерывным на промежутке  $[0, T]$  в данном вероятностном смысле, если он непрерывен в этом смысле при любом  $t \in [0, T]$ . Непрерывность в среднем степени 2 случайного процесса  $\xi_t$  называется среднеквадратической непрерывностью.

**Определение 1.5.** Случайный процесс  $\xi_t$ , определенный при всех  $t \in [0, T]$ , называется дифференцируемым в момент  $t \in [0, T]$  в одном из вероятностных смыслов, если существует правая часть предельного соотношения  $(\xi_{t+\Delta} - \xi_t)/\Delta \rightarrow d\xi_t/dt$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , понимаемого в этом вероятностном смысле. Процесс  $\xi_t$  будем называть дифференцируемым на промежутке  $[0, T]$  в данном вероятностном смысле, если он дифференцируем в этом смысле при всех  $t \in [0, T]$ .

Рассмотрим случайный процесс  $\xi_t$ , для которого

$$\mathbb{M}\{\xi_t | F_s\} = \xi_s \text{ с. в. 1 при всех } 0 \leq s < t. \quad (1.4)$$

В теории случайных процессов процессы  $\xi_t$ , обладающие свойством (1.4), называются *martingalami*. Если знак равенства в (1.4) заменить на знак  $\leq$ , то процесс  $\xi_t$  называется *супремартингалом*, а если его заменить на знак  $\geq$ , то — *субмартигналом*.

Среди многочисленных свойств мартигалов рассмотрим неравенство Дуба.

Пусть  $\xi_t$ ,  $t \geq 0$  — мартигал, для которого  $\mathbb{M}\{|\xi_t|^p\} < \infty$ . Тогда для любого  $p > 1$  справедлива оценка

$$\mathbb{M}\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^p\right\} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{M}\{|\xi_t|^p\}.$$

В частности, при  $p = 2$  неравенство Дуба имеет вид

$$\mathbb{M}\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^2\right\} \leq 4\mathbb{M}\{|\xi_t|^2\}.$$

Отметим, что определения и свойства мартигалов в дискретном времени аналогичны соответствующим определениям и свойствам мартигалов в непрерывном времени.

#### 1.1.4 Марковские и диффузионные процессы

В данном разделе мы рассмотрим некоторые определения и факты, касающиеся марковских и диффузионных случайных процессов. Подробное

изложение теории марковских случайных процессов можно найти в [25]. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в [25], [34].

Пусть заданы следующие объекты:

1. Вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .
2. Поток  $\sigma$ -алгебр  $\{F_t, t \in T\}$ ,  $T \subseteq [0, \infty)$ , т. е. семейство  $\sigma$ -алгебр  $F_t$ ,  $t \in T$ , таких, что  $F_t \subset F$  и  $F_s \subset F_t$  при  $s \leq t$ ,  $s, t \in T$ .
3. Случайная функция  $\xi_t = \xi(t, \omega) : T \times \Omega \rightarrow (\mathbf{X}, \mathcal{B})$  задает измеримое отображение при каждом  $t \in T$ . Здесь  $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$  — некоторое измеримое пространство.

Будем считать, что случайный процесс обладает *марковским свойством* относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\{F_t, t \in T\}$ , если при  $s \leq t$ ,  $s, t \in T$ ,  $A \in \mathcal{B}$  с вероятностью 1

$$\mathbb{P}\{\xi_t \in A | F_s\} = \mathbb{P}\{\xi_t \in A | \xi_s\}. \quad (1.5)$$

Случайные процессы, обладающие свойством (1.5), обычно называют *марковскими случайными функциями*.

На качественном уровне марковское свойство можно интерпретировать следующим образом. Если  $\xi_t$  — состояние некоторой системы в момент времени  $t$ , то прогноз поведения этой системы в будущие относительно  $t$  моменты времени по наблюдениям поведения этой системы в предшествующие моменты вплоть до настоящего момента  $t$  будет зависеть, главным образом, от состояния системы в настоящий момент  $t$ .

Следствием использования марковского свойства и формулы полной вероятности является уравнение Колмогорова–Чэпмена

$$\mathbb{P}\{\xi_s \in A | \xi_t\} = M\{\mathbb{P}\{\xi_s \in A | \xi_\theta\} | \xi_t\}$$

с  $\mathbb{P}$  вероятностью 1 при каждом  $A \in \mathcal{B}$ ;  $t \leq \theta \leq s$ ;  $t, \theta, s \in T$ .

Функция  $P(s, \mathbf{x}|t, A)$ ;  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ;  $A \in \mathcal{B}$ ;  $s < t$ ;  $s, t \in T$ , называется *вероятностью перехода*, если выполнены следующие условия:

1.  $P(s, \mathbf{x}|t, A)$  — вероятностная мера на измеримом пространстве  $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$  при фиксированных  $s, t, \mathbf{x}$ .
2.  $P(s, \mathbf{x}|t, A)$  —  $\mathcal{B}$ -измеримая функция при фиксированных  $s, t, A$ .
3.  $P(s, \xi_s|t, A) = \mathbb{P}\{\xi_t \in A | \xi_s\}$  с вероятностью 1 при всех  $s, t, A$ .

Используя вероятность перехода, можно переписать уравнение Колмо-

горова–Чэпмена в виде

$$P\{t, \xi_t | s, A\} = \int_{\mathbf{X}} P(\theta, \mathbf{y} | s, A) P(t, \xi_t | \theta, d\mathbf{y})$$

с  $P$  вероятностью 1, где  $t < \theta < s$ ;  $t, \theta, s \in T$ ;  $A \in \mathcal{B}$ .

Часто под уравнением Колмогорова–Чэпмена понимают более сильное соотношение

$$P\{t, \mathbf{x} | s, A\} = \int_{\mathbf{X}} P(\theta, \mathbf{y} | s, A) P(t, \mathbf{x} | \theta, d\mathbf{y})$$

с  $P$  вероятностью 1 для всех  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ;  $t < \theta < s$ ;  $t, \theta, s \in T$ ;  $A \in \mathcal{B}$ .

При изучении марковского свойства случайных процессов обычно рассматривают семейство марковских случайных функций, стартующих в произвольный момент времени  $s$  из произвольной точки  $\mathbf{x}$  фазового пространства. Это фактически означает, что на вероятностном пространстве имеется не одна фиксированная вероятностная мера  $P$ , а семейство вероятностных мер  $P_{s,x}$ , зависящее от временной и фазовой переменных. Вероятностная мера  $P_{s,x}$  интерпретируется как условная вероятность некоторого случайного события, которое может произойти после момента  $s$  при условии, что  $\xi_s = \mathbf{x}$ .

Дадим определение марковского процесса. Обозначим через  $F_{s,t}$  совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{F_\theta, \theta \in [s, t]\}$ .

Пусть заданы следующие объекты:

1.  $(\Omega, U)$  — измеримое пространство.
2. Случайная величина  $\eta(\omega) : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ .
3. При всех  $s, t$  таких, что  $0 \leq s \leq t$ , совокупности  $\sigma$ -алгебр  $F_{s,t} \in U$  в пространстве  $\Omega_t = \{\omega : \eta(\omega) > t\}$ , такие, что если  $s \leq t \leq \theta$  и  $A \in F_{s,t}$ , то  $A \cap \Omega_\theta \in F_{s,\theta}$ .
4. Функция  $\xi_t = \xi(t, \omega)$ ,  $t \in [0, \eta(\omega)]$ ,  $\omega \in \Omega$ , принимающая значения в некотором измеримом пространстве  $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ , такая, что при всех  $s, t$  таких, что  $0 \leq s \leq t$ , отображение  $\xi(t, \cdot) : (\Omega_t, F_{s,t}) \rightarrow (\mathbf{X}, \mathcal{B})$  является измеримым; здесь  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}$  содержит все одноточечные множества.
5. Для всех  $s \geq 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  заданы вероятностные меры  $P_{s,x}$  на  $\sigma$ -алгебре  $F_{s,\infty}$ .

Совокупность объектов 1–5 называют *обрывавшимся марковским процессом*, если выполнены следующие два условия:

1. Для всех  $s, t, A$  таких, что  $0 \leq s \leq t$ ,  $A \in \mathcal{B}$ , функция

$$P(s, \mathbf{x}|t, A) = P_{s,\mathbf{x}}\{\xi_t \in A\}$$

является  $\mathcal{B}$ -измеримой функцией  $\mathbf{x}$ , причем  $P(s, \mathbf{x}|s, \mathbf{X} \setminus \{\mathbf{x}\}) = 0$ .

2. Для всех  $s, t, \theta, \mathbf{x}, A$  таких, что  $0 \leq s \leq t \leq \theta$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ,  $A \in \mathcal{B}$ ,

$$P_{s,\mathbf{x}}\{\xi_\theta \in A | F_{s,t}\} = P(t, \xi_t | \theta, A)$$

с  $P_{s,\mathbf{x}}$  вероятностью 1 на множестве  $\Omega_t$ .

Обрывающийся марковский процесс как правило обозначают в виде  $(\xi_t, \eta, F_{s,t}, P_{s,\mathbf{x}})$ .

Случайный момент времени  $\eta(\omega)$  называется *моментом обрыва* марковского процесса. Если  $\eta(\omega) = +\infty$ , то марковский процесс называется *необрывающимся* и обычно обозначается  $(\xi_t, F_{s,t}, P_{s,\mathbf{x}})$ .

Функция  $P(s, \mathbf{x}|t, A)$  называется *вероятностью перехода* марковского процесса и удовлетворяет уравнению Колмогорова–Чэпмена.

Марковский процесс называется *однородным*, если вероятность перехода  $P(s, \mathbf{x}|t, A)$  такова, что функция  $P(s, \mathbf{x}|s+\Delta, A)$  не зависит от  $s$ ;  $\Delta > 0$ . В этом случае полагают  $P(s, \mathbf{x}|s+\Delta, A) \stackrel{\text{def}}{=} P(\Delta, \mathbf{x}, A)$ . Для конечномерных распределений однородного марковского процесса имеем

$$P_{s,\mathbf{x}}\{\xi_{t_1} \in A_1, \dots, \xi_{t_n} \in A_n\} = P_{0,\mathbf{x}}\{\xi_{t_1-s} \in A_1, \dots, \xi_{t_n-s} \in A_n\},$$

$0 \leq s < t_1 < \dots < t_n$ . Это означает, что вместо семейства вероятностных мер  $P_{s,\mathbf{x}}$ , зависящих от временной и пространственной переменных, в случае однородного марковского процесса достаточно рассматривать семейство вероятностных мер  $P_{0,\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathbf{x}}$ , зависящих только от пространственной переменной. Таким образом, всякий раз, когда процесс стартует из точки  $\mathbf{x}$  в момент времени  $s$ , можно осуществить сдвиг времени так, чтобы точка  $s$  стала нулевой.

Обозначим через  $G_t$  минимальную  $\sigma$ -алгебру подмножеств  $\Omega_t$ , включающую в себя все события  $\{\xi_\theta \in A\} \cap \Omega_t$  при  $\theta \in [0, t]$ ,  $A \in \mathcal{B}$ . Очевидно, что  $G_t \subseteq F_t$ .

Пусть  $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$  — однородный марковский процесс в фазовом пространстве  $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$  с пространством элементарных событий  $\Omega$ .

Случайная функция  $\tau(\omega) : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  называется *марковским моментом*, если:

1.  $0 \leq \tau(\omega) \leq \eta(\omega)$  при каждом  $\omega \in \Omega$ .

2.  $\{\tau(\omega) \leq t < \eta(\omega)\} \in G_t$  при всех  $t \geq 0$ .

Для  $\omega \notin \Omega_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega : \tau(\omega) < \eta(\omega)\}$  полагаем  $\tau(\omega) = \eta(\omega)$ .

Примем

$$\tau_A(\omega) = \inf\{s : 0 \leq s < \eta(\omega), \xi(s, \omega) \notin A\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

если множество в фигурных скобках непусто, и  $\tau_A(\omega) = \eta(\omega)$  в противном случае. Величина  $\tau_A(\omega)$  называется *моментом первого выхода* из множества  $A$ .

Известно [25], [34], что если процесс  $\xi_t$  непрерывен справа,  $A$  — открытое или замкнутое множество, а  $\mathbf{X}$  — топологическое пространство, то  $\tau_A(\omega)$  — марковский момент.

Марковский процесс  $(\xi_t, \eta, G_t, P_x)$  называется *прогрессивно измеримым*, если отображение  $\xi(s, \omega) : ([0, t] \times \Omega_t, B_{[0,t]} \times G_t) \rightarrow (\mathbf{X}, \mathcal{B})$  измеримо при всех  $t$ ; здесь  $B_{[0,t]}$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $[0, t]$ .

Прогрессивно измеримый марковский процесс  $(\xi_t, \eta, G_t, P_x)$  называется *строго марковским*, если для всех  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbf{X}$ ,  $A \in \mathcal{B}$  и любого марковского момента  $\tau(\omega)$  выполняется соотношение

$$P_x\{\xi_{t+\tau} \in A | G_\tau\} = P(t, \xi_\tau, A) \text{ с } P_x \text{ в. 1 на множестве } \Omega_\tau.$$

Случайная величина  $\tau(\omega) : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ , определенная на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , называется моментом остановки относительно совокупности  $\sigma$ -алгебр  $F_t$ ,  $t \geq 0$ , если  $\forall t \geq 0 : \{\tau(\omega) \leq t\} \in F_t$ .

Перейдем к определению характеристического оператора марковского процесса.

Будем полагать, что последовательность окрестностей  $\{U_n\}_{n=1}^\infty$  точки  $x$  сходится к  $x$  ( $U_n \downarrow x$ ), если для любой окрестности  $U$  точки  $x$  найдется такое натуральное  $N$ , что  $U_n \subset U$  при  $n > N$ .

Пусть  $B(\mathbf{X})$  — банахово пространство всех вещественных ограниченных  $\mathcal{B}$ -измеримых функций на  $\mathbf{X}$  с нормой  $\|\cdot\| = \sup_{x \in \mathbf{X}} |\cdot|$ ,  $\mathbf{X}$  — полукомпакт (см., например, [25]).

Обозначим через  $D_{\mathcal{U}, x}$  совокупность всех функций  $f \in B(\mathbf{X})$ , для которых при фиксированном  $x \in \mathbf{X}$  существует предел

$$\mathcal{U}f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_x\{f(\xi_{\tau_n})\} - f(x)}{M_x\{\tau_n\}}, \quad (1.6)$$

где  $\tau_{U_n} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_n$  — момент первого выхода из открытого множества  $U_n$ ;  $U_n$  — произвольная последовательность окрестностей точки  $\mathbf{x}$ , сходящаяся к  $\mathbf{x}$ ;  $M_{\mathbf{x}}\{\cdot\}$  — условное математическое ожидание по мере  $P_{\mathbf{x}}$ ;  $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$  — непрерывный справа строго марковский процесс в полукомпакте  $\mathbf{X}$ .

Для  $f \in \bigcap_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} D_{\mathcal{U}, \mathbf{x}}$  предел в правой части (1.6) существует при всех  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  и определяет некоторую функцию  $\mathcal{U}f(\mathbf{x})$ . Оператор  $\mathcal{U}$  называется *характеристическим оператором* процесса  $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$ . Его область определения  $D_{\mathcal{U}} = \bigcap_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} D_{\mathcal{U}, \mathbf{x}}$ .

Дадим определение однородного диффузионного процесса, основанное на понятии характеристического оператора.

Пусть  $\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $\Re^n$  и пусть  $D_{2, \mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{x} \in \Re^n$ , — совокупность всех вещественных функций, определенных и дважды непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}$ .

Непрерывный строго марковский процесс  $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$  в фазовом пространстве  $(\Re^n, \mathcal{B})$  называется *диффузионным*, если для всех  $\mathbf{x} \in \Re^n$  выполняется включение  $D_{2, \mathbf{x}} \subset D_{\mathcal{U}, \mathbf{x}}$ , где  $\mathcal{U}$  — характеристический оператор случайногопроцесса. Это значит, что характеристический оператор диффузионного процесса определен на любой дважды непрерывно дифференцируемой функции в окрестности точки  $\mathbf{x} \in \Re^n$ .

Зададим некоторый базис в  $\Re^n$ . Пусть в этом выбранном базисе  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)})^T$ ,  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0^{(1)} \dots \mathbf{x}_0^{(n)})^T$ . Положим

$$\beta^{(ij)}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0^{(i)})(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0^{(j)}), \quad \alpha^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0^{(i)}, \quad \gamma(\mathbf{x}) \equiv 1,$$

где  $i, j = 1, \dots, n$ . Очевидно, что введенные функции дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ . Таким образом, определены следующие функции:

$$\begin{aligned} B^{(ij)}(\mathbf{x}_0) &= \mathcal{U}\beta^{(ij)}(\mathbf{x}_0); \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0) &= \mathcal{U}\alpha^{(i)}(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, \dots, n, \\ c(\mathbf{x}_0) &= -\mathcal{U}\gamma(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Далее нетрудно установить [25], что если  $f(\mathbf{x}) \in D_{2, \mathbf{x}_0}$ , то

$$\mathcal{U}f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_0) - c(\mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0),$$

где  $c(\mathbf{x}_0) \geq 0$ , а матрица  $B(\mathbf{x}_0)$  неотрицательно определена, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}_0) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} \geq 0$$

для всех  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}^{(1)} \dots \mathbf{z}^{(n)})^\top \in \Re^n$ .

Известно [25], что при переходе к другому базису вид оператора  $\mathcal{U}$  сохраняется, однако изменяются коэффициенты  $B^{(ij)}(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0)$ .

Функция  $c(\mathbf{x})$  называется *коэффициентом обрыва*, вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  — *вектором сноса*, а матрица  $B(\mathbf{x})$  — *матрицей диффузии* диффузационного процесса  $(\xi_t, \eta, G_t, P_x)$ .

Диффузионный процесс называется *каноническим*, если функции  $c(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $B(\mathbf{x})$  удовлетворяют следующим условиям:

I. Функции  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$ ,  $B^{(ij)}(\mathbf{x})$ ,  $c(\mathbf{x}) : \Re^n \rightarrow \Re^1$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ , ограничены и удовлетворяют условию Гельдера на  $\Re^n$  (функция  $f(\mathbf{x})$  удовлетворяет условию Гельдера на  $\Re^n$ , если существуют постоянные  $K > 0$  и  $0 < \gamma \leq 1$  такие, что  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\gamma$  для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$ ).

II. Существует постоянная  $\delta > 0$  такая, что при всех  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Re^n$  выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} \geq \delta |\mathbf{z}|^2.$$

III. Функция  $c(\mathbf{x}) \geq 0$  при каждом  $\mathbf{x} \in \Re^n$ .

Достаточные условия того, что процесс является диффузионным, содержатся в следующей теореме.

**Теорема 1.1.** [25], [34]. Пусть  $(\xi_t, \eta, G_t, P_x)$  — непрерывный процесс в  $(\Re^n, \mathcal{B})$  и пусть для всех  $\mathbf{x} \in \Re^n$  выполнены следующие три условия:

1. Существует окрестность  $U_0$  точки  $\mathbf{x}$  такая, что  $M_{\mathbf{x}}\{\tau_{U_0}\} < \infty$ , где  $\tau_{U_0}$  — момент первого выхода из  $U_0$ .

2. В некоторой системе координат в  $\Re^n$  существуют пределы

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (1 - P(t, \mathbf{x}, \Re^n)) = c(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Re^n} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i)}) P(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Re^n} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i)}) (\mathbf{y}^{(j)} - \mathbf{x}^{(j)}) P(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) = B^{(ij)}(\mathbf{x}); \quad i, j = 1, \dots, n,$$

причем допредельные выражения равномерно ограничены при всех  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ,  $t \geq 0$ , а функции  $c(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  и  $B(\mathbf{x})$  непрерывны в точке  $\mathbf{x}$ .

Тогда процесс  $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$  диффузионный и для него  $c(\mathbf{x})$  — коэффициент обрыва,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  — вектор сноса, а  $B(\mathbf{x})$  — матрица диффузии.

Рассмотрим утверждение о вероятностном представлении решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с эллиптическим оператором  $\mathcal{U}$ .

**Теорема 1.2.** [25], [34]. Пусть на множестве  $\Re^n$  заданы функции  $c(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $B(\mathbf{x})$ , удовлетворяющие условиям I – III. Тогда существует диффузионный процесс  $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$  в фазовом пространстве  $(\Re^n, \mathcal{B})$ , для которого

$$\mathcal{U}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}) - c(\mathbf{x})f(\mathbf{x}),$$

где  $f \in D_{2,\mathbf{x}}$ , а  $\mathcal{U}$  является характеристическим оператором процесса  $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$  и для любой ограниченной дважды непрерывно дифференцируемой функции  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ , функция  $u(\mathbf{x}, t) = M_{\mathbf{x}}\{f(\xi_t)\}$  является дважды непрерывно дифференцируемой по  $\mathbf{x}$ , дифференцируемой по  $t$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{U}u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Re^n$$

с начальным условием

$$\lim_{t \downarrow 0} u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}).$$

Эллиптический дифференциальный оператор (см. теорему 1.2) называется производящим дифференциальным оператором диффузионного процесса и обычно обозначается  $\mathcal{L}$ .

Рассмотрим другое определение диффузионного процесса, которое основано на понятии вероятности перехода и применимо в случае неоднородного диффузионного процесса.

Говорят, что задан марковский процесс в широком смысле со значениями из  $\Re^n$ , если задана вероятность перехода  $P(\theta, \mathbf{x}|t, A)$ ,  $0 \leq \theta < t \leq T$ ,  $A \in \mathcal{B}$  ( $\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $\Re^n$ ).

Марковский процесс в широком смысле со значениями в  $\Re^n$  на временном интервале  $[0, T]$  называется диффузионным, если выполнены следующие условия:

1. Для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow \tau} \frac{1}{t - \tau} \int_{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| > \varepsilon} P(\tau, \mathbf{x} | t, d\mathbf{y}) = 0. \quad (1.7)$$

2. Существуют функция  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  и симметричная неотрицательно определенная матричная функция  $B(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  такие, что для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow \tau} \frac{1}{t - \tau} \int_{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) P(\tau, \mathbf{x} | t, d\mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau), \quad (1.8)$$

$$\lim_{t \downarrow \tau} \frac{1}{t - \tau} \int_{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon} (\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z})^2 P(\tau, \mathbf{x} | t, d\mathbf{y}) = (B(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{z}, \mathbf{z}), \quad (1.9)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ .

Вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  называют *вектором сноса*, а матрицу  $B(\mathbf{x}, t)$  — *матрицей, или оператором, диффузии*. В случае  $n = 1$  они соответственно называются *коэффициентом сноса* и *коэффициентом диффузии*.

Пусть в множестве  $\mathbb{R}^n$  фиксирован некоторый базис. Пусть  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $B^{(ij)}(\mathbf{x}, t)$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ , — координаты вектора  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  и элементы матрицы  $B(\mathbf{x}, t)$  в данном базисе.

Следующие два утверждения отражают тесную связь диффузионных процессов и дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

**Теорема 1.3.** [25], [34]. *Пусть задан диффузионный процесс с непрерывными вектором сноса  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  и матрицей диффузии  $B(\mathbf{x}, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ . Пусть также ограниченная непрерывная функция  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  такова, что при всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau \in [0, t]$  функция*

$$u(\mathbf{x}, \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) P(\tau, \mathbf{x} | t, d\mathbf{y})$$

*дважды непрерывно дифференцируема по  $\mathbf{x}$ . Тогда функция  $u(\mathbf{x}, \tau)$  дифференцируема по  $\tau$  и удовлетворяет уравнению в частных производных параболического типа*

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} = 0, \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau \in [0, t]$ , с начальным условием  $\lim_{\tau \uparrow t} u(\mathbf{x}, \tau) = f(\mathbf{x})$ .

Уравнение (1.10) называется *обратным уравнением А.Н. Колмогорова*.

В случаях, когда вероятность перехода  $P(\tau, \mathbf{x}|t, A)$  имеет плотность  $p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})$ , т. е. для всех  $\tau \in [0, t]$ ,  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ,  $A \in \mathcal{B}$

$$P(\tau, \mathbf{x}|t, A) = \int_A p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

и эта плотность  $p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})$  является достаточно гладкой функцией от  $(t, \mathbf{y})$ , справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.4.** [25], [34]. *Пусть для диффузионного процесса предельные соотношения (1.7) – (1.9) выполнены равномерно по  $\mathbf{x} \in \Re^n$  и существуют непрерывные производные*

$$\frac{\partial p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} (\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}, t)p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})) , \quad \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^{(i)} \partial \mathbf{y}^{(j)}} (B^{(ij)}(\mathbf{y}, t)p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}))$$

*для всех  $i, j = 1, \dots, n$ . Тогда функция  $p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})$  для каждого  $(t, \mathbf{y}) \in (\tau, T) \times \Re^n$  удовлетворяет уравнению вида*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} (\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}, t)p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^{(i)} \partial \mathbf{y}^{(j)}} (B^{(ij)}(\mathbf{y}, t)p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) называется *прямым уравнением А.Н. Колмогорова* или *уравнением Фоккера–Планка*.

Сформулированные утверждения свидетельствуют о тесной связи диффузионных процессов с дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа.

Известен и другой метод построения диффузионных процессов, основанный на построении их траекторий как решений СДУ. Такой подход будет рассмотрен в данной главе далее.

В случае когда область определения или (и) область значений (пространство состояний) марковского процесса дискретна (конечна или счетна) марковский процесс называется *марковской цепью*.

Рассмотрим марковскую цепь  $\xi_t$ ,  $t \geq 0$  с непрерывным временем и дискретным пространством состояний  $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$ , где  $N$  для определенности конечно (возможен также случай  $N = +\infty$ ). Тогда в силу марковского свойства имеем

$$\mathsf{P}\{\xi_t = y_i | \xi_{t_1} = y_{j_1}, \dots, \xi_{t_k} = y_{j_k}, \xi_\tau = y_j\} = \mathsf{P}\{\xi_t = y_i | \xi_\tau = y_j\}$$

для всех  $t_1, \dots, t_k, \tau, t : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k < \tau \leq t$  и  $y_j, y_i, y_{j_1}, \dots, y_{j_k} \in Y$ ;  $k = 1, 2, \dots$

Для всех  $\tau, t : 0 \leq \tau \leq t$  матрица перехода  $P_{\tau,t} = \|P_{\tau,t}^{(ij)}\|_{i,j=1}^N$  цепи Маркова определяется следующим образом:

$$P_{\tau,t}^{(ij)} = \mathbb{P}\{\xi_t = y_j | \xi_\tau = y_i\}; \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где  $P_{\tau,t}^{(ij)}$  называются вероятностями перехода цепи Маркова.

Очевидно, что при  $0 \leq \tau \leq t$  имеем

$$P_{\tau,\tau} = I, \quad p_t = P_{\tau,t}^\top p_\tau, \quad (1.12)$$

где  $I$  — единичная матрица,  $p_t = (p_t^{(1)} \dots p_t^{(N)})^\top$  — вектор вероятностей с компонентами  $p_t^{(i)} = \mathbb{P}\{\xi_t = y_i\}$ .

Используя (1.12), нетрудно получить

$$P_{s,t} = P_{s,\tau} P_{\tau,t} \quad (1.13)$$

для всех  $s, \tau, t$  таких, что  $0 \leq s \leq \tau \leq t$ .

Марковская цепь называется однородной, если  $P_{\tau,t} = P_{0,t-\tau}$  для  $0 \leq \tau \leq t$ . При этом полагаем  $P_{0,t} \stackrel{\text{def}}{=} P_t$ ,  $t \geq 0$ . Очевидно, что для однородной цепи Маркова равенство (1.13) преобразуется в равенство вида

$$P_{\tau+t} = P_\tau P_t = P_t P_\tau \text{ для всех } \tau, t \geq 0.$$

Матрицей интенсивности однородной марковской цепи назовем матрицу  $A = \|A^{(ij)}\|_{i,j=1}^N$  с компонентами

$$A^{(ij)} = \begin{cases} \lim_{t \downarrow 0} P_t^{(ij)}/t & \text{при } i \neq j \\ \lim_{t \downarrow 0} (P_t^{(ii)} - 1)/t & \text{при } i = j \end{cases}; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Известно, что матрица  $A$  существует (ее диагональные элементы не обязательно конечны), и если  $|A^{(ii)}| < \infty$ ,  $i = 1, \dots, N$ , то вероятности перехода удовлетворяют прямому и обратному уравнениям А.Н. Колмогорова. Эти уравнения в данном случае имеют следующий вид:

$$\frac{dP_t^{(ij)}}{dt} - \sum_{l=1}^N P_t^{(il)} A^{(lj)} = 0, \quad \frac{dP_t^{(ii)}}{dt} - \sum_{l=1}^N P_t^{(li)} A^{(li)} = 0, \quad \text{где } i, j = 1, \dots, N.$$

### 1.1.5 Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский и пуассоновский случайные процессы

Дадим определение случайного процесса с независимыми приращениями.

**Определение 1.6.** Случайный процесс  $\xi_t$ , определенный на промежутке  $[0, T]$ , называется процессом с независимыми приращениями, если для любых  $t_0, t_1, \dots, t_k \in [0, T]$  таких, что  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$ , случайные величины  $\xi_{t_0}, \xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$  стохастически независимы в совокупности.

Особую роль в дальнейшем изложении будут играть винеровские случайные процессы, относящиеся к классу гауссовых процессов с независимыми приращениями [91].

**Определение 1.7.** Случайный процесс  $f_t \in \Re^1$  с независимыми приращениями, определенный при  $t \in [0, T]$ , будем называть винеровским, если он удовлетворяет условиям:

1.  $M\{f_t\} \equiv 0$ .
2.  $M\{(f_{t_2} - f_{t_1})^2\} = \sigma_f^2 |t_2 - t_1|$ ,  $\sigma_f^2 > 0$ , — постоянная.
3. Процессы  $f_{t_1}$  и  $f_{t_2} - f_{t_1}$ ,  $t_2 > t_1$ , имеют нормальное распределение при всех  $t_1, t_2 \in [0, T]$ .

Часто полагают  $\sigma_f^2 = 1$ ,  $f_0 = 0$ . В этом случае винеровский процесс называется стандартным. Поскольку приращения  $f_{t_2} - f_{t_1}$ ,  $t_2 > t_1$ , винеровского процесса имеют нормальное распределение, их функция распределения определяется соотношением

$$P\{f_{t_2} - f_{t_1} < x\} = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_f^2(t_2 - t_1)}\right) du.$$

Известно, что в силу нормальности  $f_{t_2} - f_{t_1}$  справедлива формула

$$M\{(f_{t_2} - f_{t_1})^m\} = \begin{cases} \sigma_f^m (m-1)!! (t_2 - t_1)^{m/2} & \text{при } m = 2k \\ 0 & \text{при } m = 2k + 1 \end{cases},$$

где  $k \in Z$ ,  $k > 0$ .

Известно также, что для винеровского процесса существует непрерывная с вероятностью 1 модификация, которую мы и будем обычно рассматривать.

Далее будем называть случайные величины  $\xi_j; j = 1, \dots, n$  стандартными гауссовскими случайными величинами, если  $\xi_j; j = 1, \dots, n$  распределены по нормальному закону, причем имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии ( $\xi_j \sim N(0, 1); j = 1, \dots, n$ ).

Отметим также следующие свойства винеровского процесса:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{t} = 0 \text{ с. в. 1,}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \text{ с. в. 1.} \quad (1.14)$$

Равенства (1.14) носят название закона повторного логарифма. Не трудно показать, что  $t f_{1/t}$  является винеровским процессом, если  $f_t$  — винеровский процесс. Тогда закон повторного логарифма можно записать в виде

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = 1, \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = -1 \text{ с. в. 1.}$$

С помощью винеровского процесса можно ввести процесс броуновского моста  $b_t$ :

$$b_t = x + f_t - \frac{t}{T} (f_T - y + x); \quad t \in [0, T]; \quad x, y \in \mathbb{R}^1, \quad (1.15)$$

который играет важную роль в приложениях. Из (1.15), в частности, следует, что  $b_0 = x$ ,  $b_T = y$ . Известно, что  $b_t$  — гауссовский процесс, который имеет следующие математическое ожидание и корреляционную функцию:

$$\mathbb{M}\{b_t\} = x - \frac{t}{T} (x - y), \quad R_b(t, s) = \min\{s, t\} - \frac{st}{T},$$

где  $0 \leq s, t \leq T$ .

Известно, что стандартный винеровский процесс  $f(t, \omega)$  на любом конечном промежутке времени  $[0, T]$  может быть представлен в виде сходящегося в среднеквадратическом смысле ряда из независимых стандартных гауссовских случайных величин (разложение Карунена–Лоэва):

$$f(t, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(\omega) C_j(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.16)$$

где функции  $C_j(t)$  имеют вид

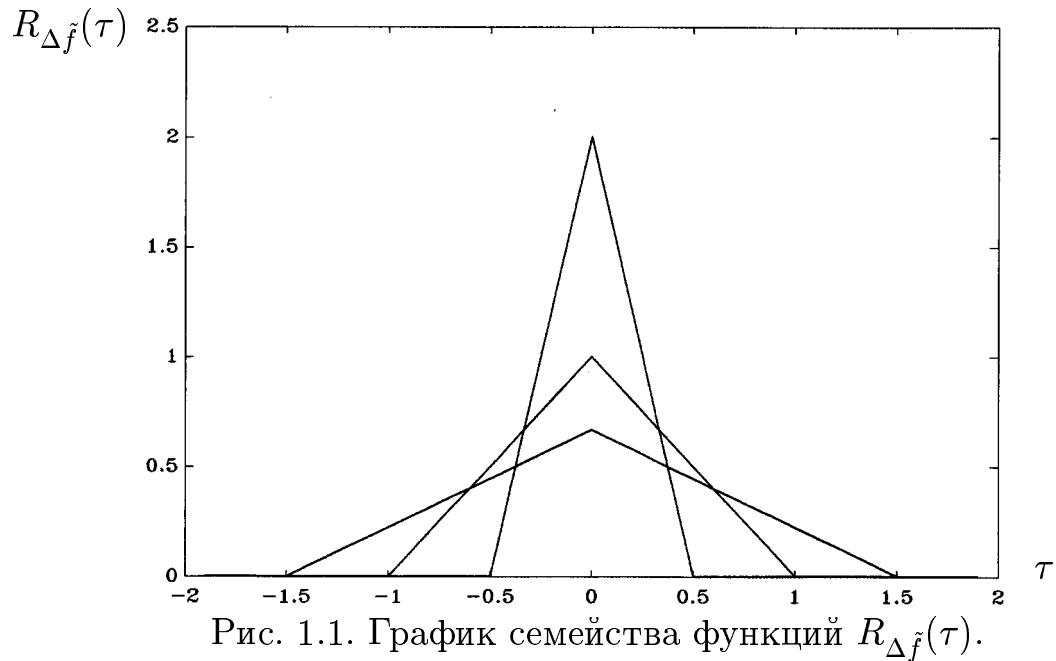


Рис. 1.1. График семейства функций  $R_{\Delta \tilde{f}}(\tau)$ .

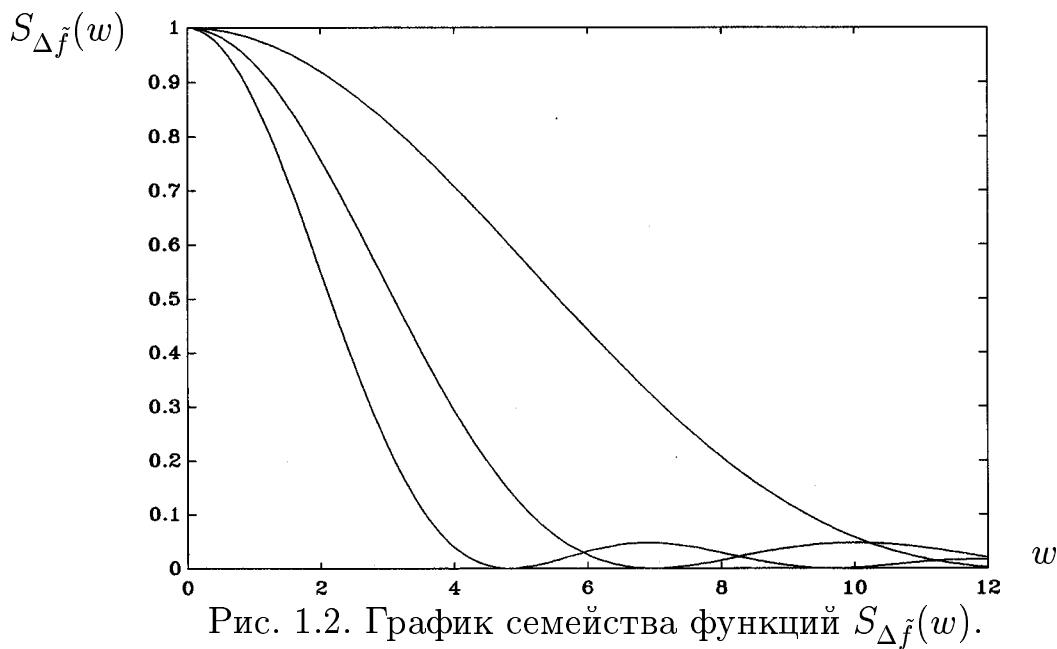


Рис. 1.2. График семейства функций  $S_{\Delta \tilde{f}}(w)$ .

$$C_j(t) = \frac{2\sqrt{2T}}{(2j+1)\pi} \sin \frac{(2j+1)\pi t}{2T},$$

ортогональны, т.е.

$$\int_0^T C_i(t) C_j(t) dt = 0 \text{ при } i \neq j,$$

и удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j(t) C_j(s) = \min\{s, t\} = R_f(s, t);$$

$\xi_j(\omega)$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины вида

$$\xi_j(\omega) = \frac{2}{T} \left( \frac{(2j+1)\pi}{2\sqrt{2T}} \right)^2 \int_0^T f(t, \omega) C_j(t) dt; \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Разложение (1.16) может быть использовано для приближенного представления винеровского процесса.

С помощью винеровского процесса можно ввести понятие белого шума. Рассмотрим случайный процесс

$$\Delta \tilde{f}_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Delta} (f_{t+\Delta} - f_t), \quad \Delta > 0,$$

где  $f_t$  — стандартный винеровский процесс.

Вычисляя корреляционную функцию и спектральную плотность процесса  $\Delta \tilde{f}_t$ , получаем

$$R_{\Delta \tilde{f}}(t) = \begin{cases} \Delta^{-2}(\Delta - |t|) & \text{при } |t| \leq \Delta \\ 0 & \text{при } |t| \geq \Delta \end{cases}, \quad S_{\Delta \tilde{f}}(w) = 2 \frac{1 - \cos(w\Delta)}{(w\Delta)^2}.$$

На рис. 1.1 и 1.2 приведены графики семейств функцій  $R_{\Delta \tilde{f}}(t)$  и  $S_{\Delta \tilde{f}}(w)$  соответственно.

Очевидно, что, переходя к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$ , имеем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} R_{\Delta \tilde{f}}(t) = \delta(t), \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_{\Delta \tilde{f}}(w) = 1,$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака, т.е. обобщенная функция для которой  $\delta(t) = 0$  при  $t \neq 0$  и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0)$$

для любой непрерывной в нуле функции  $g(t)$ .

Рассмотрим идеализированный случайный процесс  $\tilde{f}_t$ , которому соответствуют предельные значения корреляционной функции и спектральной плотности процесса  $\Delta \tilde{f}_t$  при  $\Delta \rightarrow 0$ . Таким образом, случайный процесс  $\tilde{f}_t$  имеет  $\delta$ -образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность, т.е. является белым шумом. Иными словами, белый шум  $\tilde{f}_t$  можно рассматривать как обобщенную производную случайного процесса  $f_t : f_t \stackrel{\text{def}}{=} df_t/dt$ .

Перейдем к рассмотрению процесса Пуассона.

Случайная величина  $\nu$  называется распределенной по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , если

$$\mathbb{P}\{\nu = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Характеристическая функция пуассоновского распределения имеет вид [17], [18]:

$$\varphi(t) = \exp\{\lambda(\exp(it) - 1)\}.$$

Нетрудно убедиться [17], [18], что

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{\nu\} &= \lambda, \quad \mathbb{M}\{\nu^2\} = \lambda^2 + \lambda, \quad \mathbb{D}\{\nu\} = \lambda, \\ \mathbb{M}\{(\nu - \mathbb{M}\{\nu\})^k\} &\stackrel{\text{def}}{=} \mu_k = \lambda \sum_{l=0}^{k-2} C_{k-1}^l \mu_l, \quad k \geq 2, \\ \mathbb{M}\{\nu^k\} &= \lambda \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \mathbb{M}\{\nu^j\}, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

где  $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$  — биномиальный коэффициент.

*Однородный процесс  $\nu_t$  с независимыми приращениями называется однородным процессом Пуассона, если  $\nu_t$  имеет пуассоновское распределение, т. е. существует такое  $\lambda > 0$ , что*

$$\mathbb{P}\{\nu_{t+\Delta} - \nu_t = k\} = \frac{(\lambda\Delta)^k}{k!} \exp(-\lambda\Delta),$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Delta > 0$ .

Характеристическая функция процесса Пуассона имеет вид [17], [18]:

$$\varphi(t, \theta) = \exp\{\lambda t(\exp(i\theta) - 1)\}.$$

Возникновение процесса Пуассона возможно, например, в следующей ситуации.

Предположим, что в некотором эксперименте наблюдается появление некоторых событий и при этом выполняются условия:

1. Число событий, произошедших на промежутке времени  $[t, t + \Delta]$ , не зависит от того, сколько событий и в какие моменты времени произошло на промежутке  $[0, t]$ .
2. Вероятность того, что на промежутке времени  $[t, t + \Delta]$  произойдет одно событие, равна  $\lambda\Delta + o(\Delta)$ .

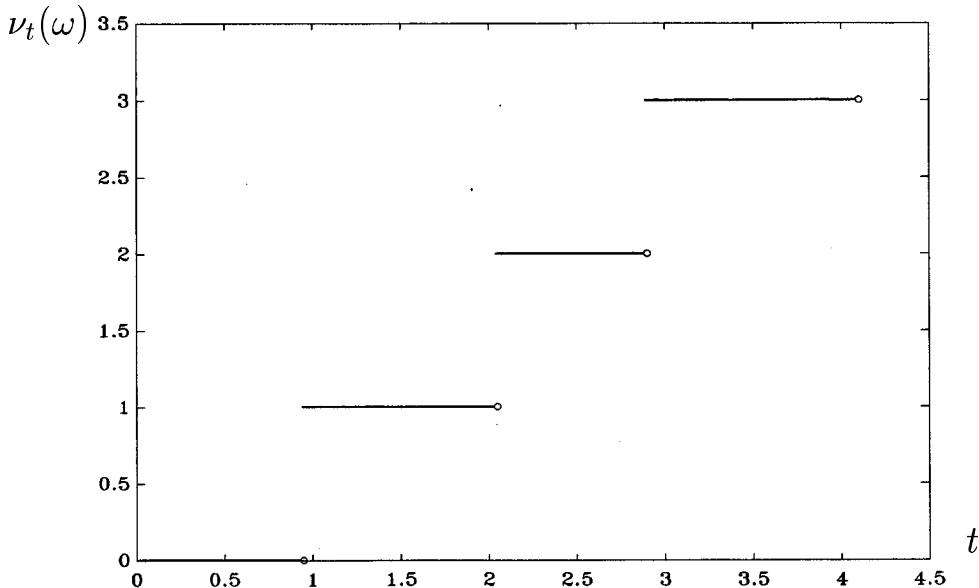


Рис. 1.3. Выборочная траектория процесса Пуассона.

3. Вероятность того, что на промежутке времени  $[t, t + \Delta]$  произойдет более одного события, равна  $o(\Delta)$ .

Тогда случайная величина  $\nu_t$ , равная числу событий, которые произошли на промежутке  $[0, t]$ , как функция  $t$  является процессом Пуассона.

Выборочная траектория процесса Пуассона  $\nu_t$  изображена на рис. 1.3.

В дальнейшем будем рассматривать также объекты более общего вида.

Пусть  $(\Theta, \mathcal{B})$  — измеримое пространство с мерой  $\Pi$ , а  $\mathcal{B}_0$  — подалгебра  $\mathcal{B}$ , состоящая из таких множеств  $A \subset \mathcal{B}$ , для которых  $\Pi(A) < \infty$ . Обозначим через  $\mathcal{B}_+$   $\sigma$ -алгебру борелевских множеств  $[0, T)$ ,  $T \leq \infty$ . Пусть также задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  с совокупностью  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T)\}$ ,  $T \leq \infty$ , которая монотонно возрастает с ростом  $t$ , непрерывна справа по  $t$  и полна относительно меры  $\mathbf{P}$ , причем  $\mathcal{F}_0$  содержит все события с нулевой вероятностью.

Пусть каждому множеству  $C \subset \mathcal{B}_+ \times \mathcal{B}$  поставлена в соответствие случайная величина  $\nu(C)$  такая, что:

(I) Для каждого  $A \subset \mathcal{B}_0$  случайный процесс  $\nu([0, t], A)$  — однородный пуссоновский процесс с параметром  $\Pi(A)$ , т. е.

$$\mathbf{P}\{\nu([0, t], A) - \nu([0, s], A) = k\} = \frac{((t-s)\Pi(A))^k}{k!} \exp(-(t-s)\Pi(A)),$$

где  $0 \leq s < t$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и при всех  $t \geq 0$  случайные величины

$\nu([0, t), A)$  измеримы относительно  $\sigma$ -алгебры  $F_t$ , а приращение вида:  $\nu([0, t + s), A) - \nu([0, t), A)$ ,  $s \geq 0$ , не зависит от  $\sigma$ -алгебры  $F_t$ .

(II) Для непересекающихся множеств  $A_i \subset \mathcal{B}_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , процессы  $\nu([0, t), A_i)$  независимы.

(III) Для любой последовательности  $C_1, C_2, C_3, \dots$  попарно непересекающихся множеств из  $\mathcal{B}_+ \times \mathcal{B}$ :

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i) \text{ с в. 1.}$$

Если выполнены условия (I) – (III), то говорят, что в пространстве  $[0, \infty) \times \Theta$  определена пуассоновская мера  $\nu$ .

### 1.1.6 Численное моделирование пуассоновского и гауссовского распределений

В следующих главах книги рассматриваются различные численные методы решения СДУ. При этом на стадии численной реализации данных методов возникает необходимость в численном моделировании случайных величин, распределенных по пуассоновскому и гауссовскому законам с заданными параметрами.

Для численного моделирования случайной величины  $\nu$ , имеющей пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$ , воспользуемся алгоритмом, приведенным в [26].

Введем случайную величину  $\nu$ , определенную равенством

$$\nu = \min\left\{n : \prod_{k=1}^n u_k < \exp(-\lambda)\right\}, \quad (1.17)$$

где  $u_1, \dots, u_n$  — независимые, равномерно распределенные на интервале  $(0, 1)$  случайные величины.

В [26] показано, что случайная величина  $\nu$  вида (1.17) имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$ , т. е.

$$P\{\nu = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda); \quad m = 0, 1, \dots$$

Формула (1.17) позволяет построить следующий алгоритм численного моделирования пуассоновской случайной величины  $\nu$ .

**Алгоритм 1.1.** Моделирование пуассоновской случайной величины с параметром  $\lambda$ .

1.  $S := 1$ .
2.  $k := 1$ .
3. Моделирование случайной величины  $u_k$ .
4.  $S := Su_k$ .
5. Если  $S > \exp(-\lambda)$ , то  $k := k + 1$ , и переходим к п. 4.
6.  $\nu := k$ .
7. Конец работы алгоритма 1.1.

Нетрудно видеть, что если требуется моделировать  $m$  независимых пуассоновских случайных величин  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$  с параметром  $\lambda$ , то для этого можно  $m$  раз воспользоваться алгоритмом 1.1. Так, для моделирования  $\nu_1$  по алгоритму 1.1 используется набор случайных величин  $u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}$ , для моделирования  $\nu_2$  — набор случайных величин  $u_1^{(2)}, \dots, u_{n_2}^{(2)}$  и т.д. При этом случайные величины  $u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}, \dots, u_1^{(m)}, \dots, u_{n_m}^{(m)}$  должны быть независимыми в совокупности и равномерно распределенными на интервале  $(0, 1)$ .

Рассмотрим процесс моделирования гауссовского распределения с параметрами  $m$  и  $\sigma$ .

Можно убедиться [26], что случайная величина

$$\eta^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{k=1}^n \left( u_k - \frac{1}{2} \right) \quad (1.18)$$

в соответствии с центральной предельной теоремой является асимптотически нормальной стандартной (т.е. с параметрами 0 и 1) случайной величиной. Здесь  $u_1, \dots, u_n$  — независимые, равномерно распределенные на интервале  $(0, 1)$  случайные величины. Обычно в формуле (1.18) принимают  $n = 12$ :

$$\eta^{(12)} = \sum_{k=1}^{12} u_k - 6. \quad (1.19)$$

Для более точного моделирования гауссовского распределения с параметрами 0 и 1 иногда используют формулу [26]

$$\xi^{(n)} = \eta^{(n)} + \frac{1}{20n} \left( (\eta^{(n)})^3 - 3\eta^{(n)} \right).$$

Для моделирования гауссовой случайной величины с параметрами  $m$  и  $\sigma$  можно применить формулу  $\rho^{(n)} = m + \sigma\eta^{(n)}$ , где  $\eta^{(n)}$  определяется из формулы (1.18).

Если необходимо моделировать  $d$  независимых стандартных гауссовых случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_d$ , то можно  $d$  раз воспользоваться формулой (1.19). Так, для моделирования  $\eta_1$  используются случайные величины  $u_1, \dots, u_{12}$ , для моделирования  $\eta_2$  — случайные величины  $u_{13}, \dots, u_{24}$  и т.д. При этом случайные величины  $u_1, \dots, u_{12d}$  независимы в совокупности и равномерно распределены на интервале  $(0, 1)$ .

Обзоры различных методов численного моделирования гауссовского распределения приведены в [148], [151], [196].

## 1.2 Стохастические интегралы по винеровскому процессу и стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа

### 1.2.1 Стохастический интеграл Ито

Пусть заданы вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и винеровский случайный процесс  $f_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Рассмотрим совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ , определенную на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и связанную с процессом  $f_t$  так, что:

1.  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  при  $s < t$ .
2. Процесс  $f_t$  измерим относительно  $\mathcal{F}_t$  при каждом  $t \in [0, T]$ .
3. Процесс  $f_{t+\Delta} - f_\Delta$  при всех  $\Delta \geq 0$ ,  $t > 0$  не зависит от событий  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_\Delta$ .

Введем класс  $M_2([0, T])$  функций  $\xi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

(I) Функции  $\xi(t, \omega)$  измеримы по совокупности переменных  $(t, \omega)$ .

(II) Функции  $\xi(t, \omega)$   $\mathcal{F}_t$ -измеримы при всех  $t \in [0, T]$  и их значения  $\xi(\tau, \omega)$  не зависят от приращений  $f_{t+\Delta} - f_\Delta$  винеровского процесса при  $\Delta \geq \tau$ ,  $t > 0$ .

$$(III) \int_0^T M \{ (\xi(t, \omega))^2 \} dt < \infty.$$

$$(IV) M \{ (\xi(t, \omega))^2 \} < \infty \text{ для всех } t \in [0, T].$$

Введем на классе  $M_2([0, T])$  норму вида

$$\|\xi\|_{2,T} = \left( \int_0^T \mathbf{M} \{ (\xi(t,\omega))^2 \} dt \right)^{1/2}.$$

Будем отождествлять две функции  $\xi, \eta \in M_2([0, T])$ , если  $\|\xi - \eta\|_{2,T} = 0$ . Для произвольного разбиения  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  промежутка  $[0, T]$  такого, что  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ , и произвольной последовательности среднеквадратически интегрируемых,  $F_{\tau_j}$ -измеримых и не зависящих от приращений  $f_{s+t} - f_t$ ,  $t \geq \tau_j$ ,  $s > 0$ , случайных величин  $\xi_j(\omega)$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$  определим ступенчатую функцию  $\xi \in M_2([0, T])$  следующим образом:  $\xi(t, \omega) = \xi_j(\omega)$  с вероятностью 1 при  $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . При этом интеграл в условии (III) понимается следующим образом:

$$\int_0^T \mathbf{M} \{ (\xi(t, \omega))^2 \} dt = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ (\xi_j(\omega))^2 \} (\tau_{j+1} - \tau_j).$$

Обозначим через  $K_2([0, T])$  множество всех ступенчатых функций в классе  $M_2([0, T])$ . Для произвольной ступенчатой функции  $\xi$  из класса  $K_2([0, T])$  определим стохастический интеграл Ито:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) (f(\tau_{j+1}, \omega) - f(\tau_j, \omega)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau df_\tau.$$

Нетрудно показать, что стохастический интеграл Ито

$$\int_0^T \xi_\tau df_\tau$$

является  $F_T$ -измеримым, не зависит от приращений  $f_{s+\Delta} - f_\Delta$ ,  $\Delta \geq T$ ,  $s > 0$  и для любых  $\xi, \eta \in K_2([0, T])$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$  удовлетворяет следующим свойствам:

$$A1. \quad \mathbf{M} \left\{ \int_0^T \xi_\tau df_\tau \right\} = 0.$$

$$A2. \quad \mathbf{M} \left\{ \left( \int_0^T \xi_\tau df_\tau \right)^2 \right\} = \int_0^T \mathbf{M} \{ \xi_\tau^2 \} d\tau.$$

$$A3. \quad \int_0^T (\alpha \xi_\tau + \beta \eta_\tau) df_\tau = \alpha \int_0^T \xi_\tau df_\tau + \beta \int_0^T \eta_\tau df_\tau \text{ с. в. 1.}$$

$$A4. \quad \mathbf{M} \left\{ \int_0^T \xi_\tau df_\tau \int_0^T \eta_\tau df_\tau \right\} = \int_0^T \mathbf{M} \{ \xi_\tau \eta_\tau \} d\tau.$$

Рассмотрим разбиение промежутка  $[0, T]$ , для которого

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \dots < \tau_N^{(N)} = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}| \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Определим последовательность ступенчатых функций

$$\xi^{(N)}(t, \omega) = \xi(\tau_j^{(N)}, \omega) \text{ с в. 1 при } t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)}), \quad (1.20)$$

где  $j = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $N = 1, 2, \dots$

Можно показать (см., например, [17], [84], [148]), что для произвольной функции  $\xi \in M_2([0, T])$  последовательность ступенчатых функций  $\xi^{(N)}(t, \omega) \in K_2([0, T])$  вида (1.20) сходится по норме  $\|\cdot\|_{2,T}$  к функции  $\xi(t, \omega)$  при  $N \rightarrow \infty$ , т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_0^T M \left\{ |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2 \right\} dt \right)^{1/2} = 0. \quad (1.21)$$

Пусть

$$J_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi^{(N)}(t, \omega) df_t.$$

Тогда согласно свойствам A2, A3 и элементарному неравенству  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  имеем

$$\begin{aligned} M \left\{ |J_N - J_M|^2 \right\} &= \int_0^T M \left\{ |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi^{(M)}(t, \omega)|^2 \right\} dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T M \left\{ |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2 \right\} dt + \\ &+ 2 \int_0^T M \left\{ |\xi(t, \omega) - \xi^{(M)}(t, \omega)|^2 \right\} dt \rightarrow 0 \text{ при } N, M \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из (1.21) и (1.22) получаем, что последовательность  $J_N$  является фундаментальной в среднеквадратическом смысле, т.е. существует такая случайная величина  $J$  (среднеквадратический предел  $J_N$ ), что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \left\{ |J_N - J|^2 \right\} = 0.$$

Очевидно, что  $J$  является  $F_T$ -измеримой случайной величиной как предел последовательности  $F_T$ -измеримых случайных величин. Кроме того,

$J$  является единственной с вероятностью 1 случайной величиной для любой последовательности ступенчатых функций из  $K_2([0, T])$ , сходящейся к функции  $\xi(t, \omega)$  по норме  $\|\cdot\|_{2,T}$  в  $M_2([0, T])$ .

Действительно, пусть существует такая последовательность ступенчатых функций  $\tilde{\xi}^{(N)} \in K_2([0, T])$ , что  $\|\tilde{\xi}^{(N)} - \xi\|_{2,T} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , но при этом

$$\tilde{J}_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \tilde{\xi}^{(N)}(t, \omega) df_t$$

сходится в среднеквадратическом смысле к некоторой случайной величине  $\tilde{J}$ , отличной от  $J$ . Тогда

$$M\{|J - \tilde{J}|^2\} \leq 3M\{|J - J_N|^2\} + 3M\{|J_N - \tilde{J}_N|^2\} + 3M\{|\tilde{J}_N - \tilde{J}|^2\}. \quad (1.23)$$

Очевидно, что первое и третье слагаемые в правой части (1.23) стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Аналогично (1.22) показывается, что  $M\{|J_N - \tilde{J}_N|^2\} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  (фактически  $\tilde{J}_N$  это последовательность типа  $J_N$ , но соответствующая другому разбиению отрезка  $[0, T]$ ). Поэтому  $M\{|J - \tilde{J}|^2\} = 0$  и следовательно  $J = \tilde{J}$  с вероятностью 1.

**Определение 1.8.** Определим стохастический интеграл Ито для  $\xi_t \in M_2([0, T])$  как следующий среднеквадратический предел

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)}, \omega) \left( f(\tau_{j+1}^{(N)}, \omega) - f(\tau_j^{(N)}, \omega) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau df_\tau, \quad (1.24)$$

где  $\xi^{(N)}(t, \omega)$  — произвольная ступенчатая функция из класса  $M_2([0, T])$ , сходящаяся по норме  $\|\cdot\|_{2,T}$  к функции  $\xi(t, \omega)$ , т.е. в следующем смысле

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T M\{|\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2\} dt = 0. \quad (1.25)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.5.** Пусть  $\xi \in M_2([0, T])$ . Тогда стохастический интеграл Ито, определенный в соответствии с определением 1.8, существует.

Можно показать (см., например, [17]), что стохастический интеграл Ито для всех  $\xi, \eta \in M_2([0, T])$  и всех  $\alpha, \beta \in \Re^1$  удовлетворяет свойствам A1–A4.

Стохастический интеграл Ито по промежутку  $[t_0, t_1] \subset [0, T]$  может быть определен в соответствии с определением 1.8 или с помощью индикаторной функции отрезка  $[t_0, t_1]$ :

$$\int_0^T \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(\tau) df_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \xi_\tau df_\tau,$$

где  $\mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(\tau) = 1$  при  $\tau \in [t_0, t_1]$  и  $\mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(\tau) = 0$  в противном случае.

Используя свойство А3 для  $\xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0, t]}(\tau) = \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(\tau) + \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_1, t]}(\tau)$ ,  $\tau \neq t_1$  получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi_s df_s + \int_{t_1}^t \xi_s df_s = \int_{t_0}^t \xi_s df_s \text{ с в. 1,}$$

где  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t \leq T$ .

**Определение 1.9.** Стохастическим интегралом от функции  $\xi \in M_2([0, T])$  назовем следующий среднеквадратический предел

$$\text{l.i.m. } \sum_{N=0}^{N-1} \xi^{(N)} \left( \tau_j^{(N)}, \omega \right) \left( \tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau d\tau, \quad (1.26)$$

где  $\xi^{(N)}(t, \omega)$  — произвольная ступенчатая функция из класса  $M_2([0, T])$ , которая сходится в смысле соотношения (1.25) к функции  $\xi(t, \omega)$ .

Рассмотрим хорошо известные свойства стохастического интеграла (1.26):

- B1.  $M \left\{ \int_0^T \xi_\tau d\tau \right\} = \int_0^T M \{ \xi_\tau \} d\tau.$
- B2.  $M \left\{ \left( \int_0^T \xi_\tau d\tau \right)^2 \right\} \leq T \int_0^T M \{ \xi_\tau^2 \} d\tau.$
- B3.  $\int_0^T (\alpha \xi_\tau + \beta \eta_\tau) d\tau = \alpha \int_0^T \xi_\tau d\tau + \beta \int_0^T \eta_\tau d\tau \text{ с в. 1 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1.$

Свойство аддитивности проверяется также, как и для стохастического интеграла Ито.

Пусть промежуток  $[t_0, t] \subseteq [0, T]$  и  $t$  — переменный момент времени. Определим случайный процесс  $\eta_t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , вида

$$\eta_t = \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \text{ с в. 1,}$$

где  $\xi \in M_2([0, T])$ .

Можно показать [17], что процесс  $\eta_t$  —  $F_t$ -измерим, не зависит от приращений  $f_{s+\tau} - f_\tau$ ,  $\tau \geq t$ ,  $s > 0$ , и удовлетворяет следующим свойствам:

$$C1. M\{\eta_t - \eta_s | F_s\} = 0 \text{ с в. 1.}$$

$$C2. M\{|\eta_t - \eta_s|^2\} = \int_s^t M\{\xi_\tau^2\} d\tau.$$

$$C3. M\{(\eta_t - \eta_s)(\eta_\theta - \eta_\tau)\} = 0,$$

где  $0 \leq s \leq t \leq \tau \leq \theta \leq T$ .

Таким образом,  $\eta_t$  — среднеквадратически непрерывный мартингал, для которого неравенство Дуба при  $p = 2$  принимает вид

$$M\left\{\sup_{t_0 \leq s \leq t} |\eta_s|^2\right\} \leq 4 \int_{t_0}^t M\{\xi_\tau^2\} d\tau.$$

Итак, в условиях теоремы 1.5 существуют интегралы

$$\int_0^T \xi_\tau df_\tau, \quad \int_0^T \xi_\tau d\tau,$$

определенные в соответствии с определениями 1.8 и 1.9.

В литературе (см., например, [17]) стохастический интеграл Ито чаще определяется для более широкого класса интегрируемых случайных процессов, чем  $M_2([0, T])$ .

Так, если определить класс функций  $P_2([0, T])$ , получающийся из класса  $M_2([0, T])$  путем замены условий (III), (IV) на условие:

$$\int_0^T (\xi(t, \omega))^2 dt < \infty \text{ с в. 1,}$$

то можно показать [17], что стохастический интеграл Ито существует как предел по вероятности последовательности интегральных сумм:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)}, \omega) \left( f(\tau_{j+1}^{(N)}, \omega) - f(\tau_j^{(N)}, \omega) \right),$$

где  $\xi^{(N)}(t, \omega)$  — произвольная ступенчатая функция из класса  $P_2([0, T])$ , сходящаяся к  $\xi \in P_2([0, T])$  в следующем смысле:

$$\int_0^T |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ по вероятности при } N \rightarrow \infty.$$

Известно, что стохастический интеграл

$$\int_0^T \xi_\tau d\tau,$$

где  $\sqrt{|\xi|} \in P_2([0, T])$ , существует как предел по вероятности последовательности интегральных сумм:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)} \left( \tau_j^{(N)}, \omega \right) \left( \tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)} \right),$$

где  $\xi^{(N)}(t, \omega)$  — произвольная ступенчатая функция, для которой  $\sqrt{|\xi^{(N)}|} \in P_2([0, T])$ , и сходящаяся к  $\xi(t, \omega)$  в следующем смысле:

$$\int_0^T |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)| dt \rightarrow 0 \text{ по вероятности при } N \rightarrow \infty.$$

### 1.2.2 Процессы Ито

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и  $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  векторный винеровский процесс  $\mathbf{f}_t$  с независимыми компонентами  $f_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим некоторые скалярные случайные процессы  $a_t$  и  $\mathbf{b}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ ,  $t \in [0, T]$  для которых существуют стохастические интегралы в правой части равенства

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t a_\tau d\tau + \sum_{i=1}^m \int_0^t \mathbf{b}_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}, \quad (1.27)$$

где  $t \in [0, T]$ , а  $\eta_0$  — случайная величина, стохастически не зависящая от приращений  $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$  винеровского процесса  $\mathbf{f}_t$  при всех  $\tau \in (0, T]$ .

**Определение 1.10.** *Процесс  $\eta_t$ , определенный на промежутке  $[0, T]$  в виде (1.27), называется процессом Ито, если правая часть (1.27) существует при всех  $t \in [0, T]$ . При этом процесс  $a_t$  называется коэффициентом сноса, а процессы  $\mathbf{b}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  — коэффициентами диффузии процесса  $\eta_t$ .*

Нетрудно видеть, что из аддитивности стохастических интегралов вытекает следующее представление процесса Ито:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s a_\tau d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s \mathbf{b}_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \text{ с в. 1,} \quad (1.28)$$

справедливо для всех  $s, t \in [0, T]$ ,  $s \geq t$ .

Пусть процессы  $a_t, \mathbf{b}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  удовлетворяют условиям теоремы 1.5 при всех  $t \in [0, T]$ . Тогда очевидно процесс Ито, определенный соотношением (1.27), существует в среднеквадратическом смысле при всех  $t \in [0, T]$ . Кроме того, в этих условиях для любых  $t, \tau \in [0, T]$ ,  $\tau \geq t$ , находится такая постоянная  $C < \infty$ , что выполняется условие Липшица

$$\mathbb{M} \{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq C|\tau - t|. \quad (1.29)$$

Действительно, используя соотношение (1.28) и неравенство Минковского, имеем

$$\mathbb{M} \{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq \left( \left( \mathbb{M} \left\{ \left( \int_t^\tau a_s ds \right)^2 \right\} \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^m \left( \mathbb{M} \left\{ \left( \int_t^\tau \mathbf{b}_s^{(i)} d\mathbf{f}_s^{(i)} \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \right)^2.$$

В силу свойств B2 и C2 стохастических интегралов получаем

$$\mathbb{M} \{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq [K_1(\tau - t) + K_2(\tau - t)^{1/2}]^2, \quad K_1, K_2 < \infty,$$

откуда следует оценка (1.29).

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим некоторые случайные процессы  $\mathbf{a}_t \in \Re^n$  и  $B_t \in \Re^{n \times m}$ ,  $t \in [0, T]$ , для которых существует правая часть следующего равенства:

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau, \quad (1.30)$$

где  $t \in [0, T]$ , а случайная векторная величина  $\eta_0 \in \Re^n$  является стохастически независимой от приращений  $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$  винеровского процесса  $\mathbf{f}_t$  при всех  $\tau \in (0, T]$ .

**Определение 1.11.** Процесс  $\eta_t \in \Re^n$  вида (1.30), определенный на промежутке  $[0, T]$ , называется векторным процессом Ито, если правая часть (1.30) существует при всех  $t \in [0, T]$ . При этом процессы  $\mathbf{a}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, n$  называются коэффициентами сноса, а процессы  $B_t^{(ij)}$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$  — коэффициентами диффузии процесса  $\eta_t$ .

Обобщением соотношения (1.28) на случай векторного процесса Ито является равенство

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_t^s B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с. в. 1},$$

справедливо для всех  $s, t \in [0, T]$ ,  $s \geq t$ .

Предположим, что процессы  $\mathbf{a}_t$  и  $B_t$  покомпонентно удовлетворяют условиям теоремы 1.5 на промежутке  $[0, T]$ . Тогда очевидно, что векторный процесс Ито, определенный соотношением (1.30), существует в среднеквадратическом смысле при всех  $t \in [0, T]$ . Кроме того, для любых  $t, \tau \in [0, T]$ ,  $\tau \geq t$ , найдется такая постоянная  $C < \infty$ , что выполняется условие Липшица  $M \{|\eta_\tau - \eta_t|^2\} \leq C|\tau - t|$ .

Рассмотрим преобразование процесса Ито с помощью замены вероятностной меры.

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Введем скалярный процесс Ито вида

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_s ds + f_t, \quad (1.31)$$

где  $f_t$  — стандартный скалярный винеровский процесс относительно вероятностной меры  $P$ ;  $a_s$  — скалярный случайный процесс, удовлетворяющий условиям существования интеграла

$$\int_0^t a_s ds.$$

Процесс  $x_t$  вида (1.31) иногда называют "винеровским процессом со сносом". В ряде ситуаций бывает удобно рассматривать процесс  $x_t$  как винеровский относительно другой меры  $P_x$ , т.е. как процесс на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ . Построение меры  $P_x$  возможно с помощью преобразования Гирсанова [16], которое переводит вероятностную меру  $P$  в абсолютно непрерывную относительно  $P$  меру  $P_x$  с производной Радона–Никодима

$$\frac{dP_x}{dP} = \exp\left(-\int_0^T a_s df_s - \frac{1}{2} \int_0^T |a_s|^2 ds\right). \quad (1.32)$$

При этом процесс  $x_t$  является винеровским процессом на новом вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ .

### 1.2.3 Формула Ито

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  скалярный винеровский процесс  $f_t$ . Пусть скалярные случайные процессы  $a_s$  и  $b_s$  таковы, что  $\sqrt{|a_s|}, b_s \in P_2([0, T])$ .

Рассмотрим процесс Ито  $x_t, t \in [0, T]$ , вида

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_\tau d\tau + \int_0^t b_\tau df_\tau.$$

Используя аддитивность стохастических интегралов, представим процесс  $x_t$  в виде

$$x_t = x_s + \int_s^t a_\tau d\tau + \int_s^t b_\tau df_\tau \text{ с в. 1,} \quad (1.33)$$

где  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

Если представление (1.33) справедливо с вероятностью 1, то говорим, что процесс  $x_t$  имеет стохастический дифференциал  $dx_t$ , и записываем это в виде:

$$dx_s = a_s ds + b_s df_s. \quad (1.34)$$

Отметим, что запись (1.34) является символической записью формулы (1.33).

**Лемма 1.1.** Пусть функция  $R(x, t) : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial^2 R}{\partial x^2},$$

а процесс Ито  $x_t$  представлен в виде (1.33), причем  $\sqrt{|a_s|}, b_s \in P_2([0, T])$ . Тогда для любых  $s, t$  таких, что  $0 \leq s \leq t \leq T$ , с вероятностью 1

$$\begin{aligned} R(x_t, t) &= R(x_s, s) + \int_s^t \left( \frac{\partial R}{\partial t}(x_\tau, \tau) + a_\tau \frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau, \tau) + \frac{1}{2} b_\tau^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x_\tau, \tau) \right) d\tau + \\ &\quad + \int_s^t b_\tau \frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau, \tau) df_\tau. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1.1 можно найти, например, в работах [17], [19]. Лемма 1.1 устанавливает формулу Ито в скалярном случае.

Перейдем к рассмотрению многомерного случая. Пусть задано фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и  $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  векторный винеровский процесс  $\mathbf{f}_t$  с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ . Пусть случайные процессы  $\mathbf{a}_s^{(i)}$  и  $B_s^{(ij)}$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$  таковы, что  $\sqrt{|\mathbf{a}_s^{(i)}|}, B_s^{(ij)} \in P_2([0, T])$  при всех  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим векторный процесс Ито  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ ,  $t \in [0, T]$ , вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s + \int_s^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_s^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с. в. 1,} \quad (1.35)$$

где  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

В покомпонентной форме равенство (1.35) записываем в виде:

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \mathbf{x}_s^{(i)} + \int_s^t \mathbf{a}_\tau^{(i)} d\tau + \sum_{j=1}^m \int_s^t B_\tau^{(ij)} d\mathbf{f}_\tau^{(j)} \text{ с. в. 1,}$$

где  $0 \leq s \leq t \leq T$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

**Лемма 1.2.** Пусть функция  $R(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}, \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}},$$

$i, j = 1, \dots, n$ , процесс Ито  $\mathbf{x}_t$  определен выражением (1.35), причем  $\sqrt{|\mathbf{a}_s^{(i)}|}$ ,  $B_s^{(ij)} \in P_2([0, T])$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ , а процесс  $\eta_t$  имеет вид  $\eta_t = R(\mathbf{x}_t, t)$ . Тогда для любых  $s, t$  таких, что  $0 \leq s \leq t \leq T$ , с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \eta_t &= \eta_s + \int_s^t \left( \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_\tau^{(i)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n B_\tau^{(ij)} B_\tau^{(kj)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) \right) d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_s^t B_\tau^{(ij)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(j)}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1.2 также можно найти в [17], [19]. В лемме 1.2 формула Ито представлена в векторной форме.

#### 1.2.4 Стохастические дифференциальные уравнения Ито

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , неубывающая совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  на нем и  $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  скалярный винеровский процесс  $f_t$ .

Рассмотрим СДУ Ито

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_\tau, \tau) d\tau + \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.36)$$

где  $x_t \in \Re^1$  — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.36); второй интеграл в правой части (1.36) понимается как стохастический интеграл Ито;  $a(x, t), \sigma(x, t) : \Re^1 \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  — измеримые при всех  $(x, t) \in \Re^1 \times [0, T]$  функции, для которых существует правая часть (1.36).

Возможна также символическая запись уравнения (1.36) в следующей форме:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)df_t, \quad x_0 = x(0, \omega). \quad (1.37)$$

Пусть рассматривается СДУ Ито в форме (1.37). Далее будем предполагать, что  $x_0$  и  $f_t - f_0$  при  $t > 0$  являются стохастически независимыми.

Будем говорить, что случайный процесс  $x_t, t \in [0, T]$  является решением уравнения Ито (1.37), если  $x_t$  —  $F_t$ -измерим при всех  $t \in [0, T]$ , интегралы в правой части (1.36) существуют и равенство (1.36) справедливо при всех  $t \in [0, T]$  с вероятностью 1.

*Пусть выполнены условия [17]:*

1. *Функции  $a(x, t), \sigma(x, t) : \Re^1 \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  измеримы при всех  $(x, t) \in \Re^1 \times [0, T]$ .*
2. *Для всех  $x, y \in \Re^1$  существует такая постоянная  $K < \infty$ , что*

$$\begin{aligned} |a(x, t) - a(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| &\leq K|x - y|, \\ |a(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 &\leq K^2(1 + |x|^2). \end{aligned}$$

3. *Случайная величина  $x_0$  —  $F_0$ -измерима и  $M\{|x_0|^2\} < \infty$ .*

*Тогда [19] существует непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения (1.36), и если  $x_t, \tilde{x}_t$  — непрерывные решения при фиксированном  $x_0$ , то*

$$P\{x_t = \tilde{x}_t\} = 1, \quad P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |x_t - \tilde{x}_t| > 0\right\} = 0.$$

Если выполнено условие  $P\{x_t = \tilde{x}_t\} = 1$ , то говорят, что решение единственно с точностью до стохастической эквивалентности.

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим СДУ Ито вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.38)$$

где  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.38),  $\mathbf{f}_t$  —  $F_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  стандартный винеровский процесс

с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ ,  $\mathbf{a} : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $\Sigma : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times m}$ ,  $\mathbf{x}_0$  — начальное условие. Будем предполагать далее, что  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$  при  $t > 0$  являются стохастически независимыми.

Уравнение (1.38) может быть записано в символьической форме записи

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (1.39)$$

Аналогично одномерному случаю будем полагать, что случайный процесс  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  является решением СДУ Ито (1.38), если каждая компонента  $\mathbf{x}_t$  —  $F_t$ -измерима при всех  $t \in [0, T]$ , интегралы в правой части (1.38) существуют и равенство (1.38) справедливо при всех  $t \in [0, T]$  с вероятностью 1.

Известна следующая теорема [17].

**Теорема 1.6.** *Пусть выполнены следующие условия:*

AI. *Функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma_k(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $k = 1, \dots, m$  измеримы при всех  $(\mathbf{x}, t) \in \Re^n \times [0, T]$ ;  $\Sigma_k(\mathbf{x}_\tau, \tau)$  —  $k$ -й столбец матрицы  $\Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)$ .*

AII. *Для всех  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} \in \Re^n$  существует такая постоянная  $K < \infty$ , что*

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t) - \Sigma_k(\mathbf{y}, t)| &\leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\ |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2 + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t)|^2 &\leq K^2 (1 + |\mathbf{x}|^2). \end{aligned}$$

AIII. *Случайная величина  $\mathbf{x}_0$  —  $F_0$ -измерима и  $M\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$ .*

*Тогда существует единственное в смысле стохастической эквивалентности и непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения (1.38).*

Условия теоремы 1.6, в частности, условие Липшица (в такой форме, как в теореме 1.6 оно называется обычно *глобальным*), являются достаточно жесткими и не выполняются в ряде практически важных случаев. Однако существует целый ряд результатов, формулировки которых (см., например, [34]) ослабляют условия существования и единственности решения СДУ Ито по сравнению с условиями теоремы 1.6.

*Говорят, что функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma_k(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $k = 1, \dots, m$  удовлетворяют локальному условию Липшица, если для любого  $R > 0$  существует такая постоянная  $K_R$ , что при  $|\mathbf{x}| \leq R$ ,  $|\mathbf{y}| \leq R$  и  $t \in [0, T]$  выполняется неравенство*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t) - \Sigma_k(\mathbf{y}, t)| \leq K_R |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (1.40)$$

Известно [34], что глобальное условие Липшица (первое из двух условий АII в теореме 1.6) можно заменить на локальное условие Липшица и утверждение теоремы 1.6 при этом останется в силе.

Неравенство (1.40) можно заменить на несколько иное [34]:

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)|^2 + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t) - \Sigma_k(\mathbf{y}, t)|^2 \leq \tilde{K}_R |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2,$$

где  $\tilde{K}_R$  — постоянная, зависящая от  $R > 0$ .

Рассмотрим СДУ Ито вида:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.41)$$

где  $\mathbf{a} : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $\Sigma : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$ ;  $\mathbf{f}_t$  —  $n$ -мерный  $F_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

Пусть для функций  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$  выполнены условия теоремы 1.6. Тогда решение  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  СДУ Ито (1.41) обладает [34] марковским свойством относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\{F_t, t \in [0, T]\}$ , т.е.  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  — марковская случайная функция с некоторым начальным распределением

$$\mu(A) = P\{\mathbf{x}_0 \in A\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

$\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $\Re^n$ . Вероятность перехода марковской случайной функции  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , имеет вид

$$P(s, \mathbf{y}|t, A) = P\{\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{y}} \in A\}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

где  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ,  $A \in \mathcal{B}$ , а  $\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{y}}$ ,  $t \in [0, T]$  — решение СДУ Ито

$$\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{y}} = \mathbf{y} + \int_s^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{s, \mathbf{y}}, \tau) d\tau + \int_s^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{s, \mathbf{y}}, \tau) d\mathbf{f}_\tau,$$

функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$  такие же, как в (1.41);  $\mathbf{y}$  — неслучайный вектор из  $\Re^n$ ;  $t \in [s, T]$ .

**Теорема 1.7.** [25], [34]. *Пусть неслучайные функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$  удовлетворяют условиям теоремы 1.6 и непрерывны по совокупности переменных. Тогда процесс  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , являющийся решением СДУ Ито (1.41), представляет собой*

диффузионный процесс с вектором сноса  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  и матрицей диффузии  $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^T(\mathbf{x}, t)$ .

В теории СДУ Ито разделяют сильное и слабое решения. Приведем определения данных решений СДУ Ито, а также ряд утверждений, касающихся этих двух понятий.

Пусть  $\xi_t$ ,  $t \in [0, T]$  – некоторый случайный процесс. Через  $F_t^\xi$  будем обозначать наименьшую  $\sigma$ -алгебру, содержащую все события вида  $\{\xi_s \in A\}$ ,  $s \in [0, t]$ ,  $A \in \mathcal{B}$ . Кроме того, предположим, что начальное условие  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  уравнения (1.41) неслучайно.

Пусть заданы вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , неубывающая совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{F_t, t \in [0, T]\}$  на нем и  $n$ -мерный  $F_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  винеровский случайный процесс  $\{\mathbf{f}_t, F_t^f\}$ ,  $t \in [0, T]$  с независимыми компонентами. Рассмотрим также измеримые неслучайные функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Пара процессов  $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t), F_t^f\}$  называется *сильным решением* уравнения (1.41), если процесс  $\mathbf{x}_t$  при каждом  $t$   $F_t^f$ -измерим и равенство (1.41) с вероятностью 1 выполняется одновременно для всех  $t \in [0, T]$ .

Пусть теперь заданы только функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$  такие же, как в определении сильного решения.

Пара процессов  $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t), F_t^f\}$  называется *слабым решением* уравнения (1.41), если найдутся такое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  с потоком  $\sigma$ -алгебр  $\{F_t, t \in [0, T]\}$  и такая пара процессов  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$ , согласованных с ним, что процесс  $\{\mathbf{f}_t, F_t\}$  — винеровский, а процессы  $\mathbf{x}_t$  и  $\mathbf{f}_t$  с вероятностью 1 связаны равенством (1.41) при всех  $t \in [0, T]$ .

Из определений сильного и слабого решений следует, что любое сильное решение уравнения (1.39) является также слабым решением.

Введем понятия сильной и слабой единственности решения уравнения (1.41).

Принято считать, что решение уравнения (1.41) *сильно единствено* (*единственно по траекториям*), если для любых двух решений  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$  и  $(\tilde{\mathbf{x}}_t, \tilde{\mathbf{f}}_t)$  уравнения (1.41), заданных на одном и том же вероятностном пространстве, из равенств  $\mathbf{f}_t \equiv \tilde{\mathbf{f}}_t$ ,  $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$  следует, что

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t| > 0 \right\} = 0.$$

Если же два любых решения  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$ ,  $(\tilde{\mathbf{x}}_t, \tilde{\mathbf{f}}_t)$  уравнения (1.41) имеют оди-

наковые конечномерные распределения, то говорят, что решение уравнения (1.41) единствено в *слабом смысле* или *слабо* единствено.

В условиях теоремы 1.6 существует сильное решение уравнения (1.41), которое является сильно единственным.

Следующее утверждение показывает, при каких условиях существует слабое решение уравнения (1.41), которое является слабо единственным.

**Теорема 1.8.** [34]. *Пусть неслучайные функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$ , где  $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$ , удовлетворяют условиям:*

1.  *$B(\mathbf{x}, t)$  является непрерывной по совокупности переменных матричной функцией, причем существует такая постоянная  $C > 0$ , что*

$$\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} \leq C |\mathbf{z}|^2$$

*при всех  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Re^n$ .*

2. *При каждом  $t \in [0, T]$  и  $\mathbf{x} \in \Re^n$ :  $B(\mathbf{x}, t)$  — положительно определенная матрица, т.е.*

$$\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} > 0$$

*при всех  $\mathbf{z} \in \Re^n$ ,  $\mathbf{z} \neq 0$ .*

3. *Функция  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  измерима и ограничена.*

*Тогда существует слабое решение уравнения (1.41), и оно слабо единствено.*

Известны также следующие утверждения [34]:

1. *Если уравнение (1.41) обладает сильной единственностью, то любое его решение сильное.*

2. *Если уравнение (1.41) обладает слабой единственностью, то любые два его сильных решения равны с вероятностью 1 при всех  $t \in [0, T]$ .*

3. *Если функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и на некотором вероятностном пространстве уравнение (1.41) имеет сильное решение, то всякое его слабое решение является сильным.*

Условимся далее называть решением СДУ Ито его сильное решение.

Рассмотрим формулу Ито, соответствующую процессу, который задается нелинейным безынерционным преобразованием от решения СДУ Ито.

Пусть  $\mathcal{L}$  — множество функций  $R(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которые при всех  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  имеют непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

а  $\mathcal{G}_0$  — множество функций  $R(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которые при всех  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  имеют непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t); \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Определим на множествах  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{G}_0$  следующие операторы:

$$\begin{aligned} LR(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \\ G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Рассмотрим случайный процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  или  $\mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , а  $\mathbf{x}_t$  — решение СДУ Ито вида (1.38).

Сформулируем утверждение, касающееся формулы Ито для процесса  $\eta_s$ .

**Лемма 1.3.** *Пусть справедливы условия АI – АIII теоремы 1.6, а также следующие условия:  $R(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$ ;  $LR(\mathbf{x}_t, t)$ ,  $G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_t, t) \in M_2([0, T])$ ;  $i = 1, \dots, m$ . Тогда для всех  $s, t \in [0, T]$  таких, что  $s \geq t$ , с вероятностью 1 справедливо равенство*

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \int_t^s LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)}.$$

Будем говорить, что процесс Ито  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , является эргодическим, если он имеет единственный инвариантный вероятностный закон  $\nu$  такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(\mathbf{x}_s) ds = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y}) d\nu(\mathbf{y}) \text{ с. в. 1}$$

для любой  $\nu$ -интегрируемой функции  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  и любого неслучайного начального условия  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим процесс Ито вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_s) ds + \int_0^t B(\mathbf{x}_s) d\mathbf{f}_s,$$

где  $\mathbf{a} : \Re^n \rightarrow \Re^n$ ;  $B : \Re^n \rightarrow \Re^{n \times m}$ ;  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — векторный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Следующая теорема, доказанная Р.З. Хасьминским [100], содержит достаточные условия эргодичности процесса  $\mathbf{x}_t$ .

**Теорема 1.9.** Пусть  $a(\mathbf{x})$  и  $B(\mathbf{x})$  — гладкие функции с ограниченными производными любого порядка, причем функция  $B(\mathbf{x})$  ограничена и существует постоянная  $C > 0$  и компактное множество  $\Lambda \subset \Re^n$  такие, что  $\mathbf{x}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) < -C|\mathbf{x}|^2 \forall \mathbf{x} \in \Re^n \setminus \Lambda$ . Тогда процесс  $\mathbf{x}_t$  — эргодический.

### 1.2.5 Стохастический интеграл Стратоновича

Введем класс  $Q_{2m}([t, T])$  процессов Ито  $\eta_\tau \in \Re^1; \tau \in [t, T]$  вида

$$\eta_\tau = \eta_t + \int_t^\tau a_s ds + \int_t^\tau b_s df_s, \quad (1.42)$$

где  $f_s \in \Re^1$  —  $F_s$ -измеримый при всех  $s \in [t, T]$  стандартный винеровский процесс, а процессы  $a_s, b_s \in \Re^1$  таковы, что выполняются следующие условия:

D1.  $(a_s)^m, (b_s)^m \in M_2([t, T])$ .

D2. При всех  $s, \tau \in [t, T]$  и некоторых положительных  $C, \gamma < \infty$  процесс  $b_s$  удовлетворяет условию

$$M\{|b_s - b_\tau|^4\} \leq C|s - \tau|^\gamma.$$

Через  $C_2(\Re^1, [t, T])$  обозначим пространство функций  $F(x, \tau) : \Re^1 \times [t, T] \rightarrow \Re^1$ , которые являются дважды непрерывно дифференцируемыми по  $x$ , причем эти производные равномерно ограничены при  $x \in \Re^1, \tau \in [t, T]$ .

**Определение 1.12.** Стохастическим интегралом Стратоновича от процесса  $F(\eta_\tau, \tau); \tau \in [t, T]$  ( $F(x, \tau) \in C_2(\Re^1, [t, T])$ ) назовем среднеквадратический предел

$$\text{l.i.m}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\frac{1}{2}\left(\eta_{\tau_j^{(N)}} + \eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}\right), \tau_j^{(N)}\right) \left(f_{\tau_{j+1}^{(N)}} - f_{\tau_j^{(N)}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{*T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau, \quad (1.43)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.24).

Далее для упрощения записи вместо  $\tau_j^{(N)}$  используем запись  $\tau_j$ .

Рассмотрим интегральную версию неравенства Гельдера

$$\left| \int_{t_0}^t h(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_{t_0}^t h^p(x)dx \right)^{1/p} \left( \int_{t_0}^t g^q(x)dx \right)^{1/q}, \quad (1.44)$$

где  $1/p + 1/q = 1$ ,  $p, q > 1$ , и интегралы, входящие в (1.44), существуют.

С помощью неравенства Гельдера для математических ожиданий и (1.44) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t M\{\xi_\tau \eta_\tau\} d\tau \right| &\leq \int_{t_0}^t |M\{\xi_\tau \eta_\tau\}| d\tau \leq \int_{t_0}^t (M\{|\xi_\tau|^p\})^{1/p} (M\{|\eta_\tau|^q\})^{1/q} d\tau = \\ &= \left| \int_{t_0}^t (M\{|\xi_\tau|^p\})^{1/p} (M\{|\eta_\tau|^q\})^{1/q} d\tau \right| \leq \\ &\leq \left( \int_{t_0}^t M\{|\xi_\tau|^p\} d\tau \right)^{1/p} \left( \int_{t_0}^t M\{|\eta_\tau|^q\} d\tau \right)^{1/q}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где случайные процессы  $\xi_\tau$  и  $\eta_\tau$  таковы, что существуют соответствующие математические ожидания и интегралы, входящие в (1.45).

Используем неравенства (1.44), (1.45) для доказательства следующих оценок [17] четных моментов стохастических интегралов:

$$M\left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{n-1} (n(2n-1))^n \int_{t_0}^t M\{|\xi_\tau|^{2n}\} d\tau, \quad (1.46)$$

$$M\left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{2n-1} \int_{t_0}^t M\{|\xi_\tau|^{2n}\} d\tau, \quad (1.47)$$

где случайный процесс  $\xi_\tau$  таков, что  $(\xi_\tau)^n \in M_2([t_0, t])$ ,  $f_t \in \Re^1$  — стандартный винеровский процесс;  $n = 1, 2, \dots$

Докажем неравенство (1.46). Применив формулу Ито к процессу

$$\left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n}; \quad n = 1, 2, \dots$$

с в. 1 получим:

$$\left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} = 2n \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n-1} \xi_s df_s + \frac{2n(2n-1)}{2} \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n-2} \xi_s^2 ds.$$

Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} = n(2n-1) \int_{t_0}^t \mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n-2} \xi_s^2 \right\} ds,$$

откуда следует, что величина

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\}$$

возрастает с увеличением  $t$ . Используя этот факт и неравенство (1.45), выводим следующее неравенство:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} \leq n(2n-1) \left( \int_{t_0}^t \mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n} \right\} ds \right)^{(2n-2)/2n} \left( \int_{t_0}^t \mathbb{M} \left\{ |\xi_s|^{2n} \right\} ds \right)^{2/2n}. \quad (1.48)$$

После возвведения левой и правой частей (1.48) в степень  $n$  и деления обеих частей полученного неравенства на

$$\left( \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right|^{2n} \right\} \right)^{n-1}$$

получаем (1.46).

Докажем неравенство (1.47). Применяя неравенство Гельдера (1.44) к левой части (1.47), имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} \leq \mathbb{M} \left\{ \int_{t_0}^t \xi_\tau^{2n} d\tau \right\} \left( \int_{t_0}^t d\tau \right)^{2n-1} = (t - t_0)^{2n-1} \int_{t_0}^t \mathbb{M} \left\{ |\xi_\tau|^{2n} \right\} d\tau.$$

Неравенства (1.46), (1.47) доказаны. Приведенное доказательство можно найти, например, в [17].

Используем приведенные оценки моментов стохастических интегралов для доказательства леммы о связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

**Лемма 1.4.** Пусть  $\eta_\tau \in Q_8([t, T])$ ,  $F(\eta_\tau, \tau) \in M_2([t, T])$ , где  $F(x, \tau) \in C_2(\mathfrak{R}^1, [t, T])$ . Тогда

$$\int_t^{*T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau = \int_t^T F(\eta_\tau, \tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_\tau, \tau) b_\tau d\tau \text{ c в. 1.} \quad (1.49)$$

**Доказательство.** С помощью формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}\left(\eta_{\tau_{j+1}} + \eta_{\tau_j}\right), \tau_j\right) &= F(\eta_{\tau_j}, \tau_j) + \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \frac{1}{2} (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) \frac{1}{4} (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^2 \quad \forall \omega \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.50)$$

где

$$\xi_j = \eta_{\tau_j} + \frac{\theta_j}{2} (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j}),$$

а  $\theta_j = \theta_j(\omega) \in (0, 1)$  — случайная величина.

Далее, согласно (1.42), неравенствам (1.46), (1.47) при  $n = 4$ , условиям леммы 1.4, неравенству  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ ;  $a, b \in \Re^1$ , а также согласно неравенствам Минковского и Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^2 (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \right)^2 \right\} &\leq \\ \leq \left( \sum_{j=0}^{N-1} \left( \mathbb{M} \left\{ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) \right)^2 (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^4 (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 \right\} \right)^{1/2} \right)^2 &\leq \\ \leq C \left( \sum_{j=0}^{N-1} \left( \left( \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right|^8 \right\} \right)^{1/4} + \left( \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} b_s df_s \right|^8 \right\} \right)^{1/4} \right) 3^{1/4} \sqrt{\Delta \tau_j} \right)^2 &\leq \\ \leq C_1 \left( \sum_{j=0}^{N-1} \left( \left( (\Delta \tau_j)^7 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \{ |a_s|^8 \} ds \right)^{1/4} + \right. \right. &+ \\ \left. \left. + \left( 28^4 (\Delta \tau_j)^3 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \{ |b_s|^8 \} d\tau \right)^{1/4} \right) 3^{1/4} \sqrt{\Delta \tau_j} \right)^2 &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

при  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) ((\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j}) (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) - b_{\tau_j} \Delta \tau_j) \right)^2 \right\} &\leq \\ \leq 2 \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \right)^2 \right\} + & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\mathbb{M}\left\{\left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} b_s df_s \left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right) - b_{\tau_j} \Delta \tau_j\right)\right)^2\right\} \leq \\
& \leq 2\left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbb{M}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j)\right)^2 \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds\right)^2 \left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right)^2\right\}\right)^{1/2}\right)^2 + \\
& + 4\mathbb{M}\left\{\left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) b_{\tau_j} \left(\left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right)^2 - \Delta \tau_j\right)\right)^2\right\} + \\
& + 4\mathbb{M}\left\{\left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s \left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right)\right)^2\right\} \leq \\
& \leq 2(C_2)^2 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbb{M}\left\{\left|\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds\right|^4\right\}\right)^{1/4} 3^{1/4} \sqrt{\Delta \tau_j}\right)^2 + \\
& + 4(C_2)^2 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M}\left\{b_{\tau_j}^2 \left(\left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right)^2 - \Delta \tau_j\right)^2\right\} + \\
& + 8 \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{M}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_i}, \tau_i) b_{\tau_j} b_{\tau_i} \left(\left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right)^2 - \Delta \tau_j\right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(\left(f_{\tau_{i+1}} - f_{\tau_i}\right)^2 - \Delta \tau_i\right)\right\} + \\
& + 4(C_2)^2 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbb{M}\left\{\left|\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s\right|^4\right\}\right)^{1/4} 3^{1/4} \sqrt{\Delta \tau_j}\right)^2, \tag{1.52}
\end{aligned}$$

где  $C, C_1, C_2 < \infty$ ;  $\Delta \tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ .

Известно, что

$$\mathbb{M}\left\{\left(\left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right)^2 - \Delta \tau_j\right)^2\right\} = 2 (\Delta \tau_j)^2,$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right)^2 - \Delta \tau_j | F_{\tau_j}\right\} = 0 \text{ с в. 1.}$$

Кроме того, по условиям леммы 1.4 имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s \right|^4 \right\} &\leq 36 \Delta \tau_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \left\{ |b_s - b_{\tau_j}|^4 \right\} ds \leq \\ &\leq 36C (\Delta \tau_j)^{2+\gamma}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right|^4 \right\} \leq (\Delta \tau_j)^3 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \left\{ |a_s|^4 \right\} ds.$$

Тогда правая часть (1.52) стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Используя этот факт, а также (1.50), (1.51) и определение 1.12, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.1.** *Пусть выполнены условия леммы 1.4, причем винеровские случайные процессы в (1.42) и (1.49) являются независимыми. Тогда*

$$\int_t^{*T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau = \int_t^T F(\eta_\tau, \tau) df_\tau$$

с вероятностью 1.

Нетрудно видеть, что из леммы 1.4 при  $F(x, \tau) \equiv x$  вытекает следующее утверждение.

**Лемма 1.5.** *Пусть  $\eta_\tau \in Q_4([t, T])$ . Тогда*

$$\int_t^{*T} \eta_\tau df_\tau = \int_t^T \eta_\tau df_\tau + \frac{1}{2} \int_t^T b_\tau d\tau \text{ с. в. 1.}$$

Утверждение этой леммы можно несколько модифицировать.

**Лемма 1.6.** *Пусть  $\eta_\tau^{(i)} \in Q_4([t, T])$ ;  $i = 1, 2$ . Тогда*

$$\int_t^{*T} \eta_\tau^{(i)} df_\tau^{(j)} = \int_t^T \eta_\tau^{(i)} df_\tau^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^T b_\tau d\tau \text{ с. в. 1,}$$

где процесс  $\eta_\tau^{(i)}$  имеет вид:

$$\eta_\tau^{(i)} = \eta_t^{(i)} + \int_t^\tau a_s ds + \int_t^\tau b_s df_s^{(i)},$$

причем  $f_\tau^{(j)}$ ;  $j = 1, 2$  — независимые стандартные винеровские процессы;  $\mathbf{1}_A$  — индикатор множества  $A$ .

Следствием леммы 1.6 является следующее утверждение.

**Лемма 1.7.** Пусть процесс Ито  $\eta_\tau \in \Re^1$ ,  $\tau \in [t, T]$  имеет вид

$$\eta_\tau = \eta_t + \int_t^\tau a_s ds + \sum_{i=1}^m \int_t^\tau \mathbf{b}_s^{(i)} d\mathbf{f}_s^{(i)},$$

где  $\mathbf{f}_s^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  — независимые стандартные винеровские процессы; процессы  $a_s$ ,  $\mathbf{b}_s^{(i)}$  удовлетворяют условиям D1, D2 при  $m = 2$ . Тогда с вероятностью 1 выполнено равенство

$$\int_t^T \eta_s d\mathbf{f}_s^{(i)} = \int_t^T \eta_s d\mathbf{f}_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_t^T \mathbf{b}_s^{(i)} ds,$$

где  $i = 1, \dots, m$ .

### 1.2.6 Стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича

Рассмотрим СДУ Стратоновича вида

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_\tau, \tau) d\tau + \int_0^{*t} \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.53)$$

где  $x_t \in \Re^1$  — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.53); второй интеграл в правой части (1.53) понимается как стохастический интеграл Стратоновича;  $a(x, t)$ ,  $\sigma(x, t) : \Re^1 \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  — измеримые при всех  $(x, t) \in \Re^1 \times [0, T]$  функции; случайная величина  $x_0$  стохастически независима с приращениями  $f_t - f_0$ ,  $t > 0$ .

Уравнение (1.53) может быть переписано в символьической форме

$$dx_t = a(x_t, t) dt + \sigma(x_t, t) d^*f_t, \quad x_0 = x(0, \omega).$$

В многомерном случае СДУ Стратоновича имеет вид

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) df_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.38) и (1.39).

Данное уравнение также может быть переписано в символьической форме

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t) dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) d^*\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega).$$

Установим связь СДУ Ито и Стратоновича.

Рассмотрим СДУ Стратоновича (1.53). Пусть условия леммы 1.3 выполнены при  $n = 1$  для функции  $\sigma(x, t)$ . Тогда по формуле Ито в одномерном случае

$$\sigma(x_s, s) = \sigma(x_t, t) + \int_t^s L\sigma(x_\tau, \tau) d\tau + \int_t^s \sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau) df_\tau \text{ с. в. 1,}$$

где  $s \geq t$ , а оператор  $L$  см. в лемме 1.3 при  $n = m = 1$ .

Таким образом, случайный процесс  $\sigma(x_s, s)$  является процессом Ито с коэффициентом сноса  $L\sigma(x_\tau, \tau)$  и коэффициентом диффузии

$$\sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau).$$

Допустим, что указанные коэффициенты удовлетворяют условиям леммы 1.5. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\int_0^{*t} \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau = \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau) d\tau. \quad (1.54)$$

Согласно (1.54) от СДУ Стратоновича можно перейти к соответствующему ему СДУ Ито:

$$dx_t = a^*(x_t, t) dt + \sigma(x_t, t) df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.55)$$

где

$$a^*(x_t, t) = a(x_t, t) + \frac{1}{2} \sigma(x_t, t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_t, t).$$

Таким образом, если функции  $a^*(x, t)$  и  $\sigma(x, t)$  удовлетворяют условиям существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения уравнения Ито (1.55), то существует единственное в смысле стохастической эквивалентности решение СДУ Стратоновича (1.53).

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим СДУ Стратоновича вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t) dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) d^*\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.56)$$

или в интегральной форме

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) df_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega).$$

Обобщая (1.54) на многомерный случай, с вероятностью 1 получаем

$$\int_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau = \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \int_0^t \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) \frac{\partial \Sigma_k}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau,$$

где  $\Sigma_k(\mathbf{x}, \tau)$  —  $k$ -й столбец матрицы  $\Sigma(\mathbf{x}, \tau)$ .

Таким образом, СДУ Стратоновича вида (1.56) соответствует СДУ Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}^*(\mathbf{x}_t, t) dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.57)$$

где

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma_k}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t).$$

Поэтому, если матричные функции  $\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t)$  и  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют условиям АІ–АІІ теоремы 1.6 существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения СДУ Ито (1.57), то и соответствующее ему СДУ Стратоновича (1.56) имеет единственное в смысле стохастической эквивалентности решение.

## 1.3 Стохастические интегралы по мартингалам и стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой

### 1.3.1 Стохастический интеграл по мартингалу

Пусть заданы вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и определенная на нем неубывающая совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ . Пусть  $M_t$ ,  $t \in [0, T]$  —  $\mathcal{F}_t$ -измеримый при каждом  $t \in [0, T]$  мартингал, для которого  $\mathbb{M}\{|M_t|\} < \infty$  и при всех  $t \in [0, T]$  существует  $\mathcal{F}_t$ -измеримый и неотрицательный с вероятностью 1 случайный процесс  $\rho_t$ ,  $t \in [0, T]$  такой, что

$$\mathbb{M}\{(M_s - M_t)^2 | \mathcal{F}_t\} = \mathbb{M}\left\{\int_t^s \rho_\tau d\tau | \mathcal{F}_t\right\} \text{ с. в. 1,}$$

где  $0 \leq t < s \leq T$ . Такие мартингалы, следуя [17], будем называть  $D$ -martингалами.

Введем в рассмотрение класс  $H_2(\rho, [0, T])$  случайных процессов  $\varphi_t$ ,  $t \in$

$[0, T]$ , которые  $F_t$ -измеримы при каждом  $t \in [0, T]$  и удовлетворяют условию

$$M \left\{ \int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt \right\} < \infty.$$

Для произвольного разбиения  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  промежутка  $[0, T]$  такого, что  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ , и произвольной последовательности  $F_{\tau_j}$ -измеримых случайных величин  $\varphi_j$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$  определим ступенчатую функцию  $\varphi_t \in H_2(\rho, [0, T])$  следующим образом:  $\varphi_t = \varphi_j$  с вероятностью 1 при  $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .

Через  $G_2(\rho, [0, T])$  обозначим множество всех ступенчатых функций в  $H_2(\rho, [0, T])$ . Для произвольной ступенчатой функции  $\varphi_t \in G_2(\rho, [0, T])$  определим стохастический интеграл по  $D$ -martингалу  $M_t$ ,  $t \in [0, T]$  следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j (M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \varphi_t dM_t.$$

Нетрудно показать, что стохастический интеграл

$$\int_0^T \varphi_t dM_t$$

для любых  $\varphi_t, \psi_t \in G_2(\rho, [0, T])$  и любых постоянных  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$  обладает с вероятностью 1 следующими свойствами:

$$H1. \quad M \left\{ \int_0^T \varphi_t dM_t | F_0 \right\} = 0.$$

$$H2. \quad M \left\{ \left| \int_0^T \varphi_t dM_t \right|^2 | F_0 \right\} = M \left\{ \int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt | F_0 \right\}.$$

$$H3. \quad \int_0^T (\alpha \varphi_t + \beta \psi_t) dM_t = \alpha \int_0^T \varphi_t dM_t + \beta \int_0^T \psi_t dM_t.$$

$$H4. \quad \int_0^T \mathbf{1}_{[a,b)}(t) dM_t = M_b - M_a, \quad a, b \in [0, T], \quad b > a.$$

$$H5. \quad M \left\{ \int_0^T \varphi_t dM_t \int_0^T \psi_t dM_t | F_0 \right\} = M \left\{ \int_0^T \varphi_t \psi_t \rho_t dt | F_0 \right\}.$$

$$H6. \quad P \left\{ \left| \int_0^T \varphi_t dM_t \right| > C \right\} \leq P \left\{ \int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt > N \right\} + N/(C^2) \quad \text{для всех } C, N.$$

Введем на классе  $H_2(\rho, [0, T])$  норму

$$\|\varphi\|_{2,T,\rho} = \left( \mathbb{M} \left\{ \int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt \right\} \right)^{1/2}.$$

Отождествим функции  $\varphi_t, \psi_t \in H_2(\rho, [0, T])$ , если  $\|\varphi - \psi\|_{2,T,\rho} = 0$  и рассмотрим разбиение промежутка  $[0, T]$ , для которого

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \dots < \tau_N^{(N)} = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}| \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Определим последовательность ступенчатых функций  $\varphi_t^{(N)}$  следующим образом:

$$\varphi_t^{(N)} = \varphi_{\tau_j^{(N)}} \text{ с в. 1 при } t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)}); \quad j = 0, 1, \dots, N-1; \quad N = 1, 2, \dots$$

**Определение 1.13.** Назовем стохастическим интегралом по  $D$ -маргингалу  $M_t \in H_2(\rho, [0, T])$  среднеквадратический предел

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{\tau_j^{(N)}}^{(N)} (M_{\tau_{j+1}^{(N)}} - M_{\tau_j^{(N)}}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \varphi_t dM_t, \quad (1.58)$$

где  $\varphi_t^{(N)}$  — произвольная последовательность ступенчатых функций из  $G_2(\rho, [0, T])$ , сходящаяся по норме  $\|\cdot\|_{2,T,\rho}$  к функции  $\varphi_t$ .

Известно [17], что стохастический интеграл

$$\int_0^T \varphi_t dM_t$$

вида (1.58) существует, не зависит от выбора последовательности  $\varphi_t^{(N)}$  и обладает свойствами  $H1 - H6$ .

Определим случайный процесс  $\eta_t, t \in [0, T]$ :

$$\eta_t = \int_0^t \varphi_\tau dM_\tau \text{ с в. 1, если } \varphi_t \in H_2(\rho, [0, T]).$$

Отметим некоторые свойства процесса  $\eta_t, t \in [0, T]$ . Пусть  $\eta_t, t \in [0, T]$  — сепарабельный случайный процесс. Тогда [17]:

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t| > a \right\} \leq \frac{1}{a^2} \int_0^T \mathbb{M}\{\varphi_\tau^2 \rho_\tau\} d\tau,$$

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^2 \right\} \leq 4 \mathbb{M} \{ |\eta_T|^2 \} = 4 \int_0^T \mathbb{M} \{ \varphi_\tau^2 \rho_\tau \} d\tau.$$

Стochasticный интеграл

$$\int_0^T \varphi_t dM_t$$

можно определить и для более широкого класса случайных функций  $\varphi_t$ , а именно для класса  $S_2(\rho, [0, T])$   $F_t$ -измеримых при каждом  $t \in [0, T]$  и удовлетворяющих условию

$$\int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt < \infty \text{ с в. 1}$$

случайных процессов  $\varphi_t$ ,  $t \in [0, T]$  [17]. В этом случае полагаем [17]

$$\text{P-lim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{\tau_j^{(N)}}^{(N)} (M_{\tau_{j+1}^{(N)}} - M_{\tau_j^{(N)}}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \varphi_t dM_t, \quad (1.59)$$

где  $\varphi_t^{(N)}$  — произвольная последовательность ступенчатых функций из  $S_2(\rho, [0, T])$ , сходящаяся к  $\varphi_t \in S_2(\rho, [0, T])$  в следующем смысле:

$$\text{P-lim}_{N \rightarrow \infty} \int_0^T |\varphi_t^{(N)} - \varphi_t|^2 dt = 0,$$

$\{\tau_j^{(N)}\}_{j=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$  такого же типа, как и в определении 1.13.

Известно [17], что стохастический интеграл вида (1.59) существует, не зависит от выбора последовательности  $\varphi_t^{(N)}$  и обладает свойствами H3 и H6. Кроме того, известно [17], что если процесс

$$\eta_t = \int_0^t \varphi_\tau dM_\tau,$$

$\varphi_t \in H_2(\rho, [0, T])$ , сепарабелен и мартингал  $M_t$  с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода, то  $\eta_t$  также не имеет разрывов второго рода, причем

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t| > C \right\} \leq \frac{N}{C^2} + \mathbb{P} \left\{ \int_0^T \varphi_\tau^2 \rho_\tau d\tau > N \right\}.$$

Отметим, что одним из наиболее простых примеров  $D$ -martингалов является стандартный винеровский процесс, для которого очевидно  $\rho_\tau \equiv 1$ . При этом соответствующий стохастический интеграл по  $D$ -martингалу преобразуется в стохастический интеграл Ито.

### 1.3.2 Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере

Рассмотрим пуассоновскую меру в пространстве  $[0, T] \times \mathbf{Y}$  ( $\Re^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y}$ ). Значения этой меры на множестве  $\Delta \times A$  ( $\Delta \subseteq [0, T]$ ,  $A \subset \mathbf{Y}$ ) будем обозначать через  $\nu(\Delta, A)$ . Предположим, что  $\mathsf{M}\{\nu(\Delta, A)\} = |\Delta|\Pi(A)$ , где  $|\Delta|$  — лебегова мера  $\Delta$ ,  $\Pi(A)$  — мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}$  борелевских множеств  $\mathbf{Y}$ , а  $\mathcal{B}_0$  — подалгебра  $\mathcal{B}$ , состоящая из множеств  $A \subset \mathcal{B}$ , для которых  $\Pi(A) < \infty$ .

Введем мартингальную меру  $\tilde{\nu}(\Delta, A) = \nu(\Delta, A) - |\Delta|\Pi(A)$ .

Рассмотрим фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$  и неубывающую совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{F_t, t \in [0, T]\}$ ,  $F_t \subset \mathcal{F}$ . Будем считать, что:

1. Случайные величины  $\nu([0, t], A)$  —  $F_t$ -измеримы при всех  $A \subseteq \mathcal{B}_0$ .
2. Случайные величины  $\nu([t, t+h], A)$ ,  $A \subseteq \mathcal{B}_0$ ,  $h > 0$ , не зависят от  $\sigma$ -алгебры  $F_t$ .

Перейдем к определению стохастического интеграла по мартингальной мере вида:

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}),$$

где  $\varphi : [0, T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \rightarrow \Re^1$ .

Определим классы  $H_l(\Pi, [0, T])$  и  $S_l(\Pi, [0, T])$  случайных функций  $\varphi : [0, T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \rightarrow \Re^1$ , которые при всех  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$  —  $F_t$ -измеримы и удовлетворяют условиям

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\{|\varphi(t, \mathbf{y})|^l\} \Pi(d\mathbf{y}) dt < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} |\varphi(t, \mathbf{y})|^l \Pi(d\mathbf{y}) dt < \infty \text{ с в. 1}$$

соответственно.

Сначала предполагаем, что случайная функция  $\varphi(t, \mathbf{y})$  ступенчата, т. е.  $\varphi(t, \mathbf{y}) = \varphi_{j-1}(\mathbf{y})$  с вероятностью 1 при  $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ ,  $\{\tau_j\}_{j=1}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$  того же типа, что и в определении 1.13. Кроме

того, считаем, что случайные величины  $\varphi_j(\mathbf{y})$   $F_{\tau_j}$ -измеримы и таковы, что  $\varphi(t, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [0, T])$ . В этом случае полагаем [17], что

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbf{Y}} \varphi(\tau_{j-1}, \mathbf{y}) \tilde{\nu}([\tau_{j-1}, \tau_j), d\mathbf{y}). \quad (1.60)$$

Можно показать, что интеграл (1.60) обладает с вероятностью 1 следующими свойствами:

$$K1. \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} (\alpha \varphi_1(t, \mathbf{y}) + \beta \varphi_2(t, \mathbf{y})) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) = \alpha \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi_1(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) + \\ + \beta \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi_2(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}).$$

$$K2. \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{1}_{\Delta \times A}(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) = \tilde{\nu}(\Delta, A), \quad A \subseteq \mathcal{B}_0, \quad \Delta \subseteq [0, T].$$

$$K3. \mathsf{M} \left\{ \left| \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \right|^2 | F_0 \right\} = \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathsf{M} \{ |\varphi(t, \mathbf{y})|^2 | F_0 \} \Pi(d\mathbf{y}) dt, \\ \mathsf{M} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) | F_0 \right\} = 0.$$

$$K4. \mathsf{P} \left\{ \left| \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \right| > C \right\} \leq \mathsf{P} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) > N \right\} + \\ + N/(C^2).$$

Здесь  $\alpha, \beta, N, C$  — постоянные;  $\varphi_1(t, \mathbf{y}), \varphi_2(t, \mathbf{y}), \varphi(t, \mathbf{y})$  — ступенчатые случайные функции из класса  $H_2(\Pi, [0, T])$ .

Если  $\varphi(t, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [0, T])$ , то полагаем [17]

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi^{(N)}(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \quad (1.61)$$

где  $\varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})$  — произвольная последовательность ступенчатых функций из  $H_2(\Pi, [0, T])$  такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathsf{M} \{ |\varphi(t, \mathbf{y}) - \varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})|^2 \} \Pi(d\mathbf{y}) dt = 0.$$

В случае если  $\varphi(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0, T])$ , то положим [17]

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi^{(N)}(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \quad (1.62)$$

где  $\varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})$  — произвольная последовательность ступенчатых функций из  $S_2(\Pi, [0, T])$  такая, что

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} |\varphi(t, \mathbf{y}) - \varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) dt = 0.$$

Можно показать [17], что стохастические интегралы (1.61), (1.62) существуют, не зависят от выбора последовательностей  $\varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})$ , причем стохастический интеграл (1.61) обладает свойствами  $K1-K4$ , а стохастический интеграл (1.62) — свойствами  $K1, K4$ .

Рассмотрим некоторые свойства стохастического интеграла

$$\Phi_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \varphi(s, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}), \quad t \in [0, T],$$

с переменным верхним пределом. При этом будем предполагать, что  $\Phi_t, t \in [0, T]$  — сепарабельный случайный процесс.

Если  $\varphi(t, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [0, T])$ , то:

$$L1. \mathbb{M}\{\Phi_t - \Phi_s | \mathcal{F}_s\} = 0 \text{ c. v. } 1, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

$$L2. \mathbb{M}\{|\Phi_t - \Phi_s|^2 | \mathcal{F}_s\} = \int_s^t \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M}\{\varphi^2(\tau, \mathbf{y}) | \mathcal{F}_s\} \Pi(d\mathbf{y}) d\tau \text{ c. v. } 1.$$

$$L3. \mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi_t| > a\right\} \leq a^{-2} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M}\{\varphi^2(t, \mathbf{y})\} \Pi(d\mathbf{y}) dt.$$

$$L4. \mathbb{M}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi_t|^2\right\} \leq 4\mathbb{M}\{|\Phi_T|^2\} = 4 \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M}\{\varphi^2(\tau, \mathbf{y})\} \Pi(d\mathbf{y}) d\tau.$$

Если же  $\varphi(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0, T])$ , то

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi_t| > C\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi^2(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau > N\right\} + N/(C^2),$$

где  $C, N$  — произвольные постоянные.

Нетрудно видеть, что для всех  $\varphi(t, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_2(\Pi, [0, T])$  определен стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \nu(dt, d\mathbf{y}) = \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) + \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) dt.$$

### 1.3.3 Формула Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и неубывающая совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ . Рассмотрим  $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  стандартный векторный винеровский процесс  $\mathbf{f}_t$  с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), пуассоновскую случайную меру  $\nu(dt, d\mathbf{y})$ , заданную в пространстве  $[0, T] \times \mathbf{Y}$  и удовлетворяющую условиям (I) – (III) из разд. 1.1.5 при  $T < \infty$  на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , а также случайные функции  $\mathbf{a}_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\gamma(t, \mathbf{y}) : [0, T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которые  $\mathcal{F}_t$ -измеримы при каждом  $t \in [0, T]$  и удовлетворяют условиям  $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}$ ,  $B_t^{(ik)} \in \mathcal{P}_2([0, T])$ ,  $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_2(\Pi, [0, T])$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим  $n$ -мерные процессы Ито  $\mathbf{x}_t$  и  $\mathbf{z}_t$  при  $t \in [0, T]$  со скачкообразной компонентой вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau + \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y}), \quad (1.63)$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{z}_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau + \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \nu(d\tau, d\mathbf{y}), \quad (1.64)$$

где  $\tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y}) = \nu(d\tau, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})d\tau$ . Отметим, что для существования третьего интеграла в правой части (1.63) достаточно выполнения условия  $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0, T])$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Введем в рассмотрение класс  $D_\gamma([0, T])$  неслучайных функций  $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которые непрерывно дифференцируемы по  $\mathbf{x}$  и  $t$  и удовлетворяют условиям

$$R(\Phi_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\Phi_t, t) \in S_2(\Pi, [0, T]),$$

$$R(\Phi_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\Phi_t, t) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\Phi_t, t) \gamma^{(k)}(t, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]),$$

где

$$\Phi_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y}),$$

а случайная функция  $\gamma(\tau, \mathbf{y})$  такая же, как в (1.63).

Введем в рассмотрение класс  $E_\gamma([0, T])$  неслучайных функций  $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которые непрерывно дифференцируемы по  $\mathbf{x}$  и  $t$  и удовлетворяют условию

$$R(\Psi_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\Psi_t, t) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_2(\Pi, [0, T]),$$

где

$$\Psi_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \nu(d\tau, d\mathbf{y}),$$

а случайная функция  $\gamma(\tau, \mathbf{y})$  такая же, как и в (1.64).

Приведем два утверждения [17], которые устанавливают формулу Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой вида (1.63), (1.64).

**Теорема 1.10.** [17]. *Пусть процесс Ито  $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$ , определен равенством (1.63), причем  $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}, B_t^{(ik)} \in P_2([0, T])$ ,  $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0, T])$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, m$ , а  $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  — дважды непрерывно дифференцируемая по  $\mathbf{x}$  функция из класса  $D_\gamma([0, T])$ . Тогда*

$$\begin{aligned} dR(\mathbf{x}_t, t) = & \left( \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_t^{(k)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) \sum_{i=1}^m B_t^{(ki)} B_t^{(ji)} + \\ & + \int_{\mathbf{Y}} \left( R(\mathbf{x}_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\mathbf{x}_t, t) - \sum_{k=1}^n \gamma^{(k)}(t, \mathbf{y}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) \right) \Pi(d\mathbf{y}) \Big) dt + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n B_t^{(ki)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \\ & + \int_{\mathbf{Y}} (R(\mathbf{x}_{t-} + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\mathbf{x}_{t-}, t)) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \end{aligned}$$

где равенство понимается в интегральной форме с вероятностью 1.

**Теорема 1.11.** [17]. *Пусть процесс Ито  $\mathbf{z}_t, t \in [0, T]$ , определен равенством (1.64), причем  $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}, B_t^{(ik)} \in P_2([0, T])$ ,  $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_2(\Pi, [0, T])$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, m$ , а  $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  —*

дважды непрерывно дифференцируемая по  $\mathbf{x}$  функция из класса  $E_\gamma([0, T])$ . Тогда

$$\begin{aligned} dR(\mathbf{z}_t, t) = & \left( \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{z}_t, t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_t^{(k)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t, t) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t, t) \sum_{i=1}^m B_t^{(ki)} B_t^{(ji)} \Big) dt + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n B_t^{(ki)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t, t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \\ & + \int_{\mathbf{Y}} (R(\mathbf{z}_{t-} + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\mathbf{z}_{t-}, t)) \nu(dt, d\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.65)$$

где равенство понимается в интегральной форме с вероятностью 1.

### 1.3.4 Оценки моментов стохастических интегралов по пуассоновским мерам

Пусть  $\mathbf{a}_\tau^{(i)} \equiv 0$ ,  $B_\tau^{(ij)} \equiv 0$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ,  $R(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^r$ ,  $r \in N$ . Предположим также, что  $n = 1$ , и рассмотрим формулу Ито (1.65) в этих условиях:

$$z_t^r = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} ((z_{\tau-} + \gamma(\tau, \mathbf{y}))^r - z_{\tau-}^r) \nu(d\tau, d\mathbf{y}), \quad (1.66)$$

где

$$z_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \nu(d\tau, d\mathbf{y}),$$

а  $\gamma(\tau, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_{2r}(\Pi, [0, T])$ .

С помощью формулы (1.66) можно получить оценку моментов стохастических интегралов по пуассоновской мере [17] (С. 264). Приведем вывод этой формулы.

Обозначим

$$a_r(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbb{M} \{ |z_\tau|^r \}, \quad b_r(\tau, \mathbf{y}) = \mathbb{M} \{ |\gamma(\tau, \mathbf{y})|^r \}.$$

Из (1.66) получим

$$a_r(t) \leq \sum_{k=0}^{r-1} C_r^k \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M} \{ |z_\tau|^k |\gamma(\tau, \mathbf{y})|^{r-k} \} \Pi(d\mathbf{y}) d\tau.$$

Используя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\mathbb{M}\{|z_\tau|^k |\gamma(\tau, \mathbf{y})|^{r-k}\} \leq (a_r(\tau))^{k/r} (b_r(\tau, \mathbf{y}))^{1-k/r}.$$

Если  $a_r(t) \leq 1$ , то

$$a_r(t) \leq \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \left( \left( (b_r(\tau, \mathbf{y}))^{1/r} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau.$$

В случае если  $a_r(t) \geq 1$ , имеем

$$\begin{aligned} a_r(t) &\leq (a_r(t))^{1-1/r} \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \left( \left( (b_r(\tau, \mathbf{y}))^{1/r} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau \Rightarrow \\ a_r(t) &\leq \left( \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \left( \left( (b_r(\tau, \mathbf{y}))^{1/r} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau \right)^r. \end{aligned}$$

В результате получаем следующую оценку:

$$a_r(T) \leq \max_{j \in \{r, 1\}} \left\{ \left( \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \left( \left( (b_r(\tau, \mathbf{y}))^{1/r} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau \right)^j \right\}. \quad (1.67)$$

При этом предполагаем, что правая часть (1.67) существует.

Отметим также, что в силу соотношения  $\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) = \nu(dt, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})dt$  и неравенства Минковского имеем

$$(\mathbb{M}\{|\tilde{z}_t|^{2r}\})^{1/2r} \leq (\mathbb{M}\{|z_t|^{2r}\})^{1/2r} + (\mathbb{M}\{|\hat{z}_t|^{2r}\})^{1/2r}, \quad (1.68)$$

где

$$\hat{z}_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau; \quad \tilde{z}_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y}).$$

Величину  $\mathbb{M}\{|\hat{z}_t|^{2r}\}$  можно оценить с помощью неравенства (1.47) следующим образом:

$$\mathbb{M}\{|\hat{z}_t|^{2r}\} \leq t^{2r-1} \int_0^t \mathbb{M}\left\{\left|\int_{\mathbf{Y}} \varphi(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})\right|^{2r}\right\} d\tau, \quad (1.69)$$

где предполагаем, что

$$\int_0^t \mathbb{M}\left\{\left|\int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})\right|^{2r}\right\} d\tau < \infty.$$

### 1.3.5 Стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой

Рассмотрим СДУ

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t + \int_{\mathbf{Y}} P(\mathbf{x}_t, t, \mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \quad (1.70)$$

где  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ;  $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — неслучайные функции;  $\nu([0, t], \mathbf{y})$  — пуассоновская мера в пространстве  $[0, T] \times \mathbf{Y}$ , для которой справедливы предположения (I) – (III) из разд. 1.1.5;  $\mathbf{f}_t$  —  $m$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ , которые не зависят от значений пуассоновской меры  $\nu([0, t], \mathbf{y})$ .

Следующая теорема содержит достаточные условия, при которых СДУ (1.70) имеет единственное с вероятностью 1 непрерывное справа решение.

**Теорема 1.12.** [17]. *Пусть выполнены следующие условия:*

AI. *Существует такая постоянная  $L < \infty$ , что*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x}, t)\|^2 + \int_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \leq L(1 + |\mathbf{x}|^2),$$

где

$$\|\Sigma(\mathbf{x}, t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t)|^2.$$

AII. *Для всякого  $R > 0$  найдется постоянная  $C_R < \infty$  такая, что при  $|\mathbf{x}| \leq R$ ,  $|\mathbf{z}| \leq R$  выполняется неравенство*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{z}, t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x}, t) - \Sigma(\mathbf{z}, t)\|^2 + \\ + \int_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - P(\mathbf{z}, t, \mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \leq C_R |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2.$$

AIII. *Существуют постоянная  $L < \infty$  и функция  $g(h) : g(h) \geq 0$ , которая, монотонно убывающая, стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ , такие, что*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t + h) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x}, t + h) - \Sigma(\mathbf{x}, t)\|^2 + \\ + \int_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x}, t + h, \mathbf{y}) - P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \leq \\ \leq L(1 + |\mathbf{x}|^2)g(h).$$

Тогда СДУ (1.70) имеет единственное с вероятностью 1 непрерывное справа решение.

В [17] доказаны следующие две теоремы.

**Теорема 1.13.** Пусть выполнены условия АI – АIII теоремы 1.12, а также условия

$$\int_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) \leq L(1 + |\mathbf{x}|^p); \quad p = 2, 3, \dots, 2n,$$

где  $L < \infty$  — постоянная. Тогда решение СДУ (1.70) имеет конечные моменты вплоть до  $2n$ -го порядка и справедлива оценка

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_t|^{2p}\} \leq L_{1,p}(1 + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^{2p}\}); \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\mathbf{x}_0$  —  $F_0$ -измеримая случайная величина;  $L_{1,p}$  — постоянная, которая зависит только от  $L, T, p$ .

**Теорема 1.14.** В условиях теоремы 1.13 существует такая, зависящая только от  $L, T, p$ , постоянная  $L_{2,p}$ , что

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0|^{2p}\} \leq L_{2,p}(1 + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^{2p}\})t; \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

где  $p = 1, 2, \dots, n$ .

### 1.3.6 Интегральное представление решения линейного СДУ со скачкообразной компонентой

Построим с помощью формулы Ито (1.65) интегральное представление решения скалярного СДУ

$$\begin{aligned} d\xi_t = & (a_0(t) + a_1(t)\xi_t)dt + \sum_{i=1}^m \left( b_0^{(i)}(t) + b_1^{(i)}(t)\xi_t \right) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \\ & + \int_{\mathbf{Y}} (\gamma_0(t, \mathbf{y}) + \gamma_1(t, \mathbf{y})\xi_{t-}) \nu(dt, d\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.71)$$

где  $a_0(t), a_1(t), b_0^{(i)}(t), b_1^{(i)}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;  $\gamma_0(t, \mathbf{y}), \gamma_1(t, \mathbf{y}) : [0, T] \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;  $i = 1, \dots, m$  — скалярные неслучайные функции, удовлетворяющие условиям справедливости формулы Ито (1.65) и условиям теоремы 1.12;  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) —  $F_t$ -измеримые при всех  $t \in [0, T]$  независимые стандартные винеровские процессы;  $\nu(dt, d\mathbf{y})$  — пуассоновская мера, заданная

в пространстве  $[0, T] \times \mathbf{Y}$  ( $\Re^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y}$ ), которая независима с винеровскими процессами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $\gamma_1(t, \mathbf{y}) > -1$ .

В монографии [17] получено интегральное представление решения уравнения (1.71) при  $m = 1$ . Рассмотрим случай  $m > 1$ , основываясь на [17].

Пусть  $x_t$  — решение однородного СДУ

$$dx_t = a_1(t)x_t dt + \sum_{i=1}^m b_1^{(i)}(t)x_t d\mathbf{f}_t^{(i)} + x_t \int_{\mathbf{Y}} \gamma_1(t, \mathbf{y}) \nu(dt, d\mathbf{y}), \quad x_{t_0} = 1.$$

Введем процесс  $y_t = \ln|x_t|$ . По формуле Ито (1.65) имеем

$$dy_t = \left( a_1(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( b_1^{(i)}(t) \right)^2 \right) dt + \sum_{i=1}^m b_1^{(i)}(t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\mathbf{Y}} \ln|1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})| \nu(dt, d\mathbf{y}). \quad (1.72)$$

Из (1.72) с вероятностью 1 получаем

$$\begin{aligned} x_t = \exp & \left( \int_{t_0}^t \left( a_1(\tau) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( b_1^{(i)}(\tau) \right)^2 \right) d\tau + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t b_1^{(i)}(\tau) d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t \int_{\mathbf{Y}} \ln|1 + \gamma_1(\tau, \mathbf{y})| \nu(d\tau, d\mathbf{y}) \right). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Покажем, что процесс  $x_t^{-1}$  удовлетворяет СДУ

$$\begin{aligned} dx_t^{-1} = x_t^{-1} & \left( \left( \sum_{i=1}^m \left( b_1^{(i)}(t) \right)^2 - a_1(t) \right) dt - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^m b_1^{(i)}(t) d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int_{\mathbf{Y}} \frac{\gamma_1(t, \mathbf{y})}{1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})} \nu(dt, d\mathbf{y}) \right). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Действительно, применяя формулу Ито (1.65) к процессу  $x_t^{-1} = \exp(\psi_t)$ , где

$$d\psi_t = \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( b_1^{(i)}(t) \right)^2 - a_1(t) \right) dt - \sum_{i=1}^m b_1^{(i)}(t) d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int_{\mathbf{Y}} \ln|1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})| \nu(dt, d\mathbf{y}),$$

имеем

$$\begin{aligned}
 dx_t^{-1} &= x_t^{-1} \left( -a_1(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( b_1^{(i)}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( b_1^{(i)}(t) \right)^2 \right) dt + \\
 &+ x_t^{-1} \sum_{i=1}^m \left( -b_1^{(i)}(t) \right) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\mathbf{Y}} (\exp(\psi_{t-} - \ln|1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})|) - \exp(\psi_{t-})) \nu(dt, d\mathbf{y}). \tag{1.75}
 \end{aligned}$$

Далее путем несложных преобразований приводим формулу (1.75) к выражению вида (1.74).

Рассмотрим процесс  $\eta_t = x_t^{-1} \xi_t$ , где  $\xi_t$  — решение уравнения (1.71). Используя формулу Ито (1.65), получаем

$$\begin{aligned}
 d\eta_t &= x_t^{-1} d\xi_t + \xi_t dx_t^{-1} - \sum_{i=1}^m \left( b_0^{(i)}(t) + b_1^{(i)}(t) \xi_t \right) x_t^{-1} b_1^{(i)}(t) dt - \\
 &- x_t^{-1} \int_{\mathbf{Y}} \frac{\gamma_1(t, \mathbf{y})}{1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})} (\gamma_0(t, \mathbf{y}) + \gamma_1(t, \mathbf{y}) \xi_{t-}) \nu(dt, d\mathbf{y}). \tag{1.76}
 \end{aligned}$$

Подставляя  $d\xi_t$  и  $dx_t^{-1}$  из формул (1.71) и (1.74) в соотношение (1.76), находим

$$\begin{aligned}
 d\eta_t &= x_t^{-1} \left( \left( a_0(t) - \sum_{i=1}^m b_0^{(i)}(t) b_1^{(i)}(t) \right) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^m b_0^{(i)}(t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\mathbf{Y}} \frac{\gamma_0(t, \mathbf{y})}{1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})} \nu(dt, d\mathbf{y}) \right). \tag{1.77}
 \end{aligned}$$

Из (1.77) с вероятностью 1 окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 \xi_t &= x_t \left( \xi_{t_0} + \int_{t_0}^t x_\tau^{-1} \left( a_0(\tau) - \sum_{i=1}^m b_0^{(i)}(\tau) b_1^{(i)}(\tau) \right) d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t x_\tau^{-1} b_0^{(i)}(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} + \int_{t_0}^t \int_{\mathbf{Y}} \frac{x_{\tau-}^{-1} \gamma_0(\tau, \mathbf{y})}{1 + \gamma_1(\tau, \mathbf{y})} \nu(d\tau, d\mathbf{y}) \right),
 \end{aligned}$$

где  $x_t$  имеет вид (1.73), причем  $x_{t_0} = 1$ .

# Глава 2

## Применения стохастических дифференциальных уравнений

### 2.1 Диффузионные математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений

#### 2.1.1 Общий вид нелинейных диффузионных моделей

Анализ динамики физических и технических систем при случайных внешних воздействиях сводится к исследованию вероятностных и статистических свойств решений систем дифференциальных уравнений, возмущенных случайными процессами. В достаточно общем случае такие системы описываются уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) \mathbf{r}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — вектор состояния системы;  $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \Re^k$  — управляющее неслучайное воздействие;  $\mathbf{r}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \Re^m$  — стохастическое возмущение, представляющее собой векторный случайный процесс;  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) : \Re^n \times \Re^k \times [0, T] \rightarrow \Re^n$  и  $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times m}$  — матричные функции;  $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$  — случайный вектор начальных условий. Уравнение (2.1) рассматривается на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

К исследованию систем уравнений вида (2.1) сводится решение широкого класса задач статистической механики, электродинамики, теории управления, финансовой математики, кинетики и др. Первая такая задача была рассмотрена Л. Башелье [108] в связи с изучением одномерного броуновского движения частицы. Результаты Л. Башелье были обобщены А.

Эйнштейном [121] и М. Смолуховским [227] на случай многомерного броуновского движения. Более широкую постановку задачи о стохастических динамических системах можно найти в работе А.А. Андронова, А.А. Витта и Л.С. Понтрягина [218]. Эти фундаментальные работы положили начало статистическому описанию динамических систем, получившему в настоящее время развитие и широкое применение.

Корреляционные или спектральные свойства решений уравнений вида (2.1) существенным образом зависят от взаимосвязи динамических характеристик системы и частотных свойств возмущающего случайногопроцесса. Если полоса пропускания динамической системы (2.1) на входе значительно уже полосы частот равномерности спектра стационарного возмущающего процесса  $r_t$ , то этот процесс может считаться белошумным относительно данной системы, т.е. имеющим постоянную спектральную плотность в диапазоне частот, существенном для динамики системы (2.1).

Как известно, белошумный процесс является обобщенным случайным процессом с  $\delta$ -образной корреляционной функцией и постоянной спектральной плотностью во всем частотном диапазоне, т.е.  $R_r(\tau) = I\delta(\tau)$ ,  $S_r(w) = I$ , где  $\delta(\tau)$  — обобщенная  $\delta$ -функция Дирака;  $I$  — единичная матрица (здесь речь идет о векторном белом шуме с независимыми компонентами).

Понятие белошумности случайногопроцесса условно. Один и тот же случайный процесс может считаться белошумным относительно одной динамической системы и небелошумным ("цветным") относительно другой, имеющей более широкую полосу пропускания.

Р.Л. Стратоновичем [94] была предложена следующая параметризованная модель белошумного случайногопроцесса. Введем малый параметр  $\mu > 0$  таким образом, что  $r_t = \mu^{-1}\xi(\mu^{-2}t, \omega)$ , где  $\xi(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_t \in \Re^m$  — стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией  $R_\xi(\tau)$  такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(t, t + \tau) d\tau = I,$$

и спектральной плотностью  $S_\xi(w)$ . Тогда процесс  $r_t$  будет иметь корреляционную функцию  $R_r(\tau)$  и спектральную плотность  $S_r(w)$  такие, что при  $\mu \rightarrow 0$ :  $R_r(\tau) = \mu^{-2}R_\xi(\mu^{-2}\tau) \rightarrow I\delta(\tau)$ ,  $S_r(w) = S_\xi(\mu^2w) \rightarrow S_\xi(0)$ , т.е. будет приближаться по свойствам к белому шуму.

Система дифференциальных уравнений (2.1) для параметризованных

таким образом случайных возмущающих процессов принимает вид

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) \mu^{-1} \xi(\mu^{-2}t, \omega), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (2.2)$$

При достаточно малом  $\mu$  процесс  $\mu^{-1}\xi(\mu^{-2}t, \omega)$  может считаться белошумным относительно данной динамической системы, так как полоса частот равномерности спектра возмущающего процесса  $\mu^{-1}\xi(\mu^{-2}t, \omega)$  неограниченно расширяется при  $\mu \rightarrow 0$ , а полоса пропускания системы остается неизменной.

Если полоса пропускания системы (2.1) недостаточно узка относительно полосы равномерности спектра возмущающего случайного процесса  $\mathbf{r}_t$ , то белошумная аппроксимация указанного процесса не адекватна исходной постановке задачи стохастической динамики. В указанных случаях оказывается существенным учет "цветности" случайного процесса  $\mathbf{r}_t$ , для чего спектральная плотность этого процесса представляется следующим образом:

$$S_r(w) = H_r(iw)H_r(-iw) = \frac{F_r(iw)}{A_r(iw)} \frac{F_r(-iw)}{A_r(-iw)}, \quad (2.3)$$

где  $H_r(p) = F_r(p)/A_r(p)$  — передаточная функция устойчивой системы, т.е.  $F_r(p)$  — диагональная матрица, состоящая из полиномов конечной степени  $m$ ;  $A_r(p)$  — гурвицев полином конечной степени  $n$  ( $m < n$ ), а  $i$  — мнимая единица.

Известно, что спектральной плотностью (2.3) обладают установившиеся выходные процессы линейной стохастической системы, представленной в пространстве состояний в виде

$$\frac{d\mathbf{z}_t}{dt} = \tilde{A}_r \mathbf{z}_t + \tilde{F}_r \mathbf{f}_t^{\cdot}, \quad \mathbf{r}_t = H \mathbf{z}_t, \quad (2.4)$$

для матриц  $\tilde{A}_r$ ,  $\tilde{F}_r$ ,  $H$  которой справедливо равенство

$$H_r(p) = H(pI - \tilde{A}_r)^{-1} \tilde{F}_r = \frac{F_r(p)}{A_r(p)},$$

где  $\mathbf{f}_t^{\cdot}$  — белошумный процесс;  $I$  — единичная матрица.

Приведем простейший пример случайного процесса  $\mathbf{z}_t$  в одномерном случае. Пусть  $\tilde{A}_r = a < 0$ ,  $\tilde{F}_r = b$ ,  $H = 1$ . Перепишем уравнение (2.4) в форме одномерного СДУ Ито с учетом выбранных параметров:

$$dr_t = ar_t dt + b df_t,$$

где  $f_t$  — скалярный стандартный винеровский процесс. Вычислим корреляцию случайного процесса  $r_t$  (он называется случайным процессом Орнштейна–Уленбека):

$$\mathbb{M}\{r_t r_s\} = \frac{b^2}{2|a|} \exp(-|a| \cdot |t - s|).$$

Таким образом, случайный процесс  $r_t$  является экспоненциально коррелированным, т.е. является цветным шумом.

Вычислим спектральную плотность процесса  $r_t$  по формуле (1.3):

$$S_r(w) = \frac{b^2}{|a|^2 + w^2} = \frac{b}{|a| + iw} \cdot \frac{b}{|a| - iw}.$$

Сопоставляя полученные результаты с формулой (2.3) имеем

$$H_r(iw) = \frac{b}{|a| + iw}, \quad F_r(iw) = b, \quad A_r(iw) = |a| + iw.$$

Система (2.4) называется формирующим фильтром процесса  $\mathbf{r}_t$ , который может быть задан также в операторной форме:

$$\mathbf{r}_t = H_r(D)\mathbf{f}_t,$$

где  $D \stackrel{\text{def}}{=} d/dt$  — оператор дифференцирования, или в интегральной форме:

$$\mathbf{r}_t = \int_{-\infty}^t h_r(t - \tau) \mathbf{f}_\tau dt,$$

где  $h_r(t)$  — оригинал  $H_r(p)$ :

$$\int_0^\infty h_r(t) \exp(-pt) dt = H_r(p).$$

Если расширить систему уравнений (2.1), дополнив ее уравнениями (2.4), то математическое описание динамической системы сводится к стохастической системе дифференциальных уравнений с белошумным возмущением.

Таким образом, достаточно универсальной математической моделью, описывающей стохастическую динамику систем, является модель нелинейной системы дифференциальных уравнений, возмущенных векторным белошумным случайнм процессом

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) \mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (2.5)$$

где сохранены все обозначения формулы (2.1). Коррелированное возмущение  $\mathbf{r}_t$  заменено белым шумом  $\mathbf{f}_t$ .

Системе уравнений (2.5) можно придавать различный математический смысл, например, смысл СДУ Ито или СДУ Стратоновича, которые наиболее часто встречаются в литературе.

### 2.1.2 Линейные диффузионные модели

Соответствие частотных свойств случайногого возмущения и частотных характеристик динамического объекта, установленное ранее, носит сугубо качественный характер вследствие большой общности рассматриваемых моделей. Если теперь из всего множества моделей (2.1) – (2.5) выделить класс линейных моделей, то эти качественные оценки можно перевести в количественные.

Пусть система (2.1) линейна и стационарна, так что

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{r}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — решение системы (2.6);  $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \Re^k$ ;  $\mathbf{r}_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \Re^m$  — стохастическое возмущение;  $\mathbf{y}_t \in \Re^l$  — процесс на выходе;  $A, B, \Sigma, H$  — постоянные числовые матрицы соответствующего размера, причем матрица  $A$  гурвицева;  $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathring{\mathbf{x}}_0 \in \Re^n$  — случайный вектор начальных условий со средним  $\bar{\mathbf{x}}_0$  и центрированной составляющей  $\mathring{\mathbf{x}}_0$ .

Система уравнений (2.6) может быть представлена в эквивалентной операторной форме:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0(t) + H_u(D)\mathbf{u}(t) + H_r(D)\mathbf{r}_t, \quad (2.7)$$

где  $D$  — оператор дифференцирования;  $\mathbf{y}_0(t)$  — переходный процесс, соответствующий начальному условию  $\mathbf{x}_0$ ;  $H_u(D)$ ,  $H_r(D)$  — передаточные операторы от управления  $\mathbf{u}(t)$  к выходу  $\mathbf{y}_t$  и от стохастического возмущения  $\mathbf{r}_t$  к выходу  $\mathbf{y}_t$  соответственно.

Процесс  $\mathbf{y}_t$  и операторы  $H_u(D)$ ,  $H_r(D)$  определяются из (2.6):

$$\mathbf{y}_0(t) = H(DI - A)^{-1} \mathbf{x}_0 \delta(t),$$

$$H_u(D) = H(DI - A)^{-1}B = \frac{B(D)}{A(D)},$$

$$H_r(D) = H(DI - A)^{-1}\Sigma = \frac{\Sigma(D)}{A(D)}.$$

Здесь  $\delta(t)$  —  $\delta$ -функция Дирака;  $A(D)$  — полиномиальный, а  $B(D)$ ,  $\Sigma(D)$  — матричные и покомпонентно полиномиальные операторы; полином  $A(p) = \det(pI - A)$  — гурвицев.

Процесс  $\mathbf{y}_t$  имеет систематическую составляющую  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  и случайную составляющую  $\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t$ :

$$\mathbf{y}_t = \bar{\mathbf{y}}(t) + \overset{\circ}{\mathbf{y}}_t,$$

причем

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{y}}_0(t) + H_u(D)\mathbf{u}(t), \quad \overset{\circ}{\mathbf{y}}_t = \overset{\circ}{\mathbf{y}}_0(t) + H_r(D)\mathbf{r}_t.$$

В дальнейших рассуждениях данного раздела будем считать случайный процесс  $\mathbf{r}_t$  скалярным.

В силу устойчивости системы (2.6) и стационарности возмущения  $\mathbf{r}_t$  процесс  $\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t$  является асимптотически стационарным и обладает спектральной плотностью  $S_y(w) = |H_r(iw)|^2 S_r(w)$ , где  $S_r(w)$  — спектральная плотность возмущения  $\mathbf{r}_t$ .

Определим количественные характеристики полосы пропускания системы (2.7) и полосы частот равномерности спектра процесса  $\mathbf{r}_t$ .

Под полосой пропускания системы (2.7) будем понимать полосу частот, удовлетворяющую условию  $\Omega_c = \{w : w_0 \leq w \leq w_1\}$ , где

$$\begin{aligned} w_0, w_1 = \arg \max_{v_0, v_1} & \left\{ v_1 - v_0 > 0 : \frac{k_s^2}{v_1 - v_0} \int_{v_0}^{v_1} |H_r(iu)|^2 du \leq \right. \\ & \left. \leq \max \{|H_r(iv_0)|^2, |H_r(iv_1)|^2\} \right\} \end{aligned}$$

при некотором  $k_s \in [0.1, 0.3]$ .

Коэффициент  $k_s$  задает пороговый уровень амплитудно-частотной характеристики системы относительно ее среднего значения, что соответствует гашению сигналов системой (2.7) в частотном диапазоне  $w < w_0$ ,  $w > w_1$  не менее чем в  $k_s$  раз относительно среднего гашения в полосе частот  $\Omega_c$ .

Полосой частот равномерности спектра процесса  $\mathbf{r}_t$  будем называть полосу частот  $\Omega_r = \{w : w_0 \leq w \leq w_1\}$ , где

$$w_0, w_1 = \arg \max_{v_0, v_1} \left\{ v_1 - v_0 > 0 : \max_{v_0 < v_1} |S_r(v_1) - S_r(v_0)| \leq \right.$$

$$\leq k_r \min \{S_r(v_0), S_r(v_1)\} \}$$

при некотором  $k_r \in [0.05, 0.2]$ .

Коэффициент  $k_r$  задает относительный пороговый уровень равномерности спектральной плотности  $S_r(w)$  процесса  $\mathbf{r}_t$ . В диапазоне частот  $\Omega_r$  спектральная плотность  $S_r(w)$  изменяется в пределах  $k_r \cdot 100\%$  от своих значений, что позволяет приближенно считать ее константой в этом диапазоне.

Рассмотрим два характерных типа возмущений динамических систем, часто встречающихся в приложениях.

**Возмущение белым шумом.** Предположим, что полоса пропускания  $\Omega_c$  системы (2.7) значительно уже полосы частот равномерности спектра  $\Omega_r$  процесса  $\mathbf{r}_t$ :  $\Omega_c \subset \Omega_r$ .

В этом случае процесс  $\mathbf{r}_t$  может считаться широкополосным относительно системы (2.7), что соответствует гипотезе о его белошумности в системе (2.6) или (2.7). Эта ситуация изображена на рис. 2.1.

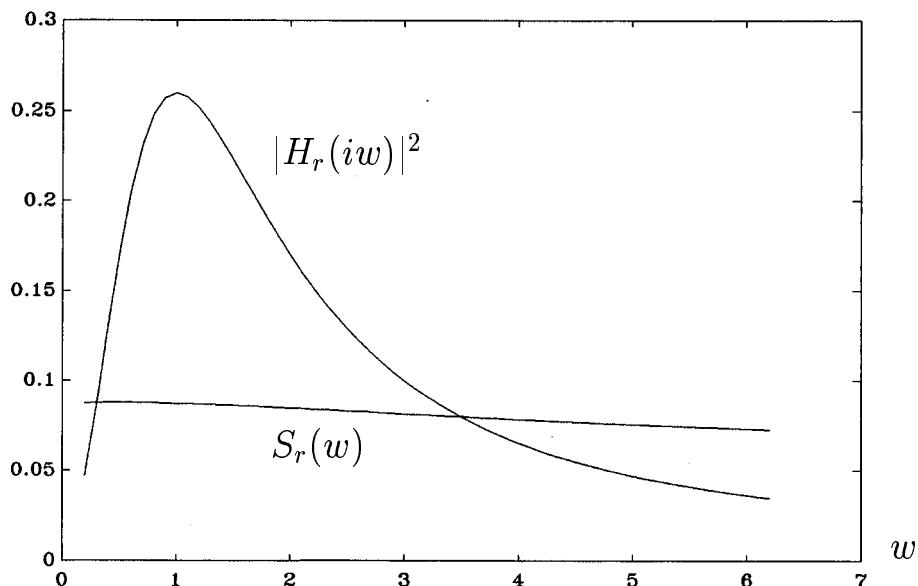


Рис. 2.1. Частотная характеристика и спектральная плотность при белошумном возмущении.

Необходимо отметить, что аппроксимация процесса  $\mathbf{r}_t$  белым шумом в данном случае тесно связана со свойствами самой системы. Для одной системы процесс  $\mathbf{r}_t$  может считаться белошумным, а относительно другой он может не обладать этим свойством.

В рассмотренном случае  $\mathbf{r}_t = \mathbf{f}_t$  — белый шум (в общем случае векторный). Запишем систему уравнений (2.6) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t,$$

что соответствует частному случаю универсальной модели (2.5).

**Возмущение ”цветным” шумом.** Пусть полоса пропускания системы (2.7) не уже полосы частот равномерности спектра  $\Omega_r$  процесса  $\mathbf{r}_t$ :  $\Omega_c \supseteq \Omega_r$ .

В рассматриваемом случае процесс  $\mathbf{r}_t$  является узкополосным относительно системы (2.7), и учитывать его ”цветность” обязательно. Эта ситуация изображена на рис. 2.2.

Спектральную плотность  $S_r(w)$  в данном случае можно представить или аппроксимировать функцией вида (2.3), где  $F_r$  — скаляр, а процесс  $\mathbf{r}_t$  можно считать процессом на выходе формирующего фильтра (2.4). Структура уравнений (2.4), (2.6) является системой линейных СДУ с белым шумом в правой части.

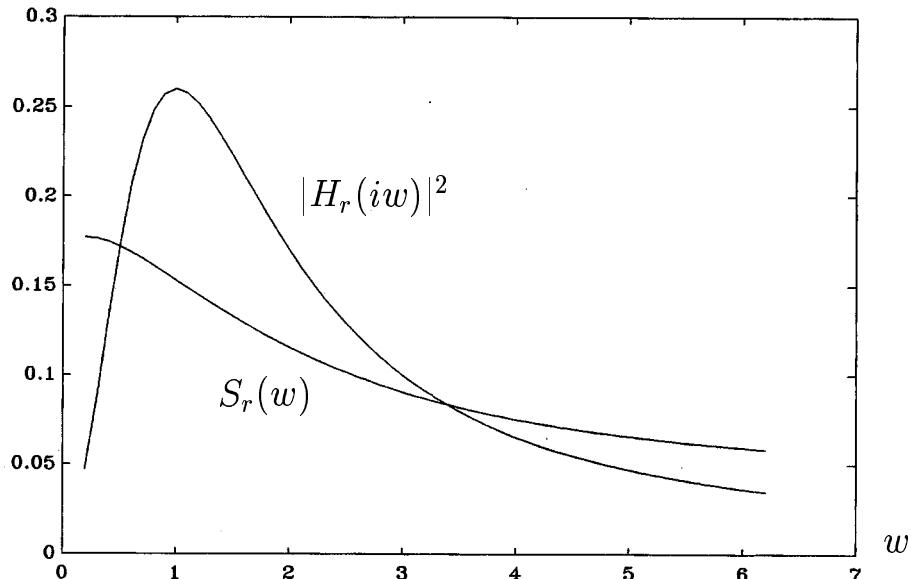


Рис. 2.2. Частотная характеристика и спектральная плотность при ”цветном” возмущении.

В заключение покажем, как система линейных СДУ, заданная в операторной форме, может быть приведена к системе линейных СДУ в пространстве состояний.

Предположим, что полезный сигнал  $s_t \in \Re^1$  в системе формируется из управляемой и случайной компонент:

$$s_t = H_u(D)u_t + H_f(D)f_t^{\cdot}, \quad (2.8)$$

где передаточные операторы  $H_u(D)$  и  $H_f(D)$  имеют дробно-рациональную структуру:

$$H_u(D) = B(D)/A(D), \quad H_f(D) = C(D)/A(D);$$

$B(D), C(D), A(D)$  — скалярные полиномиальные операторы;  $f_t^{\cdot} \in \Re^1$  — белошумный процесс;  $u_t \in \Re^1$  — управление.

Эквивалентным (2.8) является задание системы в виде СДУ

$$A(D)s_t = B(D)u_t + C(D)f_t^{\cdot}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим один из способов приведения дифференциального уравнения (2.9) к системе уравнений в пространстве состояний.

Перепишем уравнение (2.9) в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^n \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t^{\cdot})}{dt^i} = 0, \quad (2.10)$$

где  $a_i, b_i, c_i$  — коэффициенты полиномов  $A(p), B(p), C(p)$  соответственно,  $a_0 = 1$ .

Обозначая  $\mathbf{x}_t^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} s_t - b_0u_t - c_0f_t^{\cdot}$ , получаем из (2.10) равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^n \mathbf{x}_t^{(1)}}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t^{\cdot})}{dt^i} = \\ &= \frac{d^{n-1} \mathbf{x}_t^{(2)}}{dt^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t^{\cdot})}{dt^i}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_t^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{x}_t^{(1)}/dt + a_1\mathbf{x}_t^{(1)} + (a_1b_0 - b_1)u_t + (a_1c_0 - c_1)f_t^{\cdot}$ .

Продолжая начатый процесс, получаем следующую систему линейных СДУ:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = (H - \mathbf{a}\mathbf{e}_1^T) \mathbf{x}_t - (b_0\mathbf{a} - \mathbf{b}) u_t - (c_0\mathbf{a} - \mathbf{c}) f_t^{\cdot}, \quad (2.11)$$

$$s_t = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_t + b_0u_t + c_0f_t^{\cdot}, \quad (2.12)$$

где  $H \in \Re^{n \times n}$ ;  $\mathbf{e}_1 \in \Re^n$  — матрицы вида

$$H = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \Re^n$  — векторы, составленные из коэффициентов полиномов  $A(p)$ ,  $B(p)$ ,  $C(p)$ , начиная с  $a_1$ ,  $b_1$  и  $c_1$  соответственно.

Таким образом, линейная стохастическая модель системы управления вида (2.8) приводится к системе стохастических уравнений (2.11), (2.12), которая является частным случаем системы уравнений вида (2.5).

## 2.2 Диффузионные модели физических и технических систем

### 2.2.1 Модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста

В 20-х годах техника физического эксперимента достигла настолько высокого уровня, что флуктуационный предел чувствительности электроизмерительных приборов оказался легко достижимым. В 1928 г. Х. Найквист дал количественную характеристику тепловых электрических флуктуаций в цепях, установив равномерность спектра их колебаний, т.е. белошумность, а также зависимость их интенсивности от температуры. Аналогичный результат получен и для флуктуаций мельчайших частиц, взвешенных в жидкости или газе, т.е. по существу для характеристик броуновского движения. Опишем эти результаты, придерживаясь их изложения в работах [204], [233].

**Тепловое движение частиц.** Рассмотрим линейное по оси  $x$  движение частицы массой  $m_0$ , взвешенной в жидкости или газе (рис. 2.3). Будем предполагать, что эта частица находится под действием случайных стационарных сил взаимодействия с молекулами окружающей среды  $f_t$ , упругой возвращающей силы  $-cx_t$  и вязкого трения  $-\alpha(dx_t/dt)$ . Тогда уравнение движения частицы запишем в виде

$$m_0 \frac{d^2x_t}{dt^2} + \alpha \frac{dx_t}{dt} + cx_t = f_t, \quad (2.13)$$

где  $f_t$  — стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью

$$S_f(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) \exp(-iw\tau) d\tau,$$

где  $R_f(\tau)$  — корреляционная функция процесса  $f_t$ .

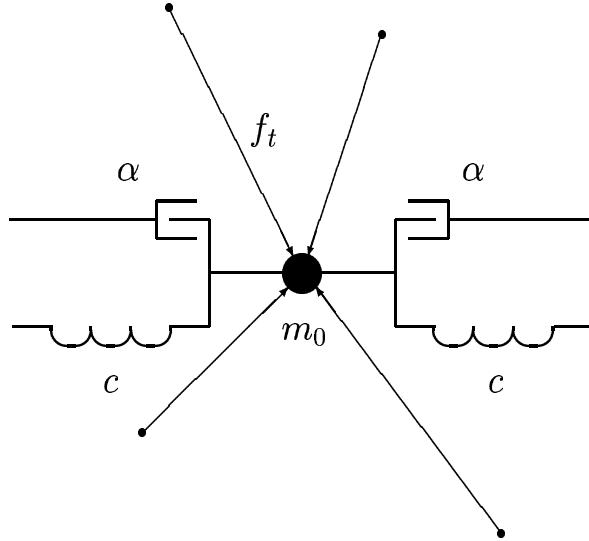


Рис. 2.3. Модель движения частицы.

Нетрудно показать, что спектральная плотность  $S_v(w)$  установившегося процесса  $v_t \stackrel{\text{def}}{=} dx_t/dt$  определяется по формуле

$$S_v(w) = \frac{w^2 S_f(w)}{(w^2 - w_0^2)^2 m_0^2 + \alpha w^2}, \quad w_0^2 = \frac{c}{m_0}.$$

В соответствии с положением молекулярной физики о равнораспределении энергии по степеням свободы, можно привести следующее уравнение средней кинетической энергии частицы:

$$\frac{kT}{2} = M \left\{ \frac{m_0 v_t^2}{2} \right\} = \frac{m_0}{2} M \{ v_t^2 \} = \frac{m_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 S_f(w) dw}{(w^2 - w_0^2)^2 m_0^2 + \alpha w^2}, \quad (2.14)$$

где  $T$  — абсолютная температура среды, град.;  $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$  — постоянная Больцмана.

Выполнив в правой части (2.14) замену переменных  $z = w/w_0$ , преобразуем уравнение (2.14) в уравнение вида

$$kT = \frac{1}{\pi \sqrt{m_0 c}} \int_0^{\infty} \frac{S_f(w_0 z) dz}{(z - z^{-1})^2 + \gamma^2}, \quad \gamma = \alpha / \sqrt{m_0 c}.$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(z - z^{-1})^2 + \gamma^2} = \frac{\pi}{2\gamma},$$

и то, что функция  $L(z) = 1/\left((z - z^{-1})^2 + \gamma^2\right)$  является  $\delta$ -образной в окрестности  $z = 1$ , из (2.14) при  $\gamma \ll 1$  получаем формулу Найквиста [204]

$$S_f(w) = 2kT\alpha. \quad (2.15)$$

Непосредственной подстановкой (2.15) в (2.14) нетрудно проверить, что  $S_f(w) = 2kT\alpha$  является решением уравнения (2.14) и в общем случае.

Таким образом, согласно формуле Найквиста процесс воздействия на рассматриваемую частицу со стороны окружающей среды является белошумным процессом с интенсивностью  $2kT\alpha$ .

**Тепловая флуктуация зарядов.** Рассмотрим электрическую цепь [105], состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкостью  $C$ , резистора с сопротивлением  $R$ , индуктивности  $L$  и изображенную на рис. 2.4. Тогда разность потенциалов (ЭДС) в разрыве цепи можно выразить через мгновенный заряд  $q_t$  конденсатора:

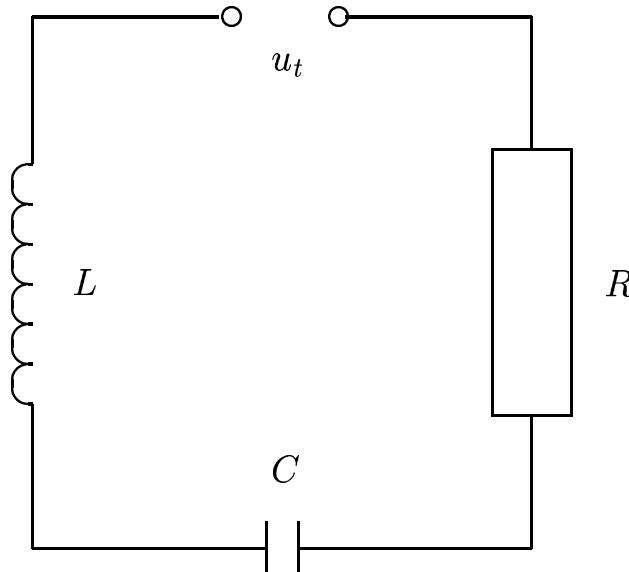


Рис. 2.4. Электрическая цепь.

$$u_t = \frac{q_t}{C} + R \frac{dq_t}{dt} + L \frac{d^2 q_t}{dt^2}. \quad (2.16)$$

Эту электрическую цепь можно сравнить с только что рассмотренной механической системой. Аналогом силового воздействия  $f_t$  здесь является

ЭДС  $u_t$ , массы  $m_0$  — индуктивность  $L$ , жесткости  $c$  — величина, обратная электрической емкости  $1/C$ , аналогом коэффициента вязкого трения  $\alpha$  выступает активное сопротивление  $R$ .

Учитывая это соответствие и одинаковый общий вид уравнений (2.13) и (2.16), можно проделать приведенные выкладки и получить формулу Найквиста для электрических цепей:  $S_u(w) = 2kTR$ . Согласно этой формуле процесс  $u_t$  является процессом белого шума с интенсивностью  $2kTR$  [204].

## 2.2.2 Автоколебательная электрическая система

Рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода, упрощенная принципиальная схема которого приведена на рис. 2.5 [94]. Предполагается, что сеточное смещение и анодное напряжение постоянны.

В автоколебательной системе, изображенной на рис. 2.5, мгновенное значение анодного тока  $I_a$  вследствие дробовых флюктуаций отличается от среднего значения тока  $I_a^*$  на случайную величину  $I_f(t)$  (флюктуационная компонента анодного тока). Если пренебречь реакцией анодной нагрузки ( $D = 0$ ,  $D$  — коэффициент проницаемости) и сеточным током ( $I_c = 0$ ), то можно получить [94] уравнение колебаний рассматриваемой автоколебательной системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = \varepsilon w_0 \left( 1 - \frac{4}{3w_0^2 A_0^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \frac{dx}{dt} + w_0^2 \varepsilon \xi(t). \quad (2.17)$$

В (2.17) обозначено:  $x = w_0 M (I - I_-)$ , где  $M$  — индуктивная связка,  $w_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $I_-$  — постоянная составляющая анодного тока,  $I$  — ток в индуктивной ветви контура;  $\varepsilon = w_0(MS - RC)$  — малый параметр, где  $S$  — крутизна характеристики лампы  $F(U) \stackrel{\text{def}}{=} I_a^*$  (она может иметь, например, вид:  $F(U) = I_- + SU - \gamma U^3/3$ , где  $U = U_c + DU_a$  (в рассматриваемом случае  $D = 0$ ),  $\gamma$  — параметр;  $U_a$  — анодное напряжение;  $U_c$  — сеточное напряжение, которое в пренебрежении сеточным током  $I_c$  записываем как  $U_c = M(dI/dt)$ );  $A_0 = 2\sqrt{\varepsilon/(w_0 M \gamma)}$  — амплитуда колебаний сеточного напряжения;  $\xi(t) = w_0 M I_f(t)/\varepsilon$  — случайная функция, происхождение которой обусловлено дробовыми флюктуациями анодного тока  $I_a = F(U) + I_f(t)$ ;  $\varepsilon \xi(t)$  — флюктуационный член.

Важно отметить, что происхождение флюктуационного члена  $\varepsilon \xi(t)$  может обуславливаться не дробовыми флюктуациями анодного тока, а внеш-

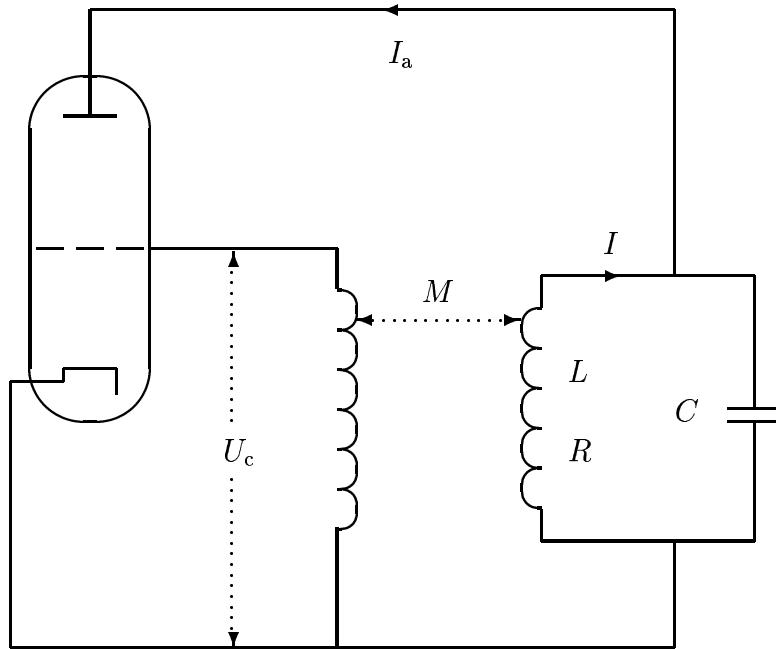


Рис. 2.5. Упрощенная схема лампового генератора.

ними шумами. Если в индуктивную ветвь контура ввести внешнее воздействие  $u_k(t)$ , то случайная функция  $\xi(t)$  приобретает вид [94]:

$$\xi(t) = \frac{w_0 MC}{\varepsilon} \cdot \frac{du_k}{dt}(t).$$

Предположим малость времени корреляции  $\tau_{\text{кор}}$  случайной функции  $\xi(t)$ . Время корреляции  $\tau_{\text{кор}}$  сравнивается со временем релаксации амплитуды, порядок величины которого  $1/(w_0\varepsilon)$  [94]. Потребуем выполнения неравенства  $\tau_{\text{кор}} \ll 1/(w_0\varepsilon)$ . Это условие означает, что действующий на генератор шум является значительно более широкополосным, чем генерируемый сигнал, что отмечается во многих практических случаях. В предложении отсутствия корреляции моментов пролета различных электронов или кратковременности этих корреляций корреляционная функция флюктуационной составляющей анодного тока имеет  $\delta$ -образный вид [94]:

$$R_{I_{\text{кор}}}(t, \tau) = \Gamma^2 e I_a^* \delta(t - \tau), \quad (2.18)$$

где  $\Gamma^2$  — коэффициент депрессии дробового шума;  $e$  — заряд электрона.

Пользуясь соотношением (2.18), находим корреляционную функцию и спектральную плотность случайного процесса  $\xi(t)$  [94]:

$$R_\xi(\tau) = \Gamma^2 e I_a^* \left( \frac{w_0 M}{\varepsilon} \right)^2 \delta(\tau), \quad S_\xi(w) = 2\Gamma^2 e I_a^* \left( \frac{w_0 M}{\varepsilon} \right)^2.$$

Это означает, что случайный процесс  $\xi(t)$  является белым шумом, действующим на рассматриваемую систему, поскольку  $\xi(t)$  имеет  $\delta$ -образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность.

### 2.2.3 Чандлеровские колебания

Хорошо известно, что мгновенная ось вращения Земли постоянно меняет положение относительно малой оси земного эллипсоида. Колебания Северного полюса вокруг условного полюса вращения, принятого Международной Службой Широты, имеют составляющие с периодами 1 год и 14 месяцев. Составляющая таких колебаний с периодом приблизительно 435 дней называется чандлеровским колебанием. Это колебание не является строго периодическим. Его существование было предсказано еще в 1765 г. Л. Эйлером, который рассматривал колебания положения полюса на основе свободной нутации твердого тела. В результате им было установлено, что период указанных блужданий составляет 305 дней, что не соответствует многочисленным экспериментальным данным.

Чандлер в 1891 г. высказал предположение, что движение полюса имеет две составляющие с периодами 1 год и 428 дней соответственно, что отражает современные представления о чандлеровских колебаниях.

В книге [105] приведены рисунки (основанные на экспериментальных данных), изображающие колебания полюса относительно своего среднего положения в разные периоды.

Рассмотрим предложенную А.Н. Колмогоровым в 1960 г. [4] математическую модель чандлеровских колебаний:

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -w \\ w & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + d \begin{bmatrix} \phi_t \\ \psi_t \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

где  $x_t, y_t \in \Re^1$  — случайные процессы, описывающие положение полюса;  $\lambda$  — затухание, а  $w$  — частота чандлеровского колебания;  $\phi_t, \psi_t$  — процессы возбуждения; величины  $d\phi_t$  и  $d\psi_t$  отражают изменение тензора инерции Земли во временном интервале  $[t, t + dt]$ .

Оказывается, что ряд экспериментальных данных [81] свидетельствует в пользу того, что значения  $d\phi_t$  и  $d\psi_t$  в периоды времени, разделенные несколькими годами, практически независимы.

Принято считать, что наилучшая оценка периода чандлеровских колебаний составляет 435 дней. Предположение нормального распределения

этой оценки (А.Н. Колмогоров, 1966) и линейного затухания ковариационной функции, приводит к тому, что время релаксации составляет 15–30 лет. Этот промежуток времени можно считать намного превосходящим промежутки в несколько лет, на которых значения чандлеровских колебаний являются независимыми. Таким образом, случайные процессы  $d\phi_t/dt$  и  $d\psi_t/dt$  в определенном приближении являются широкополосными относительно полосы пропускания системы (2.19) и, следовательно, могут счи-таться гауссовскими белыми шумами.

#### 2.2.4 Модели химической кинетики и регуляции численности конкурирующих видов животных

В 1951 г. Б.П. Белоусовым была экспериментально получена колебательная химическая реакция в гомогенной системе. Результаты его исследований опубликованы в работе [14].

После этого было открыто достаточно много колебательных реакций [27], [87]. Для исследования таких химических реакций создавались различные математические модели. В частности, в 1920 г. А. Лоткой [183] была предложена гипотетическая химическая реакция, которая учитывала колебания концентраций реагентов. Уравнения этой реакции имеют вид

$$\frac{dx}{dt}(t) = k_1x(t) + a_1x(t)y(t), \quad (2.20)$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = k_2y(t) + a_2x(t)y(t), \quad (2.21)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  — концентрации реагентов;  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  — постоянные. Аналогичная модель впоследствии была использована В. Вольтерра [15] для объяснения изменения численностей конкурирующих видов животных. При этом  $x(t)$  и  $y(t)$  — численности двух конкурирующих видов,  $k_1$ ,  $k_2$  — коэффициенты рождаемости, а  $a_1$  и  $a_2$  — коэффициенты смертности.

Предположим, что параметры роста  $k_1$  и  $k_2$  или соответствующие коэффициенты колебательной химической реакции имеют случайную составляющую, т.е. могут быть представлены в виде

$$k_1(t) = k'_1 + \sigma_1\xi^{(1)}(t),$$

$$k_2(t) = k'_2 + \sigma_2\xi^{(2)}(t),$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, k'_1, k'_2$  — постоянные, а  $\xi^{(1)}(t)$  и  $\xi^{(2)}(t)$  — случайные процессы, которые при определенных условиях протекания химических реакций или определенных условиях существования конкурирующих видов животных могут считаться независимыми гауссовскими белыми шумами. Таким образом, стохастический вариант модели (2.20), (2.21) имеет вид

$$\frac{dx}{dt}(t) = (k'_1 + a_1 y(t))x(t) + \sigma_1 x(t)\xi^{(1)}(t), \quad (2.22)$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = (k'_2 + a_2 x(t))y(t) + \sigma_2 y(t)\xi^{(2)}(t). \quad (2.23)$$

Более общая модель, получившая название модели Лотки–Вольтерра [15], имеет вид

$$\frac{dx^{(i)}}{dt}(t) = x^{(i)}(t) \left( \gamma_i + \sum_{j=1}^m \nu_{ij} x^{(j)}(t) \right),$$

а в случае стохастического варианта записывается как

$$\frac{dx^{(i)}}{dt}(t) = x^{(i)}(t) \left( \gamma'_i + \sum_{j=1}^m \nu_{ij} x^{(j)}(t) \right) + \sigma_i x^{(i)} \xi^{(i)}(t), \quad (2.24)$$

где  $x^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  — численность  $i$ -го вида животных или концентрация  $i$ -го вещества.

Оправданность использования стохастических моделей (2.22), (2.23) и (2.24), например, для описания колебательных химических реакций, заключается, в частности, в том, что для химических реакций, протекающих в объемах большой протяженности, существенную роль играет диффузия веществ. Если же для описания такой химической реакции выбраны уравнения (2.20), (2.21), то очевидно, что диффузия в них не учитывается, поскольку в системе двух уравнений первого порядка возможны только периодические колебания.

## 2.2.5 Модели стохастической финансовой математики

В стохастической финансовой математике для описания динамики цен акций и других ценных бумаг существует достаточно много различных математических моделей диффузионного типа, имеющих вид СДУ Ито [102], [108], [138], [189], [190].

Наиболее простыми математическими моделями данного класса являются модели Блэка–Шоулза и Башелье [108] динамики цены акции  $S_t$ :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t df_t, \quad dS_t = adt + bdf_t,$$

где  $f_t$  — стандартный скалярный винеровский процесс;  $\mu, \sigma, a, b$  — вещественные параметры.

В качестве более сложной математической модели приведем модель динамики процентных ставок  $R_t$  [102]:

$$dR_t = a_t dt + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_t^{(i)} df_t^{(i)},$$

где  $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  — независимые винеровские процессы; случайные процессы  $a_t$ ,  $\mathbf{b}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) имеют определенный экономический смысл.

### 2.2.6 Модель солнечной активности

Систематические наблюдения за солнечной активностью стали проводить еще в 1610 г. Результаты этих наблюдений свидетельствуют о том, что солнечная активность, измеряемая числом пятен на Солнце и групп пятен, ведет себя как случайный процесс с систематической осцилляцией и периодом приблизительно 11 лет [237]. Принято считать, что не существует убедительных теоретических оснований для объяснения такой периодичности. В книге [105] приведена зависимость числа пятен на Солнце от времени, которая известна как под названием чисел Вольфера.

Непрерывная математическая модель солнечной активности предложена М. Арато [105]. Эта модель представляет собой систему линейных СДУ, не учитывающую среднее значение солнечной активности:

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \quad (2.25)$$

где  $x_t$  — число пятен на Солнце;  $f_t \in \mathbb{R}^1$  — стандартный винеровский процесс;  $a_1, a_2, c$  — постоянные.

### 2.2.7 Модель лагранжевой динамики частицы жидкости

Пусть  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$  — вектор, описывающий положение частицы жидкости в момент времени  $t$ , а  $\mathbf{v}_t \in \mathbb{R}^3$  — вектор ее скорости. А.М. Обухов в [205] (см. также [148]) предложил простую модель лагранжевой динамики частицы жидкости в виде системы шести линейных СДУ Ито:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{v}_t dt, \quad (2.26)$$

$$d\mathbf{v}_t = -\frac{1}{T}\mathbf{v}_t dt + b d\mathbf{f}_t, \quad (2.27)$$

где  $\mathbf{f}_t \in \Re^3$  — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, 2, 3)$ ;  $b \in \Re^1$  — скалярный диффузионный коэффициент;  $T > 0$  — параметр, намного превосходящий время релаксации процесса  $\mathbf{v}_t$ ; член  $-(1/T)\mathbf{v}_t dt$  учитывает слабые силы трения, действующие на частицу жидкости извне.

### 2.2.8 Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t) dt, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.28)$$

где  $\mathbf{x}(t) \in \Re^n$ ;  $\mathbf{g} : \Re^n \times [t_0, T] \rightarrow \Re^n$ .

Будем предполагать, что функция  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)$  является непрерывно дифференцируемой требуемое число раз, так что уравнение (2.28) с начальным условием имеет единственное решение.

Запишем одношаговую схему численного решения для (2.28) [105]:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta), \quad t_k = t_0 + \Delta k, \quad (2.29)$$

с ошибкой дискретизации  $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_k$  и шагом дискретизации  $\Delta$ . Известно, что на значительных промежутках интегрирования ошибки округления (они зависят от особенностей конкретного компьютера и особенностей выбранного численного метода) накапливаются и приводят к значительным потерям точности вычислений.

Рассмотрим, как ведут себя эти ошибки. Пусть  $\hat{\mathbf{x}}_k$  — численное приближение  $\mathbf{x}_k$ . Тогда вместо (2.29) получаем

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \Delta \mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) + \mathbf{s}_{k+1},$$

где  $\mathbf{s}_k$  — ошибка округления на  $k$ -м шаге. Накопленная ошибка округления  $\mathbf{r}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$  удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \Delta (\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta)) + \mathbf{s}_{k+1},$$

из которого видно, что она является не просто суммой локальных ошибок округления. Если предположить, что приращение  $\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta)$  линейно по  $\mathbf{r}_k$ , то можно прийти [132] к следующему уравнению:

$$\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k = \Delta G(t_k) \mathbf{r}_k + \mu(\Delta) \mathbf{p}(t_{k+1}) + B_s(t_k) \mathbf{s}_{k+1}, \quad \mathbf{r}_0 = 0, \quad (2.30)$$

где  $G, B_s \in \Re^{n \times n}$ ;  $\mu \in \Re^1$ ;  $\mathbf{p} \in \Re^n$ ;  $M\{\mathbf{s}_k\} = 0$ ,  $M\{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T\} = I$ ;  $I$  — единичная матрица.

Уравнение (2.30) можно рассматривать как дискретный аналог СДУ Ито вида

$$d\mathbf{r}_t = G(t)\mathbf{r}_t dt + \mu\mathbf{p}(t)dt + B_f(t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{r}_0 = 0, \quad (2.31)$$

где  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

## 2.3 Математические модели диффузионно-скачкообразного типа

### 2.3.1 Диффузионно-скачкообразные модели стохастической финансовой математики

В стохастической финансовой математике для описания динамики процентных  $R_t$ , форвардных процентных  $F_t(T)$  ставок и цен облигаций  $P_t(T)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T < \infty$ , [102] существует достаточно большое число различных математических моделей диффузионного типа, т.е. моделей, представляющих собой СДУ Ито, или системы СДУ Ито. Основные модели данного типа можно найти, например, в [102], [139], [189], [190]. В некоторых моделях диффузионного типа используется один винеровский процесс  $f_t$ , однако в ряде моделей вместо одномерного винеровского процесса вводится векторный винеровский процесс  $\mathbf{f}_t$  с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ .

Для учета скачкообразных изменений стоимостей  $P_t(T)$  в некоторых работах используются скачкообразные случайные процессы. Так, в [102] рассматривается модель динамики процентных ставок  $R_t$

$$dR_t = a_t dt + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_t^{(i)} d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\Theta} q(t, \mathbf{x}) \mu(dt, d\mathbf{x}), \quad (2.32)$$

где  $\mu(dt, d\mathbf{x})$  — целочисленная случайная мера (например, пуассоновская), заданная в пространстве  $[0, \infty) \times \Theta$ ;  $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$  — независимые винеровские процессы, которые не зависят от значений случайной меры  $\mu(dt, d\mathbf{x})$ ; случайные процессы  $a_t$ ,  $\mathbf{b}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$  и  $q(t, \mathbf{x})$  имеют определенный экономический смысл (см. [102]).

Уравнения, описывающие динамику  $P_t(T)$  и  $F_t(T)$  и соответствующие

уравнению (2.32), имеют вид

$$dP_t(T) = P_t(T) \left( A_t(T)dt + \sum_{i=1}^m B_t^{(i)}(T)d\mathbf{f}_t^{(i)} \right) + P_{t-}(T) \int_{\Theta} q(t, \mathbf{x}, T) \mu(dt, d\mathbf{x}), \quad (2.33)$$

$$dF_t(T) = a_t(T)dt + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_t^{(i)}(T)d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\Theta} \delta(t, \mathbf{x}, T) \mu(dt, d\mathbf{x}), \quad (2.34)$$

где случайные процессы  $A_t(T)$ ,  $\delta(t, \mathbf{x}, T)$ ,  $B_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) также имеют определенный экономический смысл.

В ряде работ используются менее общие математические модели, чем (2.32)–(2.34). Так, в [189], [190] рассматривается СДУ со скачкообразной компонентой, которое описывает динамику цены акции  $S_t$ :

$$dS_t = (\mu - \lambda k)S_t dt + \sigma S_t df_t + S_t d\nu_t, \quad (2.35)$$

где  $f_t$  — скалярный стандартный винеровский процесс;  $\nu_t$  — однородный процесс Пуассона с параметром  $\lambda kt$ , который независим с винеровским процессом  $f_t$ , а  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $k$ ,  $\sigma$  — числовые параметры. Модель (2.35) является обобщением модели Блэка–Шоулза, относящейся к моделям диффузионного типа.

### 2.3.2 Скачкообразная модель лагранжевой динамики частицы жидкости

Вернемся к рассмотрению динамики частицы жидкости. В [148] указывается, что в ряде ситуаций в системе (2.26), (2.27) вместо векторного возмущающего процесса  $\mathbf{f}_t$  может быть использован векторный процесс Пуассона  $\nu_t^T = (\nu_t^{(1)}, \nu_t^{(2)}, \nu_t^{(3)})$ , где  $\nu_t^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — независимые процессы Пуассона с заданным параметром. Таким образом, система (2.26), (2.27) преобразуется в систему СДУ со скачкообразной компонентой:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{v}_t dt, \quad d\mathbf{v}_t = -\frac{1}{T}\mathbf{v}_t dt + b\nu_t,$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (2.26), (2.27).

## 2.4 Математические задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями

### 2.4.1 Фильтрация

Рассмотрим вектор состояния  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ , который является гауссовским и удовлетворяет системе линейных СДУ Ито:

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + B d\mathbf{w}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (2.36)$$

где  $A \in \Re^{n \times n}$ ,  $B \in \Re^{n \times m}$  — числовые матрицы;  $\mathbf{w}_t \in \Re^m$  — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{w}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ ;  $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$  — гауссовская случайная величина. Предположим, что измерение вектора  $\mathbf{x}_t$  невозможно, но допустимо измерять наблюдаемый процесс  $\mathbf{y}_t \in \Re^k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , который удовлетворяет следующей системе линейных СДУ Ито:

$$d\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{y}_0 = O_{n \times 1}, \quad (2.37)$$

где  $H \in \Re^{k \times n}$ ,  $\Sigma \in \Re^{k \times l}$  — числовые матрицы;  $\mathbf{f}_t \in \Re^l$  — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, l)$ , не зависящий от винеровского процесса  $\mathbf{w}_t$ ;  $O_{n \times 1}$  — нулевой столбец длины  $n$ .

Далее будем считать, что  $F_t$ ,  $t \geq 0$ , —  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_s$ ,  $\mathbf{w}_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ , и  $Y_t$ ,  $t \geq 0$ , —  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $\mathbf{y}_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ . Запишем уравнение фильтра Калмана–Бьюси  $\hat{\mathbf{x}}_t = M\{\mathbf{x}_t | Y_t\}$ , где  $\hat{\mathbf{x}}_t$  — наилучшая оценка вектора состояния  $\mathbf{x}_t$ , доставляющая минимум функционалу  $M\{|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t|^2\}$ , причем  $M\{\mathbf{x}_t\} = M\{\hat{\mathbf{x}}_t\}$  и

$$\frac{dR}{dt}(t) = AR(t) + R(t)A^\top + BB^\top - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} HR(t), \quad (2.38)$$

где  $R(0) = M\{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^\top\}$ ;  $R(t) = M\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^\top\}$  — ковариационная матрица ошибки оценивания  $\mathbf{e}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t$ . Известно также, что  $\hat{\mathbf{x}}_t$  — гауссовский процесс, удовлетворяющий системе линейных СДУ

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = \left( A - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H \right) \hat{\mathbf{x}}_t dt + R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} dy_t. \quad (2.39)$$

Отметим, что соотношения (2.38), (2.39) получены с учетом равенства  $M\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^\top \hat{\mathbf{x}}_t\} = 0$ . Используя (2.37) и (2.39), имеем

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = A\hat{\mathbf{x}}_t dt + R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H e_t dt + R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} \Sigma d\mathbf{f}_t. \quad (2.40)$$

Вычитая (2.40) из (2.36), выводим следующее СДУ для ошибки оценивания  $\mathbf{e}_t$ :

$$d\mathbf{e}_t = \left( A - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H \right) \mathbf{e}_t dt - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H d\mathbf{f}_t + B d\mathbf{w}_t. \quad (2.41)$$

Объединяя уравнения (2.40) и (2.41), имеем

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H & O \\ R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix} dt + \\ &+ \begin{bmatrix} B & -R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} \Sigma \\ O & R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} \Sigma \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{f}_t \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где  $O$  — нулевые матрицы соответствующих размеров.

Система уравнений (2.42) представляет собой систему линейных СДУ Ито, которая может быть решена численно с помощью методов, обсуждаемых в предлагаемой книге, если численно решено уравнение Риккати (2.38) и известна матрица  $R(t)$  в дискретные моменты времени. Отметим, что если второе уравнение (2.42) заменить на уравнение состояния, то система (2.42) преобразуется в систему вида

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H & O \\ O & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} dt + \\ &+ \begin{bmatrix} B & -R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} \Sigma \\ B & O \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{f}_t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Нами была рассмотрена задача линейной фильтрации. Следует отметить, что задача нелинейной фильтрации также может быть сведена к задаче численного решения СДУ Ито (см., например, [72]).

#### 2.4.2 Оптимальное стохастическое управление

В ряде задач, например, в задачах об управлении портфелем ценных бумаг, управлении движением динамического объекта и т.д., возникает необходимость выбирать управляющее воздействие на основе какого-либо оптимального критерия. Предположим, что уравнение состояния представляет собой систему СДУ Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)d\mathbf{f}_t,$$

где используются приведенные ранее обозначения, а  $\mathbf{u} \in \Re^k$  — управляющее воздействие, которое выбирается из условия минимизации функционала

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) = \mathbb{M} \left\{ Q(\mathbf{x}_T, T) + \int_s^T F(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t) dt \mid \mathbf{x}_s = \mathbf{x} \right\},$$

где  $Q, F$  — известные функции, а  $T$ , например, — постоянный момент времени.

Известны различные управляющие воздействия, которые могут содержать или не содержать информацию о векторе состояния системы в предшествующие моменты времени. Рассмотрим управление  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)$  марковского типа. Тогда минимальная для него по  $\mathbf{u}$  величина функционала  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)$ , обозначаемая через  $H(\mathbf{x}, s)$ , удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\min_{\mathbf{u} \in \Re^k} \{F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) + L_u H(\mathbf{x}, s)\} = 0$$

с граничным условием  $H(\mathbf{x}, T) = Q(\mathbf{x}, T)$ , где

$$\begin{aligned} L_u H(\mathbf{x}, s) &= \frac{\partial H}{\partial s}(\mathbf{x}, s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, s) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D^{(ij)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s); \quad D = \Sigma \Sigma^\top. \end{aligned}$$

Приведенные ранее условия являются необходимыми условиями, которым удовлетворяет минимум функционала, если он существует.

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу стохастического управления, т.е. задачу нахождения управления  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)$  марковского типа, доставляющего минимум функционалу

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) = \mathbb{M} \left\{ \mathbf{x}_T R \mathbf{x}_T^\top + \int_s^T (\mathbf{x}_t^\top C(t) \mathbf{x}_t + \mathbf{u}^\top P(t) \mathbf{u}) \mid \mathbf{x}_s = \mathbf{x} \right\},$$

где  $C(t) : [s, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$ ;  $P(t) : [s, T] \rightarrow \Re^{k \times k}$ , а  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — решение системы СДУ Ито

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + B(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)) dt + \Sigma(t)d\mathbf{w}_t,$$

где  $A(t) : [s, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$ ;  $B(t) : [s, T] \rightarrow \Re^{n \times k}$ ;  $\Sigma(t) : [s, T] \rightarrow \Re^{n \times m}$ , причем  $\mathbf{w}_t \in \Re^m$  — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{w}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Кроме того, предполагаем, что все зависящие от

$t$  матрицы непрерывны,  $C(t)$  и  $R$  — симметричные неотрицательно определенные матрицы, а матрица  $P(t)$  симметричная и положительно определенная.

Запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для данной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s} + \mathbf{x}^\top C(s)\mathbf{x} + \sum_{j=1}^n (A(s)\mathbf{x})^{(j)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D^{(ij)}(s) \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + \\ + \min_{\mathbf{u} \in \Re^k} \left\{ \mathbf{u}^\top P(t)\mathbf{u} + \sum_{j=1}^n (B(s)\mathbf{u})^{(j)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} \right\} = 0, \end{aligned}$$

где  $D(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma(t)\Sigma^\top(t)$ , а граничное условие имеет вид  $H(T, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top R\mathbf{x}$ . В [148], в частности, показано, что оптимальное управление и минимальное значение функционала  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)$  в рассматриваемом случае приобретают вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, s) = -P^{-1}(s)B(s)\mathbf{x}, \quad (2.43)$$

$$H(\mathbf{x}, s) = \mathbf{x}^\top S(s)\mathbf{x} + \int_s^T \text{tr} \{ \Sigma(t)\Sigma^\top(t)S(t) \} dt, \quad (2.44)$$

где  $\text{tr}$  означает след (сумму диагональных элементов) квадратной матрицы;  $S(t) : [s, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$  — симметричная положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матричная функция, которая удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$\frac{dS}{dt}(t) = -A(t)^\top S(t) - S(t)A(t) + S(t)B(t)P^{-1}(t)B(t)S(t) - C(t), \quad (2.45)$$

$$S(T) = R.$$

Таким образом, если решено (вообще говоря, численно) уравнение Риккати (2.45), то по формулам (2.43) и (2.44) можно найти оптимальное управление и минимальное значение функционала.

Если вместо вектора состояния  $\mathbf{x}_t$  допустимо использовать только процесс наблюдения вида (2.37), где матрицы  $H$  и  $\Sigma$  могут зависеть от времени (задача оптимального стохастического управления по неполным данным [72], см. также главу 15), то с помощью фильтра Калмана–Бьюси можно построить оценку  $\hat{\mathbf{x}}_t$  и использовать ее в оптимальном управлении  $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}_t, t)$  для линейно-квадратичной задачи. В [148] обсуждаются также вопросы, связанные с другими задачами стохастического оптимального управления.

### 2.4.3 Стохастическая устойчивость

Рассмотрим СДУ Ито

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (2.46)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.39). Будем считать, что  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  ( $(\underbrace{0 \dots 0}_n)^T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}$ ) является невозмущенным движением динамической системы, а возмущенное движение описывается уравнением (2.46). В соответствии с этим положим  $\mathbf{a}(\mathbf{0}, t) \equiv 0$ ,  $\Sigma(\mathbf{0}, t) \equiv 0$ ,  $t \geq 0$ . Пусть также выполнены условия AI–AIII теоремы 1.6, которые гарантируют существование и единственность решения уравнения (2.46).

Приведем некоторые определения основных типов устойчивости для стохастических систем.

**Определение 2.1.** Невозмущенное движение системы  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  будем называть устойчивым по вероятности или стохастически устойчивым при  $t \geq t_0$ , если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \geq 0$  выполняется

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} P \left\{ \sup_{t \geq t_0} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| \geq \varepsilon \right\} = 0,$$

где  $\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}$  — такое решение уравнения (2.46), что  $\mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{x}_0$ .

**Определение 2.2.** Невозмущенное движение системы  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  называется асимптотически устойчивым по вероятности или асимптотически стохастически устойчивым, если оно стохастически устойчиво и, кроме того,

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| = 0 \right\} = 1.$$

Определения 2.1 и 2.2 являются обобщением классических определений устойчивости в малом по Ляпунову на случай стохастических систем.

**Определение 2.3.** Невозмущенное движение системы  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  называется асимптотически стохастически устойчивым в целом, если оно стохастически устойчиво и, кроме того, для всех  $|\mathbf{x}_0| < \infty$  выполняется

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| = 0 \right\} = 1.$$

Приведем некоторые определения устойчивости, связанные с моментными характеристиками процесса  $\mathbf{x}_t$ .

**Определение 2.4.** Невозмущенное движение системы  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  называется устойчивым в среднем степени  $p$  ( $p > 0$ ) или  $p$ -устойчивым, если

для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \geq 0$  найдется  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$  такое, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0} \right|^p \right\} < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \text{ и } |\mathbf{x}_0| < \delta.$$

**Определение 2.5.** Невозмущенное движение системы  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  называется асимптотически устойчивым в среднем степени  $p$  ( $p > 0$ ) или асимптотически  $p$ -устойчивым, если оно  $p$ -устойчиво и существует  $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$  такое, что  $\forall |\mathbf{x}_0| < \delta_0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left| \mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0} \right|^p \right\} = 0.$$

**Определение 2.6.** Невозмущенное движение системы  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  называется экспоненциально  $p$ -устойчивым, если существуют постоянные  $\gamma > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0} \right|^p \right\} < \gamma |\mathbf{x}_0|^p \exp(-\alpha(t - t_0)), \quad t \geq t_0.$$

Известно, что одним из методов исследования устойчивости детерминированных систем является метод функций Ляпунова. Достоинство такого метода заключается в том, что он позволяет (если соответствующая функция Ляпунова найдена) установить характер поведения решения дифференциального уравнения, не требуя при этом знания точного решения дифференциального уравнения. Обобщения метода функций Ляпунова на класс СДУ были получены в основном в 60–80-е годы благодаря усилиям, главным образом, Г.Дж. Кушнера [154], [155] и Р.З. Хасьминского [100].

Рассмотрим суть метода стохастических функций Ляпунова. Предположим, что функция  $V(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$  при всех  $(\mathbf{x}, t) \in U \times [0, \infty)$  ( $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{0} \in U$ ,  $(\underbrace{0 \dots 0}_n)^T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}$ ) является непрерывной и положительно определенной. Пусть также функция  $V(\mathbf{x}, t)$  дважды непрерывно дифференцируема по  $\mathbf{x}$  и один раз по  $t$  за исключением, быть может, множества  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Кроме того, предположим, что  $V(\mathbf{0}, t) = 0$ . Далее через  $C_2^0(U)$  будем обозначать множество функций дважды непрерывно дифференцируемых по  $\mathbf{x} \in U$  и один раз по  $t$  за исключением, быть может, множества  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

В силу формулы Ито имеем

$$V(\mathbf{x}_t, t) - V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) = \int_{t_0}^t LV(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t G_0^{(i)} V(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \text{ с.в. 1,} \quad (2.47)$$

где операторы  $L$  и  $G_0^{(i)}$  определены на множествах  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{G}_0$  (см. главу 1) и имеют вид

$$LV(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t),$$

$$G_0^{(i)} V(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \quad i = 1, \dots, m.$$

Нетрудно установить, что роль первой производной  $V(\mathbf{x}, t)$  по  $\mathbf{x}$  в соответствии с уравнением движения в стохастическом случае играет функция  $LV(\mathbf{x}_s, s)$ . Будем считать, что при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $t \geq 0$  выполняется неравенство

$$LV(\mathbf{x}, t) \leq 0. \quad (2.48)$$

Функцию  $V(\mathbf{x}, t)$ , обладающую перечисленными свойствами, будем называть стохастической функцией Ляпунова. К стохастической функции Ляпунова могут предъявляться также некоторые дополнительные требования. Далее, используя (2.47), (2.48) и свойство интеграла Ито, получаем

$$\mathbb{M}\{V(\mathbf{x}_t, t)|\mathcal{F}_{t_0}\} \leq V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) \text{ с в. 1.}$$

Таким образом,  $V(\mathbf{x}_t, t)$  — супермартингал. Если  $y_s$ ,  $s \geq 0$  — мартингал и  $\mathbb{M}\{|y_s|^p\} < \infty$ , то справедливо хорошо известное неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq t} |y(s, \omega)| \geq \alpha\right\} \leq \frac{1}{\alpha^p} \mathbb{M}\{|y_t|^p\} \quad \forall \alpha > 0,$$

и, следовательно,

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(\mathbf{x}_t, t) \geq \delta\right\} \leq \frac{1}{\delta} V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) \quad \forall \delta > 0, \quad \forall T > t_0.$$

Тогда, учитывая непрерывность  $V(\mathbf{x}, t)$  и соотношение  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  получаем

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \mathbb{P}\left\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(\mathbf{x}_t, t) \geq \delta\right\} = 0. \quad (2.49)$$

Далее, предполагая, что при некоторых постоянных  $p$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  ( $p > 0$ ), выполнено  $k_1|\mathbf{x}|^p \leq V(\mathbf{x}, t) \leq k_2|\mathbf{x}|^p$ , согласно (2.49) получаем, что невозмущенное движение системы  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  стохастически устойчиво.

Приведем некоторые хорошо известные факты (см., например, [100], [154]), касающиеся разных видов стохастической устойчивости.

**Теорема 2.1.** Пусть в области  $U \times [0, \infty)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  включающей в себя множество  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ , существует непрерывная, положительно определенная функция  $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(U)$  и пусть  $\limsup_{\mathbf{x} \rightarrow 0} V(\mathbf{x}, t) = 0$ , а  $LV(\mathbf{x}, t) < 0$  в

этой области. Тогда невозмущенное движение  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  асимптотически стохастически устойчиво.

**Теорема 2.2.** Пусть для всех  $\mathbf{x} \in \Re^n$  существует положительно определенная функция  $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(\Re^n)$ , для которой выполняются следующие условия:  $\limsup_{\mathbf{x} \rightarrow 0} V(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $\inf_{t > 0} V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  и  $LV(\mathbf{x}, t) < 0$ .

Тогда невозмущенное движение  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  асимптотически стохастически устойчиво в целом.

**Теорема 2.3.** Для экспоненциальной  $p$ -устойчивости невозмущенного движения  $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$  при  $t > 0$  достаточно, чтобы при всех  $\mathbf{x} \in \Re^n$  существовала функция  $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(\Re^n)$ , удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных  $k_1, k_2, k_3$  двум неравенствам  $k_1|\mathbf{x}|^p \leq V(\mathbf{x}, t) \leq k_2|\mathbf{x}|^p$ ,  $LV(\mathbf{x}, t) \leq -k_3|\mathbf{x}|^p$ .

Другой метод, используемый в детерминистской теории устойчивости, заключается в линеаризации дифференциального уравнения в окрестности невозмущенного движения и анализе устойчивости нулевого решения линеаризованного дифференциального уравнения. Известно, что в ряде случаев устойчивость нулевого решения линеаризованной системы влечет за собой устойчивость невозмущенного решения соответствующей нелинейной системы.

Особую роль при анализе устойчивости с помощью этого метода играют ляпуновские экспоненты, или ляпуновские показатели. Оказывается, что такой метод линеаризации может быть обобщен на случай стохастических систем. Ляпуновским экспонентам для стохастических систем посвящен целый ряд работ. В частности, примеры точного вычисления ляпуновских экспонент для стохастических систем можно найти в [40], а численные методы их вычисления — в [148]. Проанализируем указанный метод, опираясь, главным образом, на работу [148].

Рассмотрим СДУ Стратоновича

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \sum_{k=1}^m \mathbf{b}_k(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (2.50)$$

где  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \mathbf{b}_k(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(k)} (k = 1, \dots, m)$ . Предположим, что  $\hat{\mathbf{x}}_t$  — стохастически стационарное решение уравнения (2.50). Линеаризуем уравнение (2.50) в окрестности  $\hat{\mathbf{x}}_t$ :

$$d\mathbf{z}_t = A_t \mathbf{z}_t dt + \sum_{k=1}^m B_t^k \mathbf{z}_t d^*\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (2.51)$$

где  $\mathbf{z}_t = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t \in \Re^n$ ;  $A_t, B_t^1, \dots, B_t^m : [0, T] \times \Omega \rightarrow \Re^{n \times n}$  — случайные матрицы, покомпонентно определяемые следующими соотношениями:

$$(A_t)^{(ij)} = \frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\hat{\mathbf{x}}_t, t), \quad (B_t^k)^{(ij)} = \frac{\partial \mathbf{b}_k^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\hat{\mathbf{x}}_t, t),$$

где  $i, j = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, m$ . Можно показать [148], что с вероятностью 1 существуют  $n$  неслучайных ляпуновских экспонент  $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$  и разбиение  $\Re^n$  на случайные множества  $\Lambda_n(\omega), \dots, \Lambda_1(\omega)$  такие, что для стартовавших из этих множеств решений уравнения (2.51) пределы

$$\lambda(\mathbf{z}_0, t_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln |\mathbf{z}_t^{\mathbf{z}_0, t_0}|,$$

где  $\mathbf{z}_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_0$ , равны  $\lambda_n, \dots, \lambda_1$  соответственно.

Далее можно показать, что стохастическая асимптотическая устойчивость нулевого решения  $\mathbf{z}_t \equiv \mathbf{0}$  уравнения (2.51) наступает тогда и только тогда, когда  $\lambda_1 < 0$ .

В [148] предложен метод вычисления  $\lambda_1$  и получена соответствующая формула в случае  $\hat{\mathbf{x}}_t \equiv \mathbf{0}$  и автономной системы, получающейся из (2.50) заменой  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{b}_k(\mathbf{x}, t)$ ;  $k = 1, \dots, m$  на  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{b}_k(\mathbf{x})$ ;  $k = 1, \dots, m$  соответственно. В этой работе также предложен численный метод для вычисления  $\lambda_1$ .

Отметим, что стохастические системы, для которых  $\lambda_1$  много больше  $\lambda_n$ , называются *жесткими*.

В заключение покажем, как можно решить вопрос о среднеквадратической устойчивости систем линейных СДУ Ито

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \sum_{k=1}^m B_k(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (2.52)$$

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{b}(t)) dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t, \quad (2.53)$$

где  $A, B_k : [0, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$ ;  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ ,  $\mathbf{b} : [0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $\Sigma : [0, T] \rightarrow \Re^{n \times m}$ ;  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, m$ ).

В главе 11 будут приведены следующие уравнения для матрицы  $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^\top\}$ , где  $\mathbf{x}_t$  — решение уравнения (2.52) или (2.53):

$$P'(t) = A(t)P(t) + P(t)A^\top(t) + \sum_{k=1}^m B_k(t)P(t)B_k^\top(t), \quad (2.54)$$

$$P'(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + \Sigma(t)\Sigma^T(t) + \mathbf{b}(t)\mathbf{m}_x^T(t) + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{b}^T(t), \quad (2.55)$$

где  $M\{\mathbf{x}_t\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_x(t)$  и

$$\mathbf{m}'_x(t) = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{b}(t),$$

а штрих ' означает производную по  $t$ .

Можно показать, что уравнения (2.54) и (2.55) могут быть приведены соответственно к уравнениям (близкий по структуре алгоритм приведения описан в главе 11):

$$\mathbf{p}'(t) = C(t)\mathbf{p}(t), \quad (2.56)$$

$$\mathbf{p}'(t) = D(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{d}(t), \quad (2.57)$$

где  $\mathbf{p}(t) \in \Re^{(n(n+1))/2}$  — вектор, состоящий из элементов симметричной матрицы  $P(t)$ , которые располагаются над (под) главной диагональю, включая главную диагональ;  $C(t), D(t)$  — квадратные матрицы;  $\mathbf{d}(t) \in \Re^{(n(n+1))/2}$  — столбец, состоящий из элементов симметричной матрицы

$$\Sigma(t)\Sigma^T(t) + \mathbf{b}(t)\mathbf{m}_x^T(t) + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{b}^T(t),$$

которые располагаются над (под) главной диагональю, включая главную диагональ; штрих ' означает производную по  $t$ . О поведении  $P(t)$ , и, следовательно, о среднеквадратической устойчивости нулевых решений уравнений (2.52), (2.53), можно судить теперь по характеру поведения решений уравнений (2.56) и (2.57), которые могут быть легко найдены.

#### 2.4.4 Оценивание параметров

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и скалярное СДУ Ито вида

$$dx_t = \mu a(x_t)dt + df_t, \quad (2.58)$$

где  $x_t, t \in [0, T]$  — решение уравнения (2.58),  $a(x) : \Re^1 \rightarrow \Re^1$ ,  $f_t \in \Re^1$  —  $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  стандартный винеровский процесс относительно вероятностной меры  $\mathbb{P}$ ,  $\mu \in \Re^1$  — оцениваемый вещественный параметр.

Известно, что если процесс  $x_t$  является асимптотически устойчивым эргодическим стационарным решением уравнения (2.58), то, наблюдая за отдельной выборочной траекторией процесса  $x_t$  и строя определенным образом на ее основе оценку  $\hat{\mu}(T)$  параметра  $\mu$ , можно получить, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\mu}(T) = \mu$$

с вероятностью 1.

Рассмотрим этот подход подробнее (см. также [72]). Оценка максимального правдоподобия  $\hat{\mu}(T)$  отыскивается из условия максимума по  $\mu$  функции правдоподобия  $L(\mu, T)$ :

$$L(\mu, T) = \frac{d\mathbb{P}_x}{d\mathbb{P}} = \exp\left(\frac{1}{2}\mu^2 \int_0^T a^2(x_t)dt - \mu \int_0^T a(x_t)dx_t\right),$$

где  $d\mathbb{P}_x/d\mathbb{P}$  — производная Радона–Никодима мер  $\mathbb{P}_x$  и  $\mathbb{P}$ , которые соответствуют процессам  $x_t$  и  $f_t$ . Решая относительно  $\mu$  уравнение

$$\frac{dL}{d\mu}(\mu, T) = 0,$$

находим, что оценка максимального правдоподобия  $\hat{\mu}(T)$  имеет вид

$$\hat{\mu}(T) = \int_0^T a(x_t)dx_t \cdot \left(\int_0^T a^2(x_t)dt\right)^{-1} = \mu + \int_0^T a(x_t)df_t \cdot \left(\int_0^T a^2(x_t)dt\right)^{-1}.$$

Если для всех  $T$ :

$$\mathbb{M}\left\{\int_0^T a^2(x_t)dt\right\} < \infty$$

и если СДУ (2.58) имеет стационарное решение с плотностью распределения  $p = p(x)$ , которая является решением уравнения Фоккера–Планка, то [72] можно получить:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_t)df_t = 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a^2(x_t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x)p(x)dx \text{ с в. 1.}$$

Поэтому

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\mu}(T) = \mu \text{ с в. 1.}$$

Кроме того, согласно модификации центральной предельной теоремы

$$\sqrt{T}(\hat{\mu}(T) - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ при } T \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} a^2(x)p(x)dx\right)^{-1}.$$

Используя это, можно определять доверительный интервал для  $\mu$  и оценивать величину  $T$  для этого интервала.

## 2.5 Вероятностные представления решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа

Рассмотрим важное применение СДУ к решению задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа.

Значительное число работ (см., например, [89], [90]) посвящено конечно-разностным численным методам решения данных задач, которые не используют сведений из теории вероятностей и достаточно эффективно применяются на практике в случае пространственной переменной  $\mathbf{x}$  размерности  $n$  при  $n \leq 3$ .

Если же  $n > 3$ , то детерминированный подход становится малоэффективным из-за резко возрастающих вычислительных затрат [77], [194]. В отличие от детерминированного подхода вероятностный подход, рассматриваемый далее, может быть эффективно использован при  $n > 3$  вследствие его малой чувствительности к размерности  $n$  пространственной переменной  $\mathbf{x}$  [77], [194].

Существенной особенностью вероятностного подхода при решении задачи Коши является то, что вероятностное представление решения задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа не предполагает невырожденность матрицы диффузии  $B(\mathbf{x}, t)$  (см., например, теоремы 2.5, 2.6).

Среди первых работ, посвященных вероятностным представлениям решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных второго порядка отметим [144].

### 2.5.1 Вероятностные представления решения задачи Дирихле

Пусть  $(\mathbf{x}_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$  — канонический диффузионный процесс со значениями в  $\Re^n$  и производящим дифференциальным оператором  $\mathcal{L}$  (см. разд. 1.1.4.). Пусть также  $D$  — ограниченное открытое множество в  $\Re^n$ , а  $\partial D$  — его граница.

Через  $\tilde{\tau}_D(\omega)$  обозначим момент первого выхода из  $D$  после  $+0$ , т. е.

$$\tilde{\tau}_D(\omega) = \inf\{t : 0 < t < \eta(\omega), \mathbf{x}(t, \omega) \notin D\}.$$

Точка  $\mathbf{x}_0 \in \partial D$  называется регулярной, если  $P_{\mathbf{x}_0}\{\tilde{\tau}_D > 0\} = 0$ , а граница  $\partial D$  множества  $D$  — регулярной, если каждая ее точка регулярна.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (2.59)$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial D, \quad (2.60)$$

где  $v(\mathbf{x})$ ,  $\varphi(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  — заданные функции, а  $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  — решение задачи (2.59), (2.60).

Следующая теорема [25] содержит вероятностное представление решения задачи (2.59), (2.60).

**Теорема 2.4.** [25]. Пусть  $(\mathbf{x}_t, \eta, G_t, \mathbb{P}_{\mathbf{x}})$  — канонический диффузионный процесс со значениями в  $\mathbb{R}^n$  и производящим дифференциальным оператором  $\mathcal{L}$ ,  $D$  — ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  с регулярной границей  $\partial D$ ,  $\tau_D$  — момент первого выхода из  $D$ . Пусть также заданы непрерывная функция  $\varphi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  на границе  $\partial D$  и функции  $v(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , удовлетворяющие на  $D$  условию Гельдера, причем  $v(\mathbf{x}) \geq 0$ . Тогда функция

$$u(\mathbf{x}) = \mathbb{M}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^{\tau_D} g(\mathbf{x}_t) \exp \left( - \int_0^t v(\mathbf{x}_\theta) d\theta \right) dt + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_D}) \exp \left( - \int_0^{\tau_D} v(\mathbf{x}_\theta) d\theta \right) \right\},$$

$\mathbf{x} \in D$ , дважды непрерывно дифференцируема на  $D$  и является единственным решением задачи (2.59), (2.60); здесь  $\mathbb{M}_{\mathbf{x}}\{\cdot\}$  — условное математическое ожидание при условии, что  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ .

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.6 для функций  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда [25], [34] случайный процесс, являющийся решением СДУ Ито

$$d\mathbf{x}_s = \mathbf{a}(\mathbf{x}_s)ds + \Sigma(\mathbf{x}_s)d\mathbf{f}_s, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}, \quad (2.61)$$

представляет собой диффузионный процесс с вектором сноса  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  и матрицей диффузии  $B(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})\Sigma^T(\mathbf{x})$ ; здесь  $\mathbf{f}_s$  —  $n$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Таким образом, в условиях теорем 1.6, 2.4 решение задачи (2.59), (2.60) может быть представлено в виде

$$u(\mathbf{x}) = \mathbb{M}_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{z}_{\tau_D} + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_D}) \mathbf{y}_{\tau_D} \}, \quad \mathbf{z}_t = \int_0^t g(\mathbf{x}_s) \mathbf{y}_s ds,$$

$$\mathbf{y}_t = \exp \left( - \int_0^t v(\mathbf{x}_\theta) d\theta \right),$$

где процесс  $\mathbf{x}_s$  — решение уравнения (2.61).

Используя формулу Ито, получаем

$$d\mathbf{y}_t = -v(\mathbf{x}_t)\mathbf{y}_t dt, \quad \mathbf{y}_0 = 1.$$

В результате решение задачи (2.59), (2.60) сводится к численному интегрированию следующей системы СДУ Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y}_s \\ \mathbf{z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s) \\ -v(\mathbf{x}_s)\mathbf{y}_s \\ g(\mathbf{x}_s)\mathbf{y}_s \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s) \\ O_{1 \times n} \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $O_{1 \times n}$  — нулевая строка длины  $n$ .

В [77] Г.Н. Мильштейном рассмотрена более общая, чем (2.59), (2.60), задача Дирихле и построен алгоритм ее численного решения, основанный на вероятностном представлении решения задачи и слабых численных методах решения СДУ Ито (см. главу 10).

Рассмотрим задачу Дирихле [77]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + c(\mathbf{x}, t)u + g(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.62)$$

$$u(\mathbf{x}, t)|_{\partial Q} = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in Q, \quad (2.63)$$

где  $Q = G \times [t_0, T]$ ;  $G$  — ограниченная область в  $\Re^n$ ,  $0 \leq t_0 < T \leq \infty$ ,  $\partial Q$  — граница  $Q$ .

Предположим, что матричная функция  $B(\mathbf{x}, t)$  симметрична и положительно определена. Кроме того, предположим, что заданные функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [t_0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $B(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [t_0, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$ ,  $c(\mathbf{x}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ,  $g(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [t_0, T] \rightarrow \Re^1$  и граница  $\partial Q$  удовлетворяют условиям, обеспечивающим гладкость решения  $u(\mathbf{x}, t)$  вплоть до границы [124].

Известно (см., например, [77]), что решение задачи (2.62), (2.63) допускает следующее вероятностное представление:

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{z}_{\tau_Q}^{t, \mathbf{x}, 1, 0} + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_Q}^{t, \mathbf{x}}, \tau_Q) \mathbf{y}_{\tau_Q}^{t, \mathbf{x}, 1} \right\}, \quad (2.64)$$

где  $(\mathbf{x}_s^{t, \mathbf{x}} \mathbf{y}_s^{t, \mathbf{x}, 1} \mathbf{z}_s^{t, \mathbf{x}, 1, 0})^T$  — решение системы СДУ Ито

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y}_s \\ \mathbf{z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) \\ c(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \\ g(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s, s) \\ O_{1 \times n} \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

где  $s \geq t$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in Q$ ;  $\tau_Q$  — момент первого выхода траектории  $(\mathbf{x}_s^{t, \mathbf{x}}, s)$  на границу  $\partial Q$ ;  $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$ ;  $\mathbf{f}_s$  —  $n$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами;  $O_{1 \times n}$  — нулевая строка длины  $n$ .

В [77] получены алгоритмы численного интегрирования задачи (2.62), (2.63), основанные на представлении (2.64) и слабых численных методах решения системы СДУ Ито (2.65). Построенные в [77] алгоритмы имеют первый порядок точности по шагу по времени.

## 2.5.2 Вероятностные представления решения задачи Коши

Приведем некоторые вероятностные представления решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа.

Рассмотрим задачу Коши

$$\tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x}, t) = 0, \lim_{t \uparrow T} u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (2.66)$$

где  $0 \leq t < T$ ;  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ;  $\tilde{\mathcal{L}}$  — дифференциальный оператор параболического типа вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x}, t) = & \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\left( \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} \geq 0 \text{ при всех } \mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(n)} \in \Re^1 \right),$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $B(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$ ,  $\varphi(\mathbf{x}) : \Re^n \rightarrow \Re^1$  — заданные функции;  $u(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  — решение задачи (2.66).

В следующей теореме устанавливается вероятностное представление решения задачи (2.66).

**Теорема 2.5.** [34]. *Пусть функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$  удовлетворяют условиям теоремы 1.6, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы по  $\mathbf{x}$ . Пусть также существуют постоянные  $p, K > 0$  такие, что*

$$\sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) \right| + \sum_{i,j,k=1}^n \left( \left| \frac{\partial^2 \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) \right| + \left| \frac{\partial \Sigma^{(ij)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) \right| \right) +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l=1}^n \left| \frac{\partial^2 \Sigma^{(ij)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)} \partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t) \right| \leq K(1 + |\mathbf{x}|^p).$$

Кроме того, предположим, что  $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$  и является неотрицательно определенной. Тогда задача Коши (2.66), где  $\tilde{\mathcal{L}}$  — дифференциальный оператор параболического типа вида (2.67), имеет единственное решение для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции  $\varphi(\mathbf{x})$ , удовлетворяющей условию

$$\begin{aligned} |\varphi(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}) \right| + \sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}) \right| \leq \\ \leq K(1 + |\mathbf{x}|^p), \end{aligned}$$

где  $K, p > 0$ .

При этом решение  $u(\mathbf{x}, t)$  задачи (2.66) может быть представлено в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = M \{ \varphi(\mathbf{x}_T^{t,\mathbf{x}}) \}, \quad 0 \leq t < T, \quad \mathbf{x} \in \Re^n,$$

где  $\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}, s \in [t, T]$  — решение следующего СДУ Ито:

$$\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_t^s \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{t,\mathbf{x}}, \tau) d\tau + \int_t^s \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{t,\mathbf{x}}, \tau) d\mathbf{f}_\tau,$$

$\mathbf{x} \in \Re^n$  — неслучайный вектор;  $s \in [t, T]$ ,  $\mathbf{f}_\tau$  —  $n$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Пусть  $C^l(\Re^n, \Re^1)$  — пространство  $l$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $g(\mathbf{x}) : \Re^n \rightarrow \Re^1$ , которые вместе со своими частными производными до порядка  $l$  включительно возрастают полиномиально (функция  $h(\mathbf{x}) : \Re^n \rightarrow \Re^1$  возрастает полиномиально, если существуют постоянные  $C_h > 0$  и  $q_h \in \mathbb{N}$ , зависящие от  $h$  и такие, что

$$|h(\mathbf{x})| \leq C_h(1 + |\mathbf{x}|^{2q_h})$$

для всех  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ).

Приведем формулировку следующей, доказанной в [191], теоремы о вероятностном представлении решения задачи Коши.

**Теорема 2.6.** [191]. Пусть для некоторого  $\gamma \in \mathbb{N}$  выполнены следующие условия:

1. Функция  $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\Re^n, \Re^1)$ .

2. Функции  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}), \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ , причем частные производные этих функций до порядка  $l$  включительно ограничены.

Тогда функция  $u(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  вида

$$u(\mathbf{x}, t) = M\{\varphi(\xi_T^{t, \mathbf{x}})\}$$

является решением следующей задачи:

$$\tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$$

непрерывна, причем  $u(\mathbf{x}, t) \in C^{2(\gamma+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$  по переменной  $\mathbf{x}$  при каждом  $t \in [0, T]$ ; диффузионный процесс  $\xi_s^{t, \mathbf{x}}$ ,  $s \in [t, T]$  является решением СДУ Ито

$$\xi_s^{t, \mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_t^s \mathbf{a}(\xi_\tau^{t, \mathbf{x}}) d\tau + \int_t^s \Sigma(\xi_\tau^{t, \mathbf{x}}) d\mathbf{f}_\tau;$$

оператор  $\tilde{\mathcal{L}}$  имеет вид (2.67); матрица  $B(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})\Sigma^\top(\mathbf{x})$  неотрицательно определена;  $\mathbf{f}_\tau$  —  $m$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

В работе [194] приведены вероятностные представления для более общих, чем (2.66), задач, а также построены алгоритмы численного интегрирования этих задач, основанные на слабых численных схемах решения систем СДУ Ито.

Не приводя строгих формулировок, отметим некоторые вероятностные представления более общих задач, чем (2.66).

Рассмотрим решение задачи Коши для линейного параболического уравнения:

$$\tilde{\mathcal{L}}u + c(\mathbf{x}, t)u + g(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t_0 \leq t < T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.68)$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (2.69)$$

где  $c(\mathbf{x}, t), g(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , а остальные обозначения, входящие в (2.68), (2.69), такие же, как в задаче (2.66). Предположим, что выполнены условия существования и единственности решения задачи (2.68), (2.69) [71], [98].

Решение задачи (2.68), (2.69) допускает следующее вероятностное представление [194]:

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbb{M} \left\{ \mathbf{z}_T^{t, \mathbf{x}, 1, 0} + \varphi(\mathbf{x}_T^{t, \mathbf{x}}) \mathbf{y}_T^{t, \mathbf{x}, 1} \right\}, \quad t \leq T, \quad \mathbf{x} \in \Re^n,$$

где  $(\mathbf{x}_s^{t, \mathbf{x}} \mathbf{y}_s^{t, \mathbf{x}, 1} \mathbf{z}_s^{t, \mathbf{x}, 1, 0})^\top$ ,  $s \in [t, T]$  — решение системы СДУ Ито

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y}_s \\ \mathbf{z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) - \Sigma(\mathbf{x}_s, s)h(\mathbf{x}_s, s) \\ c(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \\ g(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s, s) \\ h^\top(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.70)$$

$\mathbf{f}_s$  —  $n$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами;  $h(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [t_0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$ ;  $O_{1 \times n}$  — нулевая строка длины  $n$ . При  $h(\mathbf{x}, t) \equiv 0$  из (2.70) получаем классическое вероятностное представление решения задачи (2.68), (2.69) [25].

Рассмотрим решение задачи Коши для полулинейного параболического уравнения [194]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + \\ + g(\mathbf{x}, t, u) = 0, \quad t_0 \leq t < T, \quad \mathbf{x} \in \Re^n, \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (2.72)$$

где сохранен смысл введенных ранее обозначений, причем предполагаем, что выполнены условия существования и единственности решения задачи (2.71), (2.72) [71], [98].

Известно [194], что решение задачи (2.71), (2.72) допускает следующее вероятностное представление:

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbb{M} \left\{ \varphi(\mathbf{x}_T^{t, \mathbf{x}}) + \mathbf{z}_T^{t, \mathbf{x}, 0} \right\},$$

где  $(\mathbf{x}_s^{t, \mathbf{x}} \mathbf{z}_s^{t, \mathbf{x}, 0})^\top$ ,  $s \in [t, T]$  — решение системы СДУ Ито

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.73)$$

$\mathbf{f}_s$  —  $n$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

В [194] построены алгоритмы численного решения задач (2.68), (2.69) и (2.71), (2.72), основанные на слабых численных схемах различного порядка точности решения систем СДУ Ито (2.70) и (2.73) соответственно.

## 2.6 О неэффективности применения эвристических обобщений численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям

Поясним на примере численных методов, основанных на формуле Тейлора, почему использование эвристических обобщений численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к СДУ является неэффективным.

Отметим, что достаточно большой объем численных методов для ОДУ так или иначе использует в своей структуре формулу Тейлора. К этим методам можно отнести методы, основывающиеся непосредственно на усеченной (без остаточного члена) формуле Тейлора на дискретной временной сетке (явные одношаговые методы), конечно-разностные методы (типа Рунге–Кутта), многошаговые методы, в том числе неявные численные методы, построенные с использованием формул Тейлора.

Рассмотрим скалярное СДУ вида

$$\frac{dx_t}{dt} = a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t^i, \quad (2.74)$$

где  $x_t \in \mathbb{R}^1$  — решение уравнения (2.74);  $a, b : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;  $f_t^i$  — гауссовский белошумный случайный процесс.

Запишем уравнение (2.74) в форме СДУ Ито

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)df_t^i, \quad (2.75)$$

где  $f_t \in \mathbb{R}^1$  — стандартный винеровский процесс.

Попробуем формально применить идеологию численных методов для ОДУ к решению СДУ (2.74) и (2.75).

Если бы к случайному процессу  $x_t$ , являющемуся решением уравнения (2.74), можно было бы применить формулу Тейлора (это заведомо неверно), то при  $s > t$  мы получили бы следующее:

$$x_s = x_t + \frac{dx_t}{dt}(s - t) + \frac{d^2x_t}{dt^2} \frac{(s - t)^2}{2} + \dots \quad (2.76)$$

Используя (2.74) и (2.76), получаем

$$x_s = x_t + a(x_t, t)(s - t) + b(x_t, t)(s - t)f_t^{\cdot} + \frac{d}{dt}(a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t^{\cdot}) \frac{(s - t)^2}{2} + \dots \quad (2.77)$$

Нетрудно видеть, что правая часть (2.77) не определена. Это связано с тем, что белый шум  $f_t^{\cdot}$  не является дифференцируемым в каком-либо вероятностном смысле случайным процессом, а в правую часть (2.77) входит величина

$$\frac{d}{dt}(a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t^{\cdot}).$$

Кроме того, не ясно в каком смысле следует понимать само равенство (2.77).

Применим эту же идеологию к решению уравнения (2.75). При этом для случайных процессов  $a(x_t, t)$ ,  $b(x_t, t)$  будем формально использовать такие же правила дифференцирования (они заведомо неверны), как и для неслучайных функций, т. е.

$$da(x_t, t) = \frac{\partial a}{\partial x}(x_t, t)dx_t + \frac{\partial a}{\partial t}(x_t, t)dt, \quad db(x_t, t) = \frac{\partial b}{\partial x}(x_t, t)dx_t + \frac{\partial b}{\partial t}(x_t, t)dt. \quad (2.78)$$

Запишем (2.75) и (2.78) (с учетом (2.75)) в интегральной форме:

$$x_s = x_t + \int_t^s a(x_{\tau}, \tau)d\tau + \int_t^s b(x_{\tau}, \tau)df_{\tau}, \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} a(x_s, s) &= a(x_t, t) + \int_t^s \left( a(x_{\tau}, \tau) \frac{\partial a}{\partial x}(x_{\tau}, \tau) + \frac{\partial a}{\partial \tau}(x_{\tau}, \tau) \right) d\tau + \\ &\quad + \int_t^s b(x_{\tau}, \tau) \frac{\partial a}{\partial x}(x_{\tau}, \tau) df_{\tau}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} b(x_s, s) &= b(x_t, t) + \int_t^s \left( a(x_{\tau}, \tau) \frac{\partial b}{\partial x}(x_{\tau}, \tau) + \frac{\partial b}{\partial \tau}(x_{\tau}, \tau) \right) d\tau + \\ &\quad + \int_t^s b(x_{\tau}, \tau) \frac{\partial b}{\partial x}(x_{\tau}, \tau) df_{\tau}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

где  $s > t$ .

Применим к интегrandам в правых частях (2.80), (2.81) формулу, аналогичную (2.80), и подставим полученные равенства в (2.80), (2.81). Под-

ставляя преобразованные равенства (2.80), (2.81) в (2.79), приходим к разложению

$$\begin{aligned}
 x_s = & x_t + a(x_t, t)(s - t) + b(x_t, t) \int_t^s df_\tau + b(x_t, t) \frac{\partial b}{\partial x}(x_t, t) \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} df_\tau + \\
 & + b(x_t, t) \frac{\partial a}{\partial x}(x_t, t) \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} d\tau + \left( a(x_t, t) \frac{\partial b}{\partial x}(x_t, t) + \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} \right) \int_t^s \int_t^\tau d\tau_1 df_\tau + \\
 & + b(x_t, t) \left( \left( \frac{\partial b}{\partial x}(x_t, t) \right)^2 + b(x_t, t) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_t, t) \right) \int_t^s \int_t^\tau \int_t^{\tau_1} df_{\tau_2} df_{\tau_1} df_\tau + O((s - t)^2).
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Поясним, как понимается здесь обозначение  $O((s - t)^\gamma)$ ,  $\gamma > 0$ . Каждое слагаемое в правой части (2.82) (не учитывая  $O((s - t)^2)$ ) можно рассматривать как повторный стохастический интеграл, интегrandом которого является значение некоторой случайной функции в момент времени  $t$ . Остаточный член  $O((s - t)^2)$  представляет собой сумму нескольких повторных стохастических интегралов указанного типа и повторных стохастических интегралов с интегrandами, являющимися случайными функциями переменной  $\theta$ ,  $t \leq \theta \leq s$ .

Каждому из этих повторных стохастических интегралов можно поставить в соответствие число

$$\gamma = \sum_{i=1}^k r_i,$$

где  $k$  — кратность повторного интеграла;  $r_i = 1$ , если  $i$ -й интеграл в повторном интеграле берется по времени, и  $r_i = 1/2$ , если этот интеграл берется по винеровскому процессу. Далее полагаем, что рассмотренный повторный стохастический интеграл есть величина порядка  $\gamma$ , и обозначаем это через  $O((s - t)^\gamma)$ , где число  $\gamma$  получено указанным способом.

В случае если некоторая величина представляет собой сумму нескольких повторных стохастических интегралов, то за ее порядок принимаем наименьший из порядков повторных стохастических интегралов, входящих в рассматриваемую величину.

Отметим, что значительная часть рассуждений, приводимых в данном разделе, является нестрогой. Однако цель этого раздела заключается не в получении строгих выводов, а в растолковании упрощенно, на интуитивном уровне, того факта, что применение к СДУ эвристических модификаций численных подходов, используемых для ОДУ, не эффективно.

Поскольку для случайных процессов  $a(x_t, t)$ ,  $b(x_t, t)$  при определенных условиях справедливы отличные от (2.78) правила дифференцирования (см. формулу Ито), то разложение решения  $x_t$  уравнения (2.75) в окрестности момента времени  $t$  имеет вид, отличный от (2.82). Покажем это. По формуле Ито с вероятностью 1 получаем

$$\begin{aligned} a(x_s, s) &= a(x_t, t) + \int_t^s \left( \frac{\partial a}{\partial \tau}(x_\tau, \tau) + a(x_\tau, \tau) \frac{\partial a}{\partial x}(x_\tau, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b^2(x_\tau, \tau) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x_\tau, \tau) \right) d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \frac{\partial a}{\partial x}(x_\tau, \tau) df_\tau, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} b(x_s, s) &= b(x_t, t) + \int_t^s \left( \frac{\partial b}{\partial \tau}(x_\tau, \tau) + a(x_\tau, \tau) \frac{\partial b}{\partial x}(x_\tau, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b^2(x_\tau, \tau) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_\tau, \tau) \right) d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \frac{\partial b}{\partial x}(x_\tau, \tau) df_\tau. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Применим к интегrandам в (2.83), (2.84) формулу Ито и подставим полученные равенства в (2.83), (2.84). После этого, подставляя преобразованные равенства (2.83), (2.84) в (2.79), с вероятностью 1 приходим к разложению

$$\begin{aligned} x_s &= x_t + a(x_t, t)(s - t) + b(x_t, t) \int_t^s df_\tau + \\ &\quad + b(x_t, t) \frac{\partial b}{\partial x}(x_t, t) \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} df_\tau + b(x_t, t) \frac{\partial a}{\partial x}(x_t, t) \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} d\tau + \\ &\quad + \left( \frac{\partial b}{\partial t}(x_t, t) + a(x_t, t) \frac{\partial b}{\partial x}(x_t, t) + \frac{1}{2} b^2(x_t, t) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_t, t) \right) \int_t^s \int_t^\tau d\tau_1 df_\tau + \\ &\quad + b(x_t, t) \left( \left( \frac{\partial b}{\partial x}(x_t, t) \right)^2 + b(x_t, t) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_t, t) \right) + \int_t^s \int_t^\tau \int_t^{\tau_1} df_{\tau_2} df_{\tau_1} df_\tau + \\ &\quad + O((s - t)^2). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Сопоставляя разложения (2.82) и (2.85), видим, что в правой части (2.82) отсутствует слагаемое

$$\frac{1}{2} b^2(x_t, t) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_t, t) \int_t^s \int_t^\tau d\tau_1 df_\tau,$$

которое входит в правую часть (2.85). Это слагаемое имеет порядок 3/2 (здесь порядок определяется как и ранее).

Таким образом, приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что формальное применение правил дифференцирования неслучайных функций к случайнм процессам при получении разложения решения СДУ Ито в окрестности момента времени  $t$  приводит либо к неопределенности, либо к неверному результату.

При этом ошибка разложения во втором случае проявляется уже в членах порядка  $3/2$ . Исключение составляет случай, когда

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x, t) \equiv 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что ошибка на конце промежутка интегрирования для сильных численных методов (определение сильного численного метода и его ошибки см. в главе 7) решения СДУ Ито, построенных на основе детерминированного, а не стохастического разложения Тейлора, имеет порядок  $K\sqrt{\Delta}$ , где  $\Delta$  — шаг интегрирования численной схемы, а  $K$  — постоянная, не зависящая от  $\Delta$ .

В главе 7 будет показано, что такая ошибка на конце промежутка интегрирования характерна для сильного метода Эйлера — наиболее грубого из сильных численных методов решения СДУ Ито.

Более точные сильные численные методы решения СДУ Ито, рассмотренные в главах 7–9 и построенные на основе стохастических, а не детерминированных разложений Тейлора, имеют ошибки на конце промежутка интегрирования порядка  $K_1\Delta^\gamma$ , где  $\gamma = 1.0, 1.5, \dots$ , а  $K_1$  — постоянная, которая не зависит от  $\Delta$ .

Сходные рассуждения позволяют выявить, что конструирование слабых численных методов решения СДУ Ито на основе детерминированного разложения Тейлора также неэффективно (определение слабого численного метода см. в главе 10).

## **Часть II**

**Теоретические результаты,  
положенные в основу построения  
численных методов**

# Глава 3

## Некоторые свойства стохастических интегралов

В данной главе установлен класс повторных стохастических интегралов Ито, для которого с вероятностью 1 справедливы формулы замены порядка интегрирования, согласующиеся с правилами классического интегрального исчисления. Доказана теорема о замене порядка интегрирования для класса повторных стохастических интегралов Ито [38]. Рассмотрен ряд следствий и примеров применения этой теоремы. Получена формула, связывающая повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито произвольной фиксированной кратности.

### 3.1 Теорема о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито

Ниже проведена довольно кропотливая работа, связанная с теоремами о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито. Однако, может возникнуть естественный вопрос о практической пользе данной теории, поскольку существенная часть ее выводов непосредственно следует из формулы Ито. Пояснение достаточное простое. Нетрудно видеть, что для вывода различных соотношений для повторных стохастических интегралов (см., например, разд. 3.1.3) с помощью формулы Ито прежде всего эти соотношения надо угадать, после чего ввести соответствующие процессы Ито и провести затем обоснование по формуле Ито. Ясно, что это требует определенных усилий и далеко не всегда trivialно.

С другой стороны технология замены порядка интегрирования, вве-

денная в настоящей главе, формально согласуется с подобной технологией для интегралов Римана, хотя относится к другим объектам — интегралам Ито, и позволяет естественным привычным (как с интегралами Римана) образом проводить преобразования с повторными стохастическими интегралами и получать различные соотношения для них.

Таким образом, для преобразований специфического класса процессов Ито, коими являются повторные стохастические интегралы Ито, более естественно и просто использовать теоремы о замене порядка интегрирования, чем формулу Ито. Многочисленные примеры применения данных теорем присутствуют в доказательствах различных утверждений из последующих глав книги и наглядно иллюстрируют сказанное.

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и неубывающая совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \in [0, T]\}$ , определенная на этом пространстве. Рассмотрим винеровский процесс  $f_\tau$ , который  $\mathcal{F}_\tau$  — измерим при всех  $\tau \in [0, T]$ .

Введем класс  $S_2([0, T])$  функций  $\xi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которые принадлежат классу  $M_2([0, T])$  (определение этого класса дано в главе 1) и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке  $[0, T]$ .

В главе 1 дано определение стохастического интеграла Ито и приведены достаточные условия его существования, в частности, в среднеквадратическом смысле (см. теорему 1.5). По теореме 1.5 стохастический интеграл Ито существует в среднеквадратическом смысле, если интегrand  $\xi_t \in M_2([0, T])$ , т.е., вообще говоря, не является среднеквадратически непрерывным на промежутке  $[0, T]$ . В данной главе будут рассмотрены теоремы о замене порядка интегрирования для специального класса повторных стохастических интегралов Ито, при этом условие среднеквадратической непрерывности интегранда во "внутреннем" стохастическом интеграле окажется существенным.

Введем следующий класс повторных стохастических интегралов:

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)},$$

где  $\phi_\tau \in S_2([t, T])$ ;  $\psi_i(\tau)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) — непрерывные неслучайные на промежутке  $[t, T]$  функции; здесь и далее  $w_\tau^{(l)} = f_\tau$  либо  $w_\tau^{(l)} = \tau$  при  $\tau \in [t, T]$ ;  $l = 1, \dots, k + 1$ ;  $(\psi_1, \dots, \psi_k) \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(k)}$ ,  $\psi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(1)}$ . Повторные стохастические интегралы  $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  будем понимать как повторные стохастические интегралы Ито.

Хорошо известно, что для повторного интеграла Римана при определенных условиях справедлива формула замены порядка интегрирования. В частности, если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на промежутке  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) \int_a^x g(y) dy dx = \int_a^b g(y) \int_y^b f(x) dx dy. \quad (3.1)$$

Если бы для стохастического интеграла Ито  $J[\phi, \psi_1]_{T,t}$  была верна формула замены порядка интегрирования, аналогичная (3.1), то мы имели бы

$$J[\phi, \psi_1]_{T,t} = \int_t^T \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(s) dw_s^{(1)} dw_\tau^{(2)}. \quad (3.2)$$

Если, кроме того, в (3.2)  $w_s^{(1)}, w_s^{(2)} = f_s; s \in [t, T]$ , то случайный процесс

$$\eta_\tau = \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(\tau) dw_\tau^{(1)}$$

не принадлежит классу  $M_2([t, T])$ , и, следовательно, для стохастического интеграла Ито

$$\int_t^T \eta_\tau dw_\tau^{(2)}$$

в правой части (3.2) не выполняются условия его существования. В то же время справедлива формула, известная как лемма Ито:

$$\int_t^T df_s \int_t^T ds = \int_t^T (s - t) df_s + \int_t^T (f_s - f_t) ds \text{ с в. 1,}$$

которую можно получить, например, используя формулу Ито, но ее можно рассматривать и как следствие замены порядка интегрирования. Действительно, можно показать, что

$$\int_t^T (f_s - f_t) ds = \int_t^T \int_t^s df_\tau ds = \int_t^T \int_\tau^T ds df_\tau \text{ с в. 1.}$$

Тогда

$$\int_t^T (s - t) df_s + \int_t^T (f_s - f_t) ds = \int_t^T \int_t^\tau ds df_\tau + \int_t^T \int_\tau^T ds df_\tau = \int_t^T df_s \int_t^s ds \text{ с в. 1.}$$

Цель данного раздела установить строгий математический смысл формулы (3.2), а также ее аналога, соответствующего повторному стохастическому интегралу Ито  $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}, k \geq 2$ . При этом будем использовать более общее, чем (1.24), определение стохастического интеграла Ито.

В монографии [95] Р.Л. Стратонович ввел определение так называемого смешанного стохастического интеграла для определенного класса интегрируемых случайных процессов. Взяв за основу это определение, рассмотрим следующую конструкцию стохастического интеграла:

$$\text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \phi_{\tau_j} (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \theta_{\tau_{j+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_{\tau} df_{\tau} \theta_{\tau}, \quad (3.3)$$

где  $\phi_{\tau}, \theta_{\tau} \in S_2([t, T])$ ; здесь и далее  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  — разбиение промежутка  $[t, T]$ , для которого

$$t = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем будет доказано существование интегралов вида (3.3) для  $\phi_{\tau} \in S_2([t, T])$  и  $\theta_{\tau}$  из несколько более узкого класса процессов, чем  $S_2([t, T])$ . Кроме того, интеграл вида (3.3) будет использоваться для формулирования и доказательства теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито  $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ ,  $k \geq 1$ .

Рассмотрим некоторые справедливые с вероятностью 1 и достаточно очевидные свойства стохастических интегралов, определенных формулой (3.3):

$$1. \quad \int_t^T \phi_{\tau} df_{\tau} g(\tau) = \int_t^T \phi_{\tau} g(\tau) df_{\tau},$$

где  $g(\tau)$  — непрерывная на промежутке  $[t, T]$  функция.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \int_t^T (\alpha \phi_{\tau} + \beta \psi_{\tau}) df_{\tau} \theta_{\tau} = \alpha \int_t^T \phi_{\tau} df_{\tau} \theta_{\tau} + \beta \int_t^T \psi_{\tau} df_{\tau} \theta_{\tau} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1. \\ 3. \quad & \int_t^T \phi_{\tau} df_{\tau} (\alpha \theta_{\tau} + \beta \psi_{\tau}) = \alpha \int_t^T \phi_{\tau} df_{\tau} \theta_{\tau} + \beta \int_t^T \phi_{\tau} df_{\tau} \psi_{\tau} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

При этом будем предполагать, что случайные процессы  $\phi_{\tau}$ ,  $\theta_{\tau}$  и  $\psi_{\tau}$  такие, что все интегралы, входящие в перечисленные свойства, существуют.

### 3.1.1 Формулировка и доказательство

Определим стохастические интегралы  $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$ ,  $k \geq 1$ , вида

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(1)}$$

в соответствии с определением (3.3) следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_k(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k)} \hat{I}[\psi^{(k-1)}]_{T,\tau_{l+1}}, \quad (3.4)$$

где  $k \geq 1$ ;  $\hat{I}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ ;  $[s, T] \subseteq [t, T]$ ; здесь и далее  $\Delta w_{\tau_l}^{(i)} = w_{\tau_{l+1}}^{(i)} - w_{\tau_l}^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, k+1$ ;  $l = 0, 1, \dots, N-1$ . Затем определим повторный стохастический интеграл  $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ ,  $k \geq 1$ :

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \phi_s dw_s^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

также в соответствии с определением (3.3):

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}}.$$

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\phi_{\tau} \in S_2([t, T])$  и  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  неслучайные функции. Тогда существует стохастический интеграл  $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  и  $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  с вероятностью 1.

**Доказательство.** Докажем сначала теорему при  $k = 1$ . С вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} J[\phi, \psi_1]_{T,t} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \int_t^{\tau_l} \phi_{\tau} dw_{\tau}^{(2)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi_{\tau} dw_{\tau}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)} \int_{\tau_{j+1}}^T \psi_1(s) dw_s^{(1)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)} \sum_{l=j+1}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \psi_1(s) dw_s^{(1)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \psi_1(s) dw_s^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Очевидно, что если разность  $\varepsilon_N$  допредельных выражений в правых частях (3.5) и (3.6) стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , то стохастический интеграл  $\hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t}$  существует и  $J[\phi, \psi_1]_{T,t} = \hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t}$  с вероятностью 1. Разность  $\varepsilon_N$  представима в виде  $\varepsilon_N = \tilde{\varepsilon}_N + \hat{\varepsilon}_N$ , где

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_N &= \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_\pi^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d w_\tau^{(2)}; \\ \hat{\varepsilon}_N &= \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\psi_1(\tau_l) - \psi_1(s)) d w_s^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)}.\end{aligned}$$

Покажем, что  $\text{l.i.m.} \tilde{\varepsilon}_N = 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Для этого рассмотрим четыре случая:

1.  $w_\tau^{(2)} = f_\tau$ ,  $\Delta w_\pi^{(1)} = \Delta f_\pi$ ;
2.  $w_\tau^{(2)} = \tau$ ,  $\Delta w_\pi^{(1)} = \Delta f_\pi$ ;
3.  $w_\tau^{(2)} = f_\tau$ ,  $\Delta w_\pi^{(1)} = \Delta \tau_l$ ;
4.  $w_\tau^{(2)} = \tau$ ,  $\Delta w_\pi^{(1)} = \Delta \tau_l$ .

Для случая 1, используя свойства стохастического интеграла Ито (см. главу 1), среднеквадратическую непрерывность (а как следствие равномерную среднеквадратическую непрерывность) процесса  $\phi_\tau$  на замкнутом отрезке  $[t, T]$ , получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{M} \{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\} &= \sum_{k=0}^{N-1} \psi_1^2(\tau_k) \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \{|\phi_\tau - \phi_{\tau_j}|^2\} d\tau < \\ &< C^2 \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j < C^2 \varepsilon \frac{(T-t)^2}{2},\end{aligned}$$

т.е.  $\mathbb{M} \{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\}$  является бесконечно малой при  $N \rightarrow \infty$ . Здесь  $\Delta \tau_j < \delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$  ( $\delta > 0$  найдено по произвольному  $\varepsilon > 0$  и не зависит от  $\tau$ );  $|\psi_1(\tau)| < C$ .

Рассмотрим случай 2. Используя неравенство Минковского, свойства стохастических интегралов (см. главу 1) и равномерную среднеквадратическую непрерывность процесса  $\phi_\tau$ , имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{M} \{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\} &= \sum_{k=0}^{N-1} \psi_1^2(\tau_k) \Delta \tau_k \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \psi_1^2(\tau_k) \Delta \tau_k \left( \sum_{j=0}^{k-1} \left( \mathbb{M} \left\{ \left( \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \right)^2 <\end{aligned}$$

$$< C^2 \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \left( \sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \right)^2 < C^2 \varepsilon \frac{(T-t)^3}{3},$$

т.е.  $\mathbb{M}\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\}$  является бесконечно малой при  $N \rightarrow \infty$ . Здесь  $\Delta \tau_j < \delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$  ( $\delta > 0$  найдено по произвольному  $\varepsilon > 0$  и не зависит от  $\tau$ );  $|\psi_1(\tau)| < C$ .

В случае 3, используя неравенство Минковского, свойства стохастического интеграла Ито (см. главу 1) и равномерную среднеквадратическую непрерывность процесса  $\phi_\tau$ , находим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\} &\leq \left( \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_1(\tau_k)| \Delta \tau_k \left( \mathbb{M}\left\{ \left( \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\phi_\tau \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \right)^2 = \\ &= \left( \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_1(\tau_k)| \Delta \tau_k \left( \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M}\{|\phi_\tau - \phi_{\tau_j}|^2\} d\tau \right)^{1/2} \right)^2 < \\ &< C^2 \varepsilon \left( \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \left( \sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \right)^{1/2} \right)^2 < C^2 \varepsilon \frac{4(T-t)^3}{9}, \end{aligned}$$

т.е.  $\mathbb{M}\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\}$  является бесконечно малой при  $N \rightarrow \infty$ . Здесь  $\Delta \tau_j < \delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$  ( $\delta > 0$  найдено по произвольному  $\varepsilon > 0$  и не зависит от  $\tau$ );  $|\psi_1(\tau)| < C$ .

Наконец, для случая 4, используя неравенство Минковского, свойства стохастических интегралов (см. главу 1) и равномерную среднеквадратическую непрерывность процесса  $\phi_\tau$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\} &\leq \left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} |\psi_1(\tau_k)| \Delta \tau_k \left( \mathbb{M}\left\{ \left( \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\phi_\tau \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \right)^2 < \\ &< C^2 \varepsilon \left( \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \right)^2 < C^2 \varepsilon \frac{(T-t)^4}{4}, \end{aligned}$$

т.е.  $\mathbb{M}\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\}$  является бесконечно малой при  $N \rightarrow \infty$ . Здесь  $\Delta \tau_j < \delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N-1$  ( $\delta > 0$  найдено по произвольному  $\varepsilon > 0$  и не зависит от  $\tau$ );  $|\psi_1(\tau)| < C$ .

Таким образом, мы доказали, что  $\text{l.i.m.} \tilde{\varepsilon}_N = 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Рассуждая аналогично, с привлечением понятия равномерной непрерывности функции  $\psi_1(\tau)$  на замкнутом отрезке  $[t, T]$ , можно показать, что  $\text{l.i.m.} \hat{\varepsilon}_N = 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\text{l.i.m.} \varepsilon_N = 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Теорема доказана для случая  $k = 1$ .

**З а м е ч а н и е 3.1.** При доказательстве теоремы мы использовали тот факт, что если случайный процесс  $\phi_t$  среднеквадратически непрерывен на промежутке  $[t, T]$ , то он равномерно среднеквадратически непрерывен на этом промежутке, т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\forall t_1, t_2 \in [t, T]$  и удовлетворяющих условию  $|t_1 - t_2| < \delta$  выполняется неравенство  $M\{|\phi_{t_1} - \phi_{t_2}|^2\} < \varepsilon$  (здесь  $\delta$  не зависит от  $t_1$  и  $t_2$ ).

Действительно, пусть  $\phi_t$  среднеквадратически непрерывен на промежутке  $[t, T]$ , но не является равномерно среднеквадратически непрерывным на этом промежутке. Тогда для некоторого  $\varepsilon > 0$  и  $\forall \delta > 0 \exists t_1, t_2 \in [t, T]$  и такие, что  $|t_1 - t_2| < \delta$ , но  $M\{|\phi_{t_1} - \phi_{t_2}|^2\} \geq \varepsilon$ . Поэтому для  $\delta = \delta_n = 1/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\exists t_1^{(n)}, t_2^{(n)} \in [t, T]$  и такие, что  $|t_1^{(n)} - t_2^{(n)}| < 1/n$ , но  $M\{|\phi_{t_1^{(n)}} - \phi_{t_2^{(n)}}|^2\} \geq \varepsilon$ .

Последовательность  $t_1^{(n)}$ ;  $n = 1, 2, \dots$  ограничена, следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся к некоторому числу  $\tilde{t}$  ( $\tilde{t} \in [t, T]$ ) подпоследовательность  $t_1^{(k_n)}$ ;  $n = 1, 2, \dots$ . Аналогично этому и в силу неравенства  $|t_1^{(n)} - t_2^{(n)}| < 1/n$  имеем  $t_2^{(k_n)} \rightarrow \tilde{t}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

По среднеквадратической непрерывности процесса  $\phi_t$  в момент времени  $\tilde{t}$  и элементарному неравенству  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  получаем

$$0 \leq M\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} \leq 2(M\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{\tilde{t}}|^2\} + M\{|\phi_{t_2^{(k_n)}} - \phi_{\tilde{t}}|^2\}) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что  $\lim M\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} = 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это невозможно в силу того, что  $M\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} \geq \varepsilon > 0$ . Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Перейдем к доказательству теоремы 3.1 в случае  $k > 1$ . С этой целью введем обозначения

$$I[\psi_q^{(r+1)}]_{\theta, s} \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^\theta \psi_q(t_1) \dots \int_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) dw_{t_{r+1}}^{(q+r)} \dots dw_{t_1}^{(q)},$$

$$J[\phi, \psi_q^{(r+1)}]_{\theta, s} \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^\theta \psi_q(t_1) \dots \int_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) \int_s^{t_{r+1}} \phi_\tau dw_\tau^{(q+r+1)} dw_{t_{r+1}}^{(q+r)} \dots dw_{t_1}^{(q)},$$

$$G[\psi_q^{(r+1)}]_{n,m} = \sum_{j_q=m}^{n-1} \sum_{j_{q+1}=m}^{j_q-1} \dots \sum_{j_{q+r}=m}^{j_{q+r-1}-1} \prod_{l=q}^{r+q} I[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}},$$

где

$$(\psi_q, \dots, \psi_{q+r}) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_q^{(r+1)}, \quad \psi_q \stackrel{\text{def}}{=} \psi_q^{(1)}, \quad (\psi_1, \dots, \psi_{r+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(r+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1^{(r+1)}.$$

Для доказательства теоремы 3.1 при  $k > 1$  достаточно установить, что

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} S[\phi, \psi^{(k)}]_N = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \text{ с в. 1}, \quad (3.7)$$

где

$$S[\phi, \psi^{(k)}]_N = G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}.$$

Докажем сначала правое равенство в (3.7). Имеем

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}}. \quad (3.8)$$

На основании предположения индукции получаем, что

$$I[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} = \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} \text{ с в. 1}, \quad (3.9)$$

где  $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$  определен в соответствии с (3.4) и

$$I[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_1(t_1) \dots \int_s^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)}.$$

Заметим, что при  $k \geq 4$  (при  $k = 2, 3$  рассуждения аналогичны) в силу аддитивности стохастического интеграла Ито с в. 1 справедливы равенства

$$\begin{aligned} I[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} &= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(t_1) \int_{\tau_{j_1+1}}^{t_1} \psi_2(t_2) I[\psi_3^{(k-2)}]_{t_2,\tau_{l+1}} dw_{t_2}^{(2)} dw_{t_1}^{(1)} = \\ &= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(t_1) \left( \sum_{j_2=l+1}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} + \int_{\tau_{j_1}}^{t_1} \right) \psi_2(t_2) I[\psi_3^{(k-2)}]_{t_2,\tau_{l+1}} dw_{t_2}^{(2)} dw_{t_1}^{(1)} = \\ &= \dots = G[\psi^{(k)}]_{N,l+1} + H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned}
 H[\psi^{(k)}]_{N,l+1} &= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(s) \int_{\tau_{j_1}}^s \psi_2(\tau) I[\psi_3^{(k-2)}]_{\tau,\tau_{l+1}} dw_\tau^{(2)} dw_s^{(1)} + \\
 &+ \sum_{r=2}^{k-2} G[\psi^{(r-1)}]_{N,l+1} \sum_{j_r=l+1}^{j_{r-1}-1} \int_{\tau_{j_r}}^{\tau_{j_r+1}} \psi_r(s) \int_{\tau_{j_r}}^s \psi_{r+1}(\tau) I[\psi_{r+2}^{(k-r-1)}]_{\tau,\tau_{l+1}} dw_\tau^{(r+1)} dw_s^{(r)} + \\
 &+ G[\psi^{(k-2)}]_{N,l+1} \sum_{j_{k-1}=l+1}^{j_{k-2}-1} I[\psi_{k-1}^{(2)}]_{\tau_{j_{k-1}+1}, \tau_{j_{k-1}}} . \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Подставим (3.10) в (3.9), а (3.9) в (3.8). Тогда с в. 1

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} (G[\psi^{(k)}]_{N,l+1} + H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}) . \tag{3.12}$$

Поскольку

$$\sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1} a_{j_1 \dots j_k} = \sum_{j_k=0}^{N-1} \sum_{j_{k-1}=j_k+1}^{N-1} \dots \sum_{j_1=j_2+1}^{N-1} a_{j_1 \dots j_k} , \tag{3.13}$$

где  $a_{j_1 \dots j_k}$  — скаляры, то

$$G[\psi^{(k)}]_{N,l+1} = \sum_{j_k=l+1}^{N-1} \dots \sum_{j_1=j_2+1}^{N-1} \prod_{l=1}^k I[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}} . \tag{3.14}$$

Подставим (3.14) в

$$\sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} G[\psi^{(k)}]_{N,l+1}$$

и снова воспользуемся формулой (3.13). Тогда с в. 1

$$\sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} G[\psi^{(k)}]_{N,l+1} = S[\phi, \psi^{(k)}]_N . \tag{3.15}$$

Предположим, что предел l.i.m.  $S[\phi, \psi^{(k)}]_N$  при  $N \rightarrow \infty$  существует (его существование будет доказано далее). Тогда из (3.15) и (3.12) следует, что для доказательства правого равенства в (3.7) остается показать, что с вероятностью 1

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} H[\psi^{(k)}]_{N,l+1} = 0. \quad (3.16)$$

Оценивая второй момент допредельного выражения в левой части (3.16) с учетом (3.11), независимости  $\phi_{\tau_l}$ ,  $\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}$  и  $H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}$ , стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов и неравенства Минковского, убеждаемся, что (3.16) справедливо. Таким образом, в предположении существования предела  $\text{l.i.m. } S[\phi, \psi^{(k)}]_N$  при  $N \rightarrow \infty$  мы получили, что правое равенство в (3.7) выполняется.

Покажем, что справедливо и левое равенство в (3.7). Имеем

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l, t}. \quad (3.17)$$

Воспользуемся применительно к интегралу  $J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l, t}$  в (3.17) теми же рассуждениями, что и для интеграла  $I[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}}$ , которые привели к соотношению (3.10), и подставим полученное для  $J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l, t}$  выражение в (3.17). Далее с помощью неравенства Минковского и стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов нетрудно установить, что

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} R[\phi, \psi^{(k)}]_N \text{ с в. 1}, \quad (3.18)$$

где

$$R[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_1(\tau_{j_1}) \Delta w_{\tau_{j_1}}^{(1)} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1, 0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \phi_{\tau} dw_{\tau}^{(k+1)}.$$

Покажем, что

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} R[\phi, \psi^{(k)}]_N = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} S[\phi, \psi^{(k)}]_N \text{ с в. 1}. \quad (3.19)$$

Нетрудно видеть, что с в. 1

$$R[\phi, \psi^{(k)}]_N = U[\phi, \psi^{(k)}]_N + V[\phi, \psi^{(k)}]_N + S[\phi, \psi^{(k)}]_N, \quad (3.20)$$

где

$$U[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_1(\tau_{j_1}) \Delta w_{\tau_{j_1}}^{(1)} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1, 0} \sum_{l=0}^{j_k-1} I[\Delta \phi]_{\tau_{l+1}, \tau_l},$$

$$V[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} I[\Delta\psi_1]_{\tau_{j_1+1}, \tau_{j_1}} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1, 0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)},$$

$$I[\Delta\psi_1]_{\tau_{j_1+1}, \tau_{j_1}} = \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\psi_1(\tau_{j_1}) - \psi_1(\tau)) dw_{\tau}^{(1)},$$

$$I[\Delta\phi]_{\tau_{l+1}, \tau_l} = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\phi_{\tau} - \phi_{\tau_l}) dw_{\tau}^{(k+1)}.$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов, а также непрерывности функции  $\psi_1(\tau)$  и принадлежности процесса  $\phi_{\tau}$  классу  $S_2([t, T])$  убеждаемся, что l.i.m.  $V[\phi, \psi^{(k)}]_N =$  l.i.m.  $U[\phi, \psi^{(k)}]_N = 0$  при  $N \rightarrow \infty$  с в. 1. Тогда, учитывая (3.20), получаем (3.19). Из (3.19) и (3.18) следует левое равенство из (3.7). При этом предел l.i.m.  $S[\phi, \psi^{(k)}]_N$  при  $N \rightarrow \infty$  существует, поскольку он равен интегралу  $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ , который существует в условиях настоящей теоремы. Таким образом, цепочка равенств (3.7) доказана. Теорема доказана.  $\square$

### 3.1.2 Следствия и обобщения

Положим  $D_k = \{(t_1, \dots, t_k) : t \leq t_1 < \dots < t_k \leq T\}$  и пусть:

AI.  $\xi_t \in S_2([t, T])$ .

AII.  $\Phi(t_1, \dots, t_{k-1})$  непрерывная неслучайная на замкнутом множестве  $D_{k-1}$  функция.

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\begin{aligned} \hat{J}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} &= \int_t^T \xi_{t_k} d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \dots \int_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \xi_{\tau_l} \Delta \mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_k)} \int_{\tau_{l+1}}^T d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \dots \int_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \end{aligned}$$

при  $k \geq 3$  и

$$\hat{J}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(2)} = \int_t^T \xi_{t_2} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \xi_{\tau_l} \Delta \mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_2)} \int_{\tau_{l+1}}^T \Phi(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)},$$

где  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$ ;  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ;  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ ;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  — независимые и  $F_\tau$ -измеримые при всех  $\tau \in [t, T]$  стандартные винеровские процессы.

Обозначим

$$J[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_{k-1}} \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}) \xi_{t_k} d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}, \quad k \geq 2, \quad (3.21)$$

где правая часть (3.21) понимается как повторный стохастический интеграл Ито. Рассмотрим одно из обобщений теоремы 3.1.

Введем в рассмотрение также следующие повторные стохастические интегралы

$$\begin{aligned} \tilde{J}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} &= \int_t^T d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \dots \int_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_{k-1})} \int_{\tau_{l+1}}^T d\mathbf{w}_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})} \dots \int_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}, \\ J'[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} &= \int_t^T \dots \int_t^{t_{k-2}} \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \dots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Нетрудно показать по аналогии с доказательством теоремы 3.1, что при выполнении условия АII данного раздела существует стохастический интеграл  $\tilde{J}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}$  и  $J'[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} = \tilde{J}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}$  с вероятностью 1.

В свою очередь, используя этот факт можно по аналогии с доказательством теоремы 3.1 доказать следующую теорему.

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнены условия АI, АII данного раздела. Тогда существует стохастический интеграл  $\hat{J}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)}$  и  $J[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} = \hat{J}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)}$  с вероятностью 1 ( $k \geq 2$ ).*

Рассмотрим следующие повторные стохастические интегралы:

$$I = \int_t^T d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi_1(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}, \quad J = \int_t^T \int_t^{t_2} \Phi_2(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}.$$

Если считать

$$\int_{t_2}^T \Phi_1(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \text{ и } \int_t^{t_2} \Phi_2(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}$$

интегrandами  $I$  и  $J$  соответственно, то, в силу независимости этих интегrandов, может ошибочно показаться, что  $M\{IJ\} = 0$ . Однако, это не так. Действительно, применяя замену порядка интегрирования в  $I$  с в. 1 имеем

$$I = \int_t^T \int_t^{t_1} \Phi_1(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \int_t^T \int_t^{t_2} \Phi_1(t_2, t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)}.$$

Тогда

$$M\{IJ\} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \int_t^T \int_t^{t_2} \Phi_1(t_2, t_1) \Phi_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Рассмотрим следующее утверждение.

**Теорема 3.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и  $h(\tau)$  — непрерывная неслучайная на промежутке  $[t, T]$  функция. Тогда*

$$\int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} = \int_t^T \phi_\tau h(\tau) dw_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} \text{ с в. 1,} \quad (3.22)$$

и интегралы в левой и правой частях (3.22) существуют.

**Доказательство.** Согласно теореме 3.1 повторный стохастический интеграл в правой части (3.22) существует. Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_t^T \phi_\tau h(\tau) dw_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} &= \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} - \\ &- \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta h(\tau_j) \Delta w_{\tau_j}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{j+1}} \text{ с в. 1,} \end{aligned}$$

где  $\Delta h(\tau_j) = h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j)$ . Используя рассуждения, которые привели к правому равенству в (3.7) получаем

$$\begin{aligned} \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} &= \\ &= \text{l.i.m. } G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \text{ с в. 1.} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов и непрерывности функции  $h(\tau)$  находим, что второй момент допредельного выражения в правой части (3.23) стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим одно из следствий теоремы 3.1.

**Теорема 3.4.** В условиях теоремы 3.3

$$\begin{aligned} & \int_t^T h(t_1) \int_t^{t_1} \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} = \\ & = \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} \text{ с в.1}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

причем левая и правая части (3.24) существуют.

Доказательство. Применяя дважды теорему 3.1, получаем

$$\begin{aligned} & \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} = \\ & = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \rho_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)} = \\ & = \int_t^T \rho_\tau dw_\tau^{(k+1)} \int_\tau^T \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(1)} \text{ с в. 1}, \end{aligned}$$

где

$$\rho_\tau \stackrel{\text{def}}{=} h(\tau) \int_t^\tau \phi_s dw_s^{(k+2)}.$$

Теорема доказана.  $\square$

### 3.1.3 Замена порядка интегрирования для конкретных повторных стохастических интегралов Ито

Как уже отмечалось ранее, формулы, приведенные в данном разделе, могут быть получены с помощью формулы Ито. Однако, способ, основанный на теореме 3.1, является более простым и привычным, поскольку согласуется с обычными правилами замены порядка интегрирования в римановых интегралах.

По теореме 3.1 с вероятностью 1:

$$\begin{aligned} \int_t^T \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 &= \int_t^T (T - t_1) df_{t_1}, \quad \int_t^T \cos(t_2 - T) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T \sin(T - t_1) df_{t_1}, \\ \int_t^T \sin(t_2 - T) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 &= \int_t^T (\cos(T - t_1) - 1) df_{t_1}, \end{aligned}$$

$$\int_t^T \exp(\alpha(t_2 - T)) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \frac{1}{\alpha} \int_t^T (1 - \exp(\alpha(t_1 - T))) df_{t_1}, \quad \alpha \neq 0,$$

$$\int_t^T (t_2 - T)^\alpha \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = -\frac{1}{\alpha + 1} \int_t^T (t_1 - T)^{\alpha+1} df_{t_1}, \quad \alpha \neq -1,$$

$$J_{(10)T,t} + J_{(01)T,t} = (T - t) J_{(1)T,t} \text{ (лемма ИТО),}$$

$$J_{(100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)^2 df_{t_1}, \quad J_{(010)T,t} = \int_t^T (t_1 - t)(T - t_1) df_{t_1},$$

$$J_{(110)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2}, \quad J_{(101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2}, \quad (3.25)$$

$$J_{(1011)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3},$$

$$J_{(1101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_3} (t_3 - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3},$$

$$J_{(1110)T,t} = \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3}, \quad J_{(1100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_2)^2 \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(1001)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)^2 df_{t_1} df_{t_2}, \quad J_{(1010)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2}, \quad (3.26)$$

$$J_{(0110)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} (t_1 - t) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(0101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)(t_1 - t) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(0010)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)(t_1 - t)^2 df_{t_1}, \quad J_{(0100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)^2 (t_1 - t) df_{t_1},$$

$$J_{(1000)T,t} = \frac{1}{3!} \int_t^T (T - t_1)^3 df_{t_1}, \quad J_{(1\underbrace{0\dots 0}_{k-1})T,t} = \frac{1}{(k-1)!} \int_t^T (T - t_1)^{k-1} df_{t_1},$$

$$J_{(11\underbrace{0\dots 0}_{k-2})T,t} = \frac{1}{(k-2)!} \int_t^T (T - t_2)^{k-2} \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(\underbrace{1\dots 1}_{k-1} 0)T,t} = \int_t^T (T - t_1) J_{(\underbrace{1\dots 1}_{k-2} t_1, t) df_{t_1}},$$

$$J_{(1\underset{k-2}{\underbrace{0\dots 0}}1)T,t} = \frac{1}{(k-2)!} \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)^{k-2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(10\underset{k-2}{\underbrace{1\dots 1}})T,t} = \int_t^T \dots \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2} \dots df_{t_{k-1}},$$

$$J_{(1\dots 1\underset{k-2}{\underbrace{01}})T,t} = \int_t^T \int_t^{t_{k-1}} (t_{k-1} - t_{k-2}) \int_t^{t_{k-2}} \dots \int_t^{t_2} df_{t_1} \dots df_{t_{k-3}} df_{t_{k-2}} df_{t_{k-1}};$$

обобщения леммы Ито:

$$J_{(110)T,t} + J_{(101)T,t} + J_{(011)T,t} = (T - t) J_{(11)T,t},$$

$$J_{(001)T,t} + J_{(010)T,t} + J_{(100)T,t} = \frac{(T - t)^2}{2} J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1100)T,t} + J_{(1010)T,t} + J_{(1001)T,t} + J_{(0110)T,t} +$$

$$+ J_{(0101)T,t} + J_{(0011)T,t} = \frac{(T - t)^2}{2} J_{(11)T,t},$$

$$J_{(1000)T,t} + J_{(0100)T,t} + J_{(0010)T,t} + J_{(0001)T,t} = \frac{(T - t)^3}{3!} J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1110)T,t} + J_{(1101)T,t} + J_{(1011)T,t} + J_{(0111)T,t} = (T - t) J_{(111)T,t},$$

$$\sum_{l=1}^k J_{(0\dots 0\underset{l-1}{\underbrace{1}}\underset{k-l}{\underbrace{0\dots 0}})T,t} = \frac{1}{(k-1)!} (T - t)^{k-1} J_{(1)T,t},$$

$$\sum_{l=1}^k J_{(1\dots 1\underset{l-1}{\underbrace{0}}\underset{k-l}{\underbrace{1\dots 1}})T,t} = (T - t) J_{(\underset{k-1}{\underbrace{1\dots 1}})T,t},$$

$$\sum_{\substack{l_1+\dots+l_k=m \\ l_i \in \{0, 1\}; i=1,\dots,k}} J_{(l_1\dots l_k)T,t} = \frac{(T - t)^{k-m}}{(k-m)!} J_{(\underset{m}{\underbrace{1\dots 1}})T,t},$$

где введены обозначения

$$J_{(l_1\dots l_k)T,t} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} dw_{t_1}^{(1)} \dots dw_{t_k}^{(k)};$$

$l_i = 1$  при  $w_{t_i}^{(i)} = f_{t_i}$  и  $l_i = 0$  при  $w_{t_i}^{(i)} = t_i$ ;  $i = 1, \dots, k$ ;  $f_\tau \in \Re^1$  — стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим 2 примера, на которых покажем в явном виде как пошагово применяется техника замены порядка интегрирования.

**Пример 3.1.** Используя теоремы 3.1 и 3.3 докажем первую из формул (3.25):

$$\begin{aligned}
 J_{(110)T,t} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} dt_3 = \\
 &= \int_t^T df_{t_1} \int_{t_1}^T df_{t_2} \int_{t_2}^T dt_3 = \int_t^T df_{t_1} \int_{t_1}^T df_{t_2} (T - t_2) = \\
 &= \int_t^T df_{t_1} \int_{t_1}^T (T - t_2) df_{t_2} = \\
 &= \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} \text{ c. в. 1.}
 \end{aligned}$$

**Пример 3.2.** Используя теоремы 3.1 и 3.3 докажем вторую из формул (3.26):

$$\begin{aligned}
 J_{(1010)T,t} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 df_{t_3} dt_4 = \\
 &= \int_t^T df_{t_1} \int_{t_1}^T dt_2 \int_{t_2}^T df_{t_3} \int_{t_3}^T dt_4 = \int_t^T df_{t_1} \int_{t_1}^T dt_2 \int_{t_2}^T df_{t_3} (T - t_3) = \\
 &= \int_t^T df_{t_1} \int_{t_1}^T dt_2 \int_{t_2}^T (T - t_3) df_{t_3} = \\
 &= \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_2} \int_t^{t_3} df_{t_1} dt_2 df_{t_3} = \\
 &= \int_t^T (T - t_3) \left( \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 \right) df_{t_3} = \int_t^T (T - t_3) \left( \int_t^{t_3} df_{t_1} \int_{t_1}^{t_3} dt_2 \right) df_{t_3} = \\
 &= \int_t^T (T - t_3) \left( \int_t^{t_3} df_{t_1} (t_3 - t_1) \right) df_{t_3} = \\
 &= \int_t^T (T - t_3) \left( \int_t^{t_3} (t_3 - t_1) df_{t_1} \right) df_{t_3} = \\
 &= \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2} \text{ c. в. 1.}
 \end{aligned}$$

### 3.2 Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и неубывающая совокупность  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \in [0, T]\}$ , определенная на этом пространстве. Пусть  $M_\tau, \tau \in [0, T]$  — заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$   $D$ -мартингал (определение  $D$ -мартингала дано в главе 1, см. также [17]). Отметим, что стандартный винеровский процесс является  $D$ -мартингалом с  $\rho_\tau \equiv 1$ .

В настоящем разделе мы обобщим теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито на случай повторных стохастических интегралов по  $D$ -мартингалу.

В главе 1 отмечалось (см. также [17]), что стохастический интеграл по  $D$ -мартингалу

$$\int_t^T \xi_\tau dM_\tau,$$

где случайный процесс  $\xi_\tau, \tau \in [t, T]$  принадлежит классу  $H_2(\rho, [0, T])$ , полученный в соответствии с определением 1.14, существует (определение класса  $H_2(\rho, [0, T])$  дано в главе 1).

Пусть  $\tilde{H}_2(\rho, [0, T])$  — класс среднеквадратически непрерывных при всех  $\tau \in [0, T]$  случайных процессов  $\xi_\tau, \tau \in [0, T]$  из класса  $H_2(\rho, [0, T])$ .

Положим

$$S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \phi_\tau dM_\tau^{(k+1)} dM_{t_k}^{(k)} \dots dM_{t_1}^{(1)}, \quad (3.27)$$

$$S[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} dM_{t_k}^{(k)} \dots dM_{t_1}^{(1)}. \quad (3.28)$$

Здесь и далее  $\phi_\tau \in \tilde{H}_2(\rho, [t, T]); \psi_1(\tau), \dots, \psi_k(\tau)$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  неслучайные функции;  $M_\tau^{(l)} = M_\tau$  либо  $M_\tau^{(l)} = \tau$  при  $\tau \in [t, T]; l = 1, \dots, k+1; M_\tau$  —  $D$ -мартингал.

Определим повторный стохастический интеграл  $\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s}; t \leq s \leq T, k \geq 1$ , вида

$$\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_k(t_k) dM_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dM_{t_1}^{(1)}$$

следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_k(\tau_l) \Delta M_{\tau_l}^{(k)} \hat{S}[\psi^{(k-1)}]_{T,\tau_{l+1}}, \quad (3.29)$$

где  $k \geq 1$ ;  $\hat{S}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ ;  $[s, T] \subseteq [t, T]$ ; здесь и далее  $\Delta M_{\tau_l}^{(i)} = M_{\tau_{l+1}}^{(i)} - M_{\tau_l}^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, k+1$ ;  $l = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $\{\tau_l\}_{l=0}^N$  — разбиение промежутка  $[t, T]$  такое, что

$$t = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty;$$

остальные обозначения, входящие в (3.29), такие же, как в (3.27), (3.28).

Определим повторный стохастический интеграл  $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ ,  $k \geq 1$ , вида

$$\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \phi_s dM_s^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

равенством

$$\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta M_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (3.27)–(3.29).

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по  $D$ -martингалу, которая является обобщением теоремы 3.1.

**Теорема 3.5.** Пусть  $\phi_\tau \in \tilde{H}_2(\rho, [t, T])$ ,  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  неслучайные функции и  $|\rho_\tau| \leq K < \infty$  с вероятностью 1 при всех  $\tau \in [t, T]$ . Тогда существует стохастический интеграл  $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  и  $S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  с вероятностью 1.

Теорема 3.5 доказывается аналогично теореме 3.1.

**З а м е ч а н и е 3.2.** Отметим, что можно предложить несколько иной вариант условий теоремы 3.5. Так, можно не требовать ограниченности процесса  $\rho_\tau$ , однако в этом случае необходимо потребовать, например, выполнения следующих дополнительных условий:

1.  $M\{|\rho_\tau|\} < \infty$  при всех  $\tau \in [t, T]$ .
2. Процесс  $\rho_\tau$  независим с процессами  $\phi_\tau$  и  $M_\tau$ .

**З а м е ч а н и е 3.3.** Следует отметить, что хорошо известна конструкция стохастического интеграла по винеровскому процессу от упредсказывающей (не являющейся  $F_\tau$ -измеримой при  $\tau \in [t, T]$ ) случайной функции

— так называемый стохастический интеграл Стратоновича (см. главу 1). Стохастический интеграл  $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  также является стохастическим интегралом от упреждающей случайной функции, однако в условиях теоремы 3.5  $S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  с вероятностью 1, а  $S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  — обычный повторный стохастический интеграл по  $D$ -martингалу. Если, например,  $M_\tau, \tau \in [t, T]$  — винеровский процесс, то взаимосвязь стохастического интеграла  $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$  и стохастического интеграла Стратоновича устанавливается как стандартная взаимосвязь стохастических интегралов Стратоновича и Ито (см. леммы 1.4 – 1.7).

Рассмотрим ряд утверждений, которые являются обобщением сформулированных в предыдущем разделе теорем.

Пусть неслучайная функция  $\Phi(t_1, \dots, t_{k-1})$  непрерывна на замкнутом множестве  $D_{k-1} = \{(t_1, \dots, t_{k-1}) : t \leq t_1 < \dots < t_{k-1} \leq T\}$ .

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\begin{aligned} \hat{S}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} &= \int_t^T \xi_{t_k} dM_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_3}^T dM_{t_2}^{(2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) dM_{t_1}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \xi_{\tau_l} \Delta M_{\tau_l}^{(k)} \int_{\tau_{l+1}}^T dM_{t_{k-1}}^{(k-1)} \dots \int_{t_3}^T dM_{t_2}^{(2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) dM_{t_1}^{(1)} \end{aligned}$$

при  $k \geq 3$  и

$$\hat{S}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(2)} = \int_t^T \xi_{t_2} dM_{t_2}^{(2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1) dM_{t_1}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \xi_{\tau_l} \Delta M_{\tau_l}^{(2)} \int_{\tau_{l+1}}^T \Phi(t_1) dM_{t_1}^{(1)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (3.27)–(3.29), а случайный процесс  $\xi_\tau, \tau \in [t, T]$  принадлежит классу  $\tilde{H}_2(\rho, [t, T])$ .

Кроме того, положим

$$S[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_{k-1}} \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}) \xi_{t_k} dM_{t_k}^{(k)} \dots dM_{t_1}^{(1)}, \quad k \geq 2, \quad (3.30)$$

правая часть (3.30) понимается как повторный стохастический интеграл по  $D$ -martингалу.

Введем в рассмотрение также следующие повторные стохастические интегралы:

$$\begin{aligned} \tilde{S}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} &= \int_t^T dM_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \dots \int_{t_3}^T dM_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) dM_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta M_{\tau_l}^{(i_{k-1})} \int_{\tau_{l+1}}^T dM_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})} \dots \int_{t_3}^T dM_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) dM_{t_1}^{(i_1)}, \\ S'[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} &= \int_t^T \dots \int_t^{t_{k-2}} \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}) dM_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \dots dM_{t_1}^{(i_1)}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Нетрудно показать по аналогии с доказательством теоремы 3.5, что если функция  $\Phi(t_1, \dots, t_{k-1})$  является непрерывной на замкнутом множестве  $D_{k-1} = \{(t_1, \dots, t_{k-1}) : t \leq t_1 < \dots < t_{k-1} \leq T\}$ , то существует стохастический интеграл  $\tilde{S}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}$  и с вероятностью 1 справедливо равенство:  $S'[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} = \tilde{S}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}$ .

В свою очередь, используя этот факт можно по аналогии с доказательством теоремы 3.5 доказать следующую теорему.

**Теорема 3.6.** *Пусть выполнено условие АII из разд. 3.1.2, а случайный процесс  $\xi_\tau \in \tilde{H}_2(\rho, [t, T])$  и  $|\rho_\tau| \leq K < \infty$  с вероятностью 1 при всех  $\tau \in [t, T]$ . Тогда существует стохастический интеграл  $\hat{S}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)}$  и  $S[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} = \hat{S}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)}$  с вероятностью 1 ( $k \geq 2$ ).*

Теорема 3.6 является обобщением теоремы 3.2 на случай повторных стохастических интегралов по  $D$ -martингалу.

Рассмотрим еще два утверждения.

**Теорема 3.7.** *Пусть выполнены условия теоремы 3.5 и  $h(\tau)$  — непрерывная на промежутке  $[t, T]$  неслучайная функция. Тогда*

$$\int_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} = \int_t^T \phi_\tau h(\tau) dM_\tau^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} \text{ с в. 1} \quad (3.31)$$

и стохастические интегралы в левой и правой частях (3.31) существуют.

**Теорема 3.8.** *В условиях теоремы 3.7*

$$\begin{aligned} &\int_t^T h(t_1) \int_t^{t_1} \phi_\tau dM_\tau^{(k+2)} dM_{t_1}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} = \\ &= \int_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dM_{t_1}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} \text{ с в. 1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

причем левая и правая части (3.32) существуют.

Доказательства теорем 3.7 и 3.8 аналогичны доказательствам теорем 3.3 и 3.4 соответственно.

### 3.3 Соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности $k$

Пусть выполнены условия:

ВI.  $\mathbf{f}_\tau \in \Re^m$  —  $F_\tau$ -измеримый при всех  $\tau \in [0, T]$  стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}; i = 1, \dots, m$ .

ВII.  $\psi_j(\tau); j = 1, \dots, k$  — непрерывно дифференцируемые на промежутке  $[t, T]$  функции.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_l, \dots, s_1} &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p=1}^l \mathbf{1}_{\{i_{sp}=i_{sp+1}\neq 0\}} \times \\ &\times \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1}) \psi_{s_l+1}(t_{s_l+1}) \times \\ &\times \int_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1}) \dots \int_t^{t_{s_1+3}} \psi_{s_1+2}(t_{s_1+2}) \int_t^{t_{s_1+2}} \psi_{s_1}(t_{s_1+1}) \psi_{s_1+1}(t_{s_1+1}) \times \\ &\times \int_t^{t_{s_1+1}} \psi_{s_1-1}(t_{s_1-1}) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})} dt_{s_1+1} d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})} \dots \\ &\dots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})} dt_{s_l+1} d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (3.34)$$

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (3.35)$$

где  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ;  $(\psi_k, \dots, \psi_1) \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(k)}$ ;  $\psi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(1)}$ ;  $(s_l, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,l}$ ;  $l = 1, \dots, [k/2]$ ;  $i_s = 0, 1, \dots, m$ ;  $s = 1, \dots, k$ ;  $[x]$  — целая

часть числа  $x$ ;  $\mathbf{1}_A$  — индикатор  $A$  ( $\mathbf{1}_A = 1$ , если  $A$  выполнено и  $\mathbf{1}_A = 0$  в противном случае);

$$\mathcal{A}_{k,l} = \{(s_l, \dots, s_1) : s_l > s_{l-1} + 1, \dots, s_2 > s_1 + 1; s_l, \dots, s_1 = 1, \dots, k-1\}. \quad (3.36)$$

Отметим, что далее наряду с этими сокращенными обозначениями, там, где это необходимо, будут использоваться более развернутые.

Сформулируем теорему о связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ ,  $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$  произвольной фиксированной кратности  $k$ .

**Теорема 3.9.** *Пусть условия ВI и ВII данного раздела выполнены. Тогда справедливо следующее соотношение между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича:*

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{[k/2]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \text{ с. в. 1}, \quad (3.37)$$

где  $\sum_{\emptyset}$  полагается равной нулю.

**Доказательство.** По индукции нетрудно установить, что в условиях теоремы существуют повторные стохастические интегралы  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ ,  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}$ , входящие в (3.37). Докажем это равенство по индукции. Рассмотрим случай  $k = 1$ . Согласно (3.37) имеем верное с вероятностью 1 равенство

$$J[\psi_1]_{T,t} = J^*[\psi_1]_{T,t}. \quad (3.38)$$

Соотношение (3.38) является очевидным. При  $k = 2$  из (3.37) получаем

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2} J[\psi^{(2)}]_{T,t}^1 \text{ с. в. 1}. \quad (3.39)$$

Покажем, что равенство (3.39) справедливо с вероятностью 1. Для этого рассмотрим процесс  $\eta_{t_2,t} = \psi_2(t_2) J[\psi_1]_{t_2,t}$ ,  $t_2 \in [t, T]$ , и найдем с помощью формулы Ито (лемма 1.1) его стохастический дифференциал:

$$d\eta_{t_2,t} = J[\psi_1]_{t_2,t} d\psi_2(t_2) + \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)}. \quad (3.40)$$

Из равенства (3.40) следует, что диффузионный коэффициент процесса  $\eta_{t_2,t}$ ,  $t_2 \in [t, T]$ , равен  $\mathbf{1}_{\{i_1 \neq 0\}} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2)$ . Далее по лемме 1.6 с вероятностью 1 выводим соотношение (3.39). Таким образом, утверждение теоремы доказано при  $k = 1, 2$ .

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором  $k > 2$ , и докажем его справедливость при значении  $k$ , на единицу большем.

В предположении индукции с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned}
 J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} &= \\
 &= \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) \left\{ J[\psi^k]_{\tau,t} + \sum_{r=1}^{[k/2]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} \right\} d\mathbf{W}_\tau^{(i_{k+1})} = \\
 &= \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} d\mathbf{W}_\tau^{(i_{k+1})} + \\
 &+ \sum_{r=1}^{[k/2]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} d\mathbf{W}_\tau^{(i_{k+1})}. \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Используя формулу Ито (лемма 1.1) и лемму 1.6, с в. 1 получаем

$$\int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} d\mathbf{W}_\tau^{(i_{k+1})} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \frac{1}{2} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^k, \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} d\mathbf{W}_\tau^{(i_{k+1})} = \\
 &= \begin{cases} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} & \text{при } s_r = k - 1 \\ J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} + J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{k, s_r, \dots, s_1} / 2 & \text{при } s_r < k - 1 \end{cases}. \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

После подстановки (3.42) и (3.43) в (3.41) и перегруппировки слагаемых приходим к справедливым с вероятностью 1 соотношениям

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{[k/2]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \tag{3.44}$$

при четном  $k$  и

$$J^*[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{[k'/2]+1} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k'+1,r}} J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \tag{3.45}$$

при  $k' = k + 1$  нечетном. Из (3.44) и (3.45) с вероятностью 1 имеем

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{[(k+1)/2]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}. \quad (3.46)$$

Соотношение (3.46) завершает доказательство теоремы.  $\square$

**З а м е ч а н и е 3.4.** Результат теоремы 3.9 может быть обобщен, т.е. функция  $\psi_1(s)$  в (3.37) может быть заменена на случайный процесс  $\phi_s$  из класса  $M_2([t, T])$ .

**З а м е ч а н и е 3.5.** В [148] рассматриваются соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито, взятыми по случайному промежутку  $[t(\omega), s(\omega)]$ , где  $t(\omega), s(\omega)$  — моменты остановки, для которых  $0 \leq t(\omega) \leq s(\omega) \leq T$  с в. 1. Результаты теоремы 3.9 и лемм 1.4 – 1.7 также могут быть обобщены на случай повторных стохастических интегралов, взятых по промежутку  $[t(\omega), s(\omega)]$ .

По теореме 3.9 при  $k = 1, 2, 3, 4$  с в. 1 имеем:

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} &= \int_t^T \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}, \\ \int_t^{*T} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} &= \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2, \\ \int_t^{*T} \psi_3(t_3) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} &= \\ &= \int_t^T \psi_3(t_3) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_2} \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{*T} \psi_4(t_4) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} = \\
 & = \int_t^T \psi_4(t_4) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_4(t_4) \int_t^{t_4} \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \psi_4(t_4) \int_t^{t_4} \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \psi_4(t_4) \psi_3(t_4) \int_t^{t_4} \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_4 + \\
 & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \psi_4(t_4) \psi_3(t_4) \int_t^{t_4} \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 dt_4. \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

### 3.4 Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов

Настоящий раздел посвящен получению на основе формулы Ито двух семейств аналитических формул для вычисления стохастических интегралов.

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Рассмотрим процесс Ито  $\eta_\tau \in \mathfrak{R}^n$ , определенный при  $\tau \in [0, T]$ ,  $T < \infty$ , как решение СДУ Ито

$$d\eta_\tau = a(\eta_\tau, \tau) d\tau + \Sigma(\eta_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau, \quad \eta_0 = \eta(0, \omega), \quad (3.48)$$

где  $a(\eta, \tau) : \mathfrak{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ,  $\Sigma(\eta, \tau) : \mathfrak{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times m}$  — неслучайные функции;  $\mathbf{f}_\tau \in \mathfrak{R}^m$  —  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримый при всех  $\tau \in [0, T]$  стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами; случайная величина  $\eta_0$  не зависит от приращения  $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$  при  $\tau > 0$ . Относительно функций  $a(\eta, \tau)$  и  $\Sigma(\eta, \tau)$  предполагаем, что они удовлетворяют условиям AI–AIII (теорема 1.6). В противном случае воспользуемся [148] точными решениями конкретных СДУ Ито вида (3.48) с целью демонстрации существования их решений.

Пусть  $Y \subseteq \Re^n$  — множество, для которого

$$\mathbf{P} \{ \eta_\tau \in Y \text{ при всех } \tau \in [0, T] \} = 1,$$

а функция  $R(\eta, \tau) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta, \tau), \frac{\partial R}{\partial \eta^{(i)}}(\eta, \tau), \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^{(i)} \partial \eta^{(j)}}(\eta, \tau); i, j = 1, \dots, n$$

при всех  $(\eta, \tau) \in Y \times [0, T]$ .

Запишем формулу Ито для процесса  $R(\eta_s, s)$ :

$$\int_t^s \left( \frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau), d\eta_\tau \right) = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int_t^s LR(\eta_\tau, \tau) d\tau \text{ с в. 1,} \quad (3.49)$$

где  $s, t \in [0, T]$ ;  $s > t$ ;  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение;  $\partial R / \partial \eta$  — столбец размера  $n$  с компонентами  $\partial R / \partial \eta^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ );  $L$  — оператор вида

$$Lg(\eta, \tau) = \frac{\partial g}{\partial \tau}(\eta, \tau) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \Sigma^{(ir)}(\eta, \tau) \Sigma^{(jr)}(\eta, \tau) \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^{(i)} \partial \eta^{(j)}}(\eta, \tau), \quad (3.50)$$

где  $g : Y \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  — некоторая функция, для которой существует правая часть (3.50).

Пусть функция  $R(\eta, \tau)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$LR(\eta, \tau) = \varphi(\tau), \quad (3.51)$$

где  $\varphi(\tau)$  — некоторая скалярная неслучайная интегрируемая на промежутке  $[0, T]$  функция. Тогда (3.49) принимает вид

$$\int_t^s \left( \frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau), d\eta_\tau \right) = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int_t^s \varphi(\tau) d\tau \text{ с в. 1.} \quad (3.52)$$

Соотношение (3.52) можно интерпретировать как аналитическую формулу для вычисления интеграла в левой части (3.52). В литературе известно лишь несколько формул типа формулы (3.52) для конкретных функций  $a(\eta, \tau)$ ,  $\Sigma(\eta, \tau)$ ,  $R(\eta, \tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ . Приведем некоторые из них:

$$\int_t^s (f_\tau - f_s) df_\tau = -\frac{1}{2}(s-t) + \frac{1}{2} (f_s - f_t)^2 \text{ с в. 1, } f_\tau \in \Re^1, \quad (3.53)$$

$$\int_t^s \mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau = -\frac{m}{2}(s-t) + (|\mathbf{f}_s|^2 - |\mathbf{f}_t|^2) \text{ с в. 1, } \mathbf{f}_\tau \in \Re^m, \quad (3.54)$$

$$\int_t^s \frac{\mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau}{|\mathbf{f}_\tau|^m} = \frac{1}{2-m} (|\mathbf{f}_s|^{2-m} - |\mathbf{f}_t|^{2-m}) \text{ с в. 1, } m \geq 3, \mathbf{f}_\tau \in \Re^m, \quad (3.55)$$

$$\int_t^s \frac{\mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau}{|\mathbf{f}_\tau|^2} = \ln|\mathbf{f}_s| - \ln|\mathbf{f}_t| \text{ с в. 1, } \mathbf{f}_\tau \in \Re^2. \quad (3.56)$$

Формулу (3.53) можно найти в [95], а формулы (3.54)–(3.56) — в [25].

Отметим, что для стохастических интегралов Стратоновича от случайных процессов специального вида справедливы аналитические формулы их вычисления, согласующиеся с правилами классического интегрального исчисления. Так, предположим, что функция  $F(x) : \Re^1 \rightarrow \Re^1$  удовлетворяет условиям леммы 1.4. Тогда согласно лемме 1.4 имеем

$$\int_t^{*s} F(f_\tau) df_\tau = \int_t^s F(f_\tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_t^s \frac{dF}{dx}(f_\tau) d\tau \text{ с в. 1,} \quad (3.57)$$

где  $f_\tau \in \Re^1$  — стандартный винеровский процесс.

Вместе с тем по формуле Ито

$$G(f_s) - G(f_t) = \frac{1}{2} \int_t^s \frac{dF}{dx}(f_\tau) d\tau + \int_t^s F(f_\tau) df_\tau \text{ с в. 1,} \quad (3.58)$$

где  $dG(x)/dx = F(x)$ . Объединяя (3.57) и (3.58), получаем

$$\int_t^{*s} F(f_\tau) df_\tau = G(f_s) - G(f_t) \text{ с в. 1.} \quad (3.59)$$

Формулу (3.59) можно найти, например, в [148].

Предлагаемый далее подход основывается на решении дифференциального уравнения (3.51) при некоторых допущениях относительно функций  $R(\eta, \tau)$  и  $\Sigma(\eta, \tau)$ . Так, пусть  $\eta \in \Re^1$ ,  $\Sigma(\eta, \tau) = \theta(\eta)\sigma(\tau)$ , где  $\theta(\eta) : \Re^1 \rightarrow \Re^m$ ,  $\sigma(\tau) : [0, T] \rightarrow \Re^1$ . Тогда дифференциальное уравнение (3.51) принимает вид

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta, \tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\beta^2(\eta)\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}(\eta, \tau) = \varphi(\tau), \quad (3.60)$$

где

$$\beta^2(\eta) = \sum_{r=1}^m (\theta^{(r)}(\eta))^2.$$

Решение уравнения (3.60) может быть найдено, например, методом аддитивного ( $R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$ ) или мультипликативного ( $R(\eta, \tau) = \rho(\eta)\psi(\tau)$ ) разделения переменных.

### 3.4.1 Аддитивное разделение переменных

Пусть  $R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$ ,  $\eta \in \Re^1$ . Тогда уравнение (3.60) принимает вид

$$\frac{d\psi}{d\tau}(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = \varphi(\tau). \quad (3.61)$$

После разделения переменных в (3.61) при  $\sigma(\tau) \neq 0$  находим

$$\frac{1}{2}\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = \left(\varphi(\tau) - \frac{d\psi}{d\tau}(\tau)\right)\frac{1}{\sigma^2(\tau)} = \lambda \text{ (постоянная).} \quad (3.62)$$

Если  $\beta^2(\eta) > 0$ , то из (3.62) получаем два дифференциальных уравнения:

$$\frac{d\psi}{d\tau}(\tau) = \varphi(\tau) - \lambda\sigma^2(\tau),$$

$$\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = \frac{2\lambda}{\beta^2(\eta)},$$

решения которых имеют вид

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \int_0^\tau (\varphi(u) - \lambda\sigma^2(u)) du, \quad (3.63)$$

$$\rho(\eta) = \rho_0 + \rho_1\eta + 2\lambda \int_{y_0}^\eta g(u) du, \quad (3.64)$$

где

$$g(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y_0}^u \frac{dz}{\beta^2(z)};$$

$\rho_0, \rho_1, y_0, \psi_0$  — постоянные;  $\beta^2(u) > 0$  при  $u \in [y_0, \eta]$ .

Подстановка (3.63) и (3.64) в функцию  $R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$ ,  $\eta \in \Re^1$ , а  $R(\eta, \tau)$  — в (3.52) при  $\lambda \neq 0$  дает

$$\int_t^s g(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + \int_{\eta_t}^{\eta_s} g(u) du \text{ с в. 1.} \quad (3.65)$$

При определенном выборе функции  $\beta(z)$  интеграл

$$\int_{\eta_t}^{\eta_s} g(u) du$$

может быть вычислен аналитически. Тогда формула (3.65) при различных  $\beta(z)$  определяет целое семейство аналитических выражений для вычисления стохастического интеграла

$$\int_t^s g(\eta_\tau) d\eta_\tau.$$

Рассмотрим примеры выбора функций  $\beta(\eta)$  и соответствующих им формул из семейства (3.65). При этом, в ряде случаев, если выбираемая функция  $\beta(\eta)$  такова, что функция  $\Sigma(\eta, \tau)$  не удовлетворяет условию АII (см. теорему 1.6), или такова, что налагаются ограничения на область определения или область значений процесса  $\eta_\tau$ , то в этом случае для демонстрации существования процессов  $\eta_\tau$ , удовлетворяющих формуле (3.65), воспользуемся примерами СДУ Ито и их точных решений  $\eta_\tau$ .

В некоторых из приведенных ниже формулах из семейства (3.65) и семейства (3.76) (см. следующий разд.) промежуток интегрирования  $[t, s]$  (или  $[0, s]$ ) естественным образом ограничивается моментом времени  $s$ , при котором поведение выборочной траектории  $\eta(\tau, \omega)$  ( $\omega$  — фиксировано,  $\omega \in \Omega$ ) случайного процесса  $\eta_\tau$  таково, что для  $\eta(s, \omega)$  перестают существовать левые и (или) правые части указанных формул или перестает быть определена сама указанная выборочная траектория  $\eta(\tau, \omega)$  случайного процесса  $\eta_\tau$ .

Далее  $f_t$  — стандартный скалярный винеровский процесс ( $f_0 = 0$ ).

1.  $\beta^2(\eta) = 1$  :

$$\int_t^s \eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + \frac{\eta_s^2}{2} - \frac{\eta_t^2}{2} \text{ с в. 1.}$$

2.  $\beta^2(\eta) = \sqrt{y(\eta)}$ ,  $y(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} a\eta^2 + b\eta + c$ ,  $\Delta = 4ac - b^2 > 0$ ,  $a > 0$  :

$$\int_t^s \text{Arsh} \frac{2a\eta_\tau + b}{\sqrt{\Delta}} d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \sqrt{a} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_t) \text{ с в. 1,} \quad (3.66)$$

где

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left( x + \frac{b}{2a} \right) \text{Arsh} \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \right) - \frac{\sqrt{y(x)}}{\sqrt{a}}.$$

3.  $\beta^2(\eta) = y(\eta)$ ,  $\Delta = 4ac - b^2 > 0$ ,  $a > 0$  :

$$\int_t^s \arctg \frac{2a\eta_\tau + b}{\sqrt{\Delta}} d\eta_\tau = -\frac{1}{4} \sqrt{\Delta} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_t) \text{ с в. 1,}$$

где

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left( x + \frac{b}{2a} \right) \arctg \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \right) - \frac{\sqrt{\Delta/(4a)}}{\ln y(x)}.$$

4.  $\beta^2(\eta) = 1/\sqrt{y(\eta)}$ ,  $\Delta = 4ac - b^2 > 0$ ,  $a > 0$  :

$$\int_t^s F_1(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F_2(\eta_s) - F_2(\eta_t) \text{ с в. 1,}$$

где

$$F_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{y(x)} + \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}},$$

$$F_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}} F(x) + \frac{y^{3/2}(x)}{6a},$$

а функция  $F(x)$  такая же, как в формуле (3.66).

5.  $\beta^2(\eta) = 1/P_{n-1}(\eta)$ , где  $P_{n-1}(\eta) > 0$  — многочлен степени  $n - 1$  с вещественными коэффициентами:

$$\int_t^s Q_n(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + H_{n+1}(\eta_s) - H_{n+1}(\eta_t) \text{ с в. 1,}$$

где

$$P_{n-1}(x) = \frac{dQ_n}{dx}(x), \quad H_{n+1}(x) = \int Q_n(x) dx.$$

Далее будем считать  $\eta_0$  и  $\sigma$  постоянными.

6.  $\beta^2(\eta) = \exp(-2\eta)$  :

$$\int_0^s \exp(2\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} (\exp(2\eta_s) - 1) \text{ с в. 1,}$$

где, например,  $\eta_t = \ln(f_t + \exp(\eta_0))$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = -\frac{1}{2} \exp(-2\eta_t) dt + \exp(-\eta_t) df_t$$

и  $0 \leq |\eta_0| < \infty$ ,  $\sigma(\tau) \equiv 1$ .

7.  $\beta^2(\eta) = \eta^2$  :

$$\int_0^s \frac{d\eta_\tau}{\eta_\tau} = \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \ln \eta_s - \ln \eta_0 \text{ с в. 1,} \quad (3.67)$$

где, например,  $\eta_t = \eta_0 \exp((a - 0.5\sigma^2)t + \sigma f_t)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = a\eta_t dt + \sigma\eta_t df_t$$

и  $0 < \eta_0 < \infty$ ,  $\sigma(\tau) \equiv \sigma$ ,  $a$  — постоянная.

8.  $\beta^2(\eta) = \eta > 0$  :

$$\int_0^s \ln \eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \eta_s \ln \eta_s - \eta_s - \eta_0 \ln \eta_0 + \eta_0 \text{ с в. 1,} \quad (3.68)$$

где, например,  $\eta_t = (f_t + \sqrt{\eta_0})^2$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = dt + 2\sqrt{\eta_t} df_t$$

и  $0 < \eta_0 < \infty$ ,  $\sigma(\tau) \equiv 2$ .

9.  $\beta^2(\eta) = \eta^2(\eta^2 - 1)$ ,  $|\eta| > 1$  :

$$\int_0^s \left( -\frac{1}{\eta_\tau} + \frac{1}{2} \ln \frac{\eta_\tau + 1}{\eta_\tau - 1} \right) d\eta_\tau = \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в. 1,}$$

где

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \operatorname{Arcth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) - \ln x$$

и, например,  $\eta_t = \sec(\sigma f_t + \operatorname{arcsec} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = \frac{1}{2} \sigma^2 \eta_t (2\eta_t^2 - 1) dt + \sigma \eta_t \sqrt{\eta_t^2 - 1} df_t$$

или  $\eta_t = \operatorname{cosec}(\sigma f_t + \operatorname{arccosec} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = \frac{1}{2} \sigma^2 \eta_t (2\eta_t^2 - 1) dt - \sigma \eta_t \sqrt{\eta_t^2 - 1} df_t,$$

где  $1 < \eta_0 < \infty$ . В 1 случае  $\sigma(\tau) \equiv \sigma$ , в то время как во 2 случае  $\sigma(\tau) \equiv -\sigma$ .

10.  $\beta^2(\eta) = \cos^4 \eta$  :

$$\int_0^s \left( \frac{\sin \eta_\tau}{\cos^3 \eta_\tau} + 2 \operatorname{tg} \eta_\tau \right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в. 1,}$$

где

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-1} \cos^{-2} x - 2 \ln \cos x$$

и, например,  $\eta_t = \operatorname{arctg}(\sigma f_t + \operatorname{tg} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = -\sigma^2 \sin \eta_t \cos^3 \eta_t dt + \sigma \cos^2 \eta_t df_t$$

или

$$\eta_t = \operatorname{arctg} \left( \exp(-t) \left( \operatorname{tg} \eta_0 + \sqrt{2} \int_0^t \exp(s) df_s \right) \right)$$

— решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = -\left( \frac{1}{4} \sin 4\eta_t + \sin 2\eta_t \right) dt + \sqrt{2} \cos^2 \eta_t df_t,$$

где  $\cos \eta_0 > 0$ . В первом случае  $\sigma(\tau) \equiv \sigma$ , в то время как во 2 случае  $\sigma(\tau) \equiv \sqrt{2}$ .

11.  $\beta^2(\eta) = \sin^4 \eta$  :

$$\int_0^s \left( -\frac{\cos \eta_\tau}{\sin^3 \eta_\tau} - 2 \operatorname{ctg} \eta_\tau \right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в. 1,}$$

где

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-1} \sin^{-2} x - 2 \ln \sin x$$

и, например,  $\eta_t = \operatorname{arcctg}(\sigma f_t + \operatorname{ctg} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = \sigma^2 \cos \eta_t \sin^3 \eta_t dt - \sigma \sin^2 \eta_t df_t,$$

где  $\sin \eta_0 > 0$ ,  $\sigma(\tau) \equiv -\sigma$ .

12.  $\beta^2(\eta) = (1 - \eta^2)^2$  :

$$\int_0^s \left( \frac{\eta_\tau}{2(1 - \eta_\tau^2)} + \frac{1}{4} u(\eta_\tau) \right) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \frac{\eta_s}{4} u(\eta_s) - \frac{\eta_0}{4} u(\eta_0) \text{ с в. 1, (3.69)}$$

где

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln |(1+x)/(1-x)|$$

и, например,  $\eta_t = \operatorname{th}(\sigma f_t + \operatorname{Arth} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = -\sigma^2 \eta_t (1 - \eta_t^2) dt + \sigma (1 - \eta_t^2) df_t, \quad |\eta_0| < 1$$

или  $\eta_t = \operatorname{cth}(\sigma f_t + \operatorname{Arcth} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = \sigma^2 \eta_t (1 - \eta_t^2) dt - \sigma (1 - \eta_t^2) df_t, \quad 1 < |\eta_0| < \infty.$$

В 1 случае  $\sigma(\tau) \equiv \sigma$ , в то время как во втором случае  $\sigma(\tau) \equiv -\sigma$ .

13.  $\beta^2(\eta) = |1 - \eta^2|$ :

$$\int_0^s u(\eta_\tau) d\eta_\tau = - \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \eta_s u(\eta_s) + u_1(\eta_s) - \eta_0 u(\eta_0) - u_1(\eta_0) \text{ с.в. 1, (3.70)}$$

где

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln |(1+x)/(1-x)|,$$

$$u_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln |1-x^2|$$

и, например,  $\eta_t = \operatorname{ch}(\sigma f_t + \operatorname{Arch}\eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = \frac{1}{2} \sigma^2 \eta_t dt + \sigma \sqrt{\eta_t^2 - 1} df_t$$

или  $\eta_t = \cos(\sigma f_t + \arccos\eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = -\frac{1}{2} \sigma^2 \eta_t dt - \sigma \sqrt{1 - \eta_t^2} df_t$$

или  $\eta_t = \sin(\sigma f_t + \arcsin\eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = -\frac{1}{2} \sigma^2 \eta_t dt + \sigma \sqrt{1 - \eta_t^2} df_t.$$

Для 1 процесса  $\eta_t$  полагаем  $\eta_0 \neq 1$ , в то время как для 2 и 3 процессов  $\eta_t$  выбираем  $\eta_0 \neq \pm 1$ . В 1 и 3 случае  $\sigma(\tau) \equiv \sigma$ , а во 2 случае  $\sigma(\tau) \equiv -\sigma$ .

### 3.4.2 Мультипликативное разделение переменных

Пусть  $R(\eta, \tau) = \psi(\tau)\rho(\eta)$ , где  $\psi(\tau) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;  $\rho(\eta) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Тогда, подставляя  $R(\eta, \tau) = \psi(\tau)\rho(\eta)$  в (3.60) и полагая в нем  $\varphi(\tau) \equiv 0$ , получаем

$$\frac{d\psi}{d\tau}(\tau)\rho(\eta) + \frac{1}{2}\beta^2(\eta)\sigma^2(\tau)\psi(\tau)\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = 0. \quad (3.71)$$

Деля левую и правую части (3.71) на  $\rho(\eta)\psi(\tau)\sigma^2(\tau)$  в предположении, что  $\psi(\tau), \sigma(\tau), \rho(\eta) \neq 0$ , находим

$$\frac{1}{\psi(\tau)\sigma^2(\tau)} \frac{d\psi}{d\tau}(\tau) = -\frac{1}{2} \frac{\beta^2(\eta)}{\rho(\eta)} \frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = \lambda \text{ (постоянная).} \quad (3.72)$$

Уравнение (3.72) эквивалентно дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\psi}{d\tau}(\tau) = \lambda\sigma^2(\tau)\psi(\tau), \quad (3.73)$$

$$\beta^2(\eta) \frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) + \mu\rho(\eta) = 0, \quad \mu = 2\lambda. \quad (3.74)$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.73) имеет вид

$$\psi(\tau) = \psi_0 \exp\left(\lambda \int_0^\tau \sigma^2(u) du\right),$$

где  $\psi_0$  — произвольная постоянная. Нетрудно видеть, что частным решением дифференциального уравнения (3.60) является интеграл

$$\int_0^\tau \varphi(u) du.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения (3.60) с учетом сделанных допущений имеет вид

$$R(\eta, \tau) = \psi(\tau)\rho(\eta) + \int_0^\tau \varphi(u) du, \quad (3.75)$$

где  $\rho(\eta)$  — решение дифференциального уравнения (3.74).

Подставляя (3.75) при  $\psi_0 \neq 0$  в (3.52), в рамках сделанных предположений получаем следующую формулу:

$$\int_t^s \psi(\tau) \frac{d\rho}{d\eta}(\eta_\tau) d\eta_\tau = \psi(s)\rho(\eta_s) - \psi(t)\rho(\eta_t) \text{ с в. 1.} \quad (3.76)$$

Рассмотрим примеры выбора  $\beta(\eta)$ ,  $\mu$  и  $\rho(\eta)$  [31], которые могут быть использованы в формуле (3.76). Далее  $C_1, C_2, \sigma$  — постоянные.

1.  $\beta^2(\eta) = 1$ .

1.1.  $\mu < 0$ ,  $\rho(\eta) = C_1 \exp(-\sqrt{|\mu|}\eta) + C_2 \exp(\sqrt{|\mu|}\eta)$ .

1.2.  $\mu > 0$ ,  $\rho(\eta) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}\eta) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}\eta)$ .

2.  $\beta^2(\eta) = 4(\eta^2 + 1)^2(a\eta^2 + a - 3)^{-1}$ ,  $a > 3$ ,  $\mu = 1$ ,

$$\rho(\eta) = (\eta^2 + 1)^{1/4} (C_1 \cos u(\eta) + C_2 \sin u(\eta)), \quad u(\eta) = \frac{1}{2} \sqrt{a-1} \operatorname{Arsh} \eta.$$

3.  $\beta^2(\eta) = (a^2\eta^2 + a)^{-1}$ ,  $a > 0$ ,  $\mu = -1$ ,

$$\rho(\eta) = \exp\left(\frac{a\eta^2}{2}\right) (C_1 + C_2 F(\eta)), \quad F(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} \exp(-ax^2) dx.$$

$$4. \beta^2(\eta) = (\eta^2 + 1)^2.$$

$$4.1. \mu + 1 = \alpha^2 > 0, \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 \cos u(\eta) + C_2 \sin u(\eta)).$$

$$4.2. \mu + 1 = -\alpha^2 < 0, \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 \operatorname{ch} u(\eta) + C_2 \operatorname{sh} u(\eta)).$$

Здесь полагаем  $u(\eta) = \alpha \operatorname{arctg} \eta$ .

$$4.3. \mu = -1, \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 + C_2 \operatorname{arctg} \eta).$$

Процесс  $\eta_t$  в примерах 4, например, имеет вид  $\eta_t = \operatorname{tg}(t + f_t + \operatorname{arctg} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = (1 + \eta_t)(1 + \eta_t^2)dt + (1 + \eta_t^2)df_t$$

или  $\eta_t = \operatorname{tg}(\sigma f_t + \operatorname{arctg} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = \sigma^2 \eta_t(1 + \eta_t^2)dt + \sigma(1 + \eta_t^2)df_t$$

или  $\eta_t = \operatorname{ctg}(\sigma f_t + \operatorname{arctg} \eta_0)$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = \sigma^2 \eta_t(1 + \eta_t^2)dt - \sigma(1 + \eta_t^2)df_t.$$

Например, для 1 случая можно взять  $\eta_0 = 0$ .

$$5. \beta^2(\eta) = \eta^2 - 1 > 0, \mu = -6, \rho(\eta) = 4(\eta^2 - 1)\eta \text{ — частное решение.}$$

При этом, например,  $\eta_t = \operatorname{ch}(\sigma f_t + \operatorname{Arch} \eta_0)$  (см. (3.70)).

$$6. \beta^2(\eta) = 1 - \eta^2 > 0, \mu = 6, \rho(\eta) = 4(\eta^2 - 1)\eta \text{ — частное решение.}$$

При этом, например,  $\eta_t = \cos(\sigma f_t + \operatorname{arccos} \eta_0)$  или  $\eta_t = \sin(\sigma f_t + \operatorname{arcsin} \eta_0)$  (см. (3.70)).

$$7. \beta^2(\eta) = \eta^4.$$

$$7.1. \mu < 0, \rho(\eta) = \eta(C_1 \exp(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1}) + C_2 \exp(-\sqrt{|\mu|}\eta^{-1})).$$

$$7.2. \mu > 0, \rho(\eta) = \eta(C_1 \cos(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1}) + C_2 \sin(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1})).$$

При этом, например,  $\eta_t = \eta_0(1 - \eta_0 \sigma f_t)^{-1}$  — решение [148] СДУ Ито вида:

$$d\eta_t = \sigma^2 \eta_t^3 dt + \sigma \eta_t^2 df_t,$$

где  $\eta_0 \neq 0$ .

$$8. \beta^2(\eta) = \eta^2.$$

$$8.1. c^2 = 1/4 - \mu > 0, \rho(\eta) = \sqrt{\eta}(C_1 \eta^c + C_2 \eta^{-c}).$$

$$8.2. c^2 = \mu - 1/4 > 0, \rho(\eta) = \sqrt{\eta}(C_1 \cos(c \ln \eta) + C_2 \sin(c \ln \eta)).$$

8.3.  $\mu = 1/4$ ,  $\rho(\eta) = \sqrt{\eta} (C_1 + C_2 \ln \eta)$ .

В примерах 8 процесс  $\eta_t$  может быть, например, таким же, как в формуле (3.67).

9.  $\beta^2(\eta) = -\eta^2 \ln \eta > 0$ ,  $0 < \eta < 1$ ,  $\mu = -1$ ,

$$\rho(\eta) = C_1 \ln \eta + C_2 \left( \eta - \ln \eta \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{dy}{\ln y} \right).$$

При этом, например,  $\eta_t = \exp \left( - (f_t + \sqrt{-\ln \eta_0})^2 \right)$  — решение [148] СДУ  
Ито вида:

$$d\eta_t = -\eta_t (2 \ln \eta_t + 1) dt - 2\eta_t \sqrt{-\ln \eta_t} df_t,$$

где  $0 < \eta_0 < 1$ .

10.  $\beta^2(\eta) = \eta^4 / (2\eta^2 + 1)$ ,  $\rho(\eta) = C_1(\eta^2 - \eta) \exp(1/\eta) + C_2(\eta^2 + \eta) \exp(-1/\eta)$ ,  
 $\mu = -1$ .

11.  $\beta^2(\eta) = (\eta^2 - 1)^2$ .

11.1.  $\mu - 1 = 4\alpha^2 > 0$ ,  $\rho(\eta) = \sqrt{|\eta^2 - 1|} (C_1 \cos(\alpha G(\eta)) + C_2 \sin(\alpha G(\eta)))$ .

11.2.  $\mu - 1 = -4\alpha^2 < 0$ ,  $\rho(\eta) = (\eta + 1) (C_1 u(\eta)^{\alpha-1/2} + C_2 u(\eta)^{-\alpha-1/2})$ .

11.3.  $\mu = 1$ ,  $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 - 1} (C_1 + C_2 G(\eta))$ .

В примере 11.2 полагаем

$$u(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} |(\eta + 1)/(\eta - 1)|,$$

а в примерах 11.1 и 11.3 —  $G(\eta) = \ln u(\eta)$ .

Процесс  $\eta_t$  в примерах 11.1, 11.2 может быть таким же, как в формуле (3.69), а в примере 11.3 процесс  $\eta_t$  может, например, иметь вид:  $\eta_t = \operatorname{cth}(\sigma f_t + \operatorname{Arcth} \eta_0)$  (см. (3.69)).

## Глава 4

# Унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича

Построение стохастических аналогов формулы Тейлора, так называемых разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, является достаточно новым вопросом в теории случайных процессов. Первые работы, посвященные ему, относятся к 70–90 годам XX века: [73] (Г.Н. Мильштейн, 1974), [212], [234] (W. Wagner и E. Platen, 1978, 1982), [147], [148] (P.E. Kloeden и E. Platen, 1991, 1992).

Данная глава посвящена, главным образом, получению унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Повторные стохастические интегралы Ито, входящие в разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, будут преобразованы в данной главе к двум минимальным (базисным) системам канонических повторных стохастических интегралов Ито меньшей кратности и с полиномиальными весовыми функциями. Эти преобразования будут произведены на основе формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито (см. главу 3). В результате после проведения ряда преобразований будут выведены два новых и, в некотором смысле, более компактных разложения Тейлора–Ито [65] (1993) (см. также [40], [47], [56], [67], [68]), которые мы назовем унифицированными.

С помощью соотношений между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича и формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито в данной главе также будут построены два унифицированных разложения Тейлора–Стратоновича [52], [56].

Важно отметить, что коэффициентные функции унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича определяются рекуррентными соотношениями, множителем в которых стоит знакомая по классической формуле Тейлора величина вида:  $(s - t)^j / j!$ .

Другой важной особенностью указанных унифицированных разложений является то, что они в отличие от разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена [212] и разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена [147] содержат минимальные совокупности различных повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича соответственно, что может оказаться полезным при построении численных методов для СДУ Ито.

Для сравнения отметим, что унифицированные разложения Тейлора–Ито до членов третьего и четвертого порядков малости содержат только 12 и 33 различных повторных стохастических интегралов Ито соответственно, в то время как аналогичное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена включает в себя уже 17 и 50 различных повторных стохастических интегралов Ито.

Сходная ситуация возникает при сравнении разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена и унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича.

## 4.1 Дифференцируемость по Ито случайных процессов

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и пусть  $\mathbf{f}_t = F_t$  — измеримый при всех  $t \in [0, T]$  стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}; i = 1, \dots, m$ .

**Определение 4.1.** Процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , а  $\mathbf{x}_s$  — решение СДУ Ито (1.39), назовем дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39), если для любых двух моментов остановки  $s, t$  таких, что  $\mathbb{P}\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ , с вероятностью 1 справедливо представление

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s B_{0_\tau} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s B_{1_\tau}^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}. \quad (4.1)$$

*Случайные процессы  $B_{0_\tau}$ ,  $B_{1_\tau}^{(i)} \in M_2([0, T])$ ;  $i = 1, \dots, m$  в (4.1) назовем производными по Ито процесса  $\eta_s$ .*

**З а м е ч а н и е 4.1.** *Если в определении 4.1 случайные процессы  $B_{0_\tau}$ ,  $B_{1_\tau}^{(i)} \in M_2([0, T])$ ;  $i = 1, \dots, m$  и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке  $[0, T]$ , то процесс  $\eta_s$  назовем непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39).*

Пусть  $\mathcal{L}$  — класс функций  $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , для которых существуют и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Определим на классе  $\mathcal{L}$  операторы

$$LR(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad (4.2)$$

$$G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Рассмотрим следующее утверждение о формуле Ито.

**Лемма 4.1.** *Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$  дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39), его производные по Ито имеют вид*

$$B_{0_\tau} = LR(\mathbf{x}_\tau, \tau), \quad B_{1_\tau}^{(i)} = G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau); \quad i = 1, \dots, m,$$

причем для любых двух моментов остановки  $s, t$ , для которых выполняется  $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$  с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)},$$

правая часть которого существует в среднеквадратическом смысле.

Следует отметить, что в формулировке леммы 4.1 моменты  $t, s$  считаются моментами остановки, для которых  $\mathbb{P}\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ . Справедливость такого обобщенноого варианта формулы Ито вытекает, например, из [72] (С. 140).

Введем еще ряд обозначений.

Совокупность  $k$ -индексных элементов

$$\{A^{(i_1 \dots i_k)}, i_1 = 1, \dots, m_1; \dots; i_k = 1, \dots, m_k\},$$

где  $m_1, \dots, m_k \in N$ , будем называть матрицей  $k$ -го ранга  ${}^{(k)}A$ :

$${}^{(k)}A = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}. \quad (4.4)$$

Если  $m_1 = \dots = m_k = m$ , то записываем

$${}^{(k)}A = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Очевидно, что  ${}^{(0)}A$  — скаляр,  ${}^{(1)}A$  — матрица-столбец размера  $m_1 \times 1$ ,  ${}^{(2)}A$  — прямоугольная матрица размера  $m_1 \times m_2$ , и т. д. Далее иногда ранг скаляров, равный нулю, и ранг матриц-столбцов, равный единице, указывать не будем.

Если при некотором  $l \in \{1, \dots, k\} : m_l = 0$  в (4.4), то условимся понимать правую часть (4.4) следующим образом:

$$\|A^{(i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_{l-1}=1, i_{l+1}=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_{l-1} m_{l+1} \dots m_k},$$

что соответствует сокращенной записи в виде  ${}^{(k-1)}A$ .

Обозначение

$${}^{(k)}A = \|{}^{(k-1)}A^{(i_1)}\|_{i_1=1}^{m_1}$$

будем понимать как блочную матрицу  $k$ -го ранга с элементами-матрицами  $(k-1)$ -го ранга:

$${}^{(k-1)}A^{(i_1)} = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_2=1, \dots, i_k=1}^{m_2 \dots m_k}.$$

Аналогично обозначение

$${}^{(k)}A = \left\| {}^{(k-l)}A^{(i_1 \dots i_l)} \right\|_{i_1=1, \dots, i_l=1}^{m_1 \dots m_l}, \quad k > l,$$

следует понимать как блочную матрицу  $k$ -го ранга с элементами-матрицами  $(k-l)$ -го ранга:

$${}^{(k-l)}A^{(i_1 \dots i_l)} = \left\| A^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_{l+1}=1, \dots, i_k=1}^{m_{l+1} \dots m_k}.$$

Пусть

$${}^{(k)}A = \left\| A^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}, \quad {}^{(k)}B = \left\| B^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}.$$

Будем считать, что  ${}^{(k)}A = {}^{(k)}B$  тогда и только тогда, когда

$$A^{(i_1 \dots i_k)} = B^{(i_1 \dots i_k)}$$

для всех  $1 \leq i_p \leq m_p; p = 1, \dots, k$ .

Кроме того,

$$\alpha {}^{(k)}A + \beta {}^{(k)}B = \left\| \alpha A^{(i_1 \dots i_k)} + \beta B^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}, \quad \alpha, \beta \in \Re^1.$$

Матрицу  ${}^{(k)}C$ , определенную равенством

$${}^{(k)}C = \left\| \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1 \dots i_{k+l})} B^{(i_1 \dots i_l)} \right\|_{i_{l+1}=1, \dots, i_{l+k}=1}^{m_{l+1} \dots m_{l+k}}, \quad (4.5)$$

будем называть сверткой порядка  $l$  матриц  ${}^{(k+l)}A$  и  ${}^{(l)}B$  и обозначать следующим образом:

$${}^{(k)}C = {}^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} {}^{(l)}B.$$

Если в (4.5)  $k = 0$ , то правую часть этого равенства будем понимать следующим образом:

$$\sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1 \dots i_l)} B^{(i_1 \dots i_l)}.$$

Условимся также под  $\overset{0}{\cdot}$  понимать обычное умножение.

По определению операция свертки обладает, в частности, следующими достаточно очевидными свойствами:

1. Коммутативность:

$${}^{(k+l)}A \cdot {}^l {}^{(l)}B = {}^{(l)}B \cdot {}^l {}^{(k+l)}A.$$

2. Дистрибутивность:

$$(\alpha {}^{(k+l)}A + \beta {}^{(k+l)}B) \cdot {}^l {}^{(l)}C = \alpha {}^{(k+l)}A \cdot {}^l {}^{(l)}C + \beta {}^{(k+l)}B \cdot {}^l {}^{(l)}C$$

для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ .

**Определение 4.2.** Процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , назовем  $N$  раз дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39), если для всех  $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  и любых двух моментов остановки  $s, t$  таких, что  $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ , справедливо с вероятностью 1 представление

$${}^{(p_l)}B_{\lambda_l \dots \lambda_1 s} = {}^{(p_l)}B_{\lambda_l \dots \lambda_1 t} + \int_t^s {}^{(p_l)}B_{0 \lambda_l \dots \lambda_1 \tau} d\tau + \int_t^s {}^{(p_l+1)}B_{1 \lambda_l \dots \lambda_1 \tau} \frac{1}{2} d\mathbf{f}_\tau,$$

где  $\lambda_q$  принимает значения 0 или 1 и

$$p_l = \sum_{i=1}^l \lambda_i.$$

Матричные случайные процессы  ${}^{(p_q)}B_{\lambda_q \dots \lambda_1 \tau}; q = 1, 2, \dots, N$ , покомпонентно принадлежащие классу  $M_2([0, T])$ , назовем  $q$ -ми производными процесса  $\eta_s$  по Ито. При этом полагаем

$$\begin{aligned} p_0 &\stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad {}^{(p_0)}B_{\lambda_0 \dots \lambda_1 \tau} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_\tau, \\ {}^{(p_0)}B_{0 \lambda_0 \dots \lambda_1 \tau} &\stackrel{\text{def}}{=} B_{0\tau}, \quad {}^{(p_0+1)}B_{1 \lambda_0 \dots \lambda_1 \tau} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(1)}B_{1\tau}. \end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е 4.2.** Отметим, что если в определении 4.2 матричные случайные процессы  ${}^{(p_q)}B_{\lambda_q \dots \lambda_1 \tau}; q = 1, 2, \dots, N$  покомпонентно принадлежат классу  $M_2([0, T])$  и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке  $[0, T]$ , то в этом случае процесс  $\eta_s$  называем  $N$  раз непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39).

Введем обозначения

$$\left\| Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)}Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{ R(\mathbf{x}, s) \},$$

где  $\lambda_l = 1$  или  $\lambda_l = 0$ ,  $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = L$  и  $i_l = 0$  при  $\lambda_l = 0$ , а  $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$  и  $i_l = 1, \dots, m$  при  $\lambda_l = 1$  ( $l = 1, \dots, N$ ),

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0; l = 1, \dots, k\}.$$

Рассмотрим функцию  $R : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  и сформулируем утверждение об  $N$ -кратной дифференцируемости по Ито случайного процесса  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ .

**Лемма 4.2.** *Пусть выполнены условия АI–АIII теоремы 1.6 и пусть для всех*

$$(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^{N-1} \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \in \mathcal{L}$$

и всех

$$(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^N \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) \in M_2([0, T]).$$

Тогда процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$   $N$  раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39) и его производные по Ито имеют вид

$${}^{(p_l)} B_{\lambda_l \dots \lambda_1 s} = {}^{(p_l)} Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{R(\mathbf{x}_s, s)\}, \quad (4.6)$$

где  $l = 1, \dots, N$  и

$$p_l = \sum_{p=1}^l \lambda_p.$$

Если  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \Re^n$ , то полагаем

$$Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0; l \geq 2 \\ Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m; l \geq 2 \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0; l = 1 \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m; l = 1 \end{cases}, \quad (4.7)$$

$$\left\| Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)} Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{ \mathbf{x} \}, \quad (4.8)$$

$$Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 0; l \geq 2 \\ Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m; l \geq 2 \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 0; l = 1 \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m; l = 1 \end{cases}, \quad (4.9)$$

$$\left\| Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_t \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)} Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{ \mathbf{x}_t \}; \quad (4.10)$$

$\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$  —  $i$ -й столбец матричной функции  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ .

Далее будем считать случайный процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$   $N$  раз непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39), если он удовлетворяет определению 4.2, а его производные по Ито определяются соотношением (4.6) и являются среднеквадратически непрерывными.

## 4.2 Разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

Как уже отмечалось ранее, разложения Тейлора–Ито были впервые получены в [212], [234]. Эти результаты можно найти также в монографии [148]. Рассмотрим результаты, приведенные в [148], придерживаясь обозначений и терминологии, принятых в данной книге.

Обозначим

$$\mathcal{G}_{rk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : r + 1 \leq 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k \leq 2r\},$$

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q\},$$

где  $\lambda_l = 1$  или  $\lambda_l = 0$  ( $l = 1, \dots, k$ ),

$${}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t} = \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l},$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \quad (k \geq 1) \text{ и } J_{(\lambda_0 \dots \lambda_1)s, t}^{(i_0 \dots i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ .

**Теорема 4.1.** Пусть процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $r+1$  раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39). Тогда для любых двух моментов остановки  $s, t$  таких, что  $\mathsf{P}\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ , с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} \stackrel{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t} + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.12)$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \sum_{(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}} \int_t^s \left( \int_{t'}^{\tau_r} {}^{(p_{r+1})} Q_{\lambda_{r+1}} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_{r+1}}\} \stackrel{\lambda_{r+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \dots \stackrel{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}, \quad (4.13)$$

причем правые части (4.12) и (4.13) существуют в среднеквадратическом смысле.

Перепишем (4.12) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}_s, s) &= R(\mathbf{x}_t, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} \sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1} \dots \sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k} Q_{\lambda_l}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) \cdot J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{(i_k \dots i_1)} + \\ &+ D_{r+1_{s,t}} \text{ с. в. 1.} \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что (4.12) получается путем  $r+1$ -кратного последовательного применения формулы Ито к процессу  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ .

Упорядочим члены разложения (4.12) по возрастанию порядка малости при  $s \downarrow t$  в среднеквадратическом смысле.

**Теорема 4.2.** В условиях теоремы 4.1 с вероятностью 1 справедливо разложение:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} \stackrel{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t} + H_{r+1_{s,t}}, \quad (4.14)$$

$$H_{r+1_{s,t}} = \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} \stackrel{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t} + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.15)$$

причем существует такая постоянная  $C_r < \infty$ , что

$$\left( \mathbb{M} \left\{ (H_{r+1_{s,t}})^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_r (s-t)^{(r+1)/2},$$

а правые части (4.14) и (4.15) существуют в среднеквадратическом смысле.

Доказательство теоремы сводится к перегруппировке членов разложения (4.12), после чего приходим к (4.14).

Результаты теоремы 4.2 могут быть переписаны в следующей более развернутой форме:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \\ \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} \sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1} \dots \sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k} Q_{\lambda_l}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) \cdot J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} + \\ + H_{r+1_{s,t}} \text{ с.в. 1,}$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} = \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{G}_{rk}} \sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1} \dots \sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k} Q_{\lambda_l}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) \cdot J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} + \\ + D_{r+1_{s,t}}.$$

Термин "разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена" далее будем применять как к разложению (4.12), так и к разложению (4.14).

Нетрудно проверить с помощью формулы Ито, что многие повторные стохастические интегралы из правой части (4.12) связаны линейными соотношениями. Таким образом, эти интегралы не образуют минимальной совокупности. В следующем разделе будет построено разложение Тейлора–Ито по минимальной совокупности повторных стохастических интегралов Ито.

## 4.3 Унифицированные разложения Тейлора – Ито

### 4.3.1 Обозначения

Рассмотрим повторные стохастические интегралы Ито:

$$J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \quad (4.16)$$

$$I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \quad (4.17)$$

где  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ .

В соответствии с введенными ранее обозначениями

$${}^{(k)} J_{l_1 \dots l_{k_s,t}} = \left\| J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \quad {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{k_s,t}} = \left\| I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Из теоремы 3.1, свойств повторных стохастических интегралов, рассмотренных в главе 3 и общих свойств стохастических интегралов вытекают следующие свойства стохастических интегралов  $J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ ,  $I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$  при  $k > 0$ :

$$\mathbb{M} \left\{ J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0,$$

$$J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (s - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} \text{ с.в. 1},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} = \frac{(s-t)^{2(l_1 + \dots + l_k) + k}}{(2l_k + 1)(2(l_k + l_{k-1}) + 2) \dots (2(l_k + \dots + l_1) + k)}, \quad (4.18)$$

$$\int_t^s (s - \tau)^j d\mathbf{f}_{\tau}^{(p)} J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = J_{jl_1 \dots l_{k_s,t}}^{(pi_1 \dots i_k)} \text{ с.в. 1; } p = 1, \dots, m, \quad (4.19)$$

$$\int_t^s (s - \tau)^j d\tau J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{(s-t)^{j+1}}{j+1} J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} - \frac{1}{j+1} J_{l_1+j+1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \text{ с.в. 1}, \quad (4.20)$$

$$\mathbb{M} \left\{ I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0,$$

$$I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (t - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} \text{ с.в. 1},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{l_1 \dots l_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} = \frac{(s-t)^{2(l_1 + \dots + l_k) + k}}{(2l_1 + 1)(2(l_1 + l_2) + 2) \dots (2(l_1 + \dots + l_k) + k)}, \quad (4.21)$$

$$\int_t^s (t-\tau)^j d\mathbf{f}_\tau^{(p)} I_{l_1 \dots l_k s, \tau}^{(i_1 \dots i_k)} = I_{j l_1 \dots l_k s, t}^{(p i_1 \dots i_k)} \text{ с в. 1; } p = 1, \dots, m,$$

$$\int_t^s (t-\tau)^j d\tau I_{l_1 \dots l_k s, \tau}^{(i_1 \dots i_k)} = -\frac{1}{j+1} I_{l_1 + j + 1 \ l_2 \ \dots \ l_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \text{ с в. 1},$$

где  $j = 0, 1, \dots$

Рассмотрим матрицы  $k$ -го ранга

$${}^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k} = \left\| (s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} J_{l_1 \dots l_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$${}^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k} = \left\| (s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Введем совокупность матриц  $k$ -го ранга:

$$C^{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ {}^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A} \right\},$$

где  $\mathcal{A}$  — некоторое подмножество множества наборов  $(k, j, l_1, \dots, l_k)$  целых неотрицательных чисел.

Определим операцию над множеством матриц  $k$ -го ранга:

$$(C^{\mathcal{A}} \otimes D^{\mathcal{A}}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}} {}^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}D_{jl_1 \dots l_k}.$$

Нетрудно видеть, что введенная операция обладает переместительным и распределительным свойствами.

В соответствии с введенными обозначениями

$$\begin{aligned} (s \ominus t)^{\mathcal{A}} &= \left\{ {}^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A} \right\}, \\ (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}} &= \left\{ {}^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A} \right\}. \end{aligned}$$

Под обозначением  $C^{\mathcal{A}} \overset{1}{\cdot} A$  будем понимать следующее:

$$\left\{ {}^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}A : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} C^{\mathcal{A}} \stackrel{1}{\cdot} {}^{(1)}A.$$

Обозначим

$$G_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left( G_{p-1}^{(i)} L R(\mathbf{x}, t) - L G_{p-1}^{(i)} R(\mathbf{x}, t) \right), \quad (4.22)$$

где  $p = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m$ ;

$$L^j R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{L \dots L}_j R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j = 1, 2, \dots \\ R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j = 0 \end{cases}, \quad (4.23)$$

операторы  $L, G_0^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  определяются равенствами (4.2), (4.3).

Нетрудно видеть, что функция в левой части (4.22) определена в соответствии с определением функции  $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$ .

Обозначим

$$\left\| L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ R(\mathbf{x}, t) \}, \quad (4.24)$$

$$\left\| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ R(\mathbf{x}, t) \}, \quad (4.25)$$

$$\left\| G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k, q=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+1)} G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ R(\mathbf{x}, t) \}, \quad (4.26)$$

$$\left\| L G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k, q=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+1)} L G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ R(\mathbf{x}, t) \}, \quad (4.27)$$

$$\left\| G_0^{(p)} G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k, p, q=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+2)} G_0 G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ R(\mathbf{x}, t) \}, \quad (4.28)$$

где  $j, k, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$

Будем понимать элементы матриц в левых частях (4.24) – (4.28) при  $k = 0$  следующим образом:

$$L^j R(\mathbf{x}, t), \quad L^j R(\mathbf{x}, t), \quad G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t), \quad L G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t), \quad G_0^{(p)} G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t).$$

Отметим, что функции, являющиеся элементами матриц в левых частях (4.24) – (4.28) также определены в соответствии с определением функции  $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$ .

Предполагаем, что функции  $R(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$  таковы, что существуют все частные производные, входящие в левые части (4.22) – (4.28).

### 4.3.2 Первое унифицированное разложение Тейлора–Ито

Следующая теорема устанавливает первое унифицированное разложение Тейлора–Ито процесса  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  по минимальной системе повторных стохастических интегралов Ито вида

$$J_{l_1 \dots l_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}.$$

**Теорема 4.3.** Пусть процесс Ито  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$   $r + 1$  раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39). Тогда при всех  $s, t \in [0, T]$  таких, что  $s \geq t$ , с вероятностью 1 справедливо первое унифицированное разложение Тейлора–Ито

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \left( C^{\mathcal{A}_q} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q} \right) + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.29)$$

правая часть (4.29) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$\begin{aligned} D_{r+1_{s,t}} = & \int_t^s \left( Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) + \\ & + \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} {}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где

$$C^{\mathcal{A}_q} \{ \eta_\tau \} = \left\{ {}^{(k)} L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

$$Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} = \left\{ {}^{(k)} L^{j+1} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r \right\},$$

$$H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} = \left\{ {}^{(k+1)} G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r \right\},$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; \ k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Прежде чем доказывать теорему 4.3 выпишем первое унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.29) в более развернутой форме специально для тех читателей, которые не хотели бы вникать в доказательство теоремы и сложные обозначения, а хотели бы обозреть формулу (4.29) в более доступной форме:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\ \times \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1 \dots l_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1 s, t} \text{ с в. 1.}$$

(1-е унифицированное разложение Тейлора–Ито)

Доказательство проведем по индукции. Применим к процессу  $\eta_s$  формулу Ито. Тогда с вероятностью 1

$$\eta_s = \eta_t + D_{1 s, t}, \quad (4.31)$$

где

$$D_{1 s, t} = \int_t^s L\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s G_0\{\eta_\tau\}^\frac{1}{2} d\mathbf{f}_\tau. \quad (4.32)$$

Соотношения (4.31) и (4.32) являются частными случаями (4.29) и (4.30) при  $r = 0$ . Применим формулу Ито к подынтегральным процессам в  $D_{1 s, t}$ . Тогда с вероятностью 1 имеем

$$D_{1 s, t} = \tilde{D}_{1 s, t} + D_{2 s, t}, \quad (4.33)$$

$$\tilde{D}_{1 s, t} = (s-t)L\{\eta_t\} + G_0\{\eta_t\}^\frac{1}{2} J_{0 s, t} = (C^{\mathcal{A}_1}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_1}), \quad (4.34)$$

$$D_{2 s, t} = \int_t^s \left( \int_t^{s_1} L^2\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^{s_1} G_0 L\{\eta_\tau\}^\frac{1}{2} d\mathbf{f}_\tau \right) ds_1 + \\ + \int_t^s \left( \int_t^{s_1} LG_0\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^{s_1} {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_\tau\}^\frac{1}{2} d\mathbf{f}_\tau \right)^\frac{1}{2} d\mathbf{f}_{s_1}. \quad (4.35)$$

Заменим с вероятностью 1 порядок интегрирования в (4.35) согласно теореме 3.1:

$$\begin{aligned}
 D_{2,s,t} &= \int_t^s L^2\{\eta_\tau\} d\tau(s-\tau) + \int_t^s LG_0\{\eta_\tau\} d\tau^{\frac{1}{2}} J_{0,s,\tau} + \\
 &+ \int_t^s G_0 L\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau(s-\tau) + \int_t^s \left( {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau \right)^{\frac{1}{2}} J_{0,s,\tau} = \\
 &= \int_t^s \left( Q^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \right) + \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \right). \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Объединив соотношения (4.31) – (4.36), придем с вероятностью 1 к представлению

$$\eta_s = \eta_t + \left( C^{\mathcal{A}_1}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_1} \right) + D_{2,s,t}, \quad (4.37)$$

$$D_{2,s,t} = \int_t^s \left( Q^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \right) + \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \right). \quad (4.38)$$

Нетрудно видеть, что (4.37) и (4.38) являются частными случаями формул (4.29) и (4.30) при  $r = 1$ . Таким образом, утверждение теоремы справедливо при  $r = 0, 1$ .

Продолжая начатый процесс разложения в (4.36), используя теоремы 3.1, 3.3 и 3.4, с вероятностью 1 получаем

$$\begin{aligned}
 D_{2,s,t} &= \frac{1}{2}(s-t)^2 L^2\{\eta_t\} + LG_0\{\eta_t\}^{\frac{1}{2}} \left( (s-t)J_{0,s,t} - J_{1,s,t} \right) + \\
 &+ G_0 L\{\eta_t\}^{\frac{1}{2}} J_{1,s,t} + {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_t\}^{\frac{2}{2}} {}^{(2)}J_{00,s,t} + D_{3,s,t} = \\
 &= \frac{1}{2}(s-t)^2 L^2\{\eta_t\} + (s-t)LG_0\{\eta_t\}^{\frac{1}{2}} J_{0,s,t} + \\
 &+ G_1\{\eta_t\}^{\frac{1}{2}} J_{1,s,t} + {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_t\}^{\frac{2}{2}} {}^{(2)}J_{00,s,t} + D_{3,s,t} = \\
 &= \left( C^{\mathcal{A}_2}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_2} \right) + D_{3,s,t},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{3_{s,t}} &= \int_t^s L^3 \{\eta_\tau\} d\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \int_t^s \left( G_0 L^2 \{\eta_\tau\} \frac{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \\
 &+ \left( \int_t^s L^2 G_0 \{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s \left( {}^{(2)}G_0 L G_0 \{\eta_\tau\} \frac{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \right) \frac{1}{\cdot} ((s-\tau) J_{0_{s,\tau}} - J_{1_{s,\tau}}) + \\
 &+ \int_t^s L G_0 L \{\eta_\tau\} d\tau \frac{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} + \int_t^s \left( {}^{(2)}G_0 G_0 L \{\eta_\tau\} \frac{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} + \\
 &+ \int_t^s {}^{(2)}L G_0 G_0 \{\eta_\tau\} d\tau \frac{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} + \int_t^s \left( {}^{(3)}G_0 G_0 G_0 \{\eta_\tau\} \frac{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} = \\
 &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_2} \{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_2}) + \int_t^s \left( (H^{\mathcal{A}_2} \{\eta_\tau\} \frac{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_2} \right).
 \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение теоремы справедливо и при  $r = 2$ .

Проделаем по предложенной схеме еще одну итерацию:

$$\begin{aligned}
 D_{3_{s,t}} &= L^3 \{\eta_t\} \int_t^s d\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \left( G_0 L^2 \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} \int_t^s d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \\
 &+ L^2 G_0 \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} \int_t^s d\tau ((s-\tau) J_{0_{s,\tau}} - J_{1_{s,\tau}}) + \\
 &+ \left( {}^{(2)}G_0 L G_0 \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} \int_t^s d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{1}{\cdot} ((s-\tau) J_{0_{s,\tau}} - J_{1_{s,\tau}}) + \\
 &+ L G_0 L \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} \int_t^s d\tau J_{1_{s,\tau}} + \left( {}^{(2)}G_0 G_0 L \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} \int_t^s d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} + \\
 &+ {}^{(2)}L G_0 G_0 \{\eta_t\} \frac{2}{\cdot} \int_t^s d\tau {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} + \left( {}^{(3)}G_0 G_0 G_0 \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} + \\
 &+ D_{4_{s,t}} = L^3 \{\eta_t\} \frac{(s-t)^3}{6} + G_0 L^2 \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} \frac{1}{2} J_{2_{s,t}} + \\
 &+ L^2 G_0 \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} \left( \frac{1}{2} J_{2_{s,t}} - (s-t) J_{1_{s,t}} + \frac{(s-t)^2}{2} J_{0_{s,t}} \right) + \\
 &+ {}^{(2)}G_0 L G_0 \{\eta_t\} \frac{2}{\cdot} \left( {}^{(2)}J_{10_{s,t}} - {}^{(2)}J_{01_{s,t}} \right) + \\
 &+ L G_0 L \{\eta_t\} \frac{1}{\cdot} ((s-t) J_{1_{s,t}} - J_{2_{s,t}}) + {}^{(2)}G_0 G_0 L \{\eta_t\} \frac{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{01_{s,t}} + \\
 &+ {}^{(2)}L G_0 G_0 \{\eta_t\} \frac{2}{\cdot} \left( (s-t) {}^{(2)}J_{00_{s,t}} - {}^{(2)}J_{10_{s,t}} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + {}^{(3)}G_0 G_0 G_0 \{\eta_t\} {}^3 \cdot {}^{(3)}J_{000_{s,t}} + D_{4_{s,t}} = \\
 & = \frac{(s-t)^3}{6} L^3 \{\eta_t\} + \frac{(s-t)^2}{2} L^2 G_0 \{\eta_t\} {}^1 \cdot J_{0_{s,t}} + \\
 & + G_2 \{\eta_t\} {}^1 \cdot J_{2_{s,t}} + (s-t) L G_1 \{\eta_t\} {}^1 \cdot J_{1_{s,t}} + \\
 & + {}^{(2)}G_1 G_0 \{\eta_t\} {}^2 \cdot {}^{(2)}J_{10_{s,t}} + (s-t) {}^{(2)}L G_0 G_0 \{\eta_t\} {}^2 \cdot {}^{(2)}J_{00_{s,t}} + \\
 & + {}^{(2)}G_0 G_1 \{\eta_t\} {}^2 \cdot {}^{(2)}J_{01_{s,t}} + {}^{(3)}G_0 G_0 G_0 \{\eta_t\} {}^3 \cdot {}^{(3)}J_{000_{s,t}} + D_{4_{s,t}} = \\
 & = (Q^{\mathcal{A}_3} \{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_3}) + D_{4_{s,t}} \text{ в. 1,}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{4_{s,t}} = & \int_t^s \left( \int_t^\tau L^4 \{\eta_\theta\} d\theta + \int_t^\tau G_0 L^3 \{\eta_\theta\} {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\theta \right) d\tau \frac{1}{2} (s-\tau)^2 + \\
 & + \int_t^s \left( \int_t^\tau L G_0 L^2 \{\eta_\theta\} d\theta + \int_t^\tau {}^{(2)}G_0 G_0 L^2 \{\eta_\theta\} {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\theta \right) {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\tau \frac{1}{2} (s-\tau)^2 + \\
 & + \int_t^s \left( \int_t^\tau L^3 G_0 \{\eta_\theta\} d\theta + \right. \\
 & \left. + \int_t^\tau ({}^{(2)}G_0 L^2 G_0 \{\eta_\theta\} {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\theta) d\tau \right. {}^1 \cdot ((s-\tau) J_{0_{s,\tau}} - J_{1_{s,\tau}}) + \\
 & + \int_t^s \left( \int_t^\tau {}^{(2)}L G_0 L G_0 \{\eta_\theta\} d\theta + \right. \\
 & \left. + \int_t^\tau ({}^{(3)}G_0 G_0 L G_0 \{\eta_\theta\} {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\theta) {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\tau \right. {}^1 \cdot ((s-\tau) J_{0_{s,\tau}} - J_{1_{s,\tau}}) + \\
 & + \int_t^s \left( \int_t^\tau L^2 G_0 L \{\eta_\theta\} d\theta + \int_t^\tau {}^{(2)}G_0 L G_0 L \{\eta_\theta\} {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\theta \right) d\tau \cdot J_{1_{s,\tau}} + \\
 & + \int_t^s \left( \int_t^\tau {}^{(2)}L G_0 G_0 L \{\eta_\theta\} d\theta + \int_t^\tau {}^{(3)}G_0 G_0 G_0 L \{\eta_\theta\} {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\theta \right) {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\tau \cdot J_{1_{s,\tau}} + \\
 & + \int_t^s \left( \int_t^\tau {}^{(2)}L^2 G_0 G_0 \{\eta_\theta\} d\theta + \int_t^\tau {}^{(3)}G_0 L G_0 G_0 \{\eta_\theta\} {}^1 \cdot d\mathbf{f}_\theta \right) d\tau \cdot {}^2 \cdot {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_t^s \left( \int_t^\tau {}^{(3)}LG_0G_0G_0 \{\eta_\theta\} d\theta + \right. \\
 & \left. + \int_t^\tau {}^{(4)}G_0G_0G_0G_0 \{\eta_\theta\} {}^1 df_\theta \right) {}^1 df_\tau {}^2 {}^{(2)}J_{00s,\tau}. \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

Применяя теоремы 3.1, 3.3 и 3.4 к правой части (4.39) с вероятностью 1 получаем:

$$\begin{aligned}
 D_{4s,t} = & \left( \int_t^s L^4 \{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s G_0L^3 \{\eta_\tau\} {}^1 df_\tau \right) \frac{1}{6}(s-\tau)^3 + \\
 & + \left( \int_t^s LG_0L^2 \{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s {}^{(2)}G_0G_0L^2 \{\eta_\tau\} {}^1 df_\tau \right) {}^1 \frac{1}{2} J_{2s,\tau} + \\
 & + \left( \int_t^s L^2G_0L \{\eta_\tau\} d\tau + \right. \\
 & \left. + \int_t^s {}^{(2)}G_0LG_0L \{\eta_\tau\} {}^1 df_\tau \right) {}^1 ((s-\tau)J_{1s,\tau} - J_{2s,\tau}) + \\
 & + \left( \int_t^s {}^{(2)}LG_0G_0L \{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s {}^{(3)}G_0G_0G_0L \{\eta_\tau\} {}^1 df_\tau \right) {}^2 {}^{(2)}J_{01s,\tau} + \\
 & + \left( \int_t^s L^3G_0 \{\eta_\tau\} d\tau + \right. \\
 & \left. + \int_t^s {}^{(2)}G_0L^2G_0 \{\eta_\tau\} {}^1 df_\tau \right) {}^1 \left( \frac{1}{2}J_{2s,\tau} - (s-\tau)J_{1s,\tau} + \frac{1}{2}(s-\tau)^2J_{0s,\tau} \right) + \\
 & + \left( \int_t^s {}^{(2)}LG_0LG_0 \{\eta_\tau\} d\tau + \right. \\
 & \left. + \int_t^s {}^{(3)}G_0G_0LG_0 \{\eta_\tau\} {}^1 df_\tau \right) {}^2 \left( {}^{(2)}J_{10s,\tau} - {}^{(2)}J_{01s,\tau} \right) + \\
 & + \left( \int_t^s {}^{(2)}L^2G_0G_0 \{\eta_\tau\} d\tau + \right. \\
 & \left. + \int_t^s {}^{(3)}G_0LG_0G_0 \{\eta_\tau\} {}^1 df_\tau \right) {}^2 ((s-\tau){}^{(2)}J_{00s,\tau} - {}^{(2)}J_{10s,\tau}) + \\
 & + \left( \int_t^s {}^{(3)}LG_0G_0G_0 \{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s {}^{(4)}G_0G_0G_0G_0 \{\eta_\tau\} {}^1 df_\tau \right) {}^3 {}^{(3)}J_{000s,\tau}. \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Перегруппировывая слагаемые в правой части (4.40) и используя соотношения:

$$G_1 = G_0 L - LG_0,$$

$$G_2 = \frac{1}{2} (G_1 L - LG_1) = \frac{1}{2} (G_0 L^2 - 2LG_0 L + L^2 G_0),$$

с вероятностью 1 приходим к равенству

$$\begin{aligned} D_{4_{s,t}} &= \int_t^s \left( Q^{\mathcal{A}_3} \{ \eta_\tau \} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_3} \right) + \\ &+ \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_3} \{ \eta_\tau \} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_3} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение теоремы справедливо и при  $r = 3$ .

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором  $n = r$ , и докажем его справедливость при  $n = r + 1$ . Применяя формулу Ито к подынтегральным процессам в (4.30), с вероятностью 1 получаем следующие соотношения:

$$D_{r+1_{s,t}} = \tilde{D}_{r+1_{s,t}} + D_{r+2_{s,t}}, \quad (4.41)$$

$$\tilde{D}_{r+1_{s,t}} = \left( Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_t \} \otimes \int_t^s d\tau (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) + \left( \left( H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_t \} \stackrel{1}{\cdot} \int_t^s d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} D_{r+2_{s,t}} &= \int_t^s \left( \int_t^{\tau_1} dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau_1 \otimes (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) + \\ &+ \int_t^s \left( \left( \int_t^{\tau_1} dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_{\tau_1} \right) \otimes (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

где

$$\begin{aligned} dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} &= \\ &= \left\{ {}^{(k)} X_{j l_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} d\tau + {}^{(k+1)} Y_{j l_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\}; \end{aligned}$$

$$dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} =$$

$$= \left\{ {}^{(k+1)}Z_{jl_1 \dots l_k} \{\eta_\tau\} d\tau + {}^{(k+2)}W_{jl_1 \dots l_k} \{\eta_\tau\} \frac{1}{!} d\mathbf{f}_\tau : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\}.$$

Здесь

$${}^{(k)}X_{jl_1 \dots l_k} \{\eta_\tau\} = {}^{(k)}L^{j+2}G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\eta_\tau\},$$

$${}^{(k+1)}Z_{jl_1 \dots l_k} \{\eta_\tau\} = {}^{(k+1)}LG_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\eta_\tau\},$$

$${}^{(k+1)}Y_{jl_1 \dots l_k} \{\eta_\tau\} = {}^{(k+1)}G_0 L^{j+1} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\eta_\tau\},$$

$${}^{(k+2)}W_{jl_1 \dots l_k} \{\eta_\tau\} = {}^{(k+2)}G_0 G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\eta_\tau\}.$$

Заменим с вероятностью 1 согласно теореме 3.4 порядок интегрирования в повторных стохастических интегралах в (4.43):

$$\begin{aligned} D_{r+2_{s,t}} &= \int_t^s \left( \left( dU^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} \int_\tau^s d\tau_1 \right) \otimes (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) + \\ &\quad + \int_t^s \left( \left( dV^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} \frac{1}{!} \int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1} \right) \otimes (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Рассмотрим следующие стохастические интегралы:

$$\int_\tau^s d\tau_1 (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)}, \quad \int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} d\tau_1; \quad q = 1, \dots, m.$$

Согласно свойствам (4.19) и (4.20) имеем

$$\begin{aligned} &\int_\tau^s d\tau_1 {}^{(k)}(s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k} = \\ &= \begin{cases} {}^{(k)}(s \ominus \tau)_{j+1 \ l_1 \dots l_k} - (1/(s - \tau)^{j+1}) \cdot {}^{(k)}(s \ominus \tau)_{j+1 \ l_1+j+1 \ l_2 \dots l_k} & \text{при } k > 0 \\ (s - \tau)^{j+1}/((j+1)!) & \text{при } k = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.45)$$

с вероятностью 1,

$$\int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(s - \tau)^j} (s \ominus \tau)_{jjl_1 \dots l_k}^{(qi_1 \dots i_k)} \text{ c. v. 1; } k = 0, 1, \dots. \quad (4.46)$$

Подставив (4.45) и (4.46) в (4.44), получим, что с в. 1

$$\begin{aligned} D_{r+2_{s,t}} &= \int_t^s \left( Q^{\mathcal{A}_{r+1}}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right) + \\ &+ \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_{r+1}}\{\eta_\tau\} \stackrel{!}{=} df_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Итак, (4.30) доказано.

В результате подстановки (4.45) и (4.46) в (4.42) при  $\tau = t$  с вероятностью 1 получим

$$\tilde{D}_{r+1_{s,t}} = (C^{\mathcal{A}_{r+1}}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_{r+1}}). \quad (4.48)$$

Таким образом, соотношения (4.41), (4.47) и (4.48) доказывают соотношение (4.29). Теорема доказана.  $\square$

Нетрудно видеть, что часть членов в основной части первого унифицированного разложения Тейлора–Ито (4.29) имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при  $s \downarrow t$ , чем порядок малости остаточного члена  $D_{r+1_{s,t}}$ . Такое заключение можно сделать на основании свойства (4.18).

Следующая теорема показывает, как необходимо перегруппировать члены первого унифицированного разложения Тейлора–Ито (4.29), чтобы расположить их по порядку малости. При этом новый остаточный член разложения будет иметь больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при  $s \downarrow t$  по сравнению с членами основной части разложения.

**Теорема 4.4.** В условиях теоремы 4.3 с в. 1 справедливо следующее первое унифицированное разложение Тейлора–Ито вида

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \left( C^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q} \right) + H_{r+1_{s,t}} \text{ с в. 1}, \quad (4.49)$$

причем существует такая постоянная  $C_r < \infty$ , что справедлива оценка

$$\left( M \left\{ (H_{r+1_{s,t}})^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_r (s - t)^{(r+1)/2}; \quad r = 0, 1, \dots,$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} = (C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}},$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int_t^s \left( Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) + \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \right)^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q &= \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left( j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}, \\ \mathcal{U}_r &= \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : \quad k + j + \sum_{p=1}^k l_p \leq r; \quad k + 2 \left( j + \sum_{p=1}^k l_p \right) \geq r + 1; \right. \\ &\quad \left. k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\} = \left( \bigcup_{q=1}^r \mathcal{A}_q \right) \cap \left( \bigcup_{q=r+1}^{\infty} \mathcal{D}_q \right), \end{aligned}$$

а другие обозначения такие же, как в теореме 4.3.

**Доказательство.** Перегруппируем члены разложения (4.29) следующим образом:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \left( C^{\mathcal{D}_q} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q} \right) + H_{r+1_{s,t}} \text{ с.в. 1,}$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} = \left( C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r} \right) + D_{r+1_{s,t}}.$$

С помощью неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{M} \left\{ (H_{r+1_{s,t}})^2 \right\} \right)^{1/2} &\leq \left( \mathbb{M} \left\{ (C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r})^2 \right\} \right)^{1/2} + \\ &\quad + \left( \mathbb{M} \left\{ (D_{r+1_{s,t}})^2 \right\} \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) &= \\ &= \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{U}_r} \frac{(s-t)^j}{j!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_t \} J_{l_1 \dots l_k s,t}^{(i_1 \dots i_k)}, \end{aligned}$$

то с помощью свойства (4.18) и неравенства Минковского получим

$$\left( \mathbb{M} \left\{ (C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r})^2 \right\} \right)^{1/2} \leq K_r (s-t)^u, \quad K_r < \infty,$$

где

$$u = \min_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{U}_r} \left\{ \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом

$$\left( \mathsf{M} \left\{ \left( C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r} \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \leq K_r (s - t)^{(r+1)/2}. \quad (4.51)$$

Рассмотрим  $D_{r+1_{s,t}}$ :

$$\begin{aligned} D_{r+1_{s,t}} &= \int_t^s \left( Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) + \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \right)^1 d\mathbf{f}_\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) \\ &= \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_r} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \left( I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j_{s,t}} + \sum_{p=1}^m J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j_{s,t}}^{(p)} \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

где

$$I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j_{s,t}} = \int_t^s L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} \frac{(s - \tau)^j}{j!} d\tau J_{l_1\dots l_k s, \tau}^{(i_1\dots i_k)},$$

$$J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j_{s,t}}^{(p)} = \int_t^s G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} \frac{(s - \tau)^j}{j!} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} J_{l_1\dots l_k s, \tau}^{(i_1\dots i_k)}.$$

Согласно теореме 3.1 о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j_{s,t}} &= \frac{1}{j!} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s - \tau)^j \times \\ &\times L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} d\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j_{s,t}}^{(p)} &= \frac{1}{j!} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s - \tau)^j \times \\ &\times G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Далее, применяя неравенство Минковского к (4.52), используя соотношения (4.53), (4.54), неравенства (1.46), (1.47) при  $n = 1$ , а также свойство (4.18), получаем следующую оценку:

$$\left( \mathbb{M} \left\{ (D_{r+1_{s,t}})^2 \right\} \right)^{1/2} \leq M_r (s-t)^v, \quad M_r < \infty,$$

где

$$v = \min_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_r} \left\{ 1 + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p, \quad \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\left( \mathbb{M} \left\{ (D_{r+1_{s,t}})^2 \right\} \right)^{1/2} \leq M_r (s-t)^{(r+1)/2}. \quad (4.55)$$

Из (4.50)–(4.55) находим, что

$$\left( \mathbb{M} \left\{ (H_{r+1_{s,t}})^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_r (s-t)^{(r+1)/2}, \quad C_r < \infty.$$

Теорема доказана  $\square$ .

Термины ”первое унифицированное разложение Тейлора – Ито”, или просто ”унифицированное разложение Тейлора – Ито”, далее будем применять как к разложению (4.29), так и к разложению (4.49).

### 4.3.3 Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито

Поскольку между повторными стохастическими интегралами Ито  $J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$  и  $I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$  в силу аддитивности справедливо с вероятностью 1 соотношение

$$J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_k=0}^{l_k} C_{l_1}^{j_1} \dots C_{l_k}^{j_k} (s-t)^{l_1+\dots+l_k-j_1-\dots-j_k} I_{j_1 \dots j_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)},$$

где  $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$  — как обычно означает биномиальный коэффициент, то разложение процесса Ито  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$  можно строить как по повторным стохастическим интегралам Ито  $J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ , что было сделано в предыдущем разделе, так и по повторным стохастическим интегралам Ито  $I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ .

Сформулируем теорему о втором унифицированном разложении процесса Ито  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , по повторным стохастическим интегралам  $I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ .

**Теорема 4.5.** В условиях теоремы 4.3 справедливо второе унифицированное разложение Тейлора–Ито

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1_{s,t}} \text{ с в. 1}, \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} D_{r+1_{s,t}} &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \\ &+ \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\}^1 d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \end{aligned} \quad (4.57)$$

правые части (4.56) и (4.57) существуют в среднеквадратическом смысле, причем

$$\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} = \left\{ {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j\{\eta_t\} : (j, k, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

а остальные обозначения такие же, как в теореме 4.3.

Прежде чем доказывать теорему 4.5 выпишем второе унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.56) в более развернутой форме:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}_s, s) &= R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\ &\times \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1_{s,t}} \text{ с в. 1} \\ &(2\text{-е унифицированное разложение Тейлора–Ито}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Используя комбинаторные соображения, нетрудно убедиться, что при  $q = 0, 1, 2, 3, \dots$  с вероятностью 1 выполняются равенства

$$(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) = (\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}). \quad (4.58)$$

Используя (4.58) и теорему 4.3, приходим к утверждению настоящей теоремы. Теорема доказана  $\square$ .

Упорядочим теперь члены второго унифицированного разложения Тейлора–Ито (4.56) по порядку малости при  $s \downarrow t$  в среднеквадратическом смысле.

**Теорема 4.6.** В условиях теоремы 4.3 справедливо второе унифицированное разложение Тейлора–Ито

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{D}_q}) + \hat{H}_{r+1_{s,t}} \text{ с в. 1,} \quad (4.59)$$

причем существует такая постоянная  $C_r < \infty$ , что

$$\left( M \left\{ (\hat{H}_{r+1_{s,t}})^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_r (s - t)^{(r+1)/2}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

где

$$\hat{H}_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{C}^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} D_{r+1_{s,t}} = & \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \\ & + \int_t^s \left( \left( H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right); \end{aligned} \quad (4.61)$$

правые части (4.59)–(4.61) существуют в среднеквадратическом смысле, и в них введены такие же обозначения, как в теоремах 4.3–4.5.

Доказательство теоремы 4.6 аналогично доказательству теоремы 4.4.

Термины ”второе унифицированное разложение Тейлора – Ито”, или просто ”унифицированное разложение Тейлора – Ито”, будем применять как к разложению (4.56), так и к разложению (4.59).

Важно отметить, что первое и второе унифицированные разложения Тейлора–Ито могут быть получены с помощью другого подхода и без требования среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса  $\eta_s$ .

Поясним это более подробно. Заметим, что разложения, полученные в теоремах 4.3 – 4.6, строились с применением теорем о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито на каждом шаге разложения. В результате при построении этих разложений было необходимо выполнение среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса  $\eta_s$ .

Однако, можно поступить иначе: сначала рассматривается разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена (без требования среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса  $\eta_s$ ), а затем с вероятностью 1 с помощью теорем о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито сумма

$$\eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} \stackrel{p_k}{\rightarrow} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} \quad (4.62)$$

преобразуется к одной из форм:

$$\eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}), \quad \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}).$$

При этом производные по Ито процесса  $\eta_s$  не входят в повторные стохастические интегралы  $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)}$  из суммы (4.62), и, следовательно, достаточно потребовать лишь их покомпонентной принадлежности к классу  $M_2([0, T])$ .

В результате можно объединить теоремы 4.3–4.6 в одну и снять условие среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса  $\eta_s$ .

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 4.7.** *Пусть процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$   $r+1$  раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39). Тогда при всех  $s, t \in [0, T]$  таких, что  $s \geq t$ , справедливы первое и второе унифицированные разложения Тейлора–Ито вида:*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1,s,t} \text{ с. в. 1},$$

(1-е унифицированное разложение Тейлора–Ито)

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1,s,t} \text{ с. в. 1},$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Ито)

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1,s,t} \text{ с. в. 1},$$

(1-е унифицированное разложение Тейлора–Ито)

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{D}_q}) + \hat{H}_{r+1_{s,t}} \text{ с в. } 1,$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Ито)

$\partial e$

$$H_{r+1_{s,t}} = (C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}},$$

$$\hat{H}_{r+1_{s,t}} = (\hat{C}^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}},$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \sum_{(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}} \int_t^s \dots \left( \int_t^{\tau_r(p_{r+1})} Q_{\lambda_{r+1}} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_{r+1}}\}^{\lambda_{r+1}} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \dots \\ \dots \stackrel{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1},$$

а остальные обозначения соответствуют обозначениям, введенным в теоремах 4.3–4.6.

#### 4.4 Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов

Поскольку стохастические интегралы могут быть представлены не только в форме Ито, но и в форме Стратоновича, то определения и теоремы из предыдущих разделов данной главы могут быть переформулированы в терминах стохастических интегралов Стратоновича, учитывая формулы связи последних со стохастическими интегралами Ито.

Рассмотрим процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ ,  $s \in [0, T]$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ , а  $\mathbf{x}_s$  — решение СДУ Ито (1.39).

**Определение 4.3.** Процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ ,  $s \in [0, T]$ , назовем дифференцируемым по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39), если для любых двух моментов остановки  $s, t$  таких, что  $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ , с вероятностью 1 справедливо представление

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s H_{0_\tau} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^{*s} H_{1_\tau}^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}. \quad (4.63)$$

*Случайные процессы  $H_{0_\tau}, H_{1_\tau}^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ , удовлетворяющие условиям существования правой части (4.63) в среднеквадратическом смысле, назовем производными по Стратоновичу процесса  $\eta_s$ ,  $s \in [0, T]$ .*

Следующая лемма устанавливает один из возможных вариантов достаточных условий дифференцируемости по Стратоновичу.

**Лемма 4.3.** *Пусть выполнены условия:*

1.  $R(\mathbf{x}, s)$ ,  $LR(\mathbf{x}, s)$ ,  $G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, s) \in \mathcal{L}$ ;  $i = 1, \dots, m$ .
2. Для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$ ;  $\tau, \theta \in [0, T]$ ;  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$  и некоторого  $\nu > 0$ :
 
$$|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{y}, t)| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad K_1 < \infty,$$

$$|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)| + |LG_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_2 < \infty,$$

$$|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \theta)| \leq K_3 |\tau - \theta|^\nu (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_3 < \infty.$$
3. Справедливы условия AI, AII (теорема 1.6).
4.  $\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^8\} < \infty$ .

Тогда процесс  $\eta_s$ ,  $s \in [0, T]$  дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39) и его производные по Стратоновичу определяются равенствами

$$H_{0_\tau} = LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m G_0^{(i)} G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau), \quad H_{1_\tau}^{(i)} = G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau), \quad (4.64)$$

где  $i = 1, \dots, m$ .

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся следующим утверждением [76].

**Лемма 4.4.** *Пусть выполнены условия AI–AIII (теорема 1.6) и*

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\} < \infty, \quad n \geq 1.$$

Тогда решение СДУ Ито (1.39) удовлетворяет следующим оценкам:

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_t|^{2n}\} \leq (1 + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\}) e^{C(t-t_0)},$$

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\} \leq C_1 (1 + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\}) (t - t_0)^n e^{C(t-t_0)},$$

где  $t \in [t_0, T]$ ,  $T < \infty$ ,  $C = 2n(2n+1)K^2$ ,  $C_1$  — положительная постоянная, зависящая только от  $n$ ,  $K$ ,  $T - t_0$ ;  $K < \infty$  — постоянная.

Используя условия леммы 4.3, лемму 4.4 и элементарное неравенство  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ |G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \theta)|^4 \right\} &\leq \\ &\leq 8 \mathbb{M} \left\{ |G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \tau)|^4 \right\} + \\ &\quad + 8 \mathbb{M} \left\{ |G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \tau) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \theta)|^4 \right\} \leq \\ &\leq 8K_1^4 \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\theta|^4 \} + 8K_3^4 |\tau - \theta|^{4\nu} \mathbb{M} \{ (1 + |\mathbf{x}_\theta|)^4 \} \leq \\ &\leq C_2 |\tau - \theta|^2 + C_3 |\tau - \theta|^{4\nu} \rightarrow 0 \text{ при } \tau - \theta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где  $C_2, C_3 < \infty$  — постоянные;  $\tau, \theta \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ |G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \theta)|^8 \right\} &\leq K_2^8 \mathbb{M} \{ (1 + |\mathbf{x}_\theta|)^8 \} \leq \\ &\leq C_4 (1 + \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_\theta|^8 \}) \leq C_5 (1 + (1 + \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0|^8 \}) e^{Cs}) < \infty, \end{aligned}$$

где  $C_4, C_5 < \infty$  — постоянные;  $\theta \in [0, T]$ .

Аналогично

$$\mathbb{M} \left\{ |LG_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \theta)|^8 \right\} < \infty, \quad \theta \in [0, T].$$

Таким образом,  $G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) \in Q_8([0, T])$ ;  $i_1 = 1, \dots, m$  (см. главу 1).

В условиях леммы по формуле Ито для любых двух моментов остановки  $s, t$ , для которых  $\mathbb{P}\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ , с вероятностью 1 справедливы равенства

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \int_t^s LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i_1=1}^m \int_t^s G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}, \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) &= G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) + \int_t^s LG_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \\ &\quad + \sum_{i_2=1}^m \int_t^s G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

где  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ , причем интегралы, входящие в правые части (4.65), (4.66), существуют в среднеквадратическом смысле.

Мы установили, что  $G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) \in Q_8([0, T])$ ;  $i_1 = 1, \dots, m$ , поэтому согласно лемме 1.4 с вероятностью 1

$$\int_t^s G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \int_t^{*s} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} - \frac{1}{2} \int_t^s G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau. \quad (4.67)$$

Согласно лемме 1.4 моменты  $t, s$  в (4.67) являются неслучайными, однако формула (4.67) может быть обобщена на случай моментов остановки (см., например, [148]).

Из (4.65), (4.67) для моментов остановки  $t, s$  с вероятностью 1 получим

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s H_{0_\tau} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^{*s} H_{1_\tau}^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}, \quad (4.68)$$

где случайные процессы  $H_{0_\tau}, H_{1_\tau}^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  удовлетворяют условиям существования в среднеквадратическом смысле правой части (4.68) и имеют вид (4.64). Лемма доказана.  $\square$

Дадим определение  $N$ -кратной дифференцируемости по Стратоновичу.

**Определение 4.4.** Процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \mathfrak{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^1$ , назовем  $N$  раз дифференцируемым по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39), если для всех  $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  и любых двух моментов остановки  $s, t$  таких, что  $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ , с вероятностью 1 справедливо представление

$${}^{(p_l)} H_{\lambda_l \dots \lambda_{1_s}} = {}^{(p_l)} H_{\lambda_l \dots \lambda_{1_t}} + \int_t^s {}^{(p_l)} H_{0 \lambda_l \dots \lambda_{1_\tau}} d\tau + \int_t^s {}^{(p_l+1)} H_{1 \lambda_l \dots \lambda_{1_\tau}} \frac{1}{2} d\mathbf{f}_\tau,$$

где  $\lambda_q$  принимает значения 0 или 1,

$$p_l = \sum_{i=1}^l \lambda_i.$$

Матричные случайные процессы  ${}^{(p_q)} H_{\lambda_q \dots \lambda_{1_\tau}}$ ;  $q = 1, 2, \dots, N$ , покомпонентно принадлежащие классу  $M_2([0, T])$ , назовем  $q$ -ми производными по Стратоновичу процесса  $\eta_s$ . При этом полагаем

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad {}^{(p_0)} H_{\lambda_0 \dots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_\tau, \quad {}^{(p_0)} H_{0 \lambda_0 \dots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} H_{0_\tau}, \quad {}^{(p_0+1)} H_{1 \lambda_0 \dots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(1)} H_{1_\tau}.$$

Обобщим лемму 4.3 на случай многократной дифференцируемости по Стратоновичу.

Введем обозначения:

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)} D_{\lambda_l} \dots D_{\lambda_1} \{R(\mathbf{x}, s)\},$$

где  $\lambda_l = 1$  или  $\lambda_l = 0$ ,

$$D_{\lambda_l}^{(i_l)} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}$$

и  $i_l = 0$  при  $\lambda_l = 0$ , а  $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$  и  $i_l = 1, \dots, m$  при  $\lambda_l = 1$  ( $l = 1, \dots, N$ ),

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0; l = 1, \dots, k\}.$$

**Лемма 4.5.** Пусть выполнены условия:

1. Для всех

$$(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^N \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) \in \mathcal{L}.$$

2. Для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$ ;  $\tau, \theta \in [0, T]$ ;  $(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^{N+1} \mathcal{M}_g$  и некоторого  $\nu > 0$ :

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{y}, \tau)| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad K_1 < \infty,$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau)| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_2 < \infty,$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \theta)| \leq K_3 |\tau - \theta|^\nu (1 + |\mathbf{x}|),$$

$K_3 < \infty$ .

3. Справедливы условия AI, AII (теорема 1.6).

4.  $\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^8\} < \infty$ .

Тогда процесс  $\eta_s, s \in [0, T]$   $N$  раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39) и его производные по Стратоновичу имеют вид

$${}^{(p_l)} H_{\lambda_l \dots \lambda_1 s} = {}^{(p_l)} D_{\lambda_l} \dots D_{\lambda_1} \{R(\mathbf{x}_s, s)\},$$

$$\text{где } l = 1, \dots, N \text{ и } p_l = \sum_{p=1}^l \lambda_p.$$

Доказательство леммы нетрудно провести по индукции.

В случае  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \Re^n$ , положим

$$D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_2}^{(i_2)} \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0, l \geq 2 \\ D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_2}^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m, l \geq 2 \\ \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0, l = 1 \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m, l = 1 \end{cases}, \quad (4.69)$$

где

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} \Sigma_j(\mathbf{x}, t),$$

$\Sigma_j(\mathbf{x}, t)$  —  $j$ -й столбец матричной функции  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ ,

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)} D_{\lambda_l} \dots D_{\lambda_1} \{ \mathbf{x} \}. \quad (4.70)$$

Далее также будем часто использовать следующие записи:

$$D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_2}^{(i_2)} \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 0, l \geq 2 \\ D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_2}^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m, l \geq 2 \\ \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 0, l = 1 \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m, l = 1 \end{cases}, \quad (4.71)$$

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_t \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)} D_{\lambda_l} \dots D_{\lambda_1} \{ \mathbf{x}_t \}. \quad (4.72)$$

## 4.5 Разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клодена и Платена

**Теорема 4.8.** [147]. Пусть процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$   $r+1$  раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке

$[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39). Тогда для любых двух моментов остановки  $s, t$  таких, что  $\mathsf{P}\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ , с вероятностью 1 справедливо разложение Тейлора–Стратоновича вида

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} \cdot {}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^* + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.73)$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \sum_{(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}} \int_t^{*s} \dots \left( \int_t^{*\tau_r} {}^{(p_{r+1})} D_{\lambda_{r+1}} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_1}\} \cdot {}^{\lambda_{r+1}} d\mathbf{w}_{\tau_1} \right) \dots \cdot {}^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}}, \quad (4.74)$$

правые части (4.73) и (4.74) существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения:

$${}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^* = \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k},$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*s} \dots \int_t^{*\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \text{ при } k \geq 1, \quad (4.75)$$

$$\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)} \text{ при } i = 1, \dots, m \text{ и } \mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau.$$

Перепишем (4.73) в развернутой форме

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}_s, s) &= R(\mathbf{x}_t, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} \sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1} \dots \sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k} D_{\lambda_l}^{(i_k)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) \cdot J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} + \\ &+ D_{r+1_{s,t}} \text{ с. в. 1.} \end{aligned}$$

Порядок малости при  $s \downarrow t$  в среднеквадратическом смысле общего члена разложения (4.73) определяется только порядком малости повторного стохастического интеграла Стратоновича  $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)}$ . Из результатов главы 3 следует, что этот интеграл Стратоновича имеет такой же порядок малости при  $s \downarrow t$  в среднеквадратическом смысле, что и соответствующий ему стохастический интеграл Ито. Поэтому общий член разложения (4.73) имеет порядок малости, равный порядку малости повторного стохастического интеграла Ито:

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)},$$

где  $i_l = 0$  при  $\lambda_l = 0$  и  $i_l = 1, \dots, m$  при  $\lambda_l = 1$ .

Нетрудно видеть, что

$$\left( \mathbb{M} \left\{ \left( J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_k (s-t)^{k - \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j \right) / 2},$$

где  $C_k < \infty$  — постоянная.

В силу сказанного часть слагаемых разложения (4.73) имеет больший порядок малости при  $s \downarrow t$  в среднеквадратическом смысле, чем порядок малости остаточного члена  $D_{r+1,s,t}$  разложения (4.73), для которого справедлива оценка

$$\left( \mathbb{M} \left\{ \left( D_{r+1,s,t} \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_r (s-t)^{(r+1)/2}, \quad C_r < \infty \text{ — постоянная.}$$

Положим

$$\mathcal{G}_{rk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : r+1 \leq 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k \leq 2r\},$$

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q\},$$

где  $\lambda_l = 1$  или  $\lambda_l = 0$ ;  $l = 1, \dots, k$ .

Сформулируем теорему об упорядоченном по порядкам малости в среднеквадратическом смысле разложении Тейлора–Стратоновича процесса  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**Теорема 4.9.** В условиях теоремы 4.8 с вероятностью 1 справедливо разложение Тейлора–Стратоновича вида

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{ \eta_t \} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^* + H_{r+1,s,t}, \quad (4.76)$$

$$H_{r+1,s,t} = D_{r+1,s,t} + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{ \eta_t \} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^*, \quad (4.77)$$

правые части (4.76) и (4.77) существуют в среднеквадратическом смысле, причем найдется такая постоянная  $C_r < \infty$ , что

$$\left( \mathsf{M} \left\{ \left( H_{r+1_{s,t}} \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_r (s-t)^{(r+1)/2},$$

а  $D_{r+1_{s,t}}$  имеет вид (4.74).

Перепишем результаты теоремы 4.9 в развернутой форме

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}_s, s) &= R(\mathbf{x}_t, t) + \\ &+ \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} \sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1} \dots \sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k} D_{\lambda_l}^{(i_k)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) \cdot J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)} + \\ &+ H_{r+1_{s,t}}, \text{ с в. 1,} \\ H_{r+1_{s,t}} &= \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{G}_{rk}} \sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1} \dots \sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k} D_{\lambda_l}^{(i_k)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) \cdot J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)} \\ &+ D_{r+1_{s,t}}. \end{aligned}$$

Термин "разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена" будем далее применять как к разложению (4.73), так и к разложению (4.76).

## 4.6 Унифицированные разложения Тейлора – Стратоновича

В данном разделе путем замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито и с помощью соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито (см. главу 3) правая часть (4.73) будет преобразована к двум представлениям, в которые входят минимальные совокупности повторных стохастических интегралов Стратоновича. Эти представления мы назовем унифицированными разложениями Тейлора–Стратоновича.

### 4.6.1 Первое унифицированное разложение Тейлора – Стратоновича

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

**Лемма 4.6.** Пусть  $h(\tau), g(\tau), G(\tau) : [t, s] \rightarrow \Re^1$  — непрерывные на промежутке  $[t, s]$  функции, причем  $G(\tau)$  — первообразная функции  $g(\tau)$ . Пусть также  $\xi_{\tau}^{(l)} \in Q_8([t, s])$  и имеет вид

$$\xi_{\tau}^{(l)} = \int_t^{\tau} a_u du + \int_t^{\tau} b_u d\mathbf{f}_u^{(l)}, \quad l = 1, 2.$$

Тогда

$$\int_t^s g(\tau) \int_t^{*\tau} h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_{\theta}^{(j)} d\tau = \int_t^s (G(s) - G(\theta)) h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_{\theta}^{(j)} \quad (4.78)$$

с вероятностью 1, где  $i, j, l = 1, 2$ ;  $\mathbf{f}_{\tau}^{(1)}, \mathbf{f}_{\tau}^{(2)}$  —  $F_{\tau}$ -измеримые при всех  $\tau \in [t, s]$  независимые стандартные винеровские процессы.

Доказательство. В условиях леммы можно использовать лемму 1.4 и следствие 1.1 при  $F(x, \theta) \equiv xh(\theta)$ ,

$$\eta_{\theta} = \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)},$$

так как очевидно, что  $\eta_{\theta} \in Q_8([t, s])$ ;  $xh(\theta)$  — дважды непрерывно дифференцируемая по  $x$  функция, причем эти производные ограничены при всех  $x \in \Re^1$ ;  $\eta_{\theta}h(\theta) \in M_2([t, s])$ . По лемме 1.4 и следствию 1.1

$$\int_t^{*\tau} h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_{\theta}^{(j)} = \int_t^{\tau} h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_{\theta}^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^{\tau} h(\theta) \xi_{\theta}^{(l)} d\theta, \quad (4.79)$$

$$\int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} = \int_t^{\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^{\theta} b_u du \quad (4.80)$$

с вероятностью 1, где  $\mathbf{1}_A$  — индикатор множества  $A$ .

Подставим (4.79), (4.80) в левую часть (4.78) и дважды воспользуемся теоремой 3.1:

$$\begin{aligned} & \int_t^s g(\tau) \int_t^{*\tau} h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_{\theta}^{(j)} d\tau = \\ & = \int_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_{\theta}^{(j)} \int_{\theta}^s g(\tau) d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s b_u du \int_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \int_\theta^s g(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta \int_\theta^s g(\tau) d\tau \\
& = G(s) \left( \int_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s b_u du \int_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) - \\
& - \left( \int_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int_u^s G(\theta) h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s G(\theta) h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s b_u du \int_u^s h(\theta) G(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) = \\
& = G(s) \left( \int_t^s h(\theta) \int_t^\theta \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s h(\theta) \int_t^\theta b_u du d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) - \\
& - \left( \int_t^s G(\theta) h(\theta) \int_t^\theta \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s G(\theta) h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s h(\theta) G(\theta) \int_t^\theta b_u du d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) \tag{4.81}
\end{aligned}$$

с вероятностью 1. Используя (4.79), (4.80), формулу, которая отличается от (4.79) заменой  $h(\theta)$  на  $G(\theta)h(\theta)$ , а также (4.81), получаем (4.78). Лемма доказана.  $\square$

Введем ряд обозначений

$$I_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^{*s} (t - \tau_1)^{l_1} \dots \int_t^{*\tau_{k-1}} (t - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \tag{4.82}$$

где  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ,

$$(k) I_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^* = \| I_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)} \|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$${}^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k}^* = \left\| (s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$\bar{G}_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left( \bar{G}_{p-1}^{(i)} \bar{L} - \bar{L} \bar{G}_{p-1}^{(i)} \right), \quad p = 1, 2, \dots; \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.83)$$

$$\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)},$$

$\bar{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}$ , операторы  $L$  и  $G_0^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  определяются равенствами (4.2), (4.3);

$$\mathcal{A}_q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

$$\left\| \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} \bar{L}^j R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \{R(\mathbf{x}, t)\},$$

$$\bar{L}^j R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{\bar{L} \dots \bar{L}}_j R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j \geq 1 \\ R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j = 0 \end{cases}.$$

Сформулируем теорему о первом унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича.

**Теорема 4.10.** Пусть процесс Ито  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $r+1$  раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке  $[0, T]$  на траекториях уравнения (1.39). Тогда при всех  $s, t \in [0, T]$  таких, что  $s \geq t$ , с вероятностью 1 справедливо первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\bar{C}^{\mathcal{A}_q} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)_*^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.84)$$

причем правая часть (4.84) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$\bar{C}^{\mathcal{A}_q} \{ \eta_\tau \} = \left\{ {}^{(k)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \{ \eta_t \} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

$$(s \ominus t)_*^{\mathcal{A}_q} = \left\{ {}^{(k)} (s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k}^* : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

a  $D_{r+1,s,t}$  имеет вид (4.74).

Прежде чем доказывать теорему 4.10 выпишем первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича (4.84) в более развернутой форме:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\ \times \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} \bar{L}^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1,s,t} \text{ с в. 1} \\ (1\text{-е унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича}).$$

**Доказательство.** Покажем, что с вероятностью 1

$$\sum_{(\lambda_q, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_q} {}^{(p_q)} D_{\lambda_q} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} \stackrel{p_q}{\cdot} J_{(\lambda_q \dots \lambda_1)s,t}^* = (\bar{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)_*)^{\mathcal{A}_q}. \quad (4.85)$$

При  $q = 1$  равенство (4.85) справедливо. Предположим, что (4.85) справедливо при некотором  $q > 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{(\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{q+1}} {}^{(p_{q+1})} D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_{q+1}} \{\eta_t\} \stackrel{p_{q+1}}{\cdot} J_{(\lambda_1 \dots \lambda_{q+1})s,t}^* = \\ & = \sum_{\lambda_{q+1} \in \{1, 0\}} \int_t^s \sum_{(\lambda_q, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_q} \left( {}^{(p_{q+1})} D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_{q+1}} \{\eta_t\} \stackrel{p_q}{\cdot} J_{(\lambda_1 \dots \lambda_q)\theta,t}^* \right) \stackrel{\lambda_{q+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_\theta = \\ & = \sum_{\lambda_{q+1} \in \{1, 0\}} \int_t^s \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \times \\ & \times \left( {}^{(k+\lambda_{q+1})} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j D_{\lambda_{q+1}} \{\eta_t\} \stackrel{k}{\cdot} I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^* \right) \stackrel{\lambda_{q+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_\theta = \\ & = \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \left( {}^{(k)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^{j+1} \{\eta_t\} \stackrel{k}{\cdot} \int_t^s \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{k_\theta,t}}^* d\theta + \right. \\ & \left. + \left( {}^{(k+1)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \bar{G}_0 \{\eta_t\} \stackrel{k}{\cdot} \int_t^s \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{k_\theta,t}}^* \right) \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\theta \right) \quad (4.86) \end{aligned}$$

с вероятностью 1, где  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$  — компоненты  $\mathbf{f}_\tau$ .

Согласно лемме 4.6

$$\int_t^s \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k\theta,t}}^* d\theta = \\ = \frac{1}{(j+1)!} \begin{cases} (s-t)^{j+1} & \text{при } k=0 \\ (s-t)^{j+1} \cdot {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^* - (-1)^{j+1} \cdot {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k-1}, l_{k+j+1,s,t}}^* & \text{при } k>0 \end{cases} \quad (4.87)$$

с вероятностью 1. Кроме того, согласно введенным обозначениям

$$\int_t^s \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k\theta,t}}^* d\mathbf{f}_\theta^{(i_{k+1})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^j}{j!} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k j_{s,t}}^* \quad (4.88)$$

Подставим выражения (4.87), (4.88) в (4.86). Далее, сгруппировав слагаемые в полученном выражении при повторных стохастических интегралах Стратоновича с одинаковыми нижними индексами и воспользовавшись равенством

$$\bar{G}_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p (-1)^q C_p^q \bar{L}^q \bar{G}_0^{(i)} \bar{L}^{p-q} R(\mathbf{x}, t), \quad C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}, \quad (4.89)$$

которое вытекает из (4.83), заметим, что полученное выражение с вероятностью 1 равно

$$\sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_{q+1}} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \{ \eta_t \} \stackrel{k}{\vdash} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^*$$

Таким образом, (4.85) доказано.

Далее, суммируя равенства (4.85) при  $q = 1, 2, \dots, r$  и используя (4.73), приходим к (4.84). Теорема доказана  $\square$ .

Также как и в случае унифицированных разложений Тейлора–Ито, упорядочим члены первого унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича (4.84) по порядку малости в среднеквадратическом смысле при  $s \downarrow t$ :

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\bar{C}^{\mathcal{D}_q} \{ \eta_t \} \otimes (s \ominus t)_*^{\mathcal{D}_q}) + \bar{H}_{r+1,s,t}, \quad (4.90)$$

где

$$\bar{H}_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{C}^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)_*^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}};$$

множества  $\mathcal{D}_q$  и  $\mathcal{U}_r$  такие же, как в теореме 4.4, а  $D_{r+1_{s,t}}$  имеет вид (4.74).

Разложение (4.90) обладает тем свойством, что его остаточный член  $\bar{H}_{r+1_{s,t}}$  имеет больший порядок малости при  $s \downarrow t$  в среднеквадратическом смысле по сравнению с членами основной части разложения (4.90).

Термины "первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" и "унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" будем применять далее как к разложению (4.84), так и к разложению (4.90).

Если  $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , то в первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича (4.90) входят соответственно 2, 4, 7, 12, 20 и 33 различных повторных стохастических интеграла Стратоновича. В то же время разложение Тейлора–Стратоновича (4.76) содержит уже 2, 5, 9, 17, 29 и 50 различных повторных стохастических интегралов Стратоновича соответственно.

#### 4.6.2 Второе унифицированное разложение Тейлора – Стратоновича

Введем в рассмотрение повторные стохастические интегралы Стратоновича

$$J_{l_1 \dots l_k s,t}^{*(i_1 \dots i_k)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_t^{*s} (s - \tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{*\tau_{k-1}} (s - \tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \quad (4.91)$$

где  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ .

Нетрудно видеть, что в силу аддитивности стохастических интегралов и формулы бинома Ньютона с вероятностью 1 справедливо равенство

$$I_{l_1 \dots l_k s,t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_k=0}^{l_k} \prod_{g=1}^k C_{l_g}^{j_g} (t - s)^{l_1 + \dots + l_k - j_1 - \dots - j_k} J_{j_1 \dots j_k s,t}^{*(i_1 \dots i_k)} \text{ с в. 1}, \quad (4.92)$$

где  $C_l^k \stackrel{\text{def}}{=} l!/(k!(l-k)!)$  — биномиальный коэффициент.

Таким образом, унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича процесса  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ ,  $s \in [0, T]$ , можно строить как по повторным стохастическим интегралам  $I_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)}$ , так и по повторным стохастическим интегралам  $J_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)}$ . Этому вопросу посвящен данный раздел.

Положим

$$(k) J_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^* = \left\| J_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$(k) (s \hat{\ominus} t)_{j l_1 \dots l_k}^* = \left\| (s \hat{\ominus} t)_{j l_1 \dots l_k}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} J_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$\left\| \bar{L}^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}.$$

Сформулируем теорему о втором унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича.

**Теорема 4.11.** В условиях теоремы 4.10 с вероятностью 1 справедливо второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \left( \tilde{C}^{\mathcal{A}_q} \{ \eta_t \} \otimes (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{A}_q} \right) + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.93)$$

причем правая часть (4.93) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$\tilde{C}^{\mathcal{A}_q} \{ \eta_t \} = \left\{ {}^{(k)} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \{ \eta_t \} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

$$(s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{A}_q} = \left\{ {}^{(k)} (s \hat{\ominus} t)_{j l_1 \dots l_k}^* : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

$D_{r+1_{s,t}}$  имеет вид (4.74).

Прежде чем доказывать теорему 4.11 выпишем второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича (4.93) в более развернутой форме:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \bar{L}^j \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1_{s,t}} \text{ с. в. 1.}$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича)

Доказательство теоремы сводится к проверке при  $q = 1, 2, \dots, r$  справедливости равенств

$$(\tilde{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{A}_q}) = (\bar{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)_*^{\mathcal{A}_q}) \text{ с в. 1,}$$

которые в развернутом виде выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \{\eta_t\} {}^{k \cdot (k)} J_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^* = \\ & = \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} {}^{(k)} \bar{L}^j \{\eta_t\} {}^{k \cdot (k)} I_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^* \text{ с в. 1.} \quad (4.94) \end{aligned}$$

Равенство (4.94) проверяется путем подстановки в его правую часть выражения (4.92) и использования формулы (4.89).

Упорядочим члены разложения (4.93) по порядку малости при  $s \downarrow t$  в среднеквадратическом смысле:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\tilde{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{D}_q}) + \tilde{H}_{r+1_{s,t}} \text{ с в. 1,} \quad (4.95)$$

где

$$\tilde{H}_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{C}^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}},$$

$D_{r+1_{s,t}}$  имеет вид (4.74), а  $\mathcal{D}_q$  и  $\mathcal{U}_r$  такие же, как в теореме 4.4.

Разложение (4.95) в отличие от разложения (4.93) обладает тем свойством, что остаточный член  $\tilde{H}_{r+1_{s,t}}$  имеет больший порядок малости при  $s \downarrow t$  в среднеквадратическом смысле, нежели члены основной части разложения (4.95).

Термины "второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" и "унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" будем применять далее как к разложению (4.93), так и к разложению (4.95).

Если  $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , то во второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича (4.95) входят соответственно 2, 4, 7, 12, 20 и 33 различных повторных стохастических интеграла Стратоновича. В то же время разложение Тейлора–Стратоновича (4.76) содержит уже 2, 5, 9, 17, 29 и 50 различных повторных стохастических интегралов Стратоновича соответственно.

Заметим, что коэффициентные функции разложений Тейлора–Ито строятся с использованием операторов  $L$  и  $G_0^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , а коэффициентные функции разложений Тейлора–Стратоновича — с использованием операторов

$$\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)} \text{ и } G_0^{(i)}; \quad i = 1, \dots, m.$$

Нетрудно видеть, что

$$\bar{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma^{(ij)}}{\partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}},$$

т.е. оператор  $\bar{L}$  включает в себя частные производные первого порядка. В то же время в оператор  $L$  входят частные производные первого и второго порядка. Таким образом, выражения коэффициентных функций разложений Тейлора–Ито содержат частные производные функций  $R(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t)$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$  более высокого порядка, нежели выражения соответствующих коэффициентных функций разложений Тейлора–Стратоновича.

## 4.7 Сильная сходимость стохастических разложений

В этом разделе рассмотрим результаты, которые получены в [148] и связаны с сильной сходимостью разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, и разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

Введем ряд обозначений. Пусть множество  $\Lambda_r$  определяется следующим образом:

$$\Lambda_r = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : k + n(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \leq r, \lambda_p \in \{0, 1\}, p = 1, \dots, k\},$$

где  $n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  — число нулей среди  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Введем множества  $\mathcal{M}$  и  $B(\Lambda_r)$  вида

$$\mathcal{M} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : \lambda_p \in \{0, 1\}, p = 1, \dots, k, k = 1, 2, \dots\},$$

$$B(\Lambda_r) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M} \setminus \Lambda_r : (\lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_r, \lambda_p \in \{0, 1\}, p = 1, \dots, k\}.$$

В условиях теоремы 4.1, согласно введенным обозначениям, с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} \eta_s &= \eta_{s,t}^{(k)} + R_{k+1_{s,t}}, \\ \eta_{s,t}^{(k)} &= \eta_t + \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_k} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{\overset{p_k}{\cdot}} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}, \\ R_{k+1_{s,t}} &= \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in B(\Lambda_k)} \int_t^s \left( \int_t^{\tau_{k-1}} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_k}\} {}^{\overset{\lambda_k}{\cdot}} d\mathbf{w}_{\tau_k} \right) \dots \\ &\quad \dots {}^{\overset{\lambda_1}{\cdot}} d\mathbf{w}_{\tau_1}. \end{aligned}$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в теорему 4.1.

**Теорема 4.12.** [148]. *Пусть условия теоремы 4.1 выполнены и пусть*

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathsf{M} \left\{ \left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\eta_t\} \right|^2 \right\} &\leq \\ &\leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \left[ \frac{1}{2} (k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) \right]! \end{aligned}$$

для любого  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in B(\Lambda_k)$ ;  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ . Тогда для всех  $t \in [t_0, T]$

$$\mathsf{M} \left\{ \left| \eta_t - \eta_{t,t_0}^{(k)} \right|^2 \right\} \leq C_3 \frac{(C_4(t-t_0))^{k+1}}{[(k+1)/2]!},$$

где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ;  $C_1, \dots, C_4 < \infty$  — постоянные, не зависящие от  $k$ .

Из теоремы 4.12 в частности следует, что усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена  $\eta_{t,t_0}^{(k)}$  сходится в среднеквадратическом смысле к процессу Ито  $\eta_t$ :

$$\text{l.i.m. } \underset{k \rightarrow \infty}{\eta_{t,t_0}^{(k)}} = \eta_t \text{ для всех } t \in [t_0, T].$$

Следующая теорема устанавливает сходимость с вероятностью 1 при  $t \in [t_0, T]$  усеченного разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена  $\eta_{t,t_0}^{(k)}$  к процессу Ито  $\eta_t$ .

**Теорема 4.13.** [148]. Пусть условия теоремы 4.12 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} M \left\{ \left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\eta_t\} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}$$

для любого  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}$ . Тогда усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена  $\eta_{t,t_0}^{(k)}$  сходится при  $k \rightarrow \infty$  и всех  $t \in [t_0, T]$  с вероятностью 1 к процессу Ито  $\eta_t$ :

$$\eta_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{t,t_0}^{(k)} = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{t_0}\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)t, t_0}.$$

В [148] также сформулированы и доказаны аналоги теорем 4.12 и 4.13 о сильной сходимости разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

В условиях теоремы 4.8 согласно введенным обозначениям с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} \eta_s &= \tilde{\eta}_{s,t}^{(k)} + \tilde{R}_{k+1_{s,t}}, \\ \tilde{\eta}_{s,t}^{(k)} &= \eta_t + \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_k} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^*, \\ \tilde{R}_{k+1_{s,t}} &= \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in B(\Lambda_k)} \int_t^{*s} \dots \left( \int_t^{*\tau_{k-1}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_k}\} \overset{\lambda_k}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_k} \right) \dots \\ &\quad \dots \overset{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}. \end{aligned}$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в теореме 4.8.

**Теорема 4.14.** [148]. Пусть условия теоремы 4.8 выполнены и пусть

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq t \leq T} M \left\{ \left| D_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\eta_t\} \right|^2 \right\} &\leq \\ &\leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \left[ \frac{1}{2} (k + n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) \right]! \end{aligned}$$

для любого  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in B(\Lambda_k)$ ;  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ . Тогда для всех  $t \in [t_0, T]$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \eta_t - \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} \right|^2 \right\} \leq C_3 \frac{(C_4(t-t_0))^{k+1}}{[(k+1)/2]!},$$

где  $C_1, \dots, C_4 < \infty$  — постоянные, не зависящие от  $k$ .

Из теоремы 4.14 в частности следует, что усеченное разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена  $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$  сходится в среднеквадратическом смысле к процессу Ито  $\eta_t$ :

$$\text{l.i.m. } \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} = \eta_t \text{ для всех } t \in [t_0, T].$$

Следующая теорема устанавливает сходимость с вероятностью 1 при  $t \in [t_0, T]$  усеченного разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена  $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$  к процессу Ито  $\eta_t$ .

**Теорема 4.15.** [148]. *Пусть условия теоремы 4.14 выполнены и пусть*

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| D_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \{ \eta_t \} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}$$

для любого  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}$ . Тогда усеченное разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена  $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$  сходится при  $k \rightarrow \infty$  и всех  $t \in [t_0, T]$  с вероятностью 1 к процессу Ито  $\eta_t$ :

$$\begin{aligned} \eta_t &= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} = \\ &= \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{ \eta_{t_0} \} \stackrel{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)t, t_0}^*. \end{aligned}$$

Отметим, что сильная сходимость унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича вытекает из сильной сходимости разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена и равенства с вероятностью 1 при соответствующих условиях правых частей унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича и правой части разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена. Аналогичный вывод справедлив и для разложений Тейлора–Ито.

В следующем разделе рассмотрим слабую сходимость разложений Тейлора–Ито.

## 4.8 Слабая сходимость разложений Тейлора–Ито

В данном разделе приведем формулировку теоремы о слабой сходимости разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, которая сформулирована и доказана в [148] (предложение 5.11.1. С. 211–221), а также формулировки соответствующих утверждений для унифицированных разложений Тейлора–Ито.

Обозначим через  $C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$  пространство  $l$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которые вместе со своими частными производными до порядка  $l$  включительно возрастают полиномиально (функция  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  возрастает полиномиально, если существуют постоянные  $C_f > 0$  и  $q_f \in \mathbb{N}$ , зависящие от  $f(\mathbf{x})$  и такие, что для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$|f(\mathbf{x})| \leq C_f(1 + |\mathbf{x}|^{2q_f}).$$

Пусть рассматривается СДУ Ито (1.39) в автономном случае, т.е. когда  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \Sigma(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , с начальным условием  $\mathbf{x}_0$ .

Через  $\mathbf{x}_{s,t}^{(r)}$  обозначим усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена при  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$  вида

$$\mathbf{x}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{x}_t\} {}^{p_k} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}, \quad (4.96)$$

где

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0, 1\}; l = 1, \dots, k\}.$$

Остальные обозначения, входящие в (4.96), такие же, как в (4.12).

**Теорема 4.16.** (предложение 5.11.1, [148]. С. 211). *Пусть  $r \in \{1, 2, \dots\}$  и  $T \in (0, \infty)$  фиксированы, а функции  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$ ,  $\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x})$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$  удовлетворяют условиям АI, АII (теорема 1.6) и принадлежат пространству  $C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ . Тогда для любой функции  $h \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$  существуют постоянные  $K \in (0, \infty)$  и  $n \in \mathbb{N}$  такие, что*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \mathbf{M} \left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\mathbf{x}_t^{(r)}) \mid \mathbf{F}_0 \right\} \right| \leq K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2n})T^{r+1},$$

где  $\mathbf{x}_{t,0}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t^{(r)}$ ;  $\mathbf{x}_t$  — решение СДУ Ито (1.39) в автономном случае с начальным условием  $\mathbf{x}_0$ .

Доказательство теоремы 4.16 дано в [148].

Сформулируем теперь аналог теоремы 4.16 для унифицированных разложений Тейлора–Ито.

Обозначим через  $\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)}, \hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)}$  усеченные первое и второе унифицированные разложения Тейлора–Ито соответственно:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \mathbf{x}_t \} \stackrel{k}{\vdash} {}^{(k)}J_{l_1 \dots l_k s,t}, \quad (4.97)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{x}_t \} \stackrel{k}{\vdash} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k s,t}, \quad (4.98)$$

$${}^{(k)}J_{l_1 \dots l_k s,t} = \left\| J_{l_1 \dots l_k s,t}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \quad {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k s,t} = \left\| I_{l_1 \dots l_k s,t}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Остальные обозначения, входящие в (4.97) и (4.98) такие же, как в (4.29) и (4.56) соответственно.

**Теорема 4.17.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.16. Тогда существуют такие постоянные  $K \in (0, \infty)$  и  $n \in N$ , что*

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \mathbb{M} \left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(r)}) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \right| &\leq K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2n})T^{r+1}, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \mathbb{M} \left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\hat{\mathbf{x}}_t^{(r)}) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \right| &\leq K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2n})T^{r+1}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_{t,0}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_t^{(r)}$ ;  $\hat{\mathbf{x}}_{t,0}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{x}}_t^{(r)}$ ;  $\mathbf{x}_t$  — решение СДУ Ито (1.39) в автономном случае с начальным условием  $\mathbf{x}_0$ .

Доказательство теоремы 4.17 следует из того, что в условиях теоремы 4.16  $\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_{s,t}^{(r)}$  с в. 1 для всех  $0 \leq t \leq s \leq T$ .

## 4.9 Примеры унифицированных разложений

Сначала приведем примеры разложений Тейлора–Ито для решений скалярных СДУ Ито. Положим

$$I_{l_1 \dots l_{k_s}, t} = \begin{cases} \int\limits_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int\limits_t^{t_2} (t - \tau_1)^{l_1} df_{\tau_1} \dots df_{\tau_k} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

где  $f_t \in \Re^1$  — стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим СДУ Ито вида

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (4.99)$$

где  $x_t = x(t, \omega) \in \Re^1$  — случайный процесс, определенный на промежутке  $[0, T]$  и являющийся решением СДУ Ито (4.99);  $a, b \in \Re^1$  — постоянные;  $f_t \in \Re^1$  — стандартный скалярный винеровский процесс.

Унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса  $R(x_t, t) \equiv x_t$ , где  $x_t$  — решение СДУ (4.99), до малых  $O(t^3)$  в среднеквадратическом смысле при  $t \downarrow 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} x_t = x_0 & \left\{ 1 + bI_{0,t,0} + at + b^2 I_{00,t,0} + abtI_{0,t,0} + b^3 I_{000,t,0} + \frac{1}{2}a^2 t^2 + ab^2 t I_{00,t,0} \right. \\ & \left. + b^4 I_{0000,t,0} + ab^3 t I_{000,t,0} + \frac{1}{2}ba^2 t^2 I_{0,t,0} + b^5 I_{00000,t,0} \right\} + H_{6,t,0} \text{ с. в. 1.} \end{aligned}$$

Отметим, что рассмотренный пример представляет собой случай, когда унифицированное разложение Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена идентичны.

Рассмотрим линейное стационарное СДУ Ито вида

$$dx_t = ax_t dt + bdf_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (4.100)$$

где  $x_t = x(t, \omega) \in \Re^1$  — случайный процесс, определенный на промежутке  $[0, T]$  как решение СДУ Ито (4.100);  $a, b \in \Re^1$  — постоянные;  $f_t \in \Re^1$  — стандартный скалярный винеровский процесс.

Унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса  $R(x_t, t) \equiv x_t$ , где  $x_t$  — решение СДУ (4.100), до малых  $O(t^{r+1})$  в среднеквадратическом смысле при  $t \downarrow 0$  имеет вид

$$x_t = \sum_{j=0}^r \frac{a^j (s-t)^j}{j!} x_t + b \sum_{l=0}^r \frac{a^l}{l!} I_{l,t,0} + H_{r+1,t,0} \text{ с. в. 1.} \quad (4.101)$$

Вместе с тем решение СДУ Ито (4.100) определяется равенством

$$x_t = x_0 \exp(at) + b \int_0^t \exp(a(t-\tau)) df_\tau. \quad (4.102)$$

Если разложить экспоненты, входящие в (4.102), с помощью стандартной формулы Тейлора, то также получим разложение Тейлора–Ито (4.101).

Рассмотрим СДУ Ито

$$dx_t = a \sin x_t df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (4.103)$$

где  $x_t = x(t, \omega) \in \Re^1$  — случайный процесс, определенный на промежутке  $[0, T]$  и являющийся решением СДУ Ито (4.103);  $a \in \Re^1$  — постоянная;  $f_t \in \Re^1$  — стандартный скалярный винеровский процесс.

Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса  $R(x_s, s) \equiv x_s$ , где  $x_s$  — решение СДУ (4.103), до малых  $O((s-t)^3)$  в среднеквадратическом смысле при  $s \downarrow t$  имеет вид

$$\begin{aligned} x_s &= x_t + a \sin x_t I_{0,s,t} - \frac{a^3}{4} (\sin 3x_t - 3 \sin x_t) I_{1,s,t} + \frac{a^3}{2} (\sin 3x_t - 3 \sin x_t) I_{000,s,t} \\ &\quad - \frac{3}{8} a^4 (2 \sin 2x_t - \sin 4x_t) I_{01,s,t} + \frac{a^4}{8} (4 \sin 6x_t - 6 \sin 2x_t - 3 \sin 4x_t) I_{10,s,t} \\ &\quad + \frac{a^5}{32} (9 \sin 9x_t - 30 \sin 3x_t + 9 \sin x_t) I_{2,s,t} - \frac{3a^5}{4} (\sin 5x_t - 2 \sin 3x_t + \sin x_t) I_{001,s,t} \\ &\quad - \frac{a^2}{2} \sin 2x_t I_{00,s,t} - \frac{a^5}{8} (9 \sin 9x_t - 12 \sin 7x_t + 12 \sin 5x_t - 16 \sin 3x_t + 9 \sin x_t) I_{100,s,t} \\ &\quad + \frac{3a^5}{8} (6 \sin 5x_t - 2 \sin x_t - 4 \sin 7x_t) I_{010,s,t} + \frac{a^4}{4} (4 \sin 2x_t - 3 \sin 4x_t) I_{0000,s,t} \\ &\quad + \frac{a^5}{2} (-5 \sin 3x_t + 2 \sin x_t + 3 \sin 5x_t) I_{00000,s,t} + H_{6,s,t} \text{ с. в. 1.} \end{aligned}$$

Приведем примеры многомерных стохастических систем и разложений Тейлора–Ито их решений.

Рассмотрим стохастический вариант уравнения Маттье в форме

$$\frac{d^2 \varphi_t}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d\varphi_t}{dt} + (c + \varepsilon \mathbf{f}_t^{(1)}) \varphi_t = \mathbf{f}_t^{(2)}, \quad (4.104)$$

где  $\varphi_t \in \Re^1$  — случайный процесс, являющийся решением уравнения (4.104);  $\mathbf{f}_t^{(1)}$  и  $\mathbf{f}_t^{(2)}$  — скалярные независимые гауссовские белые шумы;  $c$  и  $\varepsilon$  — постоянные.

Перепишем уравнение (4.104) в форме СДУ Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(2)} \\ -c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} & 1 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (4.105)$$

где  $\mathbf{x}_t^{(1)} = \varphi_t$ ;  $\mathbf{x}_t^{(2)} = d\varphi_t/dt$ ;  $\mathbf{f}_t^{(1)}$  и  $\mathbf{f}_t^{(2)}$  — скалярные независимые стандартные винеровские процессы.

Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент  $\mathbf{x}_s^{(1)}$  и  $\mathbf{x}_s^{(2)}$  решения системы (4.105) до малых  $O((s-t)^{5/2})$  в среднеквадратическом смысле при  $s \downarrow t$  с в. 1 имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(1)} = & \mathbf{x}_t^{(1)} + (s-t)\mathbf{x}_t^{(2)} - \varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} I_{1,s,t}^{(1)} + I_{1,s,t}^{(2)} - \varepsilon(s-t)\mathbf{x}_t^{(1)} I_{0,s,t}^{(1)} + (s-t)I_{0,s,t}^{(2)} + \\ & + \frac{(s-t)^2}{2} \left( -c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + H_{5,s,t}^{(1)}, \\ \mathbf{x}_s^{(2)} = & \mathbf{x}_t^{(2)} - \varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} I_{0,s,t}^{(1)} + I_{0,s,t}^{(2)} + (s-t) \left( -c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \\ & + \left( \varepsilon \mathbf{x}_t^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) I_{1,s,t}^{(1)} - \varepsilon^2 I_{1,s,t}^{(2)} + \varepsilon^3 (s-t)\mathbf{x}_t^{(1)} I_{0,s,t}^{(1)} - \varepsilon^2 (s-t)I_{0,s,t}^{(2)} + \\ & + \frac{(s-t)^2}{2} \left( -c\mathbf{x}_t^{(2)} + \varepsilon^2 \left( c\mathbf{x}_t^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right) - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(1)} I_{01,s,t}^{(1)} + \\ & + \varepsilon I_{01,s,t}^{(2)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(1)} I_{10,s,t}^{(1)} - \varepsilon I_{10,s,t}^{(2)} + H_{5,s,t}^{(2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений Лоренца [79] со стохастическим возмущением в форме многомерного СДУ Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\mathbf{x}_t^{(1)} + a\mathbf{x}_t^{(2)} \\ r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \\ -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (4.106)$$

где  $\mathbf{x}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}_t^{(2)}$ ,  $\mathbf{x}_t^{(3)}$  — компоненты решения  $\mathbf{x}_t \in \Re^3$  уравнения (4.106);  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — скалярные стандартные независимые винеровские процессы;  $a$ ,  $r$ ,  $b$ ,  $c$  — постоянные.

Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент  $\mathbf{x}_s^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}_s^{(2)}$  и  $\mathbf{x}_s^{(3)}$  решения системы (4.106) до малых  $O((s-t)^{7/2})$  в среднеквадратическом смысле при  $s \downarrow t$  с в. 1 имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(1)} = & \mathbf{x}_t^{(1)} + a(s-t) \left( -\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \\
 & + a \frac{(s-t)^2}{2} \left[ -a \left( -\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right] - \\
 & - ac\mathbf{x}_t^{(1)} \left[ \frac{(s-t)^2}{2} I_{0,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{1,s,t}^{(3)} + \frac{1}{2} I_{2,s,t}^{(3)} \right] + \\
 & + a \frac{(s-t)^3}{6} \left[ a \left( -\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left( a + r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - \right. \\
 & \left. - (a+1) \left( r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right) - \mathbf{x}_t^{(1)} \left( -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] + \\
 & + H_{7,s,t}^{(1)}, \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(2)} = & \mathbf{x}_t^{(2)} + (s-t) \left( r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right) - c\mathbf{x}_t^{(1)} \left( I_{1,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{0,s,t}^{(3)} \right) + \\
 & + \frac{(s-t)^2}{2} \left[ a \left( -\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left( r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - r\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} + \right. \\
 & \left. + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \left( -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] + \\
 & + \left( a \left( \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + c(1+b)\mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[ \frac{(s-t)^2}{2} I_{0,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{1,s,t}^{(3)} + \frac{1}{2} I_{2,s,t}^{(3)} \right] + \\
 & + ac \left( -\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left( I_{2,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{1,s,t}^{(3)} \right) + \\
 & + \frac{(s-t)^3}{6} \left\{ a \left( -\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left[ - (a+1) \left( r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) + b\mathbf{x}_t^{(3)} - 2\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right] + \right. \\
 & + \left( r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right) \left( \left( r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) a + 1 - \left( \mathbf{x}_t^{(1)} \right)^2 \right) + \\
 & \left. + \left( -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left( a \left( \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \mathbf{x}_t^{(1)}(1+b) \right) \right\} + \\
 & + H_{7,s,t}^{(2)}, \tag{4.108}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(3)} = & \mathbf{x}_t^{(3)} + cI_{0,s,t}^{(3)} + (s-t) \left( -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) - bc \left( I_{1,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{0,s,t}^{(3)} \right) + \\
 & + \frac{(s-t)^2}{2} \left[ a \left( -\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \mathbf{x}_t^{(2)} + \left( r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right) \mathbf{x}_t^{(1)} - \right. \\
 & \left. - b \left( -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +c\left(b^2-\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2\right)\left[\frac{(s-t)^2}{2}I_{0_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{1_{s,t}}^{(3)}+\frac{1}{2}I_{2_{s,t}}^{(3)}\right]+ \\
 & +\frac{(s-t)^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(-a\mathbf{x}_t^{(2)}+r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\right.\right. \\
 & \quad \left.-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-b\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+ \\
 & +\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\left(-a\mathbf{x}_t^{(1)}+2a\mathbf{x}_t^{(2)}-(1+b)\mathbf{x}_t^{(1)}\right)+ \\
 & \quad \left.\left.+(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)})\left(b^2-\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2\right)\right]+ \\
 & +H_{7_{s,t}}^{(3)}. \tag{4.109}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений Ресслера [221] со стохастическим возмущением в виде следующей системы СДУ Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \\ f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)}, \tag{4.110}$$

где  $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \mathbf{x}_t^{(3)} \in \Re^1$  — компоненты решения  $\mathbf{x}_t \in \Re^3$  системы (4.110);  $\mathbf{f}_t^{(1)} \in \Re^1$  — стандартный винеровский процесс;  $e, f, \mu, c$  — постоянные.

Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент решения  $\mathbf{x}_s$  системы (4.110) до малых порядка  $O((s-t)^{5/2})$  в среднеквадратическом смысле при  $s \downarrow t$  с в. 1 имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(1)} &= \mathbf{x}_t^{(1)} + (s-t)\left(-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)}\right) + c\mathbf{x}_t^{(3)}\left[(s-t)I_{0_{s,t}}^{(1)} + I_{1_{s,t}}^{(1)}\right] + \\
 & + \frac{(s-t)^2}{2}\left[-\mathbf{x}_t^{(1)} - e\mathbf{x}_t^{(2)} - f - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} + \mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right] - \\
 & - c^2\mathbf{x}_t^{(3)}\left[I_{01_{s,t}}^{(11)} + (s-t)I_{00_{s,t}}^{(11)}\right] + H_{5_{s,t}}^{(1)}, \tag{4.111}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(2)} &= \mathbf{x}_t^{(2)} + (s-t)\left(\mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)}\right) + \frac{(s-t)^2}{2}\left[-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} + \right. \\
 & \quad \left.+ e\left(\mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right] + H_{5_{s,t}}^{(2)}, \tag{4.112}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_s^{(3)} = \mathbf{x}_t^{(3)} - c\mathbf{x}_t^{(3)}I_{0_{s,t}}^{(1)} + (s-t)\left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + c^2 \mathbf{x}_t^{(3)} I_{00s,t}^{(11)} + c \mathbf{x}_t^{(3)} \left( \mu - \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[ (s-t) I_{0s,t}^{(1)} + I_{1s,t}^{(1)} \right] + \\
 & + c \left( f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu \mathbf{x}_t^{(3)} \right) I_{1s,t}^{(1)} - c^3 \mathbf{x}_t^{(3)} I_{000s,t}^{(111)} + \\
 & + \frac{(s-t)^2}{2} \left[ \left( -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \mathbf{x}_t^{(3)} + \left( f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \left( \mathbf{x}_t^{(1)} - \mu \right) \right] \\
 & + c^2 \mathbf{x}_t^{(3)} \left( \mathbf{x}_t^{(1)} - \mu \right) \left[ I_{10s,t}^{(11)} - I_{01s,t}^{(11)} \right] - c^2 \left( f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu \mathbf{x}_t^{(3)} \right) I_{10s,t}^{(11)} \\
 & - c^2 \mathbf{x}_t^{(3)} \left( \mu - \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[ I_{01s,t}^{(11)} + (s-t) I_{00s,t}^{(11)} \right] + c^4 \mathbf{x}_t^{(3)} I_{0000s,t}^{(1111)} + \\
 & + H_{5s,t}^{(3)}. \tag{4.113}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки–Вольтерра, отражающей динамику численностей двух конкурирующих видов животных или динамику концентраций двух реагентов:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \left( k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{x}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}_t^{(2)}$  — численность видов животных (концентрация реагентов);  $k_1, k_2$  — коэффициенты рождаемости (роста концентрации реагентов);  $a_1, a_2$  — коэффициенты смертности (снижения концентрации реагентов);  $\sigma_1, \sigma_2$  — коэффициенты, характеризующие степень влияния случайных факторов на систему;  $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)}$  — скалярные стандартные независимые винеровские процессы.

Унифицированное разложение Тейлора–Ито до малых  $O((s-t)^2)$  в среднеквадратическом смысле при  $s \downarrow t$  для процессов  $\mathbf{x}_s^{(1)}, \mathbf{x}_s^{(2)}$  с в. 1 имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(1)} = & \mathbf{x}_t^{(1)} \left[ 1 + \left( k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) (s-t) + \right. \\
 & + \sigma_1 \left( k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left( (s-t) I_{0s,t}^{(1)} + 2I_{1s,t}^{(1)} \right) + \\
 & + a_1 \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \left( (s-t) I_{0s,t}^{(2)} + I_{1s,t}^{(2)} \right) + \sigma_1 I_{0s,t}^{(1)} + \\
 & \left. + \sigma_1^2 I_{00s,t}^{(11)} + \sigma_1^3 I_{000s,t}^{(111)} \right] + \\
 & + H_{4s,t}^{(1)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(2)} = & \mathbf{x}_t^{(2)} \left[ 1 + \left( k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) (s - t) + \right. \\
 & + \sigma_2 \left( k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left( (s - t) I_{0,s,t}^{(2)} + 2 I_{1,s,t}^{(2)} \right) + \\
 & + a_2 \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} \left( (s - t) I_{0,s,t}^{(1)} + I_{1,s,t}^{(1)} \right) + \sigma_2 I_{0,s,t}^{(2)} + \\
 & \left. + \sigma_2^2 I_{00,s,t}^{(22)} + \sigma_2^3 I_{000,s,t}^{(222)} \right] + \\
 & + H_{4,s,t}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

## 4.10 Подведение итогов разделов 4.3 и 4.6

Рассмотрим СДУ Ито вида (1.38) и будем предполагать, что относительно него выполнены соответствующие предположения (см. главу 1, сразу после формулы (1.38)).

Из предыдущих разделов данной главы следует, что при определенных условиях, налагаемых на функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$  и  $R(\mathbf{x}, t)$ , для решения СДУ Ито (1.38) с в. 1 справедливы четыре унифицированных разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича вида

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{x}_s, s) = & R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\
 & \times \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1\dots l_{k_s,t}}^{(i_1\dots i_k)} + D_{r+1,s,t} \\
 (1\text{-е унифицированное разложение Тейлора–Ито}), \quad (4.114)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{x}_s, s) = & R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\
 & \times \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1\dots l_{k_s,t}}^{(i_1\dots i_k)} + D_{r+1,s,t} \\
 (2\text{-е унифицированное разложение Тейлора–Ито}), \quad (4.115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{x}_s, s) = & R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\
 & \times \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} \bar{L}^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1\dots l_{k_s,t}}^{*(i_1\dots i_k)} + D_{r+1,s,t} \\
 (1\text{-е унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича}), \quad (4.116)
 \end{aligned}$$

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\ \times \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \bar{L}^j \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{*(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1_{s, t}} \quad (4.117)$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича),

общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича вида

$$I_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.118)$$

$$J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (s - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (s - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.119)$$

$$I_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*s} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.120)$$

$$J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*s} (s - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (s - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}; \quad (4.121)$$

$l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots; k = 1, 2, \dots; i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ; при  $k = 0$  эти интегралы в разложениях полагаются равными 1.

Остальные обозначения, введенные в (4.114)–(4.117), следующие

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

$$L^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{L \dots L}_j & \text{при } j = 1, 2, \dots \\ \cdot & \text{при } j = 0 \end{cases}, \quad \bar{L}^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{\bar{L} \dots \bar{L}}_j & \text{при } j = 1, 2, \dots \\ \cdot & \text{при } j = 0 \end{cases},$$

$$G_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left( G_{p-1}^{(i)} L - L G_{p-1}^{(i)} \right), \quad \bar{G}_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left( \bar{G}_{p-1}^{(i)} \bar{L} - \bar{L} \bar{G}_{p-1}^{(i)} \right);$$

$p = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m$ ;

$$\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m G_0^{(i)} G_0^{(i)},$$

$\bar{G}_0^{(i)} = G_0^{(i)}$ , операторы  $L$  и  $G_0^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  такие же, как в лемме 1.3,  $D_{r+1_{s,t}}$  – остаточный член в интегральной форме.

Кроме того, справедливы [148] разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \quad (4.122)$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*T} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}. \quad (4.123)$$

Здесь  $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = \mathbf{f}_t^{(i_l)}$  и  $\lambda_l = 1$  при  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = t$  и  $\lambda_l = 0$  при  $i_l = 0$ ;  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, k$ .

Теперь становится ясно, что одним из возможных и наиболее перспективных подходов к численному интегрированию СДУ Ито является подход, основанный на стохастических разложениях решений указанных уравнений.

Например, чтобы получить явный численный метод, достаточно рассмотреть усеченное разложение Тейлора–Ито или Тейлора–Стратоновича на дискретной временной сетке и аппроксимировать специальным образом повторные стохастические интегралы, входящие в него. Однако аппроксимация повторных стохастических интегралов вида (4.118) – (4.123) является сложной задачей, ей, в частности, посвящены главы 5 и 6 данной монографии. В указанных главах содержится наиболее полный и обширный материал по данному вопросу, причем основные результаты этих глав принадлежат автору настоящей монографии.

Отметим, что коэффициентные функции унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича определяются рекуррентными формулами, содержащими присущий классической формуле Тейлора множитель  $(s - t)^j/j!$ .

## 4.11 Стохастические базисы и их ранги

Наиболее важным отличием унифицированных разложений Тейлора–Ито от разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена является то,

что они содержат существенно меньшее число различных повторных стохастических интегралов Ито, и притом большинство из них имеет меньшую кратность.

Нетрудно видеть, что многие стохастические интегралы из семейства (4.122) выражаются друг через друга линейными соотношениями (это же относится и к семейству (4.123)). Для семейств (4.16), (4.17), (4.82), (4.91) это не так, т.е. интегралы из данных семейств не могут быть связаны друг с другом конечными линейными соотношениями.

В связи с этим целесообразно назвать семейства стохастических интегралов (4.16), (4.17), (4.82), (4.91) *стохастическими базисами*.

Таким образом, нами найдены четыре стохастических базиса по которым разлагается решение СДУ Ито.

Ранее мы использовали в унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича два способа суммирования: по множествам  $\mathcal{A}_q$ ;  $q = 1, \dots, r$  и по множествам  $\mathcal{D}_q$ ;  $q = 1, \dots, r$ .

Назовем *рангами стохастических базисов* (4.16), (4.17), (4.82), (4.91) числа  $\text{rank}_{\mathcal{A}}(r)$  и  $\text{rank}_{\mathcal{D}}(r)$  различных повторных стохастических интегралов, входящих в совокупности (4.16), (4.17), (4.82), (4.91) при суммировании по множествам  $\mathcal{A}_q$ ;  $q = 1, \dots, r$  и  $\mathcal{D}_q$ ;  $q = 1, \dots, r$  соответственно, где  $r$  — фиксировано.

Сначала рассмотрим несколько примеров, а затем вычислим ранги стохастических базисов в общем случае.

Предположим, что суммирование в унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича ведется по множествам

$$\mathcal{D}_q = \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2(j + l_1 + \dots + l_k) = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots\},$$

т.е. мы имеем упорядоченные по порядкам малости разложения.

Нетрудно видеть, что унифицированное разложение Тейлора–Ито (здесь и далее имеются ввиду разложения без остаточных членов), упорядоченное по порядкам малости, при  $r = 3$  содержит четыре ( $\text{rank}_{\mathcal{D}}(3) = 4$ ) различных повторных стохастических интеграла:  $I_{0,s,t}^{(i_1)}$ ,  $I_{00,s,t}^{(i_2 i_1)}$ ,  $I_{1,s,t}^{(i_1)}$ ,  $I_{000,s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$ . В то же время его аналог в форме Вагнера и Платена [148] содержит пять различных повторных стохастических интегралов:  $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$ ,  $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$ ,  $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$ ,  $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$ ,  $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$ . При  $r = 4$  имеем семь ( $\text{rank}_{\mathcal{D}}(4) = 7$ ) различных повторных стохастических интегралов Ито:  $I_{0,s,t}^{(i_1)}$ ,  $I_{00,s,t}^{(i_2 i_1)}$ ,  $I_{1,s,t}^{(i_1)}$ ,  $I_{000,s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$ ,  $I_{01,s,t}^{(i_2 i_1)}$ ,  $I_{10,s,t}^{(i_2 i_1)}$ ,

$I_{0000_{s,t}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$  против девяти:  $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$ ,  $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$ ,  $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$ ,  $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$ ,  $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$ ,  $J_{(101)s,t}^{(i_3 i_1)}$ ,  $J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2)}$ ,  $J_{(011)s,t}^{(i_2 i_1)}$ ,  $J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$ . При  $r = 5$  ( $\text{rank}_{\mathcal{D}}(5) = 12$ ) имеем соответственно 12 интегралов против 17 интегралов, при  $r = 6$  и  $r = 7$  имеем соответственно 20 против 29 и 33 против 50.

Точно такие же результаты получаются при сравнении двух унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича с разложением Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

Заметим, что рассмотренные разложения обычно используются при построении сильных численных методов (см. главу 7) решения СДУ Ито. Если рассмотреть не упорядоченные по порядку малости унифицированные разложения Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, которые обычно используются для построения слабых численных методов (см. главу 10) решения СДУ Ито, то различие между ними в числе различных повторных стохастических интегралов Ито окажется еще более заметным. Так, при  $r = 4$  не упорядоченные по порядку малости унифицированные разложения Тейлора–Ито содержат по 15 ( $\text{rank}_{\mathcal{A}}(4) = 15$ ) различных повторных стохастических интегралов Ито, в то время как не упорядоченное по порядку малости разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена содержит их уже 26.

Для дальнейшего нам потребуется следующая

**Лемма 4.7.** *Пусть дан упорядоченный набор  $(l_1, \dots, l_k)$ ;  $l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots; k = 1, 2, \dots$ , причем  $S(k) \stackrel{\text{def}}{=} l_1 + \dots + l_k = p$ ;  $p$  — фиксированное натуральное число или ноль. Тогда число всевозможных наборов  $(l_1, \dots, l_k)$ ;  $l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots; k = 1, 2, \dots$ , для которых  $S(k) = p$  выражается числом*

$$N(k, p) = C_{p+k-1}^{k-1},$$

где  $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$  — биномиальный коэффициент.

Доказательство. Простым перебором вариантов нетрудно убедиться в справедливости формул:

$$N(1, p) = 1 = C_{p+1-1}^{1-1},$$

$$N(2, p) = p + 1 = C_{p+2-1}^{2-1},$$

$$N(3, p) = \frac{(p+1)(p+2)}{2} = C_{p+3-1}^{3-1}.$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$N(k+1, p) = \sum_{l=0}^p N(k, l) = \sum_{l=0}^p C_{l+k-1}^{k-1} = C_{p+k}^k,$$

где мы воспользовались предположением индукции и известным свойством биномиальных коэффициентов. Лемма доказана  $\square$ .

**Лемма 4.8.** Справедлива формула:  $\text{rank}_{\mathcal{A}}(r) = 2^r - 1$ .

Доказательство. Проанализировав структуру множества  $\bigcup_{q=1}^r \mathcal{A}_q$  нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \text{rank}_{\mathcal{A}}(r) &= \\ &= N(1, 0) + (N(1, 1) + N(2, 0)) + (N(1, 2) + N(2, 1) + N(3, 0)) + \dots \\ &\quad \dots + (N(1, r-1) + N(2, r-2) + \dots + N(r, 0)). \end{aligned}$$

Далее, используя лемму 4.7 и известное свойство биномиальных коэффициентов, вычисляем:

$$\begin{aligned} \text{rank}_{\mathcal{A}}(r) &= \\ &= C_0^0 + (C_1^0 + C_1^1) + (C_2^0 + C_2^1 + C_2^2) + \dots \\ &\quad \dots + (C_{r-1}^0 + C_{r-1}^1 + C_{r-1}^2 + \dots + C_{r-1}^{r-1}) = \\ &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{r-1} = 2^r - 1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

Зададимся вопросом, а каково число (обозначим его через  $n_{\mathcal{M}}(r)$ ) различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12), где суммирование ведется по множеству  $\bigcup_{k=1}^r \mathcal{M}_k$ .

Если исключить из рассмотрения повторные интегралы, которые равны  $(s-t)^j/j!$ , то очевидно, что

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{M}}(r) &= \\ &= (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \dots + (2^r - 1) = \\ &= 2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{r-1}) - r = 2(2^r - 1) - r. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\mathcal{M}}(r)}{\text{rank}_{\mathcal{A}}(r)} = 2.$$

Таблица 4.1. Числа  $\text{rank}_{\mathcal{A}}(r)$ ,  $n_{\mathcal{M}}(r)$ ,  $f(r) = n_{\mathcal{M}}(r)/\text{rank}_{\mathcal{A}}(r)$

$r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{rank}_{\mathcal{A}}(r)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
$n_{\mathcal{M}}(r)$	1	4	11	26	57	120	247	502	1013	2036
$f(r)$	1	1.3333	1.5714	1.7333	1.8387	1.9048	1.9449	1.9686	1.9824	1.9902

Таблица 4.2. Числа  $\text{rank}_{\mathcal{D}}(r)$ ,  $n_{\mathcal{E}}(r)$ ,  $g(r) = n_{\mathcal{E}}(r)/\text{rank}_{\mathcal{D}}(r)$

$r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{rank}_{\mathcal{D}}(r)$	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143
$n_{\mathcal{E}}(r)$	1	2	5	9	17	29	50	83	138	261
$g(r)$	1	1	1.2500	1.2857	1.4167	1.4500	1.5152	1.5370	1.5682	1.8252

В таблице 4.1 приведены значения  $\text{rank}_{\mathcal{A}}(r)$ ,  $n_{\mathcal{M}}(r)$ , а также

$$f(r) = \frac{n_{\mathcal{M}}(r)}{\text{rank}_{\mathcal{A}}(r)}$$

при различных  $r$ .

**Лемма 4.9.** Справедлива формула:

$$\text{rank}_{\mathcal{D}}(r) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{l=s}^{(r-1)/2+[s/2]} C_l^s & \text{при } r = 1, 3, 5, \dots \\ \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{l=s}^{r/2-1+[(s+1)/2]} C_l^s & \text{при } r = 2, 4, 6, \dots \end{cases},$$

где  $[x]$  означает целую часть числа  $x$ .

**Доказательство.** Для доказательства леммы достаточно записать условие

$$k + 2(j + S(k)) \leq r,$$

где  $S(k) \stackrel{\text{def}}{=} l_1 + \dots + l_k$ ;  $k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$  в виде

$$j + S(k) \leq (r - k)/2,$$

осуществить перебор по  $k = 1, \dots, r$  и воспользоваться леммой 4.7  $\square$ .

Вычислим число (обозначим его через  $n_{\mathcal{E}}(r)$ ) различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложение Тейлора–Ито в форме

Вагнера и Платена вида (4.14), где суммирование ведется по множеству  
 $\bigcup_{q,k=1}^r \mathcal{E}_{qk}$ .

**Лемма 4.10.** Справедлива формула:

$$n_{\mathcal{E}}(r) = \sum_{s=1}^r \sum_{l=0}^{[(r-s)/2]} C_{[(r-s)/2]+s-l}^s, \quad (4.124)$$

где  $[x]$  означает целую часть числа  $x$ .

**Доказательство.** Условие суммирования в данном случае можно записать в виде:  $0 \leq p + 2q \leq r$ , где  $q$  — число интегрирований по времени, а  $p$  — число интегрирований по винеровскому процессу в каком-либо повторном стохастическом интеграле, входящем в разложение (4.14), причем  $p + q$  — кратность указанного стохастического интеграла не превосходит  $r$ . Перепишем приведенное условие в виде  $0 \leq q \leq (r-p)/2 \Leftrightarrow 0 \leq q \leq [(r-p)/2]$ . Теперь, осуществляя перебор по  $p = 1, \dots, r$  и используя элементарные комбинаторные рассуждения получим (4.124). Лемма доказана  $\square$ .

В таблице 4.2 приведены значения  $\text{rank}_{\mathcal{D}}(r)$ ,  $n_{\mathcal{E}}(r)$ , а также

$$g(r) = \frac{n_{\mathcal{E}}(r)}{\text{rank}_{\mathcal{D}}(r)}$$

при различных  $r$ .

## Глава 5

# Разложения повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, основанные на кратных и повторных рядах Фурье, сходящихся в среднем и поточечно

Результаты данной главы во многом являются основополагающими для книги в целом. Впервые применен аппарат обобщенных кратных рядов Фурье, сходящихся в среднем, к получению разложений повторных стохастических интегралов.

Идея представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде кратных стохастических интегралов от определенных неслучайных функций нескольких переменных и последующего разложения данных функций с помощью рядов Фурье с целью получения эффективных среднеквадратических аппроксимаций указанных стохастических интегралов нашла свое отражение в ряде работ автора. В частности, впервые данный подход появился в [66] (1994). В данной работе отмеченная идея формулируется скорее на уровне догадки (без удовлетворительного обоснования) и как следствие работы [66] содержит весьма размытые формулировки и ряд неверных выводов. Тем не менее уже в [66] можно найти, например, формулы (6.11), (6.73), (6.74), (6.138). Отметим, что в [66] использовались кратные ряды Фурье по тригонометрической системе функций, сходящиеся в среднем. Следует также заметить, что результаты работы [66] верны для достаточно узкого частного случая, когда числа  $i_1, \dots, i_k$  попарно различны;  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  (см. формулу (5.1)). Применение рядов Фурье по системе полиномов Лежандра к аппроксимации

повторных стохастических интегралов впервые осуществлено в [39] (1997), [40] (1998), [45], [47] (1999), а также в [50] (2001). В частности, в этих работах можно найти формулы (6.84) – (6.89), (6.105). Отметим, что подход из работы [66] в окончательном варианте был сформулирован, обоснован и обобщен автором в 2006 г. в [56] (теорема 5.1 в настоящей книге).

Весьма интересным и непростым оказался вопрос о том, какие же стохастические интегралы (Ито или Стратоновича) являются более подходящими для разложений в рамках отмеченного направления исследований. С одной стороны теорема 5.1 убедительно демонстрирует, что структура повторных стохастических интегралов Ито является, независимо от кратности стохастического интеграла, достаточно удобной для разложений в кратные ряды по системе стандартных гауссовских случайных величин. С другой стороны результаты разделов 5.4 – 5.14 убедительно свидетельствуют о том, что существует несомненная взаимосвязь множителя  $1/2$ , присущего стохастическому интегралу Стратоновича и входящего в слагаемое, связывающее стохастические интегралы Стратоновича и Ито (см. лемму 1.4) и того факта, что в точке конечного разрыва кусочно-гладкой функции  $f(x)$  ее ряд Фурье сходится к величине  $(f(x - 0) + f(x + 0))/2$ . Более того, как показано в данной главе, окончательные формулы для разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича 2–5 кратностей оказываются более компактными, чем их аналоги для стохастических интегралов Ито. Интересным также представляется разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности  $k$ , основанное на повторных рядах Фурье и полученное в разд. 5.12 (теоремы 5.9 и 5.11) [39] (принята к публикации в декабре 1996 г.), [46].

## **5.1 Разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности, основанное на кратных рядах Фурье, сходящихся в среднем**

В данном разделе получим разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности, основанное на сходящихся в среднем обобщенных кратных рядах Фурье.

Введем в рассмотрение следующие повторные стохастические инте-

граты Ито и Стратоновича:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (5.1)$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (5.2)$$

где  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  неслучайные функции;  $\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_t^{(0)} = t$ ;  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ ;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые стандартные винеровские процессы.

Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T]; \quad k \geq 2$$

и  $K(t_1) = \psi_1(t_1)$ ;  $t_1 \in [t, T]$ .

Функция  $K(t_1, \dots, t_k)$  кусочно-непрерывна в гиперкубе  $[t, T]^k$ , т.е. гиперкуб можно разрезать на конечное число частей с помощью кусочно гладких поверхностей так, что на каждой части функция  $K(t_1, \dots, t_k)$  непрерывна и имеет пределы на границе части, а вдоль разрезов она может иметь разрывы. В этой ситуации известно, что кратный ряд Фурье функции  $K(t_1, \dots, t_k) \in L_2([t, T]^k)$  в гиперкубе сходится в смысле среднего квадратического, т.е.:

$$\lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \left\| K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right\| = 0, \quad (5.3)$$

где

$$\|f\| = \left( \int_{[t,T]^k} f^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right)^{1/2}$$

и имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2, \quad (5.4)$$

где

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k.$$

Рассмотрим разбиение  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  промежутка  $[t, T]$  такое, что

$$t = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta\tau_j \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty, \quad (5.5)$$

где  $\Delta\tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ .

Сформулируем основную теорему.

**Теорема 5.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1.  $\psi_i(\tau); i = 1, 2, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции.
2.  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система непрерывных функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда повторный стохастический интеграл Ито  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$  разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$\begin{aligned} J[\psi^{(k)}]_{T,t} = & \underset{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ & \left. - \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{L}_k, \quad \mathcal{H}_k = \{(l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

$$\mathcal{L}_k = \left\{ (l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1; l_g \neq l_r \text{ (} g \neq r \text{)}; g, r = 1, \dots, k \right\},$$

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных  $i$  или  $j$  (если  $i \neq 0$ ),

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k, \quad (5.7)$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T]; \quad k \geq 2$$

и  $K(t_1) = \psi_1(t_1)$ ;  $t_1 \in [t, T]$ ;  $\Delta \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)} = \mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ),  $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$  — разбиение промежутка  $[t, T]$ , удовлетворяющее условию (5.5).

**Доказательство.** В начале докажем вспомогательные леммы.

Рассмотрим разбиение  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  промежутка  $[t, T]$  такое, что выполнено условие (5.5).

**Лемма 5.1.** Пусть выполнено условие 1 теоремы 5.1. Тогда

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с. в. 1}, \quad (5.8)$$

$\varepsilon \partial e \Delta \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)} = \mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ),  $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$  — разбиение промежутка  $[t, T]$ , удовлетворяющее условию (5.5).

**Доказательство.** Нетрудно заметить, что используя свойство аддитивности стохастических интегралов, можно записать:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}} + \varepsilon_N \text{ с. в. 1}, \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_N &= \sum_{j_k=0}^{N-1} \int_{\tau_{j_k}}^{\tau_{j_k+1}} \psi_k(s) \int_{\tau_{j_k}}^s \psi_{k-1}(\tau) J[\psi^{(k-2)}]_{\tau, t} d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_{k-1})} d\mathbf{w}_s^{(i_k)} + \sum_{r=1}^{k-3} G[\psi_{k-r+1}^{(k)}]_N \times \\ &\times \sum_{j_{k-r}=0}^{j_{k-r+1}-1} \int_{\tau_{j_{k-r}}}^{\tau_{j_{k-r+1}}} \psi_{k-r}(s) \int_{\tau_{j_{k-r}}}^s \psi_{k-r-1}(\tau) J[\psi^{(k-r-2)}]_{\tau, t} d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_{k-r-1})} d\mathbf{w}_s^{(i_{k-r})} + \\ &+ G[\psi_3^{(k)}]_N \sum_{j_2=0}^{j_3-1} J[\psi^{(2)}]_{\tau_{j_2+1}, \tau_{j_2}}, \end{aligned}$$

$$G[\psi_m^{(k)}]_N = \sum_{j_k=0}^{N-1} \sum_{j_{k-1}=0}^{j_k-1} \dots \sum_{j_m=0}^{j_{m+1}-1} \prod_{l=m}^k J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}},$$

$$J[\psi_l]_{s, \theta} = \int_{\theta}^s \psi_l(\tau) d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_l)}$$

и  $(\psi_m, \psi_{m+1}, \dots, \psi_k) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_m^{(k)}$ ,  $(\psi_1, \dots, \psi_k) \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(k)}$ ,  $\psi_1^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(k)}$ .

Используя стандартные оценки моментов стохастических интегралов (1.46) и (1.47) при  $n = 2$ , получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0 \text{ с. в. 1.} \quad (5.10)$$

Сравнивая (5.9) и (5.10) получаем

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}} \text{ с в. 1.} \quad (5.11)$$

Перепишем  $J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}}$  в виде

$$J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}} = \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} + \int_{\tau_{j_l}}^{\tau_{j_l+1}} (\psi_l(\tau) - \psi_l(\tau_{j_l})) d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_l)}$$

и подставим в (5.11). После этого нетрудно увидеть, что допредельное выражение в правой части (5.11) есть сумма допредельного выражения в правой части (5.8) и величины, которая стремится к нулю в среднеквадратичном смысле при  $N \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.  $\square$

**З а м е ч а н и е 5.1.** *Лемму 5.1 можно обобщить, т.е. функцию  $\psi_1(s)$  в (5.8) можно заменить на случайный процесс  $\phi_s \in S_2([0, T])$  (см. главу 3).*

**З а м е ч а н и е 5.2.** *Нетрудно заметить, что если приращение  $\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$  в (5.8) при некотором  $l \in \{1, \dots, k\}$  заменить на  $(\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)})^p$ ,  $i_l \neq 0$ , то в интеграле  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$  дифференциал  $d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$  при  $p = 2$  заменится на  $dt_l$ . Если же  $p = 3, 4, \dots$ , то правая часть (5.8) с в. 1 обратится в ноль. Если  $\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$  в (5.8) при некотором  $l \in \{1, \dots, k\}$  заменить на  $(\Delta \tau_{j_l})^p$ ,  $p = 2, 3, \dots$ , то правая часть (5.8) с в. 1 также обратится в ноль.*

Определим следующий стохастический интеграл:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J[\Phi]_{T,t}^{(k)} \quad (5.12)$$

Пусть  $D_k = \{(t_1, \dots, t_k) : t \leq t_1 < \dots < t_k \leq T\}$ . Будем писать, что  $\Phi(t_1, \dots, t_k) \in C(D_k)$ , если  $\Phi(t_1, \dots, t_k)$  — непрерывная в замкнутой области  $D_k$  неслучайная функция  $k$  переменных.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл Ито вида

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (5.13)$$

где  $\Phi(t_1, \dots, t_k)$  — неслучайная функция  $k$  переменных. Нетрудно проверить, что (5.13) существует в среднеквадратичном смысле, если:

$$\int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k < \infty.$$

Используя рассуждения, близкие к рассуждениям доказательства леммы 5.1, нетрудно показать, что при  $\Phi(t_1, \dots, t_k) \in C(D_k)$ :

$$\begin{aligned} I[\Phi]_{T,t}^{(k)} &= \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с в. 1.} \end{aligned} \quad (5.14)$$

В качестве пояснения проверим справедливость равенства (5.14) при  $k = 3$ . Для определенности будем считать, что  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ . Имеем:

$$\begin{aligned} I[\Phi]_{T,t}^{(3)} &= \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \Phi(t_1, t_2, t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^{N-1} \int_t^{\tau_{j_3}} \int_t^{t_2} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_t^{t_2} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \left( \int_t^{\tau_{j_2}} + \int_{\tau_{j_2}}^{t_2} \right) \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} + \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_2}}^{t_2} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Покажем, что второй предел в правой части (5.15) равен нулю. Действительно, для второго момента его допредельного выражения имеем

$$\sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_2}}^{t_2} \Phi^2(t_1, t_2, \tau_{j_3}) dt_1 dt_2 \Delta \tau_{j_3} \leq M^2 \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \frac{1}{2} (\Delta \tau_{j_2})^2 \Delta \tau_{j_3},$$

то есть левая часть последнего неравенства стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Здесь  $M$  — постоянная, которая ограничивает модуль функции  $\Phi(t_1, t_2, t_3)$  в силу ее непрерывности, а  $\Delta \tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ .

С учетом полученных выводов имеем:

$$\begin{aligned}
 I[\Phi]_{T,t}^{(3)} &= \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \Phi(t_1, t_2, t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} = \\
 &= \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_3-1} \sum_{j_2=0}^{j_2-1} \sum_{j_1=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} = \\
 &= \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_3-1} \sum_{j_2=0}^{j_2-1} \sum_{j_1=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})) \times \\
 &\quad \times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} + \\
 &+ \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_3-1} \sum_{j_2=0}^{j_2-1} \sum_{j_1=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}) - \Phi(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})) \times \\
 &\quad \times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} + \\
 &+ \text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_3-1} \sum_{j_2=0}^{j_2-1} \sum_{j_1=0}^{j_1-1} \Phi(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}. \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

Для получения желаемого результата остается показать, что первые два предела в правой части (5.16) равны нулю. Докажем, что равен нулю первый из них (для второго предела доказательство аналогичное).

Второй момент допредельного выражения первого предела в правой части (5.16) равен следующему выражению:

$$\sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}))^2 dt_1 dt_2 \Delta \tau_{j_3}. \tag{5.17}$$

Поскольку функция  $\Phi(t_1, t_2, t_3)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области  $D_3$ , то она и равномерно непрерывна в этой области. Поэтому, если расстояние между двумя точками области  $D_3$  меньше  $\delta > 0$  (оно найдено по любому  $\varepsilon > 0$  и не зависит от указанных точек), то соответствующее колебание функции  $\Phi(t_1, t_2, t_3)$  для этих двух точек области  $D_3$  меньше  $\varepsilon$ .

Если предположить, что  $\Delta \tau_j < \delta$  ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ), то расстояние между точками  $(t_1, t_2, \tau_{j_3}), (t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})$  очевидно меньше  $\delta$ . Тогда

$$|\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})| < \varepsilon.$$

Таким образом при  $\Delta\tau_j < \delta$  ( $j = 0, 1, \dots, N - 1$ ) выражение (5.17) оценивается сверху величиной

$$\varepsilon^2 \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Delta\tau_{j_1} \Delta\tau_{j_2} \Delta\tau_{j_3} < \varepsilon^2 \frac{(T-t)^3}{6}.$$

Поэтому первый предел в правой части (5.16) равен нулю. Аналогично доказывается, что второй предел в правой части (5.16) равен нулю. Итак, (5.14) при  $k = 3$  доказано. При  $k = 2$  и  $k > 3$  рассуждения аналогичны.

Следует отметить, что нетрудно доказать справедливость формулы (5.14), когда функция  $\Phi(t_1, \dots, t_k)$  непрерывна в открытой области  $D_k$  и ограничена на ее границе.

Положим

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k = 0 \\ j_q \neq j_r; q \neq r; q, r = 1, \dots, k}}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J'[\Phi]_{T,t}^{(k)}.$$

Тогда согласно (5.14) получим

$$J'[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \left( \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \right), \quad (5.18)$$

где суммирование по перестановкам  $(t_1, \dots, t_k)$  осуществляется только в выражении, которое взято в скобки, а  $\Phi(t_1, \dots, t_k)$  предполагается непрерывной функцией в соответствующих областях интегрирования.

Заметим, что соотношение (5.18) может быть переписано в виде:

$$J'[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где перестановки  $(t_1, \dots, t_k)$  осуществляются при суммировании только в величинах  $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$ , при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах и, если  $t_r$  поменялось местами с  $t_q$  в перестановке  $(t_1, \dots, t_k)$ , то и  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, \dots, i_k)$ .

**Лемма 5.2.** Пусть

$$\int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k < \infty,$$

где  $\Phi(t_1, \dots, t_k)$  — неслучайная функция. Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \right|^2 \right\} \leq C_k \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad C_k < \infty.$$

**Доказательство.** Используя стандартные оценки стохастических интегралов (см. главу 1) при  $\xi_\tau \in M_2([t, s])$ , имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_t^s \xi_\tau df_\tau \right|^2 \right\} = \int_t^s \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^2 \} d\tau, \quad \mathbb{M} \left\{ \left| \int_t^s \xi_\tau d\tau \right|^2 \right\} \leq (s-t) \int_t^s \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^2 \} d\tau. \quad (5.19)$$

Пусть

$$\xi[\Phi]_{t_{l+1}, \dots, t_k, t}^{(l)} = \int_t^{t_{l+1}} \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$$

при  $l = 1, \dots, k-1$  и  $\xi[\Phi]_{t_1, \dots, t_k, t}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t_1, \dots, t_k)$ .

По индукции нетрудно показать, что  $\xi[\Phi]_{t_{l+1}, \dots, t_k, t}^{(l)} \in M_2([t, T])$  по переменной  $t_{l+1}$ . Тогда, применяя многократно оценки (5.19) приходим к утверждению леммы.  $\square$

Заметим, что при  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  по лемме 5.2

$$\mathbb{M} \left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \right|^2 \right\} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \quad (5.20)$$

**Лемма 5.3.** Пусть  $\varphi_i(s); i = 1, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции. Тогда

$$\prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} = J[\Phi]_{T,t}^{(k)} \text{ с в. 1,} \quad (5.21)$$

где

$$J[\varphi_l]_{T,t} = \int_t^T \varphi_l(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)} \text{ и } \Phi(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k \varphi_l(t_l),$$

а интеграл  $J[\Phi]_{T,t}^{(k)}$  определен равенством (5.12).

**Доказательство.** Пусть сначала  $i_l \neq 0, l = 1, \dots, k$ . Обозначим

$$J[\varphi_l]_N = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_l(\tau_j) \Delta \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i_l)}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} = \\ & = \sum_{l=1}^k \left( \prod_{g=1}^{l-1} J[\varphi_g]_{T,t} \right) (J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}) \left( \prod_{g=l+1}^k J[\varphi_g]_N \right), \end{aligned}$$

то в силу неравенств Минковского и Коши–Буняковского

$$\left( \mathbb{M} \left\{ \left| \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} \right|^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_k \sum_{l=1}^k \left( \mathbb{M} \left\{ |J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}|^4 \right\} \right)^{1/4}, \quad (5.22)$$

где  $C_k < \infty$ .

Заметим, что

$$J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t} = \sum_{g=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g}, \quad J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g} = \int_{\tau_g}^{\tau_{g+1}} (\varphi_l(\tau_g) - \varphi_l(s)) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}.$$

Поскольку  $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g}$  независимы при различных  $g$ , то [91]:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} + \\ &+ 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^2 \right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

В силу гауссности  $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^2 \right\} &= \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds, \\ \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &= 3 \left( \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds \right)^2. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и непрерывность, а как следствие равномерную непрерывность, функций  $\varphi_i(s)$ , получаем, что правая часть (5.23) стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Учитывая это, а также (5.22), приходим к (5.21). Если при некоторых  $l \in \{1, \dots, k\} : \mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)} = t_l$ , то доказательство несколько упрощается и проводится аналогично. Лемма доказана.  $\square$

Согласно лемме 5.1 имеем

$$\begin{aligned}
 J[\psi^{(k)}]_{T,t} &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_k=0}^{N-1} \dots \sum_{l_1=0}^{l_2-1} \psi_1(\tau_{l_1}) \dots \psi_k(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} = \\
 &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_k=0}^{N-1} \dots \sum_{l_1=0}^{l_2-1} K(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} = \\
 &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_k=0}^{N-1} \dots \sum_{l_1=0}^{N-1} K(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} = \\
 &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k = 0 \\ l_q \neq l_r; q \neq r; q, r = 1, \dots, k}}^{N-1} K(\tau_{l_1}, \dots, \tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} = \\
 &= \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \left( K(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \right), \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

где перестановки  $(t_1, \dots, t_k)$  осуществляются при суммировании только в выражении, взятом в скобки.

Ранее отмечалось, что (5.24) может быть переписано в виде:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} K(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{5.25}$$

где перестановки  $(t_1, \dots, t_k)$  осуществляются при суммировании только в величинах  $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$ , при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах и, если  $t_r$  поменялось местами с  $t_q$  в перестановке  $(t_1, \dots, t_k)$ , то и  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, \dots, i_k)$ .

Отметим также, что поскольку для интегралов Римана интегрирование ограниченной функции по множеству нулевой меры дает нулевой результат, то для этих интегралов справедлива формула:

$$\int_{[t,T]^k} G(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} G(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

где перестановки  $(t_1, \dots, t_k)$  осуществляются при суммировании только в величинах  $dt_1, \dots, dt_k$ , при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных интегралах и функция  $G(t_1, \dots, t_k)$  предполагается интегрируемой на  $[t, T]^k$ .

Согласно леммам 5.1–5.3 и (5.18), (5.25) с в. 1 имеем

$$\begin{aligned}
 & J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \\
 &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \left( \phi_{j_1}(t_1) \dots \phi_{j_k}(t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \right) + R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \\
 &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \times \\
 &\times \underset{\substack{l_1, \dots, l_k = 0 \\ l_q \neq l_r; q \neq r; q, r = 1, \dots, k}}{\text{l.i.m.}} \sum_{N=1}^{N-1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} + R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \\
 &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_1, \dots, l_k=0}^{N-1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} - \right. \\
 &\quad \left. - \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right) + R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} = \\
 &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 &\quad \left. - \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right) + R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} &= \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

где перестановки  $(t_1, \dots, t_k)$  осуществляются при суммировании только в величинах  $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$ , при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах и, если  $t_r$  поменялось местами с  $t_q$  в перестановке  $(t_1, \dots, t_k)$ , то и  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, \dots, i_k)$ .

Оценим остаток ряда  $R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k}$ . Согласно лемме 5.2 имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right)^2 \right\} &\leq C_k \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k = \\ &= C_k \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty$ , где постоянная  $C_k$  зависит только от кратности повторного стохастического интеграла Ито. Теорема доказана.  $\square$

Нетрудно видеть, что для случая попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  из теоремы 5.1 получим:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \dots \zeta_{j_k}^{(i_k)}.$$

Для того, чтобы оценить значение для практики теоремы 5.1 приведем в несколько преобразованной форме ее частные случаи для  $k = 1, \dots, 7$ :

$$\int_t^T \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} = \underset{p_1 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} &= \underset{p_1, p_2 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \right), \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} J[\psi^{(3)}]_{T,t} &= \underset{p_1, p_2, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = \underset{p_1, p_2, p_3, p_4 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_4=0}^{p_4} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & -\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & -\mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \Big), \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J[\psi^{(5)}]_{T,t} = & \underset{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_4=0}^{p_4} \sum_{j_5=0}^{p_5} C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \prod_{l=1}^5 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 & -\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
 & -\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & -\mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
 & -\mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
 & -\mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
 & +\mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \Big), \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J[\psi^{(6)}]_{T,t} = & \underset{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_4=0}^{p_4} \sum_{j_5=0}^{p_5} \sum_{j_6=0}^{p_6} C_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \prod_{l=1}^6 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_6 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_6\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_6 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_6\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_3=i_6 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_6 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_6\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_5=i_6 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_5=j_6\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_6}^{(i_6)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_5}^{(i_5)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \\
& - \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \Big), \quad (5.32)
\end{aligned}$$

$$J[\psi^{(7)}]_{T,t} = \underset{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_4=0}^{p_4} \sum_{j_5=0}^{p_5} \sum_{j_6=0}^{p_6} \sum_{j_7=0}^{p_7} C_{j_7 j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \prod_{l=1}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{1}_{\{i_1=i_6 \neq 0, j_1=j_6\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 1, 6}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 2, 6}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 3, 6}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& -\mathbf{1}_{\{i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 4, 6}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 5, 6}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 1, 2}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& -\mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 1, 3}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 1, 4}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 1, 5}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& -\mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 2, 3}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 2, 4}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 2, 5}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& -\mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 3, 4}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 3, 5}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 4, 5}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& -\mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 1, 7}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 2, 7}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 3, 7}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& -\mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 4, 7}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 7, 5}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq 7, 6}}^7 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=5,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=4,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=3,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=5,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=4,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=2,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=5,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=3,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=2,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=4,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=3,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=2,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=1,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=1,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=1,6,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=2,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& +\mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=2,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=3,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=3,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=2,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=4,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0, j_6=j_2, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=1,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0, j_6=j_2, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=1,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0, j_6=j_2, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=1,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0, j_6=j_2, i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=3,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0, j_6=j_2, i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=3,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_2 \neq 0, j_6=j_2, i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=4,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0, j_6=j_3, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=1,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0, j_6=j_3, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=1,2,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0, j_6=j_3, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=1,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0, j_6=j_3, i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=2,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0, j_6=j_3, i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=2,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_3 \neq 0, j_6=j_3, i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=4,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0, j_6=j_4, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=1,2,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0, j_6=j_4, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=1,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0, j_6=j_4, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=1,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0, j_6=j_4, i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=2,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0, j_6=j_4, i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=2,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4 \neq 0, j_6=j_4, i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=3,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0, j_6=j_5, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=1,2,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0, j_6=j_5, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=1,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0, j_6=j_5, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=1,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0, j_6=j_5, i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=2,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0, j_6=j_5, i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=2,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5 \neq 0, j_6=j_5, i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=3,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=4,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=3,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=3,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6\}} \prod_{l=3,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=2,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=2,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} \prod_{l=2,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=2,3,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \prod_{l=2,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_7=j_1, i_7=i_1 \neq 0, j_5=j_6\}} \prod_{l=2,3,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=4,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=3,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=3,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_1=i_6 \neq 0, j_1=j_6\}} \prod_{l=3,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=1,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=1,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} \prod_{l=1,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=1,3,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \prod_{l=1,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2 \neq 0, j_7=j_2, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \prod_{l=1,3,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=4,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=2,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=2,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_1=i_6 \neq 0, j_1=j_6\}} \prod_{l=4,2,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=3,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=1,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6\}} \prod_{l=1,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=1,2,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \prod_{l=1,2,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3 \neq 0, j_7=j_3, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \prod_{l=1,2,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=3,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=2,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=2,3,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_1=i_6 \neq 0, j_1=j_6\}} \prod_{l=2,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=1,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=1,3,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6\}} \prod_{l=1,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=1,2,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} \prod_{l=1,2,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_4 \neq 0, j_7=j_4, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \prod_{l=1,2,3} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=3,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=2,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=2,3,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_1=i_6 \neq 0, j_1=j_6\}} \prod_{l=2,3,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=1,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=1,3,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6\}} \prod_{l=1,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=1,2,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} \prod_{l=1,2,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_5 \neq 0, j_7=j_5, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \prod_{l=1,2,3} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=3,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=2,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=2,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=2,3,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=1,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=1,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=1,3,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=1,2,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=1,2,3} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_6 \neq 0, j_7=j_6, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=1,2,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \\
& - (\mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}}) \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \\
& - (\mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_6 \neq 0, j_1=j_6, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_6 \neq 0, j_1=j_6, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_6 \neq 0, j_1=j_6, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7 \neq 0, j_1=j_7, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7 \neq 0, j_1=j_7, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7 \neq 0, j_1=j_7, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}}) \zeta_{j_2}^{(i_2)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} \right. \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7 \neq 0, j_1=j_7, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7 \neq 0, j_1=j_7, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \\
& \quad \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7 \neq 0, j_1=j_7, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \right) \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \\
& - \left( \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} \right. \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} \\
& \quad \left. + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \right) \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
& - \left( \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} \right. \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_6=i_7 \neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7 \neq 0, j_1=j_7, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7 \neq 0, j_1=j_7, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} \\
& \quad \left. + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \right) \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
& - \left( \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} \right. \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_5=i_7 \neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7\}} \\
& \quad \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0, j_1=j_4, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_7 \neq 0, j_4=j_7\}} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_7 \neq 0, j_3=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0, j_1=j_5, i_2=i_7 \neq 0, j_2=j_7, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \\
 & \quad + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1 \neq 0, j_7=j_1, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \zeta_{j_6}^{(i_6)} - \\
 & - (\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0, j_1=j_2, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0, j_1=j_3, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_4=i_1 \neq 0, j_4=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_5=i_6 \neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_4=i_1 \neq 0, j_4=j_1, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_4=i_1 \neq 0, j_4=j_1, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_5=i_1 \neq 0, j_5=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_6 \neq 0, j_4=j_6\}} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_5=i_1 \neq 0, j_5=j_1, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_6 \neq 0, j_3=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_5=i_1 \neq 0, j_5=j_1, i_2=i_6 \neq 0, j_2=j_6, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_3 \neq 0, j_2=j_3, i_4=i_5 \neq 0, j_4=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_4 \neq 0, j_2=j_4, i_3=i_5 \neq 0, j_3=j_5\}} \\
 & \quad + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1 \neq 0, j_6=j_1, i_2=i_5 \neq 0, j_2=j_5, i_3=i_4 \neq 0, j_3=j_4\}} \zeta_{j_7}^{(i_7)}), \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{1}_A$  — индикатор  $A$  ( $\mathbf{1}_A = 1$ , если условие  $A$  выполнено и  $\mathbf{1}_A = 0$  в противном случае).

Обобщим формулы (5.27) – (5.33) на случай произвольной кратности повторного стохастического интеграла Ито. Для этого введем ряд обозначений.

Рассмотрим неупорядоченный набор  $\{1, 2, \dots, k\}$  и разобъем его на две части: первая часть пусть состоит из  $r$  неупорядоченных пар (порядок следования этих пар также неважен), а вторая — из неупорядоченного набора оставшихся  $k - 2r$  чисел. Таким образом мы имеем:

$$\underbrace{(\{\{g_1, g_2\}, \dots, \{g_{2r-1}, g_{2r}\}\})}_{1 \text{ часть}}, \underbrace{\{q_1, \dots, q_{k-2r}\}}_{2 \text{ часть}}, \tag{5.34}$$

где  $\{g_1, g_2, \dots, g_{2r-1}, g_{2r}, q_1, \dots, q_{k-2r}\} = \{1, 2, \dots, k\}$ , фигурные скобки подчеркивают неупорядоченность взятого в них множества, а круглые — упорядоченность.

Назовем (5.34) разбиением и рассмотрим сумму по всевозможным разбиениям:

$$\sum_{\substack{(\{\{g_1, g_2\}, \dots, \{g_{2r-1}, g_{2r}\}\}), \{q_1, \dots, q_{k-2r}\} \\ \{g_1, g_2, \dots, g_{2r-1}, g_{2r}, q_1, \dots, q_{k-2r}\} = \{1, 2, \dots, k\}}} a_{g_1 g_2, \dots, g_{2r-1} g_{2r}, q_1 \dots q_{k-2r}}. \tag{5.35}$$

Приведем примеры сумм вида (5.35):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{(\{g_1, g_2\}) \\ \{g_1, g_2\} = \{1, 2\}}} a_{g_1 g_2} = a_{12}, \\
 & \sum_{\substack{(\{\{g_1, g_2\}, \{g_3, g_4\}\}) \\ \{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \{1, 2, 3, 4\}}} a_{g_1 g_2, g_3 g_4} = a_{12,34} + a_{13,24} + a_{23,14}, \\
 & \sum_{\substack{(\{g_1, g_2\}, \{q_1, q_2\}) \\ \{g_1, g_2, q_1, q_2\} = \{1, 2, 3, 4\}}} a_{g_1 g_2, q_1 q_2} = a_{12,34} + a_{13,24} + a_{14,23} + \\
 & \quad + a_{23,14} + a_{24,13} + a_{34,12}, \\
 & \sum_{\substack{(\{g_1, g_2\}, \{q_1, q_2, q_3\}) \\ \{g_1, g_2, q_1, q_2, q_3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}}} a_{g_1 g_2, q_1 q_2 q_3} = a_{12,345} + a_{13,245} + a_{14,235} + \\
 & \quad + a_{15,234} + a_{23,145} + a_{24,135} + a_{25,134} + a_{34,125} + a_{35,124} + a_{45,123}, \\
 & \sum_{\substack{(\{\{g_1, g_2\}, \{g_3, g_4\}\}, \{q_1\}) \\ \{g_1, g_2, g_3, g_4, q_1\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}}} a_{g_1 g_2, g_3 g_4, q_1} = a_{12,34,5} + a_{13,24,5} + a_{14,23,5} + \\
 & \quad + a_{12,35,4} + a_{13,25,4} + a_{15,23,4} + a_{12,54,3} + a_{15,24,3} + a_{14,25,3} + \\
 & \quad + a_{15,34,2} + a_{13,54,2} + a_{14,53,2} + a_{52,34,1} + a_{53,24,1} + a_{54,23,1}.
 \end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать основной результат теоремы 5.1 (формулу (5.6)) в несколько ином, но более удобном виде.

**Теорема 5.2.** В условиях теоремы 5.1 справедливо следующее, сходящееся в среднеквадратичном смысле, разложение повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности  $k$ :

$$\begin{aligned}
 J[\psi^{(k)}]_{T,t} = & \underset{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \sum_{r=1}^{[k/2]} (-1)^r \times \right. \\
 & \times \sum_{\substack{(\{g_1, g_2\}, \dots, \{g_{2r-1}, g_{2r}\}), \{q_1, \dots, q_{k-2r}\} \\ \{g_1, g_2, \dots, g_{2r-1}, g_{2r}, q_1, \dots, q_{k-2r}\} = \{1, 2, \dots, k\}}} \prod_{s=1}^r \mathbf{1}_{\{i_{g_{2s-1}} = i_{g_{2s}} \neq 0\}} \times \\
 & \left. \times \mathbf{1}_{\{j_{g_{2s-1}} = j_{g_{2s}}\}} \prod_{l=1}^{k-2r} \zeta_{j_{q_l}}^{(i_{q_l})} \right). \tag{5.36}
 \end{aligned}$$

Из (5.36) при  $k = 5$  получаем:

$$\begin{aligned}
 J[\psi^{(5)}]_{T,t} = & \underset{p_1, \dots, p_5 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_5=0}^{p_5} C_{j_5 \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^5 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 & - \sum_{\substack{(\{g_1, g_2\}, \{q_1, q_2, q_3\}) \\ \{g_1, g_2, q_1, q_2, q_3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}}} \mathbf{1}_{\{i_{g_1} = i_{g_2} \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_{g_1} = j_{g_2}\}} \prod_{l=1}^3 \zeta_{j_{q_l}}^{(i_{q_l})} + \\
 & + \sum_{\substack{(\{g_1, g_2\}, \{g_3, g_4\}), \{q_1\} \\ \{g_1, g_2, g_3, g_4, q_1\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}}} \mathbf{1}_{\{i_{g_1} = i_{g_2} \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_{g_1} = j_{g_2}\}} \times \\
 & \quad \left. \times \mathbf{1}_{\{i_{g_3} = i_{g_4} \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_{g_3} = j_{g_4}\}} \zeta_{j_{q_1}}^{(i_{q_1})} \right).
 \end{aligned}$$

Последнее равенство, очевидно совпадает с (5.31).

В частности, справедливость формул (5.27) – (5.33) косвенно подтверждается тем, что при  $i_1 = \dots = i_7 = i = 1, \dots, m$  и  $\psi_1(s), \dots, \psi_7(s) \equiv \psi(s)$  из них можно вывести следующие справедливые с в. 1 равенства:

$$\begin{aligned}
 J[\psi^{(1)}]_{T,t} &= \frac{1}{1!} \delta_{T,t}, \\
 J[\psi^{(2)}]_{T,t} &= \frac{1}{2!} (\delta_{T,t}^2 - \Delta_{T,t}), \\
 J[\psi^{(3)}]_{T,t} &= \frac{1}{3!} (\delta_{T,t}^3 - 3\delta_{T,t}\Delta_{T,t}), \\
 J[\psi^{(4)}]_{T,t} &= \frac{1}{4!} (\delta_{T,t}^4 - 6\delta_{T,t}^2\Delta_{T,t} + 3\Delta_{T,t}^2), \\
 J[\psi^{(5)}]_{T,t} &= \frac{1}{5!} (\delta_{T,t}^5 - 10\delta_{T,t}^3\Delta_{T,t} + 15\delta_{T,t}\Delta_{T,t}^2), \\
 J[\psi^{(6)}]_{T,t} &= \frac{1}{6!} (\delta_{T,t}^6 - 15\delta_{T,t}^4\Delta_{T,t} + 45\delta_{T,t}^2\Delta_{T,t}^2 - 15\Delta_{T,t}^3), \\
 J[\psi^{(7)}]_{T,t} &= \frac{1}{7!} (\delta_{T,t}^7 - 21\delta_{T,t}^5\Delta_{T,t} + 105\delta_{T,t}^3\Delta_{T,t}^2 - 105\delta_{T,t}\Delta_{T,t}^3),
 \end{aligned}$$

где

$$\delta_{T,t} = \int_t^T \psi(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}, \quad \Delta_{T,t} = \int_t^T \psi^2(s) ds,$$

которые могут быть независимо получены с помощью формулы Ито (см. разд. 6.11).

При  $k = 1$  все очевидно. Рассмотрим случаи  $k = 2, 3$ . При  $k = 2$ :

$$\begin{aligned}
 J[\psi^{(2)}]_{T,t} &= \text{l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right) = \\
 &= \text{l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^{j_1-1} (C_{j_2 j_1} + C_{j_1 j_2}) \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} + \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \left( \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 - 1 \right) \right) = \\
 &= \text{l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^{j_1-1} C_{j_1} C_{j_2} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^2 \left( \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 - 1 \right) \right) = \\
 &= \text{l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1 \neq j_2}}^p C_{j_1} C_{j_2} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^2 \left( \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 - 1 \right) \right) = \\
 &= \text{l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^2 \right) = \frac{1}{2!} (\delta_{T,t}^2 - \Delta_{T,t}). \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

Поясним подробнее последний переход в (5.37). Для стохастических интегралов Ито справедлива известная оценка [34]

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_t^T \xi_\tau df_\tau \right|^q \right\} \leq K_q \mathbb{M} \left\{ \left( \int_t^T |\xi_\tau|^2 d\tau \right)^{q/2} \right\}, \quad (5.38)$$

где  $q > 0$  — фиксированное число,  $f_\tau$  — скалярный стандартный винеровский процесс,  $\xi_\tau \in \mathbb{M}_2([t, T])$ ,  $K_q$  — постоянная, которая зависит только от  $q$ ,

$$\int_t^T |\xi_\tau|^2 d\tau < \infty \text{ с в. 1, } \mathbb{M} \left\{ \left( \int_t^T |\xi_\tau|^2 d\tau \right)^{q/2} \right\} < \infty.$$

Поскольку

$$\delta_{T,t} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} = \int_t^T \left( \psi(s) - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \phi_{j_1}(s) \right) d\mathbf{f}_s^{(i)},$$

то применяя оценку (5.38) к правой части этого выражения и учитывая, что

$$\int_t^T \left( \psi(s) - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \phi_{j_1}(s) \right)^2 ds \rightarrow 0$$

при  $p \rightarrow \infty$ , получаем

$$\int_t^T \psi(s) d\mathbf{f}_s^{(i)} = q \text{-l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i)}, \quad q > 0. \quad (5.39)$$

Отсюда при  $q = 4$  нетрудно вывести равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 = \delta_{T,t}^2,$$

которое и использовалось в последнем переходе формулы (5.37).

При  $k = 3$ :

$$\begin{aligned} J[\psi^{(3)}]_{T,t} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} - \sum_{j_1,j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} - \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i)} \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1,j_3=0}^p (C_{j_3 j_1 j_1} + C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1}) \zeta_{j_3}^{(i)} \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \sum_{j_3=0}^{j_2-1} (C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2} + C_{j_2 j_1 j_3} + C_{j_2 j_3 j_1} + \right. \\ &\quad \left. + C_{j_1 j_2 j_3} + C_{j_1 j_3 j_2}) \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} (C_{j_3 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_3} + C_{j_3 j_3 j_1}) (\zeta_{j_3}^{(i)})^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} (C_{j_3 j_1 j_1} + C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1}) (\zeta_{j_1}^{(i)})^2 \zeta_{j_3}^{(i)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_1,j_3=0}^p (C_{j_3 j_1 j_1} + C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1}) \zeta_{j_3}^{(i)} \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \sum_{j_3=0}^{j_2-1} C_{j_1} C_{j_2} C_{j_3} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_3}^2 C_{j_1} (\zeta_{j_3}^{(i)})^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_1}^2 C_{j_3} (\zeta_{j_1}^{(i)})^2 \zeta_{j_3}^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^3 (\zeta_{j_1}^{(i)})^3 - \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_3=0}^p C_{j_1}^2 C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i)} \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{6} \sum_{\substack{j_1,j_2,j_3=0 \\ j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3, j_1 \neq j_3}}^p C_{j_1} C_{j_2} C_{j_3} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_3}^2 C_{j_1} \left( \zeta_{j_3}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_1}^2 C_{j_3} \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_3}^{(i)} + \\
& + \frac{1}{6} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^3 \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 - \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_3=0}^p C_{j_1}^2 C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i)} \Big) = \\
& = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \left( \frac{1}{6} \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^p C_{j_1} C_{j_2} C_{j_3} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{6} \left( 3 \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_3}^2 C_{j_1} \left( \zeta_{j_3}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3 \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_1}^2 C_{j_3} \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_3}^{(i)} + \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^3 \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_3}^2 C_{j_1} \left( \zeta_{j_3}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_1}^2 C_{j_3} \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_3}^{(i)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^3 \left( \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 - \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_3=0}^p C_{j_1}^2 C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i)} \right) = \\
& = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \left( \frac{1}{6} \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 - \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^2 \sum_{j_3=0}^p C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i)} \right) = \\
& = \frac{1}{3!} (\delta_{T,t}^3 - 3\delta_{T,t}\Delta_{T,t}). \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Последний шаг в (5.40) следует из равенства

$$\underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 = \delta_{T,t}^3,$$

которое несложно получить при  $q = 8$  из (5.39).

Также мы использовали для рассматриваемого случая следующие соотношения между коэффициентами Фурье:

$$\begin{aligned}
C_{j_1 j_2} + C_{j_2 j_1} &= C_{j_1} C_{j_2}, \quad 2C_{j_1 j_1} = C_{j_1}^2, \\
C_{j_1 j_2 j_3} + C_{j_1 j_3 j_2} + C_{j_2 j_3 j_1} + C_{j_2 j_1 j_3} + C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2} &= C_{j_1} C_{j_2} C_{j_3}, \\
2(C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1} + C_{j_3 j_1 j_1}) &= C_{j_1}^2 C_{j_3}, \\
6C_{j_1 j_1 j_1} &= C_{j_1}^3
\end{aligned}$$

и формулу (5.359) при  $k = 2, 3$ .

Случаи  $k = 4, 5, \dots$  могут быть рассмотрены аналогично с привлечением формулы (5.359) при  $k = 4, 5, \dots$

## 5.2 О применении полных ортонормированных разрывных систем функций в теореме 5.1

При анализе доказательства теоремы 5.1 возникает естественный вопрос: можно ли ослабить условие непрерывности функций  $\phi_j(x)$ ;  $j = 1, 2, \dots$ ?

*Будем говорить, что функция  $f(x) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  удовлетворяет условию  $(\star)$ , если она непрерывна на отрезке  $[t, T]$  за исключением может быть конечного числа точек конечного разрыва, а также непрерывна справа на отрезке  $[t, T]$ .*

Далее предположим, что  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система функций, причем  $\phi_j(x)$ ,  $j < \infty$  удовлетворяет условию  $(\star)$ .

Нетрудно видеть, что непрерывность функций  $\phi_j(x)$  существенно использовалась при доказательстве теоремы 5.1 в двух местах: лемма 5.3 и формула (5.14).

Ясно, что без ущерба общности разбиение  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  отрезка  $[t, T]$  в лемме 5.3 и формуле (5.14) можно взять столь "мелким", что среди узлов  $\tau_j$  этого разбиения окажутся все точки разрыва функций  $\varphi_1(\tau) = \phi_{j_1}(\tau), \dots, \varphi_k(\tau) = \phi_{j_k}(\tau)$ ;  $j_1, \dots, j_k < \infty$  и среди точек  $(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k})$ ;  $0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N - 1$  окажутся все точки разрыва функции  $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ , в которую также входят функции  $\phi_{j_1}(t_1), \dots, \phi_{j_k}(t_k)$  при обращении к формуле (5.14) в концовке доказательства теоремы 5.1.

Покажем, как следует модифицировать доказательства леммы 5.3 и формулы (5.14) в том случае, когда  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система функций, причем  $\phi_j(x)$ ,  $j < \infty$  удовлетворяет условию  $(\star)$ .

Сначала обратимся к лемме 5.3. При ее доказательстве мы получили:

$$\begin{aligned} M \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &= \sum_{j=0}^{N-1} M \left\{ \left| J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} + \\ &+ 6 \sum_{j=0}^{N-1} M \left\{ \left| J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^2 \right\} \sum_{q=0}^{j-1} M \left\{ \left| J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q} \right|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$M \left\{ \left| J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^2 \right\} = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds, \quad (5.42)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} = 3 \left( \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds \right)^2. \quad (5.43)$$

Предположим, что функции  $\varphi_l(s); l = 1, \dots, k$  удовлетворяют условию  $(\star)$ , а разбиение  $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$  содержит среди своих узлов все точки разрыва функций  $\varphi_l(s); l = 1, \dots, k$ . Это означает, что для интеграла

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds$$

подынтегральная функция непрерывна при  $[\tau_j, \tau_{j+1})$  и возможно терпит конечный разрыв в точке  $\tau_{j+1}$ .

Пусть  $\mu \in (0, \Delta\tau_j)$  и фиксировано, тогда в силу непрерывности, а значит и равномерной непрерывности функций  $\varphi_l(s); l = 1, \dots, k$  на отрезке  $[\tau_j, \tau_{j+1} - \mu]$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds &= \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}-\mu} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds + \\ &+ \int_{\tau_{j+1}-\mu}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds < \varepsilon^2 (\Delta\tau_j - \mu) + M^2 \mu. \end{aligned} \quad (5.44)$$

При получении неравенства (5.44) нами предполагалось, что  $\Delta\tau_j < \delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N - 1$  ( $\delta > 0$  найдено по любому  $\varepsilon > 0$  и не зависит от  $s$ );  $|\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s)| < \varepsilon$  при  $s \in [\tau_j, \tau_{j+1} - \mu]$  (в силу равномерной непрерывности функций  $\varphi_l(s); l = 1, \dots, k$ );  $|\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s)| < M$  при  $s \in [\tau_{j+1}-\mu, \tau_{j+1}]$ ,  $M$  — постоянная; потенциальная точка разрыва функции  $\varphi_l(s)$  предполагается в узле  $\tau_{j+1}$ .

Осуществляя предельный переход в неравенстве (5.44) при  $\mu \rightarrow +0$ , получаем следующую оценку:

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds \leq \varepsilon^2 \Delta\tau_j.$$

Используя эту оценку для оценки правой части (5.41), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &\leq \varepsilon^4 \left( 3 \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta\tau_j)^2 + 6 \sum_{j=0}^{N-1} \Delta\tau_j \sum_{q=0}^{j-1} \Delta\tau_q \right) < \\ &< 3\varepsilon^4 (\delta(T-t) + (T-t)^2). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Отсюда следует, что

$$M \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$  и лемма 5.3 остается справедливой.

Теперь приведем пояснения по поводу справедливости формулы (5.14), когда  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система функций, причем  $\phi_j(x)$ ,  $j < \infty$  удовлетворяет условию  $(\star)$ .

Рассмотрим случай  $k = 3$  и представление (5.16). Покажем, что в рассматриваемом случае первый предел в правой части (5.16) равен нулю (аналогично показывается, что второй предел в правой части (5.16) равен нулю; доказательство равенства нулю второго предела в правой части (5.15) такое же, как и для случая непрерывных функций  $\phi_j(x)$ ;  $j = 0, 1, \dots$ ).

Второй момент допредельного выражения первого предела в правой части (5.16) имеет вид

$$\sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}))^2 dt_1 dt_2 \Delta \tau_{j_3}.$$

Далее для фиксированных  $\mu \in (0, \Delta \tau_{j_2})$  и  $\rho \in (0, \Delta \tau_{j_1})$  имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}))^2 dt_1 dt_2 = \\ & = \left( \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu} + \int_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}} \right) \left( \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}} \right) (\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}))^2 dt_1 dt_2 = \\ & = \left( \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu} \int_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}} + \int_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}} \right) \times \\ & \quad \times (\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}))^2 dt_1 dt_2 < \\ & < \varepsilon^2 (\Delta \tau_{j_2} - \mu) (\Delta \tau_{j_1} - \rho) + M^2 \rho (\Delta \tau_{j_2} - \mu) + \\ & \quad + M^2 \mu (\Delta \tau_{j_1} - \rho) + M^2 \mu \rho, \end{aligned} \tag{5.46}$$

где  $M$  — постоянная;  $\Delta \tau_j < \delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N - 1$  ( $\delta > 0$  найдено по любому  $\varepsilon > 0$  и не зависит от точек  $(t_1, t_2, \tau_{j_3})$ ,  $(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})$ ); предполагается также, что разбиение  $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$  содержит среди своих узлов все точки

разрыва функции  $\Phi(t_1, t_2, t_3)$  по каждой переменной; потенциальные точки разрыва указанной функции по каждой переменной при получении (5.46) предполагаются в узлах  $\tau_{j_1+1}, \tau_{j_2+1}, \tau_{j_3+1}$ .

Поясним более подробно, как мы получили неравенство (5.46). Поскольку функция  $\Phi(t_1, t_2, t_3)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $Q_3 = \{(t_1, t_2, t_3) : t_1 \in [\tau_{j_1}, \tau_{j_1+1} - \rho], t_2 \in [\tau_{j_2}, \tau_{j_2+1} - \mu], t_3 \in [\tau_{j_3}, \tau_{j_3+1} - \nu]\}$ , где  $\rho, \mu, \nu$  — фиксированные малые положительные числа ( $\nu \in (0, \Delta\tau_{j_3})$ ,  $\mu \in (0, \Delta\tau_{j_2})$ ,  $\rho \in (0, \Delta\tau_{j_1})$ ), то она и равномерно непрерывна на этом множестве, а также ограничена на замкнутом множестве  $D_3$ .

Поскольку расстояние между точками  $(t_1, t_2, \tau_{j_3}), (t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}) \in Q_3$  очевидно меньше  $\delta$  при  $\Delta\tau_j < \delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ , то получаем, что  $|\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})| < \varepsilon$ . Это неравенство использовалось при оценке первого двойного интеграла в (5.46). При оценке трех оставшихся двойных интегралов использовалось свойство ограниченности функции  $\Phi(t_1, t_2, t_3)$  в виде неравенства  $|\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})| < M$ .

Осуществляя предельный переход в неравенстве (5.46) при  $\mu, \rho \rightarrow +0$  получаем оценку

$$\int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}))^2 dt_1 dt_2 \leq \varepsilon^2 \Delta\tau_{j_2} \Delta\tau_{j_1}.$$

Использование этой оценки дает

$$\begin{aligned} & \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}))^2 dt_1 dt_2 \Delta\tau_{j_3} \leq \\ & \leq \varepsilon^2 \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Delta\tau_{j_1} \Delta\tau_{j_2} \Delta\tau_{j_3} < \varepsilon^2 \frac{(T-t)^3}{6}. \end{aligned}$$

Последняя оценка означает, что в рассматриваемом случае первый предел в правой части (5.16) равен нулю (аналогично показывается, что второй предел в правой части (5.16) равен нулю).

Таким образом формула (5.14) справедлива при  $k = 3$  в рассмотренном случае. Аналогично проводится обоснование и при  $k = 2$  или  $k > 3$ .

Таким образом, в теореме 5.1 можно использовать полные ортонормированные в пространстве  $L_2([t, T])$  системы функций  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ , для которых  $\phi_j(x)$ ,  $j < \infty$  удовлетворяет условию  $(\star)$ .

Примером такой системы функций может служить полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система функций Хаара:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}},$$

$$\phi_{nj}(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi_{nj} \left( \frac{x-t}{T-t} \right),$$

где  $n = 0, 1, \dots; j = 1, 2, \dots, 2^n$ , а функции  $\varphi_{nj}(x)$  имеют вид:

$$\varphi_{nj}(x) = \begin{cases} 2^{n/2}, & x \in [(j-1)/2^n, (j-1)/2^n + 1/2^{n+1}) \\ -2^{n/2}, & x \in [(j-1)/2^n + 1/2^{n+1}, j/2^n) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases};$$

$n = 0, 1, \dots; j = 1, 2, \dots, 2^n$  (мы выбираем значения функций Хаара в точках разрыва так, чтобы они были непрерывны справа).

Другим примером подобной системы функций служит полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система функций Радемахера–Уолша:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}},$$

$$\phi_{m_1 \dots m_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi_{m_1} \left( \frac{x-t}{T-t} \right) \dots \varphi_{m_k} \left( \frac{x-t}{T-t} \right),$$

где  $0 < m_1 < \dots < m_k; m_1, \dots, m_k = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$  и

$$\varphi_m(x) = (-1)^{\lfloor 2^m x \rfloor},$$

$x \in [0, 1]; m = 1, 2, \dots; \lfloor y \rfloor$  — целая часть  $y$ .

### 5.3 Замечание о применении полных ортонормированных систем функций в теореме 5.1

Отметим, что, вообще говоря, функции  $\phi_j(s)$  полной ортонормированной системы функций  $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^\infty$  в пространстве  $L_2([t, T])$  зависят не только от  $s$ , но и от  $t, T$ .

Полные ортонормированные системы полиномов Лежандра и тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$  имеют соответственно следующий вид:

$$\phi_j(s, t, T) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j \left( \left( s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right), \quad (5.47)$$

где  $P_j(s)$  — полином Лежандра;

$$\phi_j(s, t, T) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0 \\ \sqrt{2} \sin(2\pi r(s-t)/(T-t)) & \text{при } j = 2r-1; \\ \sqrt{2} \cos(2\pi r(s-t)/(T-t)) & \text{при } j = 2r \end{cases}$$

$r = 1, 2, \dots$

В дальнейшем указанные системы функций будут применяться в контексте реализации сильных численных методов для СДУ Ито для последовательностей временных отрезков вида:  $[T_0, T_1], [T_1, T_2], [T_2, T_3], \dots$ , т.е. в пространствах  $L_2([T_0, T_1]), L_2([T_1, T_2]), L_2([T_2, T_3]), \dots$

Поясним, что зависимость функций  $\phi_j(s, t, T)$  от  $t, T$  (в дальнейшем эти постоянные будут иметь смысл фиксированных моментов времени) не повлияет на основные свойства независимости случайных величин

$$\zeta_{(j)T,t}^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s, t, T) d\mathbf{f}_s^{(i)} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Действительно, при фиксированных  $t, T$ , в силу ортонормированности приведенных систем функций, имеем:

$$\mathbf{M} \left\{ \zeta_{(j)T,t}^{(i)} \zeta_{(l)T,t}^{(p)} \right\} = \mathbf{1}_{\{i=p\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}},$$

где

$$\zeta_{(j)T,t}^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s, t, T) d\mathbf{f}_s^{(i)} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Кроме того случайные величины

$$\zeta_{(j)T_1,t_1}^{(i)} = \int_{t_1}^{T_1} \phi_j(s, t_1, T_1) d\mathbf{f}_s^{(i)} \text{ и } \zeta_{(j)T_2,t_2}^{(i)} = \int_{t_2}^{T_2} \phi_j(s, t_2, T_2) d\mathbf{f}_s^{(i)}$$

являются независимыми при  $[t_1, T_1] \cap [t_2, T_2] = \emptyset$  (возможен случай  $T_1 = t_2$ ) по свойству стохастического интеграла Ито.

Таким образом два важных свойства независимости случайных величин  $\zeta_{(j)T,t}^{(i)}$ , которые являются основным мотивом их использования, сохранены.

В дальнейшем, также как и раньше, вместо  $\phi_j(s, t, T)$  и  $\zeta_{(j)T,t}^{(i)}$  мы будем для краткости писать  $\phi_j(s)$  и  $\zeta_j^{(i)}$  соответственно.

## 5.4 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича 1 и 2 кратности, основанное на теореме 5.1. Полиномиальный и тригонометрический случай

В последующих частях данной главы мы будем через  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  в основном обозначать полные ортонормированные системы полиномов Лежандра и тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

В указанных разделах будем также обращать внимание на следующие общеизвестные факты относительно этих двух систем функций.

*Пусть  $f(x)$  — ограниченная на отрезке  $[t, T]$  и кусочно-гладкая на открытом интервале  $(t, T)$  функция. Тогда ряд Фурье*

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j \phi_j(x); \quad C_j = \int_t^T f(x) \phi_j(x) dx$$

*сходится во всякой внутренней точке  $x$  промежутка  $[t, T]$  к величине  $(f(x - 0) + f(x + 0)) / 2$  и сходится равномерно к  $f(x)$  в любом замкнутом интервале непрерывности  $f(x)$ , лежащем внутри  $[t, T]$ . При этом ряд Фурье по полиномам Лежандра сходится при  $x = t$  и  $x = T$  к  $f(t+0)$  и  $f(T-0)$  соответственно, а тригонометрический ряд Фурье сходится при  $x = t$  и  $x = T$  к  $(f(t + 0) + f(T - 0)) / 2$  в случае периодического продолжения функции  $f(x)$ .*

Предположим, что функции  $\psi_1(\tau)$ ,  $\psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируемы на интервале  $[t, T]$ .

Для случая  $k = 1$  мы очевидно имеем (см. теорему 1):

$$\int_t^{*T} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле;

$$C_{j_1} = \int_t^T \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1; \quad \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}; \quad i_1 = 1, \dots, m.$$

В соответствии со стандартной связью стохастических интегралов Стратоновича и Ито с вероятностью 1 получаем

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1. \quad (5.48)$$

С другой стороны, согласно теореме 5.1

$$\begin{aligned} & \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} = \\ &= \underset{p_1, p_2 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \right) = \\ &= \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

В результате возникает следующий естественный вопрос: законно ли разбиение предела на два предела в последней формуле и является ли следующее равенство верным (оно доказывает возможность такого разбиения):

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \quad (5.50)$$

Отметим, что согласно (6.126), (6.127) формула (5.50) (полиномиальный случай) является верной, по крайней мере если  $\psi_1(\tau) \equiv t - \tau$ ,  $\psi_2(\tau) \equiv 1$ ;  $\psi_1(\tau) \equiv 1$ ,  $\psi_2(\tau) \equiv t - \tau$ ;  $\psi_1(\tau)$ ,  $\psi_2(\tau) \equiv t - \tau$ ;  $\psi_1(\tau) \equiv (t - \tau)^2$ ,  $\psi_2(\tau) \equiv 1$ ;  $\psi_1(\tau) \equiv 1$ ,  $\psi_2(\tau) \equiv (t - \tau)^2$  и согласно (6.142) формула (5.50) (тригонометрический случай) верна, по меньшей мере если  $\psi_1(\tau) \equiv t - \tau$ ,  $\psi_2(\tau) \equiv 1$ ;  $\psi_1(\tau) \equiv 1$ ,  $\psi_2(\tau) \equiv t - \tau$ ;  $\tau \in [t, T]$ .

Если  $\psi_1(s) \equiv \psi_2(s)$ , то справедливо соотношение  $C_{j_1 j_1} = C_{j_1}^2 / 2$ , а тогда формула (5.50) является следствием равенства Парсеваля.

Из (5.48) – (5.50) получаем:

$$\begin{aligned} J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} &= \underset{p_1, p_2 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}. \end{aligned}$$

Докажем равенство (5.50) в более общем случае.

Введем в рассмотрение функцию

$$K^*(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1), \quad (5.51)$$

где  $t_1, t_2 \in [t, T]$  и  $K(t_1, t_2)$  имеет вид:

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2), & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, t_2 \in [t, T].$$

Разложим функцию  $K^*(t_1, t_2)$  по переменной  $t_1$ , когда  $t_2$  фиксировано, в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$ :

$$K^*(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) \quad (t_1 \neq t, T), \quad (5.52)$$

где

$$\begin{aligned} C_{j_1}(t_2) &= \int_t^T K^*(t_1, t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \int_t^T K(t_1, t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \\ &= \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1, \end{aligned}$$

$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Равенство (5.52) выполняется поточечно в каждой точке интервала  $(t, T)$  по переменной  $t_1$ , когда  $t_2 \in [t, T]$  фиксировано, согласно кусочной гладкости функции  $K^*(t_1, t_2)$  по переменной  $t_1 \in [t, T]$  ( $t_2$  — фиксировано).

Отметим также, что согласно хорошо известным свойствам рядов Фурье, ряд (5.52) сходится при  $t_1 = t, T$ .

При получении (5.52) мы также использовали тот факт, что правая часть (5.52) сходится при  $t_1 = t_2$  (точка конечного разрыва функции

$K^*(t_1, t_2)$ ) к величине

$$\frac{1}{2} (K^*(t_2 - 0, t_2) + K^*(t_2 + 0, t_2)) = \frac{1}{2} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) = K^*(t_2, t_2).$$

Функция  $C_{j_1}(t_2)$  является непрерывно дифференцируемой на интервале  $[t, T]$ . Разложим ее в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$ :

$$C_{j_1}(t_2) = \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t_2) \quad (t_2 \neq t, T), \quad (5.53)$$

где

$$C_{j_2 j_1} = \int_t^T C_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) dt_2 = \int_t^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2,$$

причем равенство (5.53) выполнняется поточечно в любой точке интервала  $(t, T)$  (правая часть (5.53) сходится при  $t_2 = t, T$ ).

Подставим (5.53) в (5.52):

$$K^*(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2); \quad (t_1, t_2) \in (t, T)^2. \quad (5.54)$$

Более того ряд в правой части (5.54) сходится на границе квадрата  $[t, T]^2$ . Нетрудно видеть, что полагая  $t_1 = t_2$  в (5.54), мы получим:

$$\frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1). \quad (5.55)$$

С помощью (5.55) мы формально можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 &= \int_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \\ &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \int_t^T C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \\ &= \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \\ &= \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{\min\{p_1, p_2\}} C_{j_2 j_1} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \quad (5.56)$$

Поясним переход от первой ко второй строке в (5.56) ( дальнейшие рассуждения в (5.56) следуют из ортонормированности функций  $\phi_j(s)$  на интервале  $[t, T]$  ).

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1} \int_t^T C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right| \leq \\ & \leq \int_t^T \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) \right| dt_1 = \\ & = \int_t^T \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \psi_2(t_1) \int_t^{t_1} \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds \phi_{j_1}(t_1) \right| dt_1 \leq \\ & \leq C \int_t^T \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \int_t^{t_1} \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds \phi_{j_1}(t_1) \right| dt_1, \quad C < \infty. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Предположим, что функция  $\psi_2(\tau)$  является непрерывно дифференцируемой на интервале  $[t, T]$ , а функция  $\psi_1(\tau)$  — дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \int_t^{t_1} \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds \phi_{j_1}(t_1) \right| = \\ & = \frac{1}{2} \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} (2j_1 + 1) \int_{-1}^{z(t_1)} \psi_1 \left( \frac{T-t}{2} y + \frac{T+t}{2} \right) P_{j_1}(y) dy P_{j_1}(z(t_1)) \right|, \end{aligned} \quad (5.58)$$

где

$$z(t_1) = \left( t_1 - \frac{1}{2}(T+t) \right) \frac{2}{T-t},$$

а  $\{P_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([-1, 1])$ .

Из (5.58) и хорошо известной формулы

$$\frac{dP_{j+1}}{dx}(x) - \frac{dP_{j-1}}{dx}(x) = (2j+1)P_j(x); \quad j = 1, 2, \dots, \quad (5.59)$$

следует, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \int_t^{t_1} \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds \phi_{j_1}(t_1) \right| = \\
 & = \frac{1}{2} \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left\{ (P_{j_1+1}(z(t_1)) - P_{j_1-1}(z(t_1))) \psi_1(t_1) - \frac{T-t}{2} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \int_{-1}^{z(t_1)} (P_{j_1+1}(y) - P_{j_1-1}(y)) \psi'_1 \left( \frac{T-t}{2} y + \frac{T+t}{2} \right) dy \right\} P_{j_1}(z(t_1)) \leq \\
 & \leq C_0 \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} (P_{j_1+1}(z(t_1)) P_{j_1}(z(t_1)) - P_{j_1-1}(z(t_1)) P_{j_1}(z(t_1))) \right| + \\
 & + \frac{T-t}{4} \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left\{ \psi'_1(t_1) \left( \frac{1}{2j_1+3} (P_{j_1+2}(z(t_1)) - P_{j_1}(z(t_1))) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{1}{2j_1-1} (P_{j_1}(z(t_1)) - P_{j_1-2}(z(t_1))) \right) - \frac{T-t}{2} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \int_{-1}^{z(t_1)} \left( \frac{1}{2j_1+3} (P_{j_1+2}(y) - P_{j_1}(y)) - \frac{1}{2j_1-1} (P_{j_1}(y) - P_{j_1-2}(y)) \right) \times \right. \\
 & \left. \left. \times \psi''_1 \left( \frac{T-t}{2} y + \frac{T+t}{2} \right) dy \right\} P_{j_1}(z(t_1)) \right|, \tag{5.60}
 \end{aligned}$$

где  $C_0$  — постоянная;  $\psi'_1$ ,  $\psi''_1$  — производные функции  $\psi_1(s)$  по переменной  $\frac{1}{2}(T-t)y + \frac{1}{2}(T+t)$ .

Из (5.60) и хорошо известной оценки для полиномов Лежандра:

$$|P_n(y)| < \frac{K}{\sqrt{n+1}(1-y^2)^{1/4}}, \quad y \in (-1, 1), \quad n \in N \tag{5.61}$$

(постоянная  $K$  не зависит от  $y$  и  $n$ ) получим:

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \int_t^{t_1} \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds \phi_{j_1}(t_1) \right| < \\
 & < C_0 \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j_1=p_1+1}^n (P_{j_1+1}(z(t_1)) P_{j_1}(z(t_1)) - P_{j_1-1}(z(t_1)) P_{j_1}(z(t_1))) \right| +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_1 \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left( \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/2}} + \int_{-1}^{z(t_1)} \frac{dy}{(1 - y^2)^{1/4}} \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/4}} \right) < \\
& < C_0 \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{n+1}(z(t_1))P_n(z(t_1)) - P_{p_1}(z(t_1))P_{p_1+1}(z(t_1))) \right| + \\
& + C_1 \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left( \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/2}} + C_2 \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/4}} \right) < \\
& < C_3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{p_1} \right) \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/2}} + \\
& + C_1 \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left( \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/2}} + C_2 \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/4}} \right) \leq \\
& \leq C_4 \left( \left( \frac{1}{p_1} + \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \right) \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/2}} + \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/4}} \right) \\
& \leq \frac{K}{p_1} \left( \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1 - (z(t_1))^2)^{1/4}} \right), \tag{5.62}
\end{aligned}$$

где  $C_0, C_1, \dots, C_4, K$  — постоянные,  $t_1 \in (t, T)$  и

$$\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \leq \int_{p_1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p_1}. \tag{5.63}$$

Из (5.57) и (5.62) следует:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1} \int_t^T C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right| < \\
& < \frac{K}{p_1} \left( \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1 - y^2)^{1/2}} + \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1 - y^2)^{1/4}} \right) \rightarrow 0 \text{ при } p_1 \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем:

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 = \int_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \int_t^T C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} \int_t^T \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \\
 &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \int_t^T C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \tag{5.64}
 \end{aligned}$$

В (5.64) мы использовали тот факт, что ряд Фурье-Лежандра

$$\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t_1)$$

гладкой функции  $C_{j_1}(t_1)$  сходится равномерно к этой функции на любом интервале  $[t + \varepsilon, T - \varepsilon]$  для любого  $\varepsilon > 0$ , сходится к этой функции в любой точке интервала  $(t, T)$  и сходится к  $C_{j_1}(t + 0)$  и  $C_{j_1}(T - 0)$  при  $t_1 = t, T$ .

Поэтому мы можем записать:

$$\int_t^T \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \sum_{j_2=0}^{\infty} \int_t^T C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1.$$

Соотношение (5.50) доказано для случая полиномов Лежандра.

Пусть теперь  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ , а функции  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)$  удовлетворяют тем же условиям, что и раньше.

Используя (5.57) мы получаем:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1} \int_t^T C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right| \leq \\
 &\leq \frac{2C}{T-t} \int_t^T \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^{t_1} \psi_1(s) \sin \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} ds \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_t^{t_1} \psi_1(s) \cos \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} ds \cos \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} \right) \right| dt_1 \leq \\
 &\leq C_1 \int_t^T \left| \left( \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} \right) \psi_1(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \left( \int_t^{t_1} \cos \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} \psi'_1(s) ds \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_t^{t_1} \sin \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} \psi'_1(s) ds \cos \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} \right) \right| dt_1 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= C_1 \int_t^T \left| \left( \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \sin \frac{2\pi j_1(t_1 - t)}{T-t} \right) \psi_1(t) + \right. \\
 &\quad + \frac{T-t}{2\pi} \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left( \psi'_1(t_1) - \psi'_1(t) \cos \frac{2\pi j_1(t_1 - t)}{T-t} - \right. \\
 &\quad \left. - \int_t^{t_1} \sin \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} \psi''_1(s) ds \sin \frac{2\pi j_1(t_1 - t)}{T-t} - \right. \\
 &\quad \left. - \int_t^{t_1} \cos \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} \psi''_1(s) ds \cos \frac{2\pi j_1(t_1 - t)}{T-t} \right) dt_1 \leq \\
 &< C_2 \int_t^T \left( \varepsilon + \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \right) dt_1 \leq C_2 \int_t^T \left( \varepsilon + \frac{1}{p_1} \right) dt_1 \rightarrow C_2(T-t)\varepsilon \quad (5.65)
 \end{aligned}$$

при  $p_1 \rightarrow \infty$ , где  $C_1, C_2$  — постоянные,  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число. Здесь мы использовали тот факт, что функциональный ряд

$$\sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \sin \frac{2\pi j_1(t_1 - t)}{T-t}$$

равномерно сходится на любом интервале  $[t+\varepsilon_1, T-\varepsilon_1]$   $\forall \varepsilon_1 > 0$  по признаку Дирихле-Абеля и сходится к нулю в точках  $t$  и  $T$ . Более того, этот ряд (с точностью до линейного преобразования) является рядом Фурье гладкой функции  $K(t_1) = t_1 - t$ ,  $t_1 \in [t, T]$ , т.е. сходится к ней в любой точке интервала  $(t, T)$ . Поэтому мы можем записать:

$$\left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \sin \frac{2\pi j_1(t_1 - t)}{T-t} \right| < \varepsilon, \quad (5.66)$$

когда  $p_1 > N(\varepsilon)$  ( $N(\varepsilon)$  не зависит от  $t_1$  и существует для любого  $\varepsilon > 0$ ).

Из (5.65) следует, что

$$\int_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} \int_t^T C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1.$$

Дальнейшее рассмотрение данного случая аналогично доказательству соотношения (5.50) для случая полиномов Лежандра.

Рассмотрим другой подход для тригонометрического случая, позволяющий получить одну оценку, которая будет использоваться в дальнейшем.

Имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \int_t^T \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} C_{j_1}(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right| = \\
& = \left| \int_t^T \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \psi_2(t_1) \phi_{j_1}(t_1) \int_t^{t_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta dt_1 \right| = \\
& = \frac{2}{T-t} \left| \int_t^T \psi_2(t_1) \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^{t_1} \psi_1(s) \sin \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} ds \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_t^{t_1} \psi_1(s) \cos \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} ds \cos \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} \right) dt_1 \right| = \\
& = \frac{1}{\pi} \left| \int_t^T \left( \psi_1(t) \psi_2(t_1) \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{T-t}{2\pi} \psi_2(t_1) \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left( \psi_1'(t_1) - \psi_1'(t) \cos \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \int_t^{t_1} \sin \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} \psi_1''(s) ds \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \int_t^{t_1} \cos \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} \psi_1''(s) ds \cos \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} \right) \right) dt_1 \right| \leq \\
& \leq C_1 \left| \int_t^T \psi_2(t_1) \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} dt_1 \right| + \frac{C_2}{p_1} = \\
& = C_1 \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \int_t^T \psi_2(t_1) \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t} dt_1 \right| + \frac{C_2}{p_1}, \tag{5.67}
\end{aligned}$$

где постоянные  $C_1, C_2$  не зависят от  $p_1$ .

Последний шаг следует из равномерной сходимости ряда

$$\sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{1}{j_1} \sin \frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}.$$

Из (5.67) мы получаем:

$$\left| \int_t^T \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \psi_2(t_1) \phi_{j_1}(t_1) \int_t^{t_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta dt_1 \right| \leq$$

$$\leq C_3 \left| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left( \psi_2(T) - \psi_2(t) - \int_t^T \cos \frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t} \psi'_2(s) ds \right) \right| + \frac{C_2}{p_1} \leq \\ \leq \frac{K}{p_1} \rightarrow 0$$

при  $p_1 \rightarrow \infty$ , где постоянная  $K$  не зависит от  $p_1$ .

Таким образом мы получили следующую оценку:

$$\left| \int_t^T \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \psi_2(t_1) \phi_{j_1}(t_1) \int_t^{t_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta dt_1 \right| \leq \frac{K}{p_1}, \quad (5.68)$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $p_1$ .

Дальнейшее рассмотрение данного случая аналогично доказательству соотношения (5.50) для случая полиномов Лежандра.

Итак, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 5.3.** *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. Функция  $\psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а функция  $\psi_1(\tau)$  — дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ .
2.  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда, повторный стохастический интеграл Стратоновича второй кратности

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \quad (i_1, i_2 = 1, \dots, m)$$

разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \lim_{p_1, p_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в теоремах 5.1 и 5.2.

Сделаем одно замечание о кратных и повторных рядах. Для кратного ряда при  $k = 2$  мы используем следующее обозначение:

$$\lim_{p_1, p_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \alpha_{j_1 j_2} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} \alpha_{j_1 j_2}, \quad (5.69)$$

а для повторного ряда мы пишем:

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \alpha_{j_1 j_2} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \alpha_{j_1 j_2}. \quad (5.70)$$

Ясно, что (5.69) и (5.70) — разные вещи с математической точки зрения. Иногда ряд (5.69) равен ряду (5.70) (существует хорошо известная теорема о сведении предела к повторному). Однако, обычно ряд (5.69) во все не равен ряду (5.70).

Рассмотрим один пример, когда ряд (5.69) равен ряду (5.70). Пусть  $\psi_1(s), \psi_2(s) \equiv 1$  в (5.51) и рассмотрим повторный ряд Фурье (5.54) при этом предположении. Также, пусть  $p_1 = p_2 = p$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \right| = \\ & = \left| \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=p+1}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \right|. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Предположим, что  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$  и  $p \geq 1$ .

Учитывая ортономированность полиномов Лежанда:

$$\begin{aligned} C_{j_2 j_1} &= \int_t^T \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{\sqrt{2j_1 + 1} \sqrt{2j_2 + 1} (T - t)}{4} \int_{-1}^1 P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(y_1) dy_1 dy = \\ &= \frac{\sqrt{2j_2 + 1} (T - t)}{4\sqrt{2j_1 + 1}} \int_{-1}^1 P_{j_2}(y) (P_{j_1+1}(y) - P_{j_1-1}(y)) dy = \\ &= \frac{\sqrt{2p + 3} (T - t)}{4\sqrt{2p + 1}} \int_{-1}^1 P_{p+1}^2(y) dy = \frac{T - t}{2\sqrt{(2p + 1)(2p + 3)}} \quad (j_1 = p, j_2 = p + 1) \end{aligned}$$

если  $j_1 \neq 0$  и

$$C_{j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 = \frac{\sqrt{2j_2 + 1} (T - t)}{4} \int_{-1}^1 P_{j_2}(y) (y + 1) dy = 0$$

если  $j_1 = 0$ , где  $\{P_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([-1, 1])$ .

Таким образом

$$\left| \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=p+1}^\infty C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \right| \leq \frac{C(T-t)}{2\sqrt{(2p+1)(2p+3)}} \rightarrow 0$$

при  $p \rightarrow \infty$ , где  $C$  — постоянная.

Поэтому в нашем случае:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2). \quad (5.72)$$

Однако, если положить  $\psi_1(s), \psi_2(s)$  не равными тождественно 1 в (5.51) или взять  $k > 2$  ( $k$  — кратность ряда Фурье), то мы можем увидеть, что равенство подобное (5.72) может не выполняться.

Рассмотрим другой подход к доказательству равенства (5.50) в общем случае.

Доказательство теоремы 5.3 основано на повторных (двойных) рядах Фурье-Лежандра и аналогичных рядах по тригонометрической системе функций. При этом используется двукратное интегрирование по частям, что ведет к требованию двукратной непрерывной дифференцируемости функции  $\psi_1(\tau)$  на интервале  $[t, T]$ .

Рассмотрим подход к доказательству равенства (5.50), основанный на кратных (двойных) рядах Фурье-Лежандра, суммируемых по Принсхейму. При этом удается снизить порядок непрерывной дифференцируемости функции  $\psi_1(\tau)$  на интервале  $[t, T]$  с двух до единицы.

Сделаем небольшое отступление и напомним некоторые достаточные условия сходимости двойных рядов Фурье-Лежандра, суммируемых по Принсхейму.

Пусть  $P_j(x); j = 0, 1, 2, \dots$  — многочлены Лежандра. Рассмотрим функцию двух переменных  $f(x, y)$ , определенную в квадрате  $[-1, 1]^2$ .

Поставим в соответствие функции  $f(x, y)$  двойной ряд Фурье-Лежандра, суммируемый по Принсхейму:

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m \bar{C}_{ij} \frac{1}{2} \sqrt{(2j+1)(2i+1)} P_i(x) P_j(y) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=0}^{\infty} \bar{C}_{ij} \frac{1}{2} \sqrt{(2j+1)(2i+1)} P_i(x) P_j(y), \quad (5.73)$$

где

$$\bar{C}_{ij} = \frac{1}{2} \sqrt{(2j+1)(2i+1)} \int_{[-1,1]^2} f(x,y) P_i(x) P_j(y) dx dy. \quad (5.74)$$

**Утверждение 5.1.** [93]. Пусть  $f(x,y) \in L_2([-1,1]^2)$  и для некоторой точки  $(x,y) \in (-1,1)^2$  выполняется условие:

$$\int_{[-1,1]^2} \left( \frac{f(x,y) - f(u,v)}{(x-u)(y-v)} \right)^2 du dv < \infty, \quad (5.75)$$

то в этой точке двойной ряд Фурье-Лежандра вида (5.73) сходится к функции  $f(x,y)$ .

Отметим, что утверждение 5.1 является обобщением на случай двух переменных известной теоремы о достаточных условиях сходимости ряда Фурье-Лежандра [97].

Рассмотрим обобщение на случай двух переменных [93] теоремы о равносходимости для рядов Фурье-Лежандра [97].

**Утверждение 5.2.** [93]. Пусть  $f(x,y) \in L_2([-1,1]^2)$ , а функция

$$f(x,y)(1-x^2)^{-1/4}(1-y^2)^{-1/4}$$

интегрируема на  $[-1,1]^2$ . Пусть, кроме того, выполнено условие:

$$|f(x,y) - f(u,v)| \leq G(y)|x-u| + H(x)|y-v|,$$

где  $G(y), H(x)$  — ограниченные на  $[-1,1]^2$  функции.

Тогда для любых  $(x,y) \in (-1,1)^2$  верно равенство:

$$\begin{aligned} & \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m \bar{C}_{ij} \frac{1}{2} \sqrt{(2j+1)(2i+1)} P_i(x) P_j(y) - \right. \\ & \left. - (1-x^2)^{-1/4}(1-y^2)^{-1/4} S_{nm}(\arccos x, \arccos y, F) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.76)$$

причем сходимость равномерная на всяком прямоугольнике

$$[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [-1+\delta, 1-\delta] \quad \forall \varepsilon, \delta > 0,$$

а  $S_{nm}(\theta, \varphi, F)$  — частичная сумма двойного тригонометрического ряда Фурье вспомогательной функции

$$F(\theta, \varphi) = \sqrt{|\sin\theta|}\sqrt{|\sin\varphi|}f(\cos\theta, \cos\varphi); \quad \theta, \varphi \in [0, \pi];$$

коэффициент  $\bar{C}_{ij}$  имеет вид (5.74).

Из утверждения 5.2, в частности, следует, что для любых  $(x, y) \in (-1, 1)^2$  верно равенство:

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m \bar{C}_{ij} \frac{1}{2} \sqrt{(2j+1)(2i+1)} P_i(x) P_j(y) - f(x, y) \right) = 0, \quad (5.77)$$

причем сходимость равномерная на всяком прямоугольнике

$$[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon] \times [-1 + \delta, 1 - \delta] \quad \forall \varepsilon, \delta > 0,$$

если выполнены соответствующие условия сходимости двойного тригонометрического ряда Фурье вспомогательной функции

$$g(x, y) = f(x, y)(1 - x^2)^{1/4}(1 - y^2)^{1/4}. \quad (5.78)$$

Отметим также, что из утверждения 5.2 не следует никаких выводов о поведении двойного ряда Фурье-Лежандра на границе квадрата  $[-1, 1]^2$ .

Для каждого  $\delta > 0$  назовем [29] модулем непрерывности  $\omega(\delta, f)$  функции  $f(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$  в  $k$ -мерной области  $D$  ( $k \geq 1$ ) точную верхнюю грань разности  $|f(\mathbf{t}') - f(\mathbf{t}'')|$  на множестве всех точек  $\mathbf{t}', \mathbf{t}''$ , которые принадлежат области  $D$ , причем расстояние  $\rho(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') < \delta$ .

Будем говорить [29], что функция  $f(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$ ,  $k \geq 1$  принадлежит в области  $D$  классу Гельдера  $C^\alpha$  с показателем  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) и писать  $f(\mathbf{t}) \in C^\alpha(D)$ , если  $\omega(\delta, f) = o(\delta^\alpha)$  при  $0 < \alpha < 1$  и  $\omega(\delta, f) = O(\delta)$  при  $\alpha = 1$ .

В 1967 г. Л.В. Жижиашвили установил [28] окончательные (в классах Гельдера  $C^\alpha$ ) условия сходимости прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье.

В частности, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 5.3.** [29]. *Если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  периодична с периодом  $2\pi$  по каждой переменной и принадлежит в  $\mathbb{R}^n$  классу Гельдера  $C^\alpha$  при любом  $\alpha > 0$ , то прямоугольные частичные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  сходятся к этой функции равномерно в  $\mathbb{R}^n$ .*

**Лемма 5.1\*.** Пусть функция  $f(x, y)$  удовлетворяет следующему условию:

$$|f(x, y) - f(x_1, y_1)| \leq C_1|x - x_1| + C_2|y - y_1|,$$

где  $C_1, C_2 < \infty$ , а  $(x, y)$  и  $(x_1, y_1) \in [-1, 1]^2$ .

Тогда имеет место неравенство:

$$|g(x, y) - g(x_1, y_1)| \leq K\rho^{1/4}, \quad (5.79)$$

где  $g(x, y)$  имеет вид (5.78);  $\rho = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ ;  $(x, y)$  и  $(x_1, y_1) \in [-1, 1]^2$ ;  $K < \infty$ .

Доказательство. Сначала будем считать, что  $x \neq x_1$ ,  $y \neq y_1$ .

Имеем

$$\begin{aligned} & |g(x, y) - g(x_1, y_1)| = \\ & = |(1 - x^2)^{1/4}(1 - y^2)^{1/4}(f(x, y) - f(x_1, y_1)) + \\ & + f(x_1, y_1)((1 - x^2)^{1/4}(1 - y^2)^{1/4} - (1 - x_1^2)^{1/4}(1 - y_1^2)^{1/4})| \leq \\ & \leq C_1|x - x_1| + C_2|y - y_1| + \\ & + C_3|(1 - x^2)^{1/4}(1 - y^2)^{1/4} - (1 - x_1^2)^{1/4}(1 - y_1^2)^{1/4}|, \end{aligned} \quad (5.80)$$

где  $C_3 < \infty$ .

Далее

$$\begin{aligned} & |(1 - x^2)^{1/4}(1 - y^2)^{1/4} - (1 - x_1^2)^{1/4}(1 - y_1^2)^{1/4}| = \\ & = |(1 - x^2)^{1/4}((1 - y^2)^{1/4} - (1 - y_1^2)^{1/4}) + \\ & + (1 - y_1^2)^{1/4}((1 - x^2)^{1/4} - (1 - x_1^2)^{1/4})| \leq \\ & \leq |(1 - y^2)^{1/4} - (1 - y_1^2)^{1/4}| + |(1 - x^2)^{1/4} - (1 - x_1^2)^{1/4}|. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Кроме того

$$\begin{aligned} & |(1 - x^2)^{1/4} - (1 - x_1^2)^{1/4}| = \\ & = |((1 - x)^{1/4} - (1 - x_1)^{1/4})(1 + x)^{1/4} + (1 - x_1)^{1/4}((1 + x)^{1/4} - (1 + x_1)^{1/4})| \leq \\ & \leq K_1(|(1 - x)^{1/4} - (1 - x_1)^{1/4}| + |(1 + x)^{1/4} - (1 + x_1)^{1/4}|), \end{aligned} \quad (5.82)$$

где  $K_1 < \infty$ .

Нетрудно заметить, что

$$|(1 \pm x)^{1/4} - (1 \pm x_1)^{1/4}| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|(1 \pm x) - (1 \pm x_1)|}{((1 \pm x)^{1/2} + (1 \pm x_1)^{1/2})((1 \pm x)^{1/4} + (1 \pm x_1)^{1/4})} = \\
 &= |x_1 - x|^{1/4} \frac{|x_1 - x|^{1/2}}{(1 \pm x)^{1/2} + (1 \pm x_1)^{1/2}} \cdot \frac{|x_1 - x|^{1/4}}{(1 \pm x)^{1/4} + (1 \pm x_1)^{1/4}} \leq \\
 &\leq |x_1 - x|^{1/4}.
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Последнее неравенство получается в силу очевидных неравенств:

$$\begin{aligned}
 \frac{|x_1 - x|^{1/2}}{(1 \pm x)^{1/2} + (1 \pm x_1)^{1/2}} &\leq 1, \\
 \frac{|x_1 - x|^{1/4}}{(1 \pm x)^{1/4} + (1 \pm x_1)^{1/4}} &\leq 1.
 \end{aligned}$$

Собирая неравенства (5.80) – (5.83), получаем

$$\begin{aligned}
 |g(x, y) - g(x_1, y_1)| &\leq \\
 \leq C_1|x - x_1| + C_2|y - y_1| + C_4(|x_1 - x|^{1/4} + |y_1 - y|^{1/4}) &\leq \\
 \leq C_5\rho + C_6\rho^{1/4} &\leq K\rho^{1/4},
 \end{aligned}$$

где  $C_5, C_6, K < \infty$ .

Случаи  $x = x_1, y \neq y_1$  и  $x \neq x_1, y = y_1$  рассматриваются аналогично случаю  $x \neq x_1, y \neq y_1$ . При этом рассмотрение начинается с неравенств вида:

$$\begin{aligned}
 |g(x, y) - g(x_1, y_1)| &\leq \\
 \leq K_2|(1 - y^2)^{1/4}f(x, y) - (1 - y_1^2)^{1/4}f(x_1, y_1)| \text{ при } x = x_1, y \neq y_1; \\
 |g(x, y) - g(x_1, y_1)| &\leq \\
 \leq K_2|(1 - x^2)^{1/4}f(x, y) - (1 - x_1^2)^{1/4}f(x_1, y_1)| \text{ при } x \neq x_1, y = y_1,
 \end{aligned}$$

где  $K_2 < \infty$ . Лемма 5.1\* доказана.  $\square$

Из леммы 5.1\* и утверждения 5.3 следует, что прямоугольные суммы двойного тригонометрического ряда Фурье функции  $g(x, y)$  сходятся равномерно в квадрате  $[-1, 1]^2$  к функции  $g(x, y)$ . Это, в свою очередь, означает, что справедливо равенство (5.77).

Нетрудно видеть, что в условиях леммы 5.1\* выполняется условие (5.75) в каждой точке  $(x, y) \in (-1, 1)^2$ .

**Теорема 5.3\*.** Пусть выполнены условия:

1. Функции  $\psi_1(\tau)$  и  $\psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируемы на интервале  $[t, T]$ ;
2.  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда, повторный стохастический интеграл Стратоновича второй кратности

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \quad (i_1, i_2 = 1, \dots, m)$$

разлагается в следующий, сходящийся в среднеквадратическом смысле, кратный ряд

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \underset{p_1, p_2 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 5.3.

**Доказательство.** Установим справедливость равенства:

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1},$$

где  $C_{j_1 j_1}$  определяется формулой (5.7) при  $k = 2$  и  $j_1 = j_2$ , а  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$K'(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_2(t_1) \psi_1(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1) \psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \end{cases}, \quad t_1, t_2 \in [t, T]$$

и покажем, что

$$|K'(t_1, t_2) - K'(t_1^*, t_2^*)| \leq L(|t_1 - t_1^*| + |t_2 - t_2^*|), \quad (5.84)$$

где  $L < \infty$ , а  $(t_1, t_2)$  и  $(t_1^*, t_2^*) \in [t, T]^2$ .

Используя формулу Лагранжа для функций  $\psi_1(t_1^*)$ ,  $\psi_2(t_1^*)$  на интервале  $[\min\{t_1, t_1^*\}, \max\{t_1, t_1^*\}]$  и для функций  $\psi_1(t_2^*)$ ,  $\psi_2(t_2^*)$  на интервале  $[\min\{t_2, t_2^*\}, \max\{t_2, t_2^*\}]$  придем к представлению:

$$\begin{aligned} & |K'(t_1, t_2) - K'(t_1^*, t_2^*)| \leq \\ & \leq \left| \begin{cases} \psi_2(t_1) \psi_1(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1) \psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \end{cases} - \begin{cases} \psi_2(t_1^*) \psi_1(t_2^*), & t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1^*) \psi_2(t_2^*), & t_1^* \leq t_2^* \end{cases} \right| + \end{aligned}$$

$$+L_1|t_1 - t_1^*| + L_2|t_2 - t_2^*|, \quad (5.85)$$

где  $L_1, L_2 < \infty$ .

Далее имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \quad t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \quad t_1 \leq t_2 \end{array} \right. - \left\{ \begin{array}{l} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \quad t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \quad t_1^* \leq t_2^* \end{array} \right. = \\ & = \begin{cases} 0, & t_1 \geq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \leq t_2, t_1^* \leq t_2^* \\ \psi_2(t_1)\psi_1(t_2) - \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 \geq t_2, t_1^* \leq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2) - \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1 \leq t_2, t_1^* \geq t_2^* \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Используя формулу Лагранжа для функций  $\psi_1(t_2)$ ,  $\psi_2(t_2)$  на интервале  $[\min\{t_1, t_2\}, \max\{t_1, t_2\}]$  приDEM к оценке:

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ \begin{array}{l} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \quad t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \quad t_1 \leq t_2 \end{array} \right. - \left\{ \begin{array}{l} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), \quad t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \quad t_1^* \leq t_2^* \end{array} \right. \right| \leq \\ & \leq L_3|t_2 - t_1| \begin{cases} 0, & t_1 \geq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \leq t_2, t_1^* \leq t_2^* \\ 1, & t_1 \leq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \geq t_2, t_1^* \leq t_2^* \end{cases}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

где  $L_3 < \infty$ .

Покажем, что при  $t_1 \leq t_2$ ,  $t_1^* \geq t_2^*$  или  $t_1 \geq t_2$ ,  $t_1^* \leq t_2^*$  выполняется неравенство:

$$|t_2 - t_1| \leq |t_1^* - t_1| + |t_2^* - t_2|. \quad (5.88)$$

Сначала рассмотрим случай  $t_1 \geq t_2$ ,  $t_1^* \leq t_2^*$ . Имеем:

$$t_2 + (t_1^* - t_2^*) \leq t_2 \leq t_1.$$

Тогда

$$(t_1^* - t_1) - (t_2^* - t_2) \leq t_2 - t_1 \leq 0,$$

т.е. (5.88) выполнено.

Для случая  $t_1 \leq t_2$ ,  $t_1^* \geq t_2^*$  получаем:

$$t_1 + (t_2^* - t_1^*) \leq t_1 \leq t_2.$$

Тогда

$$(t_1 - t_1^*) - (t_2 - t_2^*) \leq t_1 - t_2 \leq 0,$$

т.е. (5.88) тоже выполнено.

Объединяя (5.87) и (5.88) имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \end{cases} - \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1^* \leq t_2^* \end{cases} \right| \leq \\ & \leq L_3(|t_1^* - t_1| + |t_2^* - t_2|) \begin{cases} 0, & t_1 \geq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \leq t_2, t_1^* \leq t_2^* \\ 1, & t_1 \leq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \geq t_2, t_1^* \leq t_2^* \end{cases} \leq \\ & \leq L_3(|t_1^* - t_1| + |t_2^* - t_2|) \begin{cases} 1, & t_1 \geq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \leq t_2, t_1^* \leq t_2^* \\ 1, & t_1 \leq t_2, t_1^* \geq t_2^* \text{ или } t_1 \geq t_2, t_1^* \leq t_2^* \end{cases} = \\ & = L_3(|t_1^* - t_1| + |t_2^* - t_2|). \end{aligned} \quad (5.89)$$

Объединив (5.85) и (5.89), придем к (5.84).

Сделаем замену:

$$t_1 = \frac{T-t}{2}x + \frac{T+t}{2}, \quad t_2 = \frac{T-t}{2}y + \frac{T+t}{2},$$

где  $x, y \in [-1, 1]$ . Таким образом изменению переменных  $t_1, t_2$  в пределах от  $t$  до  $T$  соответствует изменение переменных  $x, y$  в пределах от  $-1$  до  $1$ .

Далее

$$K'(t_1, t_2) \equiv \tilde{K}(x, y) = \begin{cases} \psi_2(h(x))\psi_1(h(y)), & x \geq y \\ \psi_1(h(x))\psi_2(h(y)), & x \leq y \end{cases},$$

где  $x, y \in [-1, 1]$  и

$$h(x) = \frac{T-t}{2}x + \frac{T+t}{2}.$$

Неравенство (5.84) перепишется в виде:

$$|\tilde{K}(x, y) - \tilde{K}(x^*, y^*)| \leq \tilde{L}(|x - x^*| + |y - y^*|), \quad (5.90)$$

где  $\tilde{L} < \infty$ , а  $(x, y)$  и  $(x^*, y^*) \in [-1, 1]^2$ .

Таким образом функция  $\tilde{K}(x, y)$  удовлетворяет условиям леммы 5.1\*, а значит для функции

$$\tilde{K}(x, y)(1 - x^2)^{1/4}(1 - y^2)^{1/4}$$

верно неравенство (5.79).

В силу непрерывной дифференцируемости функций  $\psi_1(h(x))$  и  $\psi_2(h(x))$  на интервале  $[-1, 1]$  имеем  $\tilde{K}(x, y) \in L_2([-1, 1]^2)$ . Кроме того

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]^2} \frac{\tilde{K}(x, y) dx dy}{(1 - x^2)^{1/4}(1 - y^2)^{1/4}} &\leq C \left( \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - x^2)^{1/4}} \int_{-1}^x \frac{1}{(1 - y^2)^{1/4}} dy dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - x^2)^{1/4}} \int_x^1 \frac{1}{(1 - y^2)^{1/4}} dy dx \right) < \infty, \end{aligned}$$

где  $C < \infty$ .

Таким образом для функции  $\tilde{K}(x, y)$  выполнены условия утверждения 5.2. Кроме того, в силу неравенства (5.90) функция  $\tilde{K}(x, y)$  удовлетворяет условию (5.75) в каждой точке  $(x, y) \in (-1, 1)^2$ .

Отметим, что все перечисленные свойства функции  $\tilde{K}(x, y)$ ;  $x, y \in [-1, 1]$  верны и для функции  $K'(t_1, t_2)$ ;  $t_1, t_2 \in [t, T]$ .

Разложим функцию  $K'(t_1, t_2)$  в квадрате  $[t, T]^2$  в кратный ряд Фурье, суммируемый методом прямоугольных сумм, т.е.

$$\begin{aligned} K'(t_1, t_2) &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \int_t^T \int_t^T K'(t_1, t_2) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) dt_1 dt_2 \cdot \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) = \\ &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \left( \int_t^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T \psi_1(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \psi_2(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right) dt_2 \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) = \\ &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} (C_{j_2 j_1} + C_{j_1 j_2}) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2), \quad (t_1, t_2) \in (t, T)^2, \quad (5.91) \end{aligned}$$

причем сходимость ряда (5.91) равномерная на всяком прямоугольнике

$[t + \varepsilon, T - \varepsilon] \times [t + \delta, T - \delta]$   $\forall \varepsilon, \delta > 0$  (в частности, можно взять  $\varepsilon = \delta$ ).

Кроме того, ряд (5.91) сходится к  $K'(t_1, t_2)$  во всякой внутренней точке квадрата  $[t, T]^2$ .

Отметим, что утверждения 5.1 и 5.2 не отвечают на вопрос о сходимости ряда (5.91) на границе квадрата  $[t, T]^2$ .

При получении (5.91) мы заменили порядок интегрирования во втором повторном интеграле.

Нетрудно видеть, что положив  $t_1 = t_2$  в (5.91), разбив предел в правой части полученного равенства на два предела и переобозначив  $j_1$  на  $j_2$ ,  $j_2$  на  $j_1$ ,  $n_1$  на  $n_2$  и  $n_2$  на  $n_1$  во втором пределе, получим

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) = \frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1), \quad t_1 \in (t, T). \quad (5.92)$$

Согласно вышеизложенным рассуждениям, равенство (5.92) выполняется равномерно на всяком интервале  $[t + \varepsilon, T - \varepsilon]$   $\forall \varepsilon > 0$ . Кроме того (5.92) выполняется в каждой внутренней точке интервала  $[t, T]$ .

**Лемма 5.2\*.** В условиях теоремы 5.3\* ряд (5.92) при  $n_1 = n_2$  сходится в точках  $t_1 = t, T$  (не обязательно к  $\psi_1(t)\psi_2(t)/2$  и  $\psi_1(T)\psi_2(T)/2$  соответственно).

Доказательство леммы 5.2\* приводится ниже в данном разделе.

Проинтегрируем равенство (5.92) по интервалу  $[t + \varepsilon, T - \varepsilon]$   $\forall \varepsilon > 0$  и поменяем интеграл и ряд местами, в силу равномерной сходимости последнего:

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} C_{j_2 j_1} \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1. \quad (5.93)$$

Рассмотрим левую часть (5.93)

$$\begin{aligned} & \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} C_{j_2 j_1} \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \\ & = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} C_{j_2 j_1} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 - \right. \\ & \quad \left. - \int_t^{t+\varepsilon} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 - \int_{T-\varepsilon}^T \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 \right) = \\ & = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} C_{j_2 j_1} (\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} - (\phi_{j_1}(\theta) \phi_{j_2}(\theta) + \phi_{j_1}(\lambda) \phi_{j_2}(\lambda)) \varepsilon) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{\min\{n_1, n_2\}} C_{j_1 j_1} - \varepsilon \left( \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(\theta) \phi_{j_2}(\theta) - \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(\lambda) \phi_{j_2}(\lambda) \right) = \\
 &= \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1} - \varepsilon \left( \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(\theta) \phi_{j_2}(\theta) - \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(\lambda) \phi_{j_2}(\lambda) \right), \quad (5.94)
 \end{aligned}$$

где  $\theta \in [t, t + \varepsilon]$ ,  $\lambda \in [T - \varepsilon, T]$ .

При получении (5.94) мы использовали теорему о среднем значении для интеграла и ортонормированность функций  $\phi_j(x)$ ;  $j = 0, 1, 2 \dots$

Подставим (5.94) в (5.93) и осуществим в полученном равенстве предельный переход  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0}$ . В результате приедем к равенству

$$\int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1},$$

при получении которого мы использовали соотношение

$$\sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(s) \phi_{j_2}(s) < \infty; \quad s \in [t, t + \varepsilon], \quad [T - \varepsilon, T].$$

Теорема 5.3\* доказана.  $\square$

Заметим, что в силу (5.84) можно утверждать, что функция  $K'(t_1, t_2)$  принадлежит классу Гельдера с показателем 1 в  $[t, T]^2$ , а значит разлагается в равномерно сходящийся на квадрате  $[t, T]^2$  двойной тригонометрический ряд Фурье, суммируемый по Принсхайму согласно утверждению 5.3. Это означает, что теорема 5.3\* останется верной если в ней вместо двойного ряда Фурье-Лежандра рассматривать двойной тригонометрический ряд Фурье.

Для доказательства леммы 5.2\* напомним некоторые свойства полиномов Лежандра.

Полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$  имеет вид (5.47).

На концах интервала ортогональности полиномы Лежандра удовлетворяют следующим соотношениям:  $P_j(1) = 1$ ,  $P_j(-1) = (-1)^j$ ,  $P_{j+1}(1) - P_j(1) = 0$ ,  $P_{j+1}(-1) + P_j(-1) = 0$ , где  $j = 0, 1, 2, \dots$

Связь многочлена Лежандра с номером  $j$  с производными многочленов Лежандра с номерами  $j + 1$  и  $j - 1$  выражается равенством (5.59).

Рекуррентное соотношение имеет вид:

$$xP_j(x) = \frac{(j+1)P_{j+1}(x) + jP_{j-1}(x)}{2j+1}; \quad j = 1, 2, \dots$$

Ортогональность полинома Лежандра  $P_j(x)$  любому многочлену  $Q_k(x)$  меньшей степени запишем в следующей форме:

$$\int_{-1}^1 Q_k(x)P_j(x)dx = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots, j-1.$$

Из свойства

$$\int_{-1}^1 P_k(x)P_j(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j \\ 2/(2j+1) & \text{при } k = j \end{cases}$$

следует, что ортонормированный на интервале  $[-1, 1]$  многочлен Лежандра определяется соотношением:

$$\hat{P}_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{2}}P_j(x); \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Кроме того

$$|P_j(x)| \leq 1, \quad x \in [-1, 1]; \quad j = 0, 1, \dots \quad (5.95)$$

Формула Кристоффеля-Дарбу имеет вид:

$$\sum_{j=0}^n (2j+1)P_j(x)P_j(y) = (n+1) \frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}. \quad (5.96)$$

В частности, из (5.96) при  $x = \pm 1$  получим:

$$\sum_{j=0}^n (2j+1)P_j(y) = (n+1) \frac{P_{n+1}(y) - P_n(y)}{y-1}, \quad (5.97)$$

$$\sum_{j=0}^n (2j+1)(-1)^j P_j(y) = (n+1)(-1)^n \frac{P_{n+1}(y) + P_n(y)}{y+1}. \quad (5.98)$$

С другой стороны:

$$\sum_{j=0}^n (2j+1)P_j(y) = 1 + \sum_{j=1}^n (2j+1)P_j(y) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^n (P'_{j+1}(y) - P'_{j-1}(y)) = 1 + \left( \sum_{j=1}^n (P_{j+1}(y) - P_{j-1}(y)) \right)' = \\ = 1 + (P_{n+1}(x) + P_n(x) - x - 1)' = (P_n(x) + P_{n+1}(x))' \quad (5.99)$$

и

$$\sum_{j=0}^n (2j+1)(-1)^j P_j(y) = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j (2j+1) P_j(y) = \\ = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j (P'_{j+1}(y) - P'_{j-1}(y)) = 1 + \left( \sum_{j=1}^n (-1)^j (P_{j+1}(y) - P_{j-1}(y)) \right)' = \\ = 1 + ((-1)^n (P_{n+1}(x) - P_n(x)) - x + 1)' = \\ = (-1)^n (P_{n+1}(x) - P_n(x))'. \quad (5.100)$$

Сопоставляя (5.97) с (5.99) и (5.98) с (5.100) получим

$$(n+1) \frac{P_{n+1}(y) - P_n(y)}{y - 1} = (P_n(x) + P_{n+1}(x))', \quad (5.101)$$

$$(n+1) \frac{P_{n+1}(y) + P_n(y)}{y + 1} = (P_{n+1}(x) - P_n(x))'. \quad (5.102)$$

Доказательство леммы 5.2\*.

Итак, требуется установить, что в условиях теоремы 5.3\* конечны следующие величины:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j_2=0}^n \sum_{j_1=0}^n C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(T) \phi_{j_1}(T), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j_2=0}^n \sum_{j_1=0}^n C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t) \phi_{j_1}(t). \quad (5.103)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j_2=0}^n \sum_{j_1=0}^n C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(T) \phi_{j_1}(T) = \\ & = \frac{1}{4} \sum_{j_2=0}^n \sum_{j_1=0}^n (2j_2 + 1)(2j_1 + 1) \int_{-1}^1 \psi_2(h(y)) P_{j_2}(y) \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) P_{j_1}(y_1) dy_1 dy = \\ & = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \psi_2(h(y)) \sum_{j_2=0}^n (2j_2 + 1) P_{j_2}(y) \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) \sum_{j_1=0}^n (2j_1 + 1) P_{j_1}(y_1) dy_1 dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \psi_2(h(y)) \left( \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \psi_1(h(y)) \left( \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) + \\
 &+ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \Delta(h(y)) \left( \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) = \\
 &= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{4} I_2,
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta(h(y)) = \psi_2((h(y)) - \psi_1((h(y))), \quad h(y) = \frac{T-t}{2}y + \frac{T+t}{2}. \quad (5.104)$$

Далее

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^1 \psi_1((h(y)) d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left( 2\psi_1(T) - \int_{-1}^1 (P_{n+1}(y) + P_n(y)) \psi'_1((h(y)) \frac{T-t}{2} dy \right)^2 < C_1 < \infty,
 \end{aligned}$$

где постоянная  $C_1$  не зависит от  $n$ , а  $\psi'_1$  — производная  $\psi_1$  по  $y$ .

По формуле Лагранжа

$$\begin{aligned}
 \Delta(h(y)) &= \psi_2 \left( \frac{1}{2}(T-t)(y-1) + T \right) - \psi_1 \left( \frac{1}{2}(T-t)(y-1) + T \right) = \\
 &= \psi_2(T) - \psi_1(T) + (y-1) (\psi'_2(\xi_y) - \psi'_1(\theta_y)) \frac{1}{2}(T-t) = C_1 + \alpha_y(y-1), \quad (5.105)
 \end{aligned}$$

где  $|\alpha_y| < \infty$ , а  $C_1 = \psi_2(T) - \psi_1(T)$ .

Рассмотрим интеграл  $I_2$  и подставим в него (5.105):

$$I_2 = I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{-1}^1 \alpha_y(y-1) \left( \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) + P_n(y)), \\
 I_4 &= C_1 \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) + P_n(y)).
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя (5.101), получим

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{\alpha_y(y-1)(n+1)(P_{n+1}(y) - P_n(y))}{y-1} \left( \psi_1((h(y))(P_{n+1}(y) + P_n(y)) - \right. \\ \left. - \int_{-1}^y (P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))\psi'_1((h(y_1))\frac{1}{2}(T-t)dy_1) \right) dy.$$

Применяя оценку (5.61) и учитывая ограниченность  $\alpha_y$  и  $\psi'_1((h(y_1))$ , имеем  $|I_3| < \infty$ .

Поменяем в интеграле  $I_4$  порядок интегрирования:

$$I_4 = C_1 \int_{-1}^1 \psi_1((h(y_1)) \left( \int_{y_1}^1 d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) = \\ = C_1 \int_{-1}^1 \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) \int_{-1}^1 d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) - \\ - C_1 \int_{-1}^1 \psi_1((h(y_1)) \left( \int_{-1}^{y_1} d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) = \\ = I_5 - I_6.$$

Рассмотрим интеграл  $I_5$ :

$$I_5 = 2C_1 \int_{-1}^1 \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) = \\ = 2C_1 \left( 2\psi_1(T) - \int_{-1}^1 (P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))\psi'_1((h(y_1))\frac{1}{2}(T-t)dy_1) \right).$$

Применяя оценку (5.95) и учитывая ограниченность  $\psi'_1((h(y_1))$ , имеем  $|I_5| < \infty$ .

Поскольку (см. (5.105)):

$$\psi_1(h(y)) = \psi_1 \left( \frac{1}{2}(T-t)(y-1) + T \right) = \\ = \psi_1(T) + (y-1)\psi'_1(\theta_y)\frac{1}{2}(T-t) = C_2 + \beta_y(y-1),$$

где  $|\beta_y| < \infty$ , а  $C_2 = \psi_1(T)$ , то

$$\begin{aligned}
I_6 &= C_3 \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^{y_1} d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) + \\
&+ C_1 \int_{-1}^1 \beta_{y_1}(y_1 - 1) \left( \int_{-1}^{y_1} d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) = \\
&= \frac{C_3}{2} \left( \int_{-1}^1 d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right)^2 + \\
&+ C_1 \int_{-1}^1 \frac{\beta_{y_1}(y_1 - 1)(n+1)(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1))}{y_1 - 1} \left( \int_{-1}^{y_1} d(P_{n+1}(y) + P_n(y)) \right) dy_1 = \\
&= 2C_3 + C_1 \int_{-1}^1 \beta_{y_1}(n+1)(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1))(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1)) dy_1.
\end{aligned}$$

Применяя оценку (5.61) и учитывая ограниченность  $\beta_{y_1}$ , имеем  $|I_6| < \infty$ .

Таким образом ограниченность первого ряда в (5.103) доказана.

Докажем ограниченность второго ряда в (5.103). Имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_2=0}^n \sum_{j_1=0}^n C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t) \phi_{j_1}(t) = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j_1, j_2=0}^n (2j_2+1)(2j_1+1)(-1)^{j_1+j_2} \int_{-1}^1 \psi_2(h(y)) P_{j_2}(y) \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) P_{j_1}(y_1) dy_1 dy = \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \psi_2(h(y)) \sum_{j_2=0}^n (2j_2+1) P_{j_2}(y) (-1)^{j_2} \times \\
&\quad \times \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) \sum_{j_1=0}^n (2j_1+1) P_{j_1}(y_1) (-1)^{j_1} dy_1 dy = \\
&= \frac{(-1)^{2n}}{4} \int_{-1}^1 \psi_2(h(y)) \left( \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) = \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \psi_1(h(y)) \left( \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \Delta(h(y)) \left( \int_{-1}^y \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}J_1 + \frac{1}{4}J_2,$$

где  $\Delta(h(y))$ ,  $h(y)$  определяются соотношениями (5.104).

Далее

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^1 \psi_1((h(y))d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2(-1)^n \psi_1(t) - \int_{-1}^1 (P_{n+1}(y) - P_n(y)) \psi'_1((h(y)) \frac{T-t}{2} dy \right)^2 < K_1 < \infty, \end{aligned} \quad (5.106)$$

где постоянная  $K_1$  не зависит от  $n$ , а  $\psi'_1$  — производная  $\psi_1$  по  $y$ .

По формуле Лагранжа

$$\begin{aligned} \Delta(h(y)) &= \psi_2 \left( \frac{1}{2}(T-t)(y+1) + t \right) - \psi_1 \left( \frac{1}{2}(T-t)(y+1) + t \right) = \\ &= \psi_2(t) - \psi_1(t) + (y+1) (\psi'_2(\mu_y) - \psi'_1(\rho_y)) \frac{1}{2}(T-t) = K_2 + \gamma_y(y+1), \end{aligned} \quad (5.107)$$

где  $|\gamma_y| < \infty$ , а  $K_2 = \psi_2(t) - \psi_1(t)$ .

Рассмотрим интеграл  $J_2$ :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-1}^1 \Delta(h(y)) d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \int_{-1}^1 \psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) - \\ &- \int_{-1}^1 \Delta(h(y)) \left( \int_y^1 \psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) = \\ &= J_3 J_4 - J_5. \end{aligned}$$

Интеграл  $J_4$  встречался при рассмотрении интеграла  $J_1$  (см. (5.106)), где было показано, что  $|J_4| < \infty$ . Аналогично  $|J_3| < \infty$ .

Рассмотрим интеграл  $J_5$  и подставим в него (5.107):

$$J_5 = J_6 + J_7,$$

где

$$J_6 = \int_{-1}^1 \gamma_y(y+1) \left( \int_y^1 \psi_1((h(y_1))d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) - P_n(y)),$$

$$J_7 = K_2 \int_{-1}^1 \left( \int_y^1 \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) \right) d(P_{n+1}(y) - P_n(y)).$$

Интегрируя по частям и используя (5.102), получим

$$\begin{aligned} J_6 &= \int_{-1}^1 \frac{\gamma_y(y+1)(n+1)(P_{n+1}(y) + P_n(y))}{y+1} \left( -\psi_1((h(y))(P_{n+1}(y) - P_n(y)) - \right. \\ &\quad \left. - \int_y^1 (P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) \psi'_1((h(y_1)) \frac{1}{2}(T-t) dy_1 \right) dy. \end{aligned}$$

Применяя оценку (5.61) и учитывая ограниченность  $\gamma_y$  и  $\psi'_1((h(y_1))$ , имеем  $|J_6| < \infty$ .

Поменяем в интеграле  $J_7$  порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} J_7 &= K_2 \int_{-1}^1 \psi_1((h(y_1)) \left( \int_{-1}^{y_1} d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) = \\ &= K_2 \int_{-1}^1 \psi_1((h(y_1)) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) \int_{-1}^1 d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) - K_2 J_8 = \\ &= K_2 J_4 2(-1)^n - K_2 J_8, \end{aligned}$$

где

$$J_8 = \int_{-1}^1 \psi_1((h(y_1)) \left( \int_{y_1}^1 d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)).$$

Поскольку (см. (5.107)):

$$\begin{aligned} \psi_1(h(y)) &= \psi_1 \left( \frac{1}{2}(T-t)(y+1) + t \right) = \\ &= \psi_1(t) + (y+1)\psi'_1(\rho_y) \frac{1}{2}(T-t) = K_3 + \varepsilon_y(y+1), \end{aligned} \tag{5.108}$$

где  $|\varepsilon_y| < \infty$ , а  $K_3 = \psi_1(t)$ , то

$$J_8 = K_3 \int_{-1}^1 \left( \int_{y_1}^1 d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-1}^1 \varepsilon_y(y+1) \left( \int_{y_1}^1 d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \right) d(P_{n+1}(y_1) - P_n(y_1)) = \\
 & = \frac{K_3}{2} \left( \int_{-1}^1 d(P_{n+1}(y) - P_n(y)) \right)^2 + \\
 & + \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon_{y_1}(y_1+1)(n+1)(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))}{y_1+1} (P_n(y_1) - P_{n+1}(y_1)) dy = \\
 & = 2K_3 + \int_{-1}^1 \varepsilon_{y_1}(n+1)(P_{n+1}(y_1) + P_n(y_1))(P_n(y_1) - P_{n+1}(y_1)) dy. \quad (5.109)
 \end{aligned}$$

При получении (5.109) мы использовали (5.102). Применяя оценку (5.61) и учитывая ограниченность  $\varepsilon_{y_1}$ , имеем  $|J_8| < \infty$ . Таким образом ограниченность второго ряда в (5.103) доказана. Лемма 5.2\* доказана.  $\square$

Приведем разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратности при  $i_1 \neq i_2$  с использованием теорем 5.1 и 5.3, систем полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Хаара и функций Радемахера–Уолша.

Отметим, что указанные стохастические интегралы Стратоновича совпадают с в. 1 с соответствующими им стохастическими интегралами Ито, поэтому для них верна теорема 5.1, в которой можно использовать упомянутые системы функций.

Для системы полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned}
 \int_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)}, \\
 \int_t^{*T} (t-\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right), \\
 \int_t^{*T} \int_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} &= \frac{T-t}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Для системы тригонометрических функций:

$$\int_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)},$$

$$\begin{aligned} \int_t^T(t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= -\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right), \\ \int_t^T\int_t^s d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{f}_s^{(i_2)} &= \frac{1}{2}(T-t)\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Для системы функций Хаара:

$$\begin{aligned} \int_t^T d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)}, \\ \int_t^T(t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= -\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\bar{C}_{nj}\zeta_{nj}^{(i_1)}\right), \\ \int_t^T\int_t^s d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{f}_s^{(i_2)} &= \frac{T-t}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\bar{C}_{nj}(\zeta_{nj}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} - \zeta_{nj}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}) + \right. \\ &\quad \left.+\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\sum_{j_1=1}^{2^{n_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{n_2}}\bar{C}_{n_2j_2,n_1j_1}\zeta_{n_2j_2}^{(i_2)}\zeta_{n_1j_1}^{(i_1)}\right), \end{aligned}$$

где

$$\bar{C}_{nj} = 2^{n/2}\left(2\left(\frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{j-1}{2^n}\right)^2 - \left(\frac{j}{2^n}\right)^2\right),$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{n_2j_2,n_1j_1} &= \\ &= 2^{(n_1+n_2)/2}\left(\left(\left(\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}}\right\} - \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2 - \right. \\ &\quad \left.-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\} - \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2\right) \times \\ &\quad \times \mathbf{1}_{\{\max\{(j_2-1)/2^{n_2}, (j_1-1)/2^{n_1}\} < \min\{(j_2-1)/2^{n_2}+1/2^{n_2+1}, (j_1-1)/2^{n_1}+1/2^{n_1+1}\}\}} - \\ &\quad -\left(\left(\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}}\right\} - \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2 - \right. \\ &\quad \left.-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\} - \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2\right) \times \\ &\quad \times \mathbf{1}_{\{\max\{(j_2-1)/2^{n_2}+1/2^{n_2+1}, (j_1-1)/2^{n_1}\} < \min\{j_2/2^{n_2}, (j_1-1)/2^{n_1}+1/2^{n_1+1}\}\}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \left( \min \left\{ \frac{j_2}{2^{n_2}}, \frac{j_1}{2^{n_1}} \right\} - \frac{j_1}{2^{n_1}} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \left( \max \left\{ \frac{j_2 - 1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1 - 1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} - \frac{j_1}{2^{n_1}} \right)^2 \right) \times \\
& \times \mathbf{1}_{\{\max\{(j_2-1)/2^{n_2}+1/2^{n_2+1}, (j_1-1)/2^{n_1}+1/2^{n_1+1}\} < \min\{j_2/2^{n_2}, j_1/2^{n_1}\}\}} - \\
& - \left( \left( \min \left\{ \frac{j_2 - 1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1}{2^{n_1}} \right\} - \frac{j_1}{2^{n_1}} \right)^2 - \right. \\
& \left. - \left( \max \left\{ \frac{j_2 - 1}{2^{n_2}}, \frac{j_1 - 1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} - \frac{j_1}{2^{n_1}} \right)^2 \right) \times \\
& \times \mathbf{1}_{\{\max\{(j_2-1)/2^{n_2}, (j_1-1)/2^{n_1}+1/2^{n_1+1}\} < \min\{(j_2-1)/2^{n_2}+1/2^{n_2+1}, j_1/2^{n_1}\}\}} \Big),
\end{aligned}$$

$$\zeta_0^{(i)} = \int_t^T \phi_0(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)}, \quad \zeta_{nj}^{(l)} = \int_t^T \phi_{nj}(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(l)},$$

$n = 0, 1, \dots; j = 1, 2, \dots, 2^n$  — независимые в совокупности по нижним индексам или при  $i \neq l$  ( $i, l = 1, \dots, m$ )  $N(0, 1)$ -распределенные случайные величины.

Для системы функций Радемахера–Уолша:

$$\begin{aligned}
\int_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)}, \\
\int_t^{*T} (t-\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \sum_{\substack{1 \leq m_1 < \dots < m_k \leq \infty \\ 1 \leq k \leq \infty}} \bar{C}_{m_1 \dots m_k} \zeta_{m_1 \dots m_k}^{(i_1)} \right), \\
\int_t^{*T} \int_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} &= \frac{T-t}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& + \sum_{\substack{1 \leq m_1 < \dots < m_k \leq \infty \\ 1 \leq k \leq \infty}} \bar{C}_{m_1 \dots m_k} \left( \zeta_{m_1 \dots m_k}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \zeta_{m_1 \dots m_k}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \\
& \left. + \sum_{\substack{1 \leq n_1 < \dots < n_{k_1} \leq \infty \\ 1 \leq m_1 < \dots < m_{k_2} \leq \infty \\ 1 \leq k_1, k_2 \leq \infty}} \bar{C}_{n_1 \dots n_{k_2}, m_1 \dots m_{k_1}} \zeta_{n_1 \dots n_{k_2}}^{(i_2)} \zeta_{m_1 \dots m_{k_1}}^{(i_1)} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{m_1 \dots m_k} &= \sum_{s_1=0}^{2^{m_1}-1} (-1)^{s_1} \dots \sum_{s_k=0}^{2^{m_k}-1} (-1)^{s_k} \times \\
 &\quad \times \mathbf{1}_{\{\max\{s_1/2^{m_1}, \dots, s_k/2^{m_k}\} < \min\{(s_1+1)/2^{m_1}, \dots, (s_k+1)/2^{m_k}\}\}} \times \\
 &\quad \times \left( \left( \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_k+1}{2^{m_k}} \right\} \right)^2 - \left( \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_k}{2^{m_k}} \right\} \right)^2 \right), \\
 \\ 
 \bar{C}_{n_1 \dots n_{k_2}, m_1 \dots m_{k_1}} &= \\
 &= \sum_{s_1=0}^{2^{m_1}-1} (-1)^{s_1} \dots \sum_{s_{k_1}=0}^{2^{m_{k_1}}-1} (-1)^{s_{k_1}} \sum_{q_1=0}^{2^{n_1}-1} (-1)^{q_1} \dots \sum_{q_{k_2}=0}^{2^{n_{k_2}}-1} (-1)^{q_{k_2}} \times \\
 &\quad \times \mathbf{1}_{\{\max\{s_1/2^{m_1}, \dots, s_{k_1}/2^{m_{k_1}}\} < \min\{(s_1+1)/2^{m_1}, \dots, (s_{k_1}+1)/2^{m_{k_1}}\}\}} \times \\
 &\quad \times \mathbf{1}_{\{\max\{q_1/2^{n_1}, \dots, q_{k_2}/2^{n_{k_2}}\} < \min\{(q_1+1)/2^{n_1}, \dots, (q_{k_2}+1)/2^{n_{k_2}}\}\}} \times \\
 &\quad \times \left[ \mathbf{1}_{\{\max\{\max\{q_1/2^{n_1}, \dots, q_{k_2}/2^{n_{k_2}}\}, \max\{s_1/2^{m_1}, \dots, s_{k_1}/2^{m_{k_1}}\}\} < \right. \\
 &\quad \left. < \min\{\min\{(q_1+1)/2^{n_1}, \dots, (q_{k_2}+1)/2^{n_{k_2}}\}, \min\{(s_1+1)/2^{m_1}, \dots, (s_{k_1}+1)/2^{m_{k_1}}\}\}\}} \right] \times \\
 &\quad \times \left( \left( \min \left\{ \min \left\{ \frac{q_1+1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \max \left\{ \max \left\{ \frac{q_1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right)^2 \right) + \\
 &\quad + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{\max\{\max\{q_1/2^{n_1}, \dots, q_{k_2}/2^{n_{k_2}}\}, \min\{(s_1+1)/2^{m_1}, \dots, (s_{k_1}+1)/2^{m_{k_1}}\}\} < \right. \\
 &\quad \left. < \min\{\min\{(q_1+1)/2^{n_1}, \dots, (q_{k_2}+1)/2^{n_{k_2}}\}, 1\}\}} \times \\
 &\quad \times \left( \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} - \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right) \times \\
 &\quad \times \left( \min \left\{ \min \left\{ \frac{q_1+1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}} \right\}, 1 \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - \max \left\{ \max \left\{ \frac{q_1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} \right),
 \end{aligned}$$

$$\zeta_0^{(p)} = \int_t^T \phi_0(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(p)}, \quad \zeta_{m_1 \dots m_k}^{(g)} = \int_t^T \phi_{m_1 \dots m_k}(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(g)},$$

$0 < m_1 < \dots < m_k; k, m_1, \dots, m_k = 1, 2, \dots$  — независимые в совокупности по нижним индексам или при  $p \neq g$  ( $p, g = 1, \dots, m$ )  $N(0, 1)$ -распределенные случайные величины.

По-видимому, из-за своей сложности (по сравнению с разложениями по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям), приведенные разложения с помощью систем Хаара и Радемахера–Уолша представляют скорее теоретический, нежели практический интерес.

Сделаем некоторые замечания в контексте рассматриваемой проблемы.

Отметим, что справедливо следующее утверждение.

Пусть  $\xi_{n,m}, \mu_m, \rho_n; n, m = 0, 1, 2, \dots$  — последовательности случайных величин, причем

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \xi_{n,m} = \zeta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n,m} = \mu_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{n,m} = \rho_n,$$

где  $\zeta$  — случайная величина. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} M\{(\xi_{n,m} - \zeta)^2\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} M\{(\xi_{n,m} - \zeta)^2\} = 0.$$

Данное утверждение можно доказать как и в детерминированном случае, используя неравенство:

$$M\{(x - y)^2\} \leq 2M\{(x - z)^2\} + 2M\{(z - y)^2\}$$

вместо неравенства:  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ .

Предположим, что

$$\xi_{n,m} = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^m C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}, \quad \zeta = J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}.$$

Возьмем в качестве  $\mu_m$  и  $\rho_n$  следующие величины

$$\sum_{j_2=0}^m \left( \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right) \zeta_{j_2}^{(i_2)} \text{ и } \sum_{j_1=0}^n \left( \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right) \zeta_{j_1}^{(i_1)}$$

соответственно. Поскольку

$$M\{(\xi_{n,m} - \mu_m)^2\} = \sum_{j_2=0}^m \sum_{j_1=n+1}^{\infty} C_{j_2 j_1}^2,$$

$$M\{(\xi_{n,m} - \rho_n)^2\} = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=m+1}^{\infty} C_{j_2 j_1}^2,$$

$$\sum_{j_1=0}^n C_{j_2 j_1}^2 \leq \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}^2, \quad \sum_{j_2=0}^m C_{j_2 j_1}^2 \leq \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}^2,$$

$$\sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}^2 = \int_{[t, T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n,m} = \mu_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{n,m} = \rho_n.$$

Тогда, используя приведенное утверждение, мы получим

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где ряды сходятся в среднеквадратическом смысле, то есть, например, для первого случая

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} M \left\{ \left( J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} - \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^m C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right)^2 \right\} = 0.$$

Кажется вполне естественной возможность обобщения теоремы 5.3 на случай повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности. Однако, данный вопрос, как показано в следующем разделе, оказался весьма непростым.

## 5.5 О разложениях повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 3, основанных на теореме 5.1. Некоторые соотношения для случая весовых функций общего вида

Исследуя вопрос о возможности обобщения теоремы 5.3 на случай повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности, автор не получил в данном разделе общих результатов. Однако, им был замечен ряд интересных и полезных для практики фактов.

Отметим, что в последующих разделах данной главы (см. разд. 5.6 и 5.8) будет показано, что в случае  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv 1; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$

и системы полиномов Лежандра или системы тригонометрических функций обобщение теоремы 5.3 для стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности является верным.

Более того, если заменить условие  $p_1, p_2, p_3 \rightarrow \infty$  на условие  $p_1 = p_2 = p_3 = p \rightarrow \infty$ , то удается (см. разд. 5.7) обобщить теорему 5.3 для случая непрерывно дифференцируемых функций  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau)$  и некоторых сочетаний индексов  $i_1, i_2, i_3$ , а также для случая дважды непрерывно дифференцируемых функций  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau)$  и произвольных индексов  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$  (случаи системы полиномов Лежандра и системы тригонометрических функций).

В разд. 5.9 и 5.10 также будут доказаны обобщения теоремы 5.3 для повторных стохастических интегралов Стратоновича 4 и 5 кратностей при  $p_1 = \dots = p_5 = p; i_1, \dots, i_5 = 0, 1, \dots, m$  и  $\psi_1(\tau), \dots, \psi_5(\tau) \equiv 1$  (случаи системы полиномов Лежандра и системы тригонометрических функций).

Итак, попытаемся развить подход, изложенный в предыдущем разделе для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности.

Запишем соотношение, связывающее с в. 1 повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито третьей кратности:

$$\begin{aligned} J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} &= J[\psi^{(3)}]_{T,t} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3, \end{aligned} \quad (5.110)$$

где  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau)$  — непрерывно дифференцируемые на промежутке  $[t, T]$  функции. Отсюда видно, что имеются следующие частные случаи:

1.  $i_1, i_2, i_3$  — попарно различны.
2.  $i_1 = i_2 \neq i_3$ .
3.  $i_1 \neq i_2 = i_3$ .
4.  $i_1 = i_3 \neq i_2$ .
5.  $i_1 = i_2 = i_3$ .

Здесь предполагается, что  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ .

Ясно, что в первом случае повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито просто совпадают (это же касается и произвольной кратности  $k$ ), поэтому к этим интегралам применима теорема 5.1.

Перейдем к рассмотрению второго частного случая. Из теоремы 5.1 при  $i_1 = i_2 \neq i_3$  следует, что

$$\begin{aligned} J[\psi^{(3)}]_{T,t} &= \underset{p_1, p_2, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right). \end{aligned}$$

Если бы последнее равенство можно было переписать в виде

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}$$

и удалось бы показать, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_1) \psi_1(t_1) dt_1 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}, \quad (5.111)$$

то мы тогда получили бы

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^3 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \quad (i_1 = i_2 \neq i_3), \quad (5.112)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Автор не располагает доказательством равенства (5.111) в общем случае (забегая вперед отметим, что данное равенство выполняется в некоторых практических важных случаях). Покажем здесь лишь, что

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_1) \psi_1(t_1) dt_1 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}, \quad (5.113)$$

где ряд  $\sum_{j_3=0}^{\infty}$  сходится в среднеквадратическом смысле, а ряд  $\sum_{j_1=0}^{\infty}$  сходится в обычном смысле.

Согласно теореме 3.1 или формуле Ито последнее равенство можно с в. 1 переписать в виде

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_1.$$

Покажем, что

$$K_2(t_1, t_3) = \begin{cases} (\psi_3(t_3)\psi_1(t_1)\psi_2(t_1))/2, & t_1 < t_3 \\ 0, & t_1 > t_3 \\ (\psi_3(t_1)\psi_1(t_1)\psi_2(t_1))/6, & t_1 = t_3 \end{cases} = \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_2, j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_3}(t_3), \quad (5.114)$$

где  $t_1, t_3 \in [t, T]$  и сходимость рядов по  $t_1$  и  $t_3$  равномерная на любых замкнутых интервалах, лежащих внутри интервалов непрерывности разлагаемой функции.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K'_2(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_2 < t_3 \\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1), & t_2 \leq t_1 < t_3, \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T]. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Зафиксируем  $t_1, t_2$  и разложим функцию  $K'_2(t_1, t_2, t_3)$  по переменной  $t_3$  на отрезке  $[t, T]$  в ряд Фурье.

$$\begin{aligned} K'_2(t_1, t_2, t_3) = & \sum_{j_3=0}^{\infty} \left( \psi_1(t_1)\psi_2(t_2) \int_{t_2}^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3 \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \right. \\ & + \psi_1(t_1)\psi_2(t_2) \int_{t_2}^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3 \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} + \\ & \left. + \psi_1(t_2)\psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3 \mathbf{1}_{\{t_2 < t_1\}} \right) \phi_{j_3}(t_3) \quad (t_3 \neq t_1, t_2). \quad (5.115) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в скобках, имеет вид

$$\tilde{K}_{j_3}(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_1(t_1)\Psi_{j_3}(t_2), & t_1 \leq t_2 \\ \psi_1(t_2)\Psi_{j_3}(t_1), & t_2 \leq t_1 \end{cases},$$

где

$$\Psi_{j_3}(s) = \psi_2(s) \int_s^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3.$$

Поэтому эта функция удовлетворяет условию (5.84) (см. предыдущий раздел). Разложим ее в квадрате  $[t, T]^2$  в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму и подставим результат в (5.115):

$$K'_2(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j_3=0}^{\infty} \lim_{p_1, p_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} (C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2}) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3).$$

Полагая в этом равенстве (оно верно при  $t_3 \neq t_1, t_2$ )  $t_1 = t_2$  получаем (см. предыдущий раздел):

$$\frac{1}{2} K'_2(t_1, t_1, t_3) = \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_2, j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_3}(t_3) \quad (t_3 \neq t_1).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_4(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3) \psi_2(t_2) \psi_1(t_1), & t_1 \leq t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_3) \psi_1(t_2) \psi_2(t_1), & t_2 \leq t_1 \leq t_3 \\ \psi_1(t_3) \psi_3(t_2) \psi_2(t_1), & t_3 \leq t_1 \leq t_2 \\ \psi_2(t_3) \psi_3(t_2) \psi_1(t_1), & t_1 \leq t_3 \leq t_2 \\ \psi_1(t_3) \psi_2(t_2) \psi_3(t_1), & t_3 \leq t_2 \leq t_1 \\ \psi_2(t_3) \psi_1(t_2) \psi_3(t_1), & t_2 \leq t_3 \leq t_1 \end{cases}, \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T].$$

Разложим эту функцию в кубе  $[t, T]^3$  в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсхейму:

$$K_4(t_1, t_2, t_3) = \lim_{n_1, n_2, n_3 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \sum_{j_3=0}^{n_3} C_{j_3 j_2 j_1}^{(1)} \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l), \quad (5.116)$$

где

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{(1)} = \int_{[t, T]^3} K_4(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3.$$

Функция  $K_4(t_1, t_2, t_3)$  подобрана так, чтобы после использования свойства аддитивности римановых интегралов и использования замены порядка интегрирования в этих интегралах мы пришли к равенству:

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{(1)} = C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2} + C_{j_2 j_1 j_3} + C_{j_2 j_3 j_1} + C_{j_1 j_2 j_3} + C_{j_1 j_3 j_2}. \quad (5.117)$$

Подставляя (5.117) в (5.116), полагая в полученном равенстве  $t_1 = t_2 = t_3$  и разбивая предел в правой части полученного равенства на 6 пределов получаем

$$\frac{1}{6}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\psi_3(t_1) = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\phi_{j_3}(t_1).$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) &= \frac{1}{2}\tilde{K}_{j_3}(t_1, t_1) = \\ &= \frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds \end{aligned}$$

и, в силу известного утверждения о сведении предела к повторному, приходим к (5.114) для  $t_1 = t_3$ .

Полученные результаты доказывают (5.114).

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\left\{\left(\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} - \sum_{j_3=0}^n \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2\right\} &= \\ &= \mathbb{M}\left\{\left(\int_t^T \left(K_2(t_1, t_3) - \sum_{j_3=0}^n \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}\right)^2\right\} = \\ &= \int_t^T \left(K_2(t_1, t_3) - \sum_{j_3=0}^n \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2 dt_3. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  в силу равномерной сходимости ряда по  $t_3$  ( $t_3 \neq t_1$ ,  $t_1$  фиксировано) на любых замкнутых интервалах, лежащих внутри интервалов непрерывности разлагаемой функции  $K_2(t_1, t_3)$ .

Таким образом, в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) = \frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}.$$

С учетом равенства Парсеваля имеем

$$\mathbb{M}\left\{\left(\int_t^T \sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1 - \right.\right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_t^T \sum_{j_3=0}^n \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 \Big)^2 \Big\} \leq \\
 & \leq L \int_t^T \sum_{j_3=n+1}^{\infty} \left( \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right)^2 dt_1 = \\
 & = L \int_t^T \left( \frac{1}{4} \psi_1^2(t_1) \psi_2^2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3^2(t_3) dt_3 - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{j_3=0}^n \left( \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right)^2 \right) dt_1,
 \end{aligned}$$

где  $L$  — постоянная.

В силу непрерывности (здесь  $\phi_j(\tau)$  предполагаются непрерывными) и неубывания членов функциональной последовательности

$$u_n(t_1) = \sum_{j_3=0}^n \left( \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right)^2,$$

а также в силу непрерывности предельной функции

$$u(t_1) = \frac{1}{4} \psi_1^2(t_1) \psi_2^2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3^2(t_3) dt_3$$

по признаку Дини имеем равномерную сходимость  $u_n(t_1)$  к  $u(t_1)$  на отрезке  $[t, T]$  ( $t_1 \neq t_3$ ;  $t_3$  — фиксировано). Поэтому, осуществляя предельный переход под знаком интеграла в последнем равенстве, получаем, что в среднеквадратическом смысле

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \int_t^T \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \\
 & = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_1.
 \end{aligned}$$

Меняя в левой части этого равенства знак интеграла и знак правого ряда, что возможно в силу равномерной сходимости последнего по  $t_1$  на любом интервале  $[t + \varepsilon, T - \varepsilon]$   $\forall \varepsilon > 0$  и учитывая ортонормированность функций  $\phi_j(\tau)$ , приходим к (5.113).

Перейдем к рассмотрению третьего частного случая.

Из теоремы 5.1 при  $i_1 \neq i_2 = i_3$  следует, что

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right).$$

Опять таки, если бы можно было записать

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}$$

и удалось бы показать, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3, \quad (5.118)$$

то в силу связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича мы получили бы:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^3 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \quad (i_1 \neq i_2 = i_3),$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Покажем здесь лишь, что

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3, \quad (5.119)$$

где ряд  $\sum_{j_1=0}^{\infty}$  сходится в среднеквадратическом смысле, в тоже время ряд  $\sum_{j_3=0}^{\infty}$  сходится в обычном смысле.

Покажем, что

$$K_3(t_1, t_3) = \begin{cases} (\psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\psi_1(t_1))/2, & t_1 < t_3 \\ 0, & t_1 > t_3 \\ (\psi_3(t_1)\psi_1(t_1)\psi_2(t_1))/6, & t_1 = t_3 \end{cases} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_3) \phi_{j_3}(t_3), \quad (5.120)$$

где  $t_1, t_3 \in [t, T]$  и ряды сходятся равномерно по  $t_1$  и  $t_3$  на любых замкнутых интервалах, лежащих внутри интервалов непрерывности разлагаемой функции.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K'_3(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 < t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_2)\psi_2(t_3)\psi_1(t_1), & t_1 < t_3 \leq t_2, \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T]. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Зафиксируем  $t_2, t_3$  и разложим функцию  $K'_3(t_1, t_2, t_3)$  по переменной  $t_1$  на отрезке  $[t, T]$  в ряд Фурье.

$$\begin{aligned} K'_3(t_1, t_2, t_3) = & \sum_{j_1=0}^{\infty} \left( \psi_2(t_2)\psi_3(t_3) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \right. \\ & + \psi_2(t_2)\psi_3(t_3) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} + \\ & \left. + \psi_3(t_2)\psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 \mathbf{1}_{\{t_3 < t_2\}} \right) \phi_{j_1}(t_1) \quad (t_1 \neq t_2, t_3). \quad (5.121) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в скобках, имеет вид

$$\begin{cases} \psi_3(t_3)\Psi_{j_1}(t_2), & t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_2)\Psi_{j_1}(t_3), & t_3 \leq t_2 \end{cases},$$

где

$$\Psi_{j_1}(s) = \psi_2(s) \int_t^s \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1.$$

Поэтому эта функция удовлетворяет условию (5.84) (см. предыдущий раздел). Разложим ее в квадрате  $[t, T]^2$  в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсхайму и подставим результат в (5.121):

$$\begin{aligned} K'_3(t_1, t_2, t_3) = & \\ = & \sum_{j_1=0}^{\infty} \lim_{p_2, p_3 \rightarrow \infty} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} (C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_2 j_3 j_1}) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3). \end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве (оно верно при  $t_1 \neq t_2, t_3$ )  $t_2 = t_3$  получаем (см. предыдущий раздел):

$$\frac{1}{2}K'_3(t_1, t_3, t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_3) \phi_{j_3}(t_3) \quad (t_1 \neq t_3).$$

Дальнейшее доказательство соотношения (5.119) аналогично уже рассмотренному случаю.

В четвертом частном случае рассматриваемые стохастические интегралы Ито и Стратоновича с в. 1 совпадут, но как следует из теоремы 5.1 ряд

$$\sum_{j_3, j_2, j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^3 \zeta_{j_l}^{(i_l)},$$

вообще говоря, может не сходиться к стохастическому интегралу Стратоновича  $J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}$  при  $i_1 = i_3 \neq i_2$ . В этом случае придется воспользоваться теоремой 5.1.

Тем не менее тесная связь формул (5.111) и (5.113), а также формул (5.118) и (5.119) не случайна. Далее, в частности, покажем, что для случая  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv 1$  и системы полиномов Лежандра или системы тригонометрических функций формулы (5.111) и (5.118) переходят в формулы (5.113) и (5.119) соответственно. Более того, покажем, что верно обобщение теоремы 5.3 для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3–5 кратностей.

## 5.6 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 3, основанное на теореме 5.1. Случай полиномов Лежандра

### 5.6.1 Случай $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv 1; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$

Предположим, что  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv 1$  и  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

В данном разделе докажем следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} &= \underset{p_1, p_2, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \end{aligned} \quad (5.122)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле, а его коэффициенты имеют вид:

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds$$

и  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ .

Если мы докажем следующие формулы:

$$\begin{aligned} & \underset{p_1, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_3)} \right), \end{aligned} \quad (5.123)$$

$$\begin{aligned} & \underset{p_1, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right), \end{aligned} \quad (5.124)$$

$$\underset{p_1, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0, \quad (5.125)$$

то в соответствии с теоремой 5.1, формулами (5.123) – (5.125), стандартными соотношениями между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито, а также в соответствии с формулами (они также следуют из теоремы 5.1):

$$\frac{1}{2} \int_t^T \int_t^\tau ds d\mathbf{f}_\tau^{(i_3)} = \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_3)} \right) \text{ с.в. 1},$$

$$\frac{1}{2} \int_t^T \int_t^\tau d\mathbf{f}_s^{(i_1)} d\tau = \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right) \text{ с.в. 1}$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^\tau ds d\mathbf{f}_\tau^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^\tau d\mathbf{f}_s^{(i_1)} d\tau. \end{aligned}$$

Это значит, что разложение (5.122) будет доказано.

Сначала отметим, что из формул (5.113), (5.119) вытекают следующие соотношения

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T (\tau - t) d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)} = \frac{1}{4} (T - t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_3)} \right), \quad (5.126)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} &= \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{\tau} d\mathbf{f}_s^{(i_1)} d\tau = \frac{1}{2} \int_t^T (T - s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left( (T - t) \int_t^T d\mathbf{f}_s^{(i_1)} + \int_t^T (t - s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (T - t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} (T - t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Ряд  $\sum_{j_3=0}^{\infty}$  в левой части формулы (5.126) и ряд  $\sum_{j_1=0}^{\infty}$  в левой части формулы (5.127) сходятся в среднеквадратическом смысле. Числовой ряд  $\sum_{j_1=0}^{\infty}$  в левой части формулы (5.126) и числовой ряд  $\sum_{j_3=0}^{\infty}$  в левой части формулы (5.127) сходятся в обычном смысле.

Проверим (5.126). Соотношение (5.126) означает, что

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{0 j_1 j_1} = \frac{1}{4} (T - t)^{3/2}, \quad (5.128)$$

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{1 j_1 j_1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} (T - t)^{3/2}, \quad (5.129)$$

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} = 0, \quad j_3 \geq 2. \quad (5.130)$$

Проверим формулы (5.128) – (5.130) прямым вычислением. Начнем с (5.128). Имеем

$$C_{000} = \frac{(T - t)^{3/2}}{6};$$

$$C_{0 j_1 j_1} = \int_t^T \phi_0(s) \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_0(s) \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 ds; \quad j_1 \geq 1. \quad (5.131)$$

Здесь функции  $\phi_j(s)$  имеют вид:

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j \left( \left( s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right); \quad j \geq 0, \quad (5.132)$$

где  $P_j(x)$  — полином Лежандра.

Подставим (5.132) в (5.131) и вычислим  $C_{0j_1j_1}$ ;  $j \geq 1$ :

$$\begin{aligned} C_{0j_1j_1} &= \frac{2j_1+1}{2(T-t)^{3/2}} \int_t^T \left( \int_{-1}^{z(s)} P_{j_1}(y) \frac{T-t}{2} dy \right)^2 ds = \\ &= \frac{(2j_1+1)\sqrt{T-t}}{8} \int_t^T \left( \int_{-1}^{z(s)} \frac{1}{2j_1+1} (P'_{j_1+1}(y) - P'_{j_1-1}(y)) dy \right)^2 ds = \\ &= \frac{\sqrt{T-t}}{8(2j_1+1)} \int_t^T (P_{j_1+1}(z(s)) - P_{j_1-1}(z(s)))^2 ds, \end{aligned} \quad (5.133)$$

где

$$z(s) = \left( s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}$$

и мы использовали хорошо известные свойства полиномов Лежандра:

$$P_j(y) = \frac{1}{2j+1} (P'_{j+1}(y) - P'_{j-1}(y)); \quad P_j(-1) = (-1)^j; \quad j \geq 1.$$

Также, мы обозначаем

$$\frac{dP_j}{dy}(y) \stackrel{\text{def}}{=} P'_j(y).$$

Из (5.133) с использованием свойства ортонормированности полиномов Лежандра мы получаем следующее соотношение

$$\begin{aligned} C_{0j_1j_1} &= \frac{(T-t)^{3/2}}{16(2j_1+1)} \int_{-1}^1 (P_{j_1+1}^2(y) + P_{j_1-1}^2(y)) dy = \\ &= \frac{(T-t)^{3/2}}{8(2j_1+1)} \left( \frac{1}{2j_1+3} + \frac{1}{2j_1-1} \right), \end{aligned}$$

где мы использовали соотношение

$$\int_{-1}^1 P_j^2(y) dy = \frac{2}{2j+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{0j_1j_1} &= \frac{(T-t)^{3/2}}{6} + \\ &+ \frac{(T-t)^{3/2}}{8} \left( \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{1}{(2j_1+1)(2j_1+3)} + \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{1}{4j_1^2-1} \right) = \\ &= \frac{(T-t)^{3/2}}{6} + \frac{(T-t)^{3/2}}{8} \left( \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{1}{4j_1^2-1} - \frac{1}{3} + \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{1}{4j_1^2-1} \right) = \\ &= \frac{(T-t)^{3/2}}{6} + \frac{(T-t)^{3/2}}{8} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(T-t)^{3/2}}{4}. \end{aligned}$$

Соотношение (5.128) доказано.

Проверим (5.129). Представим  $C_{1j_1j_1}$  в форме:

$$\begin{aligned} C_{1j_1j_1} &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_1(s) \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 ds = \\ &= \frac{(T-t)^{3/2}(2j_1+1)\sqrt{3}}{16} \int_{-1}^1 P_1(y) \left( \int_{-1}^y P_{j_1}(y_1) dy_1 \right)^2 dy; \quad j_1 \geq 1. \end{aligned}$$

Поскольку функции

$$\left( \int_{-1}^y P_{j_1}(y_1) dy_1 \right)^2; \quad j_1 \geq 1$$

являются четными, то соответствующие функции

$$P_1(y) \left( \int_{-1}^y P_{j_1}(y_1) dy_1 \right)^2 dy; \quad j_1 \geq 1$$

являются нечетными. Это значит, что  $C_{1j_1j_1} = 0; j_1 \geq 1$ .

Поскольку

$$C_{100} = \frac{\sqrt{3}(T-t)^{3/2}}{16} \int_{-1}^1 y(y+1)^2 dy = \frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}},$$

то

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{1j_1j_1} = C_{100} + \sum_{j_1=1}^{\infty} C_{1j_1j_1} = \frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}}.$$

Соотношение (5.129) доказано. Проверим формулу (5.130). Имеем

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s) \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 ds; \quad j_3 \geq 2. \quad (5.134)$$

Нетрудно видеть, что интеграл

$$\int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1$$

является коэффициентом Фурье для функции

$$K(s_1, s) = \begin{cases} 1, & s_1 < s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad s_1, s \in [t, T].$$

Равенство Парсеваля в данном случае выглядит следующим образом:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 = \int_t^T K^2(s_1, s) ds = \int_t^s ds_1 = s - t. \quad (5.135)$$

Учитывая неубывание функциональной последовательности

$$u_n(s) = \sum_{j_1=0}^n \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2,$$

непрерывность ее членов, а также непрерывность предельной функции  $u(s) = s - t$  на интервале  $[t, T]$  мы имеем по признаку Дини равномерную сходимость функциональной последовательности  $u_n(s)$  к предельной функции  $u(s) = s - t$  на интервале  $[t, T]$ .

Тогда из (5.134) и (5.135), используя равномерную сходимость функциональной последовательности  $u_n(s)$  к предельной функции  $u(s)$  на интервале  $[t, T]$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1} &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s) \sum_{j_1=0}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s)(s - t) ds = 0; \quad j_3 \geq 2. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Получая (5.136) мы использовали хорошо известное свойство полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_j(y) y^k dy = 0; \quad j > k. \quad (5.137)$$

Соотношение (5.130) доказано.

Докажем равенство (5.123). Используя (5.129) получим

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} &= \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{0 j_1 j_1} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_3)} + \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=2}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{0 j_1 j_1} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_3)} + \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{\substack{j_3=2, j_3-\text{четное}}}^{2j_1+2} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Поскольку

$$C_{j_3 j_1 j_1} = \frac{(T-t)^{3/2}(2j_1+1)\sqrt{2j_3+1}}{16} \int_{-1}^1 P_{j_3}(y) \left( \int_{-1}^y P_{j_1}(y_1) dy_1 \right)^2 dy$$

и степень полинома

$$\left( \int_{-1}^y P_{j_1}(y_1) dy_1 \right)^2$$

равна  $2j_1+2$ , то используя (5.137) мы получим  $C_{j_3 j_1 j_1} = 0$  для  $j_3 > 2j_1+2$ . Это объясняет, почему мы положили  $2j_1+2$  вместо  $p_3$  в правой части формулы (5.138).

Более того, функция

$$\left( \int_{-1}^y P_{j_1}(y_1) dy_1 \right)^2$$

является четной, что означает, что функция

$$P_{j_3}(y) \left( \int_{-1}^y P_{j_1}(y_1) dy_1 \right)^2$$

является нечетной для нечетного  $j_3$ . Это значит, что  $C_{j_3 j_1 j_1} = 0$  для нечетного  $j_3$ . Именно поэтому мы суммируем по четным  $j_3$  в правой части формулы (5.138).

Далее мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2j_1+2} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} &= \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \sum_{j_1=(j_3-2)/2}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \\ &= \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Мы заменили  $(j_3-2)/2$  нулем в правой части формулы (5.139) поскольку  $C_{j_3 j_1 j_1} = 0$  для  $0 \leq j_1 < (j_3 - 2)/2$ .

Подставим (5.139) в (5.138):

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} &= \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{0 j_1 j_1} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_3)} + \\ &+ \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Нетрудно видеть, что правая часть формулы (5.140) не зависит от  $p_3$ .

Если мы докажем, что

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{4}(T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_3)} \right) \right)^2 \right\} = 0, \quad (5.141)$$

то соотношение (5.123) будет доказано.

Применяя (5.140) и (5.128) мы можем переписать левую часть (5.141) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \lim_{p_1 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{0 j_1 j_1} - \frac{(T-t)^{3/2}}{4} \right) \zeta_0^{(i_3)} + \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \\ = \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{0 j_1 j_1} - \frac{(T-t)^{3/2}}{4} \right)^2 + \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2 = \\ = \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.142)$$

Если мы докажем, что

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2 = 0, \quad (5.143)$$

то соотношение (5.123) будет доказано.

Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) \sum_{j_1=0}^{p_1} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 ds \right)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) \left( (s-t) - \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 \right) ds \right)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 ds \right)^2 \leq \\
 & \leq \frac{1}{4} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \int_t^T |\phi_{j_3}(s)| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 ds \right)^2. \quad (5.144)
 \end{aligned}$$

Получая (5.144) мы использовали соотношения (5.135) и (5.136).

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 & = \frac{(T-t)(2j_1+1)}{4} \left( \int_{-1}^{z(s)} P_{j_1}(y) dy \right)^2 = \\
 & = \frac{T-t}{4(2j_1+1)} \left( \int_{-1}^{z(s)} (P'_{j_1+1}(y) - P'_{j_1-1}(y)) dy \right)^2 = \\
 & = \frac{T-t}{4(2j_1+1)} (P_{j_1+1}(z(s)) - P_{j_1-1}(z(s)))^2 \leq \\
 & \leq \frac{T-t}{2(2j_1+1)} (P_{j_1+1}^2(z(s)) + P_{j_1-1}^2(z(s))), \quad (5.145)
 \end{aligned}$$

где

$$z(s) = \left( s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

Для полиномов Лежандра хорошо известна следующая оценка

$$|P_n(y)| < \frac{K}{\sqrt{n+1}(1-y^2)^{1/4}}, \quad y \in (-1, 1); \quad n \in N, \quad (5.146)$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $y$  и  $n$ .

Оценка (5.146) может быть переписана для функции  $\phi_n(s)$  в следующей форме:

$$\begin{aligned} |\phi_n(s)| &< \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \frac{K}{\sqrt{T-t}} \left(1 - \left(\left(s - \frac{T+t}{2}\right) \frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{-1/4} < \\ &< \frac{K_1}{\sqrt{T-t}} \left(1 - \left(\left(s - \frac{T+t}{2}\right) \frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{-1/4}, \end{aligned} \quad (5.147)$$

где  $K_1 = K\sqrt{2}$ ;  $s \in (t, T)$ .

Оценим правую часть (5.145) применяя оценку (5.146):

$$\begin{aligned} \left(\int_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1\right)^2 &< \frac{T-t}{2(2j_1+1)} \left(\frac{K^2}{j_1+2} + \frac{K^2}{j_1}\right) \frac{1}{(1-(z(s))^2)^{1/2}} < \\ &< \frac{(T-t)K^2}{2j_1^2} \frac{1}{(1-(z(s))^2)^{1/2}}; \quad s \in (t, T), \end{aligned} \quad (5.148)$$

где

$$z(s) = \left(s - \frac{T+t}{2}\right) \frac{2}{T-t}.$$

Подставляя оценку (5.148) в соотношение (5.144) и используя в (5.144) оценку (5.147) для  $|\phi_{j_3}(s)|$  получим:

$$\begin{aligned} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1}\right)^2 &< \\ &< \frac{(T-t)K^4 K_1^2}{16} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left(\int_t^T \left(1 - \left(\left(s - \frac{T+t}{2}\right) \frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{-3/4} ds \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2}\right)^2 \\ &= \frac{(T-t)^3 K^4 K_1^2 (p_1+1)}{64} \left(\int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{3/4}}\right)^2 \left(\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2}\right)^2. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Поскольку

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{3/4}} < \infty \quad (5.150)$$

и

$$\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \leq \int_{p_1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p_1}, \quad (5.151)$$

то из (5.149) мы находим:

$$\sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2 < \frac{C(T-t)^3(p_1+1)}{p_1^2} \rightarrow 0 \text{ при } p_1 \rightarrow \infty, \quad (5.152)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $p_1$  и  $T-t$ .

Из (5.152) следует (5.143), а из (5.143) следует (5.123).

Докажем равенство (5.124). Соотношение (5.127) означает, что

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 0} = \frac{1}{4}(T-t)^{3/2}, \quad (5.153)$$

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}(T-t)^{3/2}, \quad (5.154)$$

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} = 0, \quad j_1 \geq 2. \quad (5.155)$$

Проверим формулы (5.153) – (5.155) прямым вычислением

Начнем с (5.153). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 0} &= C_{000} + \sum_{j_3=1}^{\infty} C_{j_3 j_3 0}; \quad C_{000} = \frac{(T-t)^{3/2}}{6}; \\ C_{j_3 j_3 0} &= \frac{(T-t)^{3/2}}{16(2j_3+1)} \int_{-1}^1 (P_{j_3+1}^2(y) + P_{j_3-1}^2(y)) dy = \\ &= \frac{(T-t)^{3/2}}{8(2j_3+1)} \left( \frac{1}{2j_3+3} + \frac{1}{2j_3-1} \right); \quad j_3 \geq 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 0} &= \frac{(T-t)^{3/2}}{6} + \\ &+ \frac{(T-t)^{3/2}}{8} \left( \sum_{j_3=1}^{\infty} \frac{1}{(2j_3+1)(2j_3+3)} + \sum_{j_3=1}^{\infty} \frac{1}{4j_3^2-1} \right) = \\ &= \frac{(T-t)^{3/2}}{6} + \frac{(T-t)^{3/2}}{8} \left( \sum_{j_3=1}^{\infty} \frac{1}{4j_3^2-1} - \frac{1}{3} + \sum_{j_3=1}^{\infty} \frac{1}{4j_3^2-1} \right) = \\ &= \frac{(T-t)^{3/2}}{6} + \frac{(T-t)^{3/2}}{8} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(T-t)^{3/2}}{4}. \end{aligned}$$

Соотношение (5.153) доказано. Проверим (5.154). Имеем

$$\begin{aligned}
 C_{j_3 j_3 j_1} &= \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds = \\
 &= \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) ds = \\
 &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2 = \\
 &= \frac{(T-t)^{3/2} (2j_3+1) \sqrt{2j_1+1}}{16} \int_{-1}^1 P_{j_1}(y) \left( \int_y^1 P_{j_3}(y_1) dy_1 \right)^2 dy; \quad j_3 \geq 1. \quad (5.156)
 \end{aligned}$$

Поскольку функции

$$\left( \int_y^1 P_{j_3}(y_1) dy_1 \right)^2; \quad j_3 \geq 1$$

являются четными, то функции

$$P_1(y) \left( \int_y^1 P_{j_3}(y_1) dy_1 \right)^2 dy; \quad j_3 \geq 1$$

являются нечетными. Это значит, что  $C_{j_3 j_3 1} = 0; j_3 \geq 1$ .

Более того

$$C_{001} = \frac{\sqrt{3}(T-t)^{3/2}}{16} \int_{-1}^1 y(1-y)^2 dy = -\frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 1} = C_{001} + \sum_{j_3=1}^{\infty} C_{j_3 j_3 1} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}}.$$

Соотношение (5.154) доказано.

Равенство (5.155) может быть доказано аналогично (5.130). Имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} &= \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2 = \\
 &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) \sum_{j_3=0}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2 =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2)(T - s_2) ds_2 = 0; \quad j_1 \geq 2, \quad (5.157)$$

где мы использовали равенство Парсеваля в следующей форме

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 = \int_t^T K^2(s_1, s_2) ds_1 = \int_{s_2}^T ds_1 = T - s_2, \quad (5.158)$$

$$K(s_1, s_2) = \begin{cases} 1, & s_2 < s_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad s_1, s_2 \in [t, T]$$

и тот факт, что ряд в левой части (5.158) сходится равномерно по признаку Дини. Соотношение (5.155) доказано.

Используя полученные результаты имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} &= \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 0} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} + \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2}^{p_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\ &= \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 0} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} + \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2j_3+2} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \quad (5.159) \end{aligned}$$

Поскольку

$$C_{j_3 j_3 j_1} = \frac{(T-t)^{3/2}(2j_3+1)\sqrt{2j_1+1}}{16} \int_{-1}^1 P_{j_1}(y) \left( \int_y^1 P_{j_3}(y_1) dy_1 \right)^2 dy;$$

$j_3 \geq 1$ , и степень полинома

$$\left( \int_y^1 P_{j_3}(y_1) dy_1 \right)^2$$

равна  $2j_3 + 2$ , то используя (5.137) мы получим  $C_{j_3 j_3 j_1} = 0$  при  $j_1 > 2j_3 + 2$ . Это объясняет, почему мы положили  $2j_3 + 2$  вместо  $p_1$  в правой части формулы (5.159). Более того, функция

$$\left( \int_y^1 P_{j_3}(y_1) dy_1 \right)^2$$

является четной, что означает, что функция

$$P_{j_1}(y) \left( \int_y^1 P_{j_3}(y_1) dy_1 \right)^2$$

является нечетной для нечетного  $j_1$ . Это значит, что  $C_{j_3 j_3 j_1} = 0$  для нечетных  $j_1$ . Это обстоятельство объясняет суммирование только по четным  $j_1$  в правой части (5.159).

Далее мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2j_3+2} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} &= \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \sum_{j_3=(j_1-2)/2}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\ &= \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \end{aligned} \quad (5.160)$$

Мы заменили  $(j_1-2)/2$  нулем в правой части (5.160), поскольку  $C_{j_3 j_3 j_1} = 0$  при  $0 \leq j_3 < (j_1-2)/2$ .

Подставим (5.160) в (5.159):

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} &= \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 0} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{(T-t)^{3/2}}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} + \\ &+ \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \end{aligned} \quad (5.161)$$

Нетрудно видеть, что правая часть формулы (5.161) не зависит от  $p_1$ .

Если мы докажем, что

$$\lim_{p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right) \right)^2 \right\} = 0, \quad (5.162)$$

то (5.124) будет доказано.

Используя (5.161) и (5.153), (5.154) мы можем переписать левую часть формулы (5.162) в следующей форме:

$$\lim_{p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 0} - \frac{(T-t)^{3/2}}{4} \right) \zeta_0^{(i_1)} + \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{p_3 \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_3=0}^{p_1} C_{j_3 j_3 0} - \frac{(T-t)^{3/2}}{4} \right)^2 + \lim_{p_3 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \right)^2 = \\
 &= \lim_{p_3 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Если мы докажем, что

$$\lim_{p_3 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \right)^2 = 0, \quad (5.163)$$

то соотношение (5.124) будет доказано.

Из (5.156) мы получаем

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) \sum_{j_3=0}^{p_3} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2 \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) \left( (T-s_2) - \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 \right) ds_2 \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2 \right)^2 \leq \\
 &\leq \frac{1}{4} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \int_t^T |\phi_{j_1}(s_2)| \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2 \right)^2. \quad (5.164)
 \end{aligned}$$

При получении (5.164) мы использовали равенство Парсеваля (5.158) и соотношение (5.157). Далее мы имеем

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 &= \frac{(T-t)}{4(2j_3+1)} (P_{j_3+1}(z(s_2)) - P_{j_3-1}(z(s_2)))^2 \leq \\
 &\leq \frac{T-t}{2(2j_3+1)} (P_{j_3+1}^2(z(s_2)) + P_{j_3-1}^2(z(s_2))) <
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{T-t}{2(2j_3+1)} \left( \frac{K^2}{j_3+2} + \frac{K^2}{j_3} \right) \frac{1}{(1-(z(s_2))^2)^{1/2}} < \\
 &< \frac{(T-t)K^2}{2j_3^2} \frac{1}{(1-(z(s_2))^2)^{1/2}}; \quad s \in (t, T), \tag{5.165}
 \end{aligned}$$

где

$$z(s_2) = \left( s_2 - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

При получении (5.165) мы использовали оценку (5.146).

Подставляя оценку (5.165) в соотношение (5.164) и используя в (5.164) оценку (5.147) для  $|\phi_{j_1}(s_2)|$  мы получим:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \right)^2 < \\
 &< \frac{(T-t)K^4 K_1^2}{16} \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \int_t^T \left( 1 - \left( \left( s_2 - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right)^2 \right)^{-3/4} ds \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \frac{1}{j_3^2} \right)^2 \\
 &= \frac{(T-t)^3 K^4 K_1^2 (p_3+1)}{64} \left( \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{3/4}} \right)^2 \left( \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \frac{1}{j_3^2} \right)^2. \tag{5.166}
 \end{aligned}$$

Используя (5.150) и (5.151), из (5.166) мы находим:

$$\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \right)^2 < \frac{C(T-t)^3 (p_3+1)}{p_3^2} \rightarrow 0 \text{ при } p_3 \rightarrow \infty, \tag{5.167}$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $p_3$  и  $T-t$ .

Из (5.167) следует (5.163) и из (5.163) следует (5.124). Докажем (5.125).

Поскольку  $\psi_1(\tau)$ ,  $\psi_2(\tau)$ ,  $\psi_3(\tau) \equiv 1$ , то для коэффициентов Фурье справедливо следующее равенство (см. разд. 5.1):

$$C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1} + C_{j_3 j_1 j_1} = \frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3},$$

где  $C_j = 0$  при  $j \geq 1$  и  $C_0 = \sqrt{T-t}$ . Тогда с в. 1

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3} - C_{j_1 j_1 j_3} - C_{j_3 j_1 j_1} \right) \zeta_{j_3}^{(i_2)}. \tag{5.168}$$

Поэтому, учитывая (5.123) и (5.124), с в. 1 мы можем записать следующее:

$$\begin{aligned} \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} &= \frac{1}{2} C_0^3 \zeta_0^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_1 j_3} \zeta_{j_3}^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \\ &= \frac{1}{2}(T-t)^{3/2} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{4}(T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_2)} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4}(T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_2)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.169)$$

Соотношение (5.125) доказано. Таким образом, мы доказали следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности для случая полиномов Лежандра:

$$\int_t^{*T} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.170)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле,

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds$$

и  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ .

Нетрудно видеть, что формула (5.170) может быть доказана для случая  $i_1 = i_2 = i_3$  с помощью формулы Ито (см. также разд. 6.9):

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} &= \frac{1}{6} \left( \int_t^T d\mathbf{f}_s^{(i_1)} \right)^3 = \frac{1}{6} \left( C_0 \zeta_0^{(i_1)} \right)^3 = \\ &= C_{000} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)}, \end{aligned}$$

где равенство выполняется с вероятностью 1.

Рассмотрим разложения конкретных повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито используя полученные результаты и систему полиномов Лежандра.

Положим

$$I_{l_1 \dots l_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

$$I_{l_1 \dots l_k T, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

где  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ;  $l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$

Прямое вычисление по теореме 5.1 дает:

$$\begin{aligned} I_{000 T, t}^{(i_1 i_2 i_3)} &= -\frac{1}{T-t} \left( I_{0 T, t}^{(i_3)} I_{10 T, t}^{*(i_2 i_1)} + I_{0 T, t}^{(i_1)} I_{10 T, t}^{*(i_2 i_3)} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{0 T, t}^{(i_3)} \left( I_{00 T, t}^{*(i_1 i_2)} - I_{00 T, t}^{*(i_2 i_1)} \right) - \\ &\quad - (T-t)^{3/2} \left[ \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} \left( \zeta_0^{(i_2)} + \sqrt{3} \zeta_1^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \right) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \left( \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_3)} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_3)} + G_{T,t}^{(i_3)} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \left( \zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} + G_{T,t}^{(i_1)} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \left( \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} + Q_{T,t}^{(i_2)} \right) + \frac{1}{4} D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} \right], \end{aligned}$$

$$I_{0 T, t}^{(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)},$$

$$I_{00 T, t}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) \right),$$

$$\begin{aligned} I_{10 T, t}^{*(i_1 i_2)} &= -\frac{T-t}{2} I_{00 T, t}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1) \zeta_{i+2}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} + \frac{\zeta_i^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} &= \\ &= \sum_{\substack{i=1, j=0, k=i \\ 2i \geq k+i-j \geq -2; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1, k+1, (k+i-j)/2+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{i=1, j=0 \\ 2k \geq k+i-j \geq -2; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k+1, i+1, (k+i-j)/2+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{i=1, j=0, k=i+2 \\ 2i+2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1, k-1, (k+i-j)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{i=1, j=0 \\ 2k-2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk} K_{k-1, i+1, (k+i-j)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{i=1, j=0, k=i-2, k \geq 1 \\ 2i-2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1, k+1, (k+i-j)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{i=1, j=0 \\ 2k+2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk} K_{k+1, i-1, (k+i-j)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
 & + \sum_{\substack{i=1, j=0, k=i \\ 2i \geq k+i-j \geq 2; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1, k-1, (k+i-j)/2-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
 & + \sum_{\substack{i=1, j=0 \\ 2k \geq k+i-j \geq 2; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k-1, i-1, (k+i-j)/2-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{T,t}^{(i_3)} = & - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{k=j, k \text{ четное}}}^{2j} N_{jjk} K_{j+1, k+1, k/2+1} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
 & + \sum_{\substack{k=1, k \text{ четное}}}^{j-1} N_{jjk} K_{k+1, j+1, k/2+1} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{k=j-2, k \geq 1, k \text{ четное}}}^{2j-2} N_{jjk} K_{j-1, k+1, k/2} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{k=1, k \text{ четное}}}^{j-3} N_{jjk} K_{k+1, j-1, k/2} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{k=j+2, k \text{ четное}}}^{2j+2} N_{jjk} K_{j+1, k-1, k/2} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & \left. - \sum_{\substack{k=1, k \text{ четное}}}^{j+1} N_{jjk} K_{k-1, j+1, k/2} \zeta_k^{(i_3)} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=j, k - \text{четное}}^{2j} N_{jjk} K_{j-1,k-1,k/2-1} \zeta_k^{(i_3)} + \\ + \sum_{k=1, k - \text{четное}}^{j-1} N_{jjk} K_{k-1,j-1,k/2-1} \zeta_k^{(i_3)} \Big\},$$

$$Q_{T,t}^{(i_2)} = -\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0, j - \text{четное}}^{2i+2} N_{iji} K_{i+1,i+1,i+1-j/2} \zeta_j^{(i_2)} - \right. \\ - 2 \sum_{j=2, j - \text{четное}}^{2i} N_{iji} K_{i-1,i-1,i-j/2} \zeta_j^{(i_2)} + \\ \left. + \sum_{j=0, j - \text{четное}}^{2i-2} N_{iji} K_{i-1,i-1,i-1-j/2} \zeta_j^{(i_2)} \right\},$$

где

$$N_{ijk} = \sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}}, \\ K_{m,n,k} = \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \cdot \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}, \quad a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}, \quad m \leq n.$$

С другой стороны, в соответствии с (5.170) мы можем использовать более компактное выражение:

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} = -\frac{1}{T-t} \left( I_{0_{T,t}}^{(i_3)} I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} + I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_3)} \right) + \\ + \frac{1}{2} I_{0_{T,t}}^{(i_3)} \left( I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} \right) - \\ - (T-t)^{3/2} \left[ \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} \left( \zeta_0^{(i_2)} + \sqrt{3} \zeta_1^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \right) + \frac{1}{4} D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} \right]$$

или

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} = -\frac{1}{T-t} \left( I_{0_{T,t}}^{(i_3)} I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} + I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_3)} \right) + \\ + \frac{1}{2} I_{0_{T,t}}^{(i_3)} \left( I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} \right) - \\ - (T-t)^{3/2} \left[ \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} \left( \zeta_0^{(i_2)} + \sqrt{3} \zeta_1^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \right) + \frac{1}{4} D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} \right] +$$

$$+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \frac{1}{2} I_{1_{T,t}}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \frac{1}{2} \left( (T-t) I_{0_{T,t}}^{(i_1)} + I_{1_{T,t}}^{(i_1)} \right),$$

где

$$I_{1_{T,t}}^{(i)} = -\frac{1}{2}(T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i)} \right),$$

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)},$$

$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Докажем некоторые обобщения разложения (5.170) для случая, когда  $\psi_i(\tau) \equiv (t-\tau)^{l_i}; l_i = 0, 1, 2, \dots$  фиксированные числа;  $i = 1, 2, 3$ .

### 5.6.2 Случай $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau) \equiv (t-\tau)^l, \psi_3(\tau) \equiv (t-\tau)^{l_3}; i_1 = i_2 \neq i_3$

В этом разделе мы докажем следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\begin{aligned} & \int_t^{*T} (t-s)^{l_3} \int_t^{*s} (t-s_1)^l \int_t^{*s_1} (t-s_2)^l d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_s^{(i_3)} = \\ &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \quad (i_1 = i_2 \neq i_3; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (5.171)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле;  $l, l_3 = 0, 1, 2, \dots$  и

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \int_t^s (t-s_1)^l \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} (t-s_2)^l \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds. \quad (5.172)$$

Если мы докажем формулу:

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T (t-s)^{l_3} \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)}, \quad (5.173)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и коэффициенты  $C_{j_3 j_1 j_1}$  имеют вид (5.172), то тогда используя теорему 5.1 и стандартные соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито мы получим разложение (5.171).

Используя теорему 5.1 запишем:

$$\frac{1}{2} \int_t^T (t-s)^{l_3} \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)} = \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^{2l+l_3+1} \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \text{ с. в. 1,}$$

где

$$\tilde{C}_{j_3} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^{2l+l_3+1} \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \\ & = \sum_{j_3=0}^{2l+l_3+1} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right) \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \lim_{p_1, p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \int_t^T (t-s)^{l_3} \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \\ & = \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^{2l+l_3+1} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 + \\ & + \lim_{p_1, p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.174)$$

Покажем, что

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 = 0. \quad (5.175)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 = \\ & = \left( \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p_1} \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 ds \Bigg)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 \right) ds \right)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \left( \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 - \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 \right) ds \right)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds \right)^2. \quad (5.176)
 \end{aligned}$$

При получении (5.176) мы использовали равенство Парсеваля, которое в данном случае имеет вид:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 = \int_t^T K^2(s, s_1) ds_1, \quad (5.177)$$

где

$$K(s, s_1) = \begin{cases} (t-s_1)^l, & s_1 < s \\ & ; s, s_1 \in [t, T]. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Принимая во внимание неубывание функциональной последовательности

$$u_n(s) = \sum_{j_1=0}^n \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2,$$

непрерывность ее членов и непрерывность предельной функции

$$u(s) = \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1$$

на интервале  $[t, T]$  по признаку Дини мы имеем равномерную сходимость функциональной последовательности  $u_n(s)$  к предельной функции  $u(s)$  на интервале  $[t, T]$ .

Из (5.176), используя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \int_t^T \phi_{j_3}^2(s) (t-s)^{2l_3} ds \int_t^T \left( \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 \right)^2 ds \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \varepsilon^2 (T-t)^{2l_3} \int_t^T \phi_{j_3}^2(s) ds (T-t) = \frac{1}{4} (T-t)^{2l_3+1} \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (5.178)$$

при  $p_1 > N(\varepsilon)$ , где  $N(\varepsilon)$  существует для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$ .

Из (5.178) следует (5.175).

Далее

$$\sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(j_1+l+1)+l_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}. \quad (5.179)$$

Мы положили  $2(j_1 + l + 1) + l_3$  вместо  $p_3$ , поскольку  $C_{j_3 j_1 j_1} = 0$  при  $j_3 > 2(j_1 + l + 1) + l_3$ . Это заключение следует из соотношения:

$$\begin{aligned} C_{j_3 j_1 j_1} &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s) Q_{2(j_1+l+1)+l_3}(s) ds, \end{aligned}$$

где  $Q_{2(j_1+l+1)+l_3}(s)$  — многочлен степени  $2(j_1 + l + 1) + l_3$ .

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(j_1+l+1)+l_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}. \quad (5.180)$$

Отметим, что мы ввели некоторые равные нулю коэффициенты  $C_{j_3 j_1 j_1}$  в сумму  $\sum_{j_1=0}^{p_1}$ . Из (5.179) и (5.180) мы получаем:

$$M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= M \left\{ \left( \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2 = \\
 &= \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \left( \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p_1} \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \left( \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 \right) ds \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^{l_3} \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds \right)^2. \tag{5.181}
 \end{aligned}$$

При получении (5.181) мы использовали равенство Парсеваля типа (5.177) и следующее соотношение:

$$\int_t^T \phi_{j_3}(s) Q_{2l+1+l_3}(s) ds = 0; \quad j_3 > 2l + 1 + l_3,$$

где  $Q_{2l+1+l_3}(s)$  — полином степени  $2l + 1 + l_3$ .

Далее мы имеем

$$\begin{aligned}
 &\left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 = \\
 &= \frac{(T-t)^{2l+1}(2j_1+1)}{2^{2l+2}} \left( \int_{-1}^{z(s)} P_{j_1}(y) (1+y)^l dy \right)^2 = \\
 &= \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+2}(2j_1+1)} \left( (1+z(s))^l (P_{j_1+1}(z(s)) - P_{j_1-1}(z(s))) - \right. \\
 &\quad \left. - l \int_{-1}^{z(s)} (P_{j_1+1}(y) - P_{j_1-1}(y)) (1+y)^{l-1} dy \right)^2 \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(T-t)^{2l+1}2}{2^{2l+2}(2j_1+1)} \left( \left( \frac{2(s-t)}{T-t} \right)^{2l} (P_{j_1+1}(z(s)) - P_{j_1-1}(z(s)))^2 + \right. \\
&\quad \left. + l^2 \left( \int_{-1}^{z(s)} (P_{j_1+1}(y) - P_{j_1-1}(y)) (1+y)^{l-1} dy \right)^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+1}(2j_1+1)} \left( 2^{2l+1} (P_{j_1+1}^2(z(s)) + P_{j_1-1}^2(z(s))) + \right. \\
&\quad \left. + l^2 \int_{-1}^{z(s)} (1+y)^{2l-2} dy \int_{-1}^{z(s)} (P_{j_1+1}(y) - P_{j_1-1}(y))^2 dy \right) \leq \\
&\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+1}(2j_1+1)} \left( 2^{2l+1} (P_{j_1+1}^2(z(s)) + P_{j_1-1}^2(z(s))) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2l^2}{2l-1} \left( \frac{2(s-t)}{T-t} \right)^{2l-1} \int_{-1}^{z(s)} (P_{j_1+1}^2(y) + P_{j_1-1}^2(y)) dy \right) \leq \\
&\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2j_1+1)} \left( 2 (P_{j_1+1}^2(z(s)) + P_{j_1-1}^2(z(s))) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l^2}{2l-1} \int_{-1}^{z(s)} (P_{j_1+1}^2(y) + P_{j_1-1}^2(y)) dy \right), \tag{5.182}
\end{aligned}$$

где

$$z(s) = \left( s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

Оценим правую часть (5.182) используя (5.146):

$$\begin{aligned}
&\left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1 \right)^2 < \frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2j_1+1)} \left( \frac{K^2}{j_1+2} + \frac{K^2}{j_1} \right) \times \\
&\times \left( \frac{2}{(1-(z(s))^2)^{1/2}} + \frac{l^2}{2l-1} \int_{-1}^{z(s)} \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} \right) < \\
&< \frac{(T-t)^{2l+1}K^2}{2j_1^2} \left( \frac{2}{(1-(z(s))^2)^{1/2}} + \frac{l^2\pi}{2l-1} \right), \tag{5.183}
\end{aligned}$$

где  $s \in (t, T)$  и

$$z(s) = \left( s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

Из (5.181) и (5.183) мы получаем:

$$\begin{aligned}
& M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} \leq \frac{1}{4} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \left( \int_t^T |\phi_{j_3}(s)| \times \right. \\
& \quad \times (t-s)^{l_3} \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds \left. \right)^2 \leq \\
& \leq \frac{1}{4} (T-t)^{2l_3} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \left( \int_t^T |\phi_{j_3}(s)| \times \right. \\
& \quad \times \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds \left. \right)^2 < \\
& < \frac{(T-t)^{4l+2l_3+1} K^4 K_1^2}{16} \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3} \left( \left( \int_t^T \frac{2ds}{(1-(z(s))^2)^{3/4}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{l^2 \pi}{2l-1} \int_t^T \frac{ds}{(1-(z(s))^2)^{1/4}} \right) \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \right)^2 \leq \\
& \leq \frac{(T-t)^{4l+2l_3+3} K^4 K_1^2}{64} \cdot \frac{2p_1+1}{p_1^2} \left( \int_{-1}^1 \frac{2dy}{(1-y^2)^{3/4}} + \frac{l^2 \pi}{2l-1} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/4}} \right)^2 \\
& \leq (T-t)^{4l+2l_3+3} C \frac{2p_1+1}{p_1^2} \rightarrow 0 \text{ при } p_1 \rightarrow \infty, \tag{5.184}
\end{aligned}$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $p_1$  и  $T-t$ , и

$$z(s) = \left( s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

Из (5.174), (5.175) и (5.184) следует (5.173), а из (5.173) следует разложение (5.171).

### 5.6.3 Случай $\psi_3(\tau), \psi_2(\tau) \equiv (t - \tau)^l, \psi_1(\tau) \equiv (t - \tau)^{l_1}; i_3 = i_2 \neq i_1$

В этой части мы докажем следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\begin{aligned} & \int_t^{*T} (t-s)^l \int_t^{*s} (t-s_1)^l \int_t^{*s_1} (t-s_2)^{l_1} d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_s^{(i_3)} = \\ &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \quad (i_3 = i_2 \neq i_1; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m), \quad (5.185) \end{aligned}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле;  $l, l_1 = 0, 1, 2, \dots$  и

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^l \int_t^s (t-s_1)^l \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} (t-s_2)^{l_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds. \quad (5.186)$$

Если мы докажем формулу:

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int_t^T (t-s)^{2l} \int_t^s (t-s_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds, \quad (5.187)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и коэффициенты  $C_{j_3 j_3 j_1}$  имеют вид (5.186), то, используя теорему 5.1 и стандартные соотношения между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича, мы получим разложение (5.185).

Используя теорему 5.1 запишем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_t^T (t-s)^{2l} \int_t^s (t-s_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T (t-s_1)^{l_1} \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{2l+l_1+1} \tilde{C}_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \text{ с в. 1}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{C}_{j_1} = \int_t^T \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^{l_1} \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds ds_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{2l+l_1+1} \tilde{C}_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{2l+l_1+1} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right) \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \lim_{p_1, p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \int_t^T (t-s)^{2l} \int_t^s (t-s_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds \right)^2 \right\} = \\
 & = \lim_{p_3 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{2l+l_1+1} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right)^2 + \\
 & + \lim_{p_1, p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\}. \tag{5.188}
 \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\lim_{p_3 \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right)^2 = 0. \tag{5.189}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right)^2 = \\
 & = \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) (t-s_2)^{l_1} ds_2 \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^l ds - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^{l_1} \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds ds_1 \right)^2 = \\
 & = \left( \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) (t-s_2)^{l_1} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds_2 - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^{l_1} \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds ds_1 \right)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^{l_1} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^l ds \right)^2 \right. \right. - \\
 & \quad \left. \left. - \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds \right)^2 ds_1 \right) = \\
 & = \frac{1}{4} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_1) (t-s_1)^{l_1} \left( \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds \right)^2 ds_1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^l ds \right)^2 - \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds \Big) ds_1 \Bigg)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^{l_1} \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^l ds \right)^2 ds_1 \right)^2. \quad (5.190)
 \end{aligned}$$

При получении (5.190) мы использовали равенство Парсеваля, которое в этом случае имеет вид:

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^l ds \right)^2 = \int_t^T K^2(s, s_1) ds, \quad (5.191)$$

где

$$K(s, s_1) = \begin{cases} (t-s)^l, & s_1 < s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad ; \quad s, s_1 \in [t, T].$$

Принимая во внимание неубывание функциональной последовательности

$$u_n(s_1) = \sum_{j_3=0}^n \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^l ds \right)^2,$$

непрерывность ее членов и непрерывность предельной функции

$$u(s_1) = \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds$$

на интервале  $[t, T]$ , по признаку Дини мы имеем равномерную сходимость функциональной последовательности  $u_n(s_1)$  к предельной функции  $u(s_1)$  на интервале  $[t, T]$ .

Из (5.190) используя неравенство Коши–Буняковского мы получаем:

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right)^2 \leq \\
 & \leq \frac{1}{4} \int_t^T \phi_{j_1}^2(s_1)(t-s_1)^{2l_1} ds_1 \int_t^T \left( \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^l ds \right)^2 \right)^2 ds_1 \leq \\
 & \leq \frac{1}{4} \varepsilon^2 (T-t)^{2l_1} \int_t^T \phi_{j_1}^2(s_1) ds_1 (T-t) = \frac{1}{4} (T-t)^{2l_1+1} \varepsilon^2 \quad (5.192)
 \end{aligned}$$

при  $p_3 > N(\varepsilon)$ , где  $N(\varepsilon)$  существует для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$ .

Из (5.192) следует (5.189).

Имеем

$$\sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(j_3+l+1)+l_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \quad (5.193)$$

Мы положили  $2(j_3 + l + 1) + l_1$  вместо  $p_1$ , поскольку  $C_{j_3 j_3 j_1} = 0$  при  $j_1 > 2(j_3 + l + 1) + l_1$ . Это заключение следует из соотношения:

$$\begin{aligned} C_{j_3 j_3 j_1} &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds_2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) Q_{2(j_3+l+1)+l_1}(s_2) ds_2, \end{aligned}$$

где  $Q_{2(j_3+l+1)+l_1}(s)$  — полином степени  $2(j_3 + l + 1) + l_1$ .

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(j_3+l+1)+l_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \quad (5.194)$$

Отметим, что мы включили некоторые равные нулю коэффициенты  $C_{j_3 j_3 j_1}$  в сумму  $\sum_{j_3=0}^{p_3}$ .

Из (5.193) и (5.194) мы получаем:

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} &= M \left\{ \left( \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} = \\ &= \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \right)^2 = \\ &= \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \left( \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \int_t^T \phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds_2 \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds_2 \right)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) (t-s_2)^{l_1} \left( \int_{s_2}^T (t-s_1)^{2l} ds_1 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 \right) ds_2 \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_2) (t-s_2)^{l_1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds_2 \right)^2. \tag{5.195}
 \end{aligned}$$

При получении (5.195) мы использовали равенство Парсеваля типа (5.191) и следующее соотношение:

$$\int_t^T \phi_{j_1}(s) Q_{2l+1+l_1}(s) ds = 0; \quad j_1 > 2l + 1 + l_1,$$

где  $Q_{2l+1+l_1}(s)$  — полином степени  $2l + 1 + l_1$ .

Далее мы имеем

$$\begin{aligned}
 &\left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) (t-s_1)^l ds_1 \right)^2 = \\
 &= \frac{(T-t)^{2l+1}(2j_3+1)}{2^{2l+2}} \left( \int_{z(s_2)}^1 P_{j_3}(y) (1+y)^l dy \right)^2 = \\
 &= \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+2}(2j_3+1)} \left( (1+z(s_2))^l (P_{j_3-1}(z(s_2)) - P_{j_3+1}(z(s_2))) - \right. \\
 &\quad \left. - l \int_{z(s_2)}^1 (P_{j_3+1}(y) - P_{j_3-1}(y)) (1+y)^{l-1} dy \right)^2 \leq \\
 &\leq \frac{(T-t)^{2l+1}2}{2^{2l+2}(2j_3+1)} \left( \left( \frac{2(s_2-t)}{T-t} \right)^{2l} (P_{j_3+1}(z(s_2)) - P_{j_3-1}(z(s_2)))^2 + \right. \\
 &\quad \left. + l^2 \left( \int_{z(s_2)}^1 (P_{j_3+1}(y) - P_{j_3-1}(y)) (1+y)^{l-1} dy \right)^2 \right) \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+1}(2j_3+1)} \left( 2^{2l+1} (P_{j_3+1}^2(z(s_2)) + P_{j_3-1}^2(z(s_2))) + \right. \\
 &\quad \left. + l^2 \int_{z(s_2)}^1 (1+y)^{2l-2} dy \int_{z(s_2)}^1 (P_{j_3+1}(y) - P_{j_3-1}(y))^2 dy \right) \leq \\
 &\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+1}(2j_3+1)} \left( 2^{2l+1} (P_{j_3+1}^2(z(s_2)) + P_{j_3-1}^2(z(s_2))) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2^{2l}l^2}{2l-1} \left( 1 - \left( \frac{(s_2-t)}{T-t} \right)^{2l-1} \right) \int_{z(s_2)}^1 (P_{j_3+1}^2(y) + P_{j_3-1}^2(y)) dy \right) \leq \\
 &\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2j_3+1)} \left( 2 (P_{j_3+1}^2(z(s_2)) + P_{j_3-1}^2(z(s_2))) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l^2}{2l-1} \int_{z(s_2)}^1 (P_{j_3+1}^2(y) + P_{j_3-1}^2(y)) dy \right), \tag{5.196}
 \end{aligned}$$

где

$$z(s_2) = \left( s_2 - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

Оценим правую часть (5.196) используя (5.146):

$$\begin{aligned}
 &\left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1 \right)^2 < \frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2j_3+1)} \left( \frac{K^2}{j_3+2} + \frac{K^2}{j_3} \right) \times \\
 &\quad \times \left( \frac{2}{(1-(z(s_2))^2)^{1/2}} + \frac{l^2}{2l-1} \int_{z(s_2)}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} \right) < \\
 &< \frac{(T-t)^{2l+1}K^2}{2j_3^2} \left( \frac{2}{(1-(z(s_2))^2)^{1/2}} + \frac{l^2\pi}{2l-1} \right), \tag{5.197}
 \end{aligned}$$

где  $s \in (t, T)$  и

$$z(s_2) = \left( s_2 - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

Из (5.195) и (5.197) получим:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} \leq \frac{1}{4} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \left( \int_t^T |\phi_{j_1}(s_2)| \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times (t - s_2)^{l_1} \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) (t - s_1)^l ds_1 \right)^2 ds_2 \Bigg)^2 \leq \\
& \leq \frac{1}{4} (T - t)^{2l_1} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \left( \int_t^T |\phi_{j_1}(s_2)| \times \right. \\
& \times \left. \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) (t - s_1)^l ds_1 \right)^2 ds_2 \right)^2 < \\
& < \frac{(T - t)^{4l+2l_1+1} K^4 K_1^2}{16} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \left( \left( \int_t^T \frac{2ds_2}{(1 - (z(s_2))^2)^{3/4}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{l^2 \pi}{2l - 1} \int_t^T \frac{ds_2}{(1 - (z(s_2))^2)^{1/4}} \right) \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \frac{1}{j_3^2} \right)^2 \leq \\
& \leq \frac{(T - t)^{4l+2l_1+3} K^4 K_1^2}{64} \cdot \frac{2p_3 + 1}{p_3^2} \left( \int_{-1}^1 \frac{2dy}{(1 - y^2)^{3/4}} + \frac{l^2 \pi}{2l - 1} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1 - y^2)^{1/4}} \right)^2 \\
& \leq (T - t)^{4l+2l_1+3} C \frac{2p_3 + 1}{p_3^2} \rightarrow 0 \text{ при } p_3 \rightarrow \infty, \tag{5.198}
\end{aligned}$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $p_3$  и  $T - t$ ;

$$z(s_2) = \left( s_2 - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

Из (5.188), (5.189) и (5.198) следует (5.187), а из (5.187) следует разложение (5.185).

#### 5.6.4 Случай $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv (t - \tau)^l; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$

В этом разделе мы докажем следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\int_t^T (t - s)^l \int_t^{*s} (t - s_1)^l \int_t^{*s_1} (t - s_2)^l d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_s^{(i_3)} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \quad (i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m), \quad (5.199)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле;  $l = 0, 1, 2, \dots$  и

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) (t-s)^l \int_t^s (t-s_1)^l \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} (t-s_2)^l \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds. \quad (5.200)$$

Если мы докажем формулу:

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0 \text{ с. в. 1}, \quad (5.201)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и коэффициенты  $C_{j_3 j_2 j_1}$  имеют вид (5.200), то используя теорему 5.1, соотношения (5.173), (5.187) при  $l_1 = l_3 = l$  и стандартные соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито мы получим разложение (5.199).

Поскольку  $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv (t-s)^l$ , то для коэффициентов Фурье верно соотношение

$$C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1} + C_{j_3 j_1 j_1} = \frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3},$$

где  $C_{j_3 j_2 j_1}$  имеет вид (5.200) и

$$C_{j_1} = \int_t^T \phi_{j_1}(s) (t-s)^l ds.$$

Тогда с вероятностью 1

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3} - C_{j_1 j_1 j_3} - C_{j_3 j_1 j_1} \right) \zeta_{j_3}^{(i_2)}. \quad (5.202)$$

Принимая во внимание (5.173) и (5.187) при  $l_3 = l_1 = l$ , а также формулу Ито, с. в. 1 получим:

$$\begin{aligned} \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} &= \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^l C_{j_1}^2 \sum_{j_3=0}^l C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_2)} - \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_1 j_3} \zeta_{j_3}^{(i_2)} - \\ &\quad - \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^l C_{j_1}^2 \int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \frac{1}{2} \int_t^T (t-s)^l \int_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_t^T (t-s)^{2l} \int_t^s (t-s_1)^l d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} ds = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^l C_{j_1}^2 \int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} + \frac{1}{2(2l+1)} \int_t^T (t-s)^{3l+1} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_t^T (t-s_1)^l \int_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^l C_{j_1}^2 \int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} + \frac{1}{2(2l+1)} \int_t^T (t-s)^{3l+1} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \\
 & \quad - \frac{1}{2(2l+1)} \left( (T-t)^{2l+1} \int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} + \int_t^T (t-s)^{3l+1} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^l C_{j_1}^2 \int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2l+1)} \int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \\
 & = \frac{1}{2} \left( \sum_{j_1=0}^l C_{j_1}^2 - \int_t^T (t-s)^{2l} ds \right) \int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь равенство Парсеваля имеет вид:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}^2 = \sum_{j_1=0}^l C_{j_1}^2 = \int_t^T (t-s)^{2l} ds = \frac{(T-t)^{2l+1}}{2l+1}$$

и кроме того

$$\int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \sum_{j_3=0}^l C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \text{ с в. 1.}$$

Разложение (5.199) доказано.

Нетрудно видеть, что используя формулу Ито при  $i_1 = i_2 = i_3$  мы получим:

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{*T} (t-s)^l \int_t^{*s} (t-s_1)^l \int_t^{*s_1} (t-s_2)^l d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_1)} = \\
 & = \frac{1}{6} \left( \int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_1)} \right)^3 = \frac{1}{6} \left( \sum_{j_1=0}^l C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^3 = \\
 & = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^l C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_1)} \text{ с в. 1.} \tag{5.203}
 \end{aligned}$$

Последний шаг в формуле (5.203) сделан на основе вывода формулы (5.40).

Объединим в одно утверждение результаты, полученные в предыдущих разделах.

**Теорема 5.4.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ . Тогда, для повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности

$$I_{l_1 l_2 l_3 T, t}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \int_t^T (t - t_3)^{l_3} \int_t^{*t_3} (t - t_2)^{l_2} \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}$$

$(i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m)$  следующее сходящееся в среднеквадратическом смысле разложение

$$I_{l_1 l_2 l_3 T, t}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \underset{p_1, p_2, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \quad (5.204)$$

справедливо в каждом из следующих случаев:

1.  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, i_1 \neq i_3$  и  $l_1, l_2, l_3 = 0, 1, 2, \dots$ ;
  2.  $i_1 = i_2 \neq i_3$  и  $l_1 = l_2 \neq l_3$  и  $l_1, l_2, l_3 = 0, 1, 2, \dots$ ;
  3.  $i_1 \neq i_2 = i_3$  и  $l_1 \neq l_2 = l_3$  и  $l_1, l_2, l_3 = 0, 1, 2, \dots$ ;
  4.  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m; l_1 = l_2 = l_3 = l$  и  $l = 0, 1, 2, \dots$ ,
- где

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T (t - s)^{l_3} \phi_{j_3}(s) \int_t^s (t - s_1)^{l_2} \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} (t - s_2)^{l_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds.$$

## 5.7 Теоремы о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 3, основанные на теореме 5.1. Случай полиномов Лежандра и тригонометрических функций

Рассмотрим одну модификацию теоремы 5.4.

**Theorem 5.5.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ , а  $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)$  — непрерывно дифференцируемые функции на интервале  $[t, T]$ .

Тогда, для повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{*t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}$$

$(i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m)$  следующее сходящееся в среднеквадратическом смысле разложение

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \quad (5.205)$$

справедливо в каждом из следующих случаев:

1.  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, i_1 \neq i_3;$
2.  $i_1 = i_2 \neq i_3$  и  $\psi_1(s) \equiv \psi_2(s);$
3.  $i_1 \neq i_2 = i_3$  и  $\psi_2(s) \equiv \psi_3(s);$
4.  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$  и  $\psi_1(s) \equiv \psi_2(s) \equiv \psi_3(s).$

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай полиномов Лежандра. Первый случай является прямым следствием теоремы 5.1.

Рассмотрим 2 случай. Докажем с в. 1 следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(s) \int_t^s \psi^2(s_1) ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)}; \\ C_{j_3 j_1 j_1} &= \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \psi(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds. \end{aligned}$$

По теореме 5.1:

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(s) \int_t^s \psi^2(s_1) ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)} = \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^{\infty} \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \text{ с в. 1},$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и

$$\tilde{C}_{j_3} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) \psi_3(s) \int_t^s \psi^2(s_1) ds_1 ds.$$

Имеем:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right) \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 = \\
 &= \sum_{j_3=0}^p \left( \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_3}(s) \psi_3(s) \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) \psi(s_1) ds_1 \right)^2 ds - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s) \psi_3(s) \int_t^s \psi^2(s_1) ds_1 ds \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) \psi_3(s) \left( \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) \psi(s_1) ds_1 \right)^2 - \int_t^s \psi^2(s_1) ds_1 \right) ds \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s) \psi_3(s) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) \psi(s_1) ds_1 \right)^2 ds \right)^2. \quad (5.206)
 \end{aligned}$$

При получении (5.206) мы использовали равенство Парсеваля вида:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) \psi(s_1) ds_1 \right)^2 = \int_t^T K^2(s, s_1) ds_1 = \int_t^s \psi^2(s_1) ds_1,$$

где

$$K(s, s_1) = \begin{cases} \psi(s), & s_1 < s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad s, s_1 \in [t, T].$$

Далее:

$$\begin{aligned}
 &\left( \int_t^s \psi(s_1) \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 = \\
 &= \frac{(T-t)(2j_1+1)}{4} \left( \int_{-1}^{z(s)} P_{j_1}(y) \psi \left( \frac{T-t}{2}y + \frac{T+t}{2} \right) dy \right)^2 = \\
 &= \frac{T-t}{4(2j_1+1)} \left( (P_{j_1+1}(z(s)) - P_{j_1-1}(z(s))) \psi(s) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{T-t}{2} \int_{-1}^{z(s)} ((P_{j_1+1}(y) - P_{j_1-1}(y)) \psi' \left( \frac{T-t}{2}y + \frac{T+t}{2} \right) dy \right)^2, \quad (5.207)
 \end{aligned}$$

где

$$z(s) = \left( s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t};$$

$\psi'$  — производная функции  $\psi(s)$  по переменной

$$\frac{T-t}{2}y + \frac{T+t}{2}.$$

Дальнейшее доказательство сходно с доказательством 2 случая в теореме 5.4. Окончательно из (5.206) и (5.207) мы получаем:

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right) \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} < \\ < K \frac{p}{p^2} \left( \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{3/4}} + \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/4}} \right)^2 \leq \\ \leq \frac{K_1}{p} \rightarrow 0, \text{ при } p \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $K, K_1$  — постоянные. 2 случай доказан.

Рассмотрим 3 случай. В этом случае с в. 1 докажем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi^2(s) \int_t^s \psi_1(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds; \\ C_{j_3 j_1 j_1} &= \int_t^T \psi(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \psi(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds. \end{aligned}$$

Используя формулу Ито с в. 1 запишем:

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi^2(s) \int_t^s \psi_1(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s_1) \int_{s_1}^T \psi^2(s) ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)}. \quad (5.208)$$

По теореме 5.1:

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s_1) \int_{s_1}^T \psi^2(s) ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{\infty} \tilde{C}_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \text{ с в. 1}, \quad (5.209)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и

$$\tilde{C}_{j_1} = \int_t^T \phi_{j_1}(s) \psi(s_1) \int_{s_1}^T \psi^2(s) ds ds_1.$$

Более того:

$$\begin{aligned}
 C_{j_3 j_3 j_1} &= \int_t^T \psi(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \psi(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds = \\
 &= \int_t^T \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) \int_{s_2}^T \psi(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \psi(s) \phi_{j_3}(s) ds ds_1 ds_2 = \\
 &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) \left( \int_{s_2}^T \psi(s_1) \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2. \tag{5.210}
 \end{aligned}$$

Используя (5.208) — (5.210) получим:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \left( \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} &= \\
 &= \sum_{j_1=0}^p \left( \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_1) \psi_1(s_1) \left( \sum_{j_3=0}^p \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) \psi(s) ds_1 \right)^2 - \int_{s_1}^T \psi^2(s) ds \right) ds_1 \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s_1) \psi_1(s_1) \sum_{j_3=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) \psi(s) ds \right)^2 ds_1 \right)^2. \tag{5.211}
 \end{aligned}$$

При получении (5.211) мы использовали равенство Парсеваля вида:

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) \psi(s) ds \right)^2 = \int_t^T K^2(s, s_1) ds = \int_{s_1}^T \psi^2(s) ds,$$

где

$$K(s, s_1) = \begin{cases} \psi(s), & s > s_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad s, s_1 \in [t, T].$$

Дальнейшее доказательство сходно с доказательством 3 случая в теореме 5.4. Окончательно из (5.211) получим:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \left( \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} <$$

$$\begin{aligned}
 & < K \frac{p}{p^2} \left( \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{3/4}} + \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/4}} \right)^2 \leq \\
 & \leq \frac{K_1}{p} \rightarrow 0, \text{ при } p \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

где  $K, K_1$  — постоянные. 3 случай доказан.

Рассмотрим 4 случай. В этом случае с в. 1 мы докажем следующее соотношение:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0 \quad (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv \psi(s)).$$

С вероятностью 1 получаем:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \\
 & = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_3=0}^p \left( \frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3} - C_{j_1 j_3 j_1} - C_{j_3 j_1 j_1} \right) \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \\
 & = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^2 \sum_{j_3=0}^p C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_2)} - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} - \\
 & \quad - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}^2 \int_t^T \psi(s) d\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \frac{1}{2} \int_t^T \psi^2(s) \int_t^s \psi(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} ds - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_t^T \psi(s) \int_t^s \psi^2(s_1) ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi^2(s) ds \int_t^T \psi(s) d\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_t^T \psi(s_1) \int_{s_1}^T \psi^2(s) ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} - \frac{1}{2} \int_t^T \psi(s_1) \int_t^{s_1} \psi^2(s) ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} = \\
 & = \frac{1}{2} \int_t^T \psi^2(s) ds \int_t^T \psi(s) d\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \frac{1}{2} \int_t^T \psi(s_1) \int_t^T \psi^2(s) ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)} = 0,
 \end{aligned}$$

где мы использовали равенство Парсеваля вида:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \int_t^T \psi(s) \phi_j(s) ds \right)^2 = \int_t^T \psi^2(s) ds.$$

Случай 4 и теорема 5.5 доказаны для системы полиномов Лежандра.

Перейдем теперь к рассмотрению доказательства теоремы для случая тригонометрической системы функций.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_t^s \phi_{j_1}(\theta) \psi(\theta) d\theta &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T-t}} \left\{ \int_t^s \sin((2\pi j_1(\theta-t))/(T-t)) \psi(\theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_t^s \cos((2\pi j_1(\theta-t))/(T-t)) \psi(\theta) d\theta \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{T-t}{2}} \frac{1}{\pi j_1} \times \\ &\times \left\{ -\cos((2\pi j_1(s-t))/(T-t)) \psi(s) + \psi(t) + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^s \cos((2\pi j_1(\theta-t))/(T-t)) \psi'(\theta) d\theta \right\}, \\ &\left. \sin((2\pi j_1(s-t))/(T-t)) \psi(s) - \int_t^s \sin((2\pi j_1(\theta-t))/(T-t)) \psi'(\theta) d\theta \right\}, \end{aligned}$$

где  $j_1 \neq 0$  и  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда

$$\left| \int_t^s \phi_{j_1}(\theta) \psi(\theta) d\theta \right| \leq \frac{K}{j_1} \quad (j_1 \neq 0). \quad (5.212)$$

Аналогично получим:

$$\left| \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) \psi(\theta) d\theta \right| \leq \frac{K}{j_1} \quad (j_1 \neq 0). \quad (5.213)$$

Используя (5.206), (5.211), (5.212), (5.213) приходим к

$$M \left\{ \left( \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right) \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} \leq \frac{K_1}{p} \rightarrow 0, \text{ при } p \rightarrow \infty,$$

$$M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \left( \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_1} \right) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} \leq \frac{K_1}{p} \rightarrow 0, \text{ при } p \rightarrow \infty,$$

где постоянная  $K_1$  не зависит от  $p$ .

Доказательство 4 случая такое же, как и для случая полиномов Лежандра. Теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим обобщение теоремы 5.5.

**Теорема 5.5\*.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ , функция  $\psi_2(s)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а функции  $\psi_1(s), \psi_3(s)$  — дважды непрерывно дифференцируемы на интервале  $[t, T]$ .

Тогда для повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_3(t_3) \int_t^{*t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}$$

( $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ ) справедливо следующее, сходящееся в среднеквадратическом смысле, разложение

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.214)$$

где

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds,$$

а другие обозначения соответствуют обозначениям теоремы 5.5.

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай полиномов Лежандра.

Из формулы (5.29) при  $p_1 = p_2 = p_3 = p$  и соотношения (5.110) следует, что теорема 5.5\* верна, если с вероятностью 1:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \psi_1(s_1) ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)}; \quad (5.215)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(s) \psi_2(s) \int_t^s \psi_1(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds; \quad (5.216)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0. \quad (5.217)$$

Докажем (5.215). По теореме 5.1 при  $k = 1$ :

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \psi_1(s_1) ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)} = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \text{ с. в. 1},$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и

$$\tilde{C}_{j_3} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) \psi_3(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \psi_1(s_1) ds_1 ds.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^p \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \\
& = \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right) \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \\
& = \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 = \\
& = \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \psi_1(s_1) \psi_2(s_1) ds_1 ds \right)^2 = \\
& = \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \left( \sum_{j_1=0}^p \psi_2(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \psi_1(s_1) \psi_2(s_1) \right) ds_1 ds \right)^2. \tag{5.218}
\end{aligned}$$

Покажем, что для любого  $s_1 \in (t, T)$  верно следующее:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \psi_2(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 = \frac{1}{2} \psi_1(s_1) \psi_2(s_1). \tag{5.219}$$

Рассмотрим функцию

$$K^*(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1),$$

где  $t_1, t_2 \in [t, T]$  и

$$K(t_1, t_2) = \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}}; \quad t_1, t_2 \in [t, T].$$

Разложим функцию  $K^*(t_1, t_2)$  по переменной  $t_1$ , когда  $t_2$  фиксировано, в ряд Фурье–Лежандра на интервале  $(t, T)$ :

$$K^*(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \cdot \phi_{j_1}(t_1) \quad (t_1 \neq t, T). \quad (5.220)$$

Равенство (5.220) выполняется поточечно в любой точке интервала  $(t, T)$  по переменной  $t_1$ , когда  $t_2$  фиксировано ( $t_2 \in [t, T]$ ) благодаря кусочной гладкости функции  $K^*(t_1, t_2)$  по переменной  $t_1 \in [t, T]$  ( $t_2$  — фиксировано).

Отметим также, что как известно ряд Фурье–Лежандра (5.220) сходится при  $t_1 = t, T$ .

При получении (5.220) мы использовали тот факт, что правая часть (5.220) сходится при  $t_1 = t_2$  (точка конечного разрыва функции  $K^*(t_1, t_2)$ ) к величине

$$\frac{1}{2} (K^*(t_2 - 0, t_2) + K^*(t_2 + 0, t_2)) = \frac{1}{2} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) = K^*(t_2, t_2).$$

Положим  $t_1 = t_2$  в (5.220), тогда получим (5.219).

Из (5.218) и (5.219) следует

$$\begin{aligned} & M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^p \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \\ & = \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \left( \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \psi_2(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right) ds_1 ds \right)^2. \end{aligned} \quad (5.221)$$

Из (5.221) и (5.62) получаем:

$$\begin{aligned} & M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^p \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} < \\ & < C_1 \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T |\phi_{j_3}(s)| \frac{1}{p} \left( \int_{-1}^{z(s)} \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} + \int_{-1}^{z(s)} \frac{dy}{(1-y^2)^{1/4}} \right) ds \right)^2 < \\ & < \frac{C_2}{p^2} \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T |\phi_{j_3}(s)| ds \right)^2 \leq \frac{C_2(T-t)}{p^2} \sum_{j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_3}^2(s) ds = \\ & = \frac{C_3 p}{p^2} = \frac{C_3}{p} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где постоянные  $C_1, C_2, C_3$  не зависят от  $p$ .

Равенство (5.215) доказано. Докажем (5.216).

По формуле Ито с вероятностью 1:

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(s) \psi_2(s) \int_t^s \psi_1(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s_1) \int_{s_1}^T \psi_3(s) \psi_2(s) ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)}.$$

По теореме 5.1 при  $k = 1$ :

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s) \int_s^T \psi_3(s_1) \psi_2(s_1) ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_1)} = \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^* \zeta_{j_1}^{(i_1)} \text{ с в. 1},$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и

$$C_{j_1}^* = \int_t^T \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) \int_s^T \psi_3(s_1) \psi_2(s_1) ds_1 ds. \quad (5.222)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^* \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} &= \\ &= \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \left( \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} C_{j_1}^* \right) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} = \\ &= \sum_{j_1=0}^p \left( \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2} C_{j_1}^* \right)^2, \end{aligned} \quad (5.223)$$

$$\begin{aligned} C_{j_3 j_3 j_1} &= \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds = \\ &= \int_t^T \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) \int_{s_2}^T \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) ds ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (5.224)$$

Из (5.222) – (5.224) находим:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^* \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} &= \\ &= \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^T \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) \int_{s_2}^T \left( \sum_{j_3=0}^p \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) ds \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\psi_3(s_1)\psi_2(s_1)\Big)ds_1ds_2\Big)^2. \quad (5.225)$$

Докажем, что для всех  $s_1 \in (t, T)$  выполнено равенство:

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds = \frac{1}{2}\psi_2(s_1)\psi_3(s_1). \quad (5.226)$$

Обозначим

$$K_1^*(t_1, t_2) = K_1(t_1, t_2) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\psi_2(t_1)\psi_3(t_1), \quad (5.227)$$

где  $t_1, t_2 \in [t, T]$  и

$$K_1(t_1, t_2) = \psi_2(t_1)\psi_3(t_2)\mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}}; \quad t_1, t_2 \in [t, T].$$

Разложим функцию  $K_1^*(t_1, t_2)$  по переменной  $t_2$  при фиксированном  $t_1$  в ряд Фурье–Лежандра на интервале  $(t, T)$ :

$$K_1^*(t_1, t_2) = \sum_{j_3=0}^{\infty} \psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_2)\phi_{j_3}(t_2)dt_2 \cdot \phi_{j_3}(t_2) \quad (t_2 \neq t, T). \quad (5.228)$$

Равенство (5.228) выполняется поточечно в каждой точке интервала  $(t, T)$  по переменной  $t_2$  при фиксированном  $t_1$  ( $t_1 \in [t, T]$ ) благодаря кусочной гладкости функции  $K_1^*(t_1, t_2)$  по переменной  $t_2 \in [t, T]$  ( $t_1$  — фиксировано).

При получении (5.228) мы также использовали тот факт, что правая часть (5.228) сходится при  $t_1 = t_2$  (точка конечного разрыва функции  $K_1^*(t_1, t_2)$ ) к величине

$$\frac{1}{2}(K_1^*(t_1, t_1 - 0) + K_1^*(t_1, t_1 + 0)) = \frac{1}{2}\psi_2(t_1)\psi_3(t_1) = K_1^*(t_1, t_1).$$

Полагая  $t_1 = t_2$  в (5.228) получим (5.226).

Из (5.225) и (5.226) находим:

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^* \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} = \\ & = \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^T \psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2) \int_{s_2}^T \left( \sum_{j_3=p+1}^{\infty} \psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times ds_1 ds_2 \Big)^2. \quad (5.229)$$

Используя метод вывода оценки (5.62), получим для дважды непрерывно дифференцируемой функции  $\psi_3(s)$  следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j_3=p+1}^{\infty} \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) ds \right| < \\ & < \frac{C}{p} \left( \frac{1}{(1 - (z(s_1))^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1 - (z(s_1))^2)^{1/4}} \right); \quad s_1 \in (t, T), \end{aligned} \quad (5.230)$$

где

$$z(s_1) = \left( s_1 - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t};$$

постоянная  $C$  не зависит от  $p$ .

Из (5.229) и (5.230) находим:

$$\begin{aligned} & M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^* \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} < \\ & < C_1 \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^T |\phi_{j_1}(s_2)| \frac{1}{p} \left( \int_{z(s_2)}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} + \int_{z(s_2)}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/4}} \right) ds_2 \right)^2 < \\ & < \frac{C_2}{p^2} \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^T |\phi_{j_1}(s_2)| ds_2 \right)^2 \leq \frac{C_2(T-t)}{p^2} \sum_{j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}^2(s_2) ds_2 = \\ & = \frac{C_3 p}{p^2} = \frac{C_3}{p} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где постоянные  $C_1, C_2, C_3$  не зависят от  $p$ .

Соотношение (5.216) доказано. Докажем (5.217). Имеем

$$M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \right)^2 \right\} = \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \right)^2; \quad (5.231)$$

$$\begin{aligned} C_{j_1 j_3 j_1} &= \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds = \\ &= \int_t^T \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \int_{s_1}^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds ds_1. \end{aligned} \quad (5.232)$$

Подставим (5.232) в (5.231):

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \right)^2 \right\} = \\ = \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \sum_{j_1=0}^p \int_t^{s_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds ds_1 \right)^2. \quad (5.233) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{K}(t_1, t_2) = \psi_1(t_1) \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}}; \quad t_1, t_2 \in [t, T].$$

Разложим функцию  $\tilde{K}(t_1, t_2)$  по переменной  $t_1$  при фиксированном  $t_2$  в ряд Фурье–Лежандра на интервале  $(t, T)$ :

$$\tilde{K}(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \cdot \phi_{j_1}(t_1) \quad (t_1 \neq t_2). \quad (5.234)$$

Используя (5.234) получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^p \int_t^{s_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds = \\ & = \int_{s_1}^T \psi_3(s) \left( \sum_{j_1=0}^p \phi_{j_1}(s) \int_t^{s_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right) ds = \\ & = \int_{s_1}^T \psi_3(s) \left( \sum_{j_1=0}^{\infty} \phi_{j_1}(s) \int_t^{s_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \phi_{j_1}(s) \int_t^{s_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right) ds = \\ & = \int_{s_1}^T \psi_3(s) \psi_1(s) \mathbf{1}_{\{s < s_1\}} ds - \\ & - \int_{s_1}^T \psi_3(s) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \phi_{j_1}(s) \int_t^{s_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta ds = \\ & = - \int_{s_1}^T \psi_3(s) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \phi_{j_1}(s) \int_t^{s_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta ds. \quad (5.235) \end{aligned}$$

Подставим (5.235) в (5.233):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \right)^2 \right\} &= \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{s_1}^T \psi_3(s) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \phi_{j_1}(s) \int_t^{s_1} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta ds ds_1 \right)^2 = \\
 &= \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_2(u_l^*) \phi_{j_3}(u_l^*) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_{u_l^*}^T \psi_3(s) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \phi_{j_1}(s) \int_t^{u_l^*} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta ds \Delta u_l \right)^2 = \\
 &= \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_2(u_l^*) \phi_{j_3}(u_l^*) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_{u_l^*}^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds \int_t^{u_l^*} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta \Delta u_l \right)^2, \tag{5.236}
 \end{aligned}$$

где  $t = u_0 < u_1 < \dots < u_N = T$ ;  $\Delta u_l = u_{l+1} - u_l$ ;  $u_l^*$  — точка минимума функции  $(1 - (z(s))^2)^{-\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) на интервале  $[u_l, u_{l+1}]$ ;  $\max_{0 \leq l \leq N-1} \Delta u_l \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ ;  $l = 0, 1, \dots, N-1$ . Последний шаг в (5.236) сделан на основании равномерной сходимости ряда Фурье–Лежандра кусочно гладкой функции  $\tilde{K}(s, u_l^*)$  на интервале  $[u_l^* + \varepsilon, T - \varepsilon]$   $\forall \varepsilon > 0$  ( $\tilde{K}(s, u_l^*)$  — непрерывная функция на интервале  $[u_l^*, T]$ ).

Имеем

$$\begin{aligned}
 \int_t^x \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds &= \frac{\sqrt{T-t} \sqrt{2j_1+1}}{2} \int_{-1}^{z(x)} P_{j_1}(y) \psi \left( \frac{T-t}{2} y + \frac{T+t}{2} \right) dy = \\
 &= \frac{\sqrt{T-t}}{2\sqrt{2j_1+1}} \left( (P_{j_1+1}(z(x)) - P_{j_1-1}(z(x))) \psi_1(x) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{T-t}{2} \int_{-1}^{z(x)} ((P_{j_1+1}(y) - P_{j_1-1}(y)) \psi_1' \left( \frac{T-t}{2} y + \frac{T+t}{2} \right) dy \right), \tag{5.237}
 \end{aligned}$$

где  $x \in (t, T)$ ;  $j_1 \geq p+1$ ;

$$z(x) = \left( x - \frac{1}{2}(T+t) \right) \frac{2}{T-t};$$

$\psi_1'$  — производная функции  $\psi_1(s)$  по переменной

$$\frac{1}{2}(T-t)y + \frac{1}{2}(T+t).$$

Отметим, что в (5.237) мы использовали известные свойства полиномов Лежандра:

$$P_{j+1}(-1) = -P_j(-1); \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\frac{dP_{j+1}}{dx}(x) - \frac{dP_{j-1}}{dx}(x) = (2j+1)P_j(x); \quad j = 1, 2, \dots$$

Из (5.146) и (5.237) находим:

$$\left| \int_t^x \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds \right| < \frac{C}{j_1} \left( \frac{1}{(1 - (z(x))^2)^{1/4}} + C_1 \right); \quad x \in (t, T), \quad (5.238)$$

где постоянные  $C, C_1$  не зависят от  $j_1$ .

Аналогично (5.238) и учитывая, что  $P_j(1) = 1; j = 0, 1, 2, \dots$  получим:

$$\left| \int_x^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds \right| < \frac{C}{j_1} \left( \frac{1}{(1 - (z(x))^2)^{1/4}} + C_1 \right); \quad x \in (t, T). \quad (5.239)$$

Объединяя (5.238) и (5.239) имеем:

$$\left| \int_t^x \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds \int_x^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds \right| < \frac{K}{j_1^2} \left( \frac{1}{(1 - (z(x))^2)^{1/2}} + K_1 \right), \quad (5.240)$$

где  $x \in (t, T)$  и постоянные  $K, K_1$  не зависят от  $j_1$ .

Оценим правую часть (5.236) используя (5.240):

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \right)^2 \right\} &\leq L \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} |\phi_{j_3}(u_l^*)| \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left( \frac{1}{(1 - (z(u_l^*))^2)^{1/2}} + K_1 \right) \Delta u_l \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{L_1}{p^2} \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \left( \frac{1}{(1 - (z(u_l^*))^2)^{3/4}} + \frac{K_1}{(1 - (z(u_l^*))^2)^{1/4}} \right) \Delta u_l \right)^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{L_1}{p^2} \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_t^T \frac{ds}{(1 - (z(s))^2)^{3/4}} + K_1 \int_t^T \frac{ds}{(1 - (z(s))^2)^{1/4}} \right) \right)^2 = \\
 &= \frac{L_1}{p^2} \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \frac{ds}{(1 - (z(s))^2)^{3/4}} + K_1 \int_t^T \frac{ds}{(1 - (z(s))^2)^{1/4}} \right)^2 = \\
 &= \frac{L_1(T-t)^2}{4p^2} \sum_{j_3=0}^p \left( \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{3/4}} + K_1 \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/4}} \right)^2 \leq \\
 &\leq \frac{L_2}{p^2} p = \frac{L_2}{p} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty,
 \end{aligned} \tag{5.241}$$

где постоянные  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  не зависят от  $p$  и мы использовали неравенство

$$\sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \leq \int_p^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p}$$

и оценку (5.146) в (5.241). Соотношение (5.217) доказано. Теорема 5.5\* доказана для случая полиномов Лежандра.

Перейдем теперь к рассмотрению доказательства теоремы 5.5\* для случая тригонометрических функций. Рассмотрим неравенство (5.68):

$$\left| \int_t^s \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \psi_2(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 \right| \leq \frac{K_1}{p}, \tag{5.242}$$

где постоянная  $K_1$  не зависит от  $p$ , а  $s$  — фиксировано.

Аналогично мы получаем:

$$\left| \int_{s_2}^T \sum_{j_3=p+1}^{\infty} \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) ds ds_1 \right| \leq \frac{K_1}{p}, \tag{5.243}$$

где постоянная  $K_1$  не зависит от  $p$ , а  $s_2$  — фиксировано.

Используя (5.242) и (5.221) получим:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^p \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \\
 &= \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \psi_2(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds \right)^2 \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq K \sum_{j_3=0}^p \left( \int_t^T \left| \int_t^s \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \psi_2(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 \right| ds \right)^2 = \\
 &= K \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int_t^{u_l^*} \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \psi_2(s_1) \phi_{j_1}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 \right| \Delta u_l \right)^2 \leq \\
 &\leq K \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{K_1}{p} \Delta u_l \right)^2 \leq \frac{K_2}{p^2} \sum_{j_3=0}^p (T-t)^2 \leq \frac{L}{p} \rightarrow 0 \quad (5.244)
 \end{aligned}$$

при  $p \rightarrow \infty$ , где постоянные  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $L$  не зависят от  $p$ ;  $t = u_0 < u_1 < \dots < u_N = T$ ;  $\Delta u_l = u_{l+1} - u_l$ ;  $u_l^* \in [u_l, u_{l+1}]$ ;  $\max_{0 \leq l \leq N-1} \Delta u_l \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ ;  $l = 0, 1, \dots, N-1$ .

Аналогично, используя (5.243) и (5.229), получим:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^* \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} = \\
 &= \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^T \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) \int_{s_2}^T \sum_{j_3=p+1}^{\infty} \psi_2(s_1) \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) ds ds_1 ds_2 \right)^2 \leq \frac{L}{p} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

при  $p \rightarrow \infty$ , где постоянная  $L$  не зависит от  $p$ .

Более того, из (5.212) и (5.213) мы получаем:

$$\left| \int_t^x \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds \int_x^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds \right| < \frac{K}{j_1^2} \quad (j_1 \neq 0), \quad (5.245)$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $j_1$ .

Используя (5.236) и (5.245) имеем:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \right)^2 \right\} = \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_2(u_l^*) \phi_{j_3}(u_l^*) \times \right. \\
 &\quad \times \left. \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_{u_l^*}^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds \int_t^{u_l^*} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta \Delta u_l \right)^2 \leq \\
 &\leq K_1 \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \left| \int_{u_l^*}^T \psi_3(s) \phi_{j_1}(s) ds \int_t^{u_l^*} \psi_1(\theta) \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right| \Delta u_l \right)^2 \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq K_2 \sum_{j_3=0}^p \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \Delta u_l \right)^2 \leq \frac{K_2}{p^2} \sum_{j_3=0}^p (T-t)^2 \leq \frac{L}{p} \rightarrow 0$$

при  $p \rightarrow \infty$ , где постоянные  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $L$  не зависят от  $p$ ; другие обозначения см. в (5.244).

Теорема 5.5\* доказана для тригонометрического случая. Теорема 5.5\* доказана.  $\square$

## 5.8 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 3, основанное на теореме 5.1. Тригонометрический случай

В данном разделе докажем следующую теорему.

**Теорема 5.6.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда для повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности

$$\int_t^{*T} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}$$

$(i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m)$  справедливо следующее сходящееся в среднеквадратическом смысле разложение

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} &= \underset{p_1, p_2, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \end{aligned} \quad (5.246)$$

где

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds.$$

**Доказательство.** Если мы докажем с в. 1 следующие формулы:

$$\underset{p_1, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)}, \quad (5.247)$$

$$\underset{p_1, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int_t^T d \mathbf{f}_s^{(i_1)} d\tau, \quad (5.248)$$

$$\underset{p_1, p_3 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0, \quad (5.249)$$

то по теореме 5.1 и стандартным соотношениям между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито мы придем к (5.246).

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} &= \frac{(T-t)^{3/2}}{6} + \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{0,2j_1,2j_1} \zeta_0^{(i_3)} + \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{0,2j_1-1,2j_1-1} \zeta_0^{(i_3)} \\ &+ \sum_{j_3=1}^{p_1} C_{2j_3,0,0} \zeta_{2j_3}^{(i_3)} + \sum_{j_3=1}^{p_3} \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{2j_3,2j_1,2j_1} \zeta_{2j_3}^{(i_3)} + \\ &+ \sum_{j_3=1}^{p_3} \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{2j_3,2j_1-1,2j_1-1} \zeta_{2j_3}^{(i_3)} + \sum_{j_3=1}^{p_3} C_{2j_3-1,0,0} \zeta_{2j_3-1}^{(i_3)} + \\ &+ \sum_{j_3=1}^{p_3} \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{2j_3-1,2j_1,2j_1} \zeta_{2j_3-1}^{(i_3)} + \sum_{j_3=1}^{p_3} \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{2j_3-1,2j_1-1,2j_1-1} \zeta_{2j_3-1}^{(i_3)}, \end{aligned} \quad (5.250)$$

где суммирование обрывается при  $2j_1, 2j_1 - 1 > p_1$  или  $2j_3, 2j_3 - 1 > p_3$  и

$$C_{0,2l,2l} = \frac{(T-t)^{3/2}}{8\pi^2 l^2}, \quad C_{0,2l-1,2l-1} = \frac{3(T-t)^{3/2}}{8\pi^2 l^2}, \quad C_{2l,0,0} = \frac{\sqrt{2}(T-t)^{3/2}}{4\pi^2 l^2}, \quad (5.251)$$

$$C_{2r-1,2l,2l} = 0, \quad C_{2l-1,0,0} = -\frac{\sqrt{2}(T-t)^{3/2}}{4\pi l}, \quad C_{2r-1,2l-1,2l-1} = 0, \quad (5.252)$$

$$C_{2r,2l-1,2l-1} = \sqrt{2}(T-t)^{3/2} \begin{cases} 1/(16\pi^2 l^2), & r = 2l \\ -1/(4\pi^2 l^2), & r = l \\ 0, & r \neq l, r \neq 2l \end{cases}, \quad (5.253)$$

$$C_{2r,2l,2l} = \sqrt{2}(T-t)^{3/2} \begin{cases} -1/(16\pi^2 l^2), & r = 2l \\ 0, & r \neq 2l \end{cases}. \quad (5.254)$$

После подстановки (5.251) – (5.254) в (5.250) получим:

$$\sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = (T-t)^{3/2} \left( \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{j_1=1}^{p_1} \frac{1}{j_1^2} \right) \zeta_0^{(i_3)} - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sum_{j_3=1}^{p_3} \frac{1}{j_3} \zeta_{2j_3-1}^{(i_3)} \right). \quad (5.255)$$

По теореме 5.1 для системы тригонометрических функций находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^s ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)} &= \frac{1}{2} \int_t^T (s-t) d\mathbf{f}_s^{(i_3)} = \\ &= \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_3)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \right). \end{aligned} \quad (5.256)$$

Из (5.255) и (5.256) следует

$$\begin{aligned} \lim_{p_1, p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^s ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)} \right)^2 \right\} &= \\ = \lim_{p_1, p_3 \rightarrow \infty} (T-t)^3 &\left( \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{j_1=1}^{p_1} \frac{1}{j_1^2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{j_3=1}^{p_3} \frac{1}{j_3^2} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (5.247) верно для случая тригонометрической системы функций. Докажем (5.248). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} &= \frac{(T-t)^{3/2}}{6} + \sum_{j_3=1}^{p_3} C_{2j_3, 2j_3, 0} \zeta_0^{(i_1)} + \sum_{j_3=1}^{p_3} C_{2j_3-1, 2j_3-1, 0} \zeta_0^{(i_1)} \\ &+ \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_3=1}^{p_3} C_{2j_3, 2j_3, 2j_1-1} \zeta_{2j_1-1}^{(i_1)} + \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_3=1}^{p_3} C_{2j_3-1, 2j_3-1, 2j_1-1} \zeta_{2j_1-1}^{(i_1)} + \\ &+ \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{0, 0, 2j_1-1} \zeta_{2j_1-1}^{(i_1)} + \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_3=1}^{p_3} C_{2j_3, 2j_3, 2j_1} \zeta_{2j_1}^{(i_1)} + \\ &+ \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_3=1}^{p_3} C_{2j_3-1, 2j_3-1, 2j_1} \zeta_{2j_1}^{(i_1)} + \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{0, 0, 2j_1} \zeta_{2j_1}^{(i_1)}, \end{aligned} \quad (5.257)$$

где суммирование обрывается при  $2j_3, 2j_3 - 1 > p_3$  или  $2j_1, 2j_1 - 1 > p_1$  и

$$C_{2l, 2l, 0} = \frac{(T-t)^{3/2}}{8\pi^2 l^2}, C_{2l-1, 2l-1, 0} = \frac{3(T-t)^{3/2}}{8\pi^2 l^2}, C_{0, 0, 2r} = \frac{\sqrt{2}(T-t)^{3/2}}{4\pi^2 r^2}, \quad (5.258)$$

$$C_{2l-1,2l-1,2r-1} = 0, C_{0,0,2r-1} = \frac{\sqrt{2}(T-t)^{3/2}}{4\pi r}, C_{2l,2l,2r-1} = 0, \quad (5.259)$$

$$C_{2l-1,2l-1,2r} = \sqrt{2}(T-t)^{3/2} \begin{cases} -1/(16\pi^2 l^2), & r = 2l \\ 1/(4\pi^2 l^2), & r = l \\ 0, & r \neq l, r \neq 2l \end{cases}, \quad (5.260)$$

$$C_{2l,2l,2r} = \sqrt{2}(T-t)^{3/2} \begin{cases} -1/(16\pi^2 l^2), & r = 2l \\ 0, & r \neq 2l \end{cases}. \quad (5.261)$$

После подстановки (5.258) – (5.261) в (5.257) получим:

$$\sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = (T-t)^{3/2} \left( \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{j_3=1}^{p_3} \frac{1}{j_3^2} \right) \zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sum_{j_1=1}^{p_1} \frac{1}{j_1} \zeta_{2j_1-1}^{(i_1)} \right). \quad (5.262)$$

Используя формулу Ито, теорему 5.1 и систему тригонометрических функций получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^s d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds &= \frac{1}{2} \left( (T-t) \int_t^T d\mathbf{f}_s^{(i_1)} + \int_t^T (t-s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right). \end{aligned} \quad (5.263)$$

Из (5.262) и (5.263) следует

$$\begin{aligned} \lim_{p_1, p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^s d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds \right)^2 \right\} &= \\ = \lim_{p_1, p_3 \rightarrow \infty} (T-t)^3 &\left( \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{j_3=1}^{p_3} \frac{1}{j_3^2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{j_1=1}^{p_1} \frac{1}{j_1^2} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом мы доказали (5.248) для случая системы тригонометрических функций.

Докажем соотношение (5.249).

Поскольку  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv 1$ , то верно следующее соотношение для коэффициентов Фурье:

$$C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1} + C_{j_3 j_1 j_1} = \frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3},$$

а тогда с в. 1

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3} - C_{j_1 j_1 j_3} - C_{j_3 j_1 j_1} \right) \zeta_{j_3}^{(i_2)}. \quad (5.264)$$

Принимая во внимание (5.247) и (5.248) с в. 1 запишем

$$\begin{aligned} \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} &= \frac{1}{2} C_0^3 \zeta_0^{(i_2)} - \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_1 j_3} \zeta_{j_3}^{(i_2)} - \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \\ &= \frac{1}{2} (T-t)^{3/2} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left[ \zeta_0^{(i_2)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left[ \zeta_0^{(i_2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Из (5.247) – (5.249) и теоремы 5.1 получаем соотношение (5.246). Теорема 5.6 доказана.  $\square$ .

Разложение (5.246) может быть получено прямым вычислением с использованием теоремы 5.1:

$$\begin{aligned} \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_3)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_1)} - \\ &\quad - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \left( -\frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left[ \zeta_0^{(i_3)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (T-t)^{3/2} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\pi^2} (T-t)^{3/2} \left( \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6} \right) \zeta_0^{(i_3)} \right) - \\ &\quad - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \left( \frac{1}{4} (T-t)^{3/2} \left[ \zeta_0^{(i_1)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi^2} (T-t)^{3/2} \left( \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6} \right) \zeta_0^{(i_1)} \right) + \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \frac{1}{\pi^2} (T-t)^{3/2} \left( \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6} \right) \zeta_0^{(i_2)}, \quad (5.265) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_3)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_1)} &= (T-t)^{3/2} \left( \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \right\} + \right. \\
 &+ \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{\infty} \left[ \frac{1}{r^2 - l^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_3)} + \right. \right. \\
 &+ \frac{r}{l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \frac{l}{r} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \left. \right\} - \frac{1}{rl} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \left. \right] \\
 &+ \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \right. \right. \\
 &- \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \left. \right\} \\
 &+ \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 6\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
 &\left. + 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} - 2\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \left\{ \sum_{r,m=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{rm} \left[ -\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \right. \right. \right. \\
 &+ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \left. \right] + \\
 &+ \frac{1}{m(r+m)} \left[ -\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
 &\left. - \zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(m+r)}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \\
 &+ \sum_{m=1, l=m+1}^{\infty} \left[ \frac{1}{m(l-m)} \left[ \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \right. \\
 &- \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \left. \right] + \\
 &+ \frac{1}{l(l-m)} \left[ -\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} - \right. \\
 &\left. - \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \right] \left. \right] \} \}.
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

и по теореме 5.1:

$$\int_t^T (t - \tau) d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = -\frac{1}{2}(T - t)^{3/2} \left[ \zeta_0^{(i)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i)} \right],$$

то из (5.265) с в. 1 мы получаем требуемое разложение

$$\begin{aligned} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_3)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_1)} &= \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} + \\ + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{\tau} d\mathbf{f}_s^{(i_3)} d\tau &+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_1)} = \\ &= \int_t^{*T} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)}. \end{aligned}$$

## 5.9 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 4, основанное на теореме 5.1. Полиномиальный и тригонометрический случаи

В данном разделе обобщим рассмотренный ранее подход к разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича на случай интегралов 4 кратности.

**Теорема 5.7.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда, для повторного стохастического интеграла Стратоновича 4 кратности

$$I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)T, t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} = \int_t^{*T} \int_t^{*t_4} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)}$$

$(i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, \dots, m)$  справедливо следующее сходящееся в среднеквадратическом смысле разложение

$$I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \quad (5.266)$$

где

$$\begin{aligned} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} &= \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_2}(s_2) \int_t^{s_2} \phi_{j_1}(s_3) ds_3 ds_2 ds_1 ds; \\ \zeta_j^{(i)} &= \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \end{aligned}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины для различных  $i$  или  $j$  (при  $i \neq 0$ );  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  — независимые стандартные винеровские процессы ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ;  $\lambda_l = 0$  если  $i_l = 0$  и  $\lambda_l = 1$  если  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, 2, 3, 4$ .

Доказательство. Из (5.30) следует:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} &= I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} + \\ + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} A_1^{(i_3 i_4)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} A_2^{(i_2 i_4)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} A_3^{(i_2 i_3)} + \\ + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} A_4^{(i_1 i_4)} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} A_5^{(i_1 i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} A_6^{(i_1 i_2)} - \\ - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} B_1 - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} B_2 - \\ - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} B_3, \end{aligned} \quad (5.267)$$

где

$$\begin{aligned} I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} &= \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)}, \\ A_1^{(i_3 i_4)} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \\ A_2^{(i_2 i_4)} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_3} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \\ A_3^{(i_2 i_3)} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_4} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \\ A_4^{(i_1 i_4)} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \end{aligned}$$

$$A_5^{(i_1 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_4 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$A_6^{(i_1 i_2)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_3 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

$$B_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_4=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_1}, \quad B_2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p C_{j_3 j_4 j_3 j_4},$$

$$B_3 = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p C_{j_4 j_3 j_3 j_4}.$$

Используя замену порядка интегрирования в интегралах Римана, теорему 5.1 при  $k = 2$  (см. (5.28)), соотношение (5.50), равенство Парсеваля и формулу Ито мы получаем:

$$\begin{aligned} A_1^{(i_3 i_4)} &= \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \left( \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right)^2 ds_1 ds \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right)^2 ds_1 ds \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \left( (s_1 - t) - \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \left( \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right)^2 \right) ds_1 ds \times \\ &\quad \times \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) (s_1 - t) ds_1 ds \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \Delta_1^{(i_3 i_4)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^s (s_1 - t) d\mathbf{w}_{s_1}^{(i_3)} d\mathbf{w}_s^{(i_4)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) (s_1 - t) ds_1 ds - \Delta_1^{(i_3 i_4)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^s \int_t^{s_1} ds_2 d\mathbf{w}_{s_1}^{(i_3)} d\mathbf{w}_s^{(i_4)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T (s_1 - t) ds_1 - \Delta_1^{(i_3 i_4)} \text{ с. в. 1, } \quad (5.268) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1^{(i_3 i_4)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_4=0}^p a_{j_4 j_3}^p \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)};$$

$$a_{j_4 j_3}^p = \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \left( \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right)^2 ds_1 ds.$$

Рассмотрим  $A_2^{(i_2 i_4)}$ :

$$A_2^{(i_2 i_4)} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p \left( \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \left( \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) ds_1 ds - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \left( \int_t^{s_1} \phi_{j_3}(s_2) ds_2 \right)^2 ds_1 ds -$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_3) \left( \int_{s_3}^s \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_3 ds \right) \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_2=0}^p \left( \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s)(s-t) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) ds_1 ds - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1)(s_1-t) ds_1 ds -$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_3)(s-t+t-s_3) ds_3 ds \right) \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$

$$-\Delta_2^{(i_2 i_4)} + \Delta_1^{(i_2 i_4)} + \Delta_3^{(i_2 i_4)} =$$

$$= -\Delta_2^{(i_2 i_4)} + \Delta_1^{(i_2 i_4)} + \Delta_3^{(i_2 i_4)} \text{ с в. 1,} \quad (5.269)$$

где

$$\Delta_2^{(i_2 i_4)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_2=0}^p b_{j_4 j_2}^p \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)};$$

$$b_{j_4 j_2}^p = \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \sum_{j_3=p+1}^{\infty} \left( \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) ds_1 ds;$$

$$\Delta_3^{(i_2 i_4)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_2=0}^p c_{j_4 j_2}^p \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)};$$

$$c_{j_4 j_2}^p = \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_3) \sum_{j_3=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_3}^s \phi_{j_3}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_3 ds.$$

Рассмотрим  $A_5^{(i_1 i_3)}$ :

$$A_5^{(i_1 i_3)} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_4}(s_2) \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \phi_{j_4}(s) ds ds_1 ds_2 ds_3 \times$$

$$\times \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_4}(s) \int_{s_3}^s \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_3}^{s_1} \phi_{j_4}(s_2) ds_2 ds_1 ds ds_3 \times$$

$$\times \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p \left( \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \left( \int_{s_3}^T \phi_{j_4}(s) ds \right)^2 \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s) ds ds_3 - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s) \left( \int_{s_3}^s \phi_{j_4}(s_1) ds_1 \right)^2 ds ds_3 -$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s_2) \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_4}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2 ds_3 \left. \right) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_1=0}^p \left( \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) (T - s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s) ds ds_3 - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s) (s - s_3) ds ds_3 -$$

$$- \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s_2) (T - s_2) ds_2 ds_3 \left. \right) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} -$$

$$- \Delta_4^{(i_1 i_3)} + \Delta_5^{(i_1 i_3)} + \Delta_6^{(i_1 i_3)} =$$

$$= -\Delta_4^{(i_1 i_3)} + \Delta_5^{(i_1 i_3)} + \Delta_6^{(i_1 i_3)} \text{ с в. 1,} \quad (5.270)$$

где

$$\Delta_4^{(i_1 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_1=0}^p d_{j_3 j_1}^p \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)};$$

$$d_{j_3 j_1}^p = \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \sum_{j_4=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_3}^T \phi_{j_4}(s) ds \right)^2 \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s) ds ds_3;$$

$$\Delta_5^{(i_1 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_1=0}^p e_{j_3 j_1}^p \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)};$$

$$e_{j_3 j_1}^p = \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s) \sum_{j_4=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_3}^s \phi_{j_4}(s_1) ds_1 \right)^2 ds ds_3;$$

$$\Delta_6^{(i_1 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_1=0}^p f_{j_3 j_1}^p \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)};$$

$$\begin{aligned} f_{j_3 j_1}^p &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s_2) \sum_{j_4=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_4}(s_1) ds_1 \right)^2 ds_2 ds_3 = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s_2) \sum_{j_4=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_4}(s_1) ds_1 \right)^2 \int_t^{s_2} \phi_{j_1}(s_3) ds_3 ds_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $A_3^{(i_2 i_3)}$ :

$$\begin{aligned} A_3^{(i_2 i_3)} + A_5^{(i_2 i_3)} &= \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p (C_{j_4 j_3 j_2 j_4} + C_{j_4 j_3 j_4 j_2}) \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_2}(s_2) \int_t^{s_1} \phi_{j_4}(s_3) ds_3 ds_2 ds_1 ds \times \\ &\quad \times \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_2}(s_2) \int_t^{s_1} \phi_{j_4}(s_3) ds_3 ds_2 \int_{s_1}^T \phi_{j_4}(s) ds ds_1 \times \\ &\quad \times \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p \left( \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_2}(s_2) \int_t^T \phi_{j_4}(s_3) ds_3 \int_{s_1}^T \phi_{j_4}(s) ds ds_2 ds_1 - \right. \\
 &\quad \left. - \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_2}(s_2) \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_4}(s) ds \right)^2 ds_2 ds_1 \right) \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_2=0}^p \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_2}(s_2) \left( (T - s_1) - \sum_{j_4=0}^p \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_4}(s_3) ds_3 \right)^2 \right) \times \\
 &\quad \times ds_2 ds_1 \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = 2\Delta_6^{(i_2 i_3)} \text{ c. в. 1.}
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$A_3^{(i_2 i_3)} = 2\Delta_6^{(i_2 i_3)} - A_5^{(i_2 i_3)} = \Delta_4^{(i_2 i_3)} - \Delta_5^{(i_2 i_3)} + \Delta_6^{(i_2 i_3)} \text{ c. в. 1.} \quad (5.271)$$

Рассмотрим  $A_4^{(i_1 i_4)}$ :

$$\begin{aligned}
 &A_4^{(i_1 i_4)} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^s \phi_{j_3}(s_2) \int_{s_2}^s \phi_{j_3}(s_1) ds_1 ds_2 ds_3 ds \times \\
 &\quad \times \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_1=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_1}(s_3) \sum_{j_3=0}^p \left( \int_{s_3}^s \phi_{j_3}(s_2) ds_2 \right)^2 ds_3 ds \times \\
 &\quad \times \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_1=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_1}(s_3) (s - s_3) ds_3 ds \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \Delta_3^{(i_1 i_4)} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^s (s - s_3) d\mathbf{w}_{s_3}^{(i_1)} d\mathbf{w}_s^{(i_4)} + \\
 &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4=0}^p \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_4}(s_3) (s - s_3) ds_3 ds - \Delta_3^{(i_1 i_4)} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{s_2} \int_t^{s_1} d\mathbf{w}_s^{(i_1)} ds_1 d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_4)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \left( \sum_{j_4=0}^{\infty} \int_t^T (s-t) \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_4}(s_3) ds_3 ds - \right. \\
 & \left. - \sum_{j_4=0}^{\infty} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s (s_3-t) \phi_{j_4}(s_3) ds_3 ds \right) - \Delta_3^{(i_1 i_4)} = \\
 & = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{s_2} \int_t^{s_1} d\mathbf{w}_s^{(i_1)} ds_1 d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_4)} - \Delta_3^{(i_1 i_4)} \text{ в. 1.} \quad (5.272)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим  $A_6^{(i_1 i_2)}$ :

$$\begin{aligned}
 A_6^{(i_1 i_2)} & = \\
 & = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_2}(s_2) \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1) \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) ds ds_1 ds_2 ds_3 \times \\
 & \quad \times \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} = \\
 & = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_2}(s_2) \sum_{j_3=0}^p \left( \int_{s_2}^T \phi_{j_3}(s) ds \right)^2 ds_2 ds_3 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \\
 & = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_2}(s_2) (T-s_2) ds_2 ds_3 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \Delta_6^{(i_1 i_2)} \\
 & = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_2}(s_2) (T-s_2) \int_t^{s_2} \phi_{j_1}(s_3) ds_3 ds_2 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \Delta_6^{(i_1 i_2)} \\
 & = \frac{1}{2} \int_t^T (T-s_2) \int_t^{s_2} d\mathbf{w}_{s_3}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_2)} + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \sum_{j_2=0}^{\infty} \int_t^T \phi_{j_2}(s_2) (T-s_2) \int_t^{s_2} \phi_{j_2}(s_3) ds_3 ds_2 - \Delta_6^{(i_1 i_2)} = \\
 & = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{s_1} \int_t^{s_2} d\mathbf{w}_s^{(i_1)} d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_2)} ds_1 + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T (T-s_2) ds_2 - \Delta_6^{(i_1 i_2)} \text{ в. 1.} \quad (5.273)
 \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению  $B_1, B_2, B_3$ :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_4=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_4}(s_1) \left( \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right)^2 ds_1 ds = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_4}(s_1)(s_1 - t) ds_1 ds - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4=0}^p a_{j_4 j_4}^p = \\
 &= \frac{1}{4} \int_t^T (s_1 - t) ds_1 - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4=0}^p a_{j_4 j_4}^p; \tag{5.274}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p \left( \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s_3) \left( \int_t^{s_3} \phi_{j_4}(s) ds \right)^2 \int_t^{s_3} \phi_{j_3}(s_1) ds_1 ds_3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_3}(s_2) \left( \int_t^{s_2} \phi_{j_4}(s_3) ds_3 \right)^2 ds_2 ds_1 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_3}(s) \left( \int_s^{s_1} \phi_{j_4}(s_2) ds_2 \right)^2 ds ds_1 \right) = \\
 &= \sum_{j_3=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s_3)(s_3 - t) \int_t^{s_3} \phi_{j_3}(s_1) ds_1 ds_3 - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p b_{j_3 j_3}^p - \\
 &\quad - \sum_{j_3=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} (s_2 - t) \phi_{j_3}(s_2) ds_2 ds_1 + \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p - \\
 &\quad - \sum_{j_3=0}^p \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_3}(s)(s_1 - t + t - s) ds ds_1 + \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p + \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p b_{j_3 j_3}^p; \tag{5.275}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 + B_3 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p (C_{j_3 j_4 j_3 j_4} + C_{j_3 j_4 j_4 j_3}) = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_4}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_4}(s_2) \int_t^{s_1} \phi_{j_3}(s_3) ds_3 ds_2 ds_1 ds =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_4}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_4}(s_2) \int_t^{s_1} \phi_{j_3}(s_3) ds_3 ds_2 \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) ds ds_1 = \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_3=0}^p \left( \int_t^T \phi_{j_4}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_4}(s_3) \int_t^T \phi_{j_3}(s_2) ds_2 \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) ds ds_3 ds_1 - \right. \\
&\quad \left. - \int_t^T \phi_{j_4}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_4}(s_3) \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_3}(s) ds \right)^2 ds_3 ds_1 \right) = \\
&= \sum_{j_4=0}^{\infty} \int_t^T \phi_{j_4}(s_1) (T - s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_4}(s_3) ds_3 ds_1 - \\
&- \sum_{j_4=0}^{\infty} \int_t^T \phi_{j_4}(s_1) (T - s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_4}(s_3) ds_3 ds_1 + 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4=0}^p f_{j_4 j_4}^p = \\
&= 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4=0}^p f_{j_4 j_4}^p.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$B_3 = 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p f_{j_3 j_3}^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p + \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p b_{j_3 j_3}^p. \quad (5.276)$$

После подстановки соотношений (5.268)–(5.276) в (5.267) мы получаем:

$$\begin{aligned}
&\text{l.i.m. } \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} = \\
&= I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) T, t}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^s \int_t^{s_1} ds_2 d\mathbf{w}_{s_1}^{(i_3)} d\mathbf{w}_s^{(i_4)} + \\
&+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{s_2} \int_t^{s_1} d\mathbf{w}_s^{(i_1)} ds_1 d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_4)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{s_1} \int_t^{s_2} d\mathbf{w}_s^{(i_1)} d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_2)} ds_1 + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{s_1} ds_2 ds_1 + R = \\
&= I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) T, t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} + R \text{ с в. 1,} \quad (5.277)
\end{aligned}$$

где

$$I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) T, t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} = \int_t^{*T} \int_t^{*t_4} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)}$$

$$(i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, \dots, m),$$

$$\begin{aligned}
R = & -\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \Delta_1^{(i_3 i_4)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \left( -\Delta_2^{(i_2 i_4)} + \Delta_1^{(i_2 i_4)} + \Delta_3^{(i_2 i_4)} \right) + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \left( \Delta_4^{(i_2 i_3)} - \Delta_5^{(i_2 i_3)} + \Delta_6^{(i_2 i_3)} \right) - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \Delta_3^{(i_1 i_4)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \left( -\Delta_4^{(i_1 i_3)} + \Delta_5^{(i_1 i_3)} + \Delta_6^{(i_1 i_3)} \right) - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \Delta_6^{(i_1 i_2)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p - \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \left( \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p + \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p b_{j_3 j_3}^p \right) - \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \times \\
& \times \left( 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p f_{j_3 j_3}^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p + \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p b_{j_3 j_3}^p \right). \quad (5.278)
\end{aligned}$$

Из (5.277) и (5.278) следует, что теорема 5.7 будет доказана, если

$$\Delta_k^{(ij)} = 0; \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p x_{j_3 j_3}^p = 0, \quad (5.279)$$

где  $k = 1, 2, \dots, 6$ ;  $i, j = 0, 1, \dots, m$ ;  $x = a, b, c, f$ .

Рассмотрим случай полиномов Лежандра. Докажем, что  $\Delta_1^{(i_3 i_4)} = 0$  с в.

1. Из (5.361) следует:

$$\begin{aligned}
M \left\{ \left( \sum_{j_3, j_4=0}^p a_{j_4 j_3}^p \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right)^2 \right\} &= \sum_{j'_3=0}^p \sum_{j_3=0}^{j'_3-1} \left( 2a_{j_3 j_3}^p a_{j'_3 j'_3}^p + \right. \\
&\quad \left. + \left( a_{j_3 j'_3}^p \right)^2 + 2a_{j_3 j'_3}^p a_{j'_3 j_3}^p + \left( a_{j'_3 j_3}^p \right)^2 \right) + 3 \sum_{j'_3=0}^p \left( a_{j'_3 j'_3}^p \right)^2 = \\
&= \left( \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p \right)^2 + \sum_{j'_3=0}^p \sum_{j_3=0}^{j'_3-1} \left( a_{j_3 j'_3}^p + a_{j'_3 j_3}^p \right)^2 + 2 \sum_{j'_3=0}^p \left( a_{j'_3 j'_3}^p \right)^2 \quad (5.280)
\end{aligned}$$

при  $i_3 = i_4 \neq 0$ ;

$$\begin{aligned}
M \left\{ \left( \sum_{j_3, j_4=0}^p a_{j_4 j_3}^p \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right)^2 \right\} &= \\
&= \sum_{j_3, j_4=0}^p \left( a_{j_4 j_3}^p \right)^2 \quad (5.281)
\end{aligned}$$

при  $i_3 \neq i_4$ ;  $i_3 \neq 0$ ;  $i_4 \neq 0$  и

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_3, j_4=0}^p a_{j_4 j_3}^p \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right)^2 \right\} = \begin{cases} (T-t) \sum_{j_4=0}^p (a_{j_4,0}^p)^2 \text{ при } i_3 = 0, i_4 \neq 0 \\ (T-t) \sum_{j_3=0}^p (a_{0,j_3}^p)^2 \text{ при } i_4 = 0, i_3 \neq 0 \\ (T-t)^2 (a_{00}^p)^2 \text{ при } i_3 = i_4 = 0 \end{cases} \quad (5.282)$$

Рассмотрим 1 случай ( $i_3 = i_4 \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} a_{j_4 j_3}^p &= \frac{(T-t)^2 \sqrt{(2j_4+1)(2j_3+1)}}{32} \times \\ &\times \int_{-1}^1 P_{j_4}(y) \int_{-1}^y P_{j_3}(y_1) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} (2j_1+1) \left( \int_{-1}^{y_1} P_{j_1}(y_2) dy_2 \right)^2 dy_1 dy = \\ &= \frac{(T-t)^2 \sqrt{(2j_4+1)(2j_3+1)}}{32} \times \\ &\times \int_{-1}^1 P_{j_3}(y_1) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{2j_1+1} (P_{j_1+1}(y_1) - P_{j_1-1}(y_1))^2 \int_{y_1}^1 P_{j_4}(y) dy dy_1 = \\ &= \frac{(T-t)^2 \sqrt{2j_3+1}}{32 \sqrt{2j_4+1}} \int_{-1}^1 P_{j_3}(y_1) (P_{j_4-1}(y_1) - P_{j_4+1}(y_1)) \times \\ &\times \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{2j_1+1} (P_{j_1+1}(y_1) - P_{j_1-1}(y_1))^2 dy_1 \end{aligned}$$

если  $j_4 \neq 0$  и

$$\begin{aligned} a_{j_4 j_3}^p &= \frac{(T-t)^2 \sqrt{2j_3+1}}{32} \times \\ &\times \int_{-1}^1 P_{j_3}(y_1) (1-y_1) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{2j_1+1} (P_{j_1+1}(y_1) - P_{j_1-1}(y_1))^2 dy_1 \end{aligned}$$

если  $j_4 = 0$ .

Из (5.61) и оценки

$$|P_{j_4-1}(y) - P_{j_4+1}(y)| \leq 2, \quad y \in [-1, 1] \quad (|P_j(y)| \leq 1, \quad y \in [-1, 1])$$

получаем:

$$|a_{j_4 j_3}^p| \leq \frac{C_0}{\sqrt{j_4}} \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{3/4}} \leq \frac{C_1}{p \sqrt{j_4}} \quad (j_4 \neq 0), \quad (5.283)$$

$$|a_{0,j_3}^p| \leq C_0 \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{3/4}} \leq \frac{C_1}{p}, \quad (5.284)$$

$$|a_{00}^p| \leq C_0 \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} \leq \frac{C_1}{p}, \quad (5.285)$$

где  $C_0, C_1$  — постоянные, которые не зависят от  $p$ .

Принимая во внимание (5.280) – (5.285) запишем:

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( \sum_{j_3, j_4=0}^p a_{j_4 j_3}^p \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right)^2 \right\} &= \left( a_{00}^p + \sum_{j_3=1}^p a_{j_3 j_3}^p \right)^2 + \\ &+ \sum_{j'_3=1}^p \left( a_{0,j'_3}^p + a_{j'_3,0}^p \right)^2 + \sum_{j'_3=1}^p \sum_{j_3=1}^{j'_3-1} \left( a_{j_3 j'_3}^p + a_{j'_3 j_3}^p \right)^2 + \\ &+ 2 \left( \sum_{j'_3=1}^p \left( a_{j'_3 j'_3}^p \right)^2 + \left( a_{00}^p \right)^2 \right) \leq K_0 \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \sum_{j_3=1}^p \frac{1}{\sqrt{j_3}} \right)^2 + \frac{K_1}{p} + \\ &+ K_2 \sum_{j'_3=1}^p \sum_{j_3=1}^{j'_3-1} \frac{1}{p^2} \left( \frac{1}{\sqrt{j'_3}} + \frac{1}{\sqrt{j_3}} \right)^2 \leq \\ &\leq K_0 \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dx}{\sqrt{x}} \right)^2 + \frac{K_1}{p} + \frac{K_3}{p} \sum_{j_3=1}^p \frac{1}{j_3} \leq \\ &\leq K_0 \left( \frac{1}{p} + \frac{2}{\sqrt{p}} \right)^2 + \frac{K_1}{p} + \frac{K_3}{p} \left( 1 + \int_1^p \frac{dx}{x} \right) \leq \\ &\leq \frac{K_4}{p} + \frac{K_3 (\ln p + 1)}{p} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $p \rightarrow \infty$  ( $i_3 = i_4 \neq 0$ ).

Аналогичный результат для случаев (5.281), (5.282) также следует из оценок (5.283) – (5.285). Поэтому

$$\Delta_1^{(i_3 i_4)} = 0 \text{ с в. 1.} \quad (5.286)$$

Нетрудно видеть, что формулы

$$\Delta_2^{(i_2 i_4)} = 0, \Delta_4^{(i_1 i_3)} = 0, \Delta_6^{(i_1 i_3)} = 0 \text{ с. в. 1} \quad (5.287)$$

могут быть получены аналогично доказательству соотношения (5.286).

Более того, из оценок (5.283) – (5.285) мы получаем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p = 0. \quad (5.288)$$

Соотношения

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p b_{j_3 j_3}^p = 0 \text{ и } \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p f_{j_3 j_3}^p = 0$$

также могут быть доказаны аналогично (5.288).

Рассмотрим  $\Delta_3^{(i_2 i_4)}$ :

$$\Delta_3^{(i_2 i_4)} = \Delta_4^{(i_2 i_4)} + \Delta_6^{(i_2 i_4)} - \Delta_7^{(i_2 i_4)} = -\Delta_7^{(i_2 i_4)} \text{ с. в. 1}, \quad (5.289)$$

где

$$\Delta_7^{(i_2 i_4)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_2, j_4=0}^p g_{j_4 j_2}^p \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$\begin{aligned} g_{j_4 j_2}^p &= \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \int_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right) ds_1 ds = \\ &= \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds. \end{aligned} \quad (5.290)$$

Последний шаг в (5.290) следует из оценки:

$$|g_{j_4 j_2}^p| \leq K \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-y^2)^{1/2}} \int_{-1}^y \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} dx dy \leq \frac{K_1}{p}.$$

Заметим, что

$$g_{j_4 j_4}^p = \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds \right)^2, \quad (5.291)$$

$$g_{j_4 j_2}^p + g_{j_2 j_4}^p = \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds \int_t^T \phi_{j_2}(s) \int_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds \quad (5.292)$$

и

$$\begin{aligned}
 g_{j_4 j_2}^p &= \frac{(T-t)^2 \sqrt{(2j_4+1)(2j_2+1)}}{16} \times \\
 &\times \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{2j_1+1} \int_{-1}^1 P_{j_4}(y_1) (P_{j_1-1}(y_1) - P_{j_1+1}(y_1)) \times \\
 &\times \int_{-1}^{y_1} P_{j_2}(y) (P_{j_1-1}(y) - P_{j_1+1}(y)) dy dy_1; \quad j_4, j_2 \leq p.
 \end{aligned}$$

В силу ортонормированности полиномов Лежандра получаем:

$$\begin{aligned}
 g_{j_4 j_2}^p + g_{j_2 j_4}^p &= \frac{(T-t)^2 \sqrt{(2j_4+1)(2j_2+1)}}{16} \times \\
 &\times \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{2j_1+1} \int_{-1}^1 P_{j_4}(y_1) (P_{j_1-1}(y_1) - P_{j_1+1}(y_1)) dy_1 \times \\
 &\times \int_{-1}^{y_1} P_{j_2}(y) (P_{j_1-1}(y) - P_{j_1+1}(y)) dy = \\
 &= \frac{(T-t)^2(2p+1)}{16} \frac{1}{2p+3} \left( \int_{-1}^1 P_p^2(y_1) dy_1 \right)^2 \cdot \begin{cases} 1 \text{ при } j_2 = j_4 = p \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} = \\
 &= \frac{(T-t)^2}{4(2p+3)(2p+1)} \cdot \begin{cases} 1 \text{ при } j_2 = j_4 = p \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}; \quad (5.293)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{j_4 j_4}^p &= \frac{(T-t)^2(2j_4+1)}{16} \times \\
 &\times \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{2j_1+1} \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^1 P_{j_4}(y_1) (P_{j_1-1}(y_1) - P_{j_1+1}(y_1)) dy_1 \right)^2 = \\
 &= \frac{(T-t)^2(2p+1)}{32} \frac{1}{2p+3} \left( \int_{-1}^1 P_p^2(y_1) dy_1 \right)^2 \cdot \begin{cases} 1 \text{ при } j_4 = p \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} = \\
 &= \frac{(T-t)^2}{8(2p+3)(2p+1)} \cdot \begin{cases} 1 \text{ при } j_4 = p \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (5.294)
 \end{aligned}$$

Из (5.280), (5.293), (5.294) получим:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_2, j_4=0}^p g_{j_4 j_2}^p \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right)^2 \right\} &= \left( \sum_{j_3=0}^p g_{j_3 j_3}^p \right)^2 + \sum_{j'_3=0}^p \sum_{j_3=0}^{j'_3-1} \left( g_{j_3 j'_3}^p + g_{j'_3 j_3}^p \right)^2 + \\ &+ 2 \sum_{j'_3=0}^p \left( g_{j'_3 j'_3}^p \right)^2 \leq \left( \frac{(T-t)^2}{8(2p+3)(2p+1)} \right)^2 + 0 + \\ &+ 2 \left( \frac{(T-t)^2}{8(2p+3)(2p+1)} \right)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $p \rightarrow \infty$  ( $i_2 = i_4 \neq 0$ ).

Рассмотрим теперь случай  $i_2 \neq i_4$ ,  $i_2 \neq 0$ ,  $i_4 \neq 0$ .

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} g_{j_4 j_2}^p &= \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \int_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right) ds_1 ds = \\ &= \int_t^T \int_t^T K_p(s, s_1) \phi_{j_4}(s) \phi_{j_2}(s_1) ds_1 ds \end{aligned}$$

является коэффициентом Фурье двойного ряда Фурье–Лежандра функции

$$K_p(s, s_1) = \mathbf{1}_{\{s_1 < s\}} \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta. \quad (5.295)$$

Равенство Парсеваля в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_2=0}^{p_1} \left( g_{j_4 j_2}^p \right)^2 &= \int_t^T \int_t^T (K_p(s, s_1))^2 ds_1 ds = \\ &= \int_t^T \int_t^s \left( \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right)^2 ds_1 ds. \quad (5.296) \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \sqrt{2j_1 + 1} \sqrt{T - t} \int_{z(s_1)}^1 P_{j_1}(y) dy = \\ &= \frac{\sqrt{T - t}}{2\sqrt{2j_1 + 1}} (P_{j_1-1}(z(s_1)) - P_{j_1+1}(z(s_1))), \end{aligned}$$

где

$$z(s_1) = \left( s_1 - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t}.$$

Из (5.61) получим:

$$\left| \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right| \leq \frac{K}{j_1} \frac{1}{(1 - z^2(s_1))^{1/4}}, \quad (5.297)$$

где  $s_1 \in (t, T)$ .

Используя (5.297) имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j_1=p+1}^n \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right| \leq \\ & \leq \sum_{j_1=p+1}^n \left| \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right| \left| \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right| \leq \\ & \leq C \sum_{j_1=p+1}^n \frac{1}{j_1^2} \frac{1}{(1 - z^2(s))^{1/4}} \frac{1}{(1 - z^2(s_1))^{1/4}}, \end{aligned} \quad (5.298)$$

где  $s, s_1 \in (t, T)$ .

Осуществим предельный переход  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  в неравенстве (5.298):

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right| \leq \\ & \leq C \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \frac{1}{(1 - z^2(s))^{1/4}} \frac{1}{(1 - z^2(s_1))^{1/4}} \leq \\ & \leq C \int_p^{\infty} \frac{dx}{x^2} \frac{1}{(1 - z^2(s))^{1/4}} \frac{1}{(1 - z^2(s_1))^{1/4}} \leq \\ & \leq \frac{C}{p} \frac{1}{(1 - z^2(s))^{1/4}} \frac{1}{(1 - z^2(s_1))^{1/4}}, \end{aligned} \quad (5.299)$$

где  $s, s_1 \in (t, T)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right)^2 \leq \\ & \leq \frac{C^2}{p^2} \frac{1}{(1 - z^2(s))^{1/2}} \frac{1}{(1 - z^2(s_1))^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.300)$$

где  $s, s_1 \in (t, T)$ .

Из (5.299) следует:

$$\left| \sum_{j_1=0}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta - \sum_{j_1=0}^p \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right| \leq \frac{M}{p}$$

в области  $D_\varepsilon = \{(s, s_1) : s \in [t + \varepsilon, T - \varepsilon], s_1 \in [t + \varepsilon, s]\} \quad \forall \varepsilon > 0$ , где постоянная  $M$  не зависит от  $s, s_1$ .

Тогда мы имеем равномерную сходимость

$$\sum_{j_1=0}^p \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \rightarrow \sum_{j_1=0}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \quad (5.301)$$

на множестве  $D_\varepsilon$  при  $p \rightarrow \infty$ .

В силу (5.301) и непрерывности функций

$$\sum_{j_1=0}^p \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta$$

мы получим непрерывность предельной функции

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta$$

на множестве  $D_\varepsilon$ .

Используя этот факт и (5.300) получим:

$$\begin{aligned} & \int_t^T \int_s^T \left( \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right)^2 ds_1 ds = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{t+\varepsilon}^s \left( \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \int_s^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \int_{s_1}^T \phi_{j_1}(\theta) d\theta \right)^2 ds_1 ds \leq \\ & \leq \frac{C^2}{p^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{t+\varepsilon}^s \frac{ds_1}{(1 - z^2(s_1))^{1/2}} \frac{ds}{(1 - z^2(s))^{1/2}} = \\ & = \frac{C^2}{p^2} \int_t^T \int_s^T \frac{ds_1}{(1 - z^2(s_1))^{1/2}} \frac{ds}{(1 - z^2(s))^{1/2}} = \\ & = \frac{K}{p^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^y \frac{dy_1}{(1 - y_1^2)^{1/2}} \frac{dy}{(1 - y^2)^{1/2}} < \frac{K_1}{p^2}, \end{aligned} \quad (5.302)$$

где постоянная  $K_1$  не зависит от  $p$ .

Из (5.302) и (5.296) имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j_2, j_4=0}^p (g_{j_4 j_2}^p)^2 &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_2, j_4=0}^{p_1} (g_{j_4 j_2}^p)^2 = \sum_{j_2, j_4=0}^{\infty} (g_{j_4 j_2}^p)^2 \leq \\ &\leq \frac{K_1}{p^2} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.303)$$

при  $p \rightarrow \infty$ . Случай  $i_2 \neq i_4, i_2 \neq 0, i_4 \neq 0$  доказан.

Аналогичный результат для случаев

$$i_2 = 0, i_4 \neq 0;$$

$$i_4 = 0, i_2 \neq 0;$$

$$i_2 = 0, i_4 = 0$$

также может быть получен. Тогда  $\Delta_7^{(i_2 i_4)} = 0$  и  $\Delta_3^{(i_2 i_4)} = 0$  с в. 1.

Рассмотрим  $\Delta_5^{(i_1 i_3)}$ :

$$\Delta_5^{(i_1 i_3)} = \Delta_4^{(i_1 i_3)} + \Delta_6^{(i_1 i_3)} - \Delta_8^{(i_1 i_3)} \text{ с в. 1,}$$

где

$$\Delta_8^{(i_1 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_1=0}^p h_{j_3 j_1}^p \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$h_{j_3 j_1}^p = \int_t^T \phi_{j_1}(s_3) \int_{s_3}^T \phi_{j_3}(s) \sum_{j_4=p+1}^{\infty} \left( \int_{s_3}^T \phi_{j_4}(\theta) d\theta \int_s^T \phi_{j_4}(\theta) d\theta \right) ds ds_3.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям мы получим, что  $\Delta_8^{(i_1 i_3)} = 0$  с в. 1. Здесь мы используем функцию:

$$K_p(s, s_3) = \mathbf{1}_{\{s_3 < s\}} \sum_{j_4=p+1}^{\infty} \int_{s_3}^T \phi_{j_4}(\theta) d\theta \int_s^T \phi_{j_4}(\theta) d\theta$$

и соотношение

$$h_{j_3 j_1}^p = \int_t^T \int_t^T K_p(s, s_3) \phi_{j_1}(s_3) \phi_{j_3}(s) ds ds_3$$

для случая  $i_1 \neq i_3, i_1 \neq 0, i_3 \neq 0$ .

В случае  $i_1 = i_3 \neq 0$  мы используем (см. (5.291), (5.292)):

$$h_{j_1 j_1}^p = \sum_{j_4=p+1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s) \int_s^T \phi_{j_4}(s_1) ds_1 ds \right)^2,$$

$$h_{j_3 j_1}^p + h_{j_1 j_3}^p = \sum_{j_4=p+1}^{\infty} \int_t^T \phi_{j_1}(s) \int_s^T \phi_{j_4}(s_2) ds_2 ds \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_s^T \phi_{j_4}(s_2) ds_2 ds.$$

Рассмотрим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p.$$

Имеем:

$$c_{j_3 j_3}^p = f_{j_3 j_3}^p + d_{j_3 j_3}^p - g_{j_3 j_3}^p. \quad (5.304)$$

Мы доказали, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p f_{j_3 j_3}^p = 0.$$

Аналогично получим, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p d_{j_3 j_3}^p = 0.$$

Из (5.294) следует, что:

$$0 \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p g_{j_3 j_3}^p \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(T-t)^2}{8(2p+3)(2p+1)} = 0,$$

тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p = 0.$$

Соотношения (5.279) доказаны для полиномиального случая. Теорема 5.7 доказана для случая полиномов Лежандра.

Рассмотрим тригонометрический случай. Имеем:

$$\begin{aligned} a_{j_4 j_3}^p &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \left( \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right)^2 ds_1 ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \phi_{j_3}(s_1) \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \left( \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right)^2 \int_{s_1}^T \phi_{j_4}(s) ds ds_1, \\ \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} \int_t^{s_1} \sin((2\pi j_1(s-t))/(T-t)) ds \\ \int_t^{s_1} \cos((2\pi j_1(s-t))/(T-t)) ds \end{cases} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{T-t}}{2\pi j_1} \begin{cases} -\cos((2\pi j_1(s_1-t))/(T-t)) + 1 \\ \sin((2\pi j_1(s_1-t))/(T-t)) \end{cases},$$

$$\int_{s_1}^T \phi_{j_4}(s) ds = \frac{\sqrt{2}\sqrt{T-t}}{2\pi j_4} \begin{cases} \cos((2\pi j_4(s_1-t))/(T-t)) - 1 \\ -\sin((2\pi j_4(s_1-t))/(T-t)) \end{cases},$$

$$\left| \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 \right| \leq \frac{K_0}{j_1} \quad (j_1 \neq 0), \quad \left| \int_{s_1}^T \phi_{j_4}(s) ds \right| \leq \frac{K_0}{j_4} \quad (j_4 \neq 0),$$

$$\int_{s_1}^T \phi_0(s) ds = \frac{T-s_1}{\sqrt{T-t}},$$

$$|a_{j_4 j_3}^p| \leq \frac{K_1}{j_4} \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \leq \frac{K_1}{pj_4} \quad (j_4 \neq 0), \quad |a_{0,j_3}^p| \leq \frac{K_1}{p}, \quad (5.305)$$

где  $K_0, K_1$  — постоянные.

Из (5.280) – (5.282) и (5.305) получим:  $\Delta_1^{(i_3 i_4)} = 0$  с в. 1.

Используя такие же аргументы, получим, что:

$$\Delta_2^{(i_2 i_4)} = 0, \quad \Delta_4^{(i_1 i_3)} = 0, \quad \Delta_6^{(i_1 i_3)} = 0 \text{ с в. 1},$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p a_{j_3 j_3}^p = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p b_{j_3 j_3}^p = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p f_{j_3 j_3}^p = 0.$$

Рассмотрим  $\Delta_3^{(i_2 i_4)}$ . В этом случае при  $i_2 = i_4 \neq 0$  мы будем использовать (5.289) – (5.292). Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds = \\ & = \frac{\sqrt{2}\sqrt{T-t}}{2\pi j_1} \begin{cases} \int_t^T \phi_{j_4}(s) (1 - \cos((2\pi j_1(s-t))/(T-t))) ds \\ \int_t^T \phi_{j_4}(s) (-\sin((2\pi j_1(s-t))/(T-t))) ds \end{cases}, \end{aligned}$$

где  $j_1 \geq p+1, j_4 = 0, 1, \dots, p$ . В силу ортонормированности тригонометрических функций, получим:

$$\int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds = \frac{\sqrt{2}(T-t)}{2\pi j_1} \begin{cases} 1 \text{ или } 0 \text{ при } j_4 = 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}; j_1 \geq p+1. \quad (5.306)$$

Из (5.306) and (5.290) – (5.292) получим:

$$g_{j_4 j_2}^p + g_{j_2 j_4}^p = \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{(T-t)^2}{2\pi^2 j_1^2} \begin{cases} 1 \text{ или } 0 \text{ при } j_2 = j_4 = 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

$$g_{j_4 j_4}^p = \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{(T-t)^2}{4\pi^2 j_1^2} \begin{cases} 1 \text{ или } 0 \text{ при } j_4 = 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} |g_{j_4 j_2}^p + g_{j_2 j_4}^p| \leq K_1/p \text{ при } j_2 = j_4 = 0 \\ g_{j_4 j_2}^p + g_{j_2 j_4}^p = 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad (5.307)$$

$$\begin{cases} |g_{j_4 j_4}^p| \leq K_1/p \text{ при } j_4 = 0 \\ g_{j_4 j_4}^p = 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad (5.308)$$

где  $K_1$  — постоянная, которая не зависит от  $p$ .

Из (5.307), (5.308) и (5.280) следует, что  $\Delta_7^{(i_2 i_4)} = 0$  и  $\Delta_3^{(i_2 i_4)} = 0$  с в. 1 для  $i_2 = i_4 \neq 0$ .

Аналогично полиномиальному случаю получим  $\Delta_7^{(i_2 i_4)} = 0$  и  $\Delta_3^{(i_2 i_4)} = 0$  с в. 1 для  $i_2 \neq i_4, i_2 \neq 0, i_4 \neq 0$ .

Сходные аргументы доказывают, что  $\Delta_5^{(i_1 i_3)} = 0$  с в. 1.

Принимая во внимание (5.304) и соотношения

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p f_{j_3 j_3}^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p d_{j_3 j_3}^p = 0,$$

которые следуют из оценок:

$$|f_{jj}^p| \leq \frac{K_1}{pj}, \quad |d_{jj}^p| \leq \frac{K_1}{pj}, \quad |f_{00}^p| \leq \frac{K_1}{p}, \quad |d_{00}^p| \leq \frac{K_1}{p},$$

мы получим:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p = - \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p g_{j_3 j_3}^p, \quad 0 \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p g_{j_3 j_3}^p \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K_1}{p} = 0.$$

Окончательно имеем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p c_{j_3 j_3}^p = 0.$$

Соотношения (5.279) доказаны для тригонометрического случая. Теорема 5.7 доказана.  $\square$ .

## 5.10 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 5, основанное на теореме 5.1

В данном разделе обобщим рассмотренный ранее подход к разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича на случай интегралов 5 кратности. При этом мы опустим некоторые фрагменты доказательства следующей теоремы.

**Теорема 5.7\*.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда, для повторного стохастического интеграла Стратоновича 5 кратности

$$I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5)T, t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} = \int_t^{*T} \int_t^{*t_5} \int_t^{*t_4} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)}$$

( $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 0, 1, \dots, m$ ) справедливо следующее сходящееся в среднеквадратическом смысле разложение

$$I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5)T, t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)}, \quad (5.309)$$

где

$$C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dt_5;$$

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины для различных  $i$  или  $j$  (при  $i \neq 0$ );  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  — независимые стандартные винеровские процессы ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ;  $\lambda_l = 0$  если  $i_l = 0$  и  $\lambda_l = 1$  если  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Доказательство. Обозначим

$$A_1 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_3, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$A_2 = \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$A_3 = \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_5=0}^p C_{j_5 j_3 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$A_4 = \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$A_5 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$A_6 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_5=0}^p C_{j_5 j_1 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$A_7 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_1 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$A_8 = \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_5=0}^p C_{j_5 j_2 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$A_9 = \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_2 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$A_{10} = \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_3 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$B_1 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_3, j_5=0}^p C_{j_5 j_3 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$B_2 = \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^p C_{j_4 j_4 j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

$$B_3 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_4 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$B_4 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_3, j_4=0}^p C_{j_3 j_4 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$B_5 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p C_{j_5 j_2 j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$B_6 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^p C_{j_2 j_4 j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$B_7 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

$$B_8 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p C_{j_5 j_1 j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_5}^{(i_5)},$$

$$B_9 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_2 j_1 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$B_{10} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

$$B_{11} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^p C_{j_1 j_4 j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$B_{12} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_1 j_2 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$B_{13} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

$$B_{14} = \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

$$B_{15} = \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_2 j_3 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

где  $\mathbf{1}_A$  — индикатор множества  $A$ .

Из (5.31) при  $p_1 = \dots p_5 = p$  и  $\psi_l(s) \equiv 1$  ( $l = 1, \dots, 5$ ) получим:

$$J[\psi^{(5)}]_{T,t} + \sum_{i=1}^{10} A_i - \sum_{i=1}^{15} B_i = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)}. \quad (5.310)$$

Используя метод доказательства теоремы 5.7 [175] и формулы (5.27) — (5.31) получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_3, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\ &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_3) \right)^2 \times \\ &\quad \times \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\ &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1=0}^{\infty} \left( \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_3) \right)^2 \times \\ &\quad \times \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\ &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} (t_3 - t) \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^{*T} \int_t^{*t_5} \int_t^{*t_4} (t_3 - t) d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} dt_1 dt_3 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_5 \text{ с. в. 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \times \\
&\times \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \left( \int_t^{t_4} \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^{t_4} \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^{t_4} \phi_{j_2}(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \right) \times \\
&\times dt_4 dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_1}(t_1) \sum_{j_2=0}^p \left( \int_{t_1}^{t_4} \phi_{j_2}(t_2) dt_2 \right)^2 dt_1 \times \\
&\times dt_4 dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_1}(t_1) \sum_{j_2=0}^{\infty} \left( \int_{t_1}^{t_4} \phi_{j_2}(t_2) dt_2 \right)^2 dt_1 \times \\
&\times dt_4 dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_1}(t_1) (t_4 - t_1) dt_1 \times \\
&\times dt_4 dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) (t_4 - t) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \times \\
&\times dt_4 dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_4, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_1}(t_1) (t - t_1) dt_1 \times
\end{aligned}$$

$$\times dt_4 dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{*t_5} (t_4 - t) \int_t^{*t_4} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{*t_5} \int_t^{*t_4} (t - t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_5} (t_4 - t) \int_t^{t_4} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} (t_1 - t) dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_5 + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_4} (t - t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} (t - t_1) dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_4} (t - t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_4 = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_5} (t_4 - t) \int_t^{t_4} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_4} (t - t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_5 + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_4} (t - t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_4 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_4} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
 &+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_5 + \\
 &+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_4} (t - t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_4 \text{ с. 1,}
 \end{aligned}$$

$$A_3 = \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_5=0}^p C_{j_5 j_3 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \times \\
 &\times \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \left( \int_t^{t_5} \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^{t_5} \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^{t_5} \phi_{j_3}(t_3) \int_{t_3}^{t_5} \phi_{j_3}(t_4) dt_4 dt_3 dt_2 dt_1 \right) \times \\
 &\times dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \times \\
 &\times \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^{t_5} \phi_{j_2}(t_2) \sum_{j_3=0}^p \left( \int_{t_2}^{t_5} \phi_{j_3}(t_3) dt_3 \right)^2 dt_2 dt_1 \times \\
 &\times dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \times \\
 &\times \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^{t_5} \phi_{j_2}(t_2) \sum_{j_3=0}^{\infty} \left( \int_{t_2}^{t_5} \phi_{j_3}(t_3) dt_3 \right)^2 dt_2 dt_1 \times \\
 &\times dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^{t_5} \phi_{j_2}(t_2) (t_5 - t_2) dt_2 dt_1 \times \\
 &\times dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} =
 \end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^{t_5} \phi_{j_2}(t_2) (t - t_2) dt_2 dt_1 \times \\ \times dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} +$$

$$+ \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) (t_5 - t) \int_t^{t_5} \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^{t_5} \phi_{j_2}(t_2) dt_2 dt_1 \times \\ \times dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} =$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_2}(t_2) (t - t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 \times \\ \times dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} +$$

$$+ \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) (t_5 - t) \int_t^{t_5} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 \times \\ \times dt_5 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} =$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^* \int_t^{*t_5} (t - t_2) \int_t^{*t_5} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ + \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^* (t_5 - t) \int_t^{*t_5} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} = \\ = \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_5} (t - t_2) \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} (t - t_1) dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (t - t_5) \int_t^{t_5} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_5 +$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_5 = \\
& = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} (t_5 - t_2) \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} (t - t_1) dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} = \\
& = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_5 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} (t - t_1) dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} \text{ с. в. 1,}
\end{aligned}$$

$$A_4 = \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$\begin{aligned}
& = \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\
& \times \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_3}(t_3) \int_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) \int_{t_4}^T \phi_{j_4}(t_5) dt_5 dt_4 dt_3 dt_2 \times \\
& \times dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} =
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{2} \text{l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_4=0}^p \left( \int_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) dt_4 \right)^2 dt_3 dt_2 \times \\ & \quad \times dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\ & \times \frac{1}{2} \text{l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_4=0}^{\infty} \left( \int_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) dt_4 \right)^2 dt_3 dt_2 \times \\ & \quad \times dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \frac{1}{2} \text{l.i.m.}_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_3}(t_3) (T - t_3) dt_3 dt_2 \times \\ & \quad \times dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^{*T} (T - t_3) \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} = \\ & = \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 = \\ & = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_4 + \\ & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 \text{ с. в. 1}, \end{aligned}$$

$$A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = 0 \text{ с в. 1,}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_3, j_5=0}^p C_{j_5 j_3 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_3}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1=0}^p \left( \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right)^2 dt_3 \times \\
&\times dt_4 dt_5 \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3, j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \phi_{j_3}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1=0}^{\infty} \left( \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right)^2 dt_3 \times \\
&\times dt_4 dt_5 \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \sum_{j_3=0}^p \phi_{j_3}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) (t_3 - t) dt_3 dt_4 dt_5 \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} \sum_{j_3=0}^{\infty} \phi_{j_3}(t_4) \int_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) (t_3 - t) dt_3 dt_4 dt_5 \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{4} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_5=0}^p \int_t^T \phi_{j_5}(t_5) \int_t^{t_5} (t_4 - t) dt_4 dt_5 \zeta_{j_5}^{(i_5)} = \\
&= \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_2} dt_1 dt_2 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} \text{ с в. 1,}
\end{aligned}$$

$$B_2 = \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^p C_{j_4 j_4 j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\
&\times \text{l.i.m.} \sum_{p \rightarrow \infty}^p \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_2}(t_3) \int_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) \int_{t_4}^T \phi_{j_4}(t_5) dt_5 dt_4 dt_3 \times \\
&\quad \times dt_2 dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\
\\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \text{l.i.m.} \sum_{p \rightarrow \infty}^p \sum_{j_1, j_2=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_2}(t_3) \sum_{j_4=0}^p \left( \int_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) dt_4 \right)^2 dt_3 \times \\
&\quad \times dt_2 dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\
\\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \text{l.i.m.} \sum_{p \rightarrow \infty}^p \sum_{j_1, j_2=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_2}(t_3) \sum_{j_4=0}^{\infty} \left( \int_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) dt_4 \right)^2 dt_3 \times \\
&\quad \times dt_2 dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\
\\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \text{l.i.m.} \sum_{j_1, j_2=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_2}(t_3) (T - t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\
\\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \text{l.i.m.} \sum_{j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \sum_{j_2=0}^p \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_2}(t_3) (T - t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\
\\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\
&\times \frac{1}{2} \text{l.i.m.} \sum_{j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \sum_{j_2=0}^{\infty} \phi_{j_2}(t_2) \int_{t_2}^T \phi_{j_2}(t_3) (T - t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \\
\\
&= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \frac{1}{4} \text{l.i.m.} \sum_{j_1=0}^p \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T (T - t_2) dt_2 dt_1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} =
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \frac{1}{4} \int\limits_t^T \int\limits_{t_1}^T (T-t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} = \\ = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_5} \int\limits_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 dt_5 \text{ с. в. 1},$$

$$B_3 = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_4 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\ \times \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_4=0}^p \int\limits_t^T \phi_{j_4}(t_5) \int\limits_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int\limits_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1=0}^p \left( \int\limits_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right)^2 dt_3 \times \\ \times dt_4 dt_5 \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \times \\ \times \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_4=0}^p \int\limits_t^T \phi_{j_4}(t_5) \int\limits_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int\limits_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1=0}^{\infty} \left( \int\limits_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right)^2 dt_3 \times \\ \times dt_4 dt_5 \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_4=0}^p \int\limits_t^T \phi_{j_4}(t_5) \int\limits_t^{t_5} \phi_{j_4}(t_4) \int\limits_t^{t_4} \phi_{j_3}(t_3) (t_3 - t) dt_3 \times \\ \times dt_4 dt_5 \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3, j_4=0}^p \int\limits_t^T \phi_{j_3}(t_3) (t_3 - t) \int\limits_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) \int\limits_{t_4}^T \phi_{j_4}(t_5) dt_5 \times \\ \times dt_4 dt_3 \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_3=0}^p \int\limits_t^T \phi_{j_3}(t_3) (t_3 - t) \sum_{j_4=0}^p \left( \int\limits_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) dt_4 \right)^2 dt_3 \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_3}(t_3)(t_3 - t) \sum_{j_4=0}^{\infty} \left( \int_{t_3}^T \phi_{j_4}(t_4) dt_4 \right)^2 dt_3 \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^p \int_t^T \phi_{j_3}(t_3)(t_3 - t)(T - t_3) dt_3 \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (t_3 - t)(T - t_3) d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} = \\
 &= \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_5 \text{ с в. 1,}
 \end{aligned}$$

$$B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = B_8 = B_9 = B_{10} = B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{14} = B_{15} = 0,$$

где цепочка равенств выполняется с в. 1.

Тогда

$$J[\psi^{(5)}]_{T,t} + \sum_{i=1}^{10} A_i - \sum_{i=1}^{15} B_i =$$

$$= J[\psi^{(5)}]_{T,t} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
 &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_4} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
 &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
 &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_4 +
 \end{aligned}$$

$$+ S_1 + S_2 + S_3 \text{ с в. 1,} \quad (5.311)$$

где

$$\begin{aligned}
 S_1 = & \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} dt_1 dt_3 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
 & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} (t - t_1) dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\
 & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} dt_1 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} - \\
 & - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_2} dt_1 dt_2 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (t_5 - t) \int_t^{t_5} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_5 + \\
 & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_4} (t - t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_4 + \\
 & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 - \\
 & - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 dt_5,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_3 = & \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_5 + \\
 & + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} - \\
 & - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_5.
 \end{aligned}$$

Используя теорему 3.1 о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито (см. также формулу Ито) получим:

$$S_1 = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_2} dt_1 dt_2 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} \text{ с. в. 1,} \quad (5.312)$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 dt_5 \text{ с в. 1}, \quad (5.313)$$

$$S_3 = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_5 \text{ с в. 1}. \quad (5.314)$$

Подставим (5.312) — (5.314) в (5.311):

$$\begin{aligned} J[\psi^{(5)}]_{T,t} + \sum_{i=1}^{10} A_i - \sum_{i=1}^{15} B_i = \\ = J[\psi^{(5)}]_{T,t} + \\ + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_4} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_4 + \\ + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_2} dt_1 dt_2 d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} + \\ + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 dt_5 + \\ + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_5} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} dt_5 \text{ с в. 1}. \end{aligned} \quad (5.315)$$

По теореме 3.9 при  $k = 5$  правая часть (5.315) с в. 1 равна следующему повторному стохастическому интегралу Стратоновича 5 кратности

$$\int_t^T \int_t^{*t_5} \int_t^{*t_4} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)}$$

$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 0, 1, \dots, m)$ .

С другой стороны левая часть (5.315) представима (согласно (5.310)) как следующий среднеквадратический предел:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)}.$$

Таким образом, доказано следующее разложение:

$$\begin{aligned} & \int_t^{*T} \int_t^{*t_5} \int_t^{*t_4} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} d\mathbf{w}_{t_5}^{(i_5)} = \\ & = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \end{aligned}$$

$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 0, 1, \dots, m)$ . Теорема 7.5\* доказана.  $\square$

## 5.11 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности $k$ , основанное на теореме 5.1. Полиномиальный и тригонометрический случаи

На основании теорем 5.3, 5.3\*, 5.4, 5.5, 5.5\*, 5.6, 5.7, 5.7\* автор полагает, что для случая произвольного фиксированного  $k$  ( $k$  — кратность повторного стохастического интеграла Стратоновича) будет верна следующая теорема.

Сформулируем (без доказательства) следующую теорему.

**Теорема 5.8.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда для повторного стохастического интеграла Стратоновича  $k$  кратности

$$I_{(\lambda_1 \dots \lambda_k)T, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} \dots \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \quad (5.316)$$

$(i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m)$  справедливо следующее сходящееся в среднем квадратическом смысле разложение

$$I_{(\lambda_1 \dots \lambda_k)T,t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p C_{j_k \dots j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \dots \zeta_{j_k}^{(i_k)}, \quad (5.317)$$

где

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k,$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1, & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T] \quad (k \geq 2),$$

$K(t_1) \equiv 1$ , или

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_k,$$

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины для различных  $i$  или  $j$  (при  $i \neq 0$ ),  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  — независимые стандартные винеровские процессы ( $i = 1, \dots, m$ ),  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ,  $\lambda_l = 0$  при  $i_l = 0$  и  $\lambda_l = 1$  при  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, k$ .

Теорема 5.8 позволяет аппроксимировать повторный стохастический интеграл Стратоновича  $I_{(\lambda_1 \dots \lambda_k)T,t}^{*(i_1 \dots i_k)}$  суммой вида

$$I_{(\lambda_1 \dots \lambda_k)T,t}^{*(i_1 \dots i_k)p} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p C_{j_k \dots j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \dots \zeta_{j_k}^{(i_k)}, \quad (5.318)$$

где

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( I_{(\lambda_1 \dots \lambda_k)T,t}^{*(i_1 \dots i_k)} - I_{(\lambda_1 \dots \lambda_k)T,t}^{*(i_1 \dots i_k)p} \right)^2 \right\} = 0.$$

Заметим, что если выполняется равенство

$$\sum_{r=1}^{[k/2]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} =$$

$$= \underset{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \prod_{g=1}^k \phi_{j_g}(\tau_{l_g}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_g}}^{(i_g)} \text{ с в. 1,}$$

где сохранен смысл обозначений теорем 3.9 и 5.1, то согласно теоремам 3.9 и 5.1 мы получили бы следующее представление:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{g=1}^k \zeta_{j_g}^{(i_g)}. \quad (5.319)$$

В случае  $p_1 = \dots = p_k = p$  и  $\psi_l(s) \equiv 1$  ( $l = 1, \dots, k$ ) из (5.319) мы получим (5.317).

## 5.12 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности $k$ , основанное на повторных рядах Фурье

### 5.12.1 Случай интегралов второй кратности. Другое доказательство формулы (5.50)

Рассмотрим, на примере повторных стохастических интегралов Стратоновича второй кратности, подход к разложению повторных стохастических интервалов, который отличается от рассмотренных ранее подходов [39], [46].

Итак, пусть рассматривается повторный стохастический интеграл Стратоновича вида:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}; i_1, i_2 = 1, \dots, m,$$

где  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  — независимые стандартные винеровские процессы, а  $\psi_1(\tau)$  и  $\psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируемые на промежутке  $[t, T]$  функции.

Рассмотрим функцию

$$K^*(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1),$$

где  $t_1, t_2 \in [t, T]$ , а  $K(t_1, t_2)$  имеет вид:

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, t_2 \in [t, T].$$

В силу доказанных в разделе 5.1 лемм и справедливой с в. 1 формулы

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2$$

с в. 1 имеем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} K^*(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}, \quad (5.320)$$

где сохранен смысл обозначений формулы (5.8).

Разложим функцию  $K^*(t_1, t_2)$  по переменной  $t_1$ , при фиксированном  $t_2$ , в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$ :

$$K^*(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) \quad (t_1 \neq t, T), \quad (5.321)$$

где

$$\begin{aligned} C_{j_1}(t_2) &= \int_t^T K^*(t_1, t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \int_t^T K(t_1, t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 = \\ &= \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1, \end{aligned}$$

а  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система непрерывных функций.

Равенство (5.321) выполняется поточечно в каждой точке интервала  $(t, T)$  по переменной  $t_1$ , при фиксированном  $t_2 \in [t, T]$ , в силу кусочной гладкости функции  $K^*(t_1, t_2)$  по переменной  $t_1 \in [t, T]$  ( $t_2$  — фиксировано). Отметим также, что в силу известных свойств рядов Фурье, ряд (5.321) сходится при  $t_1 = t, T$  (не обязательно к функции  $K^*(t_1, t_2)$ ).

При получении (5.321) мы также использовали то, что правая часть (5.321) сходится при  $t_1 = t_2$  (точка конечного разрыва функции  $K^*(t_1, t_2)$ ) к величине

$$\frac{1}{2} (K^*(t_2 - 0, t_2) + K^*(t_2 + 0, t_2)) = \frac{1}{2} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) = K^*(t_2, t_2).$$

Функция  $C_{j_1}(t_2)$  является непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[t, T]$ . Разложим ее на интервале  $(t, T)$  в ряд Фурье:

$$C_{j_1}(t_2) = \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_2}(t_2) \quad (t_2 \neq t, T), \quad (5.322)$$

где

$$C_{j_2 j_1} = \int_t^T C_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) dt_2 = \int_t^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2,$$

а равенство (5.322) выполняется поточечно в любой точке интервала  $(t, T)$ , причем правая часть (5.322) сходится при  $t_2 = t, T$  (не обязательно к  $C_{j_1}(t_2)$ ).

Подставим (5.322) в (5.321):

$$K^*(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2); \quad (t_1, t_2) \in (t, T)^2, \quad (5.323)$$

причем ряд в правой части (5.323) сходится на границе квадрата  $[t, T]^2$  (не обязательно к  $K^*(t_1, t_2)$ ).

Далее, используя схему доказательства теоремы 5.1 и (5.320), получаем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)} \text{ с. в. 1}, \quad (5.324)$$

где  $J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)}$  определен формулой (5.12):

$$\begin{aligned} J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} R_{p_1 p_2}(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} = \\ &= \int_t^T \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2}(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} + \int_t^T \int_t^{t_1} R_{p_1 p_2}(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} + \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \int_t^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 \text{ с. в. 1}; \end{aligned}$$

$$R_{p_1 p_2}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1, t_2) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2); \quad p_1, p_2 < \infty.$$

Используя оценки (1.46), (1.47) имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)} \right)^{2n} \right\} \leq C_n \left( \int_t^T \int_t^{t_2} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n} dt_1 dt_2 + \right.$$

$$+ \int_t^T \int_t^{t_1} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n} dt_2 dt_1 + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \int_t^T (R_{p_1 p_2}(t_1, t_1))^{2n} dt_1 \Big), \quad (5.325)$$

где  $C_n < \infty$  — постоянная, которая зависит от  $n$  и  $T - t$ ;  $n = 1, 2, \dots$

Отметим, что в силу выдвинутых ранее предположений, функция  $R_{p_1 p_2}(t_1, t_2)$  непрерывна в областях интегрирования интегралов в правой части (5.325) и ограничена на границах этих областей, включая границу квадрата  $[t, T]^2$ .

Оценим первый интеграл в правой части (5.325):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_t^T \int_t^{t_2} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n} dt_1 dt_2 = \left( \int_{D_\varepsilon} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \right) (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n} dt_1 dt_2 \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i \max_{(t_1, t_2) \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \times [\tau_j, \tau_{j+1}]} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n} \Delta \tau_i \Delta \tau_j + M S_{\Gamma_\varepsilon} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i (R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_j))^{2n} \Delta \tau_i \Delta \tau_j + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i \left| (R_{p_1 p_2}(t_i^{(p_1 p_2)}, t_j^{(p_1 p_2)}))^{2n} - (R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_j))^{2n} \right| \Delta \tau_i \Delta \tau_j + M S_{\Gamma_\varepsilon} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i (R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_j))^{2n} \Delta \tau_i \Delta \tau_j + \\ &+ \varepsilon_1 \frac{1}{2} (T - t - 3\varepsilon)^2 \left( 1 + \frac{1}{N} \right) + M S_{\Gamma_\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5.326)$$

где

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= \{(t_1, t_2) : t_2 \in [t + 2\varepsilon, T - \varepsilon], t_1 \in [t + \varepsilon, t_2 - \varepsilon]\}, \\ D &= \{(t_1, t_2) : t_2 \in [t, T], t_1 \in [t, t_2]\}, \end{aligned}$$

$\Gamma_\varepsilon = D \setminus D_\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число,  $S_{\Gamma_\varepsilon}$  — площадь  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $M > 0$  — ограничивающая функцию  $(R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n}$  постоянная,  $(t_i^{(p_1 p_2)}, t_j^{(p_1 p_2)})$  — точка максимума этой функции при  $(t_1, t_2) \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \times [\tau_j, \tau_{j+1}]$ ,  $\tau_i = t + 2\varepsilon + i\Delta$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ),  $\tau_N = T - \varepsilon$ ,  $\Delta = (T - t - 3\varepsilon)/N$ ,  $\Delta < \varepsilon$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  — сколь угодно малое положительное число.

При получении (5.326) мы использовали известные свойства интегралов, первую и вторую теорему Вейерштрасса для функции двух переменных, а также непрерывность и, как следствие, равномерную непрерывность функции  $(R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n}$  в  $D_\varepsilon$  ( $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta(\varepsilon_1) > 0$ , которое не зависит

от  $t_1, t_2, p_1, p_2$  и такое, что при  $\sqrt{2}\Delta < \delta$  (при этом условии расстояние между любыми двумя точками множества  $[\tau_i, \tau_{i+1}] \times [\tau_j, \tau_{j+1}]$  меньше  $\delta$ ) имеет место неравенство:

$$\left| \left( R_{p_1 p_2}(t_i^{(p_1 p_2)}, t_j^{(p_1 p_2)}) \right)^{2n} - (R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_j))^{2n} \right| < \varepsilon_1.$$

Учитывая (5.323) запишем:

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n} = 0 \text{ при } (t_1, t_2) \in D_\varepsilon$$

и осуществим повторный предельный переход  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty}$  в неравенстве (5.326). Тогда, в силу произвольности  $\varepsilon_1$ , имеем

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \int_t^T \int_t^{t_2} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n} dt_1 dt_2 = 0. \quad (5.327)$$

Аналогично приведенным выше рассуждениям имеем:

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \int_t^T \int_t^{t_1} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^{2n} dt_2 dt_1 = 0, \quad (5.328)$$

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \int_t^T (R_{p_1 p_2}(t_1, t_1))^{2n} dt_1 = 0. \quad (5.329)$$

Из (5.325), (5.327) – (5.329) получаем, что

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)} \right)^{2n} \right\} = 0; \quad n \in N.$$

Последнее равенство и (5.324) позволяют записать

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сходимость повторного ряда понимается в среднем степени  $2n$ ;  $n \in N$ , т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right)^{2n} \right\} &= \\ &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что если функцию  $K^*(t_1, t_2)$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$  сначала по переменной  $t_2$  ( $t_1$  фиксировано), а затем коэффициент Фурье

$$\psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) dt_2$$

полученного ряда разложить в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$  по переменной  $t_1$ , то учитя, что

$$\int_t^T \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) dt_2 dt_1 = C_{j_2 j_1},$$

придем к следующей формуле разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича второй кратности:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}.$$

Применим рассуждения, близкие к изложенным в данном разделе, к получению другого доказательства формулы (5.50) и теоремы 5.3\*.

Отметим, что

$$\begin{aligned} \int_t^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 &= \int_t^T \left( \frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right) dt_1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{\min\{p_1, p_2\}} C_{j_1 j_1}. \end{aligned} \quad (5.330)$$

Согласно (5.330), из равенства

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \int_t^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 = 0 \quad (5.331)$$

получим формулу (5.50) и утверждение теоремы 5.3\*, т.е.

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \quad (5.332)$$

Докажем (5.331), учитывая что из (5.323) при  $t_1 = t_2$  следует равенство:

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) = 0, \quad t_1 \in (t, T). \quad (5.333)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  — фиксированное положительное число. Для фиксированных  $p_1, p_2$  имеем

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \int_t^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 \right| = \\
 &= \left| \int_t^{t+\varepsilon} R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 + \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 + \int_{T-\varepsilon}^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 \right| \leq \\
 &\leq \int_t^{t+\varepsilon} |R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)| dt_1 + \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} |R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)| dt_1 + \int_{T-\varepsilon}^T |R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)| dt_1 \leq \\
 &\leq \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} |R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)| dt_1 + 2C\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{5.334}$$

где  $|R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)| \leq C$ ,  $C$  — постоянная.

Рассмотрим разбиение  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  интервала  $[t + \varepsilon, T - \varepsilon]$  такое, что:

$$\tau_0 = t + \varepsilon, \quad \tau_N = T - \varepsilon, \quad \tau_j = \tau_0 + j\Delta, \quad \Delta = \frac{1}{N}(T - t - 2\varepsilon).$$

Для фиксированного  $N$  имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon} |R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)| dt_1 &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \max_{s \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} |R_{p_1 p_2}(s, s)| \Delta = \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \Delta + \sum_{i=0}^{N-1} \left( \max_{s \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} |R_{p_1 p_2}(s, s)| - |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \right) \Delta \leq \\
 &\leq \sum_{i=0}^{N-1} |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \Delta + \sum_{i=0}^{N-1} \left| \max_{s \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} |R_{p_1 p_2}(s, s)| - |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \right| \Delta = \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \Delta + \sum_{i=0}^{N-1} \left| |R_{p_1 p_2}(t_i^{(p_1 p_2)}, t_i^{(p_1 p_2)})| - |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \right| \Delta < \\
 &< \sum_{i=0}^{N-1} |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \Delta + \varepsilon_1(T - t - 2\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{5.335}$$

где  $(t_i^{(p_1 p_2)}, t_i^{(p_1 p_2)})$  — точка максимума функции  $|R_{p_1 p_2}(s, s)|$  на интервале  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ .

Получая (5.335) мы воспользовались хорошо известными свойствами интегралов, первой и второй теоремой Вейерштрасса, а также непрерывностью (и как следствие равномерной непрерывностью) функции  $|R_{p_1 p_2}(s, s)|$

на интервале  $[t + \varepsilon, T - \varepsilon]$  ( $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta(\varepsilon_1) > 0$ , которое не зависит от  $t_1, p_1, p_2$  и если  $\Delta < \delta(\varepsilon_1)$ , то имеет место следующее неравенство:

$$\left| R_{p_1 p_2}(t_i^{(p_1 p_2)}, t_i^{(p_1 p_2)}) - |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \right| < \varepsilon_1.$$

Из (5.334) и (5.335) получим:

$$0 \leq \left| \int_t^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 \right| < \sum_{i=0}^{N-1} |R_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_i)| \Delta + \varepsilon_1(T - t - 2\varepsilon) + 2C\varepsilon. \quad (5.336)$$

Осуществим повторный предельный переход  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty}$  в неравенстве (5.336), принимая во внимание (5.333). Таким образом:

$$0 \leq \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \left| \int_t^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 \right| \leq \varepsilon_1(T - t). \quad (5.337)$$

Тогда из (5.337) (учитывая произвольность  $\varepsilon_1$ ) мы придем к (5.331). Другой способ доказательства формулы (5.50) и теоремы 5.3\* завершены.

### 5.12.2 Случай интегралов третьей и четвертой кратности

В предыдущем разделе нами было рассмотрено следующее равенство:

$$\psi_1(t_1) \left( \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \right) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \phi_{j_1}(t_1), \quad (5.338)$$

которое выполняется поточечно на интервале  $(t, T)$ , причем ряд в правой части (5.338) сходится при  $t_1 = t, T$ .

Используя (5.338) получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) = \\ & = \sum_{j_1=0}^{\infty} \psi_3(t_3) \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \left( \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} \right) \phi_{j_1}(t_1) = \\ & = \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \psi_3(t_3) \left( \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \right) \left( \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} \right). \quad (5.339) \end{aligned}$$

С другой стороны левая часть (5.339) может быть путем разложения функции

$$\psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2$$

в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$  представлена в виде:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3), \quad (5.340)$$

где

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \psi_3(t_3) \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 dt_3.$$

Таким образом получаем равенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3) = \\ & = \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \psi_3(t_3) \left( \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \right) \left( \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} \right) = \\ & = \prod_{l=1}^3 \psi_l(t_l) \left( \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1, t_2, t_3), \end{aligned} \quad (5.341)$$

которое выполняется поточечно в открытом кубе  $(t, T)^3$ , причем ряд (5.340) сходится на границе куба  $[t, T]^3$ .

Используя (5.338) и (5.341) имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} \psi_4(t_4) \int_t^{t_4} \psi_3(t_3) \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) \times \\ & \quad \times dt_1 dt_2 dt_3 \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) = \\ & = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \psi_4(t_4) \left( \mathbf{1}_{\{t_3 < t_4\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_3 = t_4\}} \right) \times \\ & \quad \times \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) = \\ & = \psi_4(t_4) \left( \mathbf{1}_{\{t_3 < t_4\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_3 = t_4\}} \right) \times \\ & \quad \times \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) = \\ & = \psi_4(t_4) \left( \mathbf{1}_{\{t_3 < t_4\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_3 = t_4\}} \right) \prod_{l=1}^3 \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^2 \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \prod_{l=1}^4 \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^3 \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right). \quad (5.342)$$

Левая часть (5.342) путем разложения функции

$$\psi_4(t_4) \int_t^{t_4} \psi_3(t_3) \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 dt_3$$

в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$  может быть приведена к виду:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_4=0}^{\infty} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^4 \phi_{j_l}(t_l), \quad (5.343)$$

где  $C_{j_4 j_3 j_2 j_1}$  определяется формулой (5.7).

В результате получаем равенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_4=0}^{\infty} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^4 \phi_{j_l}(t_l) = \\ & = \prod_{l=1}^4 \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^3 \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1, t_2, t_3, t_4), \end{aligned} \quad (5.344)$$

которое выполняется поточечно в открытом гиперкубе  $(t, T)^4$ , причем ряд в левой части (5.344) сходится на границе гиперкуба  $[t, T]^4$ .

В силу леммы 5.1, замечания 5.1 и формулы связи повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито:

$$\begin{aligned} J^*[\psi^{(3)}] &= \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 \text{ с. в. 1}, \end{aligned}$$

получаем с вероятностью 1:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} K^*(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)}. \quad (5.345)$$

Далее, используя схему доказательства теоремы 5.1 и (5.345), имеем:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + J[R_{p_1 p_2 p_3}]_{T,t}^{(3)} \text{ с. в. 1, } (5.346)$$

где

$$\begin{aligned} J[R_{p_1 p_2 p_3}]_{T,t}^{(3)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)}, \\ R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_2, t_3) &\stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1, t_2, t_3) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3). \end{aligned} \quad (5.347)$$

Воспользовавшись формулой (5.360) для кратной суммы, получим

$$\begin{aligned} J[R_{p_1 p_2 p_3}]_{T,t}^{(3)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{l_3-1} \sum_{l_1=0}^{l_2-1} \left( R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} + \right. \\ &\quad + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_1}, \tau_{l_3}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} + \\ &\quad + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_2}, \tau_{l_1}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} + \\ &\quad + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} + \\ &\quad + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_3}, \tau_{l_2}, \tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} + \\ &\quad \left. + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_3}, \tau_{l_1}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} \right) + \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{l_3-1} \left( R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} + \right. \\ &\quad + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_2}, \tau_{l_1}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} + \\ &\quad \left. + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_3}, \tau_{l_1}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} \right) + \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{l_3-1} \left( R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_1}, \tau_{l_3}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} + \right. \\ &\quad + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} + \\ &\quad \left. + R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_3}, \tau_{l_1}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} \right) + \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} R_{p_1 p_2 p_3}(\tau_{l_3}, \tau_{l_3}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_2, t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\
&+ \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_3, t_2) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_2)} + \\
&+ \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_1, t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\
&+ \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_2)} + \\
&+ \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} + \\
&+ \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_1, t_2) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_2, t_3) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_2)} + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_3, t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_1, t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)} dt_3 + \\
&+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_3, t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} dt_3 \text{ с. в. 1.}
\end{aligned}$$

Теперь, применяя стандартные оценки для моментов стохастических интегралов (см. главу 1), придем к следующему неравенству:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[R_{p_1 p_2 p_3}]_{T,t}^{(3)} \right)^{2n} \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_n \left( \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \left( (R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_2, t_3))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_3, t_2))^{2n} + \right. \right. \\
&+ (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_1, t_3))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_1))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_1))^{2n} \\
&\quad \left. \left. + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_1, t_2))^{2n} \right) dt_1 dt_2 dt_3 + \right. \\
&+ \int_t^T \int_t^{t_3} \left( \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \left( (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_2, t_3))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_3, t_2))^{2n} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \left( (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_2))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_3))^{2n} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \left( (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_2))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_3))^{2n} \right) \right) dt_2 dt_3 \right). \quad (5.348)
\end{aligned}$$

Важным является то, что подынтегральные функции в правой части (5.348) непрерывны в областях интегрирования повторных интегралов и согласно (5.347) ограничены на границах этих областей, причем в силу (5.341) всюду в  $(t, T)^3$  имеет место:

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \lim_{p_3 \rightarrow \infty} R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_2, t_3) = 0. \quad (5.349)$$

Далее аналогично (5.326) осуществляем повторный предельный переход  $\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \lim_{p_3 \rightarrow \infty}$  под знаками интегралов в правой части (5.348) и получаем:

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \lim_{p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( J[R_{p_1 p_2 p_3}]_{T,t}^{(3)} \right)^{2n} \right\} = 0.$$

Последнее, в свою очередь, означает, что

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.350)$$

где повторный ряд сходится в среднем степени  $2n$ ,  $n$  – натуральное, т.е.

$$\begin{aligned}
&\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \lim_{p_2 \rightarrow \infty} \lim_{p_3 \rightarrow \infty} M \left\{ \left( J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^{2n} \right\} = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

### 5.12.3 Случай интегралов произвольной кратности

В настоящем разделе будет сформулирована и доказана теорема о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной фиксированной кратности  $k$  вида (5.2), основанном на повторных рядах Фурье по системе полиномов Лежандра или системе тригонометрических функций [39] (поступила в редакцию в декабре 1996 г.).

Определим на гиперкубе  $[t, T]^k$  функцию

$$K(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, \quad k \geq 2. \quad (5.351)$$

Сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 5.9.** *Пусть выполнены условия:*

1.  $\psi_i(\tau); i = 1, \dots, k$  — непрерывно дифференцируемые на промежутке  $[t, T]$  функции.
2.  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича  $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$  вида

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \quad (5.352)$$

разлагается в сходящийся в среднем степени  $2n$  ( $n \in N$ ) повторный ряд

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \dots \zeta_{j_k}^{(i_k)} \quad (5.353)$$

или

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{p_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \dots \zeta_{j_k}^{(i_k)},$$

m.e.

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{p_k \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \dots \zeta_{j_k}^{(i_k)} \right)^{2n} \right\} = 0,$$

где

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных  $i$  или  $j$  (если  $i \neq 0$ );  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые стандартные винеровские процессы;

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t, T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k. \quad (5.354)$$

Доказательство теоремы будет состоять из нескольких частей. Определим функцию  $K^*(t_1, \dots, t_k)$  на гиперкубе  $[t, T]^k$  следующим образом:

$$\begin{aligned} K^*(t_1, \dots, t_k) &= \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right) = \\ &= \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \left( \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{2^r} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}} \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_{s_l} = t_{s_{l+1}}\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq s_1, \dots, s_r}}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} \right). \end{aligned} \quad (5.355)$$

Частные случаи (5.355) при  $k = 2, 3, 4$  были подробно рассмотрены ранее.

**Теорема 5.10.** В условиях теоремы 5.9 функция  $K^*(t_1, \dots, t_k)$  представлена в любой внутренней точке гиперкуба  $[t, T]^k$  повторным рядом Фурье

$$K^*(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l), \quad (5.356)$$

где  $C_{j_k \dots j_1}$  имеет вид (5.354). При этом повторный ряд (5.356) сходится на границе гиперкуба  $[t, T]^k$ .

Доказательство проведем по индукции. Данная теорема для случаев  $k = 2, 3$  и  $4$  уже доказана ранее.

Введем предположение индукции:

$$\begin{aligned} &\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{k-2}=0}^{\infty} \psi_{k-1}(t_{k-1}) \int_t^{t_{k-1}} \psi_{k-2}(t_{k-2}) \phi_{j_{k-2}}(t_{k-2}) \dots \\ &\dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-2} \prod_{l=1}^{k-2} \phi_{j_l}(t_l) = \\ &= \prod_{l=1}^{k-1} \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-2} \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right). \end{aligned} \quad (5.357)$$

Тогда

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{\infty} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \psi_{k-1}(t_{k-1}) \phi_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \dots$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} \phi_{j_l}(t_l) = \\
 & = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{k-2}=0}^{\infty} \psi_k(t_k) \left( \mathbf{1}_{\{t_{k-1} < t_k\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_{k-1} = t_k\}} \right) \psi_{k-1}(t_{k-1}) \times \\
 & \times \int_t^{t_{k-1}} \psi_{k-2}(t_{k-2}) \phi_{j_{k-2}}(t_{k-2}) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-2} \prod_{l=1}^{k-2} \phi_{j_l}(t_l) = \\
 & = \psi_k(t_k) \left( \mathbf{1}_{\{t_{k-1} < t_k\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_{k-1} = t_k\}} \right) \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{k-2}=0}^{\infty} \psi_{k-1}(t_{k-1}) \times \\
 & \times \int_t^{t_{k-1}} \psi_{k-2}(t_{k-2}) \phi_{j_{k-2}}(t_{k-2}) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-2} \prod_{l=1}^{k-2} \phi_{j_l}(t_l) = \\
 & = \psi_k(t_k) \left( \mathbf{1}_{\{t_{k-1} < t_k\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_{k-1} = t_k\}} \right) \times \\
 & \times \prod_{l=1}^{k-1} \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-2} \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right) = \\
 & = \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right). \tag{5.358}
 \end{aligned}$$

С другой стороны, левая часть (5.358) путем разложения функции

$$\psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \psi_{k-1}(t_{k-1}) \phi_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-1}$$

на интервале  $(t, T)$  в ряд Фурье по переменной  $t_k$  может быть приведена к виду:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l).$$

Теорема 5.10 доказана  $\square$ .

Рассмотрим стохастически интеграл вида (5.12) и найдем для него удобное для дальнейших рассуждений представление.

С этой целью введем ряд обозначений. Пусть

$$S_N^{(k)}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1, \dots, j_k)} a_{(j_1, \dots, j_k)},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{s_r} \dots \mathcal{C}_{s_1} S_N^{(k)}(a) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1} \sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1} \dots \sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1} \sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \times \\ &\times \sum_{\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k)} a \prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k), \end{aligned}$$

где

$$\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_{j_{s_r}, j_{s_r+1}} \dots \mathbf{I}_{j_{s_1}, j_{s_1+1}}(j_1, \dots, j_k),$$

$$\mathcal{C}_{s_0} \dots \mathcal{C}_{s_1} S_N^{(k)}(a) \stackrel{\text{def}}{=} S_N^{(k)}(a),$$

$$\prod_{l=1}^0 \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k) \stackrel{\text{def}}{=} (j_1, \dots, j_k),$$

$$\mathbf{I}_{j_l, j_{l+1}}(j_{q_1}, \dots, j_{q_2}, j_l, j_{q_3}, \dots, j_{q_{k-2}}, j_l, j_{q_{k-1}}, \dots, j_{q_k}) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (j_{q_1}, \dots, j_{q_2}, j_{l+1}, j_{q_3}, \dots, j_{q_{k-2}}, j_{l+1}, j_{q_{k-1}}, \dots, j_{q_k});$$

здесь  $l = 1, 2, \dots$ ;  $l \neq q_1, \dots, q_2, q_3, \dots, q_{k-2}, q_{k-1}, \dots, q_k = 1, 2, \dots$ ;  $s_1, \dots, s_r = 1, \dots, k-1$ ;  $s_r > \dots > s_1$ ;  $a_{(j_{q_1}, \dots, j_{q_k})}$  — скаляры;  $q_1, \dots, q_k = 1, \dots, k$ ; выражение  $\sum_{(j_{q_1}, \dots, j_{q_k})}$  означает сумму по всевозможным перестановкам  $(j_{q_1}, \dots, j_{q_k})$ .

По индукции можно доказать следующее равенство:

$$\sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1, \dots, j_k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}} \mathcal{C}_{s_r} \dots \mathcal{C}_{s_1} S_N^{(k)}(a), \quad (5.359)$$

где  $k = 1, 2, \dots$ ; сумма по пустому множеству полагается равной 1.

В дальнейшем мы будем отождествлять следующие записи:

$$a_{(j_1, \dots, j_k)} = a_{(j_1 \dots j_k)} = a_{j_1 \dots j_k}.$$

В частности, из (5.359) при  $k = 2, 3, 4$  получим следующие формулы

$$\begin{aligned} \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1, j_2)} &= S_N^{(2)}(a) + \mathcal{C}_1 S_N^{(2)}(a) = \\ &= \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1, j_2)} a_{(j_1 j_2)} + \sum_{j_2=0}^{N-1} a_{(j_2 j_2)} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (a_{j_1 j_2} + a_{j_2 j_1}) + \\ + \sum_{j_2=0}^{N-1} a_{j_2 j_2},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1, j_2, j_3)} = S_N^{(3)}(a) + \mathcal{C}_1 S_N^{(3)}(a) + \\ & + \mathcal{C}_2 S_N^{(3)}(a) + \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1 S_N^{(3)}(a) = \\ & = \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1, j_2, j_3)} a_{(j_1 j_2 j_3)} + \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{(j_2, j_3, j_3)} a_{(j_2 j_2 j_3)} + \\ & + \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_3-1} \sum_{(j_1, j_3, j_3)} a_{(j_1 j_3 j_3)} + \sum_{j_3=0}^{N-1} a_{(j_3 j_3 j_3)} = \\ & = \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (a_{j_1 j_2 j_3} + a_{j_1 j_3 j_2} + a_{j_2 j_1 j_3} + a_{j_2 j_3 j_1} + a_{j_3 j_2 j_1} + a_{j_3 j_1 j_2}) + \\ & + \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} (a_{j_2 j_2 j_3} + a_{j_2 j_3 j_2} + a_{j_3 j_2 j_2}) + \\ & + \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_3-1} (a_{j_1 j_3 j_3} + a_{j_3 j_1 j_3} + a_{j_3 j_3 j_1}) + \\ & + \sum_{j_3=0}^{N-1} a_{j_3 j_3 j_3}, \end{aligned} \tag{5.360}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} = S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_1 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_2 S_N^{(4)}(a) + \\ & + \mathcal{C}_3 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_3 \mathcal{C}_1 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_3 \mathcal{C}_2 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_3 \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_1 S_N^{(4)}(a) = \\ & = \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_4-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} a_{(j_1 j_2 j_3 j_4)} + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_4-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{(j_2, j_3, j_3, j_4)} a_{(j_2 j_2 j_3 j_4)} + \\ & + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_4-1} \sum_{j_1=0}^{j_3-1} \sum_{(j_1, j_3, j_3, j_4)} a_{(j_1 j_3 j_3 j_4)} + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_4-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1, j_2, j_4, j_4)} a_{(j_1 j_2 j_4 j_4)} + \\ & + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_4-1} \sum_{(j_3, j_3, j_3, j_4)} a_{(j_3 j_3 j_3 j_4)} + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_4-1} \sum_{(j_2, j_2, j_4, j_4)} a_{(j_2 j_2 j_4 j_4)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_4-1} \sum_{(j_1, j_4, j_4, j_4)} a_{(j_1 j_4 j_4 j_4)} + \sum_{j_4=0}^{N-1} a_{j_4 j_4 j_4 j_4} = \\
& = \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_4-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (a_{j_1 j_2 j_3 j_4} + a_{j_1 j_2 j_4 j_3} + a_{j_1 j_3 j_2 j_4} + a_{j_1 j_3 j_4 j_2} + \\
& \quad + a_{j_1 j_4 j_3 j_2} + a_{j_1 j_4 j_2 j_3} + a_{j_2 j_1 j_3 j_4} + a_{j_2 j_3 j_1 j_4} + \\
& \quad + a_{j_2 j_3 j_4 j_1} + a_{j_3 j_1 j_2 j_4} + a_{j_3 j_1 j_4 j_2} + \\
& \quad + a_{j_3 j_2 j_1 j_4} + a_{j_3 j_2 j_4 j_1} + a_{j_3 j_4 j_1 j_2} + a_{j_3 j_4 j_2 j_1} + \\
& \quad + a_{j_4 j_1 j_2 j_3} + a_{j_4 j_1 j_3 j_2} + a_{j_4 j_2 j_1 j_3} + \\
& \quad + a_{j_4 j_2 j_3 j_1} + a_{j_4 j_3 j_1 j_2} + a_{j_4 j_3 j_2 j_1}) + \\
& + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_4-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} (a_{j_2 j_2 j_3 j_4} + a_{j_2 j_2 j_4 j_3} + a_{j_2 j_3 j_2 j_4} + \\
& \quad + a_{j_2 j_4 j_2 j_3} + a_{j_2 j_3 j_4 j_2} + a_{j_2 j_4 j_3 j_2} + \\
& \quad + a_{j_3 j_2 j_2 j_4} + a_{j_4 j_2 j_2 j_3} + a_{j_3 j_2 j_4 j_2} + \\
& \quad + a_{j_4 j_2 j_3 j_2} + a_{j_4 j_3 j_2 j_2} + a_{j_3 j_4 j_2 j_2}) + \\
& + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_4-1} \sum_{j_1=0}^{j_3-1} (a_{j_3 j_3 j_1 j_4} + a_{j_3 j_3 j_4 j_1} + a_{j_3 j_1 j_3 j_4} + \\
& \quad + a_{j_3 j_4 j_3 j_1} + a_{j_3 j_4 j_1 j_3} + a_{j_3 j_1 j_4 j_3} + \\
& \quad + a_{j_1 j_3 j_3 j_4} + a_{j_4 j_3 j_3 j_1} + a_{j_4 j_3 j_1 j_3} + \\
& \quad + a_{j_1 j_3 j_4 j_3} + a_{j_1 j_4 j_3 j_3} + a_{j_4 j_1 j_3 j_3}) + \\
& + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_4-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (a_{j_4 j_4 j_1 j_2} + a_{j_4 j_4 j_2 j_1} + a_{j_4 j_1 j_4 j_2} + \\
& \quad + a_{j_4 j_2 j_4 j_1} + a_{j_4 j_2 j_1 j_4} + a_{j_4 j_1 j_2 j_4} + \\
& \quad + a_{j_1 j_4 j_4 j_2} + a_{j_2 j_4 j_4 j_1} + a_{j_2 j_4 j_1 j_4} + \\
& \quad + a_{j_1 j_4 j_2 j_4} + a_{j_1 j_2 j_4 j_4} + a_{j_2 j_1 j_4 j_4}) + \\
& + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{j_4-1} (a_{j_3 j_3 j_3 j_4} + a_{j_3 j_3 j_4 j_3} + a_{j_3 j_4 j_3 j_3} + a_{j_4 j_3 j_3 j_3}) + \\
& + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_4-1} (a_{j_2 j_2 j_4 j_4} + a_{j_2 j_4 j_2 j_4} + a_{j_2 j_4 j_4 j_2} + \\
& \quad + a_{j_4 j_2 j_2 j_4} + a_{j_4 j_2 j_4 j_2} + a_{j_4 j_4 j_2 j_2}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j_4=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_4-1} (a_{j_1 j_4 j_4 j_4} + a_{j_4 j_1 j_4 j_4} + a_{j_4 j_4 j_1 j_4} + a_{j_4 j_4 j_4 j_1}) + \\
 & + \sum_{j_4=0}^{N-1} a_{j_4 j_4 j_4 j_4}.
 \end{aligned} \tag{5.361}$$

Возможно формула (5.359) при произвольном  $k$  впервые замечена автором. Соотношение (5.359) будет часто использоваться в дальнейшем.

Положим

$$a_{(j_1, \dots, j_k)} = \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}.$$

Тогда из (5.12) и (5.359) имеем

$$\begin{aligned}
 J[\Phi]_{T,t}^{(k)} &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} \times \\
 &\times \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1} \sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1} \dots \sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1} \sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k)} \times \\
 &\times \left[ \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_{s_1-1}}, \tau_{j_{s_1+1}}, \tau_{j_{s_1+1}}, \dots, \tau_{j_{s_r-1}}, \tau_{j_{s_r+1}}, \tau_{j_{s_r+1}}, \dots, \tau_{j_k}) \times \right. \\
 &\times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1-1}}}^{(i_{s_1-1})} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1})} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1+1})} \dots \\
 &\dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r-1}}}^{(i_{s_r-1})} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r})} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r+1})} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)} \Big] = \\
 &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} \text{ с.в. 1,} \tag{5.362}
 \end{aligned}$$

Где

$$\begin{aligned}
 I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} &= \int_t^{t_{s_r+3}} \int_t^{t_{s_r+2}} \int_t^{t_{s_r}} \dots \int_t^{t_{s_1+3}} \int_t^{t_{s_1+2}} \int_t^{t_{s_1}} \dots \int_t^{t_2} \sum_{\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1, \dots, t_k)} \times \\
 &\times \left[ \Phi(t_1, \dots, t_{s_1-1}, t_{s_1+1}, t_{s_1+1}, \dots, t_{s_r-1}, t_{s_r+1}, t_{s_r+1}, \dots, t_k) \times \right. \\
 &\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+1}}^{(i_{s_1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+1}}^{(i_{s_1+1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})} \dots \\
 &\dots d\mathbf{w}_{t_{s_r-1}}^{(i_{s_r-1})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+1}}^{(i_{s_r})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+1}}^{(i_{s_r+1})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+2}}^{(i_{s_r+2})} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \Big] \tag{5.363}
 \end{aligned}$$

и  $\sum_{\emptyset}^{\text{def}} 1, k \geq 2$ ; множество  $\mathcal{A}_{k,r}$  определяется в теореме 3.9 и имеет следующий вид:

$$\mathcal{A}_{k,r} = \{(s_r, \dots, s_1) : s_r > s_{r-1} + 1, \dots, s_2 > s_1 + 1; s_r, \dots, s_1 = 1, \dots, k-1\}.$$

**З а м е ч а н и е 5.3.** Слагаемые в правой части (5.363) следует понимать так: для каждой перестановки из набора

$$\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1, \dots, t_k)$$

следует осуществить замену в правой части (5.363) всех пар (их ровно  $r$ ) дифференциалов с одинаковыми нижними индексами вида  $d\mathbf{w}_{t_p}^{(i)} d\mathbf{w}_{t_p}^{(j)}$  на величины  $\mathbf{1}_{\{i=j \neq 0\}} dt_p$ .

Используя стандартные оценки для моментов стохастических интегралов (см. главу 1), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Phi]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} &\leq \\ \leq C_{nk} \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} \mathbb{M} \left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} \right|^{2n} \right\}, \end{aligned} \quad (5.364)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} \right|^{2n} \right\} &\leq \\ \leq C_{nk}^{s_1 \dots s_r} \int_t^T \dots \int_t^{t_{s_r+3}} \int_t^{t_{s_r+2}} \int_t^{t_{s_r}} \dots \int_t^{t_{s_1+3}} \int_t^{t_{s_1+2}} \int_t^{t_{s_1}} \dots \int_t^{t_2} \sum_{\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1, \dots, t_k)} \times \\ \times \Phi^{2n} (t_1, \dots, t_{s_1-1}, t_{s_1+1}, t_{s_1+1}, \dots, t_{s_r-1}, t_{s_r+1}, t_{s_r+1}, \dots, t_k) \times \\ \times dt_1 \dots dt_{s_1-1} dt_{s_1+1} dt_{s_1+2} \dots dt_{s_r-1} dt_{s_r+1} dt_{s_r+2} \dots dt_k, \end{aligned} \quad (5.365)$$

где перестановки при суммировании в (5.365) осуществляются только в  $\Phi^{2n}(t_1, \dots, t_{s_1-1}, t_{s_1+1}, t_{s_1+1}, \dots, t_{s_r-1}, t_{s_r+1}, t_{s_r+1}, \dots, t_k); C_{nk}, C_{nk}^{s_1 \dots s_r} < \infty$ .

**Лемма 5.4.** В условиях теоремы 5.10

$$J[K^*]_{T,t}^{(k)} = J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} \text{ c.v. 1.} \quad (5.366)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Подставляя (5.355) в (5.12), используя лемму 5.1 и замечание 5.1, нетрудно видеть, что с вероятностью 1

$$J[K^*]_{T,t}^{(k)} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{[k/2]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}, \quad (5.367)$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 3.9. Из (5.367) согласно теореме 3.9 вытекает утверждение леммы.  $\square$ .

Воспользовавшись леммами из доказательства теоремы 5.1, получаем:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} + J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \text{ с в. 1,} \quad (5.368)$$

где  $J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)}$  определен в соответствии с (5.12) и

$$\begin{aligned} R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k) &= \\ &= K^*(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l), \\ \zeta_j^{(i)} &= \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}, \quad p_1, \dots, p_k < \infty. \end{aligned} \quad (5.369)$$

При этом согласно теореме 5.10 поточечно в  $(t, T)^k$  выполняется следующее равенство:

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{p_k \rightarrow \infty} R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k) = 0. \quad (5.370)$$

**Лемма 5.5.** В условиях теоремы 5.10

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{p_k \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left| J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} = 0, \quad n \in N.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно (5.355) и (5.369) имеем

$$\begin{aligned} R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k) &= \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \left( \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \right. \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{2^r} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}}^{k-1} \prod_{l=1}^r \mathbf{1}_{\{t_{s_l} = t_{s_{l+1}}\}} \left. \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq s_1, \dots, s_r}}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} \right) - \\ &\quad - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l). \end{aligned} \quad (5.371)$$

В силу (5.371) функция  $R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k)$  непрерывна в областях интегрирования стохастических интегралов в правой части (5.362) и ограничена на границах этих областей (напомним, что повторный ряд

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l)$$

сходится на границе гиперкуба  $[t, T]^k$ ).

Возьмем  $R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k)$  вместо  $\Phi(t_1, \dots, t_k)$  в (5.364), (5.365):

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} &\leq \\ &\leq C_{nk} \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} \mathbb{M} \left\{ \left| I[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} \right|^{2n} \right\}, \end{aligned} \quad (5.372)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| I[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} \right|^{2n} \right\} &\leq \\ &\leq C_{nk}^{s_1 \dots s_r} \int_t^T \dots \int_t^{t_{s_r+3}} \int_t^{t_{s_r+2}} \int_t^{t_{s_r}} \dots \int_t^{t_{s_1+3}} \int_t^{t_{s_1+2}} \int_t^{t_{s_1}} \dots \int_t^{t_2} \sum_{\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1, \dots, t_k)} \times \\ &\times R_{p_1 \dots p_k}^{2n}(t_1, \dots, t_{s_1-1}, t_{s_1+1}, t_{s_1+1}, \dots, t_{s_r-1}, t_{s_r+1}, t_{s_r+1}, \dots, t_k) \times \\ &\times dt_1 \dots dt_{s_1-1} dt_{s_1+1} dt_{s_1+2} \dots dt_{s_r-1} dt_{s_r+1} dt_{s_r+2} \dots dt_k, \end{aligned} \quad (5.373)$$

где перестановки при суммировании в (5.373) осуществляются только в  $R_{p_1 \dots p_k}^{2n}(t_1, \dots, t_{s_1-1}, t_{s_1+1}, t_{s_1+1}, \dots, t_{s_r-1}, t_{s_r+1}, t_{s_r+1}, \dots, t_k)$ ;  $C_{nk}$ ,  $C_{nk}^{s_1 \dots s_r} < \infty$ .

В частности при  $k = 3$  оценка (5.372) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| J[R_{p_1 p_2 p_3}]_{T,t}^{(3)} \right|^{2n} \right\} &\leq \\ &\leq C \left( \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \left( (R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_2, t_3))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_1, t_3, t_2))^{2n} + \right. \right. \\ &+ (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_1, t_3))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_1))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_1))^{2n} \\ &\quad \left. \left. + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_1, t_2))^{2n} \right) dt_1 dt_2 dt_3 + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T \int_t^{t_3} \left( (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_2, t_3))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_3, t_2))^{2n} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_3))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_3))^{2n} + \right) dt_1 dt_2 dt_3 + \right. \end{aligned}$$

$$+ (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_2))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_3))^{2n} + \\ + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_3, t_2, t_2))^{2n} + (R_{p_1 p_2 p_3}(t_2, t_3, t_3))^{2n} \Big) dt_2 dt_3 \Big), \quad (5.374)$$

где  $C$  — постоянная.

Осуществим повторный предельный переход  $\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{p_k \rightarrow \infty}$  под знаками интегралов в оценках (5.372), (5.373) (в частности при  $k = 3$  в (5.374)) подобно тому, как это сделано в двумерном случае при получении (5.327), с учетом (5.370). В результате придем к утверждению леммы 5.5. Лемма 5.5, а вместе с ней и теорема 5.9 доказаны.  $\square$

Отметим, что согласно теореме 5.9 можно аппроксимировать повторный стохастический интеграл Стратоновича  $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$  представлением вида:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1 \dots p_k} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)}; \quad p_1, \dots, p_k < \infty. \quad (5.375)$$

Нетрудно видеть, что если мы разложим функцию  $K^*(t_1, \dots, t_k)$  в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$  сначала по переменной  $t_k$ , затем по переменной  $t_{k-1}$  и т.д., то мы получим разложение:

$$K^*(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j_k=0}^{\infty} \dots \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \quad (5.376)$$

вместо разложения (5.356).

Докажем разложение (5.376). Аналогично (5.338) имеем:

$$\psi_k(t_k) \left( \mathbf{1}_{\{t_{k-1} < t_k\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_{k-1} = t_k\}} \right) = \sum_{j_k=0}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) dt_k \phi_{j_k}(t_k), \quad (5.377)$$

причем сходимость ряда к функции в левой части (5.377) поточечная на интервале  $(t, T)$  и ряд сходится при  $t_1 = t, T$ .

Введем предположение индукции:

$$\sum_{j_k=0}^{\infty} \dots \sum_{j_3=0}^{\infty} \psi_2(t_2) \int_{t_2}^T \psi_3(t_3) \phi_{j_3}(t_3) \dots \int_{t_{k-1}}^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) dt_k \dots dt_3 \times \\ \times \prod_{l=3}^k \phi_{j_l}(t_l) = \prod_{l=2}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=2}^{k-1} \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right). \quad (5.378)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j_k=0}^{\infty} \dots \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \dots \int_{t_{k-1}}^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) dt_k \dots dt_2 \times \\
 & \times \prod_{l=2}^k \phi_{j_l}(t_l) = \sum_{j_k=0}^{\infty} \dots \sum_{j_3=0}^{\infty} \psi_1(t_1) \left( \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \right) \psi_2(t_2) \times \\
 & \times \int_{t_2}^T \psi_3(t_3) \phi_{j_3}(t_3) \dots \int_{t_{k-1}}^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) dt_k \dots dt_3 \prod_{l=3}^k \phi_{j_l}(t_l) = \\
 & = \psi_1(t_1) \left( \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \right) \sum_{j_k=0}^{\infty} \dots \sum_{j_3=0}^{\infty} \psi_2(t_2) \times \\
 & \times \int_{t_2}^T \psi_3(t_3) \phi_{j_3}(t_3) \dots \int_{t_{k-1}}^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) dt_k \dots dt_3 \prod_{l=3}^k \phi_{j_l}(t_l) = \\
 & = \psi_1(t_1) \left( \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \right) \prod_{l=2}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=2}^{k-1} \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right) = \\
 & = \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right). \tag{5.379}
 \end{aligned}$$

С другой стороны левая часть (5.379) может быть представлена путем разложения функции

$$\psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \dots \int_{t_{k-1}}^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) dt_k \dots dt_2$$

в ряд Фурье на интервале  $(t, T)$  по переменной  $t_1$  к следующему виду:

$$\sum_{j_k=0}^{\infty} \dots \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l),$$

где мы использовали следующую замену порядка интегрирования:

$$\begin{aligned}
 & \int_t^T \psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \dots \int_{t_{k-1}}^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1 = \\
 & = \int_t^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_k = \\
 & = C_{j_k \dots j_1}.
 \end{aligned}$$

Разложение (5.376) доказано. Таким образом мы можем сформулировать следующую теорему.

**Теорема 5.11.** *Пусть выполнены условия теоремы 5.9. Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича  $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$  вида (5.352) разлагается в следующий сходящийся в среднем степени  $2n$  ( $n \in N$ ) повторный ряд*

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{p_k \rightarrow \infty} \dots \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{p_k} \dots \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_k \dots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \dots \zeta_{j_k}^{(i_k)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в теорему 5.9.

## 5.13 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности 2, 3 и 4, основанное на обобщенных кратных и повторных рядах Фурье. Другие доказательства теорем 5.3, 5.5\* и 5.7

В данном разделе рассмотрим метод разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича 2, 3 и 4 кратностей, который является модификацией теоремы 5.9 (мы используем другой предельный переход в этой теореме при  $k = 2, 3, 4$ ) и дает возможность получить новые и существенно отличающиеся от приведенных ранее доказательства теорем 5.3, 5.5\* и 5.7.

Эти результаты создают цельную картину о механизме разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича с использованием кратных и повторных рядов Фурье.

### 5.13.1 Случай интегралов 2 кратности. Другое доказательство теоремы 5.3

Сформулируем теорему 5.3 и приведем другое доказательство этой теоремы.

**Теорема 5.12.** *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. *Функция  $\psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а функция  $\psi_1(\tau)$  — дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ .*

2.  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда, повторный стохастический интеграл Стратоновича второй кратности

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \quad (i_1, i_2 = 1, \dots, m)$$

разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \underset{p_1, p_2 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины для различных  $i$  или  $j$  (если  $i \neq 0$ ),

$$C_{j_2 j_1} = \int_{[t,T]^2} K(t_1, t_2) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) dt_1 dt_2,$$

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2), & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}; \quad t_1, t_2 \in [t, T].$$

**Доказательство.** Используя схему доказательства теоремы 5.1 и (5.320), получаем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)} \text{ с.в. 1},$$

где  $J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)}$  определен формулой (5.12):

$$\begin{aligned} J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)} &= \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} R_{p_1 p_2}(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} = \\ &= \int_t^T \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2}(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} + \int_t^T \int_t^{t_1} R_{p_1 p_2}(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} + \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \int_t^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 \text{ с в. 1;}$$

$$R_{p_1 p_2}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1, t_2) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2); \quad p_1, p_2 < \infty,$$

$$K^*(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1),$$

где  $t_1, t_2 \in [t, T]$ .

Используя стандартные свойства и оценки моментов стохастических интегралов, получим:

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left( J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)} \right)^2 \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \left( \int_t^T \int_t^{t_2} R_{p_1 p_2}(t_1, t_2) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} + \int_t^T \int_t^{t_1} R_{p_1 p_2}(t_1, t_2) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \left( \int_t^T R_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1 \right)^2 \leq \\ & \leq 2 \left( \int_t^T \int_t^{t_2} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 + \int_t^T \int_t^{t_1} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^2 dt_2 dt_1 \right) + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \left( \int_t^T (R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)) dt_1 \right)^2 = \\ & = 2 \int_{[t,T]^2} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \left( \int_t^T (R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)) dt_1 \right)^2. \quad (5.380) \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{[t,T]^2} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 = \\ & = \int_{[t,T]^2} \left( K^*(t_1, t_2) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \right)^2 dt_1 dt_2 = \\ & = \int_{[t,T]^2} \left( K(t_1, t_2) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \right)^2 dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Функция  $K(t_1, t_2)$  является кусочно непрерывной в квадрате  $[t, T]^2$ . В этой ситуации хорошо известно, что кратный ряд Фурье функции  $K(t_1, t_2) \in L_2([t, T]^2)$  сходится к этой функции в квадрате  $[t, T]^2$  в среднеквадратическом смысле, т.е.:

$$\lim_{p_1, p_2 \rightarrow \infty} \left\| K(t_1, t_2) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \prod_{l=1}^2 \phi_{j_l}(t_l) \right\| = 0,$$

где

$$\|f\| = \left( \int_{[t, T]^2} f^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом

$$\lim_{p_1, p_2 \rightarrow \infty} \int_{[t, T]^2} (R_{p_1 p_2}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 = 0. \quad (5.381)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} & \int_t^T (R_{p_1 p_2}(t_1, t_1)) dt_1 = \\ &= \int_t^T \left( \frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right) dt_1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^{\min\{p_1, p_2\}} C_{j_1 j_1}. \end{aligned} \quad (5.382)$$

Ранее нами было доказано, что

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \quad (5.383)$$

Из (5.380) – (5.383) следует, что

$$\lim_{p_1, p_2 \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( J[R_{p_1 p_2}]_{T,t}^{(2)} \right)^2 \right\} = 0.$$

Теорема 5.12 доказана.  $\square$

### 5.13.2 Случай интегралов 3 кратности. Другое доказательство теоремы 5.5\*

Сформулируем теорему 5.5\* и приведем другое ее доказательство.

**Теорема 5.13.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ , функция  $\psi_2(s)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а функции  $\psi_1(s), \psi_3(s)$  — дважды непрерывно дифференцируемы на интервале  $[t, T]$ .

Тогда для повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_3(t_3) \int_t^{*t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}$$

( $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ ) справедливо следующее, сходящееся в среднеквадратическом смысле, разложение

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.384)$$

где

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \psi_3(s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds,$$

а другие обозначения соответствуют обозначениям теоремы 5.1.

**Доказательство.** Рассмотрим (5.346) при  $p_1 = p_2 = p_3 = p$ :

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + J[R_{ppp}]_{T,t}^{(3)} \text{ с. в. 1}, \quad (5.385)$$

где

$$J[R_{ppp}]_{T,t}^{(3)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} R_{ppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)},$$

$$R_{ppp}(t_1, t_2, t_3) \stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1, t_2, t_3) - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3),$$

$$K^*(t_1, t_2, t_3) = \prod_{l=1}^3 \psi_l(t_l) \left( \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} \Big).$$

Используя (5.360) для кратной суммы, с в. 1 получим:

$$\begin{aligned}
 J[R_{ppp}]_{T,t}^{(3)} &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} R_{ppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\
 &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{l_3-1} \sum_{l_1=0}^{l_2-1} \left( R_{ppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} + \right. \\
 &\quad + R_{ppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_3}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} + \\
 &\quad + R_{ppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_1}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} + \\
 &\quad + R_{ppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_1}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} + \\
 &\quad + R_{ppp}(\tau_{l_3}, \tau_{l_2}, \tau_{l_1}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} + \\
 &\quad \left. + R_{ppp}(\tau_{l_3}, \tau_{l_1}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} \right) + \\
 &+ \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{l_3-1} \left( R_{ppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_1}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} + \right. \\
 &\quad + R_{ppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} + \\
 &\quad \left. + R_{ppp}(\tau_{l_3}, \tau_{l_2}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} \right) + \\
 &+ \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{l_3-1} \left( R_{ppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_3}, \tau_{l_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} + \right. \\
 &\quad + R_{ppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_3}, \tau_{l_1}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} + \\
 &\quad \left. + R_{ppp}(\tau_{l_3}, \tau_{l_1}, \tau_{l_1}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} \right) + \\
 &+ \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_3=0}^{N-1} R_{ppp}(\tau_{l_3}, \tau_{l_3}, \tau_{l_3}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\
 &= R_{T,t}^{(1)ppp} + R_{T,t}^{(2)ppp}, \tag{5.386}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(1)ppp} &= \\
 &= \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{ppp}(t_1, t_2, t_3) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{ppp}(t_1, t_3, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_2)} + \\
& + \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{ppp}(t_2, t_1, t_3) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
& + \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{ppp}(t_2, t_3, t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_2)} + \\
& + \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{ppp}(t_3, t_2, t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} + \\
& + \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{ppp}(t_3, t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)}; \\
R_{T,t}^{(2)ppp} = & \\
= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} & R_{ppp}(t_2, t_2, t_3) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} & R_{ppp}(t_2, t_3, t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_2)} + \\
+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} & R_{ppp}(t_3, t_2, t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} + \\
+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} & R_{ppp}(t_1, t_3, t_3) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 + \\
+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} & R_{ppp}(t_3, t_1, t_3) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} dt_3 + \\
+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} & R_{ppp}(t_3, t_3, t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} dt_3.
\end{aligned}$$

Имеем:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[R_{ppp}]_{T,t}^{(3)} \right)^2 \right\} \leq 2\mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(1)ppp} \right)^2 \right\} + 2\mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(2)ppp} \right)^2 \right\}. \quad (5.387)$$

Используя стандартные оценки моментов стохастических интегралов приходим к следующему неравенству:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(1)ppp} \right)^2 \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \left( (R_{ppp}(t_1, t_2, t_3))^2 + (R_{ppp}(t_1, t_3, t_2))^2 + \right. \\
 &+ (R_{ppp}(t_2, t_1, t_3))^2 + (R_{ppp}(t_2, t_3, t_1))^2 + (R_{ppp}(t_3, t_2, t_1))^2 + \\
 &\quad \left. + (R_{ppp}(t_3, t_1, t_2))^2 \right) dt_1 dt_2 dt_3 = \\
 &= \int_{[t, T]^3} (R_{ppp}(t_1, t_2, t_3))^2 dt_1 dt_2 dt_3,
 \end{aligned}$$

где  $C$  — постоянная.

Имеем:

$$\begin{aligned}
 &\int_{[t, T]^3} (R_{ppp}(t_1, t_2, t_3))^2 dt_1 dt_2 dt_3 = \\
 &= \int_{[t, T]^3} \left( K^*(t_1, t_2, t_3) - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3) \right)^2 \times \\
 &\quad \times dt_1 dt_2 dt_3 = \\
 &= \int_{[t, T]^3} \left( K(t_1, t_2, t_3) - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3) \right)^2 \times \\
 &\quad \times dt_1 dt_2 dt_3,
 \end{aligned}$$

где

$$K(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \psi_3(t_3), & t_1 < t_2 < t_3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}; \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T].$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
 &\lim_{p \rightarrow \infty} M \left\{ \left( R_{T,t}^{(1)ppp} \right)^2 \right\} \leq \\
 &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{[t, T]^3} \left( K(t_1, t_2, t_3) - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3) \right)^2 \times \\
 &\quad \times dt_1 dt_2 dt_3 = 0, \tag{5.388}
 \end{aligned}$$

где  $K(t_1, t_2, t_3) \in L_2([t, T]^3)$ .

После замены порядка интегрирования в стохастических интегралах Ито (см. теорему 3.1) в  $R_{T,t}^{(2)ppp}$  с в. 1 получим:

$$\begin{aligned}
& R_{T,t}^{(2)ppp} = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \left( \int_t^T \int_t^{t_3} R_{ppp}(t_2, t_2, t_3) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \right. \\
& \quad \left. + \int_t^T \int_t^{t_3} R_{ppp}(t_3, t_3, t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} dt_3 \right) + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \left( \int_t^T \int_t^{t_3} R_{ppp}(t_3, t_2, t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + \int_t^T \int_t^{t_3} R_{ppp}(t_1, t_3, t_3) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 \right) + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \left( \int_t^T \int_t^{t_3} R_{ppp}(t_2, t_3, t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_2)} + \right. \\
& \quad \left. + \int_t^T \int_t^{t_3} R_{ppp}(t_3, t_1, t_3) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} dt_3 \right) = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \left( \int_t^T \int_t^{t_1} R_{ppp}(t_2, t_2, t_1) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} + \right. \\
& \quad \left. + \int_t^T \int_t^{t_1} R_{ppp}(t_2, t_2, t_1) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} \right) + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \left( \int_t^T \int_t^{t_1} R_{ppp}(t_1, t_2, t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + \int_t^T \int_t^{t_1} R_{ppp}(t_1, t_2, t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \right) + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \left( \int_t^T \int_t^{t_1} R_{ppp}(t_2, t_1, t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} + \right. \\
& \quad \left. + \int_t^T \int_t^{t_1} R_{ppp}(t_2, t_1, t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} \right) = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \left( \int_t^T R_{ppp}(t_2, t_2, t_3) dt_2 \right) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \left( \int_t^T R_{ppp}(t_1, t_2, t_2) dt_2 \right) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \left( \int_t^T R_{ppp}(t_3, t_2, t_3) dt_3 \right) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^T \left( \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} \right) \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) \psi_3(t_3) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3) \right) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^T \left( \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \right) \psi_1(t_1) \psi_2(t_2) \psi_3(t_2) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_2) \right) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^T \left( \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} \psi_1(t_3) \psi_2(t_2) \psi_3(t_3) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_3) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3) \right) dt_3 d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \left( \frac{1}{2} \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) dt_2 - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \phi_{j_3}(t_3) \right) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \left( \frac{1}{2} \psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_2) \psi_3(t_2) dt_2 - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \right) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T (-1) \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p C_{j_1 j_2 j_1} \phi_{j_2}(t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_2) \psi_3(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right) - \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)}.
 \end{aligned}$$

Из теоремы 5.5\* получаем:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(2)ppp} \right)^2 \right\} \leq \\
 & \leq C \left( \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbb{M} \left\{ \left( \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbb{M} \left\{ \left( \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_2) \psi_3(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_3=0}^p C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \right)^2 \right\} \right) \rightarrow 0 \quad (5.389)
 \end{aligned}$$

при  $p \rightarrow \infty$ , где  $C$  — постоянная. Из (5.385) - (5.389) мы получим разложение (5.384). Теорема 5.13 доказана.  $\square$

### 5.13.3 Случай интегралов 4 кратности. Другое доказательство теоремы 5.7

Сформулируем теорему 5.7 и приведем другое ее доказательство.

**Теорема 5.14.** Пусть  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда, для повторного стохастического интеграла Стратоновича 4 кратности

$$I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} = \int_t^T \int_t^{*t_4} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)}$$

$(i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, \dots, m)$  справедливо следующее сходящееся в среднеквадратическом смысле разложение

$$I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} = \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

где

$$\begin{aligned} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} &= \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_2}(s_2) \int_t^{s_2} \phi_{j_1}(s_3) ds_3 ds_2 ds_1 ds, \\ \zeta_j^{(i)} &= \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \end{aligned}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины для различных  $i$  или  $j$  (при  $i \neq 0$ ),  $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  — независимые стандартные винеровские процессы ( $i = 1, \dots, m$ ),  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ,  $\lambda_l = 0$  при  $i_l = 0$  и  $\lambda_l = 1$  при  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, 2, 3, 4$ .

Доказательство. Рассмотрим (5.368) при  $k = 4$ ,  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$  и  $\psi_1(s)$ ,  $\psi_2(s)$ ,  $\psi_3(s)$ ,  $\psi_4(s) \equiv 1$ :

$$I_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} = \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p \sum_{j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + J[R_{pppp}]_{T,t}^{(4)} \text{ с. в. 1}, \quad (5.390)$$

где

$$\begin{aligned} J[R_{pppp}]_{T,t}^{(4)} &= \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_4}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \times \\ &\quad \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{pppp}(t_1, t_2, t_3, t_4) &\stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1, t_2, t_3, t_4) - \\ &- \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_3=0}^p \sum_{j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3) \phi_{j_4}(t_4), \end{aligned}$$

$$K^*(t_1, t_2, t_3, t_4) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{l=1}^3 \left( \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_l = t_{l+1}\}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2 < t_3 < t_4\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2 < t_3 < t_4\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2 = t_3 < t_4\}} + \\
 &+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2 = t_3 < t_4\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2 < t_3 = t_4\}} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2 < t_3 = t_4\}} + \\
 &+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2 = t_3 = t_4\}} + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2 = t_3 = t_4\}}.
 \end{aligned}$$

Используя формулу (5.361) для кратной суммы, с в. 1 получим:

$$J[R_{pppp}]_{T,t}^{(4)} = \sum_{i=0}^7 R_{T,t}^{(i)pppp}, \quad (5.391)$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(0)pppp} = &\underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_3=0}^{l_4-1} \sum_{l_2=0}^{l_3-1} \sum_{l_1=0}^{l_2-1} \left( R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_4}) \times \right. \\
 &\times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} \left. \right),
 \end{aligned}$$

где суммирование по перестановкам  $(l_1, l_2, l_3, l_4)$  осуществляется только в выражении, взятом в скобки;

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(1)pppp} = &\mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_3, l_1=0 \\ l_1 \neq l_3, l_1 \neq l_4, l_3 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_1}, \tau_{l_3}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(2)pppp} = &\mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_4, l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_1}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(3)pppp} = &\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_3, l_2 \neq l_3}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_1}) \times \\
 &\times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(4)pppp} = &\mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_4, l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)},
 \end{aligned}$$

$$R_{T,t}^{(5)pppp} = \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_3, l_2 \neq l_3}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_2}) \times \\ \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)},$$

$$R_{T,t}^{(6)pppp} = \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_3, l_2 \neq l_3}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_3}) \times \\ \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \tau_{l_3},$$

$$R_{T,t}^{(7)pppp} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_4, l_2=0 \\ l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_4}) \times \\ \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} + \\ + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_4, l_2=0 \\ l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}) \times \\ \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} + \\ + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_4, l_2=0 \\ l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_4}, \tau_{l_2}) \times \\ \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4}.$$

Из (5.390) и (5.391) следует, что теорема 5.14 будет доказана, если

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M \left\{ \left( R_{T,t}^{(i)pppp} \right)^2 \right\} = 0; \quad i = 0, 1, \dots, 7.$$

Имеем (см. (5.14)):

$$R_{T,t}^{(0)pppp} = \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \sum_{(t_1, t_2, t_3, t_4)} \left( R_{pppp}(t_1, t_2, t_3, t_4) \times \right. \\ \left. \times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} \right),$$

где суммирование по перестановкам  $(t_1, t_2, t_3, t_4)$  осуществляется только в выражении, взятом в скобки.

С другой стороны (см. теорему 5.1):

$$R_{T,t}^{(0)pppp} = \sum_{(t_1,t_2,t_3,t_4)} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} R_{pppp}(t_1, t_2, t_3, t_4) \times \\ \times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)},$$

где перестановки  $(t_1, \dots, t_4)$  при суммировании осуществляются только в выражении  $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)}$ , при этом индексы верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах меняются соответствующим образом и если  $t_r$  поменялось местами с  $t_q$  в перестановке  $(t_1, \dots, t_4)$ , то  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, \dots, i_4)$ .

Таким образом, получим:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(0)pppp} \right)^2 \right\} \leq C \sum_{(t_1,t_2,t_3,t_4)} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} (R_{pppp}(t_1, t_2, t_3, t_4))^2 \times \\ \times dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 = \\ = C \int_{[t,T]^4} (R_{pppp}(t_1, t_2, t_3, t_4))^2 dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \rightarrow 0$$

при  $p \rightarrow \infty$ ;  $K^*(t_1, t_2, t_3, t_4) \in L_2([t, T]^4)$ , где  $C$  — постоянная.

Рассмотрим  $R_{T,t}^{(1)pppp}$ :

$$R_{T,t}^{(1)pppp} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_3, l_1=0 \\ l_1 \neq l_3, l_1 \neq l_4, l_3 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_1}, \tau_{l_3}, \tau_{l_4}) \times \\ \times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\ = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_3, l_1=0 \\ l_3 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_1}, \tau_{l_3}, \tau_{l_4}) \times \\ \times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\ = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_3, l_1=0 \\ l_3 \neq l_4}}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_3} < \tau_{l_4}\}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} = \tau_{l_3} < \tau_{l_4}\}} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_3} = \tau_{l_4}\}} + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} = \tau_{l_3} = \tau_{l_4}\}} - \right. \\ \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_1}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_3, l_1=0 \\ l_3 \neq l_4}}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_3} < \tau_{l_4}\}} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_1}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_3} < \tau_{l_4}\}} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_1}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} - \\
&\quad - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} \left( 0 - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_1}) \phi_{j_3}(\tau_{l_4}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \tau_{l_1} \Delta \tau_{l_4} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} - \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right) + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_1} \text{с в. 1.}
\end{aligned}$$

В теореме 5.7 мы доказали, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_1} = \frac{1}{4} \int_t^T \int_t^{t_2} dt_1 dt_2, \\
&\text{l.i.m.} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_3} dt_1 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \frac{1}{4} \int_t^T \int_t^{t_2} dt_1 dt_2 \text{ с в. 1.}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(1)pppp} \right)^2 \right\} = 0.$$

Рассмотрим  $R_{T,t}^{(2)pppp}$ :

$$R_{T,t}^{(2)pppp} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_4, l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_1}, \tau_{l_4}) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_1}, \tau_{l_4}) \times \\
& \quad \times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_2 \neq l_4}}^{N-1} \left( \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1}=\tau_{l_2} < \tau_{l_4}\}} + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1}=\tau_{l_2}=\tau_{l_4}\}} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_1}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \times \\
& \quad \times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\
& = \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} (-1) \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \\
& \quad \times \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_1}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} - \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} (-1) \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \\
& \quad \times \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_4}) \phi_{j_3}(\tau_{l_1}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \Delta \tau_{l_1} \Delta \tau_{l_4} = \\
& = - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \sum_{j_4, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_1 j_4 j_1} \text{с в. 1.}
\end{aligned}$$

В теореме 5.7 мы доказали, что

$$\underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} = 0 \text{ с в. 1,}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_1 j_4 j_1} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(2)pppp} \right)^2 \right\} = 0.$$

Рассмотрим  $R_{T,t}^{(3)pppp}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(3)pppp} &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1 = 0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_3, l_2 \neq l_3}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_1}) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1 = 0 \\ l_2 \neq l_3}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_1}) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1 = 0 \\ l_2 \neq l_3}}^{N-1} \left( \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1}=\tau_{l_2}=\tau_{l_3}\}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_1}) \right) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} (-1)^p \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \\
 &\quad \times \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_1}) \Delta \tau_{l_1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} - \\
 &\quad - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} (-1)^p \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \\
 &\quad \times \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_3}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_1}) \Delta \tau_{l_1} \Delta \tau_{l_3} = \\
 &= -\mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_4} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 &\quad + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \sum_{j_4, j_2=0}^p C_{j_4 j_2 j_2 j_4} \text{с в. 1.}
 \end{aligned}$$

В теореме 5.7 мы доказали, что

$$\underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4, j_3, j_2=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_4} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = 0 \text{ с в. 1,}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_2=0}^p C_{j_4 j_2 j_2 j_4} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M \left\{ \left( R_{T,t}^{(3)pppp} \right)^2 \right\} = 0.$$

Рассмотрим  $R_{T,t}^{(4)pppp}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(4)pppp} &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_4, l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\quad \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\quad \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_4}}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_2} < \tau_{l_4}\}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} = \tau_{l_2} < \tau_{l_4}\}} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_2} = \tau_{l_4}\}} + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} = \tau_{l_2} = \tau_{l_4}\}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_2}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_4, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_4}}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_2} < \tau_{l_4}\}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_2}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_2} < \tau_{l_4}\}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_2}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_4}}^{(i_4)} - \\
 &\quad - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} (-1) \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \\
 &\quad \times \phi_{j_1}(\tau_{l_4}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_2}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_2} d \mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 d \mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} - \sum_{j_4, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right) +
 \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \sum_{j_4,j_2=0}^p C_{j_4 j_2 j_2 j_4} \text{ с в. 1.}$$

В теореме 5.7 мы доказали, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4,j_2=0}^p C_{j_4 j_2 j_2 j_4} = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4,j_2,j_1=0}^p C_{j_4 j_2 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_4} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_2 d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} \text{ с в. 1.}$$

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(4)pppp} \right)^2 \right\} = 0.$$

Рассмотрим  $R_{T,t}^{(5)pppp}$ :

$$\begin{aligned} R_{T,t}^{(5)pppp} &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_3,l_2,l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_3, l_2 \neq l_3}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_2}) \times \\ &\quad \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\ &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_3,l_2,l_1=0 \\ l_1 \neq l_3}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_2}) \times \\ &\quad \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\ &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_3,l_2,l_1=0 \\ l_1 \neq l_3}}^{N-1} \left( \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_2} = \tau_{l_3}\}} + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} = \tau_{l_2} = \tau_{l_3}\}} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_2}) \right) \times \\ &\quad \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\ &= \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_3,l_2,l_1=0 \\ l_1 \neq l_3}}^{N-1} (-1) \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \\ &\quad \times \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_2}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \tau_{l_2} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} = \\ &= - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \sum_{j_4,j_3,j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_4 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} (-1) \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \\
 & \times \phi_{j_1}(\tau_{l_3}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_2}) \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_3} = \\
 & = -\mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_4 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_1 j_4 j_1} \text{с в. 1}.
 \end{aligned}$$

В теореме 5.7 мы доказали, что

$$\begin{aligned}
 & \underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4, j_3, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_4 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = 0 \text{ с в. 1}, \\
 & \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_1 j_4 j_1} = 0.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(5)pppp} \right)^2 \right\} = 0.$$

Рассмотрим  $R_{T,t}^{(6)pppp}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(6)pppp} & = \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2, l_1 \neq l_3, l_2 \neq l_3}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_3}) \times \\
 & \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \tau_{l_3} = \\
 & = \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \tau_{l_3}, \tau_{l_3}) \times \\
 & \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \tau_{l_3} = \\
 & = \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2}}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_2} < \tau_{l_3}\}} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} = \tau_{l_2} < \tau_{l_3}\}} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_2} = \tau_{l_3}\}} + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} = \tau_{l_2} = \tau_{l_3}\}} - \right. \\
 & \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_3}) \right) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \tau_{l_3} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_3, l_2, l_1=0 \\ l_1 \neq l_2}}^{N-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_1} < \tau_{l_2} < \tau_{l_3}\}} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_3}) \right) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)} \Delta \tau_{l_3} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 - \sum_{j_4, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right) - \\
&\quad - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{N-1} (-1)^{l_3-l_1} \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \\
&\quad \times \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \phi_{j_2}(\tau_{l_1}) \phi_{j_3}(\tau_{l_3}) \phi_{j_4}(\tau_{l_3}) \Delta \tau_{l_1} \Delta \tau_{l_3} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 - \sum_{j_4, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right) + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_1} = \\
&= \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \int_t^{t_3} dt_1 dt_3 - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_4, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right) + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \left( \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_1} - \frac{1}{4} \int_t^T \int_t^{t_3} dt_1 dt_3 \right) \text{ с в. 1.}
\end{aligned}$$

В теореме 5.7 мы доказали, что

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4, j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_1} &= \frac{1}{4} \int_t^T \int_t^{t_3} dt_1 dt_3, \\
\underset{p \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} &= \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 + \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{4} \int_t^T \int_t^{t_3} dt_1 dt_3 \text{ с в. 1.}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{(6)pppp} \right)^2 \right\} = 0.$$

Рассмотрим  $R_{T,t}^{(7)pppp}$ :

$$\begin{aligned}
 R_{T,t}^{(7)pppp} &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_4, l_2=0 \\ l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} + \\
 &+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_4, l_2=0 \\ l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} + \\
 &+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_4, l_2=0 \\ l_2 \neq l_4}}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_4}, \tau_{l_2}) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} + \\
 &+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_2}, \tau_{l_4}) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} + \\
 &+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} R_{pppp}(\tau_{l_2}, \tau_{l_4}, \tau_{l_4}, \tau_{l_2}) \times \\
 &\quad \times \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} = \\
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \left( \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_2} < \tau_{l_4}\}} + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_2} = \tau_{l_4}\}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(\tau_{l_2}) \phi_{j_2}(\tau_{l_2}) \phi_{j_3}(\tau_{l_4}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} + \\
 &+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \left( \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_2} = \tau_{l_4}\}} - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \phi_{j_1}(\tau_{l_2}) \phi_{j_2}(\tau_{l_4}) \phi_{j_3}(\tau_{l_2}) \phi_{j_4}(\tau_{l_4}) \right) \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} + \\
 &+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_4=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \left( \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{\tau_{l_2} = \tau_{l_4}\}} - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \phi_{j_1}(\tau_{l_2}) \phi_{j_2}(\tau_{l_4}) \phi_{j_3}(\tau_{l_4}) \phi_{j_4}(\tau_{l_2}) \right) \Delta \tau_{l_2} \Delta \tau_{l_4} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \left( \frac{1}{4} \int_t^T \int_t^{t_4} dt_2 dt_4 - \sum_{j_4,j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_1} \right) - \\
 &\quad - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \sum_{j_4,j_1=0}^p C_{j_4 j_1 j_4 j_1} - \\
 &\quad - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \sum_{j_4,j_2=0}^p C_{j_4 j_2 j_2 j_4}.
 \end{aligned}$$

В теореме 5.7 мы доказали, что

$$\begin{aligned}
 \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4,j_1=0}^p C_{j_4 j_4 j_1 j_1} &= \frac{1}{4} \int_t^T \int_t^{t_4} dt_2 dt_4, \\
 \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4,j_1=0}^p C_{j_4 j_1 j_4 j_1} &= 0, \\
 \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_4,j_2=0}^p C_{j_4 j_2 j_2 j_4} &= 0.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} R_{T,t}^{(7)pppp} = 0.$$

Теорема 5.14 доказана.  $\square$

## 5.14 Еще раз о теореме 5.8 и ее модификациях. Общие идеи, связанные с разложениями повторных стохастических интегралов Стратоновича

Напомним, что в разд. 5.11 на основании теорем 5.3, 5.3\*, 5.4, 5.5, 5.5\*, 5.6, 5.7, 5.7\* была сформулирована (без доказательства) теорема 5.8.

Общая идея доказательств теорем 5.3, 5.3\*, 5.4, 5.5, 5.5\*, 5.6, 5.7, 5.7\* основана на доказательстве (при различных упрощающих предположениях) следующего равенства:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{r=1}^{[k/2]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} = \\
 &= \lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \prod_{g=1}^k \phi_{j_g}(\tau_{l_g}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_g}}^{(i_g)} \text{ с в. 1, } (5.392)
 \end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений теорем 3.9 и 5.1.

Согласно теоремам 3.9 и 5.1 выполнение равенства (5.392) приводит к более общему, чем сформулированное в теореме 5.8, разложению:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \dots \zeta_{j_k}^{(i_k)}, \quad (5.393)$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 5.9.

В случае  $p_1 = \dots = p_k = p$  и  $\psi_l(s) \equiv 1$  ( $l = 1, \dots, k$ ) из (5.393) мы получим утверждение теоремы 5.8.

В частности, в теоремах 5.3, 5.3\*, 5.4, 5.5\*, 5.7, 5.7\* соотношение (5.393) доказано для следующих частных случаев:

1.  $\psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а  $\psi_1(\tau)$  — дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , причем  $p_1, p_2 \rightarrow \infty$  (теорема 5.3).

2.  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируемы на интервале  $[t, T]$ , причем  $p_1, p_2 \rightarrow \infty$  (теорема 5.3\*).

3.  $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv 1$ , причем  $p_1, p_2, p_3 \rightarrow \infty$  (частный случай теоремы 5.4).

4.  $\psi_2(s)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а  $\psi_1(s), \psi_3(s)$  — дважды непрерывно дифференцируемы на интервале  $[t, T]$ , причем  $p_1 = p_2 = p_3 = p \rightarrow \infty$  (теорема 5.5\*).

5.  $\psi_1(s), \dots, \psi_4(s) \equiv 1$ , причем  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p \rightarrow \infty$  (теорема 5.7).

6.  $\psi_1(s), \dots, \psi_5(s) \equiv 1$ , причем  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p \rightarrow \infty$  (теорема 5.7\*).

Следует отметить, что теоремы 5.12–5.14, а также полученное в теореме 5.9 допредельное выражение вида:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} + J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \text{ с.в. 1,}$$

где  $J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)}$  определен в соответствии с (5.12), а остальные обозначения соответствуют обозначениям теоремы 5.9, позволяют иначе взглянуть на возможность обоснования разложения (5.393) в более общем случае, чем в теоремах 5.3, 5.3\*, 5.4, 5.5, 5.5\*, 5.6, 5.7, 5.7\*, 5.12–5.14.

Общая идея доказательства теорем 5.12–5.14, основана на доказательстве (при различных упрощающих предположениях) следующего равен-

ства:

$$\lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} M \left\{ \left( J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right)^2 \right\} = 0. \quad (5.394)$$

В частности, в теоремах 5.12–5.14 соотношение (5.394) доказано для следующих частных случаев:

1.  $\psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а  $\psi_1(\tau)$  — дважды непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , причем  $p_1, p_2 \rightarrow \infty$  (теорема 5.12).

2.  $\psi_2(s)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а  $\psi_1(s)$ ,  $\psi_3(s)$  — дважды непрерывно дифференцируемы на интервале  $[t, T]$ , причем  $p_1 = p_2 = p_3 = p \rightarrow \infty$  (теорема 5.13).

3.  $\psi_1(s), \dots, \psi_4(s) \equiv 1$ , причем  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p \rightarrow \infty$  (теорема 5.14).

На основании перечисленных результатов и соображений, автор полагает, что разложение (5.393) будет верным не только для повторных стохастических интегралов Стратоновича из теоремы 5.8, но и для повторных стохастических интегралов Стратоновича вида

$$I_{l_1 \dots l_k T, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

где  $l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ;  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  или даже для повторных стохастических интегралов Стратоновича вида

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$  — достаточное количество раз непрерывно дифференцируемые на промежутке  $[t, T]$  функции.

## 5.15 Разложение повторных стохастических интегралов по мартингальным пуассоновским мерам

Введем в рассмотрение следующий повторный стохастический интеграл

$$\begin{aligned} P[\chi^{(k)}]_{T,t} &= \\ &= \int_t^T \int_X \chi_k(t_k, \mathbf{y}_k) \dots \int_t^{t_2} \int_X \chi_1(t_1, \mathbf{y}_1) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) \dots \tilde{\nu}^{(i_k)}(dt_k, d\mathbf{y}_k), \end{aligned} \quad (5.395)$$

где  $\Re^n \stackrel{\text{def}}{=} X$ ;  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ ;  $\nu^{(i)}(dt, dy)$  — независимые пуассоновские меры, заданные в  $[0, T] \times X$  и удовлетворяющие условиям (I)–(III) разд. 1.1.5;

$$\tilde{\nu}^{(i)}(dt, dy) = \nu^{(i)}(dt, dy) - \Pi(dy)dt \quad (i = 1, \dots, m)$$

— мартингальные пуассоновские меры;

$$\tilde{\nu}^{(0)}(dt, dy) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(dy)dt; \quad \chi_l(\tau, y) = \psi_l(\tau)\varphi_l(y);$$

$\psi_l(\tau) : [t, T] \rightarrow \Re^1$ ;  $\varphi_l(y) : X \rightarrow \Re^1$ ;  $\chi_l(s, y) \in H_2(\Pi, [t, T])$  ( $l = 1, \dots, k$ ); определение класса  $H_2(\Pi, [t, T])$  приводится в разд. 1.3.2.

**Теорема 5.15.** Пусть выполнены следующие условия:

1.  $\psi_i(\tau)$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции.

2.  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система функций в пространстве  $L_2([t, T])$ , каждая функция которой при конечном  $j$  удовлетворяет условию  $(\star)$  из разд. 5.2.

3. Для всех  $l = 1, \dots, k$ ;  $s = 1, 2, \dots, 2^{k+1}$ :

$$\int_X |\varphi_l(y)|^s \Pi(dy) < \infty.$$

Тогда повторный стохастический интеграл по мартингальным пуассоновским мерам  $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$  разлагается в следующий сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$P[\chi^{(k)}]_{T,t} = \underset{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \pi_{j_l}^{(l,i_l)} - \right. \\ \left. - \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \prod_{r=1}^k \phi_{j_r}(\tau_{l_r}) \int_X \varphi_r(y) \tilde{\nu}^{(i_r)}([\tau_{l_r}, \tau_{l_r+1}), dy) \right), \quad (5.396)$$

где  $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$  — разбиение интервала  $[t, T]$ , которое удовлетворяет условию (5.5);

$$\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{L}_k, \quad \mathcal{H}_k = \{(l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k = \\ = \left\{ (l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1; l_g \neq l_r \quad (g \neq r); g, r = 1, \dots, k \right\}, \end{aligned}$$

$$\pi_j^{(l,i)} = \int_t^T \int_X \phi_j(\tau) \varphi_l(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i)}(d\tau, d\mathbf{y})$$

— независимые при различных  $i \neq 0$  и некорелированные при различных  $j$  случайные величины,

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k,$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T]; \quad k \geq 2$$

и  $K(t_1) = \psi_1(t_1)$ ;  $t_1 \in [t, T]$ .

Данная теорема доказывается также, как и теорема 5.1. Небольшие отличия будут лишь в установлении аналогов лемм 5.1–5.3 для рассматриваемого случая.

**Лемма 5.6.** Пусть  $\psi_l(\tau)$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции, а функции  $\varphi_l(\mathbf{y})$  таковы, что

$$\int_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) < \infty; \quad p = 1, 2; \quad l = 1, \dots, k.$$

Тогда с вероятностью 1

$$P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \int_X \chi_l(\tau_{j_l}, \mathbf{y}) \bar{\nu}^{(i_l)}([\tau_{j_l}, \tau_{j_l+1}), d\mathbf{y}), \quad (5.397)$$

где  $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$  — разбиение промежутка  $[t, T]$ , которое удовлетворяет условию (5.5),  $\bar{\nu}^{(i)}([\tau, s], d\mathbf{y}) = \tilde{\nu}^{(i)}([\tau, s], d\mathbf{y})$  или  $\nu^{(i)}([\tau, s], d\mathbf{y})$ ; интеграл  $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$  отличается от интеграла  $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$  тем, что в  $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$  вместо  $\tilde{\nu}^{(i_l)}(dt_l, d\mathbf{y}_l)$  стоят  $\bar{\nu}^{(i_l)}(dt_l, d\mathbf{y}_l)$ ;  $l = 1, \dots, k$ .

**Доказательство.** Используя (1.67) при  $r = 2$  и (1.68), (1.69) при  $r = 1$ , а также условия леммы 5.6, нетрудно заметить, что интегральная сумма интеграла  $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$  в условиях леммы 5.6 может быть представлена в виде предельного выражения из правой части (5.397) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

Введем в рассмотрение следующие кратный и повторный стохастические интегралы:

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \int_X \varphi_l(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_l)}([\tau_{j_l}, \tau_{j_l+1}), d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} P[\Phi]_{T,t}^{(k)},$$

$$\int\limits_t^T \dots \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) \int\limits_X \varphi_1(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}) \dots \int\limits_X \varphi_k(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_k)}(dt_k, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (5.397);  $\Phi(t_1, \dots, t_k) : [t, T]^k \rightarrow \mathbb{R}^1$  — ограниченная неслучайная функция.

Заметим, что если функции  $\varphi_l(\mathbf{y}) ; l = 1, \dots, k$  удовлетворяют условиям леммы 5.6, а функция  $\Phi(t_1, \dots, t_k)$  непрерывна, то для интеграла  $\hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$  справедливо с вероятностью 1 равенство типа (5.397).

**Лемма 5.7.** Пусть для  $l = 1, \dots, k$  выполнены условия:  $g_l(\tau, \mathbf{y}) = h_l(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})$ ; функции  $h_l(\tau) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  — удовлетворяют условию  $(\star)$  из разд. 5.2, а функции  $\varphi_l(\mathbf{y}) : X \rightarrow \mathbb{R}^1$  удовлетворяют условию

$$\int\limits_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) < \infty; \quad p = 1, 2, 3, \dots, 2^{k+1}.$$

Тогда

$$\prod\limits_{l=1}^k \int\limits_t^T \int\limits_X g_l(s, \mathbf{y}) \bar{\nu}^{(i_l)}(ds, d\mathbf{y}) = P[\Phi]_{T,t}^{(k)} \text{ с. в. 1, } \Phi(t_1, \dots, t_k) = \prod\limits_{l=1}^k h_l(t_l).$$

**Доказательство.** Введем обозначения:

$$J[\bar{g}_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=0}^{N-1} \int\limits_X g_l(\tau_j, \mathbf{y}) \bar{\nu}^{(i_l)}([\tau_j, \tau_{j+1}), d\mathbf{y}), \quad J[\bar{g}_l]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \int\limits_X g_l(s, \mathbf{y}) \bar{\nu}^{(i_l)}(ds, d\mathbf{y}).$$

Заметим, что

$$\prod\limits_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_N - \prod\limits_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_{T,t} = \sum\limits_{l=1}^k \left( \prod\limits_{q=1}^{l-1} J[\bar{g}_q]_{T,t} \right) (J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t}) \left( \prod\limits_{q=l+1}^k J[\bar{g}_q]_N \right).$$

Используя неравенства Минковского и Коши–Буняковского, вместе с (1.67)–(1.69) и условиями леммы 5.7 получаем

$$\left( \mathsf{M} \left\{ \left| \prod\limits_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_N - \prod\limits_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_{T,t} \right|^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_k \sum\limits_{l=1}^k \left( \mathsf{M} \left\{ |J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t}|^4 \right\} \right)^{1/4}, \quad (5.398)$$

где  $C_k < \infty$ . Поскольку ясно, что

$$J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t} = \sum\limits_{q=0}^{N-1} J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q},$$

$$J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q} = \int_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} \int_X (g_l(\tau_q, \mathbf{y}) - g_l(s, \mathbf{y})) \bar{\nu}^{(i_l)}(ds, d\mathbf{y}),$$

то в силу независимости  $J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}$  при различных  $q$  имеем [91]

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} + \\ &+ 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^2 \right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbb{M} \left\{ \left| J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.399)$$

Далее, используя (1.67)–(1.69) и условия леммы 5.7, получаем, что правая часть (5.399) стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Учитывая этот факт и (5.398), приходим к утверждению леммы.  $\square$

Продолжая доказательство теоремы 5.15 по схеме доказательства теоремы 5.1 с использованием лемм 5.6, 5.7 и (1.67)–(1.69) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^2 \right\} &\leq C_k \prod_{l=1}^k \int_X \varphi_l^2(\mathbf{y}) \Pi(\mathbf{y}) \times \\ &\times \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k \leq \\ &\leq \bar{C}_k \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty$ , где постоянная  $\bar{C}_k$  зависит только от  $k$  (кратность повторного стохастического интеграла по мартингальным пуассоновским мерам) и

$$\begin{aligned} R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} &= P[\chi^{(k)}]_{T,t} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \pi_{(j_l)T,t}^{(l,i_l)} - \right. \\ &\left. - \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \prod_{r=1}^k \phi_{j_r}(\tau_{l_r}) \int_X \varphi_r(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_r)}([\tau_{l_r}, \tau_{l_r+1}), d\mathbf{y}) \right). \end{aligned}$$

Теорема 5.15 доказана.  $\square$

Приведем пример на применение теоремы 5.15.

При  $i_1 \neq i_2$ ,  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$  по теореме 5.15 с использованием системы полиномов Лежандра получаем

$$\int_t^T \int_X \varphi_2(\mathbf{y}_1) \int_t^{t_1} \int_X \varphi_1(\mathbf{y}_2) \tilde{\nu}^{(i_2)}(dt_2, d\mathbf{y}_2) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) =$$

$$= \frac{T-t}{2} \left( \pi_{(0)T,t}^{(1,i_1)} \pi_{(0)T,t}^{(2,i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left( \pi_{(i-1)T,t}^{(2,i_2)} \pi_{(i)T,t}^{(1,i_1)} - \pi_{(i-1)T,t}^{(1,i_1)} \pi_{(i)T,t}^{(2,i_2)} \right) \right),$$

$$\int_t^T \int_X \varphi_1(\mathbf{y}_1) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) = \sqrt{T-t} \pi_{(0)T,t}^{(1,i_1)},$$

где

$$\pi_{(j)T,t}^{(l,i_l)} = \int_t^T \int_X \phi_j(\tau) \varphi_l(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_l)}(d\tau, d\mathbf{y}); \quad l = 1, 2;$$

$\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система полиномов Лежандра.

## 5.16 Обобщение теоремы 5.1 для повторных стохастических интегралов по мартингалам

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и пусть  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  — неубывающая совокупность  $\sigma$ -подалгебр  $\mathcal{F}$ . Через  $M_2(\rho, [0, T])$  будем обозначать класс  $\mathcal{F}_t$ -измеримых при каждом  $t \in [0, T]$  мартингалов  $M_t$ , удовлетворяющих условиям

$$\mathbb{M}\{(M_s - M_t)^2\} = \int_t^s \rho(\tau) d\tau,$$

$\mathbb{M}\{|M_s - M_t|^p\} \leq C_p |s - t|$ , где  $0 \leq t < s \leq T$ ;  $\rho(\tau)$  — неотрицательная непрерывно дифференцируемая на промежутке  $[0, T]$  неслучайная функция;  $C_p < \infty$  — постоянная;  $p = 3, 4, \dots$

Очевидно, что мартингал из класса  $M_2(\rho, [0, T])$  является  $D$ -мартингалом.

Пусть  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$ , для которого

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (5.400)$$

В соответствии со свойствами функции  $\rho(\tau)$  условие принадлежности  $\mathcal{F}_t$ -измеримого при каждом  $t \in [0, T]$  случайного процесса  $\xi_t, t \in [0, T]$  классу  $H_2(\rho, [0, T])$  запишем в виде

$$\int_0^T \mathbb{M}\{|\xi_t|^2\} \rho(t) dt < \infty.$$

Определим на разбиении  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  ступенчатую случайную функцию  $\xi_t^{(N)}$  следующим образом:  $\xi_t^{(N)} = \xi_{\tau_{j-1}}$  с вероятностью 1 при  $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$ ;  $j = 1, \dots, N$ . В главе 1 (см. также [17]) был введен стохастический интеграл от процесса  $\xi_t \in H_2(\rho, [0, T])$  по  $D$ -martингалу. В соответствии с этим стохастический интеграл по мартингалу  $M_t \in M_2(\rho, [0, T])$  определяется равенством

$$\text{l.i.m. } \sum_{N \rightarrow \infty}^{N-1} \xi_{\tau_j}^{(N)} (M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_t dM_t, \quad (5.401)$$

где  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$ , удовлетворяющее условию (5.400);  $\xi_t^{(N)}$  — произвольная последовательность ступенчатых функций из  $H_2(\rho, [0, T])$ , для которой

$$\int_0^T M\{|\xi_t^{(N)} - \xi_t|^2\} \rho(t) dt \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Обозначим через  $Q_4(\rho, [0, T])$  подкласс  $M_2(\rho, [0, T])$  мартингалов  $M_t, t \in [0, T]$ , для которых при некотором  $\alpha > 0$  справедлива оценка:

$$M\left\{\left|\int_\theta^\tau g(s) dM_s\right|^4\right\} \leq K_4 \int_\theta^\tau |g(s)|^\alpha ds,$$

где  $0 \leq \theta < \tau \leq T$ ;  $g(s)$  — ограниченная на промежутке  $[0, T]$  неслучайная функция;  $K_4 < \infty$  — постоянная.

Через  $G_n(\rho, [0, T])$  обозначим подкласс  $M_2(\rho, [0, T])$  мартингалов  $M_t, t \in [0, T]$ , для которых

$$M\left\{\left|\int_\theta^\tau g(s) dM_s\right|^n\right\} < \infty,$$

где  $0 \leq \theta < \tau \leq T$ ;  $n \in N$ ;  $g(s)$  — такая же функция, как в определении  $Q_4(\rho, [0, T])$ .

Напомним (см. главу 1), что если  $(\xi_t)^n \in H_2(\rho, [0, T])$  при  $\rho(t) \equiv 1$ , то справедлива оценка [17]

$$M\left\{\left|\int_\theta^\tau \xi_t dt\right|^{2n}\right\} \leq (\tau - \theta)^{2n-1} \int_\theta^\tau M\{|\xi_t|^{2n}\} dt, \quad 0 \leq \theta < \tau \leq T. \quad (5.402)$$

Положим

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) dM_{t_1}^{(1,i_1)} \dots dM_{t_k}^{(k,i_k)} \quad (i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m),$$

где  $M_{\tau}^{(r,i)}$  ( $r = 1, \dots, k$ ) — независимы при различных  $i = 1, 2, \dots, m$  и  $M_{\tau}^{(r,0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$ .

Докажем следующую теорему.

**Теорема 5.16.** *Пусть выполнены условия:*

1.  $M_{\tau}^{(l,i_l)} \in Q_4(\rho, [t, T]), G_n(\rho, [t, T]); n = 2, 4, \dots, 2^k; k \in N; i_l = 1, \dots, m; l = 1, \dots, k$ .

2.  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система функций в пространстве  $L_2([t, T])$ , каждая функция которой при конечном  $j$  удовлетворяет условию  $(\star)$  из разд. 5.2.

3.  $\psi_i(\tau); i = 1, 2, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции.

Тогда повторный стохастический интеграл  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M$  разлагается в следующий сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M = \underset{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \xi_{j_l}^{(l,i_l)} - \right. \\ \left. - \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta M_{\tau_{l_1}}^{(1,i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta M_{\tau_{l_k}}^{(k,i_k)} \right),$$

где  $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$  — разбиение интервала  $[t, T]$ , которое удовлетворяет условию (5.400);

$$\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{L}_k, \quad \mathcal{H}_k = \{(l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

$$\mathcal{L}_k = \left\{ (l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1; l_g \neq l_r \ (g \neq r); g, r = 1, \dots, k \right\},$$

$$\xi_j^{(l,i)} = \int_t^T \phi_j(s) dM_s^{(l,i)}$$

— независимые при различных  $i = 1, \dots, m$  и некоррелированные при различных  $j$  (если  $\rho(\tau)$  — постоянная) случайные величины,

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k,$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T]; \quad k \geq 2$$

и  $K(t_1) = \psi_1(t_1)$ ;  $t_1 \in [t, T]$ .

**Доказательство.** Для доказательства теоремы 5.16 рассмотрим ряд лемм.

**Лемма 5.8.** Пусть  $M_{\tau}^{(l,i_l)} \in M_2(\rho, [t, T])$ ;  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, k$ , а  $\psi_i(\tau)$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции. Тогда

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta M_{\tau_{j_l}}^{(l,i_l)} \text{ с в. 1,} \quad (5.403)$$

где  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$ , удовлетворяющее условию типа (5.400).

**Доказательство.** Поскольку (см. главу 1)

$$\begin{aligned} M\left\{\left(\int_{\theta}^{\tau} \xi_s d M_s^{(l,i_l)}\right)^2\right\} &= \int_{\theta}^{\tau} M\{|\xi_s|^2\} \rho(s) ds, \\ M\left\{\left(\int_{\theta}^{\tau} \xi_s ds\right)^2\right\} &\leq (\tau - \theta) \int_{\theta}^{\tau} M\{|\xi_s|^2\} ds, \end{aligned}$$

где  $\xi_t \in H_2(\rho, [0, T])$ ;  $t \leq \theta < \tau \leq T$ ;  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, k$ , то интегральная сумма интеграла  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M$  в условиях леммы 5.8 может быть представлена в виде определенного выражения из правой части (5.403) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

Положим

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta M_{\tau_{j_l}}^{(l,i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} I[\Phi]_{T,t}^{(k)M}, \quad (5.404)$$

где  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$ , удовлетворяющее условию типа (5.400).

**Лемма 5.9.** Пусть  $M_s^{(l,i_l)} \in Q_r(\rho, [t, T])$ ;  $r = 2, 4, \dots, 2^k$ ;  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, k$ , а  $g_1(s), \dots, g_k(s)$  — удовлетворяющие условию  $(\star)$  из разд. 5.2 функции. Тогда

$$\prod_{l=1}^k \int_t^T g_l(s) d M_s^{(l,i_l)} = I[\Phi]_{T,t}^{(k)M} \text{ с в. 1, } \Phi(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k g_l(t_l).$$

Доказательство. Обозначим

$$I[g_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} g_l(\tau_j) \Delta M_{\tau_j}^{(l,i_l)}, \quad I[g_l]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T g_l(s) dM_s^{(l,i_l)}.$$

Заметим, что

$$\prod_{l=1}^k I[g_l]_N - \prod_{l=1}^k I[g_l]_{T,t} = \sum_{l=1}^k \left( \prod_{q=1}^{l-1} I[g_q]_{T,t} \right) (I[g_l]_N - I[g_l]_{T,t}) \left( \prod_{q=l+1}^k I[g_q]_N \right).$$

Используя неравенства Минковского и Коши–Буняковского, а также условия леммы 5.9, получаем

$$\left( \mathbb{M} \left\{ \left| \prod_{l=1}^k I[g_l]_N - \prod_{l=1}^k I[g_l]_{T,t} \right|^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_k \sum_{l=1}^k (\mathbb{M} \{ |I[g_l]_N - I[g_l]_{T,t}|^4 \})^{1/4}, \quad (5.405)$$

где  $C_k < \infty$  — постоянная. Поскольку

$$I[g_l]_N - I[g_l]_{T,t} = \sum_{q=0}^{N-1} I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}, \quad I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q} = \int_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} (g_l(\tau_q) - g_l(s)) dM_s^{(l,i_l)},$$

то в силу независимости  $I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}$  при различных  $q$  имеем [91]

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ |I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^4 \right\} + \\ &+ 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ |I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^2 \right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbb{M} \left\{ |I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.406)$$

Далее, используя условия леммы 5.9, получаем, что правая часть (5.406) стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Учитывая этот факт и (5.405), приходим к утверждению леммы.  $\square$

Далее воспользовавшись доказанными леммами и повторяя с соответствующими изменениями доказательство теоремы 5.1 получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^2 \right\} &\leq C_k \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \right. \\ &- \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \left. \right)^2 \rho(t_1) dt_1 \dots \rho(t_k) dt_k \leq \\ &\leq \bar{C}_k \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.407)$$

при  $p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty$ , где постоянная  $\bar{C}_k$  зависит только от  $k$  (кратность повторного стохастического интеграла по мартингалам) и

$$R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} = J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \xi_{j_l}^{(l,i_l)} - \right. \\ \left. - \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta M_{\tau_{l_1}}^{(1,i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta M_{\tau_{l_k}}^{(k,i_k)} \right).$$

Теорема 5.16 доказана.  $\square$

### 5.17 Обобщение теоремы 5.1 для повторных стохастических интегралов по мартингалам. Случай полных ортонормированных с весом $r(x) \geq 0$ систем функций в $L_2([t, T])$

Пусть  $\{\Psi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная с весом  $r(x) \geq 0$  (непрерывная на интервале  $[t, T]$  функция) система функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Хорошо известно, что ряд Фурье функции  $f(x)$  ( $\sqrt{r(x)}f(x) \in L_2([t, T])$ ), построенный по системе функций  $\{\Psi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ , сходится к функции  $f(x)$  в среднеквадратическом смысле с весом  $r(x)$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_t^T \left( f(x) - \sum_{j=0}^p \tilde{C}_j \Psi_j(x) \right)^2 r(x) dx = 0, \quad (5.408)$$

где

$$\tilde{C}_j = \int_t^T f(x) \Psi_j(x) r(x) dx. \quad (5.409)$$

Очевидно, что соотношение (5.408) может быть получено, если мы будем разлагать функцию  $\sqrt{r(x)}f(x) \in L_2([t, T])$  в ряд Фурье по полной ортонормированной с весом 1 системе функций  $\{\sqrt{r(x)}\Psi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  в пространстве  $L_2([t, T])$ . Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_t^T \left( \sqrt{r(x)}f(x) - \sum_{j=0}^p \tilde{C}_j \sqrt{r(x)}\Psi_j(x) \right)^2 dx = \\ = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_t^T \left( f(x) - \sum_{j=0}^p \tilde{C}_j \Psi_j(x) \right)^2 r(x) dx = 0, \quad (5.410)$$

где  $\tilde{C}_j$  имеет вид (5.409).

Рассмотрим очевидное обобщение рассмотренного подхода на случай функций нескольких переменных.

Разложим функцию  $K(t_1, \dots, t_k)$  такую, что

$$K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \sqrt{r(t_l)} \in L_2([t, T]^k)$$

используя полную ортонормированную систему функций

$$\prod_{l=1}^k \sqrt{r(t_l)} \Psi_{j_l}(t_l); \quad j_l = 0, 1, 2, \dots; l = 1, \dots, k$$

в пространстве  $L_2([t, T]^k)$  в кратный ряд Фурье.

Как известно, этот ряд Фурье сходится в среднеквадратичном смысле:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \int_{[t, T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \sqrt{r(t_l)} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} \tilde{C}_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \sqrt{r(t_l)} \Psi_{j_l}(t_l) \right)^2 \times \\ &\quad \times dt_1 \dots dt_k = \\ &= \lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \int_{[t, T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} \tilde{C}_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \Psi_{j_l}(t_l) \right)^2 \prod_{l=1}^k r(t_l) dt_1 \dots dt_k, \end{aligned} \tag{5.411}$$

где

$$\tilde{C}_{j_k \dots j_1} = \int_{[t, T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k (r(t_l) \Psi_{j_l}(t_l)) dt_1 \dots dt_k.$$

Сравним (5.407) и (5.411). Если предположить, что  $r(\tau) \geq 0$  и

$$\frac{\rho(\tau)}{r(\tau)} \leq C < \infty,$$

то

$$\begin{aligned} &\int_{[t, T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} \tilde{C}_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \Psi_{j_l}(t_l) \right)^2 \rho(t_1) dt_1 \dots \rho(t_k) dt_k = \\ &= \int_{[t, T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} \tilde{C}_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \Psi_{j_l}(t_l) \right)^2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\rho(t_1)}{r(t_1)} r(t_1) dt_1 \dots \frac{\rho(t_k)}{r(t_k)} r(t_k) dt_k \leq \\ & \leq C'_k \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} \tilde{C}_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \Psi_{j_l}(t_l) \right)^2 \times \\ & \quad \times r(t_1) dt_1 \dots r(t_k) dt_k, \end{aligned}$$

где  $C'_k$  — постоянная.

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

**Теорема 5.17.** *Пусть выполнены условия:*

1.  $M_\tau^{(l,i_l)} \in Q_4(\rho, [t, T])$ ,  $G_n(\rho, [t, T])$ ;  $n = 2, 4, \dots, 2^k$ ;  $k \in N$ ;  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, k$ .

2.  $\{\Psi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная с весом  $r(\tau) \geq 0$  ( $\rho(\tau)/r(\tau) \leq C < \infty$ ) система функций в пространстве  $L_2([t, T])$ , каждая функция которой при конечном  $j$  удовлетворяет условию  $(\star)$  из разд. 5.2.

3.  $\psi_i(\tau)$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции.

Тогда повторный стохастический интеграл  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M$  разлагается в следующий сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$\begin{aligned} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M = & \underset{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} \tilde{C}_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \xi_{j_l}^{(l,i_l)} - \right. \\ & \left. - \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \Psi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta M_{\tau_{l_1}}^{(1,i_1)} \dots \Psi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta M_{\tau_{l_k}}^{(k,i_k)} \right), \end{aligned}$$

где  $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$  — разбиение интервала  $[t, T]$ , которое удовлетворяет условию (5.400);

$$\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{L}_k, \quad \mathcal{H}_k = \{(l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

$$\mathcal{L}_k = \left\{ (l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1; l_g \neq l_r \ (g \neq r); g, r = 1, \dots, k \right\},$$

$$\xi_j^{(l,i_l)} = \int_t^T \Psi_j(s) dM_s^{(l,i_l)}$$

— независимые при различных  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, k$  и некоррелированные при различных  $j$  (если  $i_l \neq 0$  и  $\rho(\tau) \equiv r(\tau)$ ) случайные величины;

$$\tilde{C}_{j_k \dots j_1} = \int_{[t, T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k (r(t_l) \Psi_{j_l}(t_l)) dt_1 \dots dt_k;$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T]; \quad k \geq 2$$

$$u \quad K(t_1) = \psi_1(t_1); \quad t_1 \in [t, T].$$

Отметим, что при  $\rho(\tau), r(\tau) \equiv 1$  из теоремы 5.17 получаем теорему 5.1.

Рассмотрим краевую задачу вида:

$$(p(x)\Phi'(x))' + q(x)\Phi(x) = -\lambda r(x)\Phi(x),$$

$$\alpha\Phi(a) + \beta\Phi'(a) = 0, \quad \gamma\Phi(a) + \delta\Phi'(a) = 0,$$

где функции  $p(x), q(x), r(x)$  удовлетворяют известным условиям [99], а  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$  — вещественные числа.

Известно (В.А. Стеклов), что собственные функции  $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots$  данной краевой задачи образуют полную ортонормированную с весом  $r(x)$  систему функций в пространстве  $L_2([a, b])$ , а также, что ряд Фурье функции  $\sqrt{r(x)}f(x) \in L_2([a, b])$  по системе функций  $\sqrt{r(x)}\Phi_0(x), \sqrt{r(x)}\Phi_1(x), \dots$  сходится в среднеквадратическом смысле к этой функции на данном отрезке, причем коэффициенты Фурье определяются по формуле

$$C_j = \int_a^b r(x)f(x)\Phi_j(x)dx. \quad (5.412)$$

Как уже отмечалось, если разлагать в ряд Фурье функцию  $f(x) \in L_2([a, b])$  по системе функций  $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots$ , то коэффициенты разложения также будут определяться формулой (5.412) и будет иметь место сходимость ряда Фурье в среднеквадратическом смысле с весом  $r(x)$  к функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

Известно [99], что при рассмотрении задачи о колебаниях круглой мембранны (общий случай) возникает краевая задача для уравнения Эйлера-Бесселя с параметром  $\lambda$  и целым индексом  $n$ :

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2) R(r) = 0. \quad (5.413)$$

Собственными функциями данной задачи, с учетом специфических граничных условий [99], являются функции

$$J_n\left(\mu_j \frac{r}{L}\right), \quad (5.414)$$

где  $r \in [0, L]$ ,  $\mu_j$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$  — упорядоченные в порядке возрастания положительные корни функции Бесселя  $J_n(\mu)$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$

В задаче о радиальных колебаниях круглой мембраны возникает краевая задача для уравнения (5.413) при  $n = 0$ , собственными функциями которой соответственно являются функции (5.414) при  $n = 0$  [99].

Рассмотрим систему функций

$$\Psi_j(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{T J_{n+1}(\mu_j)} J_n\left(\frac{\mu_j}{T} \tau\right); \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.415)$$

где

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} (\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1))^{-1}$$

— функция Бесселя первого рода, а

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx$$

— гамма-функция;  $\mu_j$  — пронумерованные в порядке возрастания положительные корни функции  $J_n(x)$ ,  $n$  — натуральное или ноль.

В силу сказанного, а также в силу известных свойств бесселевых функций система  $\{\Psi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$  является полной ортонормированной с весом  $\tau$  в пространстве  $L_2([0, T])$  системой непрерывных функций.

Применим систему функций (5.415) в теореме 5.17.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл

$$\int_0^T \int_0^s dM_\tau^{(1)} dM_s^{(2)},$$

где

$$M_s^{(i)} = \int_0^s \sqrt{\tau} d\mathbf{f}_\tau^{(i)},$$

а  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) — независимые стандартные винеровские процессы,  $0 \leq s \leq T$ . Нетрудно видеть, что  $M_s^{(i)}$  —  $D$ -мартингал (см. главу 1), причем

$\rho(\tau) \equiv \tau$ . Кроме того,  $M_s^{(i)}$  имеет гауссовское распределение. Очевидно, что условия теоремы 5.17 при  $k = 2$  выполнены.

По теореме 5.17 при  $k = 2$  для системы функций (5.415), получаем

$$\int_0^T \int_0^s dM_\tau^{(1)} dM_s^{(2)} = \underset{p_1, p_2 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и

$$\begin{aligned} \zeta_j^{(i)} &= \int_0^T \Psi_j(\tau) dM_\tau^{(i)} \sim N(0, 1); \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2; \quad M\{\zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)}\} = 0; \\ C_{j_2 j_1} &= \int_0^T s \Psi_{j_2}(s) \int_0^s \tau \Psi_{j_1}(\tau) d\tau ds. \end{aligned}$$

Очевидно, что к этому же результату можно было бы прийти по-другому: применить теорему 5.1 к повторному стохастическому интегралу. Ито

$$\int_0^T \sqrt{s} \int_0^s \sqrt{\tau} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)},$$

а в качестве системы функций  $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^\infty$  в теореме 5.1 взять

$$\phi_j(s) = \frac{\sqrt{2s}}{T J_{n+1}(\mu_j)} J_n\left(\frac{\mu_j}{T} s\right); \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

В результате мы получили бы

$$\int_0^T \sqrt{s} \int_0^s \sqrt{\tau} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)} = \underset{p_1, p_2 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и

$$\begin{aligned} \zeta_j^{(i)} &= \int_0^T \phi_j(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \sim N(0, 1); \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2; \quad M\{\zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)}\} = 0; \\ C_{j_2 j_1} &= \int_0^T \sqrt{s} \phi_{j_2}(s) \int_0^s \sqrt{\tau} \phi_{j_1}(\tau) d\tau ds. \end{aligned}$$

Простой подсчет показывает, что

$$\tilde{\phi}_j(s) = \frac{\sqrt{2(s-t)}}{(T-t)J_{n+1}(\mu_j)} J_n\left(\frac{\mu_j}{T-t}(s-t)\right); \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

— полная ортонормированная система функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда по теореме 5.1 получаем

$$\int_t^T \sqrt{s-t} \int_t^s \sqrt{\tau-t} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)} = \underset{p_1, p_2 \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \tilde{C}_{j_2 j_1} \tilde{\zeta}_{j_1}^{(1)} \tilde{\zeta}_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и

$$\tilde{\zeta}_j^{(i)} = \int_t^T \tilde{\phi}_j(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \sim N(0, 1); \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2; \quad M\{\tilde{\zeta}_{j_1}^{(1)} \tilde{\zeta}_{j_2}^{(2)}\} = 0;$$

$$\tilde{C}_{j_2 j_1} = \int_t^T \sqrt{s-t} \tilde{\phi}_{j_2}(s) \int_t^s \sqrt{\tau-t} \tilde{\phi}_{j_1}(\tau) d\tau ds.$$

# Глава 6

## Аппроксимация повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича

### 6.1 Введение

Рассмотрим СДУ Ито (1.38). Из результатов главы 4 следует, что при определенных условиях, налагаемых на функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  и  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ , для решения СДУ Ито (1.38) справедливы 4 унифицированных разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича вида

$$I_{l_1 \dots l_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.1)$$

$$J_{l_1 \dots l_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^T (T - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (T - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.2)$$

$$I_{l_1 \dots l_{kT,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.3)$$

$$J_{l_1 \dots l_{kT,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (T - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (T - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.4)$$

где  $l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ;  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ .

Кроме того, справедливы [147], [148], [212] разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора–Стратоновича в форме

Клоедена и Платена, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{T,t}}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \quad (6.5)$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{T,t}}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*T} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \quad (6.6)$$

где  $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = \mathbf{f}_t^{(i_l)}$  и  $\lambda_l = 1$  при  $i_l = 1, \dots, m$ ;  $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = t$  и  $\lambda_l = 0$  при  $i_l = 0$ ;  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, k$ .

Данная глава посвящена аппроксимации систем повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича вида (6.1) – (6.6), которые в более общей форме записи выглядят следующим образом:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.7)$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.8)$$

где  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$  — непрерывные или достаточно гладкие (см. главу 5) на промежутке  $[t, T]$  функции.

## 6.2 Вычисление и оценивание среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученных по теореме 5.1

### 6.2.1 Точное вычисление для случая любого фиксированного $k$ и попарно различных чисел $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$

Сначала рассмотрим среднеквадратические аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$  вида (6.7) для попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  (в этом случае указанные интегралы совпадают с соответствующими интегралами Стратоновича) в форме усеченных рядов, в которые они разлагаются по теореме 5.1.

Пусть  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k}$  — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$  для попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ , которая имеет вид

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)}, \quad (6.9)$$

где числа  $p_i < \infty$  и удовлетворяют следующему условию на среднеквадратическую точность аппроксимации:

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \right\} \leq \varepsilon, \quad (6.10)$$

$\varepsilon$  — заданное положительное число.

Теорема 5.1 дает возможность вычислить точно среднеквадратическую погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито любой фиксированной кратности  $k$  для случая попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ . Далее в данной главе мы увидим, что данная возможность сохраняется и для случая произвольных  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ .

**Лемма 6.1.** *Пусть  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  и попарно различны.*

*Тогда среднеквадратическая погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$  определяется формулой*

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \right\} = \\ = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где сходимость в (6.11) имеет место в смысле предела при  $p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Рассмотрим выражение (5.26) для разности  $J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k}$  ( $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ):

$$\begin{aligned} J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} = \\ = \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \\ \stackrel{\text{def}}{=} R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где перестановки  $(t_1, \dots, t_k)$  осуществляются при суммировании только в величинах  $d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}$ , при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических

интегралах и, если  $t_r$  поменялось местами с  $t_q$  в перестановке  $(t_1, \dots, t_k)$ , то и  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, \dots, i_k)$ .

Заметим, что интегралы в правой части (6.12) попарно стохастически независимы для случая попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} \left\{ \left( R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \right)^2 \right\} = \\
&= \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \mathbb{M} \left\{ \left( \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \right)^2 \right\} = \\
&= \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k = \\
&= \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

В (6.13) мы использовали равенство (5.20).

Рассмотрим интеграл (6.13):

$$\begin{aligned}
\int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k &= \\
&= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \\
&- 2 \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k + \\
&+ \int_{[t,T]^k} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \\
&- 2 \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k + \\
&+ \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j'_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} \sum_{j'_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} C_{j'_k \dots j'_1} \prod_{l=1}^k \int_t^T \phi_{j_l}(t_l) \phi_{j'_l}(t_l) dt_l = \\
&= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - 2 \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 + \\
&+ \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 = \\
&= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2. \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

Для частного случая  $p_1 = \dots = p_k = p$  имеем:

$$\begin{aligned}
M \left\{ (R_{T,t}^{p, \dots, p})^2 \right\} &= \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k = \\
&= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1}^2. \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Заметим, что равенство Парсеваля в нашем случае имеет вид:

$$\int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2.$$

Тогда из (6.14) мы получаем:

$$M \left\{ (R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^2 \right\} = \lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2.$$

Если  $p_1 = \dots = p_k = p$ , то

$$M \left\{ (R_{T,t}^{p, \dots, p})^2 \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1}^2 - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1}^2.$$

### 6.2.2 Оценка для случая любого фиксированного $k$ и $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$

В случае любого фиксированного  $k$  и  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  интегралы в правой части (6.12) будут зависимы в стохастическом смысле.

Оценим правую часть (6.12).

Из (5.20), (6.12), (6.14) и неравенства

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^2 \leq m(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2)$$

мы получаем следующую оценку для случая  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} M\left\{\left(R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k}\right)^2\right\} &\leq k!\left(\sum_{(t_1,\dots,t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left(K(t_1, \dots, t_k) - \right.\right. \\ &\quad \left.\left.- \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l)\right)^2 dt_1 \dots dt_k\right) = \\ &= k! \int_{[t,T]^k} \left(K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l)\right)^2 dt_1 \dots dt_k = \\ &= k! \left(\int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\dots j_1}^2\right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Если  $p_1 = \dots = p_k = p$ , то из (6.16) получим:

$$\begin{aligned} M\left\{\left(R_{T,t}^{p,\dots,p}\right)^2\right\} &\leq \\ &\leq k! \left(\int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1,\dots,j_k=0}^p C_{j_k\dots j_1}^2\right). \end{aligned}$$

### 6.2.3 Оценка для случая любого фиксированного $k$ и $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$

Для случая любого фиксированного  $k$  и  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$  мы имеем (см. доказательство теоремы 5.1):

$$M\left\{\left(R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k}\right)^2\right\} \leq C_k \sum_{(t_1,\dots,t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left(K(t_1, \dots, t_k) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \Big)^2 dt_1 \dots dt_k = \\
 & = C_k \int_{[t,T]^k} \left( K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k = \\
 & = C_k \left( \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 \right),
 \end{aligned}$$

где  $C_k$  – постоянная.

Из леммы 5.2 и следующих свойств моментов стохастических интегралов (см. главу 1):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^2 \right\} & \leq (t - t_0) \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^2 \} d\tau, \\
 \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right|^2 \right\} & = \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^2 \} d\tau
 \end{aligned}$$

( $\xi_\tau \in \mathbb{M}_2([t_0, t])$ ) мы найдем, что  $C_k$  зависит от  $k$  ( $k$  – кратность повторного стохастического интеграла) и  $T - t$  ( $T - t$  – интервал интегрирования повторного стохастического интеграла).

Более того  $C_k$  имеет следующий вид:

$$C_k = k! \cdot \max \{ (T - t)^{\alpha_1}, (T - t)^{\alpha_2}, \dots, (T - t)^{\alpha_{k!}} \},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k!} = 0, 1, \dots, k - 1$ .

Однако,  $T - t$  является как интервалом интегрирования повторного стохастического интеграла Ито, так и шагом интегрирования (см. главу 7) численных методов для СДУ Ито, т.е. достаточно малой величиной. Например,  $T - t < 1$ . Тогда  $C_k \leq k!$ .

Это означает, что для случая произвольного фиксированного  $k$  и  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$  мы можем записать:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M} \left\{ (R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^2 \right\} & \leq \\
 & \leq k! \left( \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 \right),
 \end{aligned}$$

где  $T - t < 1$ .

#### 6.2.4 Другое доказательство леммы 6.1

Рассмотрим другое доказательство формулы:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \\ = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 \end{aligned}$$

для попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ , где сходимость понимается в смысле предела при  $p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty$  и

$$\begin{aligned} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)}, \\ J[\psi^{(k)}]_{T,t} &= \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Сначала сформулируем очевидное утверждение.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \xi_n = \xi$  и  $\mathbb{M}\{\xi^2\} < \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M}\{(\xi_n - \xi_p) \xi_p\} = \mathbb{M}\{(\xi - \xi_p) \xi_p\}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} - \\ &- 2\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right\} + \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} &= \int_t^T \psi_k^2(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1^2(t_1) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right)^2 \right\} &= \sum_{j_1, j'_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k, j'_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} C_{j'_k \dots j'_1} \prod_{l=1}^k \mathbb{M} \left\{ \zeta_{j_l}^{(i_l)} \zeta_{j'_l}^{(i_l)} \right\} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right)^2 \right\} = \\
 &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k + \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 - \\
 &\quad - 2\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right\} = \\
 &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k + \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 - \\
 &\quad - 2\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right\} - \\
 &\quad - 2\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right)^2 \right\} = \\
 &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 - \\
 &\quad - 2\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right\}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right\}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} = \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} + \sum_{j_1=p_1+1}^{n_1} \right) \sum_{j_2=0}^{n_2} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} = \\
 &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} + \sum_{j_1=p_1+1}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} = \\
 &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \left( \sum_{j_2=0}^{p_2} + \sum_{j_2=p_2+1}^{n_2} \right) \sum_{j_3=0}^{n_3} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} + \sum_{j_1=p_1+1}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} = \\
 &= \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{n_3} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} + \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=p_2+1}^{n_2} \sum_{j_3=0}^{n_3} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} + \\
 &\quad + \sum_{j_1=p_1+1}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} = \\
 &\quad \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} + \\
&+ \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_l=0}^{p_l} \sum_{j_{l+1}=p_{l+1}+1}^{n_{l+1}} \sum_{j_{l+2}=0}^{n_{l+2}} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} \right), \\
&\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right\} = \\
&= \lim_{n_1, \dots, n_k \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{n_1, \dots, n_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right\} = \\
&= \lim_{n_1, \dots, n_k \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} \right\} = \\
&= \lim_{n_1, \dots, n_k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j_1, j'_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_l, j'_l=0}^{p_l} \sum_{j_{l+1}=p_{l+1}+1}^{n_{l+1}} \sum_{j'_{l+1}=0}^{p_{l+1}} \sum_{j_{l+2}=0}^{n_{l+2}} \sum_{j'_{l+2}=0}^{p_{l+2}} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k} \sum_{j'_k=0}^{p_k} \\
&\quad \times C_{j_k \dots j_1} C_{j'_k \dots j'_1} \prod_{l=1}^k \mathbb{M} \left\{ \zeta_{j_l}^{(i_l)} \zeta_{j'_l}^{(i_l)} \right\}.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbb{M} \left\{ \zeta_{j_{l+1}}^{(i_{l+1})} \zeta_{j'_{l+1}}^{(i_{l+1})} \right\} = 0 \quad (j_{l+1} > p_{l+1}, \quad j'_{l+1} \leq p_{l+1}),$$

то

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} \right\} = 0$$

и значит

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \\
&= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2.
\end{aligned}$$

### 6.2.5 Точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации. Случай $k = 1, 2; i_1, i_2 = 1, \dots, m$

В случае  $k = 1$  согласно лемме 6.1:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(1)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(1)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^1} K^2(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1}^2,$$

где

$$J[\psi^{(1)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(s) d\mathbf{f}_s, \quad J[\psi^{(1)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1=0}^p C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

$$C_{j_1} = \int_t^T \psi_1(s) \phi_{j_1}(s) ds, \quad K(s) \equiv \psi_1(s); \quad i_1 = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим случай  $k = 2$  и  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ . Случай  $i_1 \neq i_2$  рассмотрен в лемме 6.1. Пусть  $i_1 = i_2 = 1, \dots, m$ .

Сначала сформулируем очевидное утверждение.

*Если l.i.m.  $\xi_n = \xi$  и  $\mathbb{M}\{\xi^2\} < \infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M}\{\xi_n \xi_p\} = \mathbb{M}\{\xi \xi_p\}$ .*

Рассмотрим повторный стохастический интеграл Ито:

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)}.$$

По теореме 5.1 имеем:

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t} \right)^2 \right\} + \\ &+ \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} - 2 \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(2)}]_{T,t} J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t} \right)^2 \right\} + \\ &+ \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(2)}]_{T,t}^n J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} - \\
&- 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^n C_{j_1 j_1} \right) J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right\} = \\
&= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} - \\
&- 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p + \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=p+1}^n C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j_1=p+1}^n \sum_{j_1=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j_1=p+1}^n \sum_{j_2=p+1}^n C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=p+1}^n C_{j_1 j_1} \right) J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right\} = \\
&= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} - \\
&- 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1=0}^p \sum_{j_2=p+1}^n C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} + \sum_{j_1=p+1}^n \sum_{j_1=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j_1=p+1}^n \sum_{j_2=p+1}^n C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=p+1}^n C_{j_1 j_1} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right) \right\} = \\
&= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} - \\
&- 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j_1=p+1}^n C_{j_1 j_1} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} - \sum_{j_1=p+1}^n C_{j_1 j_1} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_1=p+1}^n C_{j_1 j_1} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} + \sum_{j_1=p+1}^n C_{j_1 j_1} \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right) = \\
&= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\}. \tag{6.19}
\end{aligned}$$

Используя (5.361), получим:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2 \right\} = \\
 &= \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_1,j'_1,j_2,j'_2=0}^q C_{j_2 j_1} C_{j'_2 j'_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j'_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j'_2}^{(i_1)} \right\} - \\
 &\quad - 2 \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2 + \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2 = 3 \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}^2 + \\
 &\quad + \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (C_{j_2 j_1}^2 + C_{j_1 j_2}^2 + 2C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} + 2C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2}) - \\
 &\quad - \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2, \\
 &\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}^2 + \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (C_{j_2 j_1}^2 + C_{j_1 j_2}^2) = \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^2, \\
 &\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}^2 + 2 \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} = \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} = \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2, \\
 &\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}^2 + 2 \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_1} = \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_1}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} = \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^2 + \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_1}. \quad (6.20)$$

Из (6.18) – (6.20) окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \\
 &= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^2 - \sum_{j_1,j_2=0}^p C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2}. \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

### 6.2.6 Точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации. Случай $k = 2, 3, 4; i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, m$ (другой подход)

Рассмотрим случай  $k = 2; i_1 = i_2; i_1 = 1, \dots, m$  с помощью другого подхода. Имеем:

$$\begin{aligned} J[\psi^{(2)}]_{T,t} &= \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)}, \\ J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p &= \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}, \\ \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t})^2 \right\} + \\ &+ \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p)^2 \right\} - 2\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(2)}]_{T,t} J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right\}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t})^2 \right\} = \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (6.23)$$

Согласно (6.20):

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^2 + \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_1}. \quad (6.24)$$

По формуле Ито:

$$\begin{aligned} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} &= \int_t^T \phi_{j_1}(s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)} \int_t^T \phi_{j_2}(s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)} = \int_t^T \phi_{j_1}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_1)} + \\ &+ \int_t^T \phi_{j_2}(s) \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_1)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \int_t^T \phi_{j_1}(s) \phi_{j_2}(s) ds \text{ с. в. 1.} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(2)}]_{T,t} J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} \times \right. \\ &\times \left. \left( \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \left( \int_t^T \phi_{j_1}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_1)} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_t^T \phi_{j_2}(s) \int_t^s \phi_{j_1}(s_1) d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_1)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \right) - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \Bigg\} = \\
 & = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \left( \int_t^T \psi_2(s) \phi_{j_2}(s) \int_t^s \psi_1(s_1) \phi_{j_1}(s_1) ds_1 ds + \right. \\
 & \quad \left. + \int_t^T \psi_2(s) \phi_{j_1}(s) \int_t^s \psi_1(s_1) \phi_{j_2}(s_1) ds_1 ds \right) = \\
 & = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} (C_{j_2 j_1} + C_{j_1 j_2}) = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^2 + \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2}. \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

Из (6.22) – (6.25) получим:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \\
 & = \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^2 - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2}. \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай  $k = 3$  и  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ .

Случай попарно различных  $i_1, i_2, i_3$  рассмотрен в лемме 6.1. Поэтому нам остается проанализировать 4 случая: 1.  $i_1 = i_2 \neq i_3$ ; 2.  $i_1 \neq i_2 = i_3$ ; 3.  $i_1 = i_3 \neq i_2$ ; 4.  $i_1 = i_2 = i_3$  ( $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ ).

Начнем с 1 случая ( $i_1 = i_2 \neq i_3$ ):

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(3)}]_{T,t})^2 \right\} = \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3, \quad (6.27) \\
 & J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_3(s) \int_t^s \psi_2(s_1) \int_t^{s_1} \psi_1(s_2) d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_3)}, \\
 & J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(3)}]_{T,t} - J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \\
 & = \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p)^2 \right\} -
 \end{aligned}$$

$$-2\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(3)}]_{T,t} J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p \right\}. \quad (6.28)$$

Используя (5.361), получим:

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_3, j'_3, j_2, j'_2, j_1, j'_1=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} C_{j'_3 j'_2 j'_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \right) \times \right. \\ & \quad \times \left. \left( \zeta_{j'_1}^{(i_1)} \zeta_{j'_2}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{j'_1=j'_2\}} \right) \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j'_3}^{(i_3)} \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_3=0}^p \sum_{j_2, j'_2, j_1, j'_1=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3 j'_2 j'_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j'_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j'_2}^{(i_1)} \right\} - \\ & \quad - 2 \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2 + \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2 = \\ & = 3 \sum_{j_3=0}^p \sum_{j_1=0}^p (C_{j_3 j_1 j_1})^2 + \sum_{j_3=0}^p \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (C_{j_3 j_2 j_1}^2 + C_{j_3 j_1 j_2}^2 + \\ & \quad + 2C_{j_3 j_1 j_1} C_{j_3 j_2 j_2} + 2C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3 j_1 j_2}) - \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{j_3, j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1}^2 + \sum_{j_3, j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (C_{j_3 j_2 j_1}^2 + C_{j_3 j_1 j_2}^2) = \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^2,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j_3, j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1}^2 + 2 \sum_{j_3, j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} C_{j_3 j_1 j_1} C_{j_3 j_2 j_2} = \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} C_{j_3 j_2 j_2} = \\ & = \sum_{j_3=0}^p \left( \sum_{j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\sum_{j_3, j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_1}^2 + 2 \sum_{j_3, j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} C_{j_3 j_1 j_2} C_{j_3 j_2 j_1} = \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_2} C_{j_3 j_2 j_1}.$$

Тогда

$$\mathsf{M} \left\{ \left( J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} = \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_2}^2 + \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_2} C_{j_3 j_2 j_1}. \quad (6.29)$$

Далее по формуле Ито:

$$\begin{aligned} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_1}^{(i_1)} &= \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} \int_t^T \phi_{j_2}(t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \\ &= \sum_{(t_1,t_2,t_3)} \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &\quad + \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &\quad + \int_t^T \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_3}(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_2 \text{ с в. 1}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где  $\sum_{(t_1,t_2,t_3)}$  — сумма по всем возможным перестановкам  $(t_1, t_2, t_3)$ , которые при суммировании осуществляются только в выражении  $d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}$ , причем индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах изменяются соответствующим образом, и если  $t_r$  поменялось местами с  $t_q$  в перестановке  $(t_1, t_2, t_3)$ , то и  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, i_1, i_3)$ .

Нетрудно видеть, что равенство (6.30) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_1}^{(i_1)} &= \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} \int_t^T \phi_{j_2}(t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \\ &= \sum_{(j_1,j_2,j_3)} \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &\quad + \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &\quad + \int_t^T \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_3}(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_2 \text{ с в. 1}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

где  $\sum_{(j_1,j_2,j_3)}$  — сумма по всем возможным перестановкам  $(j_1, j_2, j_3)$ , причем, если  $j_r$  в перестановке  $(j_1, j_2, j_3)$  поменяется местами с  $j_q$ , то и  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, i_1, i_3)$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(3)}]_{T,t} J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p \right\} = \\
 & = \mathbb{M} \left\{ \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} \times \right. \\
 & \times \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1,j_2,j_3)} \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \right. \\
 & + \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
 & \left. \left. + \int_t^T \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_3}(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_2 - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \int_t^T \phi_{j_3}(s) d\mathbf{f}_s^{(i_3)} \right) \right\} = \\
 & = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} (C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2}) = \\
 & = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^2 + \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3 j_1 j_2}. \tag{6.32}
 \end{aligned}$$

Из (6.27) – (6.32) окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(3)}]_{T,t})^2 \right\} = \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 - \\
 & - \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^2 - \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_3 j_1 j_2} C_{j_3 j_2 j_1} (i_1 = i_2 \neq i_3).
 \end{aligned}$$

Во 2 и 3 случаях аналогично приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(3)}]_{T,t})^2 \right\} = \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 - \\
 & - \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^2 - \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_2 j_3 j_1} C_{j_3 j_2 j_1} (i_1 \neq i_2 = i_3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(3)}]_{T,t})^2 \right\} = \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 - \\
 & - \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^2 - \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_1 j_2 j_3} (i_1 = i_3 \neq i_2).
 \end{aligned}$$

В 4 частном случае, когда  $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv 1$  с в. 1 имеем (см. главу 5):

$$I_{000T,t}^{(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6}(T-t)^{3/2} \left( \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^3 - 3\zeta_0^{(i_1)} \right).$$

В более общем случае, когда  $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv (t-s)^l; l = 0, 1, 2, \dots$  мы можем записать (см. главу 5):

$$I_{lllT,t}^{(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6} \left( \left( I_{lT,t}^{(i_1)} \right)^3 - 3I_{lT,t}^{(i_1)} \Delta_{lT,t} \right) \text{ с в. 1},$$

$$I_{lllT,t}^{*(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6} \left( I_{lT,t}^{(i_1)} \right)^3, \quad I_{lT,t}^{(i_1)} = \sum_{j=0}^l C_j \zeta_j^{(i_1)} \text{ с в. 1},$$

где

$$\Delta_{lT,t} = \int_t^T (t-s)^{2l} ds, \quad C_j = \int_t^T (t-s)^l \phi_j(s) ds,$$

а  $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Если в 4 случае функции  $\psi_1(s), \dots, \psi_3(s)$  различны, то вычисление величины

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(3)}]_{T,t} \right)^2 \right\}$$

становится более сложным, чем во всех рассмотренных ранее случаях. Этот случай может быть рассмотрен с помощью (5.359) при  $k = 6$  и  $k = 4$ . Однако, в следующем разделе будет рассмотрен подход, позволяющий гораздо более просто изучить случай 4, а также вычислить точно среднеквадратическую погрешность аппроксимации для случая любого фиксированного  $k$  и произвольных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ .

Перейдем к рассмотрению случая  $k = 4$  и  $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m$ .

Случай попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_4$  рассмотрен в лемме 6.1, поэтому остается проанализировать следующие случаи:

1.  $i_1 = i_2 \neq i_3, i_4; i_3 \neq i_4;$
2.  $i_1 = i_3 \neq i_2, i_4; i_2 \neq i_4;$
3.  $i_1 = i_4 \neq i_2, i_3;$
- $i_2 \neq i_3;$
4.  $i_2 = i_3 \neq i_1, i_4; i_1 \neq i_4;$
5.  $i_2 = i_4 \neq i_1, i_3; i_1 \neq i_3;$
6.  $i_3 = i_4 \neq i_1, i_2;$
- $i_1 \neq i_2;$
7.  $i_1 = i_2 = i_3 \neq i_4;$
8.  $i_2 = i_3 = i_4 \neq i_1;$
9.  $i_1 = i_2 = i_4 \neq i_3;$
10.  $i_1 = i_3 = i_4 \neq i_2;$
11.  $i_1 = i_2 = i_3 = i_4;$
12.  $i_1 = i_2 \neq i_3 = i_4;$
13.  $i_1 = i_3 \neq i_2 = i_4;$
14.  $i_1 = i_4 \neq i_2 = i_3.$

Рассмотрим здесь только случаи 1–6. Для 1 случая имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_4(t_4) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_4}^{(i_4)} \quad (i_1 = i_2 \neq i_3, i_4),$$

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t})^2 \right\} = \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4, \quad (6.33)$$

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right),$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p)^2 \right\} &= \\ &= \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 + \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p)^2 \right\} - \\ &\quad - 2\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(4)}]_{T,t} J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p \right\}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Используя (5.361), получим:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p)^2 \right\} &= \\ &= \sum_{j_3, j_4=0}^p \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_1, j'_1, j_2, j'_2=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} C_{j_4 j_3 j'_2 j'_1} \zeta_{j'_1}^{(i_1)} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j'_2}^{(i_1)} \right\} - \\ &\quad - \sum_{j_2, j_3, j_4, j'_1=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_2} C_{j_4 j_3 j'_1 j'_1} - \sum_{j_2, j_3, j_4, j'_2=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_2} C_{j_4 j_3 j'_2 j'_2} + \\ &\quad + \sum_{j_2, j_3, j_4, j'_2=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_2} C_{j_4 j_3 j'_2 j'_2} = \\ &= \sum_{j_3, j_4=0}^p \left( \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_1, j'_1, j_2, j'_2=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} C_{j_4 j_3 j'_2 j'_1} \zeta_{j'_1}^{(i_1)} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j'_2}^{(i_1)} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_{j_2=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_2} \right)^2 \right) = \\ &= \sum_{j_3, j_4=0}^p \left( 3 \sum_{j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_1 j_1}^2 + \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \left( C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^2 + C_{j_4 j_3 j_1 j_2}^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + C_{j_4 j_3 j_{j_2} j_1}^2 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2C_{j_4 j_3 j_1 j_1} C_{j_4 j_3 j_2 j_2} + 2C_{j_4 j_3 j_2 j_1} C_{j_4 j_3 j_1 j_2} \Big) - \left( \sum_{j_2=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_2} \right)^2 = \\
 & = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^2 + \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_1 j_2} C_{j_4 j_3 j_2 j_1}. \tag{6.35}
 \end{aligned}$$

Аналогично случаю  $k = 3$  получаем:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(4)}]_{T,t} J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p \right\} = \\
 & = \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_1 j_2}^2 + \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_1 j_2} C_{j_4 j_3 j_2 j_1}. \tag{6.36}
 \end{aligned}$$

Поэтому из (6.33) – (6.36) мы имеем:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, \dots, t_4) dt_1 \dots dt_4 - \\
 & - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^2 - \\
 & - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_1 j_2} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \quad (i_1 = i_2 \neq i_3, i_4; \quad i_3 \neq i_4). \tag{6.37}
 \end{aligned}$$

Для случаев 2–6 полностью аналогично получаем:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, \dots, t_4) dt_1 \dots dt_4 - \\
 & - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^2 - \\
 & - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} C_{j_4 j_1 j_2 j_3} \quad (i_1 = i_3 \neq i_2, i_4; \quad i_2 \neq i_4), \tag{6.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, \dots, t_4) dt_1 \dots dt_4 - \\
 & - \sum_{j_4, j_3, j_2, j_1=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^2 -
 \end{aligned}$$

$$- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4j_3j_2j_1} C_{j_1j_3j_2j_4} \quad (i_1 = i_4 \neq i_2, i_3; \quad i_2 \neq i_3), \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, \dots, t_4) dt_1 \dots dt_4 - \\ &- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \\ &- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4j_3j_2j_1} C_{j_4j_2j_3j_1} \quad (i_2 = i_3 \neq i_1, i_4; \quad i_1 \neq i_4), \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, \dots, t_4) dt_1 \dots dt_4 - \\ &- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \\ &- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4j_3j_2j_1} C_{j_2j_3j_4j_1} \quad (i_2 = i_4 \neq i_1, i_3; \quad i_1 \neq i_3), \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, \dots, t_4) dt_1 \dots dt_4 - \\ &- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \\ &- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^p C_{j_4j_3j_2j_1} C_{j_3j_4j_2j_1} \quad (i_3 = i_4 \neq i_1, i_2; \quad i_1 \neq i_2). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Если в 11 случае  $\psi_1(s), \dots, \psi_4(s) \equiv 1$ , то можно использовать следующую формулу (см. главу 5):

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_1i_1i_1)} = \frac{(T-t)^2}{24} \left( \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^4 - 6 \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + 3 \right) \text{ с в. 1.}$$

В более общем случае, когда  $\psi_1(s), \dots, \psi_4(s) \equiv (t-s)^l; l = 0, 1, 2, \dots$  с в. 1 можем записать (см. главу 5):

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = I_{llll_{T,t}}^{(i_1i_1i_1i_1)} = \frac{1}{24} \left( \left( I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \right)^4 - 6 \left( I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \right)^2 \Delta_{l_{T,t}} + 3 \left( \Delta_{l_{T,t}} \right)^2 \right),$$

$$J^*[\psi^{(4)}]_{T,t} = I_{llll_{T,t}}^{*(i_1 i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{24} \left( I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \right)^4, \quad I_{l_{T,t}}^{(i)} = \sum_{j=0}^l C_j \zeta_j^{(i_1)},$$

$$\Delta_{l_{T,t}} = \int_t^T (t-s)^{2l} ds,$$

где предполагается, что используется разложение стохастического интеграла  $I_{l_{T,t}}^{(i)}$  с использованием полиномов Лежандра.

Случаи 7–14 могут быть рассмотрены с помощью (5.361) при  $k = 8$ ,  $k = 6$  и  $k = 4$ . Однако, в следующем разделе будет рассмотрен подход, позволяющий гораздо более просто изучить случаи 7–14, а также вычислить точно среднеквадратическую погрешность аппроксимации для случая любого фиксированного  $k$  и произвольных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ .

### 6.2.7 Точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации для случая любого фиксированного $k$ и произвольных чисел $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ (решение проблемы в общем случае)

**Теорема 6.1.** Пусть выполнены следующие условия:

1.  $\psi_i(\tau); i = 1, 2, \dots, k$  — непрерывные на промежутке  $[t, T]$  функции.
2.  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система непрерывных функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \\ &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \\ &- \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} \sum_{(j_1, \dots, j_k)} \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \right\}, \end{aligned} \tag{6.43}$$

где

$$\begin{aligned} J[\psi^{(k)}]_{T,t} &= \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \\ J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p &= \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right), \end{aligned} \tag{6.44}$$

$$S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}, \quad (6.45)$$

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t, T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k,$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (t_1, \dots, t_k \in [t, T]),$$

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)} \quad (i = 1, \dots, m)$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных  $i$  или  $j$ ;  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ;  $\sum_{(j_1, \dots, j_k)}$  — сумма по всем возможным перестановкам  $(j_1, \dots, j_k)$ , причем, если  $j_r$  в перестановке  $(j_1, \dots, j_k)$  поменяется местами с  $j_q$ , то и  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, \dots, i_k)$ ; остальные обозначения такие же, как в теореме 5.1.

**З а м е ч а н и е 6.1.** Прежде чем доказывать теорему 6.1 отметим, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \right\} = \\ & = \int_t^T \psi_k(t_k) \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k = C_{j_k \dots j_1}. \end{aligned}$$

Поэтому в случае попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_k$  из теоремы 6.1 получаем:

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \\ & = \int_{[t, T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1}^2. \end{aligned}$$

Кроме того, если  $i_1 = \dots = i_k$ , то по теореме 6.1 имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} = \\ = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, \dots, j_k)} C_{j_k \dots j_1} \right).$$

В частности, при  $k = 3$ :

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(3)}]_{T,t} - J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} = \int_t^T \psi_3^2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2^2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1^2(t_1) dt_1 dt_2 dt_3 - \\ - \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \left( C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2} + C_{j_2 j_3 j_1} + C_{j_2 j_1 j_3} + C_{j_1 j_2 j_3} + C_{j_1 j_3 j_2} \right).$$

**Доказательство.** По теореме 5.1 при  $p_1 = \dots = p_k = p$  имеем:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right). \quad (6.46)$$

Для  $n > p$  можем записать:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^n = \\ = \left( \sum_{j_1=0}^p + \sum_{j_1=p+1}^n \right) \dots \left( \sum_{j_k=0}^p + \sum_{j_k=p+1}^n \right) C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right) = \\ = J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p + \xi[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1,n}. \quad (6.47)$$

Нетрудно заметить (см. формулы (5.28) – (5.33)), что в силу независимости случайных величин  $\zeta_j^{(i)}$  при различных  $j$  ( $i \neq 0$ ) и специальной структуры случайных величин  $S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)}$  выполняются следующие соотношения:

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0, \quad (6.48)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right) \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j'_l}^{(i_l)} - S_{j'_1, \dots, j'_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right) \right\} = 0, \quad (6.49)$$

где  $(j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{K}_p$ ,  $(j'_1, \dots, j'_k) \in \mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_p$  и

$$\mathcal{K}_n = \{(j_1, \dots, j_k) : 0 \leq j_1, \dots, j_k \leq n\},$$

$$\mathcal{K}_p = \{(j_1, \dots, j_k) : 0 \leq j_1, \dots, j_k \leq p\}.$$

Из (6.48) и (6.49) получаем:

$$\mathbb{M} \{ J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1,n} \} = 0.$$

В силу (6.46), (6.44) и (6.47) можем записать:

$$\xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1,n} = J[\psi^{(k)}]_{T,t}^n - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1,n} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \stackrel{\text{def}}{=} \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\mathbb{M} \{ \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \}| = \\ &= |\mathbb{M} \{ (\xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1} - \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1,n} + \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1,n}) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \}| = \\ &\leq |\mathbb{M} \{ (\xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1} - \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1,n}) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \}| + |\mathbb{M} \{ \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1,n} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \}| = \\ &= |\mathbb{M} \{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^n) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \}| \leq \\ &\leq \sqrt{\mathbb{M} \{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^n)^2 \}} \sqrt{\mathbb{M} \{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p)^2 \}} \leq \\ &\leq \sqrt{\mathbb{M} \{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^n)^2 \}} \times \\ &\quad \times \left( \sqrt{\mathbb{M} \{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \}} + \sqrt{\mathbb{M} \{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \}} \right) \leq \\ &\leq K \sqrt{\mathbb{M} \{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^n)^2 \}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{6.50}$$

где  $K$  — постоянная.

Из (6.50) следует, что

$$\mathbb{M} \left\{ \xi [\psi^{(k)}]_{T,t}^{p+1} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right\} = 0$$

или

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p) J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right\} = 0,$$

что в свою очередь означает, что

$$\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right\} = \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p)^2 \right\}. \quad (6.51)$$

С учетом (6.51) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \right\} + \\ &+ \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p)^2 \right\} - 2\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right\} = \\ &= \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \right\} - \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right\} = \\ &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right\}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Вычислим  $\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right\}$ . Заметим, что величина  $S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)}$  вида (6.45) состоит из конечной суммы стохастических интегралов Ито кратностей меньше, чем  $k$  и постоянных величин (см. формулы (5.28) – (5.33)). Это означает, что в силу моментных свойств стохастических интегралов Ито:

$$\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0.$$

В результате

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right\} &= \\ &= \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - S_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} \right\}. \quad (6.53)$$

Подставляя (6.53) в (6.52), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \\ &- \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Преобразуем величину:

$$\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} \right\}.$$

С помощью формулы (5.359) для кратной суммы и леммы 5.3 (можно также воспользоваться формулой Ито) можно получить следующее представление:

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} &= \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \dots \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_k)} \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} + \\ &\quad + G_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \text{ с в. 1}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

где  $G_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)}$  представляет собой конечную сумму повторных стохастических интегралов Ито кратностей меньше, чем  $k$  и постоянных величин;  $\sum_{(j_1, \dots, j_k)}$  — сумма по всем возможным перестановкам  $(j_1, \dots, j_k)$ , причем, если  $j_r$  в перестановке  $(j_1, \dots, j_k)$  поменяется местами с  $j_q$ , то и  $i_r$  поменяется местами с  $i_q$  в перестановке  $(i_1, \dots, i_k)$ .

Как уже отмечалось ранее, в силу моментных свойств стохастических интегралов Ито:

$$\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} G_{j_1, \dots, j_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0. \quad (6.56)$$

Например, полагая в (5.386)  $\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_3}(t_3)$  вместо  $R_{ppp}(t_1, t_2, t_3)$  и используя лемму 5.3, получим следующее представление (частный случай (6.55) при  $k = 3$ ):

$$\begin{aligned}
& \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} \int_t^T \phi_{j_2}(t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \\
& = \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
& + \int_t^T \phi_{j_2}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_3}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_2)} + \\
& + \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_2}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
& + \int_t^T \phi_{j_2}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_3}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_2)} + \\
& + \int_t^T \phi_{j_1}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_3}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} + \\
& + \int_t^T \phi_{j_1}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_3}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_2}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_2}(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \phi_{j_2}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_2) \phi_{j_3}(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_2)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \phi_{j_1}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \phi_{j_2}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \phi_{j_1}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} dt_3 + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \phi_{j_1}(t_3) \phi_{j_2}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_3}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} dt_3 = \\
& = \sum_{(j_1, j_2, j_3)} \int_t^T \phi_{j_3}(t_3) \int_t^{t_3} \phi_{j_2}(t_2) \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} + \\
& + G_{j_1, j_2, j_3}^{(i_1 i_2 i_3)} \text{ с в. 1,}
\end{aligned}$$

где сумма по перестановкам  $(j_1, j_2, j_3)$  понимается также, как и в условии теоремы 6.1.

Объединив (6.54), (6.55) и (6.56), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \\ &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \\ &- \sum_{j_1=0}^p \dots \sum_{j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1} \mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} \sum_{(j_1, \dots, j_k)} \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \right\}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим с помощью теоремы 6.1 частные случаи 7 – 14 для  $k = 4$ , которые не были разобраны в предыдущем разделе.

7.  $i_1 = i_2 = i_3 \neq i_4$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \\ &= \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_3)} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right). \quad (6.57) \end{aligned}$$

8.  $i_2 = i_3 = i_4 \neq i_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \\ &= \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3, j_4)} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right). \quad (6.58) \end{aligned}$$

9.  $i_1 = i_2 = i_4 \neq i_3$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} &= \\ &= \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_4)} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right). \quad (6.59) \end{aligned}$$

10.  $i_1 = i_3 = i_4 \neq i_2$ :

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} =$$

$$= \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3, j_4)} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right). \quad (6.60)$$

11.  $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \\ & = \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right). \end{aligned} \quad (6.61)$$

12.  $i_1 = i_2 \neq i_3 = i_4$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \\ & = \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2)} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right) - \\ & \quad - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2)} C_{j_3 j_4 j_2 j_1} \right). \end{aligned} \quad (6.62)$$

13.  $i_1 = i_3 \neq i_2 = i_4$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \\ & = \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3)} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right) - \\ & \quad - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3)} C_{j_2 j_3 j_4 j_1} \right). \end{aligned} \quad (6.63)$$

14.  $i_1 = i_4 \neq i_2 = i_3$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \\ & = \int_{[t,T]^4} K^2(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3)} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right) - \\ & \quad - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3)} C_{j_1 j_3 j_2 j_4} \right). \end{aligned} \quad (6.64)$$

### 6.2.8 Точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации с помощью теоремы 6.1 для случая $k = 5$ и произвольных чисел $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$

В данном разделе рассмотрим точное вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации, полученной на основе разложения (5.31) для повторного стохастического интеграла Ито 5 кратности

$$J[\psi^{(5)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_5(t_5) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_5)},$$

с помощью теоремы 6.1 при произвольных  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$ . Здесь  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  — независимые стандартные винеровские процессы.

Напомним, что аппроксимация, полученная на основе разложения (5.31) при  $p_1 = \dots = p_5 = p$  имеет вид:

$$\begin{aligned} J[\psi^{(5)}]_{T,t}^p = & \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \right. \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \Big),
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в теореме 5.1.

Нетрудно видеть, что имеется 52 различных варианта для вычисления величины

$$M \left\{ \left( J[\psi^{(5)}]_{T,t} - J[\psi^{(5)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\}, \tag{6.66}$$

которые можно описать семью различными случаями.

**Случай 1.** Числа  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  являются попарно различными.

**Случай 2.** Числа  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  равны, т.е. выполняется равенство  $i_1 = \dots = i_5 = 1, \dots, m$ .

**Случай 3.** Среди чисел  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  есть 2 совпадающих числа, не равных оставшимся трем числам, которые в свою очередь являются попарно различными (10 вариантов).

**Случай 4.** Среди чисел  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  есть 3 совпадающих числа, не равных оставшимся двум числам, которые в свою очередь различны (10 вариантов).

**Случай 5.** Среди чисел  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  есть 4 совпадающих числа, которые не равны оставшемуся пятому числу (5 вариантов).

**Случай 6.** Среди чисел  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  есть две пары совпадающих чисел, причем числа из разных пар не равны между собой и не равны оставшемуся пятому числу (15 вариантов).

**Случай 7.** Среди чисел  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  есть пара и тройка совпадающих чисел, причем числа из указанной пары не равны числам из указанной тройки (10 вариантов).

Вычислим точно для каждого из 52 вариантов величину (6.66) с помощью теоремы 6.1, полагая

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(5)}]_{T,t} - J[\psi^{(5)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} \stackrel{\text{def}}{=} E_p,$$

$$\int_{[t,T]^5} K^2(t_1, \dots, t_5) dt_1 \dots dt_5 \stackrel{\text{def}}{=} I.$$

**Случай 1.**  $i_1, \dots, i_5$  — попарно различны:

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1}^2.$$

**Случай 2.**  $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, \dots, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

**Случай 3.**

3.1.  $i_1 = i_2 \neq i_3, i_4, i_5$  ( $i_3, i_4, i_5$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.2.  $i_1 = i_3 \neq i_2, i_4, i_5$  ( $i_2, i_4, i_5$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.3.  $i_1 = i_4 \neq i_2, i_3, i_5$  ( $i_2, i_3, i_5$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.4.  $i_1 = i_5 \neq i_2, i_3, i_4$  ( $i_2, i_3, i_4$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.5.  $i_2 = i_3 \neq i_1, i_4, i_5$  ( $i_1, i_4, i_5$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.6.  $i_2 = i_4 \neq i_1, i_3, i_5$  ( $i_1, i_3, i_5$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.7.  $i_2 = i_5 \neq i_1, i_3, i_4$  ( $i_1, i_3, i_4$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.8.  $i_3 = i_4 \neq i_1, i_2, i_5$  ( $i_1, i_2, i_5$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.9.  $i_3 = i_5 \neq i_1, i_2, i_4$  ( $i_1, i_2, i_4$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

3.10.  $i_4 = i_5 \neq i_1, i_2, i_3$  ( $i_1, i_2, i_3$  — попарно различны):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

#### Случай 4.

4.1.  $i_1 = i_2 = i_3 \neq i_4, i_5$  ( $i_4 \neq i_5$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_3)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.2.  $i_1 = i_2 = i_4 \neq i_3, i_5$  ( $i_3 \neq i_5$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.3.  $i_1 = i_2 = i_5 \neq i_3, i_4$  ( $i_3 \neq i_4$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.4.  $i_2 = i_3 = i_4 \neq i_1, i_5$  ( $i_1 \neq i_5$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.5.  $i_2 = i_3 = i_5 \neq i_1, i_4$  ( $i_1 \neq i_4$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.6.  $i_2 = i_4 = i_5 \neq i_1, i_3$  ( $i_1 \neq i_3$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.7.  $i_3 = i_4 = i_5 \neq i_1, i_2$  ( $i_1 \neq i_2$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_3, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.8.  $i_1 = i_3 = i_5 \neq i_2, i_4$  ( $i_2 \neq i_4$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.9.  $i_1 = i_3 = i_4 \neq i_2, i_5$  ( $i_2 \neq i_5$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

4.10.  $i_1 = i_4 = i_5 \neq i_2, i_3$  ( $i_2 \neq i_3$ ):

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

### Случай 5.

5.1.  $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 \neq i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

5.2.  $i_1 = i_2 = i_3 = i_5 \neq i_4$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

5.3.  $i_1 = i_2 = i_4 = i_5 \neq i_3$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

5.4.  $i_1 = i_3 = i_4 = i_5 \neq i_2$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

5.5.  $i_2 = i_3 = i_4 = i_5 \neq i_1$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right).$$

### Случай 6.

6.1.  $i_5 \neq i_1 = i_2 \neq i_3 = i_4 \neq i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2)} \left( \sum_{(j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.2.  $i_5 \neq i_1 = i_3 \neq i_2 = i_4 \neq i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3)} \left( \sum_{(j_2, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.3.  $i_5 \neq i_1 = i_4 \neq i_2 = i_3 \neq i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_4)} \left( \sum_{(j_2, j_3)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.4.  $i_4 \neq i_1 = i_2 \neq i_3 = i_5 \neq i_4$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2)} \left( \sum_{(j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.5.  $i_4 \neq i_1 = i_5 \neq i_2 = i_3 \neq i_4$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_5)} \left( \sum_{(j_2, j_3)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.6.  $i_4 \neq i_2 = i_5 \neq i_1 = i_3 \neq i_4$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_5)} \left( \sum_{(j_1, j_3)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.7.  $i_3 \neq i_2 = i_5 \neq i_1 = i_4 \neq i_3$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_5)} \left( \sum_{(j_1, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.8.  $i_3 \neq i_1 = i_2 \neq i_4 = i_5 \neq i_3$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2)} \left( \sum_{(j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.9.  $i_3 \neq i_2 = i_4 \neq i_1 = i_5 \neq i_3$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_4)} \left( \sum_{(j_1, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.10.  $i_2 \neq i_1 = i_4 \neq i_3 = i_5 \neq i_2$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_4)} \left( \sum_{(j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.11.  $i_2 \neq i_1 = i_3 \neq i_4 = i_5 \neq i_2$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3)} \left( \sum_{(j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.12.  $i_2 \neq i_1 = i_5 \neq i_3 = i_4 \neq i_2$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_5)} \left( \sum_{(j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.13.  $i_1 \neq i_2 = i_3 \neq i_4 = i_5 \neq i_1$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3)} \left( \sum_{(j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.14.  $i_1 \neq i_2 = i_4 \neq i_3 = i_5 \neq i_1$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_4)} \left( \sum_{(j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

6.15.  $i_1 \neq i_2 = i_5 \neq i_3 = i_4 \neq i_1$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_5)} \left( \sum_{(j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

## Случай 7.

7.1.  $i_1 = i_2 = i_3 \neq i_4 = i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_4, j_5)} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_3)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.2.  $i_1 = i_2 = i_4 \neq i_3 = i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_3, j_5)} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.3.  $i_1 = i_2 = i_5 \neq i_3 = i_4$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_3, j_4)} \left( \sum_{(j_1, j_2, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.4.  $i_2 = i_3 = i_4 \neq i_1 = i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_5)} \left( \sum_{(j_2, j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.5.  $i_2 = i_3 = i_5 \neq i_1 = i_4$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_4)} \left( \sum_{(j_2, j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.6.  $i_2 = i_4 = i_5 \neq i_1 = i_3$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_3)} \left( \sum_{(j_2, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.7.  $i_3 = i_4 = i_5 \neq i_1 = i_2$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_1, j_2)} \left( \sum_{(j_3, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.8.  $i_1 = i_3 = i_5 \neq i_2 = i_4$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_4)} \left( \sum_{(j_1, j_3, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.9.  $i_1 = i_3 = i_4 \neq i_2 = i_5$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_5)} \left( \sum_{(j_1, j_3, j_4)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

7.10.  $i_1 = i_4 = i_5 \neq i_2 = i_3$ :

$$E_p = I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1} \left( \sum_{(j_2, j_3)} \left( \sum_{(j_1, j_4, j_5)} C_{j_5 \dots j_1} \right) \right).$$

Отметим, что в качестве альтернативы, полученным в данном разделе точным выражениям, может выступать оценка (см. разд. 6.2.2):

$$E_p \leq 5! \left( I - \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^p C_{j_5 \dots j_1}^2 \right)$$

для всех возможных  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$ .

### 6.3 О вычислении среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича

В данном разделе (на примере интегралов 2 и 3 кратности) покажем, что вычисление среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича сложнее, чем для повторных стохастических интегралов Ито, хотя сами аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича (см. теоремы 5.3, 5.3\*, 5.4, 5.5, 5.5\*, 5.6, 5.7, 5.7\*) проще, чем аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито (см. теорему 5.1).

Рассмотрим повторный стохастический интеграл Стратоновича:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} \quad (i_1 = 1, \dots, m),$$

где, например, функция  $\psi_2(\tau)$  — непрерывно дифференцируема на интервале  $[t, T]$ , а функция  $\psi_1(\tau)$  — дважды непрерывно дифференцируема на этом интервале.

По теореме 5.3 (здесь сохранен смысл обозначений этой теоремы):

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)}$$

и

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)}.$$

Тогда, учитывая стандартные формулы связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича, получим

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ (J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^p)^2 \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s) \psi_2(s) ds - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \right)^2 \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p + \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s) \psi_2(s) ds - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2 \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p)^2 \right\} + \left( \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s) \psi_2(s) ds - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2 = \end{aligned}$$

$$= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^2 - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2} + \\ + \left( \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s) \psi_2(s) ds - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2,$$

где  $J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p$  определяется по теореме 5.1, т.е. следующим выражением:

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}.$$

Нетрудно видеть, что величина

$$\mathbb{M} \left\{ (J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^p)^2 \right\}$$

больше величины

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p)^2 \right\}$$

на величину

$$E_p^{(i_1)} = \left( \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(s) \psi_2(s) ds - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} \right)^2.$$

Ясно, что в ряде случаев  $E_p^{(i_1)} = 0$ . Например, для случая, когда  $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau) \equiv 1$  ( $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ ) имеем:

$$\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1} = \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^p (C_{j_1})^2 = \frac{1}{2} (C_0)^2 = \frac{1}{2} (T - t).$$

Однако, в общем случае  $E_p^{(i_1)} \neq 0$ .

Существенно сложнее обстоит ситуация с повторными стохастическими интегралами Стратоновича 3 кратности.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл Стратоновича 3 кратности вида

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \int_t^{*T} \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} (i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m).$$

Учитывая стандартные формулы связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича, а также теоремы 5.1 и 5.4, 5.5, 5.5\*, 5.6 получим:

$$\mathbb{M} \left\{ (I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)p})^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= M \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int ds d\mathbf{f}_\tau^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int d\mathbf{f}_s^{(i_1)} d\tau - I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)p} \right)^2 \right\} = \\
 &= M \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)p} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)p} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int ds d\mathbf{f}_\tau^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \frac{1}{2} \int_t^T \int d\mathbf{f}_s^{(i_1)} d\tau - I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)p} \right)^2 \right\}, \quad (6.67)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)p} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \quad (6.68)
 \end{aligned}$$

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)p} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}. \quad (6.69)$$

Подставим (6.68) и (6.69) в (6.67):

$$\begin{aligned}
 &M \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)p} \right)^2 \right\} = \\
 &= M \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)p} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int ds d\mathbf{f}_\tau^{(i_3)} - \sum_{j_1, j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int d\mathbf{f}_s^{(i_1)} d\tau - \sum_{j_1, j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right)^2 \right\} \leq \\
 &\leq 4 \left( M \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)p} \right)^2 \right\} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} F_p^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} G_p^{(i_1)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} H_p^{(i_2)} \right), \quad (6.70)
 \end{aligned}$$

где

$$F_p^{(i_3)} = M \left\{ \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int ds d\mathbf{f}_\tau^{(i_3)} - \sum_{j_1, j_3=0}^p C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\},$$

$$G_p^{(i_1)} = \mathbb{M} \left\{ \left( \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^\tau d\mathbf{f}_s^{(i_1)} d\tau - \sum_{j_1, j_3=0}^p C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\},$$

$$H_p^{(i_2)} = \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_1 j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right)^2 \right\}.$$

В теоремах 5.4, 5.5, 5.5\* и 5.6 показано что для случаев полиномов Лежандра и тригонометрических функций выполняются равенства:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_p^{(i_3)} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} G_p^{(i_1)} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} H_p^{(i_2)} = 0.$$

Однако, согласно (6.70), величина

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)p} \right)^2 \right\}$$

оценивается величиной

$$4\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)p} \right)^2 \right\}$$

(которая либо вычисляется точно по теореме 6.1, либо оценивается с помощью оценки (6.16) при  $k = 3$ ) и рядом дополнительных слагаемых.

Таким образом платой за относительную простоту аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича является более сложное (в сравнении с повторными стохастическими интегралами Ито) вычисление или оценивание их среднеквадратических погрешностей аппроксимации.

## 6.4 Некоторые особенности вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации для систем полиномиальных и тригонометрических функций

Покажем на примере, что для случая тригонометрической системы функций аппроксимация на основе формулы (6.9) может быть усовершенствована таким образом, что ошибка аппроксимации

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J[\psi^{(2)}]_{T,t}^q - J[\psi^{(2)}]_{T,t} \right)^2 \right\}$$

при  $i_1 \neq i_2$  окажется значительно меньше, чем правая часть (6.11).

Пусть в качестве системы функций  $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$  взята тригонометрическая система функций

$$\phi_j(s) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0 \\ \sqrt{2}\sin(2\pi r(s-t)/(T-t)) & \text{при } j = 2r-1; \\ \sqrt{2}\cos(2\pi r(s-t)/(T-t)) & \text{при } j = 2r \end{cases} \quad (6.71)$$

$r = 1, 2, \dots$

Используя (5.28) и систему функций (6.71) применительно к повторному стохастическому интегралу Ито вида

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} = \int_t^T \int_t^s d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} d\mathbf{f}_s^{(i_1)}; \quad i_1, i_2 = 1, \dots, m$$

получаем

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} = \frac{1}{2}(T-t) \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left( \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \sqrt{2} \left( \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right) \right) (i_1 \neq i_2), \quad (6.72)$$

где

$$\zeta_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)},$$

а  $\mathbf{f}_s^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые стандартные винеровские процессы. При этом ряд (6.72) сходится в среднеквадратическом смысле.

Согласно (6.9) следует записать

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t) \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left( \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \sqrt{2} \left( \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right) \right) (i_1 \neq i_2). \quad (6.73)$$

Из (6.72) и (6.73) при  $i_1 \neq i_2$  имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right). \quad (6.74)$$

Нетрудно видеть, что правую часть (6.74) можно уменьшить в три раза, если вместо аппроксимации вида (6.73) взять следующую аппроксимацию [76]:

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t) \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left( \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \sqrt{2} \left( \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\alpha_q} \left( \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \xi_q^{(i_2)} \right) \right), \quad (6.75)$$

где  $i_1 \neq i_2$  и

$$\begin{aligned} \xi_q^{(i)} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_q}} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i)} \sim N(0, 1), \\ \alpha_q &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

При этом гауссовские случайные величины  $\zeta_0^{(i)}, \zeta_{2r}^{(i)}, \zeta_{2r-1}^{(i)}, \xi_q^{(i)}$ ;  $r = 1, \dots, q$ ;  $i = 1, \dots, m$  независимы в совокупности.

Из (6.72) и (6.75) при  $i_1 \neq i_2$  получаем

$$M \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right), \quad (6.76)$$

т.е. правая часть (6.76) в три раза меньше, чем правая часть (6.74).

Приведенный способ усовершенствования аппроксимаций повторных стохастических интегралов обобщен на случай интегралов третьей кратности в [148].

Этого не приходится, однако, делать при выборе в качестве системы функций  $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$  полной ортонормированной в пространстве  $L_2([t, T])$  системы полиномов Лежандра.

Напомним, что в главе 5, с использованием системы полиномов Лежандра, для  $i_1 \neq i_2$  было получено следующее разложение:

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) \right),$$

которое сходится в среднеквадратическом смысле.

Нетрудно проверить, что

$$M \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right). \quad (6.77)$$

Из (6.76) и (6.77) соответственно получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \leq \\ &\leq \frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \int_q^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2 q} \leq C_1 \frac{(T-t)^2}{q}, \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^2}{2} \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1} \leq \\ &\leq \frac{(T-t)^2}{2} \int_q^{\infty} \frac{1}{4x^2 - 1} dx = -\frac{(T-t)^2}{8} \ln \left| 1 - \frac{2}{2q+1} \right| \leq C_2 \frac{(T-t)^2}{q}, \end{aligned} \quad (6.79)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные.

Поскольку (см. главу 7 и последующие главы) величина  $T - t$  играет роль шага интегрирования в численных методах для СДУ Ито, то эта величина достаточно мала.

Принимая во внимание это обстоятельство, нетрудно заметить, что существует такая постоянная  $C_3$ , что

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{l_1 \dots l_k T,t}^{(i_1 \dots i_k)} - I_{l_1 \dots l_k T,t}^{(i_1 \dots i_k)q} \right)^2 \right\} \leq C_3 \mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\}, \quad (6.80)$$

где  $I_{l_1 \dots l_k T,t}^{(i_1 \dots i_k)q}$  аппроксимация повторного стохастического интеграла  $I_{l_1 \dots l_k T,t}^{(i_1 \dots i_k)}$  из семейства (6.1), полученная, например, по теореме 5.1 при  $p_1 = \dots = p_k = q$  и  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ;  $k \geq 2$ .

Из (6.78), (6.79) и (6.80) мы окончательно получаем:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{l_1 \dots l_k T,t}^{(i_1 \dots i_k)} - I_{l_1 \dots l_k T,t}^{(i_1 \dots i_k)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{(T-t)^2}{q}, \quad (6.81)$$

где  $C$  — постоянная.

Отметим, что оценка (6.81) достаточно общая, но в тоже время грубая.

Существенная часть настоящей главы как раз посвящена получению точных выражений для левой части (6.81) при  $k = 1, \dots, 5$  (теорема 6.1 также позволяет получить указанные формулы для случая произвольного  $k$ ) и более "тонких" оценок левой части (6.81) для произвольного  $k$ . Эти результаты позволяют минимизировать длину последовательности стандартных гауссовских случайных величин, требуемую для совместной аппроксимации повторных стохастических интегралов.

## Упомянутые оценки

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^2 \right\} &\leq \\ \leq k! \left( \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 \right), \\ \mathbb{M} \left\{ (R_{T,t}^{p, \dots, p})^2 \right\} &\leq \\ \leq k! \left( \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p C_{j_k \dots j_1}^2 \right), \end{aligned}$$

которые верны как для случая  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ , так и для случая  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$  ( $T - t < 1$ ) представляют интерес для практики.

Нетрудно видеть, что оценка вида (6.81) будет верна и для повторных стохастических интегралов Стратоновича, т.е. существует такая постоянная  $C$ , что

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{l_1 \dots l_k T, t}^{*(i_1 \dots i_k)} - I_{l_1 \dots l_k T, t}^{*(i_1 \dots i_k)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{(T-t)^2}{q}, \quad (6.82)$$

где  $I_{l_1 \dots l_k T, t}^{*(i_1 \dots i_k)q}$  аппроксимация повторного стохастического интеграла  $I_{l_1 \dots l_k T, t}^{*(i_1 \dots i_k)}$  из семейства (6.3), полученная, например, по теоремам 5.4, 5.5, 5.5\*, 5.6, 5.7, 5.7\* при  $p_1 = \dots = p_5 = q$  и  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  ( $k = 3, 4, 5$ ).

## 6.5 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов кратностей 1–5 с помощью теоремы 5.1 и полиномов Лежандра

Полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$  имеет вид

$$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}, \quad \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j \left( \left( x - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right), \quad (6.83)$$

где  $P_j(x)$  — полином Лежандра. Известно [135], что полином  $P_j(x)$  представим, например, в виде

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j.$$

Это выражение, как известно, называется формулой Родрига. Отметим некоторые хорошо известные свойства полиномов  $P_j(x)$ :

$$P_j(1) = 1; \quad P_{j+1}(-1) = -P_j(-1); \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\frac{dP_{j+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{j-1}(x)}{dx} = (2j + 1)P_j(x); \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{-1}^1 x^k P_j(x) dx = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots, j-1,$$

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j \\ 2/(2j+1) & \text{при } k = j \end{cases},$$

$$xP_j(x) = \frac{(j+1)P_{j+1}(x) + jP_{j-1}(x)}{2j+1}; \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$P_n(x)P_m(x) = \sum_{k=0}^m K_{m,n,k} P_{n+m-2k}(x),$$

где

$$K_{m,n,k} = \frac{a_{m-k}a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \cdot \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}, \quad a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}, \quad m \leq n.$$

Учитывая эти свойства и используя систему функций (6.83), с использованием результатов главы 5, получаем следующие разложения повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича:

$$I_{0T,t}^{(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (6.84)$$

$$I_{1T,t}^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right), \quad (6.85)$$

$$I_{2T,t}^{(i_1)} = \frac{(T-t)^{5/2}}{3} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \right), \quad (6.86)$$

$$I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4t^2 - 1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) \right), \quad (6.87)$$

$$I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \right),$$

$$\begin{aligned} I_{01T,t}^{*(i_1 i_2)} &= -\frac{T-t}{2} I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.88)$$

$$\begin{aligned} I_{10T,t}^{*(i_1 i_2)} &= -\frac{T-t}{2} I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} + \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.89)$$

$$I_{10T,t}^{(i_1 i_2)} = I_{10T,t}^{*(i_1 i_2)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^2, \quad I_{01T,t}^{(i_1 i_2)} = I_{01T,t}^{*(i_1 i_2)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^2 \text{ c. в. 1}, \quad (6.90)$$

$$\begin{aligned} I_{01T,t}^{(i_1 i_2)} &= -\frac{T-t}{2} I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned} I_{10T,t}^{(i_1 i_2)} &= -\frac{T-t}{2} I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} + \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$I_{000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}$$

$$(i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \dots, m),$$

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds,$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right),$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} = I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \frac{1}{2} I_{1_{T,t}}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \frac{1}{2} \left( (T-t) I_{0_{T,t}}^{(i_1)} + I_{1_{T,t}}^{(i_1)} \right) \text{ c. в. 1},$$

$$I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - (T-t) I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+2)(i+3) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+1)(i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(i^2+i-3) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+3i-1) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right], \quad (6.93)$$

$$I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - (T-t) I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_2^{(i_1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1)(i+2) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+2)(i+3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(i^2+3i-1) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+i-3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right], \quad (6.94)$$

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)}{2} \left( I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} \right) + \\ + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{1}{3} \zeta_1^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1)(i+3) \left( \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)} \right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(i+1)^2 \left( \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)} \right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right], \quad (6.95)$$

$$I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{1}{6} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3, \quad I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{1}{6} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3 \text{ с в. 1}, \quad (6.96)$$

$$I_{11_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{1}{6} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3 \text{ с в. 1}, \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned} I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_2)} &= -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - (T-t) I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)} + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+2)(i+3) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+1)(i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(i^2+i-3) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+3i-1) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3, \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned} I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_2)} &= -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - (T-t) I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)} + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_2^{(i_1)} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1)(i+2) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+2)(i+3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(i^2+3i-1) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+i-3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3, \end{aligned} \quad (6.99)$$

$$\begin{aligned} I_{11_{T,t}}^{(i_1 i_2)} &= -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - \frac{T-t}{2} \left( I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)} + I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)} \right) + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{1}{3} \zeta_1^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1)(i+3) \left( \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)} \right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(i+1)^2 \left( \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)} \right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3, \end{aligned} \quad (6.100)$$

$$I_{3_{T,t}}^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{7/2}}{4} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{3\sqrt{3}}{5} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} + \frac{1}{5\sqrt{7}} \zeta_3^{(i_1)} \right), \quad (6.101)$$

$$I_{0000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}$$

$(i_1, i_2, i_3, i_4 = 0, 1, \dots, m),$

$$C_{j_4 j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_4}(s) \int_t^s \phi_{j_3}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_2}(s_2) \int_t^{s_2} \phi_{j_1}(s_3) ds_3 ds_2 ds_1 ds,$$

$$\begin{aligned} I_{0000T,t}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} = & \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^p C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \\ & \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \right), \end{aligned}$$

$$I_{001T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^{001} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$I_{010T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^{010} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$I_{100T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^{100} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}$$

$(i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m),$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{001} = \int_t^T (t-s) \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds,$$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{010} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s (t-s_1) \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds,$$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{100} = \int_t^T \phi_{j_3}(s) \int_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int_t^{s_1} (t-s_2) \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds,$$

$$I_{001T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^{001} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right),$$

$$I_{010T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^{010} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right),$$

$$I_{100T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1}^{100} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right),$$

$$I_{00000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)}$$

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 0, 1, \dots, m),$$

$$C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} = \int_t^T \phi_{j_5}(s) \int_t^T \phi_{j_4}(s_1) \int_t^{s_1} \phi_{j_3}(s_2) \int_t^{s_2} \phi_{j_2}(s_3) \int_t^{s_3} \phi_{j_1}(s_4) ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 ds,$$

$$I_{00000T,t}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^p C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \prod_{l=1}^5 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \right. \\ \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \Big), \tag{6.102}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} = & -\frac{1}{T-t} \left( I_{0_{T,t}}^{(i_3)} I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} + I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_3)} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} I_{0_{T,t}}^{(i_3)} \left( I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} \right) - \\
 & - (T-t)^{3/2} \left[ \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} \left( \zeta_0^{(i_2)} + \sqrt{3} \zeta_1^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} \right], \tag{6.103}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} = & \sum_{\substack{i=1, j=0, k=i \\ 2i \geq k+i-j \geq -2; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1, k+1, (k+i-j)/2+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
 & + \sum_{\substack{i=1, j=0 \\ 2k \geq k+i-j \geq -2; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k+1, i+1, (k+i-j)/2+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\substack{i=1, j=0, k=i+2 \\ 2i+2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1, k-1, (k+i-j)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{i=1, j=0 \\ 2k-2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk} K_{k-1, i+1, (k+i-j)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{i=1, j=0, k=i-2, k \geq 1 \\ 2i-2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1, k+1, (k+i-j)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
 & - \sum_{\substack{i=1, j=0 \\ 2k+2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk} K_{k+1, i-1, (k+i-j)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
 & + \sum_{\substack{i=1, j=0, k=i \\ 2i \geq k+i-j \geq 2; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1, k-1, (k+i-j)/2-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
 & + \sum_{\substack{i=1, j=0 \\ 2k \geq k+i-j \geq 2; k+i-j \text{ четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k-1, i-1, (k+i-j)/2-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)}, \quad (6.104)
 \end{aligned}$$

где

$$N_{ijk} = \sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}},$$

$$K_{m,n,k} = \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \cdot \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}, \quad a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}, \quad m \leq n.$$

Рассмотрим аппроксимацию  $I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q}$  повторного стохастического интеграла  $I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$ , полученную из (6.87) путем замены  $\infty$  на  $q$ .

Можно показать, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right). \quad (6.105)$$

Далее, с использованием леммы 6.1 получаем

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \left( I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{(T-t)^4}{16} \left( \frac{5}{9} - 2 \sum_{i=2}^q \frac{1}{4i^2-1} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} - \sum_{i=0}^q \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} \right). \quad (6.106)$$

В формулах (6.105), (6.106) предполагалось  $i_1 \neq i_2$ . Рассмотрим (6.88), (6.89) при  $i_1 = i_2$ :

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{4} \left( \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right) \right), \quad (6.107)$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{4} \left( \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right) \right), \quad (6.108)$$

откуда, с учетом (6.84) и (6.85), имеем:

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{2} \left( \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} \right) = I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{1_{T,t}}^{(i_1)} \text{ с в. 1.} \quad (6.109)$$

При получении (6.109) мы предполагали, что равенства (6.88), (6.89) выполняются с в. 1. Строгое обоснование этого факта будет приведено в дальнейшем в настоящей главе.

Отметим, что равенство (6.109) также нетрудно получить с помощью формулы Ито и формул связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Прямое вычисление с помощью (6.107), (6.108) дает:

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} &= M \left\{ \left( I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{(T-t)^4}{16} \left( \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left( \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \right)^2 \right), \quad (6.110)$$

где  $I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}$ ,  $I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}$  определяются из (6.107), (6.108) путем замены  $\infty$  на  $q$ .

Рассмотрим вариант формулы (6.110):

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} &= M \left\{ \left( I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{(T-t)^4}{16} \left( \frac{4}{45} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^q \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} + \left( \frac{1}{3} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

С другой стороны формула (6.21) дает возможность получить более удобные с точки зрения практики выражения, но уже для повторных стохастических интегралов Ито:

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} &= M \left\{ \left( I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^4}{16} \times \\ &\times \left( \frac{1}{9} - \sum_{i=0}^q \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} - 2 \sum_{i=1}^q \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right). \quad (6.111) \end{aligned}$$

В таблицах 6.1 – 6.3 приведены расчеты по формулам (6.105), (6.106), (6.111) при различных значениях  $q$ . В указанных таблицах  $\varepsilon$  означает правые части этих формул.

Из (6.221) следует, что

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = \frac{1}{2} \left( I_{1_{T,t}}^{(i_1)} \right)^2 \text{ с в. 1.} \quad (6.112)$$

Кроме того, с помощью формулы Ито или теоремы 3.1 имеем

$$I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_1)} + I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_1)} = I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{2_{T,t}}^{(i_1)} - \frac{1}{3}(T-t)^3 \text{ с в. 1,}$$

откуда, с учетом формул (6.96), получаем:

$$I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{2_{T,t}}^{(i_1)} \text{ с в. 1.} \quad (6.113)$$

Проверим, следуют ли формулы (6.112), (6.113) из (6.93) – (6.95), если в последних положить  $i_1 = i_2$ .

Из (6.93) – (6.95) при  $i_1 = i_2$  получаем:

$$I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{1}{2}(T-t)^2 I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - (T-t) \left( I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} \right) + \\ + \frac{1}{4}(T-t)^3 \left( \frac{1}{3} \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \right), \quad (6.114)$$

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{1}{4}(T-t)^2 I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - \frac{1}{2}(T-t) \left( I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} \right) + \\ + \frac{1}{24}(T-t)^3 \left( \zeta_1^{(i_1)} \right)^2. \quad (6.115)$$

Нетрудно видеть, что из (6.114) и (6.115), с учетом (6.109) и (6.84) – (6.87), действительно получаются равенства (6.112) и (6.113), что косвенно подтверждает правильность формул (6.93) – (6.95).

На основе приведенных разложений повторных стохастических интегралов видно, что повышение кратностей этих интегралов или показателей степеней их весовых функций ведет к заметному усложнению формул для указанных разложений. Однако, увеличение упомянутых параметров приводит к увеличению порядков малости по  $T-t$  в среднеквадратическом смысле для повторных стохастических интегралов, что в свою очередь ведет к резкому уменьшению количеств членов в разложениях повторных стохастических интегралов, требуемых для достижения приемлемых точностей аппроксимаций (см. условие (7.22)). В связи с этим рассмотрим подход к аппроксимации повторных стохастических интегралов, который позволяет получать среднеквадратические аппроксимации требуемой точности без использования общих разложений типа (6.103).

Рассмотрим следующую аппроксимацию (см. теорему 5.1):

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)q_1} = \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji} \left( \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \right), \quad (6.116)$$

где  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$  и

$$C_{kji} = \int_t^T \phi_k(z) \int_t^z \phi_j(y) \int_t^y \phi_i(x) dx dy dz =$$

$$= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8} (T-t)^{3/2} \bar{C}_{kji},$$

$$\bar{C}_{kji} = \int_{-1}^1 P_k(z) \int_{-1}^z P_j(y) \int_{-1}^y P_i(x) dx dy dz,$$

$P_i(x); i = 0, 1, 2, \dots$  — полиномы Лежандра.

В частности, из (6.116) при  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, i_1 \neq i_3$  получаем:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1} = \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)}. \quad (6.117)$$

Отметим, что в силу теоремы 5.4:

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3) q_1} = \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \quad (i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m).$$

Напомним, полученные в главе 6, формулы для среднеквадратической погрешности аппроксимации (6.116) при различных сочетаниях  $i_1, i_2, i_3$ :

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1} \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 \quad (i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_2 \neq i_3), \quad (6.118)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 -$$

$$- \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{jki} C_{kji} \quad (i_1 \neq i_2 = i_3), \quad (6.119)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 -$$

$$- \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji} C_{ijk} \quad (i_1 = i_3 \neq i_2), \quad (6.120)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 -$$

$$- \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kij} C_{kji} \quad (i_1 = i_2 \neq i_3). \quad (6.121)$$

В случае произвольных  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$  верна оценка (см. (6.16)):

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1} \right)^2 \right\} \leq 6 \left( \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 \right). \quad (6.122)$$

Для случая  $i_1 = i_2 = i_3 = i$  удобно использовать следующие формулы:

$$I_{000_{T,t}}^{*(iii)} = \frac{1}{6} (T-t)^{3/2} \left( \zeta_0^{(i)} \right)^3, \quad I_{000_{T,t}}^{(iii)} = \frac{1}{6} (T-t)^{3/2} \left( \left( \zeta_0^{(i)} \right)^3 - 3 \zeta_0^{(i)} \right) \text{ с в. 1.} \quad (6.123)$$

В более общем случае, когда  $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv (t-s)^l$ ;  $l$  — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 можем записать:

$$I_{lll_{T,t}}^{(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6} \left( \left( I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \right)^3 - 3 I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \Delta_{l_{T,t}} \right),$$

$$I_{lll_{T,t}}^{*(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6} \left( I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \right)^3, \quad I_{l_{T,t}}^{(i_1)} = \sum_{j=0}^l C_j \zeta_j^{(i_1)},$$

где

$$\Delta_{l_{T,t}} = \int_t^T (t-s)^{2l} ds,$$

$$C_j = \int_t^T (t-s)^l \phi_j(s) ds,$$

а  $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Теперь становится понятно, что для аппроксимации стохастического интеграла  $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$  можно использовать формулы (6.116) – (6.123) вместо сложного разложения (6.103). Также можно поступить и с более сложными повторными стохастическими интегралами. Например, для аппроксимации стохастического интеграла  $I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)}$ , согласно теореме 5.1, можем записать:

$$\begin{aligned} I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4) q_2} = & \sum_{i,j,k,l=0}^{q_2} C_{lkji} \left( \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} - \right. \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_l^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_l^{(i_4)} - \\ & \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} + \right) \end{aligned}$$

Таблица 6.1. Проверка формулы (6.105)

$2\varepsilon/(T-t)^2$	0.1667	0.0238	0.0025	$2.4988 \cdot 10^{-4}$	$2.4999 \cdot 10^{-5}$
$q$	1	10	100	1000	10000

$$+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} + \\ + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}}), \quad (6.124)$$

где  $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m$  и

$$C_{lkji} = \int_t^T \phi_l(u) \int_t^u \phi_k(z) \int_t^z \phi_j(y) \int_t^y \phi_i(x) dx dy dz du = \\ = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)}}{16} (T-t)^2 \bar{C}_{lkji}, \\ \bar{C}_{lkji} = \int_{-1}^1 P_l(u) \int_{-1}^u P_k(z) \int_{-1}^z P_j(y) \int_{-1}^y P_i(x) dx dy dz du.$$

Кроме того, согласно теореме 5.7 аналог формулы (6.124) для повторного стохастического интеграла Стратоновича имеет вид

$$I_{0000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4) q_2} = \sum_{i,j,k,l=0}^{q_2} C_{lkji} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)},$$

где  $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m$ .

В разд. 6.2.6, 6.2.7 получены точные формулы для среднеквадратической погрешности

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{q_2} - J[\psi^{(4)}]_{T,t})^2 \right\} \quad (i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m)$$

при произвольных сочетаниях индексов  $i_1, i_2, i_3, i_4$  (15 случаев). Полагая в этих формулах  $\psi_1(\tau), \dots, \psi_4(\tau) \equiv 1$ , получим соответствующие формулы для величины

$$\mathbb{M} \left\{ (I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4) q_2} - I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)})^2 \right\}.$$

Отметим, что из (6.16) также следует оценка

$$\mathbb{M} \left\{ (I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4) q_2})^2 \right\} \leq 24 \left( \frac{(T-t)^4}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^{q_2} C_{lkji}^2 \right)$$

Таблица 6.2. Проверка формулы (6.106)

$16\varepsilon/(T-t)^4$	0.3797	0.0581	0.0062	$6.2450 \cdot 10^{-4}$	$6.2495 \cdot 10^{-5}$
$q$	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.3. Проверка формулы (6.111)

$16\varepsilon/(T-t)^4$	0.0070	$4.3551 \cdot 10^{-5}$	$6.0076 \cdot 10^{-8}$	$6.2251 \cdot 10^{-11}$	$6.3178 \cdot 10^{-14}$
$q$	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.4. Коэффициенты  $\bar{C}_{0jk}$

$j^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{4}{105}$	0	0	0
2	$-\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{105}$	0	0
3	0	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{315}$	$-\frac{2}{63}$	$\frac{8}{693}$	0
4	0	0	$-\frac{8}{315}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{2}{693}$	$-\frac{2}{99}$	$\frac{10}{1287}$
5	0	0	0	$-\frac{10}{693}$	$\frac{2}{99}$	$\frac{2}{1287}$	$-\frac{2}{143}$
6	0	0	0	0	$-\frac{4}{429}$	$\frac{2}{143}$	$\frac{2}{2145}$

Таблица 6.5. Коэффициенты  $\bar{C}_{1jk}$

$j^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{15}$	0	$\frac{2}{105}$	0	0	0
1	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{4}{105}$	0	$\frac{2}{315}$	0	0
2	$-\frac{2}{15}$	$\frac{8}{105}$	0	$-\frac{2}{105}$	0	$\frac{4}{1155}$	0
3	$-\frac{2}{35}$	0	$\frac{8}{315}$	0	$-\frac{38}{3465}$	0	$\frac{20}{9009}$
4	0	$-\frac{4}{315}$	0	$\frac{46}{3465}$	0	$-\frac{64}{9009}$	0
5	0	0	$-\frac{4}{693}$	0	$\frac{74}{9009}$	0	$-\frac{32}{6435}$
6	0	0	0	$-\frac{10}{3003}$	0	$\frac{4}{715}$	0

Таблица 6.6. Коэффициенты  $\bar{C}_{2jk}$

$j^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{4}{105}$	0	$\frac{2}{315}$	0	0
1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$	0	$\frac{8}{3465}$	0
2	$\frac{2}{105}$	0	0	0	$-\frac{2}{495}$	0	$\frac{4}{3003}$
3	$-\frac{2}{35}$	$\frac{8}{315}$	0	$-\frac{2}{3465}$	0	$-\frac{116}{45045}$	0
4	$-\frac{8}{315}$	0	$\frac{4}{495}$	0	$-\frac{2}{6435}$	0	$-\frac{16}{9009}$
5	0	$-\frac{4}{693}$	0	$\frac{38}{9009}$	0	$-\frac{8}{45045}$	0
6	0	0	$-\frac{8}{3003}$	0	$-\frac{118}{45045}$	0	$-\frac{4}{36465}$

Таблица 6.7. Коэффициенты  $\bar{C}_{3jk}$

$j^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{4}{315}$	0	$\frac{2}{693}$	0
1	$\frac{4}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$	0	$-\frac{8}{3465}$	0	$\frac{10}{9009}$
2	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{105}$	0	$\frac{4}{3465}$	0	$-\frac{74}{45045}$	0
3	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{2}{3465}$	0	$\frac{16}{45045}$	0	$-\frac{10}{9009}$
4	$-\frac{2}{63}$	$\frac{46}{3465}$	0	$-\frac{32}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$	0
5	$-\frac{10}{693}$	0	$\frac{38}{9009}$	0	$-\frac{4}{9009}$	0	$\frac{122}{765765}$
6	0	$-\frac{10}{3003}$	0	$\frac{20}{9009}$	0	$-\frac{226}{765765}$	0

Таблица 6.8. Коэффициенты  $\bar{C}_{4jk}$

$j^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{4}{693}$	0	$\frac{2}{1287}$
1	0	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{8}{3465}$	0	$-\frac{10}{9009}$	0
2	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{495}$	0	$\frac{4}{6435}$	0	$-\frac{38}{45045}$
3	$\frac{2}{63}$	$-\frac{38}{3465}$	0	$\frac{16}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$	0
4	$\frac{2}{693}$	0	$-\frac{2}{6435}$	0	0	0	$\frac{2}{13923}$
5	$-\frac{2}{99}$	$\frac{74}{9009}$	0	$-\frac{4}{9009}$	0	$-\frac{2}{153153}$	0
6	$-\frac{4}{429}$	0	$\frac{118}{45045}$	0	$-\frac{4}{13923}$	0	$-\frac{2}{188955}$

Таблица 6.9. Коэффициенты  $\bar{C}_{5jk}$

$j^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	$\frac{2}{693}$	0	$-\frac{4}{1287}$	0
1	0	0	$\frac{8}{3465}$	0	$-\frac{10}{9009}$	0	$-\frac{4}{6435}$
2	0	$\frac{4}{1155}$	0	$-\frac{74}{45045}$	0	$\frac{16}{45045}$	0
3	$\frac{8}{693}$	0	$-\frac{116}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$	0	$\frac{8}{58905}$
4	$\frac{2}{99}$	$-\frac{64}{9009}$	0	$\frac{2}{9009}$	0	$\frac{4}{153153}$	0
5	$\frac{2}{1287}$	0	$-\frac{8}{45045}$	0	$-\frac{2}{153153}$	0	$\frac{4}{415701}$
6	$-\frac{2}{143}$	$\frac{4}{715}$	0	$-\frac{226}{765765}$	0	$-\frac{8}{415701}$	0

Таблица 6.10. Коэффициенты  $\bar{C}_{6jk}$

$j^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	$\frac{2}{1287}$	0	$-\frac{4}{2145}$
1	0	0	0	$\frac{10}{9009}$	0	$-\frac{4}{6435}$	0
2	0	0	$\frac{4}{3003}$	0	$-\frac{38}{45045}$	0	$\frac{8}{36465}$
3	0	$\frac{20}{9009}$	0	$-\frac{10}{9009}$	0	$\frac{8}{58905}$	0
4	$\frac{10}{1287}$	0	$-\frac{16}{9009}$	0	$\frac{2}{13923}$	0	$\frac{4}{188955}$
5	$\frac{2}{143}$	$-\frac{32}{6435}$	0	$\frac{122}{765765}$	0	$\frac{4}{415701}$	0
6	$\frac{2}{2145}$	0	$-\frac{4}{36465}$	0	$-\frac{2}{188955}$	0	0

Таблица 6.11. Коэффициенты  $\bar{C}_{00kl}$

$k^l$	0	1	2
0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{21}$
2	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{105}$

Таблица 6.12. Коэффициенты  $\bar{C}_{10kl}$

$k^l$	0	1	2
0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{35}$
1	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{45}$
2	$-\frac{2}{21}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{315}$

Таблица 6.13. Коэффициенты  $\bar{C}_{02kl}$

$k^l$	0	1	2
0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{4}{105}$
1	$\frac{2}{35}$	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$
2	$\frac{4}{105}$	$-\frac{2}{105}$	0

Таблица 6.14. Коэффициенты  $\bar{C}_{01kl}$

$k^l$	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{315}$
2	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{315}$

Таблица 6.15. Коэффициенты  $\bar{C}_{11kl}$

$k^l$	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	0
1	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$	0

Таблица 6.16. Коэффициенты  $\bar{C}_{20kl}$

$k^l$	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	0
1	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$	0

Таблица 6.17. Коэффициенты  $\bar{C}_{21kl}$

$k^l$	0	1	2
0	$\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{315}$
1	$\frac{2}{315}$	$\frac{2}{315}$	$-\frac{2}{225}$
2	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{225}$	$\frac{2}{1155}$

Таблица 6.18. Коэффициенты  $\bar{C}_{12kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{225}$
2	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{225}$	$-\frac{2}{3465}$

при любых возможных  $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m$ .

В случае  $i_1 = \dots = i_4 = i$  можно использовать следующие справедливые с в. 1 представления:

$$I_{0000_{T,t}}^{(iii)} = \frac{(T-t)^2}{24} \left( \left( \zeta_0^{(i)} \right)^4 - 6 \left( \zeta_0^{(i)} \right)^2 + 3 \right), \quad I_{0000_{T,t}}^{*(iii)} = \frac{(T-t)^2}{24} \left( \zeta_0^{(i)} \right)^4.$$

В более общем случае, когда  $\psi_1(s), \dots, \psi_4(s) \equiv (t-s)^l$ ;  $l$  — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 также можем записать:

$$\begin{aligned} I_{lll_{T,t}}^{(iii)} &= \frac{1}{24} \left( \left( I_{l_{T,t}}^{(i)} \right)^4 - 6 \left( I_{l_{T,t}}^{(i)} \right)^2 \Delta_{l_{T,t}} + 3 \left( \Delta_{l_{T,t}} \right)^2 \right), \\ I_{lll_{T,t}}^{*(iii)} &= \frac{1}{24} \left( I_{l_{T,t}}^{(i)} \right)^4, \\ I_{l_{T,t}}^{(i)} &= \sum_{j=0}^l C_j \zeta_j^{(i)}, \quad \Delta_{l_{T,t}} = \int_t^T (t-s)^{2l} ds, \end{aligned}$$

где в предпоследней формуле предполагается, что разложение стохастического интеграла осуществляется с помощью полиномов Лежандра.

Положим  $q_1 = 6$ . В табл. 6.4–6.10 приведены точные значения коэффициентов  $\bar{C}_{kji}$  при  $i, j, k = 0, 1, \dots, 6$ .

Вычисляя значение выражения (6.118) при  $q_1 = 6, i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_3 \neq i_2$  получаем следующее приближенное равенство:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)6} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^6 C_{kji}^2 \approx 0.01956(T-t)^3.$$

Выберем, например,  $q_2 = 2$ . В табл. 6.11–6.19 приведены точные значения коэффициентов  $\bar{C}_{lkji}$  при  $i, j, k, l = 0, 1, 2$ .

При попарно различных  $i_1, i_2, i_3, i_4$  имеем следующее равенство:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)2} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^4}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^2 C_{lkji}^2. \quad (6.125)$$

Вычисляя по значениям, приведенным в табл. 6.11–6.19, правую часть (6.125), получим

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)2} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^4}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^2 C_{lkji}^2 \approx 0.0236084(T-t)^4.$$

Нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{10} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{01} = -\frac{(T-t)^2}{4}, \quad (6.126)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{20} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{11} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{02} = \frac{(T-t)^3}{6}, \quad (6.127)$$

где

$$\begin{aligned} C_{jj}^{10} &= \int_t^T \phi_j(x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y) dy dx, \\ C_{jj}^{01} &= \int_t^T \phi_j(x)(t-x) \int_t^x \phi_j(y) dy dx, \\ C_{jj}^{11} &= \int_t^T \phi_j(x)(t-x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y) dy dx, \\ C_{jj}^{20} &= \int_t^T \phi_j(x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y)^2 dy dx, \\ C_{jj}^{02} &= \int_t^T \phi_j(x)(t-x)^2 \int_t^x \phi_j(y) dy dx, \end{aligned}$$

$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система полиномов Лежандра.

Заметим, что равенства (6.126) и (6.127) вместе с теоремой 5.1 при  $k = 2$  и формулами (6.90), (6.96), (6.97) подтверждают формулу (5.50) для повторных стохастических интегралов Стратоновича

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}, I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}, I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}, I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}, I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} \quad (i_1, i_2 = 1, \dots, m).$$

Рассмотрим аппроксимации еще четырех повторных стохастических интегралов Ито:

$$I_{001_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)q_3} = \sum_{i,j,k=0}^{q_3} C_{kji}^{001} \left( \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \right.$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)}),$$

$$\begin{aligned} I_{010_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_4} = & \sum_{i,j,k=0}^{q_4} C_{kji}^{010} \left( \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \right. \\ & \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{100_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_5} = & \sum_{i,j,k=0}^{q_5} C_{kji}^{100} \left( \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \right. \\ & \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{00000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5) q_6} = & \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_6} C_{rlkji} \left( \zeta_r^{(i_5)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \right. \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i=r\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_r^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_r^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{l=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_r^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_l^{(i_4)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{l=r\}} \zeta_k^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} \zeta_r^{(i_5)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j=r\}} \zeta_l^{(i_4)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{l=r\}} \zeta_j^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_r^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j=r\}} \zeta_k^{(i_3)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_j^{(i_2)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i=r\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_l^{(i_4)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i=r\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} \zeta_k^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i=r\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_j^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{l=r\}} \zeta_i^{(i_1)} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_i^{(i_1)} + \\ & \left. + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j=r\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \right), \end{aligned}$$

где  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 1, \dots, m$  и

$$C_{kji}^{001} = \int_t^T (t-z) \phi_k(z) \int_t^z \phi_j(y) \int_t^y \phi_i(x) dx dy dz = \\ = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} (T-t)^{5/2} \bar{C}_{kji}^{001},$$

$$C_{kji}^{010} = \int_t^T \phi_k(z) \int_t^z (t-y) \phi_j(y) \int_t^y \phi_i(x) dx dy dz = \\ = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} (T-t)^{5/2} \bar{C}_{kji}^{010},$$

$$C_{kji}^{100} = \int_t^T \phi_k(z) \int_t^z \phi_j(y) \int_t^y (t-x) \phi_i(x) dx dy dz = \\ = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} (T-t)^{5/2} \bar{C}_{kji}^{100},$$

$$C_{rlkji} = \int_t^T \phi_r(v) \int_t^v \phi_l(u) \int_t^u \phi_k(z) \int_t^z \phi_j(y) \int_t^y \phi_i(x) dx dy dz du dv = \\ = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)(2r+1)}}{32} (T-t)^{5/2} \bar{C}_{rlkji},$$

Где

$$\bar{C}_{kji}^{100} = - \int_{-1}^1 P_k(z) \int_{-1}^z P_j(y) \int_{-1}^y P_i(x) (x+1) dx dy dz,$$

$$\bar{C}_{kji}^{010} = - \int_{-1}^1 P_k(z) \int_{-1}^z P_j(y) (y+1) \int_{-1}^y P_i(x) dx dy dz,$$

$$\bar{C}_{kji}^{001} = - \int_{-1}^1 P_k(z) (z+1) \int_{-1}^z P_j(y) \int_{-1}^y P_i(x) dx dy dz,$$

$$\bar{C}_{rlkji} = \int_{-1}^1 P_r(v) \int_{-1}^v P_l(u) \int_{-1}^u P_k(z) \int_{-1}^z P_j(y) \int_{-1}^y P_i(x) dx dy dz du dv.$$

Пусть  $q_3 = q_4 = q_5 = 2$ ,  $q_6 = 1$ . В табл. 6.20–6.36 приведены точные значения коэффициентов  $\bar{C}_{kji}^{001}$ ,  $\bar{C}_{kji}^{010}$ ,  $\bar{C}_{kji}^{100}$  ( $i, j, k = 0, 1, 2$ ) и  $\bar{C}_{rlkji}$  ( $i, j, k, l, r = 0, 1$ ).

Таблица 6.19. Коэффициенты  $\bar{C}_{22kl}$

$k^l$	0	1	2
0	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{315}$	0
1	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{2}{1155}$
2	0	$\frac{2}{3465}$	0

Таблица 6.20. Коэффициенты  $\bar{C}_{0jk}^{001}$

$j^k$	0	1	2
0	-2	$\frac{14}{15}$	$-\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{2}{5}$	$-\frac{22}{105}$	$-\frac{2}{105}$

Таблица 6.21. Коэффициенты  $\bar{C}_{1jk}^{001}$

$j^k$	0	1	2
0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{22}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{26}{315}$
2	$\frac{22}{105}$	$-\frac{38}{315}$	$-\frac{2}{315}$

Таблица 6.22. Коэффициенты  $\bar{C}_{2jk}^{001}$

$j^k$	0	1	2
0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{22}{105}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$
2	0	$-\frac{2}{105}$	0

Таблица 6.23. Коэффициенты  $\bar{C}_{0jk}^{100}$

$j^k$	0	1	2
0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	$-\frac{4}{105}$

Таблица 6.24. Коэффициенты  $\bar{C}_{1jk}^{100}$

$j^k$	0	1	2
0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{21}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{4}{105}$
2	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{105}$

Таблица 6.25. Коэффициенты  $\bar{C}_{2jk}^{100}$

$j^k$	0	1	2
0	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{315}$	$\frac{2}{105}$
2	$-\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{315}$	0

Таблица 6.26. Коэффициенты  $\bar{C}_{0jk}^{010}$

$j^k$	0	1	2
0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{15}$	0
1	$-\frac{4}{15}$	0	$\frac{8}{105}$
2	$\frac{4}{15}$	$-\frac{16}{105}$	0

Таблица 6.27. Коэффициенты  $\bar{C}_{1jk}^{010}$

$j^k$	0	1	2
0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{105}$
2	$\frac{4}{35}$	$-\frac{8}{105}$	0

Таблица 6.28. Коэффициенты  $\bar{C}_{2jk}^{010}$

$j^k$	0	1	2
0	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{4}{21}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	0	0

Таблица 6.29. Коэффициенты  $\bar{C}_{000lr}$

$l^r$	0	1
0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{8}{45}$
1	$-\frac{4}{45}$	$\frac{8}{105}$

Таблица 6.30. Коэффициенты  $\bar{C}_{010lr}$

$l^r$	0	1
0	$\frac{4}{45}$	$-\frac{16}{315}$
1	$-\frac{4}{315}$	$\frac{4}{315}$

Таблица 6.31. Коэффициенты  $\bar{C}_{110lr}$

$l^r$	0	1
0	$\frac{8}{105}$	$-\frac{2}{45}$
1	$-\frac{4}{315}$	$\frac{4}{315}$

Таблица 6.32. Коэффициенты  $\bar{C}_{011lr}$

$l^r$	0	1
0	$\frac{8}{315}$	$-\frac{4}{315}$
1	0	$\frac{2}{945}$

Таблица 6.33. Коэффициенты  $\bar{C}_{001lr}$

$l^r$	0	1
0	0	$\frac{4}{315}$
1	$\frac{8}{315}$	$-\frac{2}{105}$

Таблица 6.34. Коэффициенты  $\bar{C}_{100lr}$

$l^r$	0	1
0	$\frac{8}{45}$	$-\frac{4}{35}$
1	$-\frac{16}{315}$	$\frac{2}{45}$

Таблица 6.35. Коэффициенты  $\bar{C}_{101lr}$

$l^r$	0	1
0	$\frac{4}{315}$	0
1	$\frac{4}{315}$	$-\frac{8}{945}$

Таблица 6.36. Коэффициенты  $\bar{C}_{111lr}$

$l^r$	0	1
0	$\frac{2}{105}$	$-\frac{8}{945}$
1	$\frac{2}{945}$	0

В случае попарно различных  $i_1, \dots, i_5$  из табл. 6.20–6.36 имеем

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{100T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{100T,t}^{(i_1 i_2 i_3)2} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^5}{60} - \sum_{i,j,k=0}^2 (C_{kji}^{100})^2 \approx \\ &\approx 0.00815429(T-t)^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{010T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{010T,t}^{(i_1 i_2 i_3)2} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^5}{20} - \sum_{i,j,k=0}^2 (C_{kji}^{010})^2 \approx \\ &\approx 0.0173903(T-t)^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{001T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{001T,t}^{(i_1 i_2 i_3)2} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^5}{10} - \sum_{i,j,k=0}^2 (C_{kji}^{001})^2 \approx \\ &\approx 0.0252801(T-t)^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{00000T,t}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} - I_{00000T,t}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)1} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^5}{120} - \sum_{i,j,k,l,r=0}^1 C_{rlkji}^2 \approx \\ &\approx 0.00759105(T-t)^5. \end{aligned}$$

Отметим, что из (6.16) следует оценка

$$M \left\{ \left( I_{00000T,t}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} - I_{00000T,t}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q} \right)^2 \right\} \leq 120 \left( \frac{(T-t)^5}{120} - \sum_{i,j,k,l,r=0}^q C_{rlkji}^2 \right)$$

для всех возможных  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  и  $q > 0$ .

При точном вычислении рассмотренных среднеквадратических ошибок аппроксимации при любых возможных  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$  можно использовать соотношения из разд. 6.2.8 (см. также теорему 6.1).

## 6.6 О коэффициентах Фурье–Лежандра

Как следует из результатов главы 5, основная по трудоемкости работа при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов связана с вычислением коэффициентов

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t, T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k, \quad (6.128)$$

где

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

при  $k \geq 2$  и

$$K(t_1) \equiv \psi_1(t_1);$$

здесь  $t_1, \dots, t_k \in [t, T]$ , а  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система функций в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Цель данного раздела — выявить некоторые особенности вычисления коэффициентов Фурье  $C_{j_k \dots j_1}$  ( $k$  — произвольное) разложений повторных стохастических интегралов из стохастических разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича при использовании системы полиномов Лежандра.

Для классических стохастических разложений в (6.128) необходимо положить  $\psi_1(s), \dots, \psi_k(s) \equiv 1$ , в то время как для унифицированных стохастических разложений —  $\psi_q(s) = (t - s)^{l_q}; q = 1, \dots, k; l_q = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом мы будем вычислять интегралы

$$\bar{C}_{j_k \dots j_1} = \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \int_t^{t_k} \phi_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k;$$

$$\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_1 \dots l_k} = \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k, \quad (6.129)$$

где  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([t, T])$ .

Имеем

$$\bar{C}_{j_k \dots j_1} = \frac{(T-t)^{k/2}}{2^k} \prod_{l=1}^k \sqrt{2j_l + 1} \cdot A_{j_k \dots j_1},$$

где

$$A_{j_k \dots j_1} = \int_{-1}^1 P_{j_k}(t_k) \int_{-1}^{t_k} P_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \dots \int_{-1}^{t_2} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k; \quad (6.130)$$

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве  $L_2([-1, 1])$ :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^q (2n - 2q)!}{q!(n-q)!(n-2q)!} x^{n-2q}. \quad (6.131)$$

Подставляя (6.131) в (6.130) получаем

$$\begin{aligned} A_{j_k \dots j_1} &= \frac{1}{2^{j_1+\dots+j_k}} \sum_{q_1=0}^{[j_1/2]} \dots \sum_{q_k=0}^{[j_k/2]} \prod_{l=1}^k \frac{(-1)^{q_l} (2j_l - 2q_l)!}{q_l!(j_l - q_l)!(j_l - 2q_l)!} \times \\ &\quad \times \int_{-1}^1 (t_k)^{j_k - 2q_k} \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{j_1 - 2q_1} dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Таким образом вычисление  $\bar{C}_{j_k \dots j_1}$  свелось к вычислению интеграла

$$I_{p_k \dots p_1} = \int_{-1}^1 (t_k)^{p_k} \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{p_1} dt_1 \dots dt_k; \quad p_1, \dots, p_k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.132)$$

Рассмотрим теперь вычисление  $\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_1 \dots l_k}$ . Имеем

$$\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_1 \dots l_k} = \frac{(T-t)^{k/2}}{2^k} \prod_{l=1}^k \sqrt{2j_l + 1} \cdot \left( \frac{(-1)(T-t)}{2} \right)^{l_1 + \dots + l_k} \tilde{C}_{j_k \dots j_1}^{l_1 \dots l_k}, \quad (6.133)$$

где

$$\tilde{C}_{j_k \dots j_1}^{l_1 \dots l_k} = \int_{-1}^1 (1+t_k)^{l_k} P_{j_k}(t_k) \dots \int_{-1}^{t_2} (1+t_1)^{l_1} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k = \quad (6.134)$$

$$= \sum_{s_k=0}^{l_k} \dots \sum_{s_1=0}^{l_1} C_{l_k}^{s_k} \dots C_{l_1}^{s_1} \int_{-1}^1 (t_k)^{s_k} P_{j_k}(t_k) \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{s_1} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k,$$

где  $C_n^k$  — биномиальный коэффициент.

Далее

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (t_k)^{s_k} P_{j_k}(t_k) \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{s_1} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k = \\ & = \frac{1}{2^{j_1+\dots+j_k}} \sum_{q_1=0}^{[j_1/2]} \dots \sum_{q_k=0}^{[j_k/2]} \prod_{l=1}^k \frac{(-1)^{q_l} (2j_l - 2q_l)!}{q_l! (j_l - q_l)! (j_l - 2q_l)!} \times \\ & \quad \times \int_{-1}^1 (t_k)^{j_k - 2q_k + s_k} \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{j_1 - 2q_1 + s_1} dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Таким образом вычисление  $\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_1 \dots l_k}$  снова свелось к вычислению интеграла (6.132).

Вычисление интеграла (6.132) не является проблемой:

$$\begin{aligned} I_{p_1} &= \frac{1}{p_1 + 1} (1 - (-1)^{p_1+1}); \\ I_{p_2 p_1} &= \frac{1}{p_1 + 1} \left( \frac{1}{p_1 + p_2 + 2} (1 - (-1)^{p_1+p_2+2}) - \frac{(-1)^{p_1+1}}{p_2 + 1} (1 - (-1)^{p_2+1}) \right); \\ I_{p_3 p_2 p_1} &= \frac{1}{p_1 + 1} \left( \frac{1}{p_1 + p_2 + 2} \left( \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + 3} (1 - (-1)^{p_1+p_2+p_3+3}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(-1)^{p_1+p_2+2}}{p_3 + 1} (1 - (-1)^{p_3+1}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-1)^{p_1+1}}{p_2 + 1} \left( \frac{1}{p_3 + p_2 + 2} (1 - (-1)^{p_3+p_2+2}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(-1)^{p_2+1}}{p_3 + 1} (1 - (-1)^{p_3+1}) \right) \right) \end{aligned}$$

и т.д.

Вообще говоря, интеграл  $I_{p_k \dots p_1}$  может быть вычислен при различных значениях  $k$  с помощью компьютерных пакетов символьных преобразований типа DERIVE или MAPLE. Именно с помощью DERIVE были точно

вычислены коэффициенты Фурье–Лежандра, представленные в табл. 6.4 – 6.36.

Совсем не так просто будет обстоять дело, если мы будем использовать вместо полиномов Лежандра тригонометрические функции. Это связано с тем, что интегралы

$$\bar{C}_{j_k \dots j_1} = \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \int_t^{t_k} \phi_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k;$$

$$\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_1 \dots l_k} = \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k,$$

где  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве  $L_2([t, T])$ :

$$\phi_j(s) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0 \\ \sqrt{2}\sin(2\pi r(s-t)/(T-t)) & \text{при } j = 2r-1; \\ \sqrt{2}\cos(2\pi r(s-t)/(T-t)) & \text{при } j = 2r \end{cases}$$

$r = 1, 2, \dots$ , "сильно ветвятся" для различных сочетаний индексов  $j_1, \dots, j_k$ , т.е. при различных сочетаниях индексов  $j_1, \dots, j_k$  указанные интегралы вычисляются по существенно различным формулам, причем количество этих формул резко растет с ростом кратности стохастического интеграла. Объективно, уже при  $k = 4$  вычисления становятся крайне сложными.

Поясним сказанное на примере. При использовании тригонометрических функций, например, может потребоваться интегрирование произведения вида:

$$\sin \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} \sin \frac{2\pi q(s-t)}{T-t} \quad (r, q \geq 0),$$

которое равно

$$\frac{1}{2} \left( -\cos \frac{2\pi(r+q)(s-t)}{T-t} + \cos \frac{2\pi(r-q)(s-t)}{T-t} \right).$$

Понятно, что при интегрировании последнего выражения уже возникнут следующие случаи: 1.  $r+q \neq 0$  и  $r-q \neq 0$ ; 2.  $r+q \neq 0$  и  $r-q = 0$ ; 3.  $r+q = 0$  и  $r-q = 0$ .

В каждом из трех случаев первообразная будет вычисляться по "своей формуле". Если речь идет о произведении 3 или большего числа тригонометрических функций, то, как отмечалось, вычисления резко усложняются.

Ничего подобного не происходит с многочленами Лежандра, поскольку произведение двух многочленов есть многочлен, и при интегрировании многочленов мы фактически пользуемся только формулой первообразной от степенной функции с целым неотрицательным показателем.

## 6.7 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов кратностей 1–3 с помощью теоремы 5.1 и тригонометрической системы функций

Рассмотрим аппроксимации некоторых повторных стохастических интегралов вида

$$I_{l_1 \dots l_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

$$I_{l_1 \dots l_k T, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

полученные с использованием результатов главы 5 с применением тригонометрической системы функций:

$$I_{0 T, t}^{(i_1)} = \sqrt{T - t} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (6.135)$$

$$I_{1 T, t}^{(i_1)q} = -\frac{(T - t)^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \right) \right), \quad (6.136)$$

$$I_{00 T, t}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2} (T - t) \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left( \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \sqrt{2} \left( \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\alpha_q} \left( \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \xi_q^{(i_2)} \right) \right), \quad (6.137)$$

$$\begin{aligned}
I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} = & (T-t)^{3/2} \left( \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{\alpha_q}}{2\sqrt{2}\pi} \left( \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \xi_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right) + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left( \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \mu_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \right\} + \right. \\
& + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \left. \right] + \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \left[ \frac{1}{r^2 - l^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_3)} + \right. \right. \\
& + \frac{r}{l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \frac{l}{r} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \left. \right\} - \frac{1}{rl} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \left. \right] + \\
& + \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right. \\
& + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 6\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& \left. \left. + 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} - 2\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \left\{ \sum_{r,m=1}^q \left[ \frac{2}{rm} \left[ -\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \right. \right. \\
& + \frac{1}{m(r+m)} \left[ -\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \left. \left. - \zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(m+r)}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] \right] + \\
& + \sum_{m=1}^q \sum_{l=m+1}^q \left[ \frac{1}{m(l-m)} \left[ \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \right. \\
& + \frac{1}{l(l-m)} \left[ -\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} - \right. \\
& \left. \left. - \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \right] \right] \Bigg\}, \tag{6.138}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} = & (T-t)^2 \left( -\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left( 2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[ -\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right\} + \right. \\
 & + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left( -\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + 2\zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right) \left. \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{1}{l^2 - k^2} \left[ \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} - \frac{k}{l} \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \right] \right), \quad (6.139)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} = & (T-t)^2 \left( -\frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \left( \frac{1}{2} \xi_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left( \frac{1}{2} \mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{\pi r} \left\{ \frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right\} \right\} \right. \\
 & + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left( \frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right) \left. \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{1}{l^2 - k^2} \left[ \frac{l}{k} \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} + \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \right] \right), \quad (6.140)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{2T,t}^{(i_1)} = & (T-t)^{5/2} \left[ \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \right) \right], \quad (6.141)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \xi_q^{(i)} = & \frac{1}{\sqrt{\alpha_q}} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i)}, \quad \alpha_q = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2}, \quad \mu_q^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\beta_q}} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i)}, \\
 \beta_q = & \frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4}, \quad \zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)},
 \end{aligned}$$

$\phi_j(s)$  имеет вид (6.71), а  $\zeta_0^{(i)}, \zeta_{2r}^{(i)}, \zeta_{2r-1}^{(i)}, \xi_q^{(i)}, \mu_q^{(i)}$ ;  $r = 1, \dots, q$ ;  $i = 1, \dots, m$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины;  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ .

Отметим, что из (6.139), (6.140) следует:

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{10} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{01} = -\frac{(T-t)^2}{4}, \quad (6.142)$$

где

$$C_{jj}^{10} = \int_t^T \phi_j(x) \int_t^x \phi_j(y) (t-y) dy dx,$$

$$C_{jj}^{01} = \int_t^T \phi_j(x) (t-x) \int_t^x \phi_j(y) dy dx.$$

Рассмотрим среднеквадратические погрешности аппроксимаций, определяемых формулами (6.137)–(6.140). Из соотношений (6.137)–(6.140) при  $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, i_1 \neq i_3$  получаем

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00T,t}^{*(i_2i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right), \quad (6.143)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left( I_{000T,t}^{*(i_3i_2i_1)} - I_{000T,t}^{*(i_3i_2i_1)q} \right)^2 \right\} = \\ & = (T-t)^3 \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \frac{55}{32\pi^4} \left( \frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4\pi^4} \left( \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \right) \frac{5l^4 + 4r^4 - 3l^2r^2}{r^2l^2(r^2 - l^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.144)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left( I_{01T,t}^{*(i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_1)q} \right)^2 \right\} = (T-t)^4 \left\{ \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{32\pi^4} \left( \frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \frac{1}{4\pi^4} \left( \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.145)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{10T,t}^{*(i_2i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2i_1)q} \right)^2 \right\} = (T-t)^4 \left\{ \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \right.$$

$$+ \frac{5}{32\pi^4} \left( \frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \frac{1}{4\pi^4} \left( \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{l^2(l^2 - k^2)^2}. \quad (6.146)$$

Нетрудно показать, что соотношения (6.144), (6.145) и (6.146) могут быть представлены с помощью леммы 6.1 в следующем виде:

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = & (T-t)^3 \left\{ \frac{4}{45} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{55}{32\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2l^2}{r^2l^2(r^2 - l^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.147)$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = & \frac{(T-t)^4}{4} \left\{ \frac{1}{9} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{5}{8\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{k^2 + l^2}{l^2(l^2 - k^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.148)$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = & \frac{(T-t)^4}{4} \left\{ \frac{1}{9} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{5}{8\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.149)$$

Сопоставив (6.147)–(6.149) и (6.144)–(6.146), заметим, что

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{l^2 + k^2}{l^2(l^2 - k^2)^2} = \frac{\pi^4}{48}, \quad (6.150)$$

$$\sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{\infty} \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2l^2}{r^2l^2(r^2 - l^2)^2} = \frac{9\pi^4}{80}. \quad (6.151)$$

Приведем аппроксимации стохастических интегралов  $I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)}$ ,  $I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)}$  и условия выбора числа  $q$  с использованием тригонометрической системы функций:

$$I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)q} = (T-t)^2 \left( -\frac{1}{6} \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{\pi^2 r^2} \left( \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \zeta_{2r}^{(i_1)} \right)^2 \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \right] + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{1}{l^2 - k^2} \left[ \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_1)} - \frac{k}{l} \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_1)} \right], \\
 I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} & = (T-t)^2 \left( -\frac{1}{3} \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{\pi^2 r^2} \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \zeta_{2r}^{(i_1)} \right)^2 - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \right] + + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{1}{l^2 - k^2} \left[ \frac{l}{k} \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_1)} + \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_1)} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Далее получим

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M} \left\{ \left( I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} & = \mathbb{M} \left\{ \left( I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
 & = \frac{(T-t)^4}{4} \left[ \frac{2}{\pi^4} \left( \frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \frac{1}{\pi^4} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi^4} \left( \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right]. \tag{6.152}
 \end{aligned}$$

С учетом (6.150) перепишем соотношение (6.152) в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M} \left\{ \left( I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} & = \mathbb{M} \left\{ \left( I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
 & = \frac{(T-t)^4}{4} \left[ \frac{17}{240} - \frac{1}{3\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \frac{2}{\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi^4} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right]. \tag{6.153}
 \end{aligned}$$

Таблица 6.37. Проверка формулы (6.147)

$\varepsilon/(T-t)^3$	0.0459	0.0072	$7.5722 \cdot 10^{-4}$	$7.5973 \cdot 10^{-5}$	$7.5990 \cdot 10^{-6}$
$q$	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.38. Проверка формул (6.148), (6.149)

$4\varepsilon/(T-t)^4$	0.0540	0.0082	$8.4261 \cdot 10^{-4}$	$8.4429 \cdot 10^{-5}$	$8.4435 \cdot 10^{-6}$
$q$	1	10	100	1000	10000

В таблицах 6.37 – 6.39 численно осуществлена проверка формул (6.147) – (6.149), (6.153) при различных значениях  $q$ . В таблицах 6.37 – 6.39 величина  $\varepsilon$  означает правые части указанных формул.

Формулы (6.150), (6.151) представляются весьма интересными. Подтверждим численно их правильность (таблицы 6.40, 6.41;  $\varepsilon_p$  — абсолютное отклонение кратных частичных сумм с верхним пределом суммирования  $p$  для рядов (6.150), (6.151) от правых частей формул (6.150), (6.151); сходимость кратных рядов понимается здесь при  $p_1 = p_2 = p \rightarrow \infty$ , что допустимо согласно теореме 5.1).

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (6.6) с использованием тригонометрической системы.

Нетрудно видеть, что аппроксимации  $J_{(\lambda_2\lambda_1)T,t}^{*(i_2i_1)q}$ ,  $J_{(\lambda_3\lambda_2\lambda_1)T,t}^{*(i_3i_2i_1)q}$  стохастических интегралов  $J_{(\lambda_2\lambda_1)T,t}^{*(i_2i_1)}$ ,  $J_{(\lambda_3\lambda_2\lambda_1)T,t}^{*(i_3i_2i_1)}$  определяются правыми частями формул (6.137), (6.138), в которых следует взять

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \quad (i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \dots, m). \quad (6.154)$$

Поскольку

$$\int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(0)} = \begin{cases} \sqrt{T-t} & \text{при } j = 0 \\ 0 & \text{при } j \neq 0 \end{cases},$$

Таблица 6.39. Проверка формулы (6.153)

$4\varepsilon/(T-t)^4$	0.0268	0.0034	$3.3955 \cdot 10^{-4}$	$3.3804 \cdot 10^{-5}$	$3.3778 \cdot 10^{-6}$
$q$	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.40. Проверка формулы (6.150)

$\varepsilon_p$	2.0294	0.3241	0.0330	0.0033	$3.2902 \cdot 10^{-4}$
$p$	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.41. Проверка формулы (6.151)

$\varepsilon_p$	10.9585	1.8836	0.1968	0.0197	0.0020
$p$	1	10	100	1000	10000

то нетрудно из (6.137) и (6.138), считая, что в этих равенствах  $\zeta_j^{(i)}$  определяется из (6.154), получить следующее семейство формул:

$$J_{(10)T,t}^{(i_2 0)q} = \frac{1}{2}(T-t)^{3/2} \left[ \zeta_0^{(i_2)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_2)} \right) \right],$$

$$J_{(01)T,t}^{(0i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t)^{3/2} \left[ \zeta_0^{(i_1)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} J_{(001)T,t}^{(00i_1)q} &= (T-t)^{5/2} \left[ \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \right) \right], \end{aligned}$$

$$J_{(010)T,t}^{(0i_2 0)q} = (T-t)^{5/2} \left[ \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_2)} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} J_{(100)T,t}^{(i_3 00)q} &= (T-t)^{5/2} \left[ \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_3)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_3)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left( \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_3)} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{(011)T,t}^{*(0i_2 i_1)q} &= (T-t)^2 \left( \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left( \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - 2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{1}{r^2 - l^2} \left[ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} + \frac{r}{l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \right] + \\
 & + \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} \right], 
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{(110)T,t}^{*(i_3 i_2 0)q} = & (T-t)^2 \left( \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left( \mu_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} - 2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \right) + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[ -\frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ -2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{1}{l^2 - r^2} \left[ \frac{l}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} \right] + \\
 & + \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{4\pi r} \left\{ -\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} \right], 
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{(101)T,t}^{*(i_3 0 i_1)q} = & (T-t)^2 \left( \frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \left( \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} - \xi_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left( \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \mu_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right) + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[ \frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{1}{rl} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \\
 & \left. - \sum_{r=1}^q \frac{1}{4\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \right\} \right]. 
 \end{aligned}$$

## 6.8 Сходимость в среднем степени $2n$ и с вероятностью 1 разложений повторных стохастических интегралов из теоремы 5.1

При построении разложений стохастических интегралов Ито из теоремы 5.1 мы сохранили всю информацию об этих интегралах, поэтому естественно ожидать, что указанные разложения будут сходиться не только в среднеквадратическом, но и в более сильных вероятностных смыслах.

Получим сначала общую оценку, которая доказывает сходимость в среднем степени  $2n$ ,  $n \in N$  аппроксимаций из теоремы 5.1.

Согласно обозначениям теоремы 5.1:

$$R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k} = \sum_{(t_1,\dots,t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} R_{p_1\dots p_k}(t_1,\dots,t_k) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.155)$$

$$R_{p_1\dots p_k}(t_1,\dots,t_k) \stackrel{\text{def}}{=} K(t_1,\dots,t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l).$$

Будем считать, что  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  (этого очевидно достаточно для унифицированных разложений Тейлора–Ито), а остальные обозначения данного раздела такие же, как в теореме 5.1.

Отметим, что при доказательстве теоремы 5.1 было установлено, что

$$\mathbb{M}\{(R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k})^2\} \leq C_k \sum_{(t_1,\dots,t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} R_{p_1\dots p_k}^2(t_1,\dots,t_k) dt_1 \dots dt_k =$$

$$= C_k \int_{[t,T]^k} R_{p_1\dots p_k}^2(t_1,\dots,t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad C_k < \infty.$$

Положим

$$\eta_{t_l,t}^{(l-1)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{t_l} \dots \int_t^{t_2} R_{p_1\dots p_k}(t_1,\dots,t_k) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_{l-1}}^{(i_{l-1})}; \quad l = 2, 3, \dots, k+1,$$

$$\eta_{t_{k+1},t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_{T,t}^{(k)}; \quad \eta_{T,t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} R_{p_1\dots p_k}(t_1,\dots,t_k) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}.$$

При выводе оценки (1.46), в частности, было получено равенство

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} = n(2n-1) \int_{t_0}^t \mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n-2} \xi_s^2 \right\} ds.$$

Применив в правой части под знаком интеграла неравенство Гельдера при  $p = n/(n-1)$ ,  $q = n$  и воспользовавшись возрастанием величины

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\}$$

с ростом  $t$ , получим модификацию оценки (1.46) вида:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} \leq n(2n-1) \left( \mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} \right)^{(n-1)/n} \int_{t_0}^t (\mathbb{M} \{\xi_s^{2n}\})^{1/n} ds.$$

Возводя полученное неравенство в степень  $n$  и сокращая затем на

$$\left( \mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} \right)^{n-1}$$

получаем следующую модификацию (1.46)

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} \leq (n(2n-1))^n \left( \int_{t_0}^t (\mathbb{M} \{\xi_s^{2n}\})^{1/n} ds \right)^n. \quad (6.156)$$

Используя оценку (6.156) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \{(\eta_{T,t}^{(k)})^{2n}\} &\leq (n(2n-1))^n \left[ \int_t^T (\mathbb{M} \{(\eta_{t_k,t}^{(k-1)})^{2n}\})^{1/n} dt_k \right]^n \leq \\ &\leq (n(2n-1))^n \left[ \int_t^T \left( (n(2n-1))^n \left[ \int_t^{t_k} (\mathbb{M} \{(\eta_{t_{k-1},t}^{(k-2)})^{2n}\})^{1/n} dt_{k-1} \right]^n \right)^{1/n} dt_k \right]^n = \\ &= (n(2n-1))^{2n} \left[ \int_t^T \int_t^{t_k} (\mathbb{M} \{(\eta_{t_{k-1},t}^{(k-2)})^{2n}\})^{1/n} dt_{k-1} dt_k \right]^n \leq \dots \\ \dots &\leq (n(2n-1))^{n(k-1)} \left[ \int_t^T \int_t^{t_k} \dots \int_t^{t_3} (\mathbb{M} \{(\eta_{t_2,t}^{(1)})^{2n}\})^{1/n} dt_3 \dots dt_{k-1} dt_k \right]^n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (n(2n-1))^{n(k-1)} (2n-1)!! \left[ \int_t^T \dots \int_t^{t_2} R_{p_1 \dots p_k}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right]^n \leq \\
 &\leq (n(2n-1))^{n(k-1)} (2n-1)!! \left[ \int_{[t,T]^k} R_{p_1 \dots p_k}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right]^n.
 \end{aligned}$$

Предпоследний переход получен с использованием формулы

$$M\{(\eta_{t_2,t}^{(1)})^{2n}\} = (2n-1)!! \left[ \int_t^{t_2} R_{p_1 \dots p_k}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \right]^n,$$

которая вытекает из гауссовойсти

$$\eta_{t_2,t}^{(1)} = \int_t^{t_2} R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}.$$

Аналогичным образом оценивается каждое слагаемое в правой части (6.155). Тогда из (6.155) с помощью неравенства Минковского окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 M\{(R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^{2n}\} &\leq \left( k! \left( (n(2n-1))^{n(k-1)} (2n-1)!! \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \left[ \int_{[t,T]^k} R_{p_1 \dots p_k}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right]^n \right)^{1/2n} \right)^{2n} = \\
 &= (k!)^{2n} (n(2n-1))^{n(k-1)} (2n-1)!! \times \\
 &\times \left[ \int_{[t,T]^k} R_{p_1 \dots p_k}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right]^n \tag{6.157}
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 M\{(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^{2n}\} &\leq \\
 &\leq (k!)^{2n} (n(2n-1))^{n(k-1)} (2n-1)!! \times \\
 &\times \left[ \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 \right]^n, \tag{6.158}
 \end{aligned}$$

где

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1, \dots, p_k} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ \left. - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right).$$

Неравенство (6.157) означает, что аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученные по теореме 5.1, сходятся в среднем степени  $2n$ ,  $n \in N$ , поскольку

$$\int_{[t,T]^k} R_{p_1 \dots p_k}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \rightarrow 0 \text{ при } p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty.$$

В частности, из (6.157) и (6.105) получаем

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^8 \right\} \leq 16522 \cdot 10^6 \left( \frac{1}{2} (T-t)^2 \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \right)^4.$$

Перейдем к рассмотрению сходимости с вероятностью 1. Рассмотрим

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) \right). \quad (6.159)$$

При  $i_1 = i_2$  из (6.159) или по формуле Ито получаем равенство:

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = \frac{1}{2} (T-t) \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 \text{ с. в. 1.}$$

Рассмотрим случай  $i_1 \neq i_2$ . Имеем  $I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$  с. в. 1.

Отметим хорошо известный факт.

**Утверждение 6.1.** Если для последовательности случайных величин  $\xi_p$  и для некоторого  $\alpha > 0$  числовой ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M} \{ |\xi_p|^{\alpha} \}$$

сходится, то последовательность  $\xi_p$  сходится к нулю с вероятностью 1.

В нашем случае ( $i_1 \neq i_2$ ):

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} + \xi_p, \quad (6.160)$$

$$I_{00T,t}^{(i_1 i_2)p} = \frac{1}{2}(T-t) \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} (\zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)}) \right), \quad (6.161)$$

$$\xi_p = \frac{1}{2}(T-t) \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} (\zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)}).$$

Согласно обозначениям теоремы 5.1 получаем:

$$\xi_p = R_{T,t}^{p,p} = \int_t^T \int_t^{t_2} R_{pp}(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} + \int_t^T \int_t^{t_1} R_{pp}(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)},$$

$$\mathbb{M}\{|\xi_p|^2\} = \int_t^T \int_t^{t_2} (R_{pp}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 + \int_t^T \int_t^{t_1} (R_{pp}(t_1, t_2))^2 dt_2 dt_1 =$$

$$= \int_{[t,T]^2} (R_{pp}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2, \quad (6.162)$$

$$\mathbb{M}\{|\xi_p|^2\} = \frac{1}{2}(T-t)^2 \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1}, \quad (6.163)$$

$$R_{pp}(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2),$$

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1} \leq \int_p^{\infty} \frac{1}{4x^2 - 1} dx = -\frac{1}{4} \ln \left| 1 - \frac{2}{2p+1} \right| \leq \frac{C}{p}, \quad (6.164)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $p$ .

Поэтому, взяв  $\alpha = 2$  в утверждении 6.1, мы не сможем доказать сходимость последовательности  $\xi_p$  к нулю с вероятностью 1, поскольку ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}\{|\xi_p|^2\}$$

будет мажорироваться расходящимся рядом Дирихле с показателем 1.

Возьмем  $\alpha = 4$  и оценим  $\mathbb{M}\{|\xi_p|^4\}$ .

Согласно (6.157) при  $k = 2$ ,  $n = 2$  и (6.162) – (6.164) получим:

$$\mathbb{M}\{|\xi_p|^4\} \leq K \left( \int_{[t,T]^2} R_{pp}^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^2 \leq \frac{K_1}{p^2} \quad (6.165)$$

и следовательно

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}\{|\xi_p|^4\} \leq K_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \infty, \quad (6.166)$$

где постоянные  $K, K_1$  не зависят от  $p$ .

Поскольку ряд в (6.166) сходится, то согласно утверждению 6.1 мы получим, что  $\xi_p \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  с в. 1. Тогда  $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} \rightarrow I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$  при  $p \rightarrow \infty$  с в. 1.

Рассмотрим стохастические интегралы  $I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)}, I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$ , разложения которых имеют вид (6.91), (6.92). Пусть сначала  $i_1 \neq i_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)} &= -\frac{T-t}{2} I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} - \frac{(T-t)^2}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^p \left( \frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right] + \xi_p^{(01)}, \\ I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)} &= -\frac{T-t}{2} I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} - \frac{(T-t)^2}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^p \left( \frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} + \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right] + \xi_p^{(10)}, \end{aligned}$$

где

$$\xi_p^{(01)} = -\frac{(T-t)^2}{4} \left( \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=p+1}^{\infty} \left[ \frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right] \right),$$

$$\begin{aligned} \xi_p^{(10)} = & -\frac{(T-t)^2}{4} \left( \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=p+1}^{\infty} \left[ \frac{(i+1)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+2)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right] \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{|\xi_p^{(01)}|^2\} &= \int_{[t,T]^2} (R_{pp}^{(01)}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 = \frac{(T-t)^4}{16} \times \\ &\times \sum_{i=p+1}^{\infty} \left( \frac{2}{4i^2-1} + \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right) \leq \\ &\leq C \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \frac{K}{p}, \end{aligned} \tag{6.167}$$

где постоянные  $C, K$  не зависят от  $p$ .

Абсолютно аналогично получаем:

$$\mathbb{M}\{|\xi_p^{(10)}|^2\} = \int_{[t,T]^2} (R_{pp}^{(10)}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 \leq \frac{K}{p}, \tag{6.168}$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $p$ .

Согласно (6.157) при  $k = 2, n = 2$  и (6.167), (6.168) мы получим:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{|\xi_p^{(01)}|^4\} &\leq K \left( \int_{[t,T]^2} (R_{pp}^{(01)}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 \right)^2 \leq \frac{K_1}{p^2}, \\ \mathbb{M}\{|\xi_p^{(10)}|^4\} &\leq K \left( \int_{[t,T]^2} (R_{pp}^{(10)}(t_1, t_2))^2 dt_1 dt_2 \right)^2 \leq \frac{K_1}{p^2} \end{aligned}$$

и следовательно

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}\{|\xi_p^{(01)}|^4\} \leq K_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \infty, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}\{|\xi_p^{(10)}|^4\} \leq K_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \infty, \tag{6.169}$$

где постоянная  $K_1$  не зависит от  $p$ .

Согласно (6.169) и утверждению 6.1 мы получим, что  $\xi_p^{(01)}, \xi_p^{(10)} \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  с в. 1. Тогда  $I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} \rightarrow I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$ ,  $I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} \rightarrow I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$  при  $p \rightarrow \infty$  с в. 1 ( $i_1 \neq i_2$ ).

Рассмотрим теперь случай  $i_1 = i_2$ :

$$\begin{aligned} I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_1)} &= \frac{(T-t)^2}{4} - \frac{(T-t)^2}{4} \left[ \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^p \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right\} \right] + \mu_p^{(01)}, \\ I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_1)} &= \frac{(T-t)^2}{4} - \frac{(T-t)^2}{4} \left[ \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^p \left\{ -\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right\} \right] + \mu_p^{(10)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_p^{(01)} &= -\frac{(T-t)^2}{4} \times \\ &\quad \times \sum_{i=p+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right\}, \\ \mu_p^{(10)} &= -\frac{(T-t)^2}{4} \times \\ &\quad \times \sum_{i=p+1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$M \left\{ \left( \mu_p^{(01)} \right)^2 \right\} = M \left\{ \left( \mu_p^{(10)} \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{(T-t)^4}{16} \left[ \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2} + \right. \\ \left. + \left( \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \right)^2 \right] \leq \frac{K}{p^2}$$

и следовательно

$$\sum_{p=1}^{\infty} M\{|\mu_p^{(01)}|^2\} \leq K \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \infty, \quad \sum_{p=1}^{\infty} M\{|\mu_p^{(10)}|^2\} \leq K \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \infty, \quad (6.170)$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $p$ .

Согласно (6.170) и утверждению 6.1 получим, что  $\mu_p^{(01)}, \mu_p^{(10)} \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  с в. 1. Тогда  $I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_1)p} \rightarrow I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_1)}, I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_1)p} \rightarrow I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_1)}$  при  $p \rightarrow \infty$  с в. 1.

Аналогично получаем:  $I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} \rightarrow I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_2)}, I_{11_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} \rightarrow I_{11_{T,t}}^{(i_1 i_2)}, I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} \rightarrow I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$  ( $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ ) при  $p \rightarrow \infty$  с в. 1. Здесь разложения для стохастических интегралов  $I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_2)}, I_{11_{T,t}}^{(i_1 i_2)}, I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$  определяются из (6.98) – (6.100), а их аппроксимации имеют вид:

$$I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} - (T-t) I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^p \left( \frac{(i+2)(i+3) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+1)(i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(i^2+i-3) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+3i-1) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3,$$

$$I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} - (T-t) I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_2^{(i_1)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^p \left( \frac{(i+1)(i+2) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+2)(i+3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(i^2+3i-1) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+i-3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3,$$

$$\begin{aligned}
 I_{11_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} = & -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} - \frac{T-t}{2} \left( I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} + I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)p} \right) + \frac{(T-t)^3}{8} \left[ \frac{1}{3} \zeta_1^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\
 & + \sum_{i=0}^p \left( \frac{(i+1)(i+3) (\zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)})}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(i+1)^2 (\zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)})}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)} \right) \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^3.
 \end{aligned}$$

Разложения (6.84)–(6.86), (6.101) для интегралов  $I_{0_{T,t}}^{(i_1)}$ ,  $I_{1_{T,t}}^{(i_1)}$ ,  $I_{2_{T,t}}^{(i_1)}$ ,  $I_{3_{T,t}}^{(i_1)}$  изначально верны с в. 1 (они содержат 1, 2, 3 и 4 члена разложения соответственно).

По предложенной схеме можно доказывать сходимость с в. 1 для разложений других повторных стохастических интегралов.

Рассмотрим некоторые соотношения, описывающие предложенный метод. Из (6.157) получим:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}\{(R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^{2n}\} \leq & \\
 \leq C_{n,k} \left[ \int_{[t,T]^k} R_{p_1 \dots p_k}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right]^n
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}\{(R_{T,t}^{p_1, \dots, p_k})^{2n}\} \leq & \\
 \leq C_{n,k} \left[ \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1}^2 \right]^n,
 \end{aligned}$$

где постоянная  $C_{n,k}$  зависит только от  $n$  и  $k$ .

Для  $p_1 = \dots = p_k = p$  мы имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M}\{(R_{T,t}^{p, \dots, p})^{2n}\} \leq C_{n,k} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \int_{[t,T]^k} R_{p \dots p}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right]^n. \quad (6.171)$$

Если для повторного стохастического интеграла Ито

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$$

и некоторого  $n$  мы имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left[ \int_{[t,T]^k} R_{p \dots p}^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right]^n < \infty,$$

тогда  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p \rightarrow J[\psi^{(k)}]_{T,t}$  при  $p \rightarrow \infty$  с в. 1, где  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^p$  — аппроксимация, основанная на теореме 5.1. Например

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \right),$$

$$\begin{aligned} J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p = & \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^p C_{j_3 j_2 j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\ & \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p = & \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^p C_{j_4 \dots j_1} \left( \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \\ & \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \right). \end{aligned}$$

Для дальнейшего рассмотрения вопроса о сходимости с вероятностью 1 для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито кратностей выше второй воспользуемся тем, величина  $T-t \in (0, 1)$  достаточно мала, поскольку играет роль шага интегрирования в численных методах для СДУ Ито (см. главу 7). Здесь  $[t, T]$  — промежуток интегрирования повторного стохастического интеграла Ито.

Для стохастического интеграла  $I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)}$  вида (6.1) по теореме 5.1 (случай полиномов Лежандра и  $p_1 = \dots = p_k = p$ ) получим:

$$I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p \hat{C}_{j_k \dots j_1}^{d_1 \dots d_k} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ \left. - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right), \quad (6.172)$$

где  $\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{d_1 \dots d_k}$  определяется формулами (6.129), (6.133), (6.134), т.е.

$$\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{d_1 \dots d_k} = \int_t^T (t - t_k)^{d_k} \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{d_1} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k = \\ = \frac{(-1)^{d_1 + \dots + d_k} (T - t)^{k/2 + d_1 + \dots + d_k}}{2^{d_1 + \dots + d_k + k}} \prod_{l=1}^k \sqrt{2j_l + 1} \tilde{C}_{j_k \dots j_1}^{d_1 \dots d_k}, \quad (6.173)$$

где

$$\tilde{C}_{j_k \dots j_1}^{d_1 \dots d_k} = \int_{-1}^1 (1 + t_k)^{d_k} P_{j_k}(t_k) \dots \int_{-1}^{t_2} (1 + t_1)^{d_1} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k, \quad (6.174)$$

где  $P_i(x)$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$  — полиномы Лежандра.

Из (6.172) – (6.174) получим:

$$I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)p} = \alpha_k (T - t)^{k/2 + d_1 + \dots + d_k} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p \prod_{l=1}^k \sqrt{2j_l + 1} \tilde{C}_{j_k \dots j_1}^{d_1 \dots d_k} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ \left. - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right), \quad (6.175)$$

где

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{d_1 + \dots + d_k}}{2^{d_1 + \dots + d_k + k}},$$

а  $I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)p}$  — допредельное выражение в (6.172).

Согласно (4.21) можем записать

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} = \frac{(T - t)^{2(d_1 + \dots + d_k) + k}}{(2d_1 + 1)(2(d_1 + d_2) + 2) \dots (2(d_1 + \dots + d_k) + k)}.$$

Тогда

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ \left( I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\}} = \beta_k (T - t)^{k/2 + d_1 + \dots + d_k},$$

где

$$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{(2d_1 + 1)(2(d_1 + d_2) + 2) \dots (2(d_1 + \dots + d_k) + k)}}.$$

Положим

$$I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \beta_k (T - t)^{k/2 + d_1 + \dots + d_k} \tilde{I}_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)},$$

где

$$\tilde{I}_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)}}{\sqrt{\mathbb{M} \left\{ \left( I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\}}} \text{ и } \mathbb{M} \left\{ \left( \tilde{I}_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} - I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)p} &= (T - t)^{k/2 + d_1 + \dots + d_k} \times \\ &\times \left( \beta_k \tilde{I}_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} - \alpha_k \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p \prod_{l=1}^k \sqrt{2j_l + 1} \tilde{C}_{j_k \dots j_1}^{d_1 \dots d_k} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.176)$$

Согласно (6.158):

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \left( I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} - I_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)p} \right)^4 \right\} = 0.$$

Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \left( \beta_k \tilde{I}_{d_1 \dots d_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} - \alpha_k \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^p \prod_{l=1}^k \sqrt{2j_l + 1} \tilde{C}_{j_k \dots j_1}^{d_1 \dots d_k} \left( \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \right. \right. \right.$$

$$-\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in G_k} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \Big)^4 \Big\} < \infty.$$

Поэтому, при достаточно малом  $T - t \in (0, 1)$  существует такая постоянная  $K$ , что

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{d_1 \dots d_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)} - I_{d_1 \dots d_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)p} \right)^4 \right\} \leq K \mathbb{M} \left\{ \left( I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} - I_{00T,t}^{(i_1 i_2)p} \right)^4 \right\}, \quad (6.177)$$

где  $I_{00T,t}^{(i_1 i_2)p}$  — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито из семейства (6.1), которая имеет вид (6.161) ( $i_1 \neq i_2$ ).

Согласно (6.160), (6.165), (6.177):

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{d_1 \dots d_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)} - I_{d_1 \dots d_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)p} \right)^4 \right\} \leq \frac{K_2}{p^2}, \quad (6.178)$$

где постоянная  $K_2$  не зависит от  $p$ .

Принимая во внимание (6.178) можем записать:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{M} \left\{ \left( I_{d_1 \dots d_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)} - I_{d_1 \dots d_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)p} \right)^4 \right\} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{K_2}{p^2} < \infty.$$

Это в свою очередь означает, что по утверждению 6.1

$$I_{d_1 \dots d_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)p} \rightarrow I_{d_1 \dots d_{kT,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \text{ при } p \rightarrow \infty$$

с в. 1.

## 6.9 О структуре функций $K(t_1, \dots, t_k)$ , используемых в приложениях

В стохастические разложения Тейлора (унифицированные и классические), рассмотренные в главе 4, входят системы повторных стохастических интегралов (4.16), (4.17), (4.82), (4.91), (4.11), (4.75). Разложения и среднеквадратические аппроксимации указанных повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича были достаточно подробно изучены в главе 5 и настоящей главе.

Функции  $K(t_1, \dots, t_k)$ , входящие в формулировку теоремы 5.1, для семейства (4.16) имеют вид:

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} (t - t_k)^{l_k} \dots (t - t_1)^{l_1}, & t_1 < \dots < t_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (6.179)$$

где  $k \geq 2$  и  $K(t_1) = \psi(t_1)$ ;  $t_1, \dots, t_k \in [t, T]$ .

В частности, для стохастических интегралов

$$\begin{aligned} I_{1T,t}^{(i_1)}, \quad I_{2T,t}^{(i_1)}, \quad I_{00T,t}^{(i_1 i_2)}, \quad I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)}, \quad I_{01T,t}^{(i_1 i_2)}, \quad I_{10T,t}^{(i_1 i_2)}, \quad I_{0000T,t}^{(i_1 \dots i_4)}, \\ I_{20T,t}^{(i_1 i_2)}, \quad I_{11T,t}^{(i_1 i_2)}, \quad I_{02T,t}^{(i_1 i_2)} \quad (i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

функции  $K(t_1, \dots, t_k)$  вида (6.179) имеют соответственно следующий вид:

$$K_1(t_1) = t - t_1, \quad K_2(t_1) = (t - t_1)^2, \quad (6.180)$$

$$K_{00}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad K_{000}(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} 1, & t_1 < t_2 < t_3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (6.181)$$

$$K_{01}(t_1, t_2) = \begin{cases} t - t_2, & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad K_{10}(t_1, t_2) = \begin{cases} t - t_1, & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (6.182)$$

$$K_{0000}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad K_{20}(t_1, t_2) = \begin{cases} (t - t_1)^2, & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (6.183)$$

$$K_{11}(t_1, t_2) = \begin{cases} (t - t_1)(t - t_2), & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad K_{02}(t_1, t_2) = \begin{cases} (t - t_2)^2, & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (6.184)$$

где  $t_1, \dots, t_4 \in [t, T]$ .

Очевидно, что наиболее простым (имеющим конечное число слагаемых) разложением в ряд Фурье по полной ортонормированной в пространстве  $L_2([t, T])$  системе функций для полинома конечной степени будет его разложение по системе полиномов Лежандра. Полиномиальные функции входят

в функции (6.180) – (6.184) как их составные части, поэтому логично ожидать, что наиболее простыми разложениями в кратные ряды Фурье для функций (6.180) – (6.184) будут их разложения в кратные ряды Фурье–Лежандра при  $l_1^2 + \dots + l_k^2 > 0$ . Если же  $l_1 = \dots = l_k = 0$  (см. функции  $K_{00}(t_1, t_2)$ ,  $K_{000}(t_1, t_2, t_3)$ ,  $K_{0000}(t_1, \dots, t_4)$ ), то можно ожидать, что в этом случае разложения указанных функций в кратные ряды Фурье по тригонометрическим функциям и полиномам Лежандра будут иметь примерно одинаковую сложность.

Отметим, что приведенные предположения полностью подтверждаются (см. формулы (6.85), (6.86), (6.88), (6.89) и формулы (6.136), (6.141), (6.140), (6.139) соответственно).

Таким образом, применение полиномов Лежандра в рассматриваемой области является несомненным шагом вперед.

## 6.10 Метод Г.Н. Мильштейна сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов

### 6.10.1 Введение

Известно (см., например, [19]), что измеримый, среднеквадратически непрерывный и имеющий конечный второй момент случайный процесс  $\xi_\tau$ ,  $\tau \in [t, T]$ , может быть разложен в ряд вида

$$\xi_\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \phi_j(\tau), \quad (6.185)$$

сходящийся в среднеквадратическом смысле при каждом  $\tau \in [t, T]$ . В разложении (6.185):  $\zeta_j$  — некоррелированные случайные величины;  $M\{(\zeta_j)^2\} = \lambda_j$ ;  $\lambda_j$  — собственные числа, а  $\phi_j(\tau)$  — собственные функции ковариации случайного процесса  $\xi_\tau$ . При этом, если случайный процесс  $\xi_\tau$  гауссовский и  $M\{\xi_\tau\} = 0$ , то  $\zeta_j$  в (6.185) — независимые гауссовские случайные величины и ряд (6.185) сходится с вероятностью 1 при каждом  $\tau \in [t, T]$ .

Отметим, что разложение (1.16) винеровского случайного процесса есть частный случай разложения (6.185).

Г.Н. Мильштейном в [76] предложен метод разложения повторных стохастических интегралов, основанный на разложении процесса броуновского моста в тригонометрический ряд Фурье со случайными коэффи-

циентами, который также является частным случаем разложения (6.185). Приведем основные соотношения метода Г.Н. Мильштейна [76].

Рассмотрим процесс броуновского моста

$$\mathbf{f}_t - \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta, \quad t \in [0, \Delta], \quad \Delta > 0, \quad (6.186)$$

где  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим также сходящееся в среднеквадратическом смысле покомпонентное разложение процесса (6.186) в тригонометрический ряд Фурье:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} - \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} = \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left( a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \quad (6.187)$$

где

$$a_{i,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^\Delta \left( \mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} \right) \cos \frac{2\pi r s}{\Delta} ds, \quad b_{i,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^\Delta \left( \mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} \right) \sin \frac{2\pi r s}{\Delta} ds;$$

$$r = 0, 1, \dots; \quad i = 1, \dots, m.$$

Нетрудно показать [76], что случайные величины  $a_{i,r}, b_{i,r}$  гауссовские и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} M\{a_{i,r} b_{i,r}\} &= M\{a_{i,r} b_{i,k}\} = 0, \quad M\{a_{i,r} a_{i,k}\} = M\{b_{i,r} b_{i,k}\} = 0, \\ M\{a_{i_1,r} a_{i_2,r}\} &= M\{b_{i_1,r} b_{i_2,r}\} = 0, \quad M\{a_{i,r}^2\} = M\{b_{i,r}^2\} = \frac{\Delta}{2\pi^2 r^2}, \end{aligned}$$

где  $i, i_1, i_2 = 1, \dots, m$ ;  $r \neq k$ ;  $i_1 \neq i_2$ .

Согласно (6.187) имеем

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)} \frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left( a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \quad (6.188)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

### 6.10.2 Аппроксимация повторных стохастических интегралов первой и второй кратности

Используя соотношение (6.188), нетрудно получить следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения [76], [196]:

$$\int_0^t d\mathbf{f}_t^{(i)} = \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left( a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \quad (6.189)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{t^2}{2\Delta} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i)} + \\ + \frac{t}{2} a_{i,0} + \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ a_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} - b_{i,r} \left( \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right\}, \quad (6.190) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = t \int_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{t^2}{2\Delta} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i)} + t \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + \right. \\ \left. + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right\} - \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ a_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} - b_{i,r} \left( \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right\}, \quad (6.191) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i_1)} \int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} + \frac{1}{2} a_{i_1,0} \int_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i_2)} + \frac{t\pi}{\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} r (a_{i_1,r} b_{i_2,r} - \\ - b_{i_1,r} a_{i_2,r}) + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ (a_{i_1,r} a_{i_2,r} - b_{i_1,r} b_{i_2,r}) \left( 1 - \cos \frac{4\pi r t}{\Delta} \right) + (a_{i_1,r} b_{i_2,r} + \right. \\ \left. + b_{i_1,r} a_{i_2,r}) \sin \frac{4\pi r t}{\Delta} + \frac{2}{\pi r} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)} \left( a_{i_1,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i_1,r} \left( \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right) \right\} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1(r \neq k)}^{\infty} k \left\{ a_{i_1,r} a_{i_2,k} \left[ \frac{\cos((2\pi(k+r)t)/\Delta)}{2(k+r)} + \frac{\cos((2\pi(k-r)t)/\Delta)}{2(k-r)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k}{k^2 - r^2} \right] + a_{i_1,r} b_{i_2,k} \left[ \frac{\sin((2\pi(k+r)t)/\Delta)}{2(k+r)} + \frac{\sin((2\pi(k-r)t)/\Delta)}{2(k-r)} \right] + \right. \\ \left. + b_{i_1,r} b_{i_2,k} \left[ \frac{\cos((2\pi(k-r)t)/\Delta)}{2(k-r)} - \frac{\cos((2\pi(k+r)t)/\Delta)}{2(k+r)} - \frac{r}{k^2 - r^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\Delta}{2\pi} b_{i_1,r} a_{i_2,k} \left[ \frac{\sin((2\pi(k+r)t)/\Delta)}{2(k+r)} - \frac{\sin((2\pi(k-r)t)/\Delta)}{2(k-r)} \right] \right\}. \quad (6.192) \end{aligned}$$

Следует обратить особое внимание на то обстоятельство, что двойной ряд в (6.192) следует понимать как повторный, а не кратный (как в теореме 5.1), т.е. как повторный предел соответствующей последовательности двойных частичных сумм. Это связано с тем, что итеративная подстановка разложений винеровских процессов в повторный стохастический интеграл приводит именно к повторному взятию операции предельного перехода.

Заметим, что кратный ряд гораздо предпочтительнее повторного при его приближенном представлении повторной частичной суммой, поскольку сходимость таких приближений обеспечивается при любом способе одновременного стремления к бесконечности верхних пределов суммирования повторной частичной суммы (для определенности обозначим их  $p_1, \dots, p_k$ ; см. теорему 5.1), в частности, в наиболее простом случае можно положить  $p_1 = \dots = p_k = p \rightarrow \infty$ . Однако, последнее условие, строго говоря, вовсе не гарантирует сходимости повторного ряда с такой же частичной суммой, как и у рассматриваемого кратного ряда.

Далее мы увидим, что применение метода Г.Н. Мильштейна к аппроксимации повторных стохастических интегралов по меньшей мере третьей кратности как раз связано с описанной выше проблемой. Отметим, что в [148] тем не менее необоснованно используется именно условие:  $p_1 = p_2 = p_3 = p \rightarrow \infty$  [148] (С. 202, 204).

Положим в соотношениях (6.189)–(6.192)  $t = \Delta$  (при этом двойные частичные суммы повторного ряда в (6.192) обратятся в ноль).

В результате получим следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\int_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)}, \quad (6.193)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2} \Delta \left( \mathbf{f}_\Delta^{(i)} + a_{i,0} \right), \quad (6.194)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} = \frac{1}{2} \Delta \left( \mathbf{f}_\Delta^{(i)} - a_{i,0} \right), \quad (6.195)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} &= \frac{1}{2} \mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} \mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} - \frac{1}{2} \left( a_{i_2,0} \mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} - a_{i_1,0} \mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} \right) + \\ &+ \pi \sum_{r=1}^{\infty} r (a_{i_1,r} b_{i_2,r} - b_{i_1,r} a_{i_2,r}). \end{aligned} \quad (6.196)$$

При выводе (6.193)–(6.196) использовалось соотношение

$$a_{i,0} = -2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{i,r}, \quad (6.197)$$

которое следует из (6.187) при  $t = \Delta$ .

Объяснение того, что полученные разложения сходятся именно к соответствующим стохастическим интегралам Стратоновича приводится в [148].

### 6.10.3 Сравнение с методом, основанным на теореме 5.1

Произведем сравнение разложений некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратностей (здесь имеется ввиду, что интегрирование по винеровским процессам в повторных стохастических интегралах осуществляется не более, чем два раза), полученных методом Г.Н. Мильштейна, и методом, основанным на кратных рядах Фурье по тригонометрической системе функций.

Введем в рассмотрение следующие независимые стандартные гауссовые случайные величины:

$$\xi_i = \frac{\mathbf{f}_\Delta^{(i)}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \rho_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi r a_{i,r}, \quad \eta_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi r b_{i,r}, \quad (6.198)$$

где  $i = 1, \dots, m$ ;  $r = 1, 2, \dots$ . В силу (6.197) имеем

$$a_{i,0} = -\sqrt{2\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\pi r} \rho_{i,r}. \quad (6.199)$$

Подставляя соотношения (6.198) и (6.199) в (6.193)–(6.196), получаем следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\int_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \sqrt{\Delta} \xi_i, \quad (6.200)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2} \Delta^{3/2} \left( \xi_i - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \rho_{i,r} \right), \quad (6.201)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = \frac{1}{2} \Delta^{3/2} \left( \xi_i + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \rho_{i,r} \right), \quad (6.202)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} &= \frac{\Delta}{2} \left[ \xi_{i_1} \xi_{i_2} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left( \rho_{i_1,r} \eta_{i_2,r} - \eta_{i_1,r} \rho_{i_2,r} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{2} (\rho_{i_2,r} \xi_{i_1} - \rho_{i_1,r} \xi_{i_2}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.203)$$

Учитывая принятые нами ранее обозначения для повторных стохастических интегралов, можно записать

$$\int_0^{\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = I_{0\Delta,0}^{*(i)} = J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (6.204)$$

$$\int_0^{\Delta} \int_0^{\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \Delta I_{0\Delta,0}^{*(i)} + I_{1\Delta,0}^{*(i)} = J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (6.205)$$

$$\int_0^{\Delta} \int_0^{\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = -I_{1\Delta,0}^{*(i)} = J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (6.206)$$

$$\int_0^{\Delta} \int_0^{\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = I_{00\Delta,0}^{*(i_1 i_2)} = J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}. \quad (6.207)$$

Подставляя разложения интегралов  $I_{0\Delta,0}^{*(i)}$ ,  $I_{1\Delta,0}^{*(i)}$ ,  $I_{00\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$  или интегралов  $J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}$ ,  $J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}$ ,  $J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}$ ,  $J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$ , полученные ранее с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье по тригонометрической системе функций, в представления (6.204)–(6.207), с точностью до обозначений получаем разложения (6.200)–(6.203). Это свидетельствует о том, что по крайней мере для рассмотренных повторных стохастических интегралов Стратоновича и тригонометрической системы функций метод Г.Н. Мильштейна и метод, основанный на кратных рядах Фурье, дают один и тот же результат (это интересный факт, хотя и вполне ожидаемый).

В следующем разделе обсудим применение метода Г.Н. Мильштейна к повторным стохастическим интегралам 3 кратности.

#### 6.10.4 О проблемах метода Г.Н. Мильштейна применительно к повторным стохастическим интегралам кратностей выше второй

Ранее уже отмечалось, что технические особенности метода Г.Н. Мильштейна таковы, что он может приводить к повторным рядам (в противоположность кратным рядам из теоремы 5.1) из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин. В случае наиболее простого повторного стохастического интеграла второй кратности эту проблему удалось, как мы видели в предыдущем разделе, избежать. Однако, уже для простейших стохастических интегралов третьей кратности это оказалось не так.

Приведем, полученное в [148], разложение повторного стохастического интеграла Стратоновича третьей кратности:

$$J_{(111)\Delta,0}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \frac{1}{\Delta} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_1)} J_{(011)\Delta,0}^{*(i_2 i_3)} + \frac{1}{2} a_{i_1,0} J_{(11)\Delta,0}^{*(i_2 i_3)} + \frac{1}{2\pi} b_{i_1} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)} - \\ - \Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} B_{i_1 i_3} + \Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)} \left( \frac{1}{2} A_{i_1 i_2} - C_{i_2 i_1} \right) + \Delta^{3/2} D_{i_1 i_2 i_3}, \quad (6.208)$$

где

$$J_{(011)\Delta,0}^{*(i_2 i_3)} = \frac{1}{6} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)} - \frac{1}{\pi} \Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)} b_{i_2} + \\ + \Delta^2 B_{i_2 i_3} - \frac{1}{4} \Delta a_{i_3,0} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} + \frac{1}{2\pi} \Delta b_{i_3} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} + \Delta^2 C_{i_2 i_3} + \frac{1}{2} \Delta^2 A_{i_2 i_3}, \\ A_{i_2 i_3} = \frac{\pi}{\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} r (a_{i_2,r} b_{i_3,r} - b_{i_2,r} a_{i_3,r}), \\ C_{i_2 i_3} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1(r \neq l)}^{\infty} \frac{r}{r^2 - l^2} (r a_{i_2,r} a_{i_3,l} + l b_{i_2,r} b_{i_3,l}), \\ B_{i_2 i_3} = \frac{1}{2\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} (a_{i_2,r} a_{i_3,r} + b_{i_2,r} b_{i_3,r}), \quad b_i = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} b_{i,r}, \\ D_{i_1 i_2 i_3} = \\ -\frac{\pi}{2\Delta^{3/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} l \left( a_{i_2,l} (a_{i_3,l+r} b_{i_1,r} - a_{i_1,r} b_{i_3,l+r}) + \right. \\ \left. + b_{i_2,l} (a_{i_1,r} a_{i_3,r+l} + b_{i_1,r} b_{i_3,l+r}) \right) + \\ + \frac{\pi}{2\Delta^{3/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{l-1} l \left( a_{i_2,l} (a_{i_1,r} b_{i_3,l-r} + a_{i_3,l-r} b_{i_1,r}) - \right. \\ \left. - b_{i_2,l} (a_{i_1,r} a_{i_3,l-r} - b_{i_1,r} b_{i_3,l-r}) \right) + \\ + \frac{\pi}{2\Delta^{3/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=l+1}^{\infty} l \left( a_{i_2,l} (a_{i_3,r-l} b_{i_1,r} - a_{i_1,r} b_{i_3,r-l}) + \right. \\ \left. + b_{i_2,l} (a_{i_1,r} a_{i_3,r-l} + b_{i_1,r} b_{i_3,r-l}) \right);$$

остальные обозначения встречались в предыдущем разделе.

Из вида разложения (6.208) и разложения для  $J_{(011)\Delta,0}^{*(i_2i_3)}$  можно заключить, что они содержат повторные ряды. Далее, при аппроксимации рассмотренных стохастических интегралов в [148] предлагается положить верхние пределы суммирования равными  $p$ , что, согласно приведенным ранее рассуждениям некорректно.

Этой и ряда других проблем можно избежать при использовании метода, основанного на теореме 5.1

## 6.11 Представление повторных стохастических интегралов с помощью полиномов Эрмита

В предыдущих разделах данной главы рассматривалась общая теория аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Однако в некоторых частных случаях можно получить точные представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде полиномов конечных степеней от одной стандартной гауссовой случайной величины [117].

Рассмотрим семейство производящих многочленов  $H_n(x, y)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) вида

$$H_n(x, y) = \frac{d^n}{d\alpha^n} \exp\left(\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y\right) \Big|_{\alpha=0}.$$

Известно, что многочлены  $H_n(x, y)$  связаны с многочленами Эрмита  $h_n(x)$  формулой  $H_n(x, y) = (y/2)^{n/2} h_n(x/\sqrt{2y})$ . Используя рекуррентные формулы [88]

$$\frac{dh_n}{dz}(z) = 2nh_{n-1}(z); \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$h_n(z) = 2zh_{n-1}(z) - 2(n-1)h_{n-2}(z); \quad n = 2, 3, \dots,$$

нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения для многочленов  $H_n(x, y)$ :

$$\frac{\partial H_n}{\partial x}(x, y) = nH_{n-1}(x, y); \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.209)$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y) = \frac{n}{2y}H_n(x, y) - \frac{nx}{2y}H_{n-1}(x, y); \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.210)$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y) = -\frac{n(n-1)}{2}H_{n-2}(x, y); \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.211)$$

Из (6.209)–(6.211) следует, что

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(x, y) = 0; \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.212)$$

По формуле Ито с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} H_n(f_t, t) - H_n(0, 0) &= \int_0^t \frac{\partial H_n}{\partial x}(f_s, s) df_s + \\ &+ \int_0^t \left( \frac{\partial H_n}{\partial y}(f_s, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(f_s, s) \right) ds, \end{aligned} \quad (6.213)$$

где  $f_t \in \Re^1$  — стандартный скалярный винеровский процесс. С учетом (6.212) и того, что  $H_n(0, 0) = 0; n = 2, 3, \dots$  из (6.213) с вероятностью 1 находим

$$H_n(f_t, t) = \int_0^t n H_{n-1}(f_s, s) df_s; \quad n = 2, 3, \dots$$

Далее по индукции нетрудно получить с вероятностью 1 следующее соотношение:

$$I_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \dots \int_0^{t_2} df_{t_1} \dots df_{t_n} = \frac{1}{n!} H_n(f_t, t); \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.214)$$

Рассмотрим одно из обобщений [117] формулы (6.214):

$$J_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi_{t_n} \dots \int_0^{t_2} \psi_{t_1} df_{t_1} \dots df_{t_n} = \frac{1}{n!} H_n(\delta_t, \Delta_t) \text{ с. в. } 1; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.215)$$

где

$$\delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi(s) df_s, \quad \Delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi^2(s) ds,$$

а  $\psi(s) : [0, t] \rightarrow \Re^1$  — непрерывная функция.

Нетрудно проверить, что первые семь формул из семейства (6.215) имеют вид

$$\begin{aligned} J_t^{(1)} &= \frac{1}{1!} \delta_t, \\ J_t^{(2)} &= \frac{1}{2!} (\delta_t^2 - \Delta_t), \\ J_t^{(3)} &= \frac{1}{3!} (\delta_t^3 - 3\delta_t \Delta_t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_t^{(4)} &= \frac{1}{4!} (\delta_t^4 - 6\delta_t^2\Delta_t + 3\Delta_t^2), \\
 J_t^{(5)} &= \frac{1}{5!} (\delta_t^5 - 10\delta_t^3\Delta_t + 15\delta_t\Delta_t^2), \\
 J_t^{(6)} &= \frac{1}{6!} (\delta_t^6 - 15\delta_t^4\Delta_t + 45\delta_t^2\Delta_t^2 - 15\Delta_t^3), \\
 J_t^{(7)} &= \frac{1}{7!} (\delta_{T,t}^7 - 21\delta_{T,t}^5\Delta_{T,t} + 105\delta_{T,t}^3\Delta_{T,t}^2 - 105\delta_{T,t}\Delta_{T,t}^3),
 \end{aligned}$$

где равенства справедливы с вероятностью 1.

Докажем с вероятностью 1 следующее соотношение для повторных стохастических интегралов Стратоновича [148]:

$$I_t^{*(n)} = \frac{1}{n!} f_t^n, \quad I_t^{*(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{*t} \dots \int_0^{*t_2} df_{t_1} \dots df_{t_n}. \quad (6.216)$$

Сначала рассмотрим случай  $n = 2$ . По теореме 3.5

$$I_t^{*(2)} = I_t^{(2)} + \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \text{ с в. 1.} \quad (6.217)$$

Из соотношения (6.214) при  $n = 2$  следует, что с вероятностью 1

$$I_t^{(2)} = \frac{1}{2} f_t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t dt_1. \quad (6.218)$$

Подставляя (6.218) в (6.217), с вероятностью 1 имеем

$$I_t^{*(2)} = \frac{f_t^2}{2!}.$$

Таким образом, формула (6.216) справедлива при  $n = 2$ .

Предположим, что формула (6.216) справедлива при  $n = k$ , т.е.

$$I_t^{*(k)} = \frac{f_t^k}{k!}$$

с вероятностью 1, и рассмотрим

$$\int_0^{*t} I_\tau^{*(k)} df_\tau \stackrel{\text{def}}{=} I_t^{*(k+1)}.$$

По леммам 1.2, 1.5 и предположению индукции с в. 1 получим

$$I_t^{*(k+1)} = \int_0^t \frac{f_\tau^k}{k!} df_\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f_\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau. \quad (6.219)$$

Введем случайный процесс  $\xi_t$  вида

$$\xi_t = \frac{f_t^{k+1}}{(k+1)!}$$

и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал:

$$d\xi_t = \frac{1}{2} \frac{f_t^{k-1}}{(k-1)!} dt + \frac{f_t^k}{k!} df_t. \quad (6.220)$$

Поскольку  $\xi_0 = 0$ , то из (6.219) и (6.220) следует, что с вероятностью 1 выполняется равенство:

$$I_t^{*(k+1)} = \frac{f_t^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Таким образом, соотношение (6.216) доказано по индукции.

Нетрудно видеть, что формула (6.216) допускает следующее обобщение:

$$J_t^{*(n)} = \frac{1}{n!} \delta_t^n, \quad (6.221)$$

где

$$J_t^{*(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{*t} \psi(t_n) \dots \int_0^{*t_2} \psi(t_1) df_{t_1} \dots df_{t_n}, \quad \delta_t = \int_0^t \psi(s) df_s,$$

а  $\psi(s) : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^1$  — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

## 6.12 Использование интегральных сумм для аппроксимации повторных стохастических интегралов

### Ито

Отметим, что в ряде работ (см., например, [76], [196]) предлагалось использовать различные варианты интегральных сумм для аппроксимации повторных стохастических интегралов. В данном разделе рассмотрим простейшую из модификаций метода интегральных сумм.

Пусть функции  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$  удовлетворяют на промежутке  $[t, T]$  условиям Липшица с постоянными  $C_l$ , т. е.

$$|\psi_l(\tau_1) - \psi_l(\tau_2)| \leq C_l |\tau_1 - \tau_2| \text{ при всех } \tau_1, \tau_2 \in [t, T]. \quad (6.222)$$

Тогда согласно лемме 5.1 с в. 1 справедливо равенство

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в формулу (5.8).

Будем искать аппроксимацию повторного стохастического интеграла. Ито  $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$  в виде

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}. \quad (6.223)$$

Соотношение (6.223) может быть переписано в следующей форме:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \sqrt{\Delta \tau_{j_l}} \psi_l(\tau_{j_l}) \mathbf{u}_{j_l}^{(i_l)}, \quad (6.224)$$

где  $\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}) / \sqrt{\Delta \tau_j}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые при  $i \neq 0$  и различных  $j$  стандартные гауссовские случайные величины,  $\mathbf{u}_j^{(0)} = \sqrt{\Delta \tau_j}$ .

Пусть

$$\tau_j = t + j \Delta \quad (j = 0, 1, \dots, N), \quad \tau_N = T, \quad \Delta > 0. \quad (6.225)$$

Тогда формула (6.224) примет вид

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \Delta^{k/2} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(t + j_l \Delta) \mathbf{u}_{j_l}^{(i_l)}, \quad (6.226)$$

где  $\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{w}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{w}_{t+j\Delta}^{(i)}) / \sqrt{\Delta}$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

**Теорема 6.2.** Пусть функции  $\psi_l(\tau)$ ;  $l = 1, \dots, k$  удовлетворяют условию Липшица (6.222), а  $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$  — разбиение промежутка  $[t, T]$  вида (6.225). Тогда при достаточно малой величине  $T - t$  существует такая постоянная  $H_k < \infty$ , что выполняется следующая оценка:

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N)^2 \right\} \leq \frac{H_k(T-t)^2}{N}.$$

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что при достаточно малой величине  $T - t$  найдется такая постоянная  $C_k$ , что

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N)^2 \right\} \leq C_k \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N)^2 \right\}.$$

Заметим, что

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N = \sum_{j=1}^3 S_j^N,$$

где

$$\begin{aligned} S_1^N &= \sum_{j_1=0}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_2(t_2) \int_{\tau_{j_1}}^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}; \\ S_2^N &= \sum_{j_1=0}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\psi_2(t_2) - \psi_2(\tau_{j_1})) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}; \\ S_3^N &= \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_2(\tau_{j_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_2)} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} (\psi_1(t_1) - \psi_1(\tau_{j_2})) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left( \mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N)^2 \right\} \right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^3 \left( \mathbb{M} \left\{ (S_j^N)^2 \right\} \right)^{1/2}.$$

Оценим с помощью моментных свойств стохастических интегралов (см. главу 1) величины  $\mathbb{M} \left\{ (S_i^N)^2 \right\}$ ;  $i = 1, 2, 3$ . Для этого рассмотрим четыре случая.

1.  $i_1, i_2 \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} &\leq 2^{-1} \Delta(T-t) \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_2^2(s) \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_2^N)^2 \right\} &\leq 6^{-1} \Delta^2(T-t)^2 (C_2)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_3^N)^2 \right\} &\leq 6^{-1} \Delta^2(T-t)^2 (C_1)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_2^2(s) \right\}. \end{aligned}$$

2.  $i_1 \neq 0, i_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} &\leq 2^{-1} \Delta(T-t)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_2^2(s) \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_2^N)^2 \right\} &\leq 3^{-1} \Delta^2(T-t)^3 (C_2)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_3^N)^2 \right\} &\leq 3^{-1} \Delta^2(T-t)^3 (C_1)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_2^2(s) \right\}. \end{aligned}$$

3.  $i_2 \neq 0, i_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} &\leq 3^{-1} \Delta^2 (T-t) \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_2^2(s) \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_2^N)^2 \right\} &\leq 3^{-1} \Delta^2 (T-t)^3 (C_2)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_3^N)^2 \right\} &\leq 8^{-1} \Delta^2 (T-t)^3 (C_1)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_2^2(s) \right\}. \end{aligned}$$

4.  $i_1 = i_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} &\leq 4^{-1} \Delta^2 (T-t)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_2^2(s) \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_2^N)^2 \right\} &\leq 4^{-1} \Delta^2 (T-t)^4 (C_2)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_3^N)^2 \right\} &\leq 16^{-1} \Delta^2 (T-t)^4 (C_1)^2 \max_{s \in [t,T]} \left\{ \psi_2^2(s) \right\}. \end{aligned}$$

Согласно полученным оценкам и условию (6.222) имеем

$$\mathbb{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N)^2 \right\} \leq H_k (T-t) \Delta = \frac{H_k (T-t)^2}{N},$$

где  $H_k < \infty$ . Теорема доказана.  $\square$

Нетрудно показать, что справедливо следующее соотношение:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2N}, \quad (6.227)$$

где  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ , а  $I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N}$  — аппроксимация стохастического интеграла  $I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)}$  вида (6.1), полученная по формуле (6.226).

Напомним, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, сходится в среднеквадратическом смысле гораздо медленнее, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье (см. (6.227), (6.143), (6.105) и табл. 6.42, 6.45).

## 6.13 Сравнение эффективности рядов Фурье–Лежандра, тригонометрических рядов и интегральных сумм при аппроксимации стохастических интегралов

В данном разделе сравним эффективность применения полиномиальных и тригонометрических функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов. Кроме того, сравним эффективность использования

Таблица 6.42. Значения  $q_{\text{trig}}$ ,  $q_{\text{pol}}$ ,  $T_{\text{trig}}^*$ ,  $T_{\text{pol}}^*$ .

$T - t$	$2^{-5}$	$2^{-6}$	$2^{-7}$	$2^{-8}$	$2^{-9}$	$2^{-10}$
$q_{\text{trig}}$	3	4	7	14	27	53
$q_{\text{pol}}$	5	9	17	33	65	129
$T_{\text{trig}}^*$ , с	4	5	7	10	16	30
$T_{\text{pol}}^*$ , с	3	4	7	13	23	45

методов, основанных на кратных рядах Фурье и кратных интегральных суммах.

Рассмотрим стохастические интегралы  $I_{0T,t}^{(1)}$ ,  $I_{00T,t}^{(21)}$ , которые могут встретиться, например, при реализации сильного численного метода порядка точности 1.0 для СДУ Ито (см. главу 7). Аппроксимируем их сначала с помощью тригонометрической системы функций (формулы (6.135), (6.137)), а затем с помощью полиномов Лежандра (формулы (6.84), (6.87)). Число  $q = q_{\text{trig}}$  в первом случае выберем из условия

$$\frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q_{\text{trig}}} \frac{1}{r^2} \right) \leq \varepsilon, \quad (6.228)$$

а число  $q = q_{\text{pol}}$  во втором случае — из условия

$$\frac{(T-t)^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q_{\text{pol}}} \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq \varepsilon, \quad (6.229)$$

где  $q_{\text{trig}}$  и  $q_{\text{pol}}$  — минимальные натуральные числа, удовлетворяющие условиям (6.228) и (6.229) соответственно.

В табл. 6.42 приведены значения  $q_{\text{trig}}$ ,  $q_{\text{pol}}$  при  $\varepsilon = (T-t)^3$ ,  $T-t = 2^{-j}$ ;  $j = 5, 6, \dots, 10$ . Значения  $T_{\text{trig}}^*$ ,  $T_{\text{pol}}^*$  соответствуют компьютерному времени, затраченному на 200 независимых моделирований интегралов  $I_{0T,t}^{(1)}$ ,  $I_{00T,t}^{(21)}$  по формулам (6.135), (6.137) при  $q = q_{\text{trig}}$  и по формулам (6.84), (6.87) при  $q = q_{\text{pol}}$ . При этом каждое фиксированное моделирование по формулам (6.135), (6.137) и (6.84), (6.87) отвечает одной и той же реализации последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Отметим, что формула (6.137) использовалась здесь без слагаемого

$$\frac{1}{2}(T-t) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\alpha_q} \left( \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \xi_q^{(i_2)} \right),$$

на численное моделирование которого очевидно требуется определенное компьютерное время.

Из результатов, приведенных в табл. 6.42, видно, что при  $T - t > 2^{-7}$  полиномиальная система оказывается чуть лучше тригонометрической по затратам компьютерного времени. Однако уже при  $T - t \leq 2^{-8}$  использование тригонометрической системы дает незначительный выигрыш. Это очевидно связано с тем, что значения чисел  $q_{\text{pol}}$  возрастают настолько быстрее значений чисел  $q_{\text{trig}}$  при уменьшении  $T - t$ , что, несмотря на более простой вид формулы (6.87) по сравнению с (6.137), вычислительные затраты в случае тригонометрической системы функций оказываются меньше, чем в случае полиномиальной системы при  $T - t \leq 2^{-8}$ .

Картина кардинально меняется при рассмотрении совокупностей более сложных стохастических интегралов.

Рассмотрим стохастические интегралы

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)}, I_{1_{T,t}}^{(i_1)}, I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)}, I_{000_{T,t}}^{(i_3 i_2 i_1)}; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m, \quad (6.230)$$

которые могут встретиться, например, при реализации сильного численного метода порядка точности 1.5 (см. главу 7).

Приведем численный результат, который позволяет видеть, что при моделировании набора стохастических интегралов, необходимого для реализации сильного численного метода порядка точности 1.5 (см. главу 7), полиномиальная система функций дает выигрыш более чем в 2 раза в компьютерном времени в сравнении с тригонометрической системой функций, по крайней мере, при не очень малых  $T - t$  (заметим, что в данном разделе также будет рассмотрена достаточно общая ситуация, в которой полиномиальная система функций даст выигрыш в 3 раза по сравнению с тригонометрической в рамках рассматриваемого вопроса).

Сначала рассмотрим упрощенный, по сравнению с (6.230), набор стохастических интегралов  $I_{00_{T,t}}^{(21)}, I_{000_{T,t}}^{(321)}$ . В случае полиномиальной системы функций будем искать числа  $q, q_1$  в аппроксимациях  $I_{00_{T,t}}^{(21)q}, I_{000_{T,t}}^{(321)q_1}$ , определяемых формулами (6.87), (6.116), исходя из следующих условий:

$$\frac{(T - t)^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq \varepsilon, \quad (6.231)$$

$$(T - t)^3 \left( \frac{1}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} \frac{(C_{kji})^2}{(T - t)^3} \right) \leq \varepsilon, \quad (6.232)$$

где

$$C_{kji} = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8} (T - t)^{3/2} \bar{C}_{kji};$$

Таблица 6.43. Значения  $q, q_1, T_{100}^*, \tilde{T}_{100}^*$  (полиномиальная система).

$T - t$	0.08222	0.05020	0.02310	0.01956
$q$	19	51	235	328
$q_1$	1	2	5	6
$T_{100}^*, \text{ с}$	5	12	52	73
$\tilde{T}_{100}^*, \text{ с}$	13.5	36	181	225

Таблица 6.44. Значения  $q, q_1, T_{100}^*, \tilde{T}_{100}^*$  (тригонометрическая система).

$T - t$	0.08222	0.05020	0.02310	0.01956
$q$	8	21	96	133
$q_1$	1	1	3	4
$T_{100}^*, \text{ с}$	12	24.5	105	148
$\tilde{T}_{100}^*, \text{ с}$	44	88	411	660

$$\bar{C}_{kji} = \int_{-1}^1 P_k(z) \int_{-1}^z P_j(y) \int_{-1}^y P_i(x) dx dy dz;$$

$P_i(x)$  — полином Лежандра.

В случае тригонометрической системы функций воспользуемся формулами (6.137), (6.138) при  $i_3 = 3, i_2 = 2, i_1 = 1$ , а числа  $q, q_1$  будем искать из условий:

$$M \left\{ \left( I_{00T,t}^{(i_2 i_1)} - I_{00T,t}^{(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \leq \varepsilon, \quad (6.233)$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{000T,t}^{(i_3 i_2 i_1)} - I_{000T,t}^{(i_3 i_2 i_1)q_1} \right)^2 \right\} &= (T-t)^3 \left\{ \frac{4}{45} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{r=1}^{q_1} \frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{55}{32\pi^4} \sum_{r=1}^{q_1} \frac{1}{r^4} - \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{q_1} \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2l^2}{r^2l^2(r^2 - l^2)^2} \right\} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.234)$$

В табл. 6.43 приведены минимальные значения чисел  $q, q_1$ , удовлетворяющие условиям (6.231), (6.232) при различных значениях  $T-t$  ( $\varepsilon = (T-t)^4$ ). В табл. 6.44 даны значения тех же чисел для условий (6.233), (6.234) при  $\varepsilon = (T-t)^4$ .

Смоделируем независимо по 100 раз для различных значений  $T - t$  набор стохастических интегралов  $I_{00T,t}^{(21)}, I_{000T,t}^{(321)}$ , определяемых с помощью формул (6.87), (6.116), полученных с применением полиномиальной системы функций. В табл. 6.43 приведены значения компьютерного времени  $T_{100}^*$ , затраченного на решение данной задачи при различных значениях  $T - t$ . Повторим данный численный эксперимент для аппроксимаций (6.137), (6.138) при  $i_3 = 3, i_2 = 2, i_1 = 1$ , полученных с помощью тригонометрической системы функций. Его результаты помещены в табл. 6.44.

Отметим, что здесь и далее в настоящем разделе формулы (6.137) и (6.138) использовались без слагаемых

$$\frac{1}{2}(T - t) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\alpha_q} \left( \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \xi_q^{(i_2)} \right)$$

и

$$(T - t)^{3/2} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \left( \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \xi_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left( \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \mu_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) \right)$$

соответственно, что подкрепляет отмеченные в табл. 6.43 и 6.44 численные результаты.

Сравнивая полученные результаты, приходим к выводу, что в рамках численного эксперимента при моделировании соответствующей совокупности стохастических интегралов полиномиальная система функций дает выигрыш в два раза по компьютерному времени в сравнении с тригонометрической системой функций.

Выпишем в явном виде аппроксимации  $I_{000T,t}^{(123)q}$  (6.117) при  $q = 1, 2, 5, 6$ , учитывая их практическую важность (согласно результатам главы 5, приведенные ниже формулы соответствуют аппроксимациям  $I_{000T,t}^{*(i_1i_2i_3)q}$  при произвольных  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$  и  $q = 1, 2, 5, 6$  при замене в них верхнего индекса (123) на индекс  $(i_1i_2i_3)$  и верхних индексов (1), (2), (3) на индексы  $(i_1), (i_2), (i_3)$  соответственно):

$$I_{000T,t}^{(123)1} = (T - t)^{3/2} \left[ \left( \left( \frac{1}{6} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \frac{1}{20} \zeta_1^{(1)} \zeta_1^{(2)} \right) \zeta_0^{(3)} + \right. \\ \left. + \left( \left( \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{10} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \frac{1}{20} \zeta_0^{(1)} \zeta_1^{(2)} \right) \zeta_1^{(3)} \right],$$

$$\begin{aligned}
 I_{000_{T,t}}^{(123)2} = & (T-t)^{3/2} \left[ \left\{ \left( \frac{1}{6} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{12\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \right. \right. \\
 & + \left( \frac{1}{20} \zeta_1^{(1)} - \frac{1}{4\sqrt{15}} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \\
 & + \left. \left. \left( -\frac{1}{6\sqrt{5}} \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{4\sqrt{15}} \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{84} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} \right\} \zeta_0^{(3)} + \right. \\
 & + \left\{ \left( \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{10} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \left( \frac{1}{20} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{14\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
 & + \left. \left. \left( -\frac{1}{4\sqrt{15}} \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{7\sqrt{5}} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} \right\} \zeta_1^{(3)} + \right. \\
 & + \left\{ \left( \frac{1}{12\sqrt{5}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{42} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \left( \frac{1}{4\sqrt{15}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{14\sqrt{5}} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{84} \zeta_0^{(1)} \zeta_2^{(2)} \right\} \zeta_2^{(3)} \right], 
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{000_{T,t}}^{(123)5} = & I_{000_{T,t}}^{(123)2} + (T-t)^{3/2} \left[ \left\{ \frac{1}{10\sqrt{21}} \zeta_3^{(1)} \zeta_1^{(2)} + \right. \right. \\
 & + \left( -\frac{1}{4\sqrt{35}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{28\sqrt{5}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \\
 & + \left( -\frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}} \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{4\sqrt{35}} \zeta_2^{(1)} + \frac{1}{180} \zeta_3^{(1)} - \frac{1}{12\sqrt{7}} \zeta_4^{(1)} + \frac{1}{9\sqrt{77}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
 & + \left( -\frac{1}{21\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} + \frac{1}{12\sqrt{7}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{308} \zeta_4^{(1)} - \frac{1}{12\sqrt{11}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
 & + \left. \left. \left( -\frac{5}{36\sqrt{77}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{12\sqrt{11}} \zeta_4^{(1)} + \frac{1}{468} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \right\} \zeta_0^{(3)} + \right. \\
 & + \left\{ \frac{1}{20\sqrt{21}} \zeta_3^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \frac{1}{140} \zeta_4^{(1)} \zeta_1^{(2)} + \left( -\frac{1}{12\sqrt{5}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{14\sqrt{165}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \right. \\
 & + \left( \frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}} \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{3\sqrt{105}} \zeta_2^{(1)} - \frac{19}{220\sqrt{21}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
 & + \left( -\frac{1}{70} \zeta_1^{(1)} + \frac{23}{220\sqrt{21}} \zeta_3^{(1)} - \frac{8}{91\sqrt{33}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
 & + \left. \left. \left( -\frac{\sqrt{5}}{42\sqrt{33}} \zeta_2^{(1)} + \frac{37}{364\sqrt{33}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \right\} \zeta_1^{(3)} + \right. \\
 & + \left\{ \left( \frac{1}{84\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} - \frac{1}{154} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \right. 
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{180} \zeta_1^{(1)} - \frac{1}{55\sqrt{21}} \zeta_3^{(1)} - \frac{5\sqrt{3}}{364} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \\
& + \left( \frac{1}{28\sqrt{5}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{132} \zeta_2^{(1)} + \frac{1}{286\sqrt{5}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \\
& + \left( \frac{1}{12\sqrt{7}} \zeta_0^{(1)} - \frac{19}{220\sqrt{21}} \zeta_1^{(1)} + \frac{2}{2145} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{156\sqrt{77}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
& + \left( \frac{1}{308} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{572\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
& + \left\{ -\frac{1}{12\sqrt{11}} \zeta_0^{(1)} + \frac{37}{364\sqrt{33}} \zeta_1^{(1)} - \frac{1}{78\sqrt{77}} \zeta_3^{(1)} - \frac{1}{18564} \zeta_5^{(1)} \right\} \zeta_4^{(3)} + \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{36\sqrt{77}} \zeta_3^{(1)} - \frac{1}{234} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \left( \frac{1}{21\sqrt{165}} \zeta_2^{(1)} - \frac{5}{364\sqrt{33}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{14\sqrt{165}} \zeta_1^{(1)} - \frac{37}{468\sqrt{385}} \zeta_3^{(1)} + \frac{2}{819\sqrt{5}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{9\sqrt{77}} \zeta_0^{(1)} - \frac{29}{234\sqrt{385}} \zeta_2^{(1)} + \frac{1}{156\sqrt{77}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{12\sqrt{11}} \zeta_0^{(1)} - \frac{8}{91\sqrt{33}} \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{156\sqrt{77}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{9282} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{468} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{819\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} - \frac{1}{18564} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_5^{(3)} \right\} + \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{20\sqrt{21}} \zeta_1^{(1)} - \frac{1}{90} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{36\sqrt{77}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{10\sqrt{21}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{12\sqrt{105}} \zeta_2^{(1)} - \frac{1}{55\sqrt{21}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{4\sqrt{35}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{12\sqrt{5}} \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{186\sqrt{5}} \zeta_3^{(1)} - \frac{37}{468\sqrt{385}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{180} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{372\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} + \frac{2}{2145} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( -\frac{1}{12\sqrt{7}} \zeta_0^{(1)} + \frac{23}{220\sqrt{21}} \zeta_1^{(1)} - \frac{4}{2145} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{156\sqrt{77}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left( -\frac{5}{36\sqrt{77}} \zeta_0^{(1)} + \frac{19\sqrt{5}}{468\sqrt{77}} \zeta_2^{(1)} - \frac{1}{78\sqrt{77}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \right\} \zeta_3^{(3)} + \\
& + \left\{ \frac{1}{84\sqrt{5}} \zeta_4^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \left( -\frac{1}{12\sqrt{105}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{21\sqrt{165}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} - \frac{1}{132} \zeta_4^{(1)} \zeta_2^{(2)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( -\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{3\sqrt{105}}\zeta_1^{(1)} - \frac{1}{372\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)} - \frac{29}{234\sqrt{385}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
 & + \left( -\frac{1}{21\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{66}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{572\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
 & + \left( -\frac{\sqrt{5}}{42\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)} + \frac{19\sqrt{5}}{468\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)} - \frac{1}{819\sqrt{5}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \Big\} \zeta_2^{(3)} \Big] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{000T,t}^{(123)6} = & I_{000T,t}^{(123)5} + (T-t)^{3/2} \left[ \left\{ \left( \frac{1}{132\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)} - \frac{1}{330}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \right. \right. \\
 & + \left( \frac{5}{132\sqrt{273}}\zeta_3^{(1)} - \frac{1}{30\sqrt{429}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \\
 & + \left( \frac{5}{462\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)} - \frac{19}{924\sqrt{65}}\zeta_4^{(1)} + \frac{1}{561\sqrt{5}}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \\
 & + \left( \frac{5}{66\sqrt{273}}\zeta_1^{(1)} - \frac{5}{396\sqrt{13}}\zeta_3^{(1)} + \frac{\sqrt{143}}{8415\sqrt{7}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
 & + \left( \frac{5}{132\sqrt{13}}\zeta_0^{(1)} - \frac{2\sqrt{5}}{231\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)} + \frac{1}{476\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)} + \frac{1}{9690}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
 & + \left( \frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_0^{(1)} - \frac{4}{15\sqrt{429}}\zeta_1^{(1)} + \frac{1}{510\sqrt{1001}}\zeta_3^{(1)} + \frac{1}{5814\sqrt{13}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} + \\
 & + \left. \left. \left( \frac{1}{660}\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{1122\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{19380}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} \right\} \zeta_6^{(3)} + \right. \\
 & + \left\{ \left( -\frac{1}{22\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)} + \frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_5^{(1)} + \frac{1}{660}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
 & + \left. \left. \left( \frac{5}{132\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)} - \frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_5^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \right\} \zeta_0^{(3)} + \right. \\
 & + \left\{ \left( -\frac{5}{44\sqrt{273}}\zeta_1^{(1)} + \frac{5}{198\sqrt{13}}\zeta_3^{(1)} - \frac{113}{3060\sqrt{1001}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
 & + \left. \left. \left( \frac{5}{2132\sqrt{273}}\zeta_1^{(2)} - \frac{5}{396\sqrt{13}}\zeta_3^{(2)} + \frac{61}{3060\sqrt{1001}}\zeta_5^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \right\} \zeta_3^{(3)} + \right. \\
 & + \left\{ \left( -\frac{1}{22\sqrt{13}}\zeta_0^{(1)} + \frac{59}{924\sqrt{65}}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{238\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)} - \frac{1}{19380}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
 & + \left. \left. \left( \frac{1}{132\sqrt{13}}\zeta_0^{(2)} - \frac{19}{924\sqrt{65}}\zeta_2^{(2)} + \frac{1}{476\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \right\} \zeta_4^{(3)} + \right. 
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left( -\frac{5}{44\sqrt{273}}\zeta_3^{(1)} + \frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{143}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
& + \left. \left( \frac{5}{66\sqrt{273}}\zeta_3^{(2)} - \frac{4}{15\sqrt{429}}\zeta_5^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \right\} \zeta_1^{(3)} + \\
& + \left\{ \left( -\frac{5}{231\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)} + \frac{59}{924\sqrt{65}}\zeta_4^{(1)} - \frac{1}{1122\sqrt{5}}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
& + \left. \left( \frac{5}{462\sqrt{13}}\zeta_2^{(2)} - \frac{2\sqrt{5}}{231\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \right\} \zeta_2^{(3)} + \\
& + \left\{ \left( -\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_0^{(1)} + \frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{143}}\zeta_1^{(1)} - \frac{113}{3060\sqrt{1001}}\zeta_3^{(1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2907\sqrt{13}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{30\sqrt{429}}\zeta_1^{(2)} + \frac{\sqrt{143}}{8415\sqrt{7}}\zeta_3^{(2)} + \frac{1}{5814\sqrt{13}}\zeta_5^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \right\} \zeta_5^{(3)} \Big].
\end{aligned}$$

Покажем, что на практике в некоторых ситуациях преимущество полиномиальной системы функций перед тригонометрической по компьютерному времени на моделирование совокупностей повторных стохастических интегралов оказывается еще более выразительным.

Дело в том, что при решении практических задач часто приходится на каждом шаге интегрирования моделировать по несколько однотипных стохастических интегралов, взятых при различных сочетаниях верхних индексов. При этом полезно "сокращать" общее число моделируемых интегралов с помощью соотношений

$$I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} + I_{00T,t}^{(i_2 i_1)} = I_{0T,t}^{(i_1)} I_{0T,t}^{(i_2)} \text{ с в. 1,}$$

$$I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} + I_{000T,t}^{(i_1 i_3 i_2)} + I_{000T,t}^{(i_2 i_1 i_3)} + I_{000T,t}^{(i_2 i_3 i_1)} + I_{000T,t}^{(i_3 i_2 i_1)} + I_{000T,t}^{(i_3 i_1 i_2)} = I_{0T,t}^{(i_1)} I_{0T,t}^{(i_2)} I_{0T,t}^{(i_3)} \text{ с в. 1,}$$

где  $i_1, i_2, i_3$  — попарно различны;  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ .

В соответствии со сказанным, рассмотрим следующую совокупность стохастических интегралов:

$$I_{0T,t}^{(i)}, \quad I_{1T,t}^{(i)}, \quad I_{00T,t}^{(12)}, \quad I_{00T,t}^{(13)}, \quad I_{00T,t}^{(23)}, \quad I_{000T,t}^{(123)}, \quad I_{000T,t}^{(132)}, \quad I_{000T,t}^{(213)}, \quad I_{000T,t}^{(231)}, \quad I_{000T,t}^{(312)}, \quad (6.235)$$

где  $i = 1, 2, 3$ .

Таблица 6.45. Значения  $q$  и  $T_{\text{sum}}^*$  (метод интегральных сумм).

$T - t$	$2^{-5}$	$2^{-6}$	$2^{-7}$
$q$	16	32	64
$T_{\text{sum}}^*, \text{ с}$	26	93	391

Смоделируем независимо по 100 раз при различных значениях  $T - t$  набор стохастических интегралов (6.235) с использованием формул (6.84), (6.85), (6.87), (6.116). В табл. 6.43 приведены значения времени  $\tilde{T}_{100}^*$ , затраченного на решение данной задачи при различных значениях  $T - t$ . Повторим данный численный эксперимент с помощью аппроксимаций (6.135)–(6.138). Его результаты помещены в табл. 6.44.

Сравнивая полученные численные результаты можно заметить, что в данном случае полиномиальная система функций дает выигрыш в 3 раза по компьютерному времени при моделировании совокупности повторных стохастических интегралов.

Отметим, что в набор (6.230), вообще говоря, входит  $m^3 + m^2 + 2m$  различных повторных стохастических интегралов. При  $m > 3$  число  $m^3 + m^2 + 2m$  может оказаться существенно большим, чем в случае (6.235) ( $m = 3$ ; в (6.235) также не учтены повторные стохастические интегралы с двумя совпадающими верхними индексами из трех) и, по предположению автора, преимущество полиномиальной системы функций окажется еще более существенным. Этот же эффект можно ожидать при рассмотрении более сложных, чем (6.230), совокупностей повторных стохастических интегралов, необходимых для построения более точных сильных численных методов для СДУ Ито (см. главу 7).

По-видимому, отмеченная тенденция связана с тем, что полиномиальная система функций имеет существенное преимущество перед тригонометрической при аппроксимации повторных стохастических интегралов, в которых не все весовые функции вида  $\psi(\tau) = (t - \tau)^l$ ;  $l = 0, 1, 2, \dots$  тождественно равны 1, что соответствует  $l \geq 1$  в приведенном представлении. Для понимания этого достаточно сравнить формулы (6.85), (6.86), (6.88), (6.89), полученные с помощью полиномов Лежандра, с их аналогами (6.136), (6.141), (6.140), (6.139), полученными с помощью тригонометрической системы функций.

В заключение покажем, что по вычислительным затратам на моделирование совокупности повторных стохастических интегралов метод, осно-

ванный на кратных рядах Фурье, вне конкуренции перед методом, основанным на кратных интегральных суммах.

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученные с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах:

$$I_{0_{T,t}}^{(1)q} = \sqrt{\Delta} \sum_{j=0}^{q-1} \xi_j^{(1)}, \quad (6.236)$$

$$I_{00_{T,t}}^{(21)q} = \Delta \sum_{j=0}^{q-1} \xi_j^{(2)} \sum_{i=0}^{j-1} \xi_i^{(1)}, \quad (6.237)$$

где

$$\xi_j^{(i)} = \frac{\mathbf{f}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{f}_{t+j\Delta}^{(i)}}{\sqrt{\Delta}} \quad (i = 1, 2)$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины,

$$\Delta = \frac{T-t}{q},$$

$I_{00_{T,t}}^{(21)q}$ ,  $I_{0_{T,t}}^{(1)q}$  — аппроксимации интегралов  $I_{00_{T,t}}^{(21)}$ ,  $I_{0_{T,t}}^{(1)}$ . Число  $q$ , входящее в (6.236), (6.237), выбираем из условия

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{T,t}}^{(21)} - I_{00_{T,t}}^{(21)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2q} \leq (T-t)^3.$$

Выполним по 200 независимых моделей совокупности стохастических интегралов  $I_{00_{T,t}}^{(21)}$ ,  $I_{0_{T,t}}^{(1)}$  с помощью формул (6.236), (6.237) при  $T-t = 2^{-j}$ ;  $j = 5, 6, 7$ . В табл. 6.45 приведено время  $T_{\text{sum}}^*$ , которое потребовалось для выполнения данной задачи.

Сравнивая табл. 6.42 и 6.45 приходим к выводу, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, уже при  $T-t = 2^{-7}$  более, чем в 50 раз хуже по компьютерному времени на моделирование совокупности стохастических интегралов  $I_{00_{T,t}}^{(21)}$ ,  $I_{0_{T,t}}^{(1)}$ , чем метод, основанный на кратных рядах Фурье. Кроме этого, метод, основанный на кратных интегральных суммах, оперирует малыми величинами  $\Delta = (T-t)/q$  (величина  $T-t$  без дополнительного дробления уже является достаточно малой, поскольку играет роль шага интегрирования в численных методах для СДУ Ито (см. главу 7)).

Приведенные численные эксперименты позволяют получить лишь некоторое поверхностное представление о "хороших" и "плохих" численных методах, однако вырисовывается вполне определенная картина.

## 6.14 Представления повторных стохастических интегралов как решений систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Г.Н. Мильштейном [76] рассмотрен подход к численному моделированию повторных стохастических интегралов, основанный на их представлении в виде систем линейных СДУ Ито. Рассмотрим данный подход на примере совокупности повторных стохастических интегралов Ито вида

$$I_{0s,t}^{(i_1)} = \int_t^s d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}, \quad I_{00s,t}^{(i_1 i_2)} = \int_t^s \int_t^\tau d\mathbf{f}_\theta^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)}, \quad (6.238)$$

где  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ ;  $0 \leq t < s \leq T$ ;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  — независимые стандартные винеровские процессы.

Далее имеем следующее представление:

$$d \begin{pmatrix} I_{0s,t}^{(i_1)} \\ I_{00s,t}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{0s,t}^{(i_1)} \\ I_{00s,t}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s^{(i_1)} \\ \mathbf{f}_s^{(i_2)} \end{pmatrix}. \quad (6.239)$$

В главе 11 будет показано (см. также [148]), что решение системы (6.239) может быть представлено в следующей интегральной форме:

$$\begin{pmatrix} I_{0s,t}^{(i_1)} \\ I_{00s,t}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \int_t^s \exp \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \mathbf{f}_\theta^{(i_2)}) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} \mathbf{f}_\theta^{(i_1)} \\ \mathbf{f}_\theta^{(i_2)} \end{pmatrix}, \quad (6.240)$$

где  $\exp(C)$  — матричная экспонента:

$$\exp(C) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!};$$

здесь  $C$  — квадратная матрица, а  $C^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$  — единичная матрица.

Численное моделирование правой части (6.240) является едва ли более простой задачей, чем совместное численное моделирование совокупности стохастических интегралов (6.238). Поэтому численное моделирование совокупности (6.238) приходится осуществлять в рамках данного подхода путем численного интегрирования системы линейных СДУ Ито (6.239). Эту процедуру можно реализовать, например, с помощью сильного метода Эйлера (см. главу 7).

Отметим, что выражения более точных сильных численных методов для системы (6.239) содержат повторные стохастические интегралы, численному моделированию которых и посвящен рассматриваемый подход (см. главы 7–9).

Пусть  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  — разбиение промежутка  $[t, s]$ , для которого  $\tau_j = t + j\Delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N$ ;  $\tau_N = s$ . Запишем явный метод Эйлера (см. главу 7) для системы линейных СДУ Ито (6.239):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{p+1}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_{p+1}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_p^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_p^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_p^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0^{(i_1)} = 0, \quad \mathbf{y}_0^{(i_1 i_2)} = 0, \quad (6.241)$$

где  $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(i_1)}$ ;  $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1 i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(i_1 i_2)}$  — аппроксимации повторных стохастических интегралов  $I_{0\tau_p,t}^{(i_1)}$ ,  $I_{00\tau_p,t}^{(i_1 i_2)}$ , полученные с помощью численной схемы (6.241);  $\Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ .

Итерируя выражение (6.241), имеем

$$\mathbf{y}_N^{(i_1)} = \sum_{l=0}^{N-1} \Delta \mathbf{f}_{\tau_l}^{(i_1)}, \quad \mathbf{y}_N^{(i_1 i_2)} = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{q-1} \Delta \mathbf{f}_{\tau_l}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_q}^{(i_2)}, \quad (6.242)$$

где  $\sum_{\emptyset} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ .

Формулы (6.242) являются ни чем иным, как формулами для аппроксимаций повторных стохастических интегралов (6.238), полученными с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах.

Таким образом, эффективность методов среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных интегральных суммах и численном интегрировании систем линейных СДУ Ито методом Эйлера, оказывается одинаковой.

## 6.15 Комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов

В данном разделе строится "гибрид" методов аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных рядах Фурье и кратных интегральных суммах (далее комбинированный метод). Показывается, что при сохранении определенного соотношения влияния одного метода на другой, удается добиться некоторых преимуществ перед "чистым" применением метода, основанного на кратных рядах Фурье. А именно, выяснено, что комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов позволяет заметно снизить общее количество коэффициентов кратных рядов Фурье, необходимых для аппроксимации рассматриваемого повторного стохастического интеграла. Однако, при этом уве-

личиваются вычислительные затраты на аппроксимацию указанного повторного стохастического интеграла.

### 6.15.1 Основные соотношения

Используя свойство аддитивности стохастического интеграла Ито можно записать:

$$I_{0T,t}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_{0,k}^{(i_1)} \text{ с в. 1,} \quad (6.243)$$

$$I_{1T,t}^{(i_1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \left( I_{1\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1)} - \Delta^{3/2} k \zeta_{0,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1,} \quad (6.244)$$

$$I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,k}^{(i_2)} \zeta_{0,l}^{(i_1)} + \sum_{k=0}^{N-1} I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)} \text{ с в. 1,} \quad (6.245)$$

$$\begin{aligned} I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} &= \Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{l-1} \zeta_{0,k}^{(i_3)} \zeta_{0,l}^{(i_2)} \zeta_{0,q}^{(i_1)} + \\ &+ \sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \left( \zeta_{0,k}^{(i_3)} I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} + \zeta_{0,l}^{(i_1)} I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)} \text{ с в. 1,} \end{aligned} \quad (6.246)$$

где

$$\zeta_{0,k}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ ;  $T - t = N\Delta$ ,  $\tau_k = t + k\Delta$ ,  $N < \infty$ , сумма по пустому множеству считается равной нулю.

В приведенных выше формулах рассматриваются стохастические интегралы Ито из семейства (6.1).

Подставляя в (6.244) соотношение

$$I_{1\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_{0,k}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_{1,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1,}$$

где  $\zeta_{0,k}^{(i_1)}$ ,  $\zeta_{1,k}^{(i_1)}$  – независимые стандартные гауссовские случайные величины, получаем:

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = -\Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \left( \frac{1}{2} + k \right) \zeta_{0,k}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \zeta_{1,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1.} \quad (6.247)$$

Аппроксимируем с помощью метода кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра интегралы  $I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)}$ ,  $I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)}$ ,  $I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)}$ , входящие в правые части (6.245), (6.246).

В результате получим

$$I_{00T,t}^{(i_1 i_2)N,q} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,k}^{(i_2)} \zeta_{0,l}^{(i_1)} + \sum_{k=0}^{N-1} I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)q}, \quad (6.248)$$

$$\begin{aligned} I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)N,q_1,q_2} &= \Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{l-1} \zeta_{0,k}^{(i_3)} \zeta_{0,l}^{(i_2)} \zeta_{0,q}^{(i_1)} + \\ &+ \sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \left( \zeta_{0,k}^{(i_3)} I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)q_1} + \zeta_{0,l}^{(i_1)} I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)q_1} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}, \end{aligned} \quad (6.249)$$

где аппроксимации  $I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)q}$ ,  $I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)q_1}$ ,  $I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}$  получены методом кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра.

В частности, при  $N = 2$  формулы (6.243), (6.247)–(6.249) преобразуются следующий вид:

$$I_{0T,t}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \left( \zeta_{0,0}^{(i_1)} + \zeta_{0,1}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1,} \quad (6.250)$$

$$I_{1T,t}^{(i_1)} = -\Delta^{3/2} \left( \frac{1}{2} \zeta_{0,0}^{(i_1)} + \frac{3}{2} \zeta_{0,1}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (\zeta_{1,0}^{(i_1)} + \zeta_{1,1}^{(i_1)}) \right) \text{ с в. 1,} \quad (6.251)$$

$$I_{00T,t}^{(i_1 i_2)2,q} = \Delta \left( \zeta_{0,1}^{(i_2)} \zeta_{0,0}^{(i_1)} + I_{00\tau_1,\tau_0}^{(i_1 i_2)q} + I_{00\tau_2,\tau_1}^{(i_1 i_2)q} \right), \quad (6.252)$$

$$\begin{aligned} I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)2,q_1,q_2} &= \sqrt{\Delta} \left( \zeta_{0,1}^{(i_3)} I_{00\tau_1,\tau_0}^{(i_1 i_2)q_1} + \zeta_{0,0}^{(i_1)} I_{00\tau_2,\tau_1}^{(i_2 i_3)q_1} \right) + I_{000\tau_1,\tau_0}^{(i_1 i_2 i_3)q_2} + \\ &+ I_{000\tau_2,\tau_1}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}, \end{aligned} \quad (6.253)$$

где  $\Delta = (T - t)/2$ ;  $\tau_k = t + k\Delta$ ;  $k = 0, 1, 2$ .

Отметим, что (6.243), (6.247)–(6.249) при  $N = 1$  переходят в формулы для численного моделирования указанных стохастических интегралов по

методу кратных рядов Фурье. Таким образом можно утверждать, что метод кратных рядов Фурье является частным случаем комбинированного метода при  $N = 1$ .

Отметим, что далее будет показано, что моделирование повторных стохастических интегралов  $I_{0T,t}^{(i_1)}, I_{1T,t}^{(i_1)}, I_{00T,t}^{(i_1 i_2)}, I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)}$  по формулам (6.250) – (6.253) приводит к резкому уменьшению общего числа коэффициентов Фурье, необходимых для аппроксимации этих интегралов методом, основанным на кратных рядах Фурье (теорема 5.1). Однако, платой за это является то, что в правую часть (6.252) входят 2 аппроксимации повторных стохастических интегралов 2 кратности, а в правую часть (6.253) входят по 2 аппроксимации повторных стохастических интегралов 2 и 3 кратности, каждая из которых должна быть получена методом, основанным на кратных рядах Фурье (теорема 5.1). Очевидно это ведет к увеличению вычислительных затрат на аппроксимацию.

### 6.15.2 Вычисление среднеквадратической погрешности

Вычислим среднеквадратические погрешности аппроксимаций, определяемых формулами (6.248), (6.249).

Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N,q} &\stackrel{\text{def}}{=} M\left\{\left(I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} - I_{00T,t}^{(i_1 i_2)N,q}\right)^2\right\} = \sum_{k=0}^{N-1} M\left\{\left(I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \\ &= N \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{l=1}^q \frac{1}{4l^2 - 1} \right) = \frac{(T-t)^2}{2N} \left( \frac{1}{2} - \sum_{l=1}^q \frac{1}{4l^2 - 1} \right), \end{aligned} \quad (6.254)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N,q_1,q_2} &\stackrel{\text{def}}{=} M\left\{\left(I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)N,q_1,q_2}\right)^2\right\} = \\ &= M\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\sqrt{\Delta} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} \left(I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)q_1}\right) + \right.\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.\left. + \zeta_{0,l}^{(i_1)} \left(I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)q_1}\right)\right) + I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}\right)\right)^2\right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} M\left\{\left(\sqrt{\Delta} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} \left(I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)q_1}\right) + \right.\right.\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \zeta_{0,l}^{(i_1)} \left( I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3) q_1} \right) \Big) + I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3) q_2} \Big)^2 \Big\} = \\
 & = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \Delta M \left\{ \left( \zeta_{0,k}^{(i_3)} \sum_{l=0}^{k-1} \left( I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2) q_1} \right) \right)^2 \right\} + \right. \\
 & \quad \left. + \Delta M \left\{ \left( \left( I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3) q_1} \right) \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,l}^{(i_1)} \right)^2 \right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} \right) = \\
 & = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \Delta \sum_{l=0}^{k-1} M \left\{ \left( I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2) q_1} \right)^2 \right\} + \right. \\
 & \quad \left. + k \Delta M \left\{ \left( I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3) q_1} \right)^2 \right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} \right) = \\
 & = \sum_{k=0}^{N-1} \left( 2k \Delta M \left\{ \left( I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2) q_1} \right)^2 \right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} \right) = \\
 & = \sum_{k=0}^{N-1} \left( 2k \Delta \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) + \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} \right) = \\
 & = \Delta^3 \frac{N(N-1)}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} = \\
 & = \frac{1}{2} (T-t)^3 \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} \right) \left( \frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)}, \quad (6.255)
 \end{aligned}$$

где

$$\delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} = M \left\{ \left( I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3) q_2} \right)^2 \right\};$$

$i_1 \neq i_2$  в (6.254) и не все индексы  $i_1, i_2, i_3$  в (6.255) одинаковы (в противном случае для моделирования интегралов  $I_{00T,t}^{(i_1 i_2)}$ ,  $I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)}$  существуют точные соотношения).

Пусть для определенности  $i_1, i_2, i_3$  в (6.255) попарно различны. Тогда

$$\delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} = \Delta^3 \left( \frac{1}{6} - \sum_{i,j,l=0}^{q_2} \frac{C_{lji}^2}{\Delta^3} \right), \quad (6.256)$$

Таблица 6.46.  $T - t = 0.1$ .

$N$	$q$	$q_1$	$q_2$	$M$
1	13	—	1	21
2	6	0	0	7
3	4	0	0	5

где

$$C_{lji} = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2l+1)}}{8} \Delta^{3/2} \bar{C}_{lji},$$

$$\bar{C}_{lji} = \int_{-1}^1 P_l(z) \int_{-1}^z P_j(y) \int_{-1}^y P_i(x) dx dy dz;$$

$P_i(x)$  – полином Лежандра.

Подставляя (6.256) в (6.255) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N,q_1,q_2} &= \frac{1}{2}(T-t)^3 \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} \right) \left( \frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) + \\ &+ \frac{(T-t)^3}{N^2} \left( \frac{1}{6} - \sum_{i,j,l=0}^{q_2} \frac{(2i+1)(2j+1)(2l+1)}{64} \bar{C}_{lji}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.257)$$

Отметим, что при  $N = 1$  формулы (6.254), (6.257) переходят в соответствующие формулы для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций интегралов  $I_{00T,t}^{(i_1 i_2)}$ ,  $I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)}$ , полученных методом кратных рядов Фурье-Лежандра.

### 6.15.3 Численные эксперименты

Рассмотрим моделирование интегралов  $I_{0T,t}^{(i_1)}$ ,  $I_{00T,t}^{(i_1 i_2)}$ . С этой целью можно воспользоваться соотношениями (6.243), (6.248). При этом погрешность аппроксимации интеграла  $I_{00T,t}^{(i_1 i_2)}$  определяется формулой (6.254) при использовании полиномов Лежандра. Вычислим величину  $\varepsilon_{N,q}$  при различных значениях  $N$  и  $q$ :

$$\varepsilon_{3,2} \approx 0.0167(T-t)^2, \quad \varepsilon_{2,3} \approx 0.0179(T-t)^2, \quad (6.258)$$

$$\varepsilon_{1,6} \approx 0.0192(T-t)^2. \quad (6.259)$$

Таблица 6.47.  $T - t = 0.05$ .

$N$	$q$	$q_1$	$q_2$	$M$
1	50	—	2	77
2	25	2	0	26
3	17	1	0	18

Таблица 6.48.  $T - t = 0.02$ .

$N$	$q$	$q_1$	$q_2$	$M$
1	312	—	6	655
2	156	4	2	183
3	104	6	0	105

Комбинированный метод (формулы (6.258)) требует вычисления существенно меньшего числа коэффициентов Фурье, чем метод кратных рядов Фурье (формула (6.259)).

Пусть среднеквадратическая точность аппроксимации стохастических интегралов  $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$ ,  $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$  равна  $(T - t)^4$ . В табл. 6.46 – 6.48 приведены значения  $N$ ,  $q$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ , которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \varepsilon_{N,q} \leq (T - t)^4 \\ \varepsilon_{N,q_1,q_2} \leq (T - t)^4 \end{cases} \quad (6.260)$$

и общее число  $M$  коэффициентов Фурье, требуемых для аппроксимации интегралов  $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$ ,  $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$  при  $T - t = 0.1, 0.05, 0.02$  (числа  $q, q_1, q_2$  брались так, чтобы число  $M$  было наименьшим).

Из табл. 6.46 – 6.48 видно, что комбинированный метод при малых  $N$  ( $N = 2$ ) позволяет существенно снизить общее число коэффициентов Фурье, требуемых для аппроксимации интегралов  $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$ ,  $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$  по сравнению с методом кратных рядов Фурье ( $N = 1$ ).

Однако, платой за это является увеличение вычислительных затрат на аппроксимацию. Точность аппроксимации стохастических интегралов для комбинированного метода и метода кратных рядов Фурье бралась одинаковой и равной  $(T - t)^4$ .

## 6.16 Слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

В [148] показано, что если заменить повторные стохастические интегралы Ито в правой части (4.96) их аппроксимациями, удовлетворяющими специальным моментным условиям, то основное утверждение теоремы 4.16 (предложение 5.11.1 ([148], С. 211)) останется справедливым. Перейдем к обсуждению выбора таких аппроксимаций.

Введем обозначение

$$\mathbf{y}_{s,t}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{ \mathbf{x}_t \} \overset{p_k}{\vdash} {}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}, \quad (6.261)$$

где  $0 \leq t < s \leq T$ ;  $r \in N$ ;

$${}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k};$$

$\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)}$  — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито:

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)};$$

$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1, 0; l = 1, \dots, k\}$ , а остальные обозначения, входящие в (6.261), такие же, как в (4.96).

**Теорема 6.2.** (предложение 5.12.1 ([148], С. 221)). *Пусть условия теоремы 4.16 выполнены и для  $t \in [t_0, T]$ ,  $r \in N$  существует постоянная  $K \in (0, \infty)$  такая, что условие*

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})t, t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \hat{J}_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})t, t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} | \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K(t - t_0)^{r+1} \quad (6.262)$$

выполнено для всех

$$(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}) \in \mathcal{M}_{k_g}; i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 0, 1, \dots, m;$$

$$k_g \leq r; g = 1, \dots, l; l = 1, 2, \dots, 2r + 1.$$

Тогда для каждой функции  $h \in C^{2(r+1)}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^1)$  существуют постоянные  $K_h \in (0, \infty)$  и  $n \in N$  такие, что

$$\left| \mathbb{M} \left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\mathbf{y}_{t,t_0}^{(r)}) | \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K_h (1 + |\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}) (t - t_0)^{r+1},$$

где  $\mathbf{x}_t$  — решение СДУ Ито (1.39) в автономном случае, которое стартует из точки  $\mathbf{x}_{t_0}$  в момент времени  $t_0$ .

Аппроксимации

$$\hat{J}_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}) t, t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})}$$

повторных стохастических интегралов Ито

$$J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}) t, t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})},$$

которые удовлетворяют условию (6.262) при некотором фиксированном  $r$ , будем называть слабыми аппроксимациями.

Приведем аналог теоремы 6.2 для унифицированных разложений Тейлора–Ито. Положим

$$\tilde{\mathbf{y}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)} L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \mathbf{x}_t \} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)} \hat{J}_{l_1 \dots l_{k_s,t}}, \quad (6.263)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{x}_t \} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)} \hat{I}_{l_1 \dots l_{k_s,t}}, \quad (6.264)$$

$${}^{(k)} \hat{J}_{l_1 \dots l_{k_s,t}} = \left\| \hat{J}_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \quad {}^{(k)} \hat{I}_{l_1 \dots l_{k_s,t}} = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Остальные обозначения, входящие в (6.263) и (6.264), такие же, как в (4.29) и (4.56) соответственно.

**Теорема 6.3.** Пусть выполнены условия теоремы 4.17 и для  $t \in [t_0, T]$ ,  $r \in N$  существуют такие постоянные  $K_1, K_2 \in (0, \infty)$ , что условия

$$\begin{aligned} \left| M \left\{ \prod_{g=1}^l \frac{(t-t_0)^{j_g}}{j_g!} J_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}, t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \frac{(t-t_0)^{j_g}}{j_g!} \hat{J}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}, t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} | F_{t_0} \right\} \right| &\leq \\ &\leq K_1 (t-t_0)^{r+1}, \end{aligned} \quad (6.265)$$

$$\begin{aligned} \left| M \left\{ \prod_{g=1}^l \frac{(t-t_0)^{j_g}}{j_g!} I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}, t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \frac{(t-t_0)^{j_g}}{j_g!} \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}, t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} | F_{t_0} \right\} \right| &\leq \\ &\leq K_2 (t-t_0)^{r+1} \end{aligned} \quad (6.266)$$

выполнены для всех

$$(k_g, j_g, l_1^{(g)}, \dots, l_{k_g}^{(g)}) \in \mathcal{A}_{q_g}; i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 1, \dots, m;$$

$$q_g \leq r; g = 1, \dots, l; l = 1, 2, \dots, 2r + 1.$$

Тогда для каждой функции  $h \in C^{2(r+1)}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^1)$  существуют постоянные  $K_h^{(1)}, K_h^{(2)} \in (0, \infty)$  и  $n_1, n_2 \in N$  такие, что

$$\left| M \left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\tilde{\mathbf{y}}_{t,t_0}^{(r)}) | F_{t_0} \right\} \right| \leq K_h^{(1)} (1 + |\mathbf{x}_0|^{2n_1}) (t - t_0)^{r+1},$$

$$\left| M \left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\hat{\mathbf{y}}_{t,t_0}^{(r)}) | F_{t_0} \right\} \right| \leq K_h^{(2)} (1 + |\mathbf{x}_0|^{2n_2}) (t - t_0)^{r+1},$$

где  $\mathbf{x}_t$  — решение СДУ Ито (1.39) в автономном случае, которое стартует из точки  $\mathbf{x}_{t_0}$  в момент времени  $t_0$ .

Аппроксимации

$$\hat{J}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})}, \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})}$$

повторных стохастических интегралов Ито

$$J_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})}, I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})},$$

которые удовлетворяют условиям (6.265), (6.266) при некотором фиксированном  $r$ , будем также называть слабыми аппроксимациями.

В [148] (см. также [76]) построены слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито  $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, t_0}^{(i_k \dots i_1)}$ , удовлетворяющие условию (6.262) при  $r = 1, 2; m, n \geq 1$  (напомним, что  $n$  — размерность процесса Ито  $\mathbf{x}_t$ , являющегося решением СДУ Ито, а  $m$  — размерность винеровского процесса, входящего в это уравнение) и при  $r = 3, m = 1, n \geq 1$ . Далее приведем эти аппроксимации, а также слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито  $I_{l_1 \dots l_{k_t} t, t_0}^{(i_1 \dots i_k)}$ , удовлетворяющие более жесткому условию, чем (6.266) при  $r = 4, m = 1, n \geq 1$ .

С целью сокращения записи положим

$$M \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}) t_0 + \Delta, t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} | F_{t_0} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} M \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} \right\}, \quad (6.267)$$

где  $\Delta \in [0, T - t_0]$ ;  $(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}) \in \mathcal{M}_{k_g}$ ;  $k_g \leq r$ ;  $g = 1, \dots, l$ .

Приведем ряд точных значений математических ожиданий вида (6.267), полученных в [76], [148] и необходимых для построения слабых аппроксимаций  $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)t_0 + \Delta, t_0}^{(i_k \dots i_1)}$  при  $r = 1, 2; m, n \geq 1$ :

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} \right\} = \Delta \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \quad (6.268)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(01)}^{(0i_2)} \right\} = \mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(10)}^{(i_20)} \right\} = \frac{1}{2} \Delta^2 \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \quad (6.269)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\} = \frac{1}{2} \Delta^2 \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}, \quad (6.270)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\} = \begin{cases} \Delta^2 & \text{при } i_1 = \dots = i_4 \\ \Delta^2/2 & \text{при } i_3 \neq i_4, i_1 = i_3, i_2 = i_4, \\ & \text{или } i_3 \neq i_4, i_1 = i_4, i_2 = i_3 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad (6.271)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(1)}^{(i_3)} J_{(1)}^{(i_4)} \right\} = \begin{cases} 3\Delta^2 & \text{при } i_1 = \dots = i_4 \\ \Delta^2 & \text{если среди } i_1, \dots, i_4 \text{ имеются} \\ & \text{две пары одинаковых чисел} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad (6.272)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(10)}^{(i_1 0)} J_{(01)}^{(0i_2)} \right\} = \frac{1}{6} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \quad (6.273)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(10)}^{(i_1 0)} J_{(10)}^{(i_2 0)} \right\} = \mathbb{M} \left\{ J_{(01)}^{(0i_1)} J_{(01)}^{(0i_2)} \right\} = \frac{1}{3} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \quad (6.274)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(01)}^{(0i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(1)}^{(i_3)} J_{(1)}^{(i_4)} \right\} &= \mathbb{M} \left\{ J_{(10)}^{(i_1 0)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(1)}^{(i_3)} J_{(1)}^{(i_4)} \right\} = \\ &= \begin{cases} 3\Delta^3/2 & \text{при } i_1 = \dots = i_4 \\ \Delta^3/2 & \text{если среди } i_1, \dots, i_4 \text{ имеются} \\ & \text{две пары одинаковых чисел} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad (6.275) \end{aligned}$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(01)}^{(0i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\} = \frac{\Delta^3}{6} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}, \quad (6.276)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(10)}^{(i_1 0)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\} = \frac{1}{3} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}, \quad (6.277)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} \dots J_{(1)}^{(i_6)} \right\} = \begin{cases} 15\Delta^3 & \text{при } i_1 = \dots = i_6 \\ 3\Delta^3 & \text{если среди } i_1, \dots, i_6 \text{ имеются пара} \\ & \text{и четверка одинаковых чисел} \\ \Delta^3 & \text{если среди } i_1, \dots, i_6 \text{ имеются три} \\ & \text{пары одинаковых чисел} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad (6.278)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(11)}^{(i_5 i_6)} \right\} = & \\ = \frac{1}{6} \Delta^3 & \left( \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} (\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}) + \right. \\ & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}} (\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}) + \\ & \left. + \mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}} (\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}) \right), \end{aligned} \quad (6.279)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(1)}^{(i_5)} J_{(1)}^{(i_6)} \right\} = & \frac{1}{2} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}} + \\ + \frac{1}{6} \Delta^3 & \left( 2 \cdot \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} (\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}) + \right. \\ & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} (\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}) + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} (\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}) + \\ & \left. + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} (\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}}) \right), \end{aligned} \quad (6.280)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(1)}^{(i_3)} \dots J_{(1)}^{(i_6)} \right\} = & \\ = \frac{1}{2} & \left( \mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} \dots J_{(1)}^{(i_6)} \right\} - \Delta \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_3)} \dots J_{(1)}^{(i_6)} \right\} \right), \end{aligned} \quad (6.281)$$

где  $\mathbf{1}_A$  — индикатор множества  $A$ .

Формулы (6.268)–(6.281) получены в [76], [148]. Следует отметить, что в [148] в формуле (6.280) отсутствует слагаемое вида

$$\frac{1}{2} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}.$$

Покажем, что наличие данного слагаемого в (6.280) обязательно.

Действительно, поскольку с вероятностью 1 выполняется равенство

$$J_{(1)}^{(i_5)} J_{(1)}^{(i_6)} = J_{(11)}^{(i_5 i_6)} + J_{(11)}^{(i_6 i_5)} + \Delta \mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}},$$

то

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(1)}^{(i_5)} J_{(1)}^{(i_6)} \right\} &= \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(11)}^{(i_5 i_6)} \right\} + \\ &+ \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(11)}^{(i_6 i_5)} \right\} + \Delta \mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}} \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.282)$$

Применяя к правой части (6.282) формулы (6.270), (6.279), приходим к (6.280).

Необходимо отметить [76], [148], что

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} \right\} = 0,$$

если число единиц, входящих во все мультииндексы

$$(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}); \ k_g \leq r; \ g = 1, \dots, l,$$

нечетно. Кроме того [76], [148]:

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} \right\} \right| \leq K \Delta^{\gamma_l},$$

где  $\gamma_l = \delta_l/2 + \rho_l$ ;  $\delta_l$  — число единиц, а  $\rho_l$  — число нулей, входящих во все мультииндексы

$$(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}); \ k_g \leq r; \ g = 1, \dots, l;$$

$K \in (0, \infty)$  — постоянная.

В случае  $n, m \geq 1; r = 1$  можно положить [76], [148]:

$$\hat{J}_{(1)}^{(i)} = \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)}; \ i = 1, \dots, m,$$

где  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)}; i = 1, \dots, m$  — независимые дискретные случайные величины, для которых

$$\mathbb{P} \left\{ \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \pm \sqrt{\Delta} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Нетрудно видеть, что аппроксимация

$$\hat{J}_{(1)}^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)}; \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $\zeta_0^{(i)}$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины, также удовлетворяет условию (6.262) при  $r = 1$ .

В случае  $n, m \geq 1; r = 2$  в качестве аппроксимаций

$$\hat{J}_{(1)}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)}, \quad \hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)}, \quad \hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)}$$

возьмем следующие [76], [148]:

$$\hat{J}_{(1)}^{(i_1)} = \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)} = \hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)} = \frac{1}{2} \Delta \cdot \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}, \quad (6.283)$$

$$\hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)} = \frac{1}{2} (\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_2)} + V^{(i_1 i_2)}), \quad (6.284)$$

где  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)}$  — независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\Delta$  или независимые дискретные случайные величины, для которых выполняются условия:

$$P\left\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \pm \sqrt{3\Delta}\right\} = \frac{1}{6}, \quad P\left\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = 0\right\} = \frac{2}{3};$$

$V^{(i_1 i_2)}$  — независимые дискретные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$P\left\{V^{(i_1 i_2)} = \pm \Delta\right\} = \frac{1}{2} \text{ при } i_2 < i_1;$$

$$V^{(i_1 i_1)} = -\Delta; \quad V^{(i_1 i_2)} = -V^{(i_2 i_1)} \text{ при } i_1 < i_2;$$

$$i_1, i_2 = 1, \dots, m.$$

Заметим, что для того чтобы аппроксимации

$$\hat{J}_{(1)}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)}, \quad \hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)}, \quad \hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)}$$

вида (6.283), (6.284) удовлетворяли условию (6.262) при  $r = 2$ , достаточно выполнения следующих условий:

1.  $V^{(i_1 i_1)} = -\Delta$ .
2.  $M\{V^{(i_1 i_2)}\} = 0, \quad M\{(V^{(i_1 i_2)})^2\} = \Delta^2; \quad i_1 \neq i_2$ .
3.  $V^{(i_1 i_2)}$  независима с  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)}, \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_4)}, \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_4)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_5)}$  при всех  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$ .

4.  $V^{(i_1 i_2)} = -V^{(i_2 i_1)}$ ;  $i_1 \neq i_2$ .
5.  $V^{(i_1 i_2)}$  и  $V^{(i_3 i_4)}$  независимы, если  $\{i_1, i_2\} \neq \{i_3, i_4\}$ ; здесь  $\{x, y\}$  означает неупорядоченную пару  $x, y$ .
6.  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}$  — такие же случайные величины, как в (6.283), (6.284);  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ .

Условия 1–6 дают возможность предлагать различные способы построения случайных величин  $V^{(i_1 i_2)}$ ;  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ . Так, например, если

$$\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)},$$

где  $\zeta_0^{(i)}$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины, то для  $V^{(i_1 i_2)}$  можно предложить следующую формулу:

$$V^{(i_1 i_2)} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} - \zeta_1^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) - \Delta \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \quad (6.285)$$

где  $\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}; i = 1, \dots, m$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Перейдем к рассмотрению случая  $r = 3, m = 1, n \geq 1$ . В данной ситуации нам кроме формул (6.268)–(6.282) потребуется еще ряд формул для математических ожиданий вида (6.267) при  $m = 1$ .

Согласно [76], [148] имеем:

$$\mathbb{M}\{J_{(1)} J_{(111)}\} = \mathbb{M}\{J_{(01)} J_{(111)}\} = \mathbb{M}\{J_{(10)} J_{(111)}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{J_{(011)} J_{(11)}\} = \mathbb{M}\{J_{(101)} J_{(11)}\} = \mathbb{M}\{J_{(110)} J_{(11)}\} = \frac{1}{6} \Delta^3,$$

$$\mathbb{M}\{J_{(001)} J_{(1)}\} = \mathbb{M}\{J_{(010)} J_{(1)}\} = \mathbb{M}\{J_{(100)} J_{(1)}\} = \frac{1}{6} \Delta^3,$$

$$\mathbb{M}\{J_{(100)} J_{(10)}\} = \mathbb{M}\{J_{(001)} J_{(01)}\} = \frac{1}{8} \Delta^4, \quad \mathbb{M}\{J_{(111)} J_{(11)}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{J_{(010)} J_{(10)}\} = \mathbb{M}\{J_{(010)} J_{(01)}\} = \frac{1}{6} \Delta^4, \quad \mathbb{M}\{(J_{(111)})^2\} = \frac{1}{6} \Delta^3,$$

$$\mathbb{M}\{J_{(100)} J_{(01)}\} = \mathbb{M}\{J_{(001)} J_{(10)}\} = \frac{1}{24} \Delta^4,$$

$$\mathbb{M}\{J_{(110)} J_{(10)}\} = \mathbb{M}\{J_{(110)} J_{(01)}\} = \mathbb{M}\{J_{(101)} J_{(10)}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{J_{(101)}J_{(01)}\} = \mathbb{M}\{J_{(011)}J_{(10)}\} = \mathbb{M}\{J_{(011)}J_{(01)}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\left\{J_{(011)}\left(J_{(1)}\right)^2\right\} = \mathbb{M}\left\{J_{(101)}\left(J_{(1)}\right)^2\right\} = \mathbb{M}\left\{J_{(110)}\left(J_{(1)}\right)^2\right\} = \frac{1}{6}\Delta^3,$$

$$\mathbb{M}\left\{J_{(111)}\left(J_{(1)}\right)^3\right\} = \Delta^3, \quad \mathbb{M}\left\{J_{(111)}J_{(11)}J_{(1)}\right\} = \frac{1}{2}\Delta^3,$$

где

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} \dots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} df_{\tau_k}^{(\lambda_k)} \dots df_{\tau_1}^{(\lambda_1)};$$

$f_\tau^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$ ;  $f_\tau^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} f_\tau$  — стандартный скалярный винеровский процесс;  $\lambda_l = 1$  или  $\lambda_l = 0$ ;  $l = 1, \dots, k$ .

В [148] с помощью приведенных моментных соотношений предложены следующие слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито в случае  $r = 3$ ,  $m = 1$ ,  $n \geq 1$ :

$$\hat{J}_{(1)} = \Delta \tilde{f}, \quad (6.286)$$

$$\hat{J}_{(10)} = \Delta \hat{f}, \quad \hat{J}_{(01)} = \Delta \cdot \Delta \tilde{f} - \Delta \hat{f}, \quad (6.287)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{(11)} &= \frac{1}{2} \left( (\Delta \tilde{f})^2 - \Delta \right), \quad \hat{J}_{(001)} = \hat{J}_{(010)} = \hat{J}_{(100)} = \frac{1}{6} \Delta^2 \cdot \Delta \tilde{f}, \\ \hat{J}_{(110)} &= \hat{J}_{(101)} = \hat{J}_{(011)} = \frac{1}{6} \Delta \left( (\Delta \tilde{f})^2 - \Delta \right), \\ \hat{J}_{(111)} &= \frac{1}{6} \Delta \tilde{f} \left( (\Delta \tilde{f})^2 - 3\Delta \right), \end{aligned}$$

где

$$\Delta \tilde{f} \sim N(0, \Delta), \quad \Delta \hat{f} \sim N(0, \frac{1}{3}\Delta^3), \quad \mathbb{M}\{\Delta \tilde{f} \Delta \hat{f}\} = \frac{1}{2}\Delta^2.$$

В заключение построим слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито в случае  $r = 4$ ,  $m = 1$ ,  $n \geq 1$ .

В усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.96) при  $r = 4$ ,  $m = 1$  входят 26 различных повторных стохастических интегралов Ито. Построение слабых аппроксимаций данных стохастических интегралов, удовлетворяющих условию (6.262) при  $r = 4$ , весьма затруднительно в силу необходимости рассматривать большое число моментных условий. Однако эту проблему можно упростить, если ввести усеченное унифицированное разложение Тейлора–Ито, например, вида (4.98) при

$r = 4$ ,  $m = 1$ , поскольку в него входят всего лишь 15 различных повторных стохастических интегралов Ито:

$$I_0, I_1, I_{00}, I_{000}, I_2, I_{10}, I_{01}, I_3, I_{11}, I_{20}, I_{02}, I_{100}, I_{010}, I_{001}, I_{0000},$$

где

$$I_{l_1 \dots l_k} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} (t_0 - \tau_k)^{l_k} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} (t_0 - \tau_1)^{l_1} df_{\tau_1} \dots df_{\tau_k}, \quad k \geq 1;$$

$f_\tau$  — скалярный стандартный винеровский процесс.

Нетрудно заметить, что условие (6.266) будет выполнено при  $r = 4$ ,  $i_1 = \dots = i_4$ , если выполнено следующее более жесткое условие:

$$\left| M \left\{ \prod_{g=1}^l I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}} - \prod_{g=1}^l \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}} | F_{t_0} \right\} \right| \leq K(t - t_0)^5 \quad (6.288)$$

для всех  $l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} \in A$ ;  $k_g \leq 4$ ;  $g = 1, \dots, l$ ;  $l = 1, 2, \dots, 9$ ; здесь  $K \in (0, \infty)$ ;

$$A = \{0, 1, 00, 000, 2, 10, 01, 3, 11, 20, 02, 100, 010, 001, 0000\}.$$

Положим

$$\hat{I}_0 = \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad \hat{I}_{00} = \frac{1}{2} \Delta ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (6.289)$$

$$\hat{I}_1 = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right), \quad \hat{I}_{000} = \frac{\Delta^{3/2}}{6} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad (6.290)$$

$$\hat{I}_{0000} = \frac{\Delta^2}{24} ((\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3); \quad (6.291)$$

здесь и далее

$$\zeta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} df_s, \quad \zeta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta^{3/2}} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} \left( s - t_0 - \frac{\Delta}{2} \right) df_s;$$

$f_s$  — скалярный стандартный винеровский процесс.

Нетрудно видеть, что  $\zeta_0, \zeta_1$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Кроме того, аппроксимации (6.289)–(6.291) с вероятностью 1 совпадают с повторными стохастическими интегралами Ито, соответствующими этим аппроксимациям. Отсюда следует, что всевозможные произведения следующего вида:

$$\prod_{g=1}^l \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}},$$

входящие в (6.288) и содержащие только аппроксимации  $\hat{I}_0$ ,  $\hat{I}_{00}$ ,  $\hat{I}_1$ ,  $\hat{I}_{000}$ ,  $\hat{I}_{0000}$  вида (6.289)–(6.291), обращают левую часть (6.288) в ноль, т.е. условие (6.288) выполнено автоматически.

Для построения аппроксимаций  $\hat{I}_{100}$ ,  $\hat{I}_{010}$ ,  $\hat{I}_{001}$ ,  $\hat{I}_{10}$ ,  $\hat{I}_{01}$ ,  $\hat{I}_{11}$ ,  $\hat{I}_{20}$ ,  $\hat{I}_{02}$ ,  $\hat{I}_2$ ,  $\hat{I}_3$  нам необходимо вычислить ряд условных математических ожиданий вида:

$$M \left\{ \prod_{g=1}^l I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}} | F_{t_0} \right\},$$

где  $(l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}) \in A$ , которые с целью упрощения записи обозначаем следующим образом:

$$M \left\{ \prod_{g=1}^l I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}} \right\}.$$

Имеем

$$M\{I_3\} = M\{I_3(I_0)^2\} = M\{I_3I_{00}\} = 0, \quad M\{I_3I_0\} = -\frac{\Delta^4}{4},$$

$$M\{I_2(I_0)^2\} = M\{I_2I_{00}\} = M\{I_2I_{000}\} = M\{I_2I_{0000}\} = 0,$$

$$M\{I_2(I_{00})^2\} = M\{I_2(I_0)^4\} = M\{I_2I_{000}I_0\} = 0,$$

$$M\{I_2I_{00}(I_0)^2\} = M\{I_2I_{10}\} = M\{I_2I_{01}\} = M\{I_2I_1I_0\} = M\{I_2\} = 0,$$

$$M\{I_2I_0\} = \frac{\Delta^3}{3}, \quad M\{I_2(I_0)^3\} = \Delta^4, \quad M\{I_2I_{00}I_0\} = \frac{\Delta^4}{3},$$

$$M\{I_2I_1\} = -\frac{\Delta^4}{4}, \quad M\{I_\mu\} = M\{I_\mu I_0\} = M\{I_\mu I_{000}\} = M\{I_\mu(I_0)^3\} = 0,$$

$$M\{I_\mu I_{00}I_0\} = M\{I_\mu I_1\} = 0, \quad M\{I_{20}(I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{6}, \quad M\{I_{20}I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{12},$$

$$M\{I_{11}(I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{4}, \quad M\{I_{11}I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{8}, \quad M\{I_{02}(I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{2},$$

$$M\{I_{02}I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{4}, \quad M\{I_\lambda\} = M\{I_\lambda I_0\} = M\{I_\lambda(I_0)^2\} = M\{I_\lambda I_{00}\} = 0,$$

$$M\{I_\lambda I_1\} = M\{I_\lambda I_{0000}\} = M\{I_\lambda(I_{00})^2\} = M\{I_\lambda(I_0)^4\} = 0,$$

$$M\{I_\lambda I_{000}I_0\} = M\{I_\lambda I_{00}(I_0)^2\} = M\{I_\lambda I_{10}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\lambda I_{01}\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_1 I_0\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_{100} I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{24}, \mathbb{M}\{I_{100}(I_0)^3\} = -\frac{\Delta^4}{4}, \mathbb{M}\{I_{100} I_{00} I_0\} = -\frac{\Delta^4}{8},$$

$$\mathbb{M}\{I_{010} I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{12}, \mathbb{M}\{I_{010}(I_0)^3\} = -\frac{\Delta^4}{2}, \mathbb{M}\{I_{010} I_{00} I_0\} = -\frac{\Delta^4}{4},$$

$$\mathbb{M}\{I_{001} I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{8}, \mathbb{M}\{I_{001}(I_0)^3\} = -\frac{3\Delta^4}{4}, \mathbb{M}\{I_{001} I_{00} I_0\} = -\frac{3\Delta^4}{8},$$

$$\mathbb{M}\{I_\rho I_0\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{000}\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_0)^3\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{00} I_0\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\rho I_1\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{0000}\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_0)^5\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_{00})^2 I_0\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\rho I_{00}(I_0)^3\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{000}(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{0000} I_0\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\rho I_{000} I_{00}\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{100}\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{010}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\rho I_{001}\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_2\} = \mathbb{M}\{(I_\rho)^2 I_0\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{00} I_1\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_{10} I_{01} I_0\} = \mathbb{M}\{I_\rho\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_1(I_0)^2\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_{10}(I_0)^2\} = -\frac{\Delta^3}{3}, \quad \mathbb{M}\{I_{10} I_{00}\} = -\frac{\Delta^3}{6}, \quad \mathbb{M}\{I_{10}(I_{00})^2\} = -\frac{\Delta^4}{3},$$

$$\mathbb{M}\{I_{10}(I_0)^4\} = -2\Delta^4, \quad \mathbb{M}\{I_{10} I_{000} I_0\} = -\frac{\Delta^4}{6},$$

$$\mathbb{M}\{I_{10} I_{00}(I_0)^2\} = -\frac{5\Delta^4}{6},$$

$$\mathbb{M}\{(I_{10})^2\} = \frac{\Delta^4}{12}, \quad \mathbb{M}\{I_{10} I_{01}\} = \frac{\Delta^4}{8}, \quad \mathbb{M}\{I_{10} I_1 I_0\} = \frac{5\Delta^4}{24},$$

$$\mathbb{M}\{I_{01}(I_0)^2\} = -\frac{2\Delta^3}{3}, \quad \mathbb{M}\{I_{01} I_{00}\} = -\frac{\Delta^3}{3}, \quad \mathbb{M}\{I_{01}(I_{00})^2\} = -\frac{2\Delta^4}{3},$$

$$\mathbb{M}\{I_{01}(I_0)^4\} = -4\Delta^4, \quad \mathbb{M}\{I_{01} I_{000} I_0\} = -\frac{\Delta^4}{3},$$

$$\mathbb{M}\{I_{01} I_{00}(I_0)^2\} = -\frac{5\Delta^4}{3}, \quad \mathbb{M}\{(I_{01})^2\} = \frac{\Delta^4}{4}, \quad \mathbb{M}\{I_{01} I_1 I_0\} = \frac{3\Delta^4}{8},$$

где  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} 02, 11, 20$ ;  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} 100, 010, 001$ ;  $\rho \stackrel{\text{def}}{=} 10, 01$  (эти записи следует понимать как равенства мультииндексов).

Приведенные равенства получены с помощью стандартных свойств стохастических интегралов Ито (см. главу 1), а также следующих справедливых с вероятностью 1 и вытекающих из формулы Ито равенств:

$$(I_0)^4 = 24I_{0000} + 12\Delta I_{00} + 3\Delta^2, \quad (I_{00})^2 = 6I_{0000} + 2\Delta I_{00} + \frac{\Delta^2}{2},$$

$$I_{00}(I_0)^2 = 12I_{0000} + 5\Delta I_{00} + \Delta^2, \quad I_1 I_0 = I_{10} + I_{01} - \frac{\Delta^2}{2},$$

$$I_{00}(I_0)^3 = 60I_{00000} + 27\Delta I_{000} + 6\Delta^2 I_0,$$

$$(I_0)^5 = 120I_{00000} + 60\Delta I_{000} + 15\Delta^2 I_0,$$

$$(I_{00})^2 I_0 = 30I_{00000} + 12\Delta I_{000} + \frac{10\Delta^2}{4} I_0,$$

$$I_{000}(I_0)^2 = 20I_{00000} + 7\Delta I_{000} + \Delta^2 I_0, \quad I_{0000} I_0 = 5I_{00000} + \Delta I_{000},$$

$$I_{000} I_{00} = 10I_{00000} + 3\Delta I_{000} + \frac{\Delta^2}{2} I_0, \quad I_{00} I_1 = I_{001} + I_{010} + I_{100} - \frac{\Delta^2}{2} I_0,$$

$$(I_0)^3 = 6I_{000} + 3\Delta I_0, \quad I_{00} I_0 = 3I_{000} + \Delta I_0,$$

$$I_{10} I_0 = I_{010} + I_{100} + \Delta I_1 + I_2, \quad I_{000} I_0 = 4I_{0000} + \Delta I_{00}, \quad (I_0)^2 = 2I_{00} + \Delta,$$

$$I_{01} I_0 = 2I_{001} + I_{010} - \frac{1}{2} (I_2 + \Delta^2 I_0).$$

Используя приведенные ранее моментные соотношения, строим аппроксимации  $\hat{I}_{100}$ ,  $\hat{I}_{010}$ ,  $\hat{I}_{001}$ ,  $\hat{I}_{10}$ ,  $\hat{I}_{01}$ ,  $\hat{I}_{11}$ ,  $\hat{I}_{20}$ ,  $\hat{I}_{02}$ ,  $\hat{I}_2$ ,  $\hat{I}_3$ :

$$\hat{I}_{100} = -\frac{\Delta^{5/2}}{24} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{010} = -\frac{\Delta^{5/2}}{12} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad (6.292)$$

$$\hat{I}_{001} = -\frac{\Delta^{5/2}}{8} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{11} = \frac{\Delta^3}{8} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (6.293)$$

$$\hat{I}_{20} = \frac{\Delta^3}{12} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad \hat{I}_{02} = \frac{\Delta^3}{4} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (6.294)$$

$$\hat{I}_3 = -\frac{\Delta^{7/2}}{4}\zeta_0, \quad \hat{I}_2 = \frac{\Delta^{5/2}}{3}\left(\zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1\right), \quad (6.295)$$

$$\hat{I}_{10} = \Delta^2\left(-\frac{1}{6}\left((\zeta_0)^2 - 1\right) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \pm \frac{1}{12\sqrt{2}}\left((\zeta_1)^2 - 1\right)\right), \quad (6.296)$$

$$\hat{I}_{01} = \Delta^2\left(-\frac{1}{3}\left((\zeta_0)^2 - 1\right) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \mp \frac{1}{12\sqrt{2}}\left((\zeta_1)^2 - 1\right)\right), \quad (6.297)$$

где  $\zeta_0, \zeta_1$  — такие же случайные величины, как в (6.289)–(6.291). Нетрудно проверить, что аппроксимации (6.289)–(6.291), (6.292)–(6.297) удовлетворяют условию (6.288) при  $r = 4, m = 1, n \geq 1$ , т.е. являются слабыми аппроксимациями.

## **Часть III**

# **Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений**

## Глава 7

# Явные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

Настоящая глава посвящена построению явных сильных одношаговых методов численного решения СДУ Ито, основанных на разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича. В ней приводятся новые представления некоторых известных численных методов, а также строится ряд новых численных методов, в том числе конечно-разностных, для СДУ Ито с многомерным неаддитивным шумом.

В данной главе рассматриваются методы численного интегрирования СДУ Ито, сходящиеся в сильном смысле (определение сильной сходимости численной схемы будет дано далее) к решениям этих уравнений.

Первые работы по этой тематике относятся, по-видимому, к 1950-м годам. В [186] (G. Maruyama, 1955) рассмотрен метод Эйлера для СДУ Ито и доказана его среднеквадратическая сходимость. По результатам численных экспериментов в [119] (D.J. Clements, B.D.O. Anderson, 1973) и [238] (D.J. Wright, 1974) можно видеть, что не любые эвристические стохастические обобщения хорошо известных численных методов сходятся к решениям СДУ. В [73], [76] (Г.Н. Мильштейн, 1974, 1988), в частности, построен явный сильный численный метод решения СДУ Ито порядка точности 1.0. Работа [222] (W. Rumelin, 1982) посвящена явным сильным численным схемам типа Рунге–Кутта той же точности решения СДУ Ито.

Явная сильная порядка точности 1.0 конечно-разностная численная схема решения СДУ Ито со скалярным и аддитивным шумом представлена

в [213] (E. Platen, 1984). Аналогичная численная схема построена в [126] (T.C. Gard, 1988).

В [213] (E. Platen, 1984) и [148] (P.E. Kloeden, E. Platen, 1992) представлены явные сильные порядка точности 1.5 одношаговые конечно-разностные численные схемы решения СДУ Ито.

Явная сильная одношаговая численная схема порядка точности 2.0 для случая скалярного и векторного (без необходимых аппроксимаций стохастических интегралов) шума содержится в монографии [148] (P.E. Kloeden, E. Platen, 1992). В [116] (C.C. Chang, 1987) построен явный сильный порядка точности 2.0 конечно-разностный численный метод решения скалярного СДУ Ито со скалярным шумом и автономным диффузионным коэффициентом. Аналогичная схема решения векторного СДУ со скалярным шумом и автономной диффузионной матрицей рассматривается в работе [148] (P.E. Kloeden, E. Platen, 1992).

Необходимо отметить, что существует также большое число других работ, посвященных явным сильным одношаговым численным методам решения СДУ Ито.

В настоящей главе строятся явные сильные одношаговые численные методы решения СДУ Ито, основанные на унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также на методе аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанном на кратных рядах Фурье–Лежандра (теоремы 5.1–5.7\*). При этом впервые, в качестве основной системы базисных функций, выбрана система полиномов Лежандра. Данные численные методы имеют порядки сходимости 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0. В начале настоящей главы также рассмотрен метод Эйлера, имеющий при стандартных условиях порядок сходимости 0.5.

Некоторые из представленных численных методов являются новыми версиями численных схем, построенных в [76] (Г.Н. Мильштейн, 1988), [148] (P.E. Kloeden, E. Platen, 1992), [151] (P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, 1994).

Другие полученные численные методы являются новыми. Новизна этих методов, с одной стороны, связана с тем, что они построены на основе унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а с другой — с тем, что в указанных численных методах для аппроксимации входящих в них повторных стохастических интегралов используется рассмотренный в главах 5 и 6 эффективный метод, основанный на кратных рядах

Фурье-Лежандра. Отметим, что кратные ряды Фурье-Лежандра применяются впервые к численному интегрированию СДУ Ито.

На основе некоторых из представленных численных методов построены их конечно-разностные модификации. Среди них явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядка точности 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Конечно-разностные численные методы порядка точности 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем последние два из них для векторных СДУ Ито с многомерным неаддитивным шумом вероятно не имеют аналогов в литературе.

## 7.1 Сильная сходимость и тестирование сильных численных методов

Пусть  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  — решение СДУ Ито (1.39). Рассмотрим разбиение  $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  промежутка  $[0, T]$  такое, что

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|. \quad (7.1)$$

Через  $\mathbf{y}_{\tau_j}$ ;  $j = 0, 1, \dots, N$  обозначим дискретную аппроксимацию процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , соответствующую максимальному шагу дискретизации  $\Delta_N$  (вместо  $\mathbf{y}_{\tau_j}$  правильнее было бы писать  $\mathbf{y}_{\tau_j}^{\Delta_N}$ , однако мы не будем этого делать для упрощения записи).

Дадим определение сильной сходимости дискретной аппроксимации.

**Определение 7.1.** [148]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод)  $\mathbf{y}_{\tau_j}$ ;  $j = 0, 1, \dots, N$ , соответствующая максимальному шагу дискретизации  $\Delta_N$ , сходится сильно к процессу  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  в момент времени  $T$ , если*

$$\lim_{\Delta_N \downarrow 0} M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} = 0.$$

Рассмотрим определение, характеризующее скорость сильной сходимости дискретной аппроксимации.

**Определение 7.2.** [148]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод)  $\mathbf{y}_{\tau_j}$ ;  $j = 0, 1, \dots, N$ , соответствующая максимальному шагу дискретизации  $\Delta_N$ , сходится сильно с порядком  $\gamma > 0$  в момент времени  $T$  к процессу  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , если существуют постоянная  $C \in (0, \infty)$ , которая не зависит от  $\Delta_N$ , и число  $\delta > 0$  такие, что*

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq C(\Delta_N)^\gamma \quad (7.2)$$

для всех  $\Delta_N \in (0, \delta)$ .

В данной главе, а также в последующих двух главах будут рассмотрены различные сильные численные методы решения СДУ Ито. Будут даны теоретические оценки скорости сходимости этих численных методов, т.е. при подходящих условиях будут получены оценки типа (7.2).

Вместе с тем интерес представляет также тестирование сильных численных методов, т.е. применение их к тестовым СДУ Ито с известными точными решениями и последующей численной оценкой величины  $M\{|x_T - y_T|\}$  при различных значениях  $\Delta_N$ . Далее рассмотрим теоретические аспекты этого вопроса.

Сначала сделаем несколько замечаний по поводу статистических тестов.

Пусть  $x_1, \dots, x_N$  — последовательность независимых гауссовых случайных величин с известным математическим ожиданием  $M$  и неизвестной дисперсией  $D$ . Обычно в качестве оценки  $\hat{D}_N$  дисперсии  $D$  выбирают

$$\hat{D}_N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{M}_N)^2, \quad \hat{M}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Известно [148], что  $\xi_N$  (при  $N > 3$ ), определяемая равенством

$$\xi_N = \frac{\hat{M}_N - M}{(\hat{D}_N/N)^{1/2}},$$

удовлетворяет  $t$ -распределению Стьюдента с  $N-1$  степенью свободы, нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $(N-1)/(N-3)$ .

Далее имеем

$$P\{|\hat{M}_N - M| < A\} = P\{|\xi_N| < t\},$$

где

$$t = A(N/\hat{D}_N)^{1/2}.$$

Теперь с помощью статистических таблиц по заданному  $\alpha$  можно отыскать число  $t = t_{N-1}^{1-\alpha}$  такое, что

$$P\{|\hat{M}_N - M| < t_{N-1}^{1-\alpha} (\hat{D}_N/N)^{1/2}\} = 1 - \alpha.$$

Итак, доверительный интервал для  $M$  с уровнем достоверности  $1 - \alpha$  имеет вид:

$$\left( \hat{M}_N - t_{N-1}^{1-\alpha} (\hat{D}_N/N)^{1/2}, \quad \hat{M}_N + t_{N-1}^{1-\alpha} (\hat{D}_N/N)^{1/2} \right).$$

Проанализируем теперь ситуацию, когда случайные величины  $x_i; i = 1, \dots, K$  являются негауссовскими, но независимыми и одинаково распределенными с известным математическим ожиданием  $M$  и неизвестной дисперсией  $D$ . Предположим, что  $M, N$  натуральные. Разобьем последовательность  $\{x_i\}_{i=1}^{MN}$  на  $M$  групп по  $N$  случайных величин в каждой:  $\{x_i^{(j)}\}_{i=1}^N; j = 1, \dots, M$ , где  $x_i^{(j)}; i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$  — переобозначенные случайные величины  $x_i; i = 1, \dots, MN$  и рассмотрим случайные величины

$$\hat{M}_N^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{(j)}; j = 1, \dots, M.$$

Согласно центральной предельной теореме при больших  $N$  (на практике обычно берут по меньшей мере  $N \geq 15$ ) случайные величины  $\hat{M}_N^{(j)}$  являются асимптотически гауссовскими. Кроме того, они независимы. Теперь можно в приближении применить описанную ранее процедуру построения доверительного интервала к последовательности случайных величин  $\hat{M}_N^{(j)}; j = 1, \dots, M$ . В результате получаем доверительный интервал для  $M$  с уровнем достоверности  $1 - \alpha$ , который имеет следующий вид:

$$\left( \hat{M}_{N,M} - t_{M-1}^{1-\alpha} \left( \hat{D}_{N,M}/M \right)^{1/2}, \hat{M}_{N,M} + t_{M-1}^{1-\alpha} \left( \hat{D}_{N,M}/M \right)^{1/2} \right),$$

где

$$\hat{M}_{N,M} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{M}_N^{(j)}; \hat{D}_{N,M} = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left( \hat{M}_N^{(j)} - \hat{M}_{N,M} \right)^2.$$

Применим приведенные ранее рассуждения к процедуре тестирования сильных численных методов.

Пусть  $\mathbf{x}_T^{(k)}; k = 1, 2, \dots, L$  — значения в момент времени  $T$  для  $L$  независимых реализаций процесса  $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$ , являющегося решением СДУ Ито (1.39), а  $\mathbf{y}_T^{(k)}; k = 1, 2, \dots, L$  — значения в момент времени  $T$  для  $L$  независимых реализаций дискретной аппроксимации  $\mathbf{y}_{\tau_j}; j = 0, 1, \dots, N$  процесса  $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$ . При этом предполагается, что  $\mathbf{x}_T^{(k)}$  и  $\mathbf{y}_T^{(k)}$  при фиксированном  $k \in \{1, 2, \dots, L\}$  соответствуют одной и той же реализации винеровского процесса  $\mathbf{f}_t, t \in [0, T]$ .

Введем оценку  $\hat{\varepsilon}_L$  величины  $\varepsilon$  вида (7.2) следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}_L = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \left| \mathbf{x}_T^{(k)} - \mathbf{y}_T^{(k)} \right|.$$

Как уже отмечалось, в соответствии с центральной предельной теоремой  $\hat{\varepsilon}_L$  — асимптотически гауссовская случайная величина при больших  $L$ ,

причем  $\hat{\varepsilon}_L \xrightarrow{d} \varepsilon$  при  $L \rightarrow \infty$ . Очевидно, что на практике  $L$  всегда конечно. Однако мы можем приблизенно построить доверительный интервал для  $\varepsilon$  таким же образом, как это было сделано ранее. Для этого рассмотрим  $M$  независимых реализаций  $\hat{\varepsilon}_L^{(j)}$  случайной величины  $\hat{\varepsilon}_L$ :

$$\hat{\varepsilon}_L^{(j)} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \left| \mathbf{x}_T^{(k,j)} - \mathbf{y}_T^{(k,j)} \right|; \quad j = 1, \dots, M,$$

где  $\mathbf{x}_T^{(k,j)}$  и  $\mathbf{y}_T^{(k,j)}$ ;  $k = 1, \dots, L$ ;  $j = 1, \dots, M$  — независимые реализации значений процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  и дискретной аппроксимации  $\mathbf{y}_{\tau_j}$ ;  $j = 0, 1, \dots, N$  соответственно в момент времени  $T$ , причем  $\mathbf{x}_T^{(k,j)}$  и  $\mathbf{y}_T^{(k,j)}$  при фиксированной паре  $(k, j)$  соответствуют одной и той же реализации винеровского процесса  $\mathbf{f}_t$ ,  $t \in [0, T]$ .

Положим теперь

$$\hat{\varepsilon}_{L,M} = \frac{1}{LM} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^M \left| \mathbf{x}_T^{(k,j)} - \mathbf{y}_T^{(k,j)} \right|, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left( \hat{\varepsilon}_L^{(j)} - \hat{\varepsilon}_{L,M} \right)^2, \quad (7.3)$$

где  $\hat{\varepsilon}_{L,M}$  и  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  — оценки математического ожидания и дисперсии средних  $\hat{\varepsilon}_L^{(j)}$  соответственно. Построим доверительный интервал для  $\varepsilon$ :

$$I_{L,M} = (\hat{\varepsilon}_{L,M} - \Delta \hat{\varepsilon}_{L,M}, \hat{\varepsilon}_{L,M} + \Delta \hat{\varepsilon}_{L,M}),$$

где

$$\Delta \hat{\varepsilon}_{L,M} = t_{M-1}^{1-\alpha} \left( \hat{\sigma}_\varepsilon^2 / M \right)^{1/2},$$

т.е. при достаточно больших  $L$  можно приблизенно считать, что с вероятностью  $1 - \alpha$  истинное значение  $\varepsilon$  лежит в интервале  $I_{L,M}$ .

Нетрудно видеть, что  $\Delta \hat{\varepsilon}_{L,M}$  убывает с ростом  $M$ , но возрастает с уменьшением параметра  $\alpha$  или ростом вероятности  $1 - \alpha$ .

Отметим, что рассмотренная схема построения доверительного интервала для оценки среднего применена к тестированию сильных численных методов решения СДУ Ито в [148] и будет использована нами в дальнейшем.

Для тестирования сильных численных методов так же, как и в [148], будем выбирать следующие линейные СДУ Ито с мультипликативным шумом:

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad (7.4)$$

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + B\mathbf{x}_t df_t, \quad (7.5)$$

где  $x_t \in \Re^1$ ;  $\mathbf{x}_t \in \Re^2$ ;  $a, b \in \Re^1$ ;  $A \in \Re^{2 \times 2}$ ;  $A^{(11)} = A^{(22)} = -a$ ;  $A^{(12)} = A^{(21)} = a$ ;  $B = bI \in \Re^{2 \times 2}$ ;  $I$  — единичная  $(2 \times 2)$ -матрица;  $f_t$  — скалярный стандартный винеровский процесс.

Выбор тестовых уравнений (7.4), (7.5) обусловлен двумя причинами. Во-первых, эти уравнения имеют достаточно простые точные решения, определяемые соответственно равенствами [148]

$$x_t = \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bf_t\right)x_0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \exp\left(\left(A - \frac{1}{2}B^2\right)t + Bf_t\right)\mathbf{x}_0 = \\ &= Q \begin{pmatrix} \exp(-b^2t/2 + bf_t) & 0 \\ 0 & \exp((-2a - b^2/2)t + bf_t) \end{pmatrix} Q^{-1}\mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

где

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1}.$$

Во-вторых, уравнения (7.4) и (7.5) являются СДУ Ито с мультипликативным шумом, и, как следствие, выражения рассматриваемых далее сильных численных методов, примененных к уравнениям (7.4) и (7.5), содержат значительную часть слагаемых, включающих в себя повторные стохастические интегралы Ито или Стратоновича. Это обстоятельство позволяет в достаточно полной мере оценить работу тестируемых численных методов.

Отметим, что далее так же, как и в [148], в численных экспериментах будем выбирать, как правило,  $T = 1$ ,  $N = 100$ ,  $M = 20$ ,  $\alpha = 0.1$ .

## 7.2 Явный метод Эйлера

В настоящем разделе рассмотрим наиболее простой численный метод решения СДУ Ито — метод Эйлера (см. также [76], [148]). Применительно к уравнению (1.39) этот численный метод имеет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\tau_{p+1} - \tau_p) + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}), \quad (7.6)$$

где  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ ;  $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$ , которое удовлетворяет условию (7.1).

Оценим скорость сходимости метода Эйлера (7.6).

**Теорема 7.1.** [148]. Пусть для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$ ,  $s, t \in [0, T]$  выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} &< \infty, \\ (\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\})^{1/2} &\leq C_1\sqrt{\Delta_N}, \\ |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}, t) - \Sigma_i(\mathbf{y}, t)| &\leq C_2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\ |\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}, s) - \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| &\leq C_3(1 + |\mathbf{x}|), \\ |\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}, s) - \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| &\leq C_4\sqrt{s-t}(1 + |\mathbf{x}|), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  — постоянные, которые не зависят от  $\Delta_N$ ;  $\Sigma_i$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\Sigma$ .

Тогда

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_N|\} \leq K\sqrt{\Delta_N},$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $\Delta_N$ , а  $\mathbf{x}_T$  — решение СДУ Ито (1.39) при  $t = T$ .

**Доказательство.** В условиях настоящей теоремы выполнены условия леммы 4.4 из главы 4. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_s|^2\} \leq K_1(1 + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\}) \leq K_2 < \infty.$$

Положим

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{y}_p + \int_{\tau_p}^t \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) ds + \int_{\tau_p}^t \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p) d\mathbf{f}_s, \quad t \in [\tau_p, \tau_{p+1}].$$

Очевидно, что процесс  $\mathbf{z}_t$  с вероятностью 1 совпадает с  $\mathbf{y}_p$  при  $t = \tau_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, N$ .

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t = \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 + D_t + F_t + H_t, \quad (7.8)$$

где

$$\begin{aligned} D_t &= U_t + V_t, \quad F_t = R_t + G_t, \quad H_t = Q_t + P_t, \\ U_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)) ds + \int_{\tau_{n_t}}^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_s, s)) d\mathbf{f}_s + \int_{\tau_{n_t}}^t (\Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_s, s)) d\mathbf{f}_s, \\
 R_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_l)) ds + \int_{\tau_{n_t}}^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t})) ds, \\
 G_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\Sigma(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_l)) d\mathbf{f}_s + \int_{\tau_{n_t}}^t (\Sigma(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t})) d\mathbf{f}_s, \\
 Q_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\mathbf{a}(\mathbf{y}_l, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l)) ds + \int_{\tau_{n_t}}^t (\mathbf{a}(\mathbf{y}_{n_t}, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t})) ds, \\
 P_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\Sigma(\mathbf{y}_l, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l)) d\mathbf{f}_s + \int_{\tau_{n_t}}^t (\Sigma(\mathbf{y}_{n_t}, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t})) d\mathbf{f}_s, \\
 n_t &= \max_j \{j : \tau_j \leq t\}.
 \end{aligned}$$

Из (7.8) получаем

$$\begin{aligned}
 Z_t &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}\{|\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t|^2\} \leq K_3 (\mathbb{M}\{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0|^2\} + \mathbb{M}\{|U_t|^2\} + \mathbb{M}\{|V_t|^2\} + \\
 &\quad + \mathbb{M}\{|R_t|^2\} + \mathbb{M}\{|G_t|^2\} + \mathbb{M}\{|Q_t|^2\} + \mathbb{M}\{|P_t|^2\}). \tag{7.9}
 \end{aligned}$$

Оценим поочередно с помощью стандартных неравенств для математических ожиданий и моментов стохастических интегралов (см. главу 1) слагаемые в правой части (7.9). Имеем

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{M}\{|U_t^{(k)}|^2\})^{1/2} &\leq \sum_{l=0}^{n_t-1} \left( \mathbb{M} \left\{ \left( \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, s)) ds \right)^2 \right\} \right)^{1/2} + \\
 &\quad + \left( \mathbb{M} \left\{ \left( \int_{\tau_{n_t}}^t (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, s)) ds \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq \sum_{l=0}^{n_t-1} \left( \Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, s))^2 \right\} ds \right)^{1/2} + \\
 &\quad + \left( (t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, s))^2 \right\} ds \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq \sqrt{\Delta_N} C_4 \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \left( \Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (1 + |\mathbf{x}_s|)^2 \right\} ds \right)^{1/2} + \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \left( (t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (1 + |\mathbf{x}_s|)^2 \right\} ds \right)^{1/2} \leq K_4 \sqrt{\Delta_N}, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{M} \{ |V_t^{(k)}|^2 \} \right)^{1/2} &\leq \sum_{i=1}^m \left( \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, s)) d\mathbf{f}_s^{(i)} \right)^2 \right\} \right)^{1/2} \\ &+ \int_{\tau_{n_t}}^t (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, s)) d\mathbf{f}_s^{(i)} \Big\} \Big)^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, s))^2 \right\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, s))^2 \right\} ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_4 \sum_{i=1}^m \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \{ (1 + |\mathbf{x}_s|)^2 \} \Delta_N ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \{ (1 + |\mathbf{x}_s|)^2 \} |t - \tau_{n_t}| ds \right)^{1/2} \leq K_5 \sqrt{\Delta_N}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Далее заметим, что из леммы 4.4 (см. главу 4) и условий теоремы следуют оценки

$$\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\tau_l}|^2 \} \leq C_5 |s - \tau_l|, \quad \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2 \} \leq C_6 |s - \tau_{n_t}|,$$

где  $C_5, C_6$  — постоянные.

Тогда

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{M} \{ |R_t^{(k)}|^2 \} \right)^{1/2} &\leq \sum_{l=0}^{n_t-1} \left( \Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_l))^2 \right\} ds \right)^{1/2} + \\ &+ \left( (t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}))^2 \right\} ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_2 \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \left( \Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\tau_l}|^2 \} ds \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( (t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2 \} ds \right)^{1/2} \right) \leq C_7 \sqrt{\Delta_N}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{M}\{|G_t^{(k)}|^2\} \right)^{1/2} &\leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_l))^2 \right\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}))^2 \right\} ds \right)^{1/2} \leq C_8 \sqrt{\Delta_N}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Наконец, приходим к следующим оценкам:

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{M}\{|Q_t^{(k)}|^2\} \right)^{1/2} &\leq C_2 \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \left( \Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \{|\mathbf{y}_l - \mathbf{x}_{\tau_l}|^2\} ds \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left( (t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \{|\mathbf{y}_{n_t} - \mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2\} ds \right)^{1/2} \right) \leq \\ &\leq C_2 \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \Delta_N \sqrt{Z_{\tau_l}} + (t - \tau_{n_t}) \sqrt{Z_{\tau_{n_t}}} \right) \leq C_2 \int_0^t \sqrt{Z_u} du \leq C_9 \left( \int_0^t Z_u du \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{M}\{|P_t^{(k)}|^2\} \right)^{1/2} &\leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{y}_l, \tau_l) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l))^2 \right\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{y}_{n_t}, \tau_{n_t}) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}))^2 \right\} ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_{10} \left( \sum_{l=0}^{n_t-1} Z_{\tau_l} \Delta_N + Z_{\tau_{n_t}} (t - \tau_{n_t}) \right)^{1/2} \leq C_{10} \left( \int_0^t Z_u du \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Отметим, что последний переход в (7.14) получаем с использованием неравенства

$$\left| \int_0^t f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_0^t f^2(x)dx \int_0^t g^2(x)dx$$

при  $f(x) \equiv \sqrt{Z_x}$ ,  $g(x) \equiv 1$ .

Объединяя (7.9)–(7.11) и (7.12)–(7.15), приходим к неравенству

$$Z_t \leq K_6 \mathbb{M}\{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0|^2\} + K_7 \Delta_N + K_8 \int_0^t Z_u du.$$

Учитывая условие (7.7), имеем

$$Z_t \leq K_9 \Delta_N + K_8 \int_0^t Z_u du,$$

откуда с помощью неравенства Гронуолла находим

$$Z_t \leq K_{10} \Delta_N, \quad t \in [0, T]. \quad (7.16)$$

Далее с учетом (7.16) имеем

$$\mathbb{M}\{|x_T - y_N|\} \leq \sqrt{Z_T} \leq K\sqrt{\Delta_N},$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $\Delta_N$ . Теорема доказана.  $\square$

### Численный эксперимент 7.1. Для СДУ Ито

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad f_t \in \mathbb{R}^1, \quad (7.17)$$

смоделировать 2000 ( $M = 20$  групп по  $N = 100$  реализаций) независимых реализаций случайной величины  $x_T$  при  $T = 1$ ,  $a = b = 1.5$  по формуле

$$x_T = x_0 \exp \left( \left( a - \frac{1}{2} b^2 \right) T + b \sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i \right)$$

и с помощью метода Эйлера (7.6), выбирая  $f_{\tau_{i+1}} - f_{\tau_i} = \sqrt{\Delta} \zeta_i$  в (7.6). Здесь  $N = T/\Delta$ ;  $\Delta = 2^{-3}$ ;  $\zeta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ) — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Вычислить оценку  $\hat{\varepsilon}_{100,20}$  ошибки  $\varepsilon = \mathbb{M}\{|x_T - y_T|\}$  по формуле (7.3) ( $y_T$  определяется из (7.6)) и 90%-й доверительный интервал для  $\varepsilon$ . Повторить вычисления при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 4, 5, 6, 7$  и изобразить графически зависимость  $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$  с 90%-ми доверительными интервалами для  $\varepsilon$  при указанных значениях  $\Delta$ .

На рис. 7.1 представлен результат численного эксперимента 7.1. По данному рисунку можно судить, что зависимость  $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$  приблизительно соответствует зависимости  $C\sqrt{\Delta}$ ,  $C$  — постоянная.

Известно, что метод Эйлера достаточно хорошо ведет себя, когда коэффициенты СДУ Ито мало отличаются от постоянных. В то же время в ряде случаев (см. рис. 7.1) его точности оказывается явно недостаточно. В связи с этим возникает необходимость построения более точных численных методов решения СДУ Ито. Этому вопросу посвящены главы 7–9.

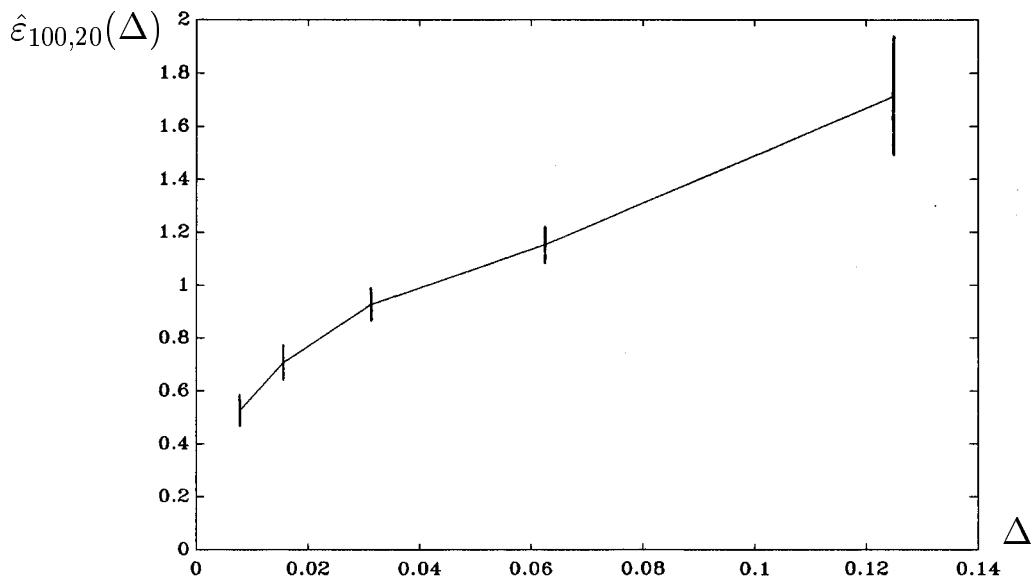


Рис. 7.1. Результат численного эксперимента 7.1.

Отметим, что ряд численных экспериментов из глав 7–10 осуществлен в [148] для других значений исходных параметров. Однако, часть численных экспериментов из глав 7–10, в том числе все численные эксперименты, касающиеся сильных численных методов порядка точности 2.5 и 3.0 и всех трехшаговых численных методов, являются новыми.

Заметим, что существует ряд результатов (см., например, разд. 7.6), которые ослабляют условия теоремы 7.1.

### 7.3 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито

#### 7.3.1 Метод порядка точности $r/2$ . Теорема о сходимости

Рассмотрим СДУ Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (7.18)$$

где  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — случайный процесс, являющийся решением уравнения (7.18);  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $\mathbf{a} : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $\Sigma : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times m}$  — неслучайные функции, удовлетворяющие условиям АI, АII (теорема 1.6);  $\mathbf{x}_0$  — начальное условие, которое стохастически не зависит от приращения  $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$  при  $\tau > 0$  и удовлетворяет условию АIII теоремы 1.6.

Предположим, что условия теоремы 4.7 выполнены. Тогда для процесса  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ , а  $\mathbf{x}_s$  — решение СДУ Ито (7.18), справедливо с вероятностью 1 следующее унифицированное разложение Тейлора–Ито:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\eta_t\} \stackrel{k}{\vdots} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k s,t} + H'_{r+1_{s,t}}, \quad (7.19)$$

$$H'_{r+1_{s,t}} = \hat{H}_{r+1_{s,t}} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{(r+1)/2}}{((r+1)/2)!} L^{(r+1)/2} \eta_t,$$

правая часть (7.19) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$\begin{aligned} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k s,t} &= \| I_{l_1 \dots l_k s,t}^{(i_1 \dots i_k)} \|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \\ I_{l_1 \dots l_k s,t}^{(i_1 \dots i_k)} &= \begin{cases} \int_t^s (t-\tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (t-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \quad (7.20) \\ G_p^{(i)} &= \frac{1}{p} \left( G_{p-1}^{(i)} L - L G_{p-1}^{(i)} \right); \quad p = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}'_q = \mathcal{D}_q \cup \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k = l_1 = \dots = l_k = 0 \text{ и } 2j = q + 1\},$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left( j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

а остальные обозначения такие же, как в теореме 4.7.

Из (7.19) при  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ ,  $s = \tau_{p+1}$ ,  $t = \tau_p$  ( $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$ , удовлетворяющее условию (7.1)) получим общее представление явной одношаговой численной схемы для СДУ Ито (7.18)

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \stackrel{k}{\vdots} {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \quad (7.21)$$

где

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} = \| \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \quad \text{а } \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$$

— аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито вида (7.20), причем при  $k = 0$  полагаем ее равной 1.

Определим процесс  $\mathbf{y}_s$ ,  $s \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  равенством (7.21), в котором необходимо заменить  $\tau_{p+1}$  на  $s$ .

Для всех  $s \in [0, T]$  положим

$$z_s \stackrel{\text{def}}{=} M \left\{ \sup_{0 \leq t \leq s} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2 \right\}.$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что  $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$ ,  $\Delta = T/N$ ,  $p \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $T = \tau_N$ .

Сформулируем теорему о сильной сходимости явной одношаговой численной схемы (7.21).

**Теорема 7.2.** Пусть для фиксированного  $r = 2, 3, \dots$  выполнены следующие условия:

1. Для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$ ;  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ;  $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{D}'_q$  и  $t \in [0, T]$  выполнено неравенство:

$$\left| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} - G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{y} \right| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

2. Для всех  $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{D}'_q$  ( $k \neq 0$ );  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$  и  $p \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$  выполнены условия:

$$\begin{aligned} M \left\{ \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} |F_{\tau_p}| \right\} &= 0 \text{ c в. 1,} \\ M \left\{ \left( I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} - \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} &\leq C \Delta^{r+1}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

3. Для всех  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ;  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ;  $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{A}_q$  и  $t \in [0, T]$  выполнено неравенство:

$$\left| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|),$$

где  $G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \in \mathcal{L}$  (класс  $\mathcal{L}$  определен в разд. 4.1).

4. Для всех  $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r$ ;  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ;  $i_1, \dots, i_k, q = 1, \dots, m$  и  $t \in [0, T]$  справедливо неравенство:

$$\left| G_0^{(q)} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| + \left| L G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| \leq K_3 (1 + |\mathbf{x}|).$$

5. Случайные величины  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  —  $F_0$ -измеримы и к тому же

$$M\{|x_0 - y_0|^2\} \leq K_4 \Delta^r, \quad M\{|x_0|^2\} < \infty,$$

где постоянные  $K_1, K_2, K_3, K_4, C$  не зависят от  $\Delta$ .

Тогда справедлива оценка

$$z_T \leq K \Delta^r, \quad (7.23)$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $\Delta$ .

Доказательство. Положим  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ ,  $s = \tau_{p+1}$ ,  $t = \tau_p$ ,  $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$ ,  $\Delta > 0$ ,  $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ,  $T = \tau_N$ . Тогда из (7.19) получим следующее справедливое с вероятностью 1 точное представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{\Delta^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{x}_{\tau_p} \} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + \\ + H'_{r+1 \tau_{p+1}, \tau_p}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Нетрудно видеть, что для всех  $s \in [0, T]$  из (7.21) и (7.24) с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s - \mathbf{y}_s = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 + \\ + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \left\{ \sum_{p=0}^{n_s-1} \left[ X_{j l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Y_{j l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right] + \right. \\ \left. + X_{j l_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} + Y_{j l_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right\} + \sum_{p=0}^{n_s-1} H'_{r+1 \tau_{p+1}, \tau_p} + H'_{r+1 s, \tau_{n_s}}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{y}_s$  определяется из (7.21), а  $\mathbf{x}_s$  — из (7.24) при  $\tau_{p+1} = s$ ,

$$X_{j l_1 \dots l_k \theta, t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{y}_t \} \stackrel{k}{\cdot} \left( {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \theta, t} - {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \theta, t} \right),$$

$$\begin{aligned} Y_{j l_1 \dots l_k \theta, t} &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[ {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{x}_t \} - {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{y}_t \} \right] \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \theta, t}, \end{aligned}$$

где  $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max_p \{ p : \tau_p \leq s \}$ .

Далее

$$z_T \leq C_0 \left\{ M \left\{ |x_0 - y_0|^2 \right\} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} (V_{jl_1\dots l_k}(T) + W_{jl_1\dots l_k}(T)) + U(T) \right\}, \quad (7.25)$$

где

$$V_{jl_1\dots l_k}(T) \stackrel{\text{def}}{=} M \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} X_{jl_1\dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + X_{jl_1\dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\},$$

$$W_{jl_1\dots l_k}(T) \stackrel{\text{def}}{=} M \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} Y_{jl_1\dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Y_{jl_1\dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\},$$

$$U(T) \stackrel{\text{def}}{=} M \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} H'_{r+1 \tau_{p+1}, \tau_p} + H'_{r+1 s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\}.$$

Оценим величины  $V_{jl_1\dots l_k}(T)$ ,  $W_{jl_1\dots l_k}(T)$ ,  $U(T)$  без слагаемых с  $k = 0$ . Воспользовавшись условием 1 теоремы 7.2 и неравенством Дуба для дискретного мартингала

$$\left\{ \sum_{p=0}^g Y_{jl_1\dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \quad g = 0, 1, \dots \right\},$$

получим

$$\begin{aligned} W_{jl_1\dots l_k}(T) &\leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} M \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} Y_{jl_1\dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Y_{jl_1\dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} = \\ &= 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \left( \sum_{p=0}^{n_s-1} M \left\{ \left| Y_{jl_1\dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right|^2 \right\} + M \left\{ \left| Y_{jl_1\dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} \right) \leq \\ &\leq C_1 \sup_{0 \leq s \leq T} \left( \Delta \sum_{p=0}^{n_s-1} M \left\{ |x_{\tau_p} - y_{\tau_p}|^2 \right\} + M \left\{ |x_{\tau_{n_s}} - y_{\tau_{n_s}}|^2 \right\} (s - \tau_{n_s}) \right) \leq \\ &\leq C_1 \int_0^T M \left\{ |x_u - y_u|^2 \right\} du \leq C_1 \int_0^T z_u du. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Оценим  $U(T)$ . Напомним (см. главу 4), что

$$\hat{H}_{r+1 s, t} = \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{U}_r} Z_{jl_1\dots l_k s, t} + \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_r} F_{jl_1\dots l_k s, t}, \quad (7.27)$$

где

$$Z_{jl_1 \dots l_{k_s,t}} = \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \mathbf{x}_t \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}J_{l_1 \dots l_{k_s,t}};$$

$$\begin{aligned} F_{jl_1 \dots l_{k_s,t}} &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \frac{1}{j!} \int_t^s (s-\tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s-\tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s-\tau)^j \times \\ &\times \left( L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \mathbf{x}_\tau d\tau + {}^{(1)}G_0 L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \mathbf{x}_\tau \stackrel{-1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}. \end{aligned}$$

Применив к дискретному мартингалу

$$\left\{ \sum_{p=0}^g H'_{r+1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}, \quad g = 0, 1, \dots \right\}$$

неравенство Дуба, получим

$$\begin{aligned} U(T) &\leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} H'_{r+1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + H'_{r+1_{s, \tau_{n_s}}} \right|^2 \right\} = \\ &= 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \left( \sum_{p=0}^{n_s-1} \mathbb{M} \left\{ \left| H'_{r+1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} \right|^2 \right\} + \mathbb{M} \left\{ \left| H'_{r+1_{s, \tau_{n_s}}} \right|^2 \right\} \right). \end{aligned} \quad (7.28)$$

В соответствии с леммой 4.4 в условиях АI, АII (теорема 1.6) при  $\mathbb{M} \{|\mathbf{x}_0|^{2n}\} < \infty$ ,  $n \geq 1$  справедлива оценка

$$\mathbb{M} \{|\mathbf{x}_t|^{2n}\} \leq (1 + \mathbb{M} \{|\mathbf{x}_0|^{2n}\}) e^{C(t-t_0)}, \quad (7.29)$$

где  $t \in [0, T]$ ;  $C = 2n(2n+1)K^2$ ;  $K < \infty$  — постоянная.

Воспользовавшись представлением (7.27), неравенствами (1.46), (1.47) при  $n = 1$ , условиями 3, 4 теоремы 7.2 и (7.28), (7.29), найдем

$$\begin{aligned} U(T) &\leq \\ &\leq C_2 (1 + \mathbb{M} \{|\mathbf{x}_0|^2\}) \sup_{0 \leq s \leq T} \left( \sum_{p=0}^{n_s-1} \Delta^{r+1} + (s - \tau_{n_s})^{r+1} \right) \leq \\ &\leq C_3 \Delta^r. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Оценим  $V_{jl_1 \dots l_k}(T)$ . С учетом условий 2 и 3 теоремы 7.2 и неравенства Дуба для дискретного мартингала

$$\left\{ \sum_{p=0}^g X_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, g = 0, 1, \dots \right\}$$

имеем

$$\begin{aligned} V_{jl_1 \dots l_k}(T) &\leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} M \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} X_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + X_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} = \\ &= 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \left( \sum_{p=0}^{n_s-1} M \left\{ \left| X_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right|^2 \right\} + M \left\{ \left| X_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} \right) \leq \\ &\leq C_4 \sup_{0 \leq s \leq T} \left( \sum_{p=0}^{n_s-1} M \left\{ 1 + |\mathbf{y}_{\tau_p}|^2 \right\} \Delta^{r+1} + M \left\{ 1 + |\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}|^2 \right\} (s - \tau_{n_s})^{r+1} \right). \quad (7.31) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$M \left\{ |\mathbf{y}_\theta|^2 \right\} \leq 2M \left\{ |\mathbf{x}_\theta|^2 \right\} + 2M \left\{ |\mathbf{y}_\theta - \mathbf{x}_\theta|^2 \right\},$$

где  $\theta \in [0, T]$ .

Тогда на основании приведенных ранее рассуждений получаем из (7.31) следующую оценку:

$$\begin{aligned} V_{jl_1 \dots l_k}(T) &\leq \Delta^r \left( C_5 + C_6 \left( 1 + M \left\{ |\mathbf{x}_0|^2 \right\} \right) + C_7 \int_0^T z_u du \right) \leq \\ &\leq \Delta^r \left( C_8 + C_7 \int_0^T z_u du \right). \quad (7.32) \end{aligned}$$

С помощью использованных ранее аргументов и неравенства Минковского нетрудно вывести оценки (7.26), (7.30), (7.32) с учетом слагаемых с  $k = 0$ , входящих в  $V_{jl_1 \dots l_k}(T)$ ,  $W_{jl_1 \dots l_k}(T)$ ,  $U(T)$ .

Объединяя теперь неравенства (7.25), (7.26), (7.30), (7.32) и учитывая условие 5 теоремы 7.2, находим

$$z_T \leq C_9 \Delta^r + C_{10} \int_0^T z_u du. \quad (7.33)$$

Согласно неравенству Гронуолла и (7.33) имеем

$$z_T \leq K \Delta^r, \quad (7.34)$$

где постоянная  $K_3$  не зависит от  $\Delta$ . Теорема доказана.  $\square$

Из неравенства (7.34) и неравенства Ляпунова следует, что явный одношаговый численный метод (7.21) в условиях теоремы 7.2 сходится сильно с порядком точности  $r/2$  к решению СДУ Ито (7.18).

### 7.3.2 Метод Г.Н. Мильштейна

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при  $r = 2$ . Тогда из (7.21) при  $r = 2$  получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0, который носит название метода Г.Н. Мильштейна [76]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)q}. \quad (7.35)$$

Здесь и далее приняты сокращенные обозначения:  $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ ;  $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}$ ;  $\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i$ ;  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ ; индекс  $q$  указывает на то, что соответствующая величина является аппроксимацией повторного стохастического интеграла.

С помощью теоремы 5.1 имеем следующие формулы для аппроксимаций стохастических интегралов Ито:

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (7.36)$$

$$I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} = \sum_{j_1,j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (7.37)$$

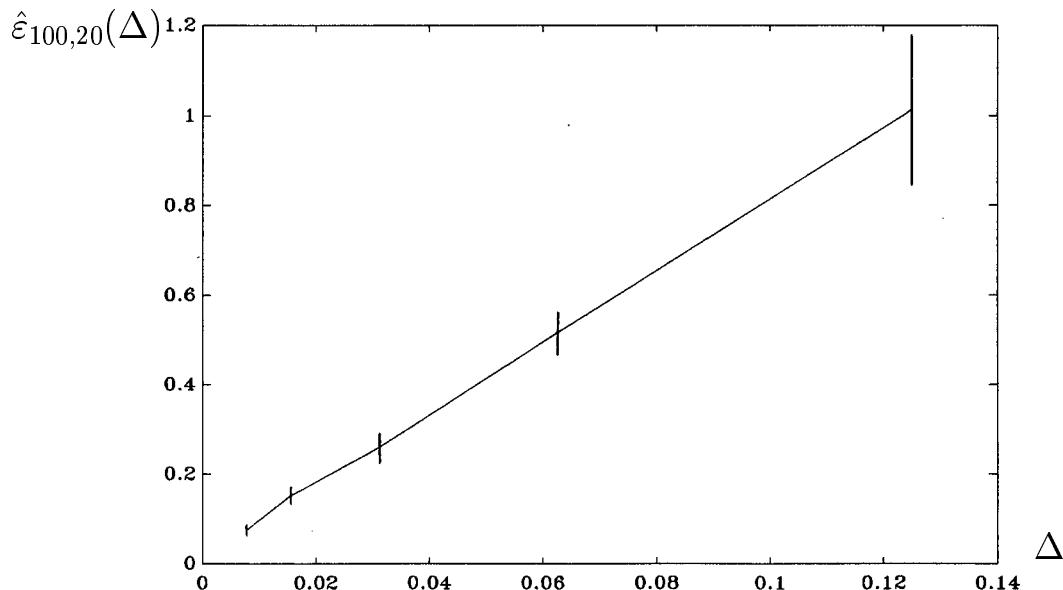


Рис. 7.2. Результат численного эксперимента 7.2.

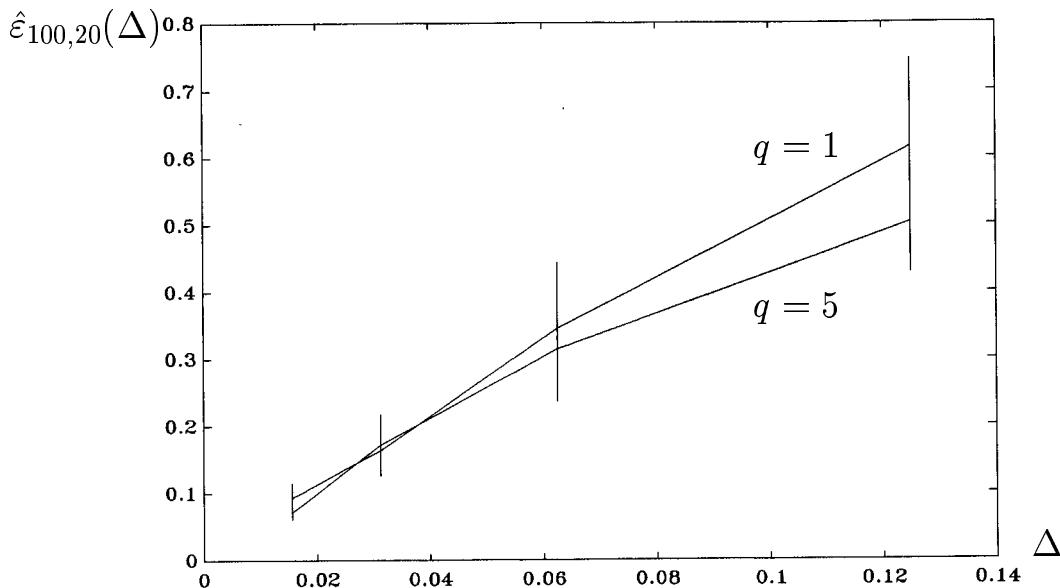


Рис. 7.3. Результат численного эксперимента 7.3.

где

$$C_{j_2 j_1} = \int_{[\tau_p, \tau_{p+1}]^2} K(t_1, t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2,$$

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, t_2 \in [\tau_p, \tau_{p+1}],$$

$$\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(i)} \quad (i = 1, \dots, m),$$

здесь  $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или тригонометрических функций в пространстве  $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ .

Число  $q$  в (7.37) следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при  $r = 2$ .

Если в качестве полной ортонормированной системы  $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$  в пространстве  $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$  взята система полиномов Лежандра, то формула (7.37), согласно результатам главы 6, имеет вид:

$$I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2)q} = \frac{\Delta}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) \right) - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}} \Delta, \quad (7.38)$$

где число  $q$  выбираем при  $i_1 \neq i_2$  из следующего условия:

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq C \Delta^3, \quad (7.39)$$

постоянная  $C$  входит в условие (7.22) теоремы 7.2.

В качестве системы функций  $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$  также можно взять тригонометрическую систему [76] (см. также разд. 6.7).

**Численный эксперимент 7.2<sup>1</sup>.** Повторить численный эксперимент 7.1 методом Г.Н. Мильштейна (7.35).

**Численный эксперимент 7.3.** Повторить численный эксперимент 7.1 методом Г.Н. Мильштейна (7.35) для СДУ Ито:

$$dx_t = ax_t dt + \sum_{i=1}^3 b_i x_t d\mathbf{f}_t^{(i)}, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad (7.40)$$

$\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, 2, 3$  — независимые стандартные винеровские процессы;  $a = b_1 = b_2 = b_3 = 1$ ;  $T = 1$ . Для моделирования стохастических интегралов Ито  $I_{00_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(i_2 i_1)}$  в случае  $i_1 \neq i_2$ ;  $i_1, i_2 = 1, 2, 3$  применить формулу (7.38) при  $q = 1$ , а в случае  $i_1 = i_2$ ;  $i_1 = 1, 2, 3$  — формулу (7.38) при  $q = 0$ . В качестве формулы для моделирования точного решения уравнения (7.40) при  $t = T$  использовать соотношение

$$x_T = x_0 \exp \left( \left( a - \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \right) T + \sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \left( b_1 \zeta_i^{(1)} + b_2 \zeta_i^{(2)} + b_3 \zeta_i^{(3)} \right) \right),$$

где  $\zeta_i^{(j)}$ ;  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $j = 1, 2, 3$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины (они же используются и при моделировании повторных стохастических интегралов из (7.35)). Повторить данный численный эксперимент при  $q = 5$ .

Зависимости, изображенные на рис. 7.2 и 7.3, близки к линейным, что подтверждает тот факт, что метод Г.Н. Мильштейна при подходящих условиях является сильным численным методом порядка точности 1.0.

### 7.3.3 Методы порядка точности 1.5

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при  $r = 3$ . Тогда из (7.21) при  $r = 3$  получим явный одношаговый сильный численный метод порядка

<sup>1</sup> В численных экспериментах из глав 7–10, если не оговаривается противное, для моделирования повторных стохастических интегралов Ито  $I_{0\dots 0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1\dots 1)}$ ;  $l = 1, 2, \dots$  ( $l$  – кратность интеграла) используются формулы, основанные на многочленах Эрмита (см. главу 6).

точности 1.5 вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3)i_2i_1q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

По формулам главы 6 получаем следующие выражения для совместного численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито  $I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}$ ,  $I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}$ ,  $I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1}$ ,  $I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3)i_2i_1}$ :

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (7.42)$$

$$I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right), \quad (7.43)$$

$$I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2)q} = \frac{\Delta}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) \right) - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2i_3)q} = & \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^q C_{j_3j_2j_1} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\ & \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_1i_1)} = \frac{1}{6} \Delta^{3/2} \left( \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^3 - 3 \zeta_0^{(i_1)} \right), \quad (7.46)$$

где

$$\begin{aligned} C_{j_3j_2j_1} = & \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz = \\ = & \frac{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)}}{8} \Delta^{3/2} \bar{C}_{j_3j_2j_1}, \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{j_3 j_2 j_1} = \int_{-1}^1 P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz,$$

где  $P_i(x)$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$  — полиномы Лежандра.

Согласно главе 6, среднеквадратические погрешности приведенных аппроксимаций определяются по формулам:

$$M \left\{ \left( I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \quad (i_1 \neq i_2), \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} &= \\ &= \frac{\Delta^3}{6} - \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^2 \quad (i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_2 \neq i_3), \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} &= \frac{\Delta^3}{6} - \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^2 - \\ &- \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_2 j_3 j_1} C_{j_3 j_2 j_1} \quad (i_1 \neq i_2 = i_3), \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} &= \frac{\Delta^3}{6} - \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^2 - \\ &- \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_1 j_2 j_3} \quad (i_1 = i_3 \neq i_2), \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} &= \frac{\Delta^3}{6} - \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^2 - \\ &- \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_3 j_1 j_2} C_{j_3 j_2 j_1} \quad (i_1 = i_2 \neq i_3). \end{aligned} \quad (7.51)$$

В случае произвольных  $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$  также верна оценка (см. главу 6):

$$M \left\{ \left( I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} \leq 6 \left( \frac{\Delta^3}{6} - \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^2 \right). \quad (7.52)$$

Число  $q$  в (7.47) – (7.52) следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при  $r = 3$ . Отметим, что числа  $q$ , вообще говоря, различны для аппроксимаций различных повторных стохастических

интегралов. Далее в основном мы используем  $q$  вместо  $q_1, q_2, \dots$  с целью упрощения обозначений.

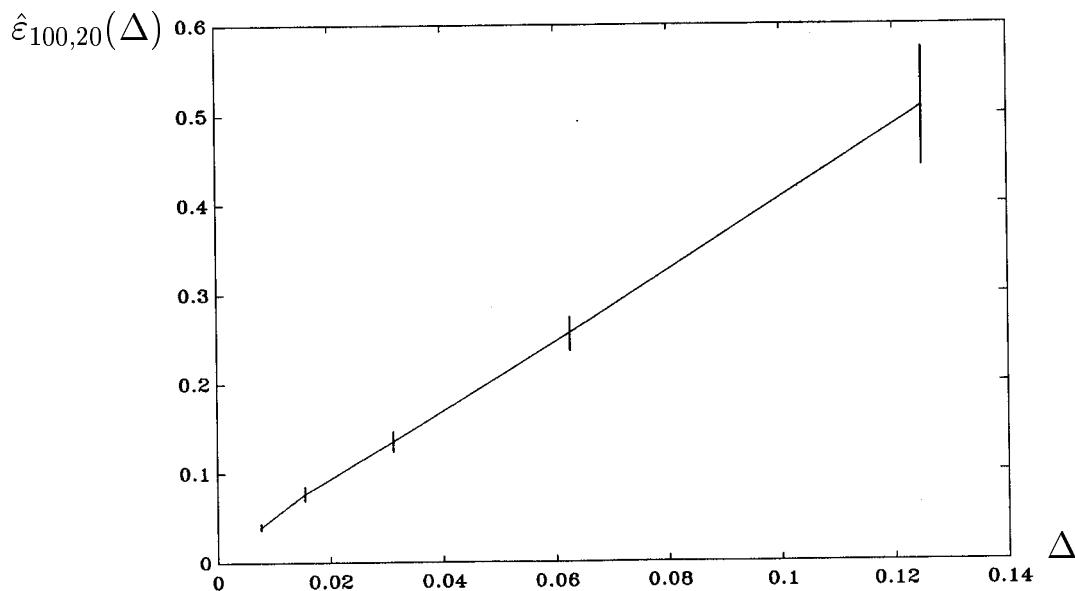


Рис. 7.4. Результат численного эксперимента 7.4.

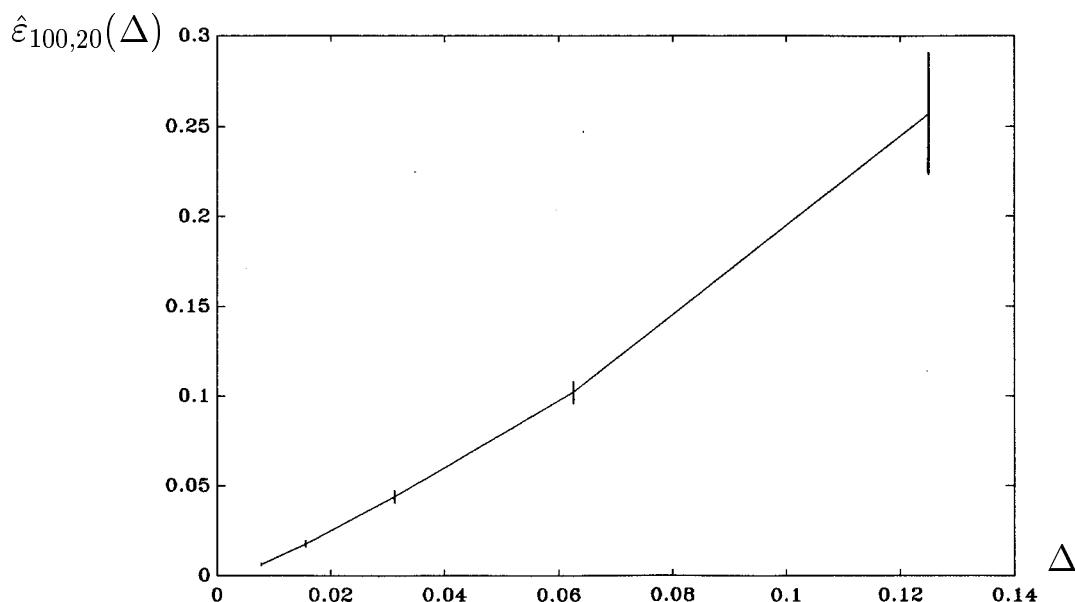


Рис. 7.5. Результат численного эксперимента 7.5.

Следует отметить, что ряд коэффициентов  $\bar{C}_{j_3 j_2 j_1}$  вычислен в табл. 6.4–6.10. Вообще говоря, точное вычисление коэффициентов  $\bar{C}_{j_3 j_2 j_1}$  с помощью программ типа DERIVE не составляет проблемы. В результате моделирование по формулам (7.42) – (7.46) с контролем среднеквадратической погрешности аппроксимации по формулам (7.47) – (7.52) делает процедуру реализации рассматриваемого численного метода достаточно прозрачной.

В заключение рассмотрим следующий явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{v}_p, \quad (7.53)$$

где  $\mathbf{v}_p$  — правая часть численного метода (7.41) без слагаемых  $\mathbf{y}_p$  и  $\Delta^2 L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)/2$ .

**Численный эксперимент 7.4.** (рис. 7.4). Повторить численный эксперимент 7.1 для сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.53). При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми равны нулю после применения метода (7.53) к уравнению (7.17) и приведения подобных слагаемых.

**Численный эксперимент 7.5.** (рис. 7.5). Повторить численный эксперимент 7.4 для численного метода порядка точности 1.5 вида (7.41).

В правую часть численного метода (7.53) входят слагаемые, имеющие порядок малости  $\gamma \leq 1.5$ , однако данный метод имеет согласно теореме 7.2 сильный порядок точности 1.0, а не 1.5. Учет слагаемого  $\Delta^2 L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)/2$  в численной схеме (7.41) делает ее сильной численной схемой порядка точности 1.5 (см. теорему 7.2). Эти теоретические выводы хорошо подтверждаются численными экспериментами (см. рис. 7.4 и 7.5).

### 7.3.4 Метод порядка точности 2.0

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при  $r = 4$ . Тогда из (7.21) при  $r = 4$  получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0 вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} - I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \right. \\ & \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \Delta I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \quad (7.54)$$

Для численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (7.54), воспользуемся формулами предыдущего раздела, а также формулами из глав 5 и 6:

$$\begin{aligned} I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2)q} = & -\frac{\Delta}{2} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2)q} - \frac{\Delta^2}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.55)$$

$$\begin{aligned} I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2)q} = & -\frac{\Delta}{2} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2)q} - \frac{\Delta^2}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} + \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$\begin{aligned} I_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q} = & \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \\ & \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \right), \end{aligned} \quad (7.57)$$

где  $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m$  и

$$\begin{aligned} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} = & \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_4}(u) \int_{\tau_p}^u \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz du = \\ = & \frac{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)}}{16} \Delta^2 \bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1}, \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1} = \int_{-1}^1 P_{j_4}(u) \int_{-1}^u P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz du,$$

где  $P_i(x)$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$  – полиномы Лежандра.

Согласно главе 6, среднеквадратические погрешности приведенных аппроксимаций определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left( I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{\Delta^4}{16} \left( \frac{5}{9} - 2 \sum_{i=2}^q \frac{1}{4i^2 - 1} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^q \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} \right) \end{aligned} \quad (7.58)$$

при  $i_1 \neq i_2$  и

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left( I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_1)} - I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left( I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_1)} - I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{\Delta^4}{16} \left( \frac{1}{9} - \sum_{i=0}^q \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} - 2 \sum_{i=1}^q \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right) \end{aligned} \quad (7.59)$$

при  $i_1 = i_2$ .

Кроме того применяем (6.37) — (6.42), (6.57) — (6.64) или оценку

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q} \right)^2 \right\} \leq 24 \left( \frac{\Delta^4}{24} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^2 \right)$$

при любых возможных  $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m$ .

Число  $q$  в приведенных формулах следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при  $r = 4$ .

**Численный эксперимент 7.6.** (рис. 7.6). Повторить численный эксперимент 7.4 для сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.54).

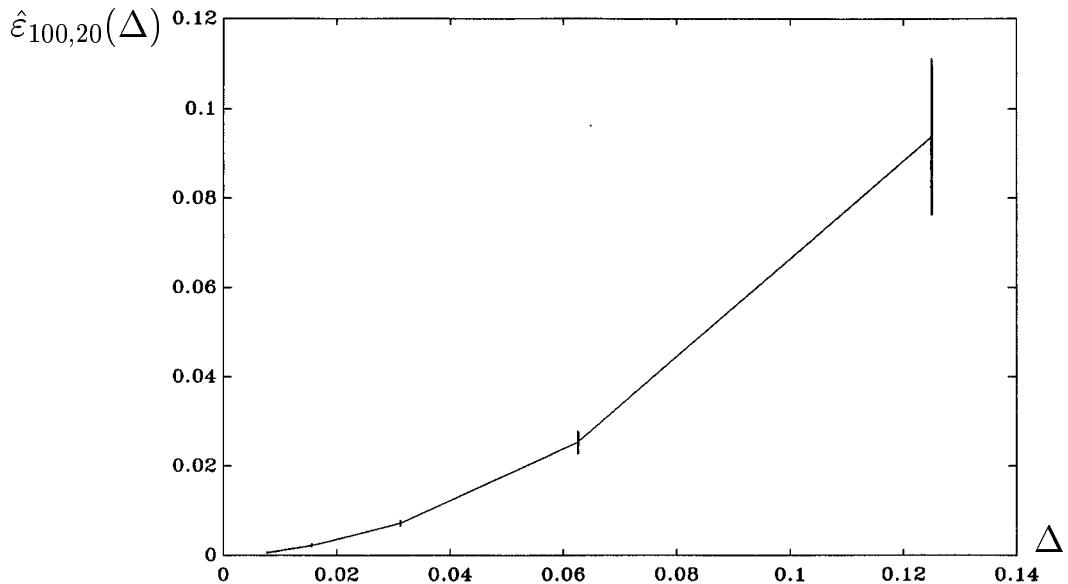


Рис. 7.6. Результат численного эксперимента 7.6.

### 7.3.5 Методы порядка точности 2.5

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при  $r = 5$ . Тогда из (7.21) при  $r = 5$  получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.5 вида

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1q} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3)i_2i_1q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a} + \\
 & + \sum_{i_1,i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)q} - I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)q} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)q} + \right. \\
 & \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)q} + \Delta I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)q} \right) \right] + \\
 & + \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4)i_3i_2i_1q} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} - LG_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ G_0^{(i_3)} LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} + I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) - LG_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \tag{7.60}
 \end{aligned}$$

Для численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (7.60), воспользуемся формулами предыдущих разделов, а также формулами (см. главы 5 и 6):

$$I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} = \frac{\Delta^{5/2}}{3} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \right), \tag{7.61}$$

$$\begin{aligned}
 I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{001} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \tag{7.62}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{010} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \tag{7.63}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{100} \left( \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \tag{7.64}
 \end{aligned}$$

$$I_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q} = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^q C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \prod_{l=1}^5 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
& -\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \Big), \tag{7.65}
\end{aligned}$$

где

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{001} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - z) \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz =$$

$$= \frac{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)}}{16} \Delta^{5/2} \bar{C}_{j_3 j_2 j_1}^{001},$$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{010} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z (\tau_p - y) \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz =$$

$$= \frac{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)}}{16} \Delta^{5/2} \bar{C}_{j_3 j_2 j_1}^{010},$$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{100} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y (\tau_p - x) \phi_{j_1}(x) dx dy dz =$$

$$= \frac{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)}}{16} \Delta^{5/2} \bar{C}_{j_3 j_2 j_1}^{100},$$

$$\begin{aligned}
 & C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} = \\
 & = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_5}(v) \int_{\tau_p}^v \phi_{j_4}(u) \int_{\tau_p}^u \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz du dv = \\
 & = \frac{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)(2j_4 + 1)(2j_5 + 1)}}{32} \Delta^{5/2} \bar{C}_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{j_3 j_2 j_1}^{100} &= - \int_{-1}^1 P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) (x + 1) dx dy dz, \\
 \bar{C}_{j_3 j_2 j_1}^{010} &= - \int_{-1}^1 P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) (y + 1) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz, \\
 \bar{C}_{j_3 j_2 j_1}^{001} &= - \int_{-1}^1 P_{j_3}(z) (z + 1) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz, \\
 \bar{C}_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} &= \\
 &= \int_{-1}^1 P_{j_5}(v) \int_{-1}^v P_{j_4}(u) \int_{-1}^u P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz du dv.
 \end{aligned}$$

Согласно главе 6 используем оценки (точные выражения для их левых частей получены в разд. 6.2.6 – 6.2.8 (см. также теорему 6.1)):

$$M \left\{ \left( I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} \leq 6 \left( \frac{\Delta^5}{60} - \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q (C_{j_3 j_2 j_1}^{100})^2 \right),$$

$$M \left\{ \left( I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} \leq 6 \left( \frac{\Delta^5}{20} - \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q (C_{j_3 j_2 j_1}^{010})^2 \right),$$

$$M \left\{ \left( I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} \leq 6 \left( \frac{\Delta^5}{10} - \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q (C_{j_3 j_2 j_1}^{001})^2 \right),$$

$$M \left\{ \left( I_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} - I_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q} \right)^2 \right\} \leq 120 \left( \frac{\Delta^5}{120} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^q C_{j_5 i_4 i_3 i_2 j_1}^2 \right)$$

для всех возможных  $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$ .

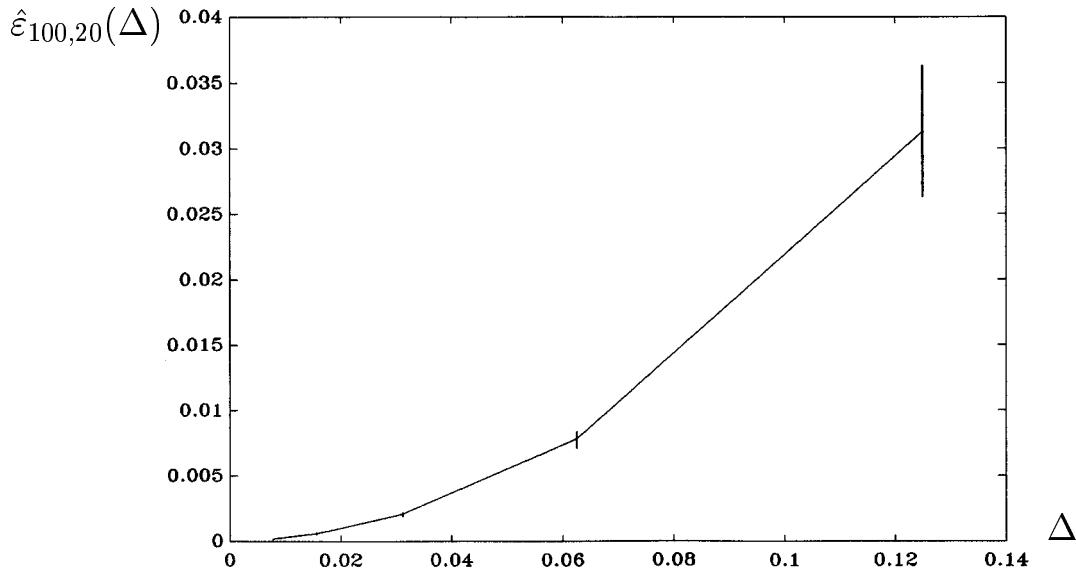


Рис. 7.7. Результат численного эксперимента 7.7.

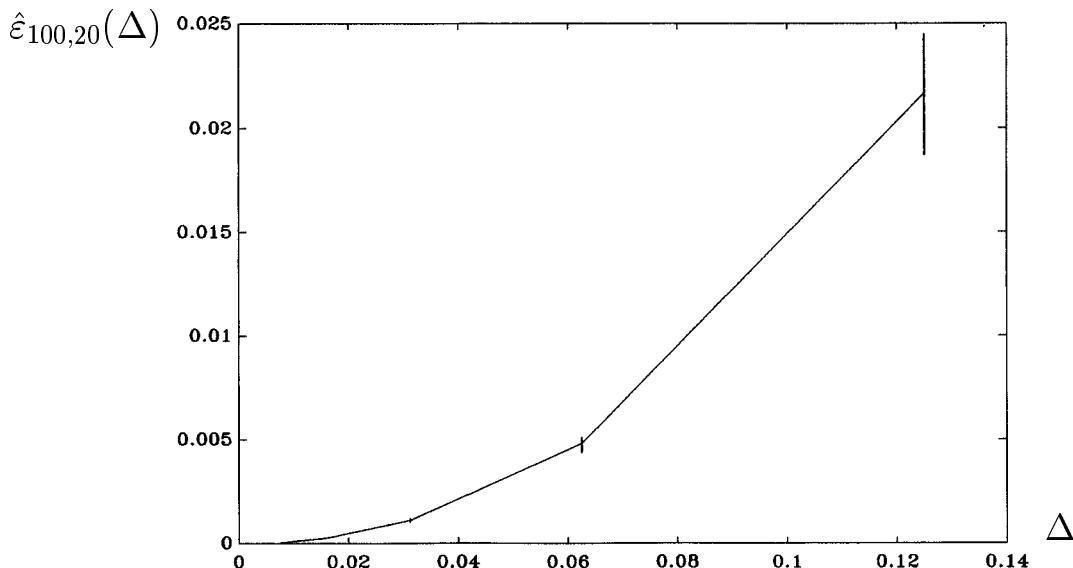


Рис. 7.8. Результат численного эксперимента 7.8.

Число  $q$  в приведенных формулах следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при  $r = 5$ .

Наряду с численным методом (7.60) рассмотрим следующий явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{v}_p, \quad (7.66)$$

где  $\mathbf{v}_p$  — правая часть численного метода (7.60) без слагаемых  $\mathbf{y}_p$  и  $\Delta^3 L^2 \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)/6$ . Численные методы (7.54), (7.60) и (7.66) согласно теореме 7.2 имеют сильный порядок точности 2.0, 2.5 и 2.0 соответственно (см. рис. 7.6–7.8), однако численный метод (7.66) эффективнее численного метода (7.54) (см. рис. 7.6, 7.7), по-видимому, благодаря учету нескольких дополнительных слагаемых.

**Численный эксперимент 7.7.** Повторить численный эксперимент 7.4 для сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.66).

**Численный эксперимент 7.8.** Повторить численный эксперимент 7.4 для сильного численного метода порядка точности 2.5 вида (7.60).

### 7.3.6 Метод порядка точности 3.0

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при  $r = 6$ . Тогда из (7.21) при  $r = 6$  получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 3.0 вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1 q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3)i_2 i_1 q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \\ & + \sum_{i_1,i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1 q} - I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1 q} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1 q} + \right. \\ & \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1 q} + \Delta I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)i_1 q} \right) \right] + \\ & + \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4)i_3 i_2 i_1 q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\ & + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^m \left[ G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( I_{100\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3)i_2 i_1 q} - I_{010\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3)i_2 i_1 q} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} + I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + \Delta I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} L^2 G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} - I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + \Delta \left( I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} - I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + L G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} - I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} L^2 \Sigma_{i_1} \left( \frac{1}{2} I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + \frac{1}{2} I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} - I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) - \right. \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \left[ G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta I_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} + I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} - I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} \right) - \right. \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_4)} L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} - I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} - I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6=1}^m G_0^{(i_6)} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_6 i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \tag{7.67}
\end{aligned}$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящих в правую часть (7.67), можно воспользоваться результатами глав 5–6, формулами из предыдущих разделов, а также формулами:

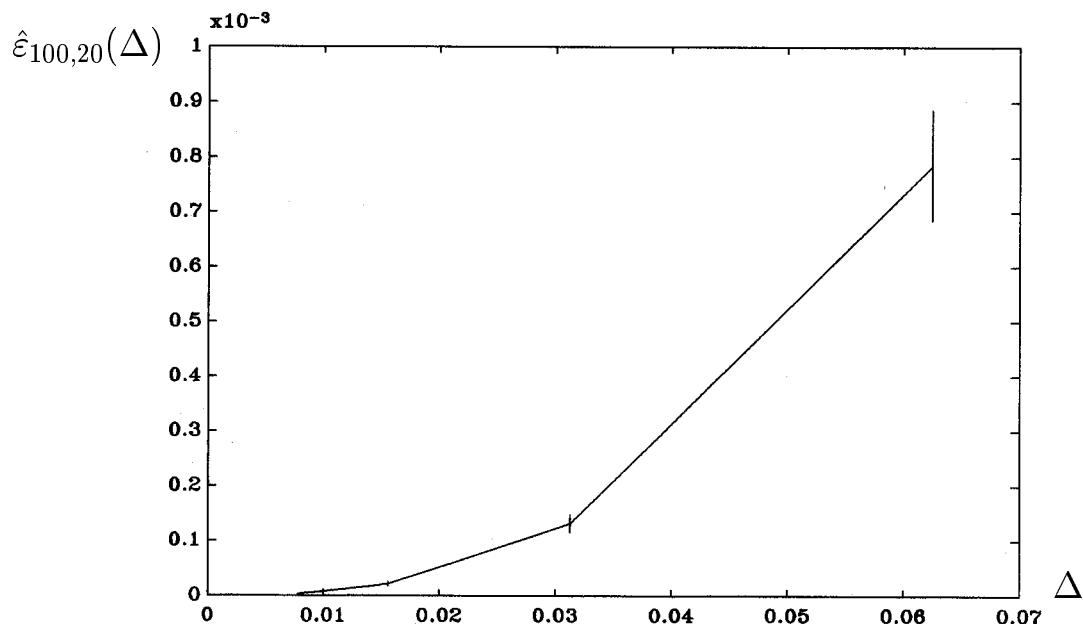


Рис. 7.9. Результат численного эксперимента 7.9.

$$\begin{aligned}
 I_{02\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} &= -\frac{\Delta^2}{4} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} - \Delta I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} + \frac{\Delta^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \\
 &+ \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+2)(i+3) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+1)(i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \\
 &\left. \left. + \frac{(i^2+i-3) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+3i-1) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^3, \\
 I_{20\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} &= -\frac{\Delta^2}{4} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} - \Delta I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} + \frac{\Delta^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_2^{(i_1)} + \right. \\
 &+ \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+1)(i+2) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+2)(i+3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \\
 &\left. \left. + \frac{(i^2+3i-1) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+i-3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} = & -\frac{\Delta^2}{4} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} - \frac{\Delta}{2} \left( I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} + I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)q} \right) + \frac{\Delta^3}{8} \left[ \frac{1}{3} \zeta_1^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\
 & + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+1)(i+3) (\zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)})}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(i+1)^2 (\zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)})}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)} \right) \right] - \frac{1}{24} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{0001\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q} = & \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0001} \left( \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \\
 & \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \right), \\
 I_{0010\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q} = & \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0010} \left( \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \\
 & \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \right), \\
 I_{0100\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q} = & \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0100} \left( \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \Big),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{1000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q} = & \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{1000} \left( \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
 & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
 & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \\
 & \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{000000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)q} = & \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6=0}^q C_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \left( \prod_{l=1}^6 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
 & - \mathbf{1}_{\{j_1=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{j_4=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{j_5=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & - \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & \left. - \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \right. \\
 & + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} \\
 & + \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \\
 & -\mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \\
 & -\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \\
 & -\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \\
 & -\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \\
 & -\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \\
 & -\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \\
 & -\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \Big),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0001} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - u) \phi_{j_4}(u) \int_{\tau_p}^u \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz du = \\
 &= \frac{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)(2j_4 + 1)}}{32} \Delta^3 \bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0001},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{j_3 j_2 j_1}^{0010} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_4}(u) \int_{\tau_p}^u (\tau_p - z) \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz du = \\
 &= \frac{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)(2j_4 + 1)}}{32} \Delta^3 \bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0010},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0100} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_4}(u) \int_{\tau_p}^u \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z (\tau_p - y) \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz du = \\
 &= \frac{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)(2j_4 + 1)}}{32} \Delta^3 \bar{C}_{j_3 j_2 j_1}^{0100},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{1000} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_4}(u) \int_{\tau_p}^u \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y (\tau_p - x) \phi_{j_1}(x) dx dy dz du = \\
 &= \frac{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)(2j_4 + 1)}}{32} \Delta^3 \bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{1000},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & C_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} = \\
 & = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_6}(w) \int_{\tau_p}^w \phi_{j_5}(v) \int_{\tau_p}^v \phi_{j_4}(u) \int_{\tau_p}^u \phi_{j_3}(z) \int_{\tau_p}^z \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy dz du dv dw = \\
 & = \frac{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1)(2j_5+1)(2j_6+1)}}{64} \Delta^3 \bar{C}_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1},
 \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{1000} = - \int_{-1}^1 P_{j_4}(u) \int_{-1}^u P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) (x+1) dx dy dz,$$

$$\bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0100} = - \int_{-1}^1 P_{j_4}(u) \int_{-1}^u P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) (y+1) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz,$$

$$\bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0010} = - \int_{-1}^1 P_{j_4}(u) \int_{-1}^u P_{j_3}(z) (z+1) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz,$$

$$\bar{C}_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0001} = - \int_{-1}^1 P_{j_4}(u) (u+1) \int_{-1}^u P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz,$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{C}_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} = \\
 & = \int_{-1}^1 P_{j_6}(w) \int_{-1}^w P_{j_5}(v) \int_{-1}^v P_{j_4}(u) \int_{-1}^u P_{j_3}(z) \int_{-1}^z P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy dz du dv dw,
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^6}{30} - \sum_{j_1, j_2=0}^q \left( C_{j_2 j_1}^{20} \right)^2 - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^{20} C_{j_1 j_2}^{20} \ (i_1 = i_2),$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^6}{30} - \sum_{j_1, j_2=0}^q \left( C_{j_2 j_1}^{20} \right)^2 \ (i_1 \neq i_2),$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^6}{18} - \sum_{j_1, j_2=0}^q \left( C_{j_2 j_1}^{11} \right)^2 - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^{11} C_{j_1 j_2}^{11} \ (i_1 = i_2),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^6}{18} - \sum_{j_1, j_2=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{11}\right)^2 \quad (i_1 \neq i_2),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^6}{6} - \sum_{j_1, j_2=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{02}\right)^2 - \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1}^{02} C_{j_1 j_2}^{02} \quad (i_1 = i_2),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^6}{6} - \sum_{j_1, j_2=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{02}\right)^2 \quad (i_1 \neq i_2),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} \leq 2\left(\frac{\Delta^6}{30} - \sum_{j_2, j_1=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{20}\right)^2\right),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} \leq 2\left(\frac{\Delta^6}{18} - \sum_{j_2, j_1=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{11}\right)^2\right),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} \leq 2\left(\frac{\Delta^6}{6} - \sum_{j_2, j_1=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{02}\right)^2\right),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q}\right)^2\right\} \leq 24\left(\frac{\Delta^6}{360} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^q \left(C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{1000}\right)^2\right),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q}\right)^2\right\} \leq 24\left(\frac{\Delta^6}{120} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^q \left(C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0100}\right)^2\right),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q}\right)^2\right\} \leq 24\left(\frac{\Delta^6}{60} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^q \left(C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0010}\right)^2\right),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q}\right)^2\right\} \leq 24\left(\frac{\Delta^6}{36} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^q \left(C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0001}\right)^2\right),$$

$$\mathbb{M}\left\{\left(I_{000000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)} - I_{000000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)q}\right)^2\right\} \leq 625\left(\frac{\Delta^6}{625} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6=0}^q C_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^2\right),$$

Где

$$C_{j_2 j_1}^{20} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_2}(y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) (\tau_p - x)^2 dx dy = \frac{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}}{16} \Delta^3 \bar{C}_{j_2 j_1}^{20},$$

$$C_{j_2 j_1}^{02} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_2}(y) (\tau_p - y)^2 \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) dx dy = \frac{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}}{16} \Delta^3 \bar{C}_{j_2 j_1}^{02},$$

$$C_{j_2 j_1}^{11} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_2}(y) (\tau_p - y) \int_{\tau_p}^y \phi_{j_1}(x) (\tau_p - x) dx dy = \frac{\sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}}{16} \Delta^3 \bar{C}_{j_2 j_1}^{11},$$

$$\bar{C}_{j_2 j_1}^{20} = \int_{-1}^1 P_{j_2}(y) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) (x + 1)^2 dx dy,$$

$$\bar{C}_{j_2 j_1}^{02} = \int_{-1}^1 P_{j_2}(y) (y + 1)^2 \int_{-1}^y P_{j_1}(x) dx dy,$$

$$\bar{C}_{j_2 j_1}^{11} = \int_{-1}^1 P_{j_2}(y) (y + 1) \int_{-1}^y P_{j_1}(x) (x + 1) dx dy.$$

**Численный эксперимент 7.9.** (рис. 7.9). Повторить численный эксперимент 7.4 при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 4, 5, 6, 7$  для сильного численного метода порядка точности 3.0 вида (7.67).

## 7.4 Явные одношаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Стратоновича

### 7.4.1 Методы порядка точности $r/2$ . Теоремы о сходимости

Пусть процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $\mathbf{x}_s$  — решение СДУ Ито (7.18), удовлетворяет условиям теоремы 4.9. Тогда при всех  $s, t \in [0, T] : s > t$ , с вероятностью 1 справедливо разложение [148]:

$$\begin{aligned} \eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{ \eta_t \} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^* + \\ + \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{(r+1)/2}}{((r+1)/2)!} L^{(r+1)/2} \eta_t + H''_{r+1, s, t}, \end{aligned} \quad (7.68)$$

где

$$H''_{r+1,s,t} = H_{r+1,s,t} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{(r+1)/2}}{((r+1)/2)!} L^{(r+1)/2} \eta_t,$$

правая часть (7.68) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q, \lambda_l \in \{1, 0\}, l = 1, \dots, k\},$$

$$(p_k) J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^* = \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k},$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*s} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \quad (7.69)$$

$\lambda_l = 1$  или  $\lambda_l = 0$ ;  $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = \bar{L}$  и  $i_l = 0$  при  $\lambda_l = 0$ ;  $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$  и  $i_l = 1, \dots, m$  при  $\lambda_l = 1$ ;

$$p_l = \sum_{j=1}^l \lambda_j; \quad \bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)};$$

$\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ; операторы  $L$  и  $G_0^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) такие же, как в лемме 4.1.

Пусть  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ ,  $s = \tau_{p+1}$ ,  $t = \tau_p$ ,  $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$ , для которого выполняется условие (7.1). Тогда из (7.68) получаем общее представление явной сильной численной схемы решения СДУ Ито (7.18)

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} (p_k) D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{ \mathbf{y}_{\tau_p} \} \stackrel{p_k}{\cdot} (p_k) \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^* +$$

$$+ \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^{(r+1)/2}}{((r+1)/2)!} L^{(r+1)/2} \mathbf{y}_{\tau_p}, \quad (7.70)$$

где

$$(p_k) \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k}, \quad \text{а } \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)}$$

— аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича.

В дальнейшем для простоты будем считать, что  $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$ ,  $\Delta = T/N$ ,  $p \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $T = \tau_N$ .

Обозначим

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0, l = 1, \dots, k\}.$$

**Теорема 7.4.** Пусть для  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$  и  $r = 2, 3, \dots$  выполнены следующие условия:

1. Для всех  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{k=1}^r \mathcal{M}_k$  имеем  $Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) \in \mathcal{L}$ .

2. Для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ;  $\tau, \theta \in [0, T]$ ;  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{k=1}^{r+1} \mathcal{M}_k$  и некоторого  $\nu > 0$  справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{y}, \tau)| &\leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\ |Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau)| &\leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \\ |Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \theta)| &\leq K_3 |\tau - \theta|^\nu (1 + |\mathbf{x}|). \end{aligned}$$

3. Для всех  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q,k=1}^r \mathcal{E}_{qk}$ ;  $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ;  $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$  и  $i_1^2 + \dots + i_k^2 > 0$  выполнены условия:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} |F_{\tau_p} \right\} &= 0 \text{ с в. 1,} \\ \mathbb{M} \left\{ \left( J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} &\leq C' \Delta^{r+1}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

4. Случайные величины  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 = F_0$ -измеримы и

$$\mathbb{M} \{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} \leq K_4 \Delta^r, \quad \mathbb{M} \{|\mathbf{x}_0|^8\} < \infty,$$

где постоянные  $K_1, \dots, K_4$ ,  $C'$  не зависят от  $\Delta$ .

Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2 \right\} \leq K \Delta^r,$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $\Delta$ , а величина  $\mathbf{y}_t$  определяется из (7.70) при  $\tau_{p+1} = t$ .

Доказательство похожего утверждения можно найти в монографии [148].

Таким образом, если условия теоремы 7.4 выполнены, то численный метод (7.70) является явным одношаговым сильным численным методом порядка точности  $r/2$ .

Рассмотрим модификацию метода (7.70), основанную на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича.

Пусть процесс  $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ , где  $R : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $\mathbf{x}_s$  — решение СДУ Ито (7.18), удовлетворяет условиям теоремы 4.10. Тогда при всех  $s, t \in [0, T] : s > t$ , справедливо унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича вида

$$\begin{aligned} \eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_k} \dots \bar{G}_{l_1} \bar{L}^j \{\eta_t\} \cdot {}^{(k)}I_{l_k \dots l_1 s,t}^* + \\ + \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{(r+1)/2}}{((r+1)/2)!} L^{(r+1)/2} \eta_t + \bar{H}'_{r+1 s,t} \text{ с. в. 1}, \end{aligned} \quad (7.72)$$

где

$$\bar{H}'_{r+1 s,t} = \bar{H}_{r+1 s,t} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{(r+1)/2}}{((r+1)/2)!} L^{(r+1)/2} \eta_t,$$

правая часть существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$${}^{(k)}I_{l_k \dots l_1 s,t}^* = \left\| I_{l_k \dots l_1 s,t}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \quad (7.73)$$

$$I_{l_k \dots l_1 s,t}^{*(i_k \dots i_1)} = \begin{cases} \int_t^{*s} (t - \tau_k)^{l_1} \dots \int_t^{*\tau_2} (t - \tau_1)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

$$\bar{G}_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left( \bar{G}_{p-1}^{(i)} \bar{L} - \bar{L} \bar{G}_{p-1}^{(i)} \right), \quad p = 1, 2, \dots; \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\bar{L} \stackrel{\text{def}}{=} L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}, \quad \bar{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left( j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Рассмотрим разбиение  $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  промежутка  $[0, T]$ , для которого

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Из (7.72) при  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ ,  $s = \tau_{p+1}$ ,  $t = \tau_p$  получим общее представление явной численной схемы решения СДУ Ито (7.18):

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_k} \dots \bar{G}_{l_1} \bar{L}^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}I_{l_k \dots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p}^* +$$

$$+ \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^{(r+1)/2}}{((r+1)/2)!} L^{(r+1)/2} \mathbf{y}_{\tau_p}, \quad (7.74)$$

где

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_k \dots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{I}_{l_k \dots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \text{ а } \hat{I}_{l_k \dots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \quad (7.75)$$

— аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича из (7.73), которую при  $k = 0$  полагаем равной 1.

Для простоты положим  $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$ ,  $\Delta = T/N$ ,  $T = \tau_N$ ,  $p \in \{0, 1, \dots, N\}$ .

Сформулируем теорему о сходимости численной схемы (7.74).

**Теорема 7.5.** *Пусть выполнены модификации условий теоремы 7.4 для формулы (7.74). Тогда справедлива оценка*

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2 \right\} \leq K \Delta^r,$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $\Delta$ , а величина  $\mathbf{y}_t$  определяется из (7.74) при  $\tau_{p+1} = t$ .

Аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящие в (7.74), могут быть получены с помощью результатов из глав 5 и 6 (см., в частности, теоремы 5.3 – 5.7\*).

#### 7.4.2 Метод порядка точности 1.0

Рассмотрение явных одношаговых сильных численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича, начинаем с численного метода порядка точности 1.0.

Итак, предположим, что условия теоремы 7.5 при  $r = 2$  выполнены. Тогда из (7.74) при  $r = 2$  получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0 \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00 \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)q}, \quad (7.76)$$

где здесь и далее мы полагаем

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} \Sigma_j(\mathbf{x}, t);$$

$$\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)};$$

функции в правой части (7.76) вычислены в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ ;  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ , индекс  $q$  указывает на то, что соответствующая величина является аппроксимацией повторного стохастического интеграла.

Для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящих в (7.76), воспользуемся следующими формулами:

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)},$$

$$I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)q} = \frac{\Delta}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} (\zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)}) \right), \quad (7.77)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right). \quad (7.78)$$

Число  $q$  в (7.78) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (7.71) при  $r = 2$ .

#### 7.4.3 Метод порядка точности 1.5

Рассмотрим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5, основанный на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича.

Предположим, что условия теоремы 7.5 при  $r = 3$  выполнены. Тогда из (7.74) при  $r = 3$  получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1,i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( \Delta I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} + I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящих в (7.79), воспользуемся следующими формулами:

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)},$$

$$I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)q} = \frac{\Delta}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left( \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right) \right), \quad (7.80)$$

$$I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right),$$

$$I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (7.81)$$

$$I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6} \Delta^{3/2} \left( \zeta_0^{(i_1)} \right)^3.$$

Число  $q$  в (7.80) и (7.81) должно выбираться так, чтобы выполнялся соответствующий аналог (для повторных стохастических интегралов Стратоновича из унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича) условия (7.71) при  $r = 3$ .

Отметим, что в силу стандартных соотношений между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича среднеквадратические погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 кратности, входящих в численные методы разд. 7.4, будут равны соответствующим среднеквадратическим погрешностям аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито 2 кратности, которые рассмотрены в главе 6 и разд. 7.3. Как отмечалось в главе 6, вопрос о точном вычислении среднеквадратических погрешностей аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 и более высоких кратностей является непростым.

Здесь и далее в настоящем разделе можно порекомендовать использовать для указанных интегралов оценку (6.82), лемму 6.1 (случай попарно различных чисел  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ) или эмпирические соображения, сопоставляя выбираемые числа  $q$  для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 и более высоких кратностей с соответствующими числами  $q$  для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито.

В частности

$$\begin{aligned} M \left\{ \left( I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} &= \\ &= \frac{\Delta^3}{6} - \sum_{j_3, j_2, j_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^2 (i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_2 \neq i_3). \end{aligned} \quad (7.82)$$

Кроме того, согласно оценке (6.82), существует постоянная  $C$ , которая не зависит от  $\Delta$  и такая, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q}. \quad (7.83)$$

#### 7.4.4 Метод порядка точности 2.0

Предположим, что условия теоремы 7.5 выполнены при  $r = 4$ . Тогда из (7.74) при  $r = 4$  получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( \Delta I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} + I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left( I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} - I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} \right) - \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} + \right. \\ & \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} + \Delta I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} \right) \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящих в (7.84), можно воспользоваться формулами предыдущего раздела, формулами (7.58), (7.59), а также следующими формулами:

$$\begin{aligned} I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} = & -\frac{\Delta}{2} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} - \frac{\Delta^2}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+2) \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1) \zeta_{i+2}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)} - \frac{\zeta_i^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right], \\ I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} = & -\frac{\Delta}{2} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} - \frac{\Delta^2}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} + \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right),$$

$$I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q} = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}.$$

Число  $q$  в (7.84) должно выбираться так, чтобы выполнялся соответствующий аналог (для повторных стохастических интегралов Стратоновича из унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича) условия (7.71) при  $r = 4$ .

В частности, при попарно различных  $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m$ :

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^4}{24} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^2. \quad (7.85)$$

Также, согласно оценке (6.82), существует постоянная  $C$ , которая не зависит от  $\Delta$  и такая, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q}. \quad (7.86)$$

Кроме того примем во внимание соотношения (7.82), (7.83).

#### 7.4.5 Метод порядка точности 2.5

Пусть условия теоремы 7.5 выполнены при  $r = 5$ . Тогда из (7.74) при  $r = 5$  получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( \Delta I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} + I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} + \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left( I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} - I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} \right) - \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} + \right. \\ & \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} + \Delta I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)q} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} \left( \frac{1}{2} I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \bar{L}^2 \Sigma_{i_1} I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} - \bar{L} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ G_0^{(i_3)} \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} - I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left( I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} - I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( \Delta I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} + I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right) - \bar{L} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right] \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \tag{7.87}
\end{aligned}$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящих в (7.87), можно воспользоваться формулами предыдущих разделов, а также следующими формулами:

$$\begin{aligned}
I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} & = \frac{\Delta^{5/2}}{3} \left( \zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \right), \\
I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3)q} & = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{001} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \\
I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3)q} & = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{010} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \\
I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3)q} & = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{100} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \\
I_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q} & = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^q C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^{00000} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)}.
\end{aligned}$$

Число  $q$  в (7.87) должно выбираться так, чтобы выполнялся соответствующий аналог (для повторных стохастических интегралов Стратоновича из унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича) условия (7.71) при  $r = 5$ .

В частности, при попарно различных  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 = 1, \dots, m$ :

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^5}{60} - \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q (C_{j_3 j_2 j_1}^{100})^2, \quad (7.88)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^5}{20} - \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q (C_{j_3 j_2 j_1}^{010})^2, \quad (7.89)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^5}{10} - \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q (C_{j_3 j_2 j_1}^{001})^2, \quad (7.90)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} - I_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^5}{120} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5=0}^q C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^2. \quad (7.91)$$

Также, согласно оценке (6.82), существует постоянная  $C$ , которая не зависит от  $\Delta$  и такая, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q}, \quad (7.92)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q}, \quad (7.93)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q}, \quad (7.94)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} - I_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q}. \quad (7.95)$$

Кроме того примем во внимание соотношения (7.82), (7.83), (7.85), (7.86).

#### 7.4.6 Метод порядка точности 3.0

Пусть условия теоремы 7.5 выполнены при  $r = 6$ . Тогда из (7.74) при  $r = 6$  получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 3.0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( \Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1) q} + \frac{\Delta^2}{2} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left( I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} - I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} \right) - \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} + \Delta I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1) q} + \\
& \quad + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} \left( \frac{1}{2} I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1) q} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1) q} + \frac{\Delta^2}{2} I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1) q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \bar{L}^2 \Sigma_{i_1} I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1) q} - \bar{L} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1) q} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1) q} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ G_0^{(i_3)} \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1) q} - I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1) q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left( I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1) q} - I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1) q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( \Delta I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1) q} + I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1) q} \right) - \bar{L} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1) q} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1) q} + \frac{\Delta^3}{6} \bar{L}^2 \bar{\mathbf{a}} + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} \left( \frac{1}{2} I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} + \Delta I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} + \frac{\Delta^2}{2} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} \right) + \frac{1}{2} \bar{L}^2 G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} \bar{L} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} - I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} + \Delta \left( I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} - I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \bar{L} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left( I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} - I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} \bar{L}^2 \Sigma_{i_1} \left( \frac{1}{2} I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} + \frac{1}{2} I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} - I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \bar{L} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( \Delta I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} + I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1) q} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \left[ G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left( \Delta I_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1) q} + I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1) q} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1) q} - I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1) q} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \bar{L} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1) q} + \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + G_0^{(i_4)} \bar{L} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)q} - I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)q} \right) + \\
 & + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left( I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)q} - I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)q} \right) + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6=1}^m G_0^{(i_6)} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_6 i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \tag{7.96}
 \end{aligned}$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящих в (7.96), можно воспользоваться формулами предыдущих разделов, а также следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} & = -\frac{\Delta^2}{4} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} - \Delta I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} + \frac{\Delta^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \\
 & + \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+2)(i+3) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+1)(i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(i^2+i-3) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+3i-1) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right], \\
 I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} & = -\frac{\Delta^2}{4} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} - \Delta I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} + \frac{\Delta^3}{8} \left[ \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_2^{(i_1)} + \right. \\
 & + \frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+1)(i+2) \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+2)(i+3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(i^2+3i-1) \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i^2+i-3) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right], \\
 I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} & = -\frac{\Delta^2}{4} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} - \frac{\Delta}{2} \left( I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} + I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} \right) + \frac{\Delta^3}{8} \left[ \frac{1}{3} \zeta_1^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\
 & + \sum_{i=0}^q \left( \frac{(i+1)(i+3) \left( \zeta_{i+3}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+3}^{(i_1)} \right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)(2i+3)(2i+5)}} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(i+1)^2 \left( \zeta_{i+1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)} \right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)(2i-1)(2i+5)}} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{0001\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} &= \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0001} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \\
 I_{0010\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} &= \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0010} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \\
 I_{0100\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} &= \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0100} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \\
 I_{1000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3)q} &= \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{1000} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \\
 I_{000000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)q} &= \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6=0}^q C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^{000000} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} \zeta_{j_6}^{(i_6)}.
 \end{aligned}$$

Число  $q$  в (7.96) должно выбираться так, чтобы выполнялся соответствующий аналог (для повторных стохастических интегралов Стратоновича из унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича) условия (7.71) при  $r = 6$ .

В частности, при попарно различных  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}\left\{\left(I_{20\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} - I_{20\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} &= \frac{\Delta^6}{30} - \sum_{j_1,j_2=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{20}\right)^2, \\
 \mathbb{M}\left\{\left(I_{11\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} - I_{11\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} &= \frac{\Delta^6}{18} - \sum_{j_1,j_2=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{11}\right)^2, \\
 \mathbb{M}\left\{\left(I_{02\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} - I_{02\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} &= \frac{\Delta^6}{6} - \sum_{j_1,j_2=0}^q \left(C_{j_2 j_1}^{02}\right)^2, \\
 \mathbb{M}\left\{\left(I_{1000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{1000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q}\right)^2\right\} &= \frac{\Delta^6}{360} - \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q \left(C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{1000}\right)^2, \\
 \mathbb{M}\left\{\left(I_{0100\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0100\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q}\right)^2\right\} &= \frac{\Delta^6}{120} - \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q \left(C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0100}\right)^2, \\
 \mathbb{M}\left\{\left(I_{0010\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0010\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q}\right)^2\right\} &= \frac{\Delta^6}{60} - \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q \left(C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0010}\right)^2, \\
 \mathbb{M}\left\{\left(I_{0001\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0001\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q}\right)^2\right\} &= \frac{\Delta^6}{36} - \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^q \left(C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0001}\right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)} - I_{000000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^6}{625} - \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6=0}^q C_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^2.$$

Также, согласно оценке (6.82), существует постоянная  $C$ , которая не зависит от  $\Delta$  и такая, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)} - I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)} - I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)} - I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( I_{000000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)} - I_{000000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)q} \right)^2 \right\} \leq C \frac{\Delta^2}{q}.$$

Кроме того примем во внимание соотношения (7.82), (7.83), (7.85), (7.86), (7.88) – (7.95).

## 7.5 Явные одношаговые конечно–разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В данном разделе рассматриваются явные одношаговые сильные конечно–разностные численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито.

Построение таких численных методов основано на конечно-разностной аппроксимации функций  $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}$ , где  $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = L$  и  $i_l = 0$  при  $\lambda_l = 0$ ;  $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$  и  $i_l = 1, \dots, m$  при  $\lambda_l = 1; l = 1, \dots, k$ , входящих в унифицированное разложение Тейлора-Ито. Для получения указанных конечно-разностных аппроксимаций нам потребуются некоторые соотношения, основанные на стандартной формуле Тейлора.

### 7.5.1 Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций

Рассмотрим функции  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathfrak{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . Через  $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$  будем обозначать  $i$ -е компоненты  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ ;  $i = 1, \dots, n$ . Для произвольного  $\Delta > 0$  с помощью стандартной формулы Тейлора получим следующие соотношения

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^2 \pi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \sigma_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^2), \quad (7.97)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \beta_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^3), \quad (7.98)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^4 \eta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \omega_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^4), \quad (7.99)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^4 \theta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^5), \quad (7.100)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}''_{ij} = \sum_{i=1}^3 \varrho_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \varpi_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^3), \quad (7.101)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}''_{ij} = \sum_{i=1}^4 \mu_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \lambda_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^4), \quad (7.102)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}''_{ij} = \sum_{i=1}^5 \psi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \phi_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^5), \quad (7.103)$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i) = \sum_{i=1}^2 \zeta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta_i \Delta \mathbf{g}, t + \gamma_i \Delta) + O(\Delta^2), \quad (7.104)$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \chi_i \Delta \mathbf{g}, t + \kappa_i \Delta) + O(\Delta^3), \quad (7.105)$$

$$2\mathbf{f} + \Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i) = \sum_{i=1}^2 \rho_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \nu_i \Delta \mathbf{g}, t + \xi_i \Delta) + O(\Delta^2), \quad (7.106)$$

где

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^{(i)}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{f}}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}'_i, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}''_{ij};$$

$\mathbf{u} = \mathbf{f}$  или  $\mathbf{g}$ ; коэффициенты  $\pi_i, \sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \eta_i, \omega_i, \theta_i, \varepsilon_i, \mu_i, \lambda_i, \psi_i, \phi_i, \zeta_i, \delta_i, \gamma_i, \varphi_i, \chi_i, \kappa_i, \rho_i, \nu_i, \xi_i, \varrho_i, \varpi_i$  удовлетворяют следующим системам алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \mu_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \lambda_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\lambda_i^2}{2} = 1, \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \lambda_i^3 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \eta_i = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i = 1, \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i^3 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 0, \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \beta_i = 1, \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \beta_i^2 = 0, \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 \psi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^5 \frac{\psi_i \phi_i^2}{2} = 1, \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i^3 = 0, \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i^4 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \theta_i = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i = 1, \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^3 = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^4 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \varphi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \kappa_i = 1, \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \kappa_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \chi_i \varphi_i = 1, \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \chi_i \kappa_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \chi_i^2 = 0, \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \zeta_i = 0, \\ \sum_{i=1}^2 \zeta_i \gamma_i = 1, \\ \sum_{i=1}^2 \zeta_i \delta_i = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \rho_i = 2, \\ \sum_{i=1}^2 \xi_i \rho_i = 1, \\ \sum_{i=1}^2 \nu_i \rho_i = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \varrho_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varrho_i \varpi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varrho_i \frac{\varpi_i^2}{2} = 1, \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \pi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i \sigma_i = 1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что следующий набор коэффициентов является решением данных систем уравнений:  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \beta_1 = 1/2, \beta_2 = -1/2, \mu_1 = \mu_2 = 1, \mu_3 = -2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 2, \varepsilon_3 = -2, \varepsilon_4 = -1, \theta_1 = 2/3, \theta_2 = -1/12, \theta_3 = 1/12, \theta_4 = -2/3, \eta_1 = 1/48, \eta_2 = -1/48, \eta_3 = 27/48, \eta_4 = -27/48, \omega_1 = -3, \omega_2 = 3, \omega_3 = 1, \omega_4 = -1, \varphi_1 = \varphi_2 = 1/2,$

$\varphi_3 = -1, \kappa_1 = 1, \kappa_2 = \kappa_3 = -1, \chi_1 = 1, \chi_2 = \chi_3 = -1, \rho_1 = \rho_2 = 1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1, \nu_1 = 0; \nu_2 = 1, \zeta_1 = 1, \zeta_2 = -1, \gamma_1 = 1/2, \gamma_2 = -1/2, \delta_1 = 1/2, \delta_2 = -1/2, \psi_1 = -65/60, \psi_2 = 66/60, \psi_3 = -14/60, \psi_4 = -1/60, \psi_5 = 14/60, \phi_1 = 1, \phi_2 = 2, \phi_3 = 3, \phi_4 = -3, \phi_5 = -2, \pi_1 = 1/2, \pi_2 = -1/2, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0, \varrho_1 = \varrho_2 = 1, \varrho_3 = -2, \varpi_1 = 0, \varpi_2 = 2, \varpi_3 = 1.$

### 7.5.2 Метод порядка точности 1.0

В качестве основы для построения явного сильного одношагового конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 возьмем соотношение (7.35) (метод Г.Н. Мильштейна). Аппроксимируем величину  $G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ , где  $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$ ,  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$  с помощью соотношения (7.97) следующим образом:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.107)$$

где  $\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ .

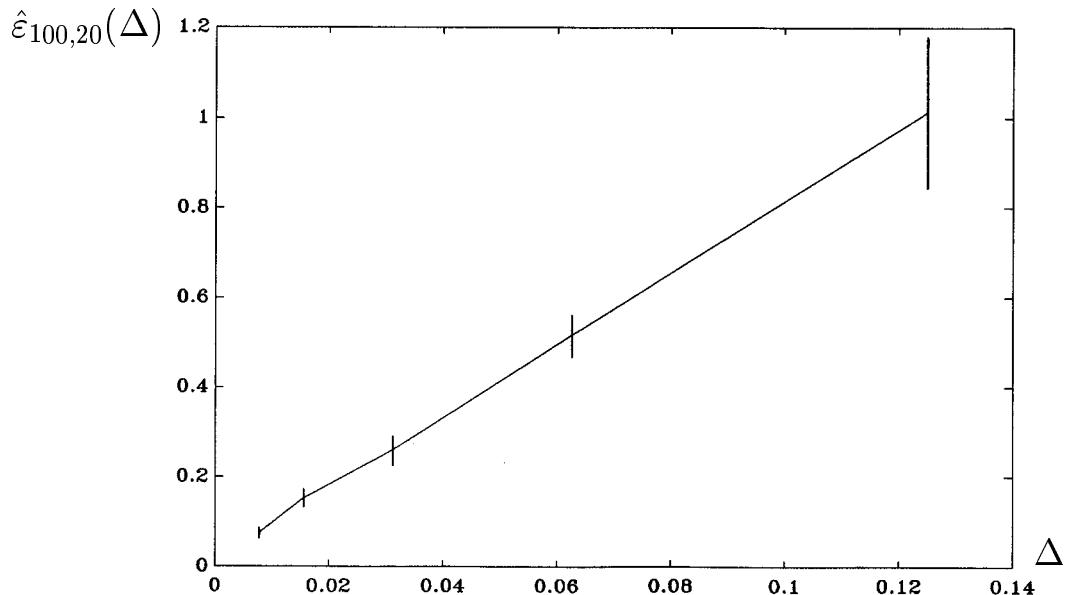


Рис. 7.10. Результат численного эксперимента 7.10.

Подставляя (7.107) в (7.35) и отбрасывая величину большего порядка малости, чем  $O(\Delta)$ , получаем явный сильный одношаговый конечно-разностный численный метод порядка 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}. \quad (7.108)$$

В дальнейшем при тестировании сильных конечно-разностных численных методов будем использовать только коэффициенты, приведенные выше.

**Численный эксперимент 7.10.** (рис. 7.10). Повторить численный эксперимент 7.1 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.108).

### 7.5.3 Методы порядка точности 1.5

Согласно (7.41) следует, что для построения явных сильных одностадийных конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5 необходимо аппроксимировать конечными разностями набор функций:  $G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}$ ,  $G_0^{(i_1)} \mathbf{a}$ ,  $L \Sigma_{i_1}$ ,  $G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}$ ,  $\mathbf{a}\Delta + \Delta^2 L \mathbf{a}/2$  в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ . Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \mathbf{z}_{p\delta}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta \delta_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \Delta_{p\gamma}^{(j)} = \tau_p + \gamma_j \Delta,$$

где  $r_j = \beta_j, \sigma_j, \varpi_j$ . С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее, имеем

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.109)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.110)$$

$$L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + \\ + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.111)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.112)$$

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p). \quad (7.113)$$

После подстановки соотношений (7.109)–(7.112), (7.123) в (7.41) и отбрасывания остаточных членов, получим следующий явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{7.114}
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$  имеет вид (7.113)

На примере численных методов (7.41) и (7.53) мы проследили, что учет слагаемого  $\Delta^2 L \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)/2$  повысил порядок точности численного метода (7.41) на 0.5 по сравнению с численным методом (7.53). Аналогичный эффект можно ожидать и для конечно-разностных численных методов. В связи с этим рассмотрим на основе соотношения (7.53) следующую явную сильную конечно-разностную численную схему порядка точности 1.0:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{7.115}
 \end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.114).

**Численный эксперимент 7.11.** (рис. 7.11). Повторить численный эксперимент 7.1 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.115). Для моделирования стохастических интегралов Ито  $I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  использовать формулу

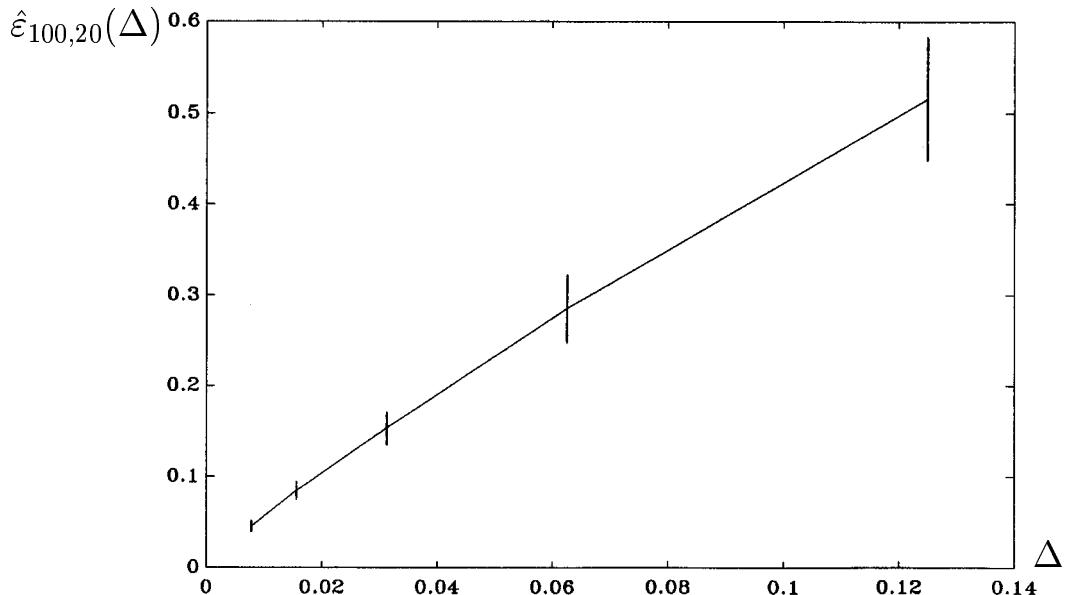


Рис. 7.11. Результат численного эксперимента 7.11.

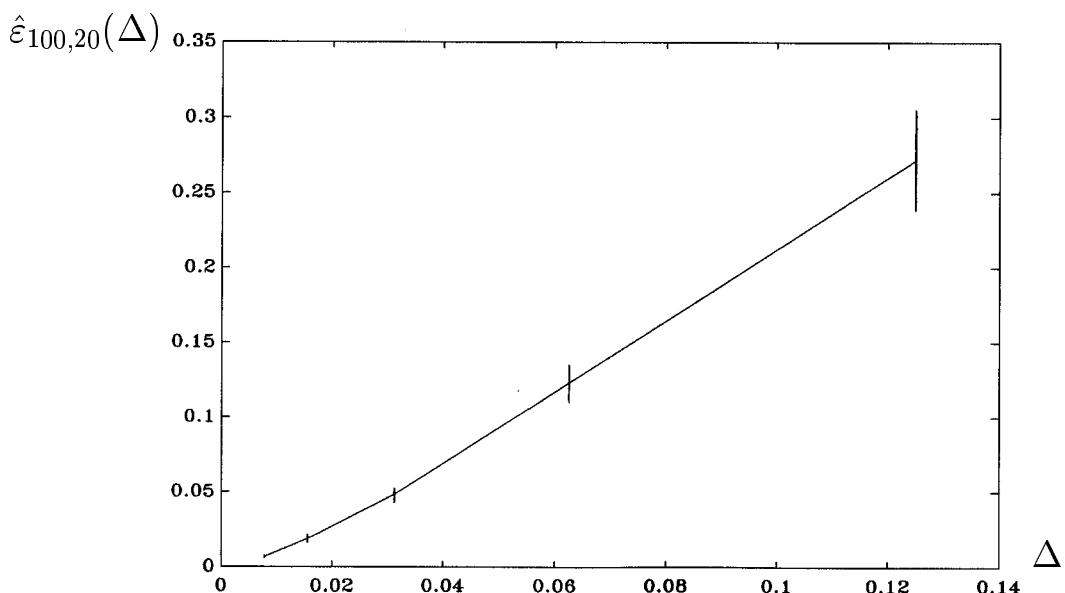


Рис. 7.12. Результат численного эксперимента 7.12.

$$I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} = -\frac{1}{2}\Delta^{3/2} \left( \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)} \right), \quad (7.116)$$

где  $\zeta_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0^{(1)}$ ,  $\zeta_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^{(1)}$  и  $\zeta_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}, \zeta_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

**Численный эксперимент 7.12.** (рис. 7.12). Повторить численный эксперимент 7.11 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.114).

#### 7.5.4 Методы порядка точности 2.0

Согласно соотношению (7.54), для построения явных сильных односторонних конечно-разностных численных методов порядка точности 2.0 необходимо аппроксимировать конечными разностями в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$  следующие функции:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad L \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (7.117)$$

$$\mathbf{a} \Delta + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}, \quad G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}. \quad (7.118)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j \Delta,$$

где  $r_j = \beta_j, \omega_j, \lambda_j, \sigma_j, \varpi_j$ ;  $q_j = \delta_j, \nu_j$  и  $h_j = \gamma_j, \xi_j$ .

С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее, имеем следующие аппроксимации для функций (7.117) в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ :

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (7.119)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.120)$$

$$\begin{aligned} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + \\ &\quad + O(\Delta), \end{aligned} \quad (7.121)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.122)$$

$$\mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(j i_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим аппроксимации функций (7.118) в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$  с помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее:

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \\ & = \frac{\Delta}{2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + O(\Delta^3), \end{aligned} \quad (7.123)$$

$$G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.124)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}), \\ & G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (7.125)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p), \\ & L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (7.126)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p), \\ & G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (7.127)$$

$$\mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p).$$

После подстановки соотношений (7.119)–(7.127) в (7.54) и отбрасывания остаточных членов, получим явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка точности 2.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
& \left. + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right] \quad (7.128)
\end{aligned}$$

**Численный эксперимент 7.13.** (рис. 7.13). Повторить численный эксперимент 7.11 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.128). Для моделирования стохастических интегралов Ито  $I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N-1$  использовать формулу (7.116), а для моделирования стохастических интегралов  $I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)}$ ,  $I_{01_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N-1$  — аппроксимацию

$$\begin{aligned}
I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} & = -\frac{\Delta^2}{4} \left[ \left( \zeta_0^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \zeta_0^{(1)} + \right. \\
& + \sum_{i=0}^q \left( \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}} \zeta_i^{(1)} \zeta_{i+2}^{(1)} \right) - 1 \left. \right]
\end{aligned}$$

и соотношение

$$I_{01_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} = I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} I_{0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} - I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} + \Delta^2/2$$

при  $q = 1$ ;  $\zeta_{j_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(1)}$ ;  $j = 0, 1, \dots, q+2$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Представленный в разд. 7.5.4 численный метод аппроксимирует решение СДУ Ито (7.18) с учетом слагаемых 2 порядка малости по систематической и случайной составляющим. Поэтому данный метод можно рассма-

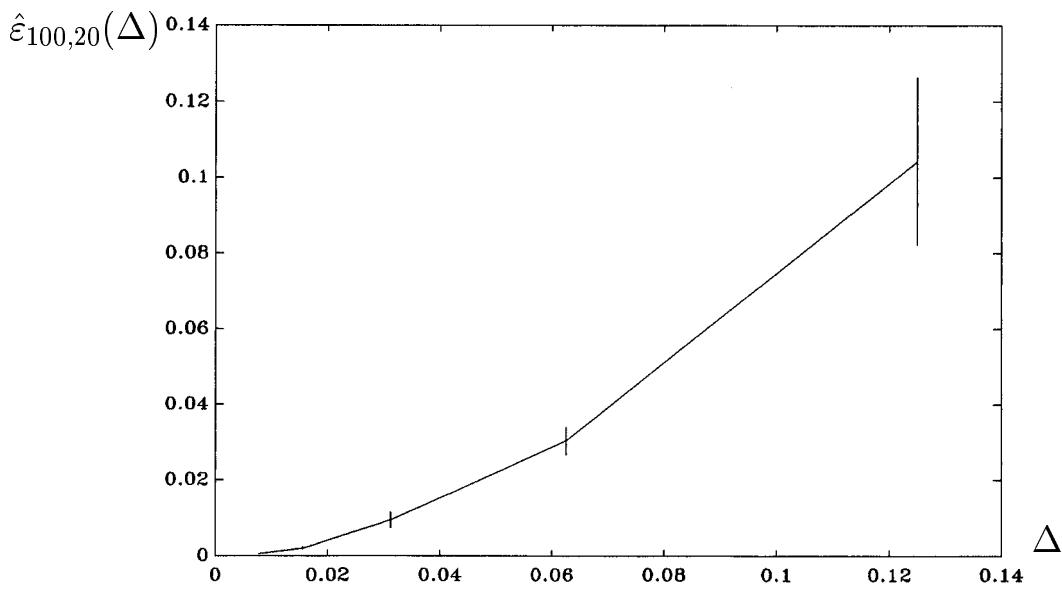


Рис. 7.13. Результат численного эксперимента 7.13.

тривать как обобщение метода Рунге–Кутта 2 порядка на класс СДУ Ито.

В [148] (С. 384) предложен явный одношаговый конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного ( $m = 1$ ) аддитивного шума. Однако ошибка этого численного метода возрастает при уменьшении шага интегрирования  $\Delta$ , начиная с  $\Delta = 2^{-3}$  (см. [148] (С. 385, рис. 11.3.1)). Предложенный нами явный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 вида (7.128) с одной стороны является более общим (в (7.128) шум предполагается векторным ( $m > 1$ ) и неаддитивным), а с другой стороны ошибка численного метода (7.128) уменьшается при уменьшении шага интегрирования  $\Delta$ , по крайней мере, вплоть до  $\Delta = 2^{-7}$  (см. рис. 7.13).

### 7.5.5 Методы порядка точности 2.5

Для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка 2.5 согласно (7.60) необходимо аппроксимировать конечными разностями в точке  $(y_p, \tau_p)$  следующие функции:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad L \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (7.129)$$

$$\frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}, \quad G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (7.130)$$

$$G_0^{(i_1)} L\mathbf{a}, \quad L^2 \Sigma_{i_1}, \quad L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}, \\ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a}. \quad (7.131)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{ps}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta s_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j \Delta,$$

где  $r_j = \beta_j, \omega_j, \varepsilon_j, \lambda_j, \phi_j$ ;  $q_j = \chi_j, \nu_j, \delta_j$ ;  $s_j = \sigma_j, \beta_j$ ;  $h_j = \gamma_j, \chi_j, \xi_j$ .

С помощью тейлоровских аппроксимаций (7.97)–(7.106) имеем следующие аппроксимации функций (7.129) в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ :

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^2), \quad (7.132)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (7.133)$$

$$L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\ + O(\Delta^{3/2}), \quad (7.134)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (7.135)$$

$$\mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим тейлоровские аппроксимации функций (7.130) в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$  с помощью соотношений (7.97)–(7.106):

$$\frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{\Delta}{2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\ + O(\Delta^{7/2}), \quad (7.136)$$

$$G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.137)$$

$$\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.138)$$

$$\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p),$$

$$\begin{aligned} LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta), \end{aligned} \quad (7.139)$$

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p),$$

$$G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.140)$$

$$\mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p).$$

Получим конечно-разностные аппроксимации семейства функций (7.131) в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$  с помощью тейлоровских аппроксимаций (7.97)–(7.106):

$$\begin{aligned} L^2 \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta^2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\ &\quad + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (7.141)$$

$$\begin{aligned} LG_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta^2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (7.142)$$

$$G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.143)$$

$$\frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{\Delta}{6} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \Big] + O(\Delta^{7/2}), \quad (7.144)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}), \quad (7.145)$$

$$G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.146)$$

$$\mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_5)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.147)$$

$$\mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{o}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(j i_4)}, \tau_p),$$

$$\mathbf{o}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(j i_3)}, \tau_p),$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.148)$$

$$\mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(j i_2)}, \tau_p),$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.149)$$

$$\mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(j i_2)}, \tau_p),$$

$$LG_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.150)$$

$$\mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(j i_3)}, \tau_p).$$

После подстановки соотношений (7.132)–(7.150) в (7.60) и отбрасывания остаточных членов, получим явный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 2.5 вида

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta}{2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\
& + \frac{\Delta}{6} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \\
& \quad \times \left( \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_3)}, \tau_p) \left( \Delta \hat{I}_{000}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
 & - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{100}^{(i_3 i_2 i_1)} \Big] + \\
 & + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_5)}, \tau_p) \hat{I}_{00000}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \quad (7.151)
 \end{aligned}$$

### 7.5.6 О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов

Коснемся сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов. Для этого запишем общее представление такой численной схемы, основанной на унифицированном разложении Тейлора–Ито, и точное представление решения СДУ Ито (7.18):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{\tau_{p+1}} = & \mathbf{u}_{\tau_p} + \\
 & + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)} F_{l_1 \dots l_k, j} \{ \mathbf{u}_{\tau_p} \}^k \cdot {}^{(k)} \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \quad (7.152)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = & \mathbf{x}_{\tau_p} + \\
 & + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{x}_{\tau_p} \}^k \cdot {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + \\
 & + H'_{r+1 \tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в. 1,} \quad (7.153)
 \end{aligned}$$

где

$${}^{(k)} F_{l_1 \dots l_k, j} \{ \mathbf{x} \} = \left\| F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)} (\mathbf{x}) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \text{ а } F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)} (\mathbf{x})$$

— конечно-разностная аппроксимация функции  $G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x}$ ,  $\Delta_p \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{p+1} - \tau_p$ ; остальные обозначения, входящие в (7.152), (7.153), соответствуют обозначениям в формулах (7.21), (7.24).

Для всех  $t \in [0, T]$  положим:

$$z_t \stackrel{\text{def}}{=} M \{ |\mathbf{u}_t - \mathbf{x}_t|^2 \},$$

где  $\mathbf{u}_t$ ,  $t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$  определяется равенством (7.152), в котором необходимо заменить  $\tau_{p+1}$  на  $t$ .

Сформулируем теорему о сходимости численной схемы (7.152).

**Теорема 7.6.** Пусть выполнены условия теоремы 7.2, а также следующие условия:

1. Случайные величины  $F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_g})$  являются  $\mathbf{F}_{\tau_g}$ -измеримыми.
2. При всех возможных  $p = 0, 1, \dots, N - 1; i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ ;  $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{D}'_q$  случайные величины  $F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_p})$  удовлетворяют условию:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \max_{0 \leq p \leq N} \left| F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_p}) - G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{u}_{\tau_p} \right|^2 \right\} &\leq \\ &\leq C \Delta^{r+1-k-2 \left( j + \sum_{i=1}^k l_i \right) + 1_{\{k=0\}}}, \quad C < \infty. \end{aligned} \quad (7.154)$$

3.  $\mathbb{M}\{|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0|^2\} \leq C_1 \Delta^r$ .

Тогда справедлива оценка  $z_T \leq C_1 \Delta^r$ , где  $C_1 < \infty$ , а  $\mathbf{x}_t$  — решение СДУ Ито (7.18), т.е. численный метод (7.152) является методом с порядком сильной сходимости, равным  $r/2$ .

**Доказательство.** Согласно (7.152), (7.153) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s - \mathbf{x}_s &= \mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0 + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}'_q} \left( \sum_{g=0}^{n_s-1} Q_{jl_1 \dots l_k \tau_{g+1}, \tau_g} + Q_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right) \\ &\quad - \sum_{g=0}^{n_s-1} H'_{r+1 \tau_{g+1}, \tau_g} - H'_{r+1 s, \tau_{n_s}}, \end{aligned}$$

где  $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max_p \{p : \tau_p \leq s\}$  и  $Q_{jl_1 \dots l_k \theta, t} = X_{jl_1 \dots l_k \theta, t} + Y_{jl_1 \dots l_k \theta, t} + Z_{jl_1 \dots l_k \theta, t}$ , где

$$\begin{aligned} X_{jl_1 \dots l_k \theta, t} &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[ {}^{(k)} F_{l_1 \dots l_k, j} \{ \mathbf{u}_t \} - {}^{(k)} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{u}_t \} \right] \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)} \hat{I}_{l_1 \dots l_k \theta, t}, \\ Y_{jl_1 \dots l_k \theta, t} &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[ {}^{(k)} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{u}_t \} - {}^{(k)} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{x}_t \} \right] \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)} \hat{I}_{l_1 \dots l_k \theta, t}, \end{aligned}$$

$$Z_{jl_1 \dots l_{k\theta,t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1 \dots l_k} L^j \{ \mathbf{x}_t \} \stackrel{k}{\cdot} \left( {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_{k\theta,t}} - {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k\theta,t}} \right),$$

остаточный член  $H'_{r+1,s,t}$  имеет такой же вид, как в (7.19), а  $\mathbf{u}_s$  определяется формулой (7.152) при  $\tau_{p+1} = s$ .

Далее, несколько модифицируя доказательство теоремы 7.2, в условиях теоремы 7.6 приходим к следующему неравенству:

$$z_T \leq C_2 \Delta^r + C_3 \int_0^T z_u du; \quad C_2, C_3 < \infty,$$

из которого согласно неравенству Гронуолла получаем:  $z_T \leq C_1 \Delta^r$ . Теорема доказана.  $\square$

Следует отметить, что приведенные явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядка точности 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем численные методы порядка точности 2.0 и 2.5 для векторных СДУ Ито ( $n \geq 1$ ) с многомерным шумом ( $m \geq 1$ ) вероятно не имеют аналогов в литературе.

## 7.6 Об ослаблении достаточных условий сходимости численных методов

Одним из достаточных условий, обеспечивающих сходимость рассмотренных в данной главе, а также в нескольких последующих главах, численных методов является глобальное условие Липшица на коэффициенты СДУ Ито (теоремы 7.1–7.6, 9.1).

Как отмечается в ряде работ (см., например, [196]) глобальное условие Липшица является слишком жестким и не выполняется в ряде практически важных случаев.

Поскольку метод Эйлера является наиболее простым (напомним, что его изучение применительно к СДУ Ито в работе [186] в середине 50-х годов XX века можно условно считать одной из отправных точек для развития численного интегрирования СДУ Ито), то для него получено наибольшее число результатов по обоснованию сходимости при более мягких достаточных условиях (см., например, [196] и библиографию к этой книге).

Здесь мы очень кратко отметим некоторые соображения по данному вопросу.

Рассмотрим векторное СДУ Ито в автономном случае:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (7.155)$$

где  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — случайный процесс, являющийся решением уравнения (7.155);  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  —  $F_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$  стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $\mathbf{a} : \Re^n \rightarrow \Re^n$ ,  $\Sigma : \Re^n \rightarrow \Re^{n \times m}$ ;  $\mathbf{x}_0$  — начальное условие, которое стохастически независимо с  $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$  при  $t > 0$ .

В [196] (см. также библиографию к этой книге) отмечается, что существует результат о сильной сходимости явного метода Эйлера для уравнения (7.155) при выполнении локального условия Липшица на его коэффициенты, т.е. когда для любого  $R > 0$  существует такая постоянная  $K_R$ , что при  $|\mathbf{x}| \leq R$  и  $|\mathbf{y}| \leq R$  выполняется неравенство

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})| + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}) - \Sigma_k(\mathbf{y})| \leq K_R |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (7.156)$$

А именно, если условие (7.156) дополнить условием существования для некоторого  $q > 2$  такой постоянной  $C$ , что

$$X_{N,q} = \mathbb{M} \left\{ \sup_{1 \leq p \leq N} |\mathbf{x}_p|^q \right\} \leq C, \quad Y_{N,q} = \mathbb{M} \left\{ \sup_{1 \leq p \leq N} |\mathbf{y}_p|^q \right\} \leq C,$$

где  $\mathbf{x}_p$  — точное решение уравнения (7.155) в момент времени  $p\Delta$ ,  $\mathbf{y}_p$  — его эйлеровская аппроксимация в тот же момент времени, а  $\Delta$  — шаг интегрирования, то справедливо следующее неравенство

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{1 \leq p \leq N} |\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_p|^2 \right\} \leq H\Delta, \quad (7.157)$$

где  $H$  — постоянная, которая не зависит от  $\Delta$ .

В тех же источниках отмечается, что на практике часто коэффициенты СДУ Ито (7.155) удовлетворяют следующим двум условиям:

1. Глобальное условие Липшица на столбцы матрицы  $\Sigma(\mathbf{x})$ ;
2. Существует такая постоянная  $K$ , что при любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$  выполняется неравенство

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top (\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})) \leq K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$$

(так называемое одностороннее условие Липшица на столбец  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ).

При этом неравенство  $Y_{N,q} \leq C$  может не выполняться и метод Эйлера соответственно может расходиться. В [196] приводится численный пример, показывающий, что приведенные доводы не являются вымыслом, а действительно реализуются на практике.

Там же путем численного эксперимента показано, что при условиях 1 и 2 метод Эйлера не будет расходиться, если численное интегрирование осуществляется с выбираемым специальным образом переменным шагом интегрирования. В [196] также отмечается, что другой способ достижения сходимости метода Эйлера при выполнении условий 1 и 2 заключается в конструировании неявных численных схем на основе метода Эйлера (приводятся неявные модификации метода Эйлера, которые при условиях 1 и 2, а также некотором дополнительном условии являются сходящимися и удовлетворяют неравенству (7.157)).

Проблема ослабления достаточных условий сходимости численных методов для СДУ Ито выходит за рамки настоящей монографии, хотя несомненно является очень важной и пока малоизученной.

## Глава 8

# Неявные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В данной главе рассматриваются неявные сильные одношаговые методы численного решения СДУ Ито.

Отличием неявных численных методов от явных является то, что вычисляемая на  $k$ -м шаге интегрирования неизвестная величина входит как в левую, так и в правую части неявной численной схемы. Таким образом, для определения этой величины приходится на каждом шаге интегрирования дополнительно решать алгебраическое уравнение. Это уравнение может быть решено одним из известных стандартных численных методов, например, методом Ньютона–Рафсона.

Потребность в неявных численных методах, в частности, методах решения СДУ Ито, объясняется тем, что эти методы, как правило, обладают большей устойчивостью [76], [133], [137], [148], [150], нежели явные численные методы. Кроме того, как показано в ряде работ (см., например, [195]), неявные численные методы значительно лучше ведут себя по отношению к жестким системам, чем явные.

Неявные одношаговые сильные численные методы решения СДУ Ито рассматривались в ряде работ. В [76], [229] приведены неявные методы Эйлера и неявный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. В [76] предложен неявный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 решения СДУ Ито с аддитивным шумом.

Общий вариант данного численного метода, а также неявный одноша-

говый сильный численный метод порядка точности 2.0 (без необходимых аппроксимаций стохастических интегралов) решения векторного СДУ Ито с многомерным шумом приведены в [148]. В той же работе получены неявные одношаговые сильные конечно-разностные численные методы порядка точности 1.0 и 1.5 решения векторного СДУ Ито с многомерным шумом. Для случая аддитивного скалярного шума в [148] построен неявный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0. Неявный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 1.5 при аддитивном шуме рассматривается также в [229].

В настоящей главе наряду с известными неявными одношаговыми сильными численными методами приводятся их модификации, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Кроме того, предлагаются новые неявные одношаговые сильные численные методы, в том числе конечно-разностные, порядка точности 2.0 и 2.5.

Следует отметить, что так же, как и в [76], [148], мы будем рассматривать в основном такие неявные численные методы, в которых "неявность", т.е. вычисляемая на  $k$ -м шаге интегрирования неизвестная величина, входит только в систематические члены разложения Тейлора–Ито  $\mathbf{a}\Delta$ ,  $L\mathbf{a}\Delta^2/2$  в правой части неявной численной схемы.

Это обстоятельство связано с тем, что если "неявность" входит не только в систематические, но и в стохастические члены разложения Тейлора–Ито правой части неявной численной схемы, то для таких численных схем, вообще говоря, перестают существовать моментные характеристики, что делает невозможным применение указанных численных методов. В частности, это показано в [148] на примере тестовых линейных СДУ Ито с мультипликативным шумом. Исключение составляют сбалансированные неявные численные методы [195].

## 8.1 Неявный метод Эйлера

Рассмотрим семейство неявных методов Эйлера [76], [148], являющихся одними из наиболее простых неявных одношаговых сильных численных методов:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} (\tau_{p+1} - \tau_p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \Sigma^{(li)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}), \quad (8.1)$$

где  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ ;  $\tilde{\alpha}_l \in [0, 1]$ ;  $l = 1, \dots, n$ ;  $\mathbf{f}_t$  — стандартный  $m$ -мерный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ ;  $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$  такое, что

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

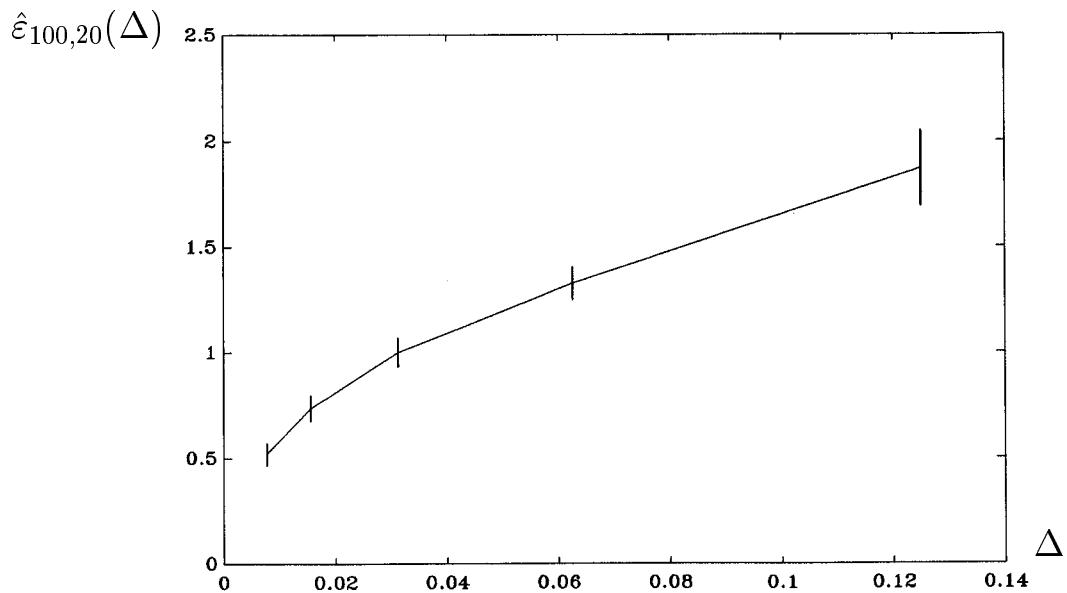


Рис. 8.1. Результат численного эксперимента 8.1 ( $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$ ).

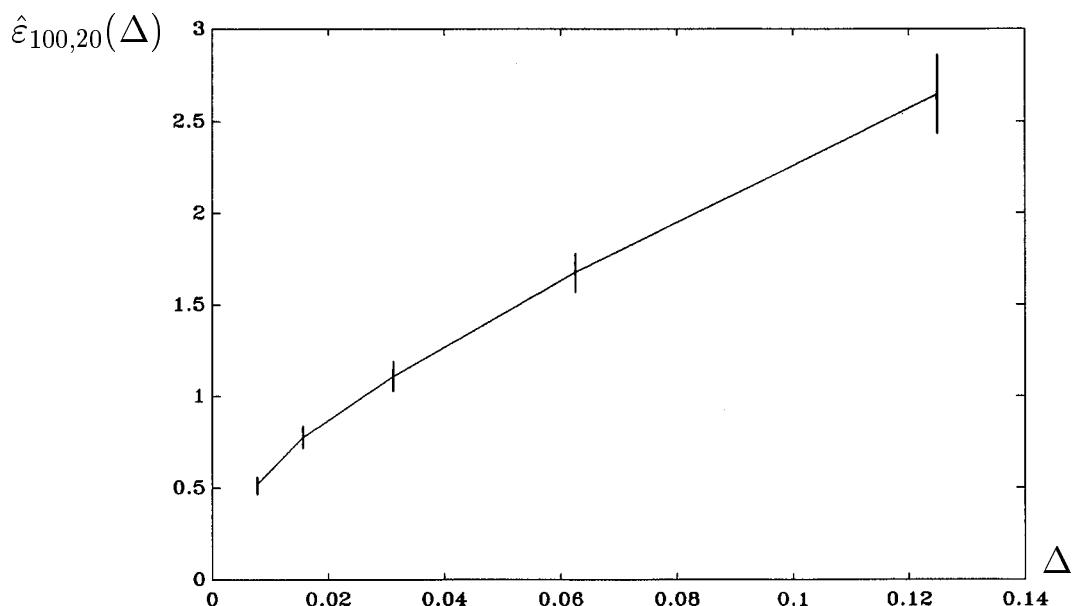


Рис. 8.2. Результат численного эксперимента 8.1 ( $\tilde{\alpha}_1 = 1$ ).

Очевидно, что при  $\tilde{\alpha}_l = 0; l = 1, \dots, n$  численный метод (8.1) трансформируется в явный метод Эйлера, а при  $\tilde{\alpha}_l = 1/2; l = 1, \dots, n$  он является обобщением детерминированного метода трапеций.

**Численный эксперимент 8.1.** (рис. 8.1, 8.2). Для СДУ Ито

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t; \quad x_0 = 1; \quad t \in [0, T]; \quad f_t \in \mathbb{R}^1 \quad (8.2)$$

смоделировать 2000 ( $M = 20$  групп по  $N = 100$  реализаций) независимых реализаций случайной величины  $x_T$  при  $T = 1$ ,  $a = b = 1.5$  по формуле

$$x_T = x_0 \exp \left( \left( a - \frac{1}{2} b^2 \right) T + b \sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i \right)$$

и с помощью неявного метода Эйлера (8.1) при  $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$  и 1, взяв в (8.1)  $\mathbf{f}_{\tau_{i+1}} - \mathbf{f}_{\tau_i} = \sqrt{\Delta} \zeta_i$ . Здесь  $N = T/\Delta$ ;  $\Delta = 2^{-3}$ ;  $\zeta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ) — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Вычислить оценку  $\hat{\varepsilon}_{100,20}$  ошибки

$$\varepsilon = M \{ |x_T - y_T| \}$$

по формуле (7.3) (ут определяется из (8.1)) и 90%-й доверительный интервал для  $\varepsilon$ . Повторить вычисления при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 4, 5, 6, 7$  и изобразить графически зависимость  $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$  с 90%-ми доверительными интервалами для  $\varepsilon$  при указанных значениях  $\Delta$ .

**Численный эксперимент 8.2.** [148] (рис. 8.3–8.5). Для СДУ Ито

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + b \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} df_t, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0^{(1)} \\ \mathbf{x}_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $f_t \in \mathbb{R}^1$ ,  $t \in [0, T]$  смоделировать 2000 ( $M = 20$  групп по  $N = 100$  реализаций) независимых реализаций векторной случайной величины  $\mathbf{x}_T = (\mathbf{x}_T^{(1)} \ \mathbf{x}_T^{(2)})^\top$  при  $T = 1$ ,  $a = 5$ ,  $b = 0.01$  по формуле

$$\mathbf{x}_T = Q \begin{pmatrix} \exp \left( -b^2 T / 2 + b \Delta^{1/2} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i \right) & 0 \\ 0 & \exp \left( (-2a - b^2 / 2) T + b \Delta^{1/2} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i \right) \end{pmatrix} Q^{-1} \mathbf{x}_0$$

и с помощью неявного метода Эйлера (8.1) при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1/2$ , взяв в (8.1)  $\mathbf{f}_{\tau_{i+1}} - \mathbf{f}_{\tau_i} = \sqrt{\Delta} \zeta_i$ . Здесь

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1};$$

$N = T/\Delta$ ;  $\Delta = 2^{-2}$ ;  $\zeta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ) — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Вычислить оценку  $\hat{\varepsilon}_{100,20}$  ошибки  $\varepsilon = M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\}$  по формуле (7.3) ( $\mathbf{y}_T$  определяется из (8.1)) и 90%-й доверительный интервал для  $\varepsilon$ . Повторить вычисления при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 3, 4, 5, 6$  и изобразить графически зависимость  $\ln\hat{\varepsilon}_{100,20}(\ln\Delta)$  с 90%-ми доверительными интервалами для  $\varepsilon$  при указанных значениях  $\Delta$ . Повторить вычисления при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 0$  и  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$ .

Нетрудно видеть, что система, описанная в эксперименте 8.2, является жесткой. Сравнивая рис. 8.3–8.5, можно прийти к выводу [148], что явный метод Эйлера (см. рис. 8.3) проявляет себя не достаточно эффективно относительно жестких систем при уменьшении шага интегрирования. В то же время неявные методы Эйлера (см. рис. 8.4, 8.5) показывают достаточно хорошее поведение. Это различие между явными и неявными сильными численными методами проявляется и при использовании более точных численных методов [148].

Численный эксперимент 8.2 проведен независимо от [148]. При этом мы получили численные результаты, которые очень близки к результатам из [148].

Далее в этой главе рассмотрим более точные неявные одношаговые численные методы. Обоснование их сходимости будет дано в конце данной главы. Также будет показано, что при подходящих условиях численный метод (8.1) имеет порядок сильной сходимости 0.5.

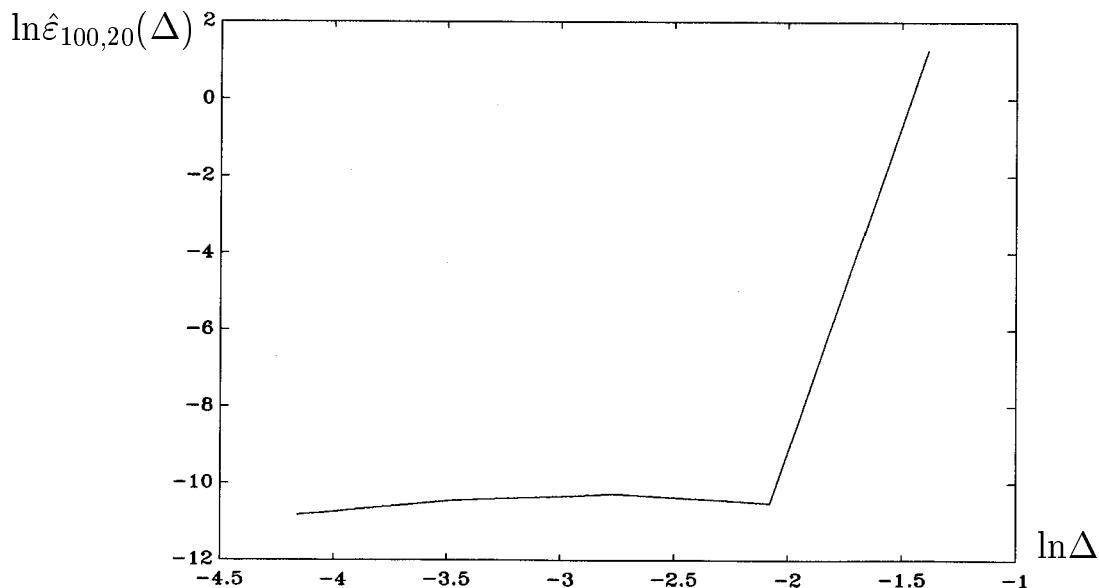


Рис. 8.3. Результат численного эксперимента 8.2 ( $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 = 0$ ).

## 8.2 Неявные одношаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

### 8.2.1 Методы порядка точности 1.0

Рассмотрим однопараметрическое семейство неявных численных методов Г.Н. Мильштейна [76]. При покомпонентной форме записи эти методы имеют вид:

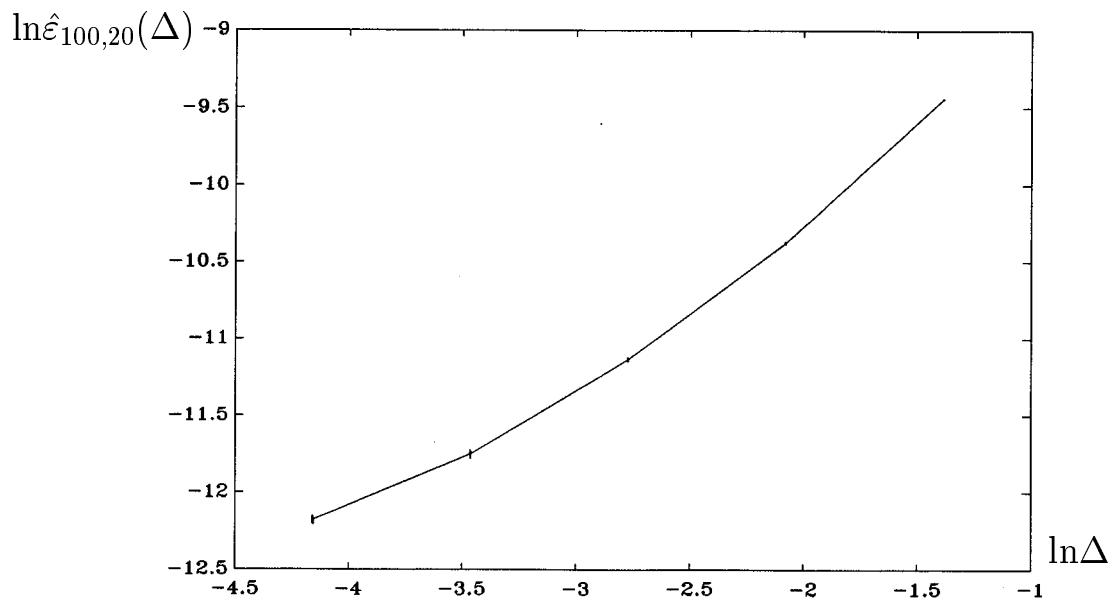


Рис. 8.4. Результат численного эксперимента 8.2 ( $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 = 1/2$ ).

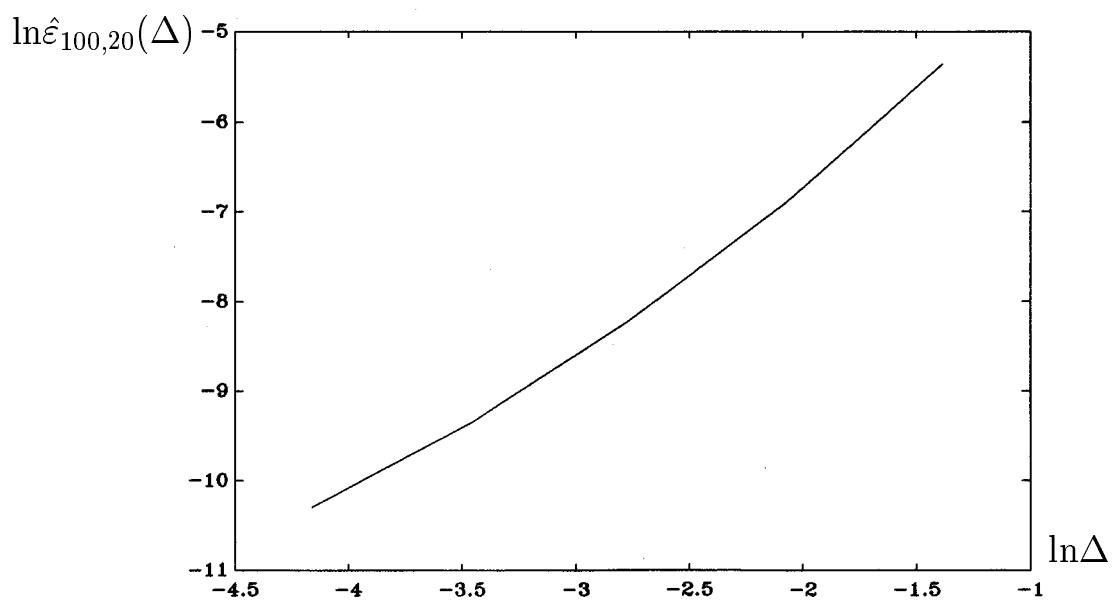


Рис. 8.5. Результат численного эксперимента 8.2 ( $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 = 1$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \right\} \Delta + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

здесь и далее в этом разделе  $\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^{(l)}$ ,  $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(l)}$ ,  $\Sigma^{(ik)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^{(ik)}$ ,  $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$ ,  $\tilde{\alpha}_l \in [0, 1]$ ;  $l = 1, \dots, n$ .

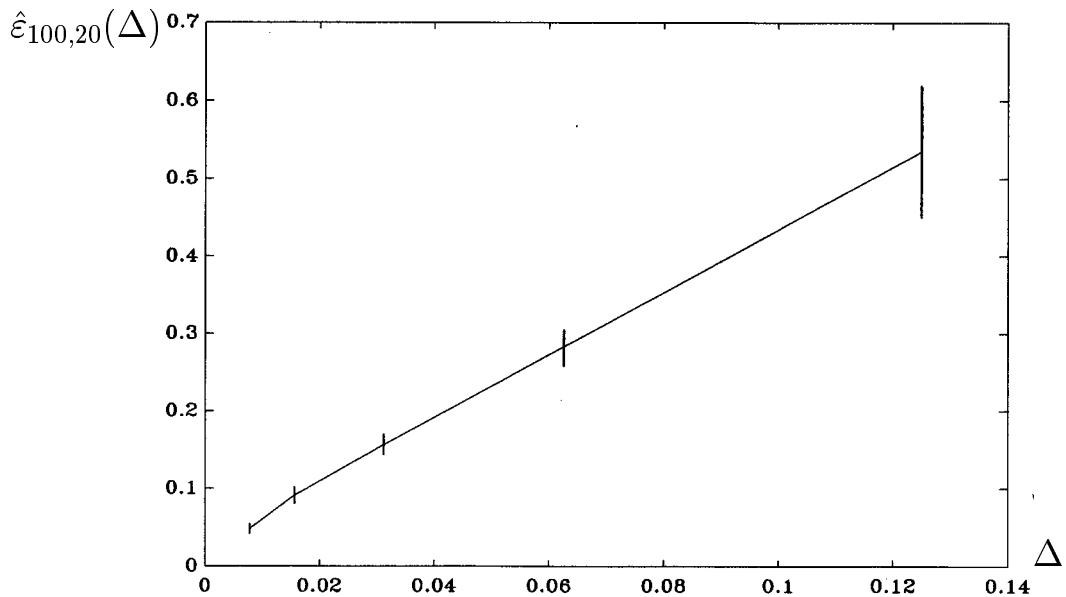


Рис. 8.6. Результат численного эксперимента 8.3 ( $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$ ).

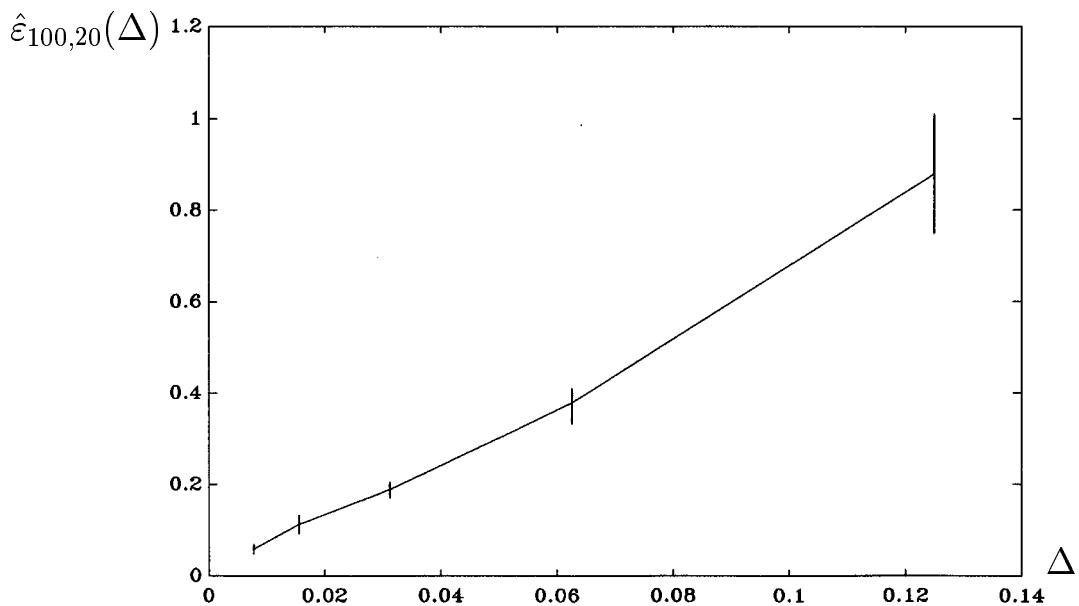


Рис. 8.7. Результат численного эксперимента 8.3 ( $\tilde{\alpha}_1 = 1$ ).

Следует отметить, что при  $\tilde{\alpha}_l = 0$  из (8.3) получим явный численный метод Г.Н. Мильштейна (7.35). Если  $\tilde{\alpha}_l = 1/2$ , то (8.3) можно рассматривать как обобщение детерминированного метода трапеций.

Далее будем предполагать, что повторные стохастические интегралы, входящие в численный метод (8.3), и рассматриваемые далее численные методы аппроксимированы одним из приведенных в главе 6 численных методов с точностью, необходимой для выполнения условия (7.22) теоремы 7.2 о сильной сходимости численных методов при соответствующих значениях  $r$ .

**Численный эксперимент 8.3.** (рис. 8.6, 8.7). Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного метода Г.Н. Мильштейна (8.3) при  $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$  и  $\tilde{\alpha}_2 = 1$ .

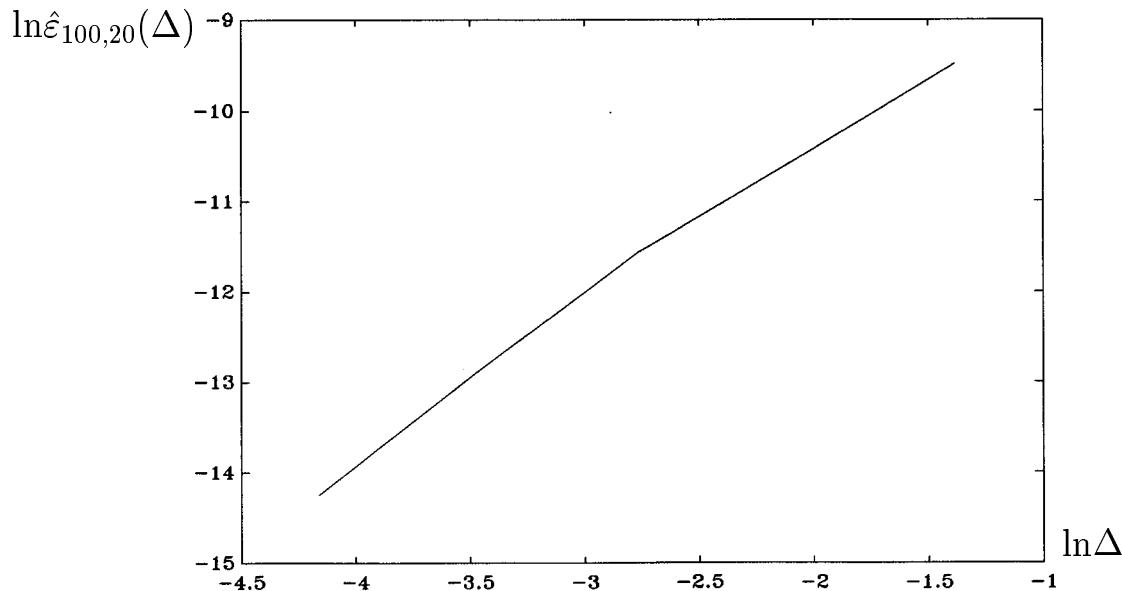


Рис. 8.8. Результат численного эксперимента 8.4 ( $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 = 1/2$ ).

**Численный эксперимент 8.4.** (рис. 8.8). Повторить численный эксперимент 8.2 для метода Г.Н. Мильштейна (8.3) при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1/2$ .

### 8.2.2 Методы порядка точности 1.5

Рассмотрим модификацию двухпараметрического семейства неявных одношаговых сильных численных методов порядка точности 1.5 [148], основанную на унифицированном разложении Тейлора–Ито:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\
 &+ \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta^2 + \\
 &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
 &+ \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left( (1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right] +
 \end{aligned}$$

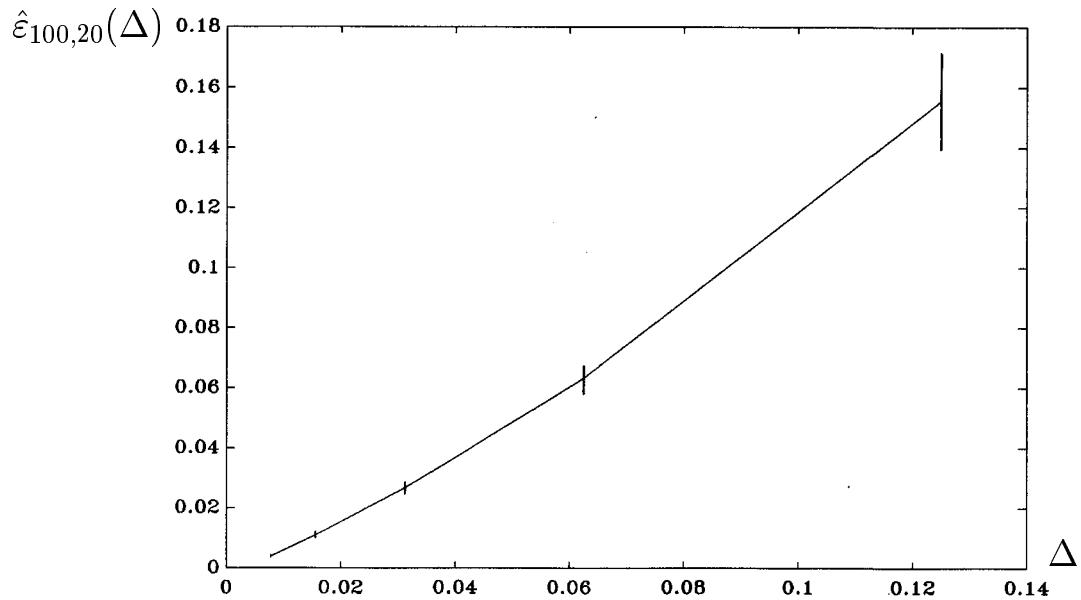


Рис. 8.9. Результат численного эксперимента 8.5 ( $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$ ).

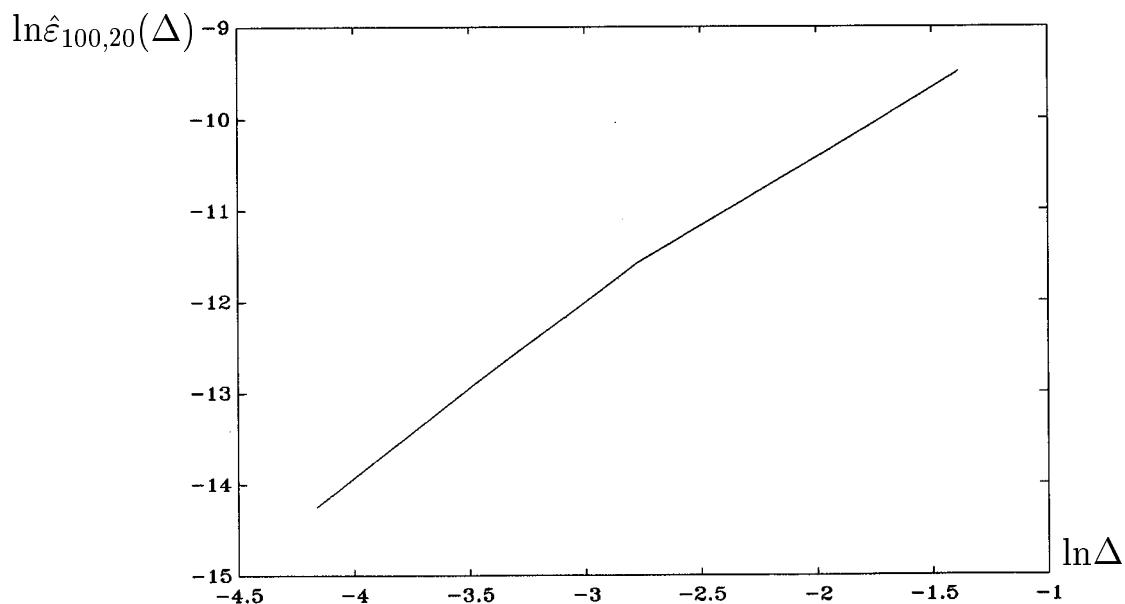


Рис. 8.10. Результат численного эксперимента 8.6 ( $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 = 1/2$ ).

$$+ \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}; \quad \tilde{\alpha}_l, \quad \tilde{\beta}_l \in [0, 1]. \quad (8.4)$$

**Численный эксперимент 8.5.** (рис. 8.9). Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (8.4) при  $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$ . При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (8.4) к уравнению (8.2) и приведения подобных слагаемых.

**Численный эксперимент 8.6.** (рис. 8.10). Повторить численный эксперимент 8.2 для неявного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (8.4) при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1/2$ . При этом не моделировать повторные стохастические интегралы Ито из условия численного эксперимента 8.5.

Далее будут рассмотрены более точные неявные одношаговые сильные численные методы.

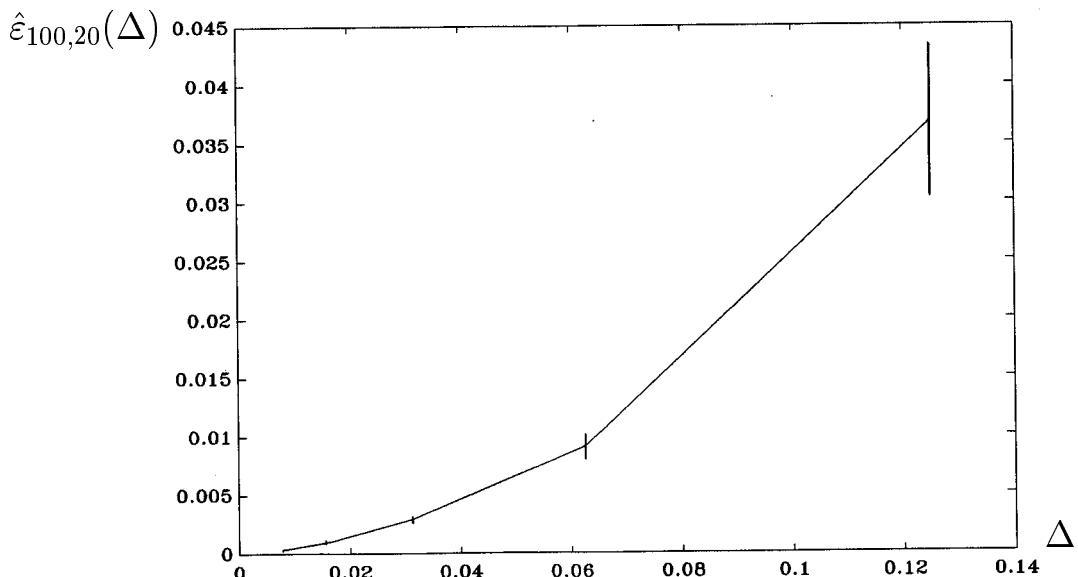


Рис. 8.11. Результат численного эксперимента 8.7.

### 8.2.3 Методы порядка точности 2.0

Модификация двухпараметрического семейства неявных сильных одношаговых численных методов порядка точности 2.0 [148], которая основана на унифицированном разложении Тейлора–Ито имеет вид:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \right\} \Delta +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left( (1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \left( \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left( \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}; \quad \tilde{\alpha}_l, \quad \tilde{\beta}_l \in [0, 1]. \quad (8.5)
\end{aligned}$$

**Численный эксперимент 8.7.** (рис. 8.11). Повторить численный эксперимент 8.5 для неявного сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (8.5) при  $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$ .

#### 8.2.4 Методы порядка точности 2.5

Для построения неявных сильных одношаговых численных методов порядка точности 2.5 дополним с учетом неявности правую часть (8.5) членами из разложения Тейлора–Ито. Таким образом, неявный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.5, основанный на унифицированном разложении Тейлора–Ито, примет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\
& + \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
& + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2} (\tilde{\alpha}_l + \tilde{\beta}_l) + \tilde{\alpha}_l \tilde{\beta}_l \right) \Delta^3 L^2 \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left( (1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \left( \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left( \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}^{(l)} \left( \frac{1}{2} \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \Delta^2 \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) (1 - \tilde{\beta}_l) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \frac{1}{2} L L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left( \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \left( \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \left( \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left( \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \right. \\
& \quad \quad \left. - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] +
\end{aligned}$$

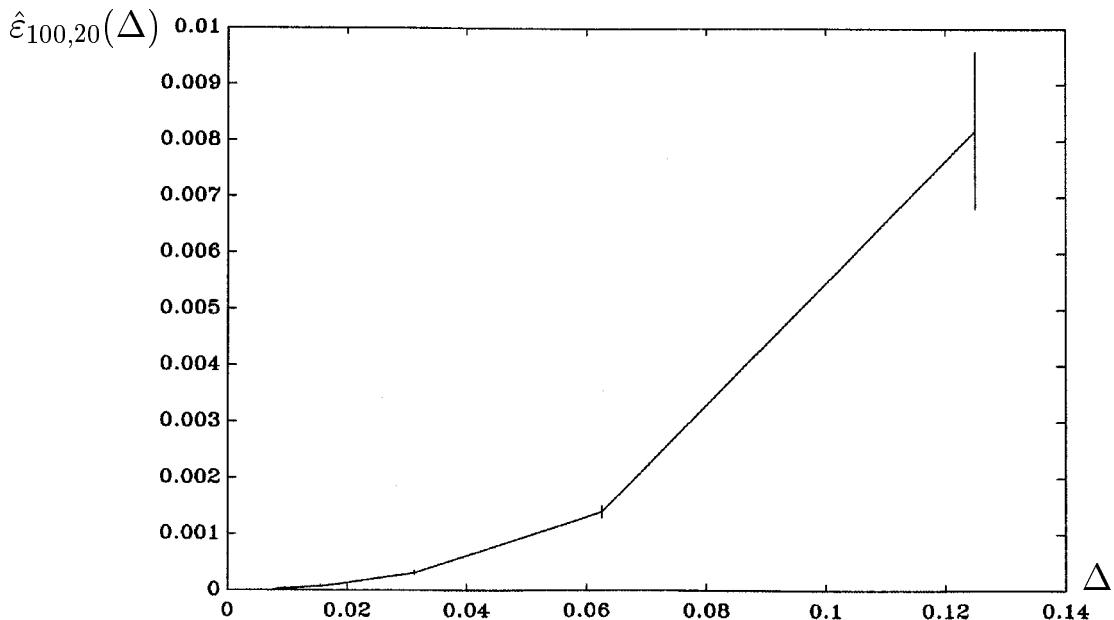


Рис. 8.12. Результат численного эксперимента 8.8.

$$+ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l_1)} \hat{I}_{00000}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}; \tilde{\alpha}_l, \tilde{\beta}_l \in [0, 1]. \quad (8.6)$$

**Численный эксперимент 8.8.** (рис. 8.12). Повторить численный эксперимент 8.5 для неявного сильного численного метода порядка точности 2.5 вида (8.6) при  $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$ .

В заключение данного раздела отметим, что если в (8.3)–(8.6) положить  $\tilde{\alpha}_l = \tilde{\beta}_l = 0$ , то из них вытекают рассматривавшиеся ранее явные сильные одношаговые численные методы.

### 8.2.5 Метод порядка точности 3.0

В настоящем разделе предлагаем неявную одношаговую сильную численную схему порядка точности 3.0 вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}) \Delta - \frac{\Delta^3}{12} L^2 \mathbf{a} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ & \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\ & + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& \quad - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \Big] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} \hat{I}_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} L^2 G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + G_0^{(i_2)} L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left[ \hat{I}_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \Delta \left( \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + L G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} L^2 \Sigma_{i_1} \left( \frac{1}{2} \hat{I}_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \hat{I}_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) - \right. \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \hat{I}_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m \left[ G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) - \right. \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_4)} L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_6=1}^m G_0^{(i_6)} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_6 i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{8.7}
\end{aligned}$$

**Численный эксперимент 8.9.** (рис. 8.13). Повторить численный эксперимент 8.5 для неявного сильного численного метода порядка точности 3.0 вида (8.7) при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 4, 5, 6, 7$ .

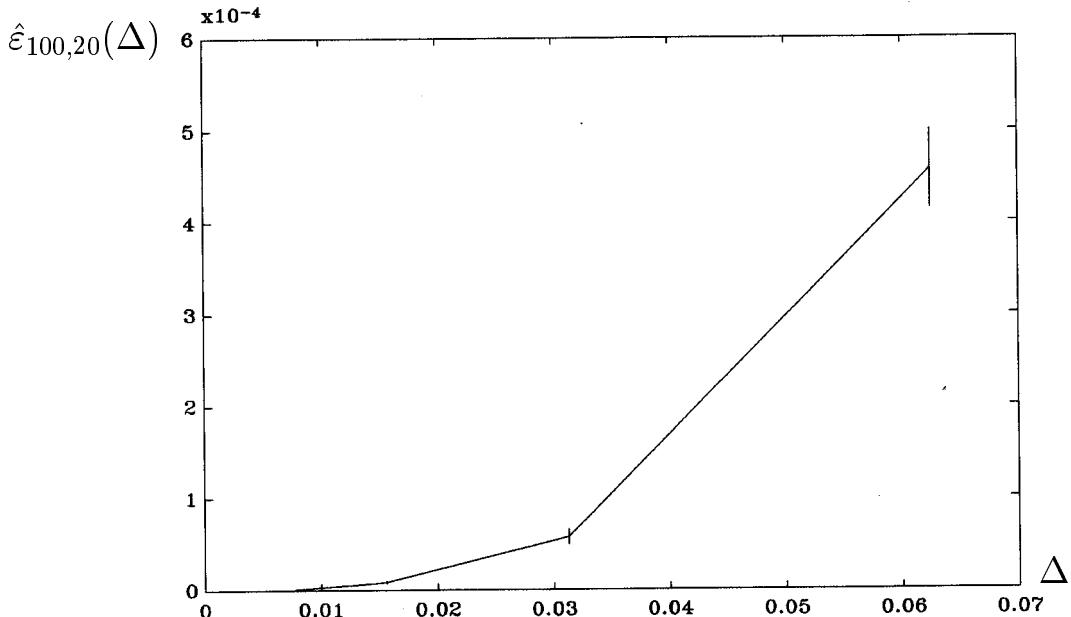


Рис. 8.13. Результат численного эксперимента 8.9.

### 8.3 Неявные одношаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В качестве основы для построения неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов решения СДУ Ито возьмем численные методы, построенные в предыдущем разделе, и аппроксимируем конечно-разностями частные производные, входящие в их правые части.

#### 8.3.1 Методы порядка точности 1.0

Рассмотрим семейство (8.3) неявных методов Г.Н. Мильштейна и аппроксимируем конечно-разностями частные производные, входящие в правую часть (8.3). В результате получим следующее однопараметрическое семейство неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \right\} \Delta + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (7.108).

**Численный эксперимент 8.10.** (рис. 8.14). Повторить численный эксперимент 8.2 для неявного сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (8.8) при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1/2$ .

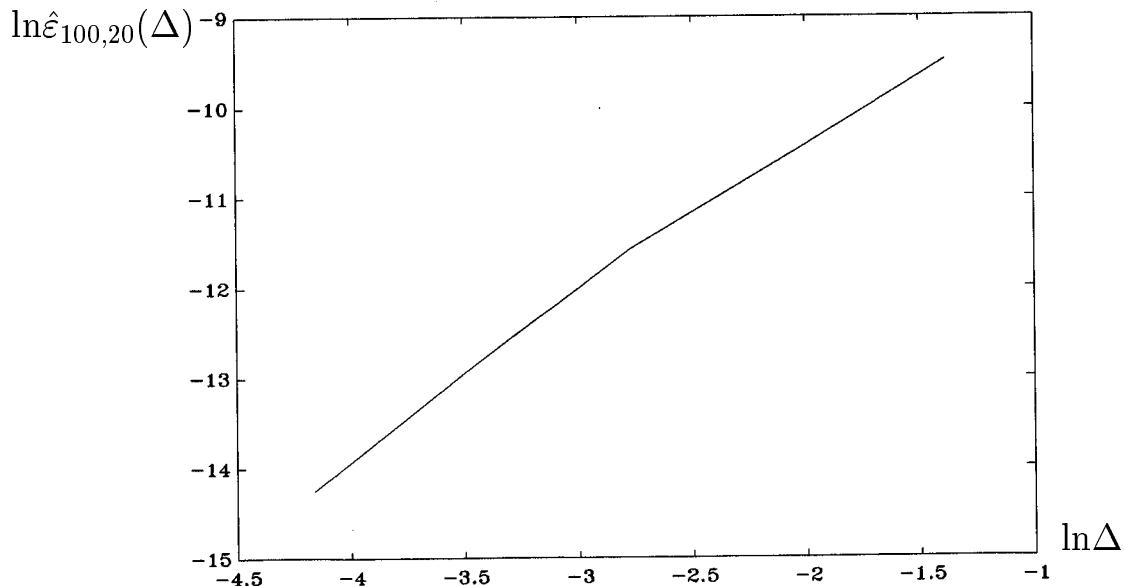


Рис. 8.14. Результат численного эксперимента 8.10.

**Численный эксперимент 8.11.** (рис. 8.15). Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (8.8) при  $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$ .

### 8.3.2 Методы порядка точности 1.5

Аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в правую часть (8.4). Тогда и (8.4) следует семейство неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \right\} \Delta + \\ &+ \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \left\{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \right\} \Delta^2 + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\ &+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( (1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma^{(l i_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma^{(l i_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(j i_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}. \tag{8.9}
 \end{aligned}$$

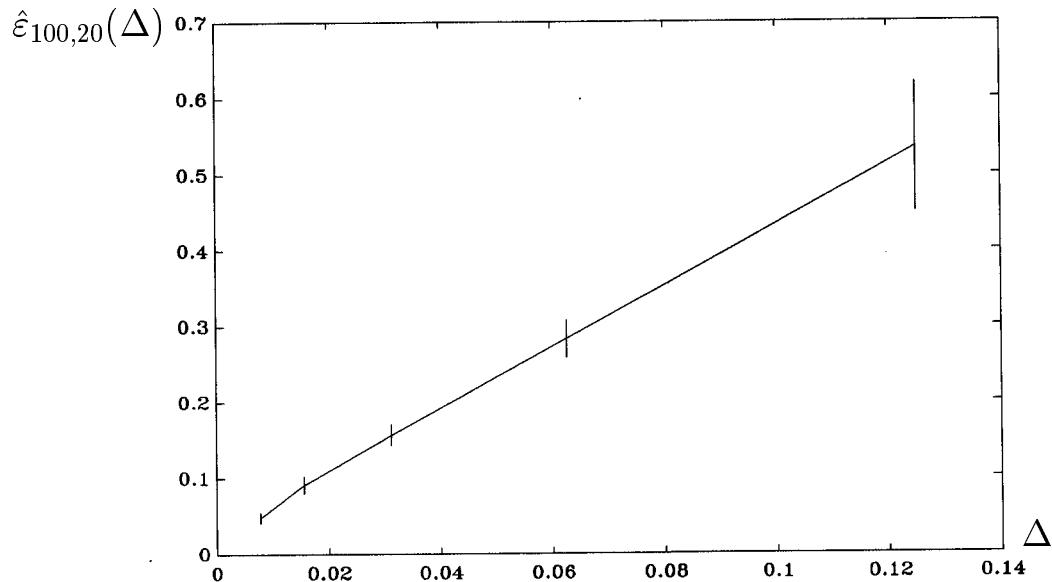


Рис. 8.15. Результат численного эксперимента 8.11.

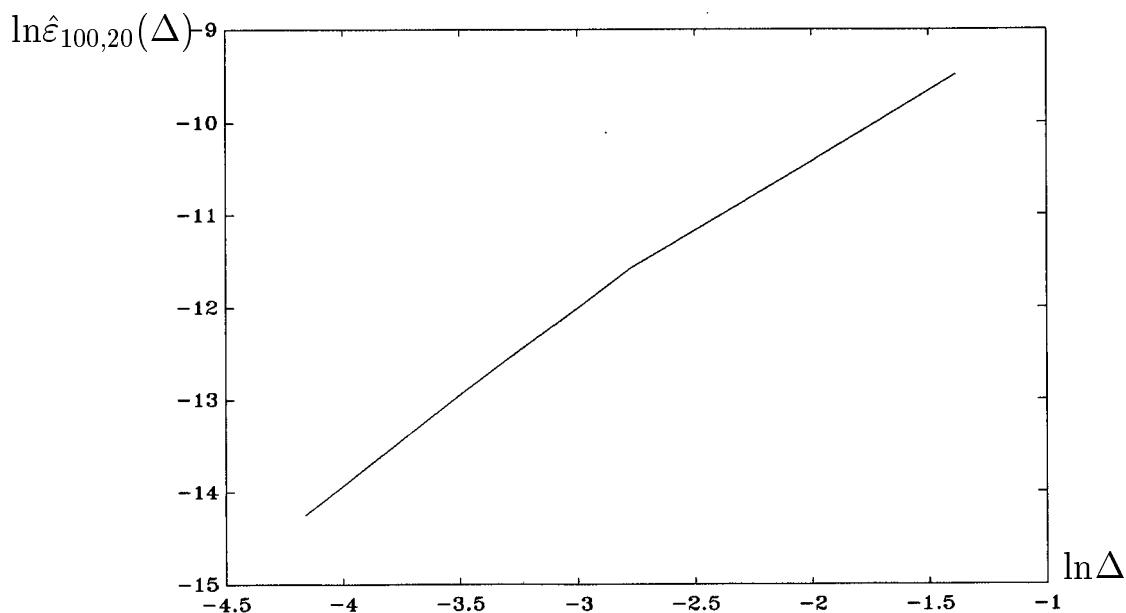


Рис. 8.16. Результат численного эксперимента 8.12.

В (8.9) сохранен смысл обозначений, введенных в (7.114).

**Численный эксперимент 8.12.** (рис. 8.16). Повторить численный эксперимент 8.2 для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (8.9) при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1/2$ . Для моделирования стохастических интегралов Ито  $I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  использовать формулу

$$I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} = -\frac{1}{2}\Delta^{3/2}\left(\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\right), \quad (8.10)$$

где  $\zeta_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0^{(1)}$ ,  $\zeta_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

**Численный эксперимент 8.13.** (рис. 8.17). Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (8.9) при  $\tilde{\alpha}_1 = 1/2$ . Для моделирования стохастических интегралов Ито  $I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N-1$  использовать формулу (8.10).

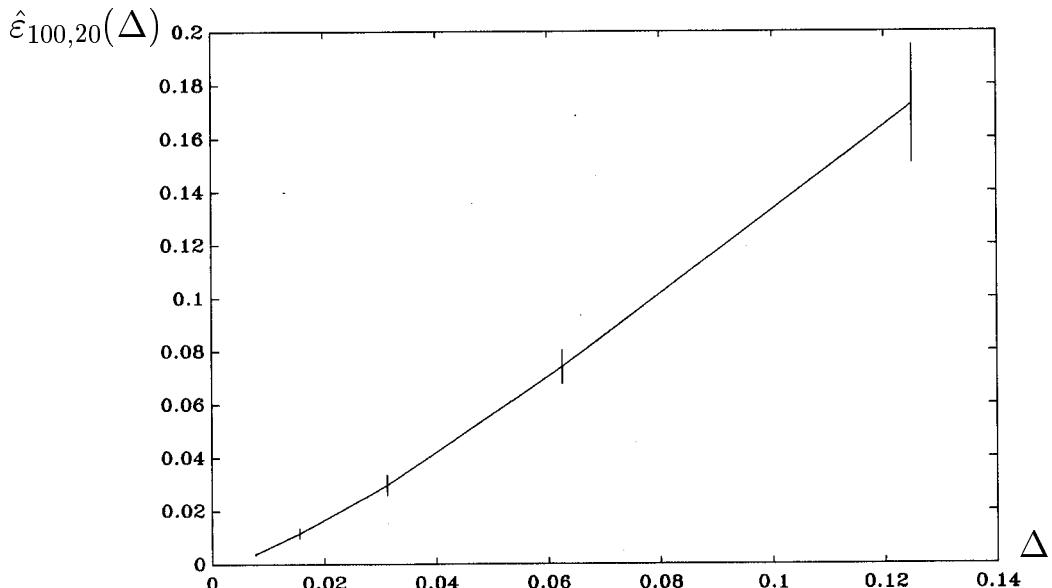


Рис. 8.17. Результат численного эксперимента 8.13.

### 8.3.3 Методы порядка точности 2.0

Аппроксимируя конечными разностями частные производные, входящие в правую часть (8.5) и выбирая  $\tilde{\alpha}_l = 1/2$  в (8.5), получаем

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left. \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{8.11}
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (7.128).

**Численный эксперимент 8.14.** (рис. 8.18). Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка 2.0 вида (8.11). Для моделирования стохастических интегралов Ито  $I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  использовать формулу (8.10), а для моделирования стохастических интегралов  $I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)}$ ,  $I_{01_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  — аппроксимацию

$$\begin{aligned}
I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} & = -\frac{\Delta^2}{4} \left[ \left( \zeta_0^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \zeta_0^{(1)} + \right. \\
& + \sum_{i=0}^q \left( \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}} \zeta_i^{(1)} \zeta_{i+2}^{(1)} \right) - 1 \left. \right]
\end{aligned}$$

и соотношение  $I_{01_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} = I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} I_{0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} - I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} + \Delta^2/2$  при  $q = 1$ ;  $\zeta_{j_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(1)}$ ;  $j = 0, 1, \dots, q+2$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

В [148] (С. 411) предложен неявный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного аддитивного шума. Предложенный нами неявный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 вида (8.11) — более общий, поскольку в (8.11) шум предполагается векторным и неаддитивным. Также, ошибка численного метода (8.11) уменьшается при уменьшении шага интегрирования  $\Delta$  в достаточно широком диапазоне его изменения (см. рис. 8.18).

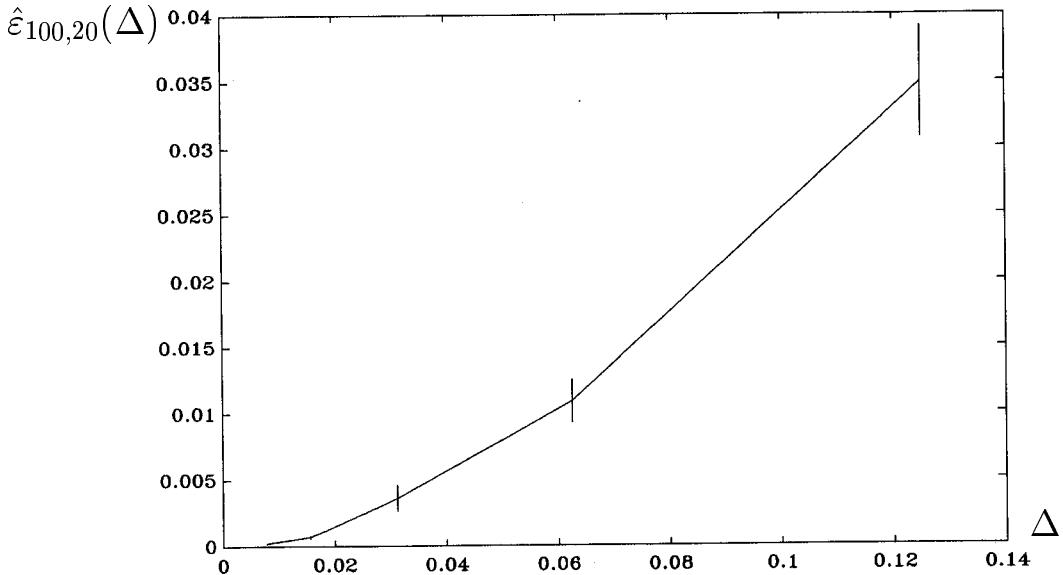


Рис. 8.18. Результат численного эксперимента 8.14.

### 8.3.4 Методы порядка точности 2.5

Для построения неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 2.5 используем численную схему (8.6) при  $\tilde{\alpha}_l = 1/2$ , а также конечно-разностные аппроксимации, полученные в главе 7. В результате с помощью (8.6) получим следующую неявную сильную одношаговую численную схему порядка точности 2.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} - \\ - \frac{\Delta}{12} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \mathbf{v}_p, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \frac{1}{2} \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} - \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \\
& \quad \times \left( \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{I}_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{8.12}
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (7.151).

В заключение отметим, что полученные в данной главе неявные сильные численные методы представляют интерес, поскольку в них используются конечно-разностные аппроксимации частных производных, отличающиеся от соответствующих аналогов, полученных в [76], [148], унифицированные разложения Тейлора–Ито, а также предлагается применять в построенных численных схемах новый метод аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанный на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра (см. теоремы 5.1 – 5.7\*).

## 8.4 О сходимости неявных сильных одношаговых численных методов

В настоящем разделе на примере численного метода (8.3) покажем, как может быть обоснована сходимость неявных одношаговых сильных численных методов.

Предполагается, что все частные производные, которые встречаются в данном разделе, существуют.

Перепишем численный метод (8.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \right\} \Delta + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

где  $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(l)}$ ;  $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$ ;  $\tilde{\alpha}_l \in [0, 1]$ ;  $l = 1, \dots, n$ .

С помощью формулы Ито и разложения Тейлора–Ито имеем

$$\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ с в. 1,} \quad (8.14)$$

где

$$R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) ds + \sum_{i_1=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)},$$

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \Delta + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + H_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(l)} \text{ с в. 1,} \quad (8.15)$$

а  $\mathbf{x}_s$  — решение СДУ Ито (7.18).

Используя (8.14), (8.15), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \left\{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \right\} \Delta + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\ &+ H_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(l)} - \tilde{\alpha}_l \Delta R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ с в. 1.} \end{aligned}$$

Далее с в. 1 имеем

$$\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = \mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)} + \sum_{p=0}^{n_s-1} \left( U_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + G_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \right) + U_{s, \tau_{n_s}}^{(l)} + G_{s, \tau_{n_s}}^{(l)}, \quad (8.16)$$

где  $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max_j \{j : \tau_j \leq s\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_s^{(l)} &= \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \left\{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \right\} (s - \tau_p) + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{0_{s, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{00_{s, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \\ U_{s, \tau}^{(l)} &= \left\{ \tilde{\alpha}_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s)) + \right. \\ &\left. + (1 - \tilde{\alpha}_l) (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_\tau, \tau)) \right\} (s - \tau) + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \left[ \left( \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) - \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau, \tau) \right) I_{0_{s, \tau}}^{(i_1)} + \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau, \tau) \left( I_{0_{s, \tau}}^{(i_1)} - \hat{I}_{0_{s, \tau}}^{(i_1)} \right) \right] \\ &+ \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ \left( G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) - G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau, \tau) \right) I_{00_{s, \tau}}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ &\left. + G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau, \tau) \left( I_{00_{s, \tau}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00_{s, \tau}}^{(i_2 i_1)} \right) \right], \\ G_{s, \tau}^{(l)} &\stackrel{\text{def}}{=} H_{3_{s, \tau}}^{(l)} - \tilde{\alpha}_l (s - \tau) R_{s, \tau}^{(l)}, \end{aligned}$$

величина  $\mathbf{x}_s^{(l)}$  определяется из (8.15) при замене  $\tau_{p+1}$  на  $s$ ;  $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Если предположить теперь, что выполнены условия теоремы 7.2 при  $r = 2$ , то несколько модифицируя доказательство теоремы 7.2 и используя (8.16), нетрудно получить следующую оценку:

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \leq K_1 \Delta^2 + K_2 \int_0^s \mathbf{z}_u^{(l)} du, \quad (8.17)$$

где

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} M\{|\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)}|^2\}; \quad s \in [0, T],$$

а постоянные  $K_1, K_2$  не зависят от  $\Delta$ .

Тогда с помощью неравенства (8.17) и неравенства Гронуолла имеем

$$M\{|\mathbf{x}_T^{(l)} - \mathbf{y}_T^{(l)}|\} \leq \sqrt{\mathbf{z}_T^{(l)}} \leq K_3 \Delta$$

или

$$M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq K_4 \Delta,$$

где постоянные  $K_3, K_4$  не зависят от  $\Delta$ . Это означает, что численный метод (8.13) имеет порядок сильной сходимости 1.0.

Нетрудно видеть, что сходимость более точных неявных сильных численных методов может быть доказана по предложенной ранее схеме. Отметим также, что, используя приведенные в данном разделе рассуждения, можно показать, что неявный метод Эйлера (8.1) имеет порядок сильной сходимости 0.5, если выполнены условия теоремы 7.1.

## 8.5 Сбалансированные неявные сильные численные методы

В начале данной главы (см. также [148] (С. 336–337)) уже отмечалось, что введение неявности при построении численных методов не только в систематические, но и в стохастические члены правой части численной схемы приводит к тому, что для конструируемых численных методов, вообще говоря, перестают существовать моментные характеристики.

Приведенные ранее неявные сильные численные методы, в которых неявность входит только в систематические члены, "хорошо" ведут себя по отношению к жестким системам только с несущественной стохастической динамикой (малая интенсивность шума, аддитивный шум) [195]. В тех случаях, когда стохастическая динамика существенна (мультипликативный шум с большой интенсивностью), явные сильные численные методы,

а также неявные сильные численные методы с неявностью в систематических членах дают большую ошибку даже при достаточно малых шагах интегрирования [195]. Использование же малых шагов интегрирования ведет к резкому увеличению машинного времени.

Для преодоления указанных вычислительных трудностей для жестких систем с существенной стохастической динамикой в [195] предложено пользоваться семейством так называемых сбалансированных сильных численных методов. Несмотря на то, что неявность в этих численных методах входит в систематические и стохастические слагаемые в [195] проблему существования моментных характеристик для данных численных методов удалось преодолеть.

Приведем общий вид сбалансированных неявных сильных численных методов [195]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}) + C_p(\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p+1}), \quad (8.18)$$

где

$$C_p = D_0(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta + \sum_{i=1}^m D_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) |\Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}|; \quad (8.19)$$

$D_0(\mathbf{x}, t), D_1(\mathbf{x}, t), \dots, D_m(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times n}$ ;  $\mathbf{f}_\tau$  —  $F_\tau$ -измеримый при всех  $\tau \in [0, T]$   $m$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ , а  $\Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $\tau_{p+1} - \tau_p = \Delta$ ;  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$  ( $p = 0, 1, \dots, N - 1$ ).

В [195] доказана теорема о сильной сходимости численного метода (8.18), (8.19), в условиях которой он имеет порядок сильной сходимости 0.5.

В работе [195] путем численных экспериментов для СДУ с мультиплексивным шумом показано, что в ряде случаев сбалансированные неявные сильные численные методы более эффективны, чем другие численные методы, в частности, явные численные методы.

## 8.6 О полностью неявных сильных численных методах

Рассмотренные в предыдущем разделе численные методы содержат неявность как в систематических, так и в стохастических членах. В данном

разделе рассмотрим численные методы [196], которые также обладают указанной особенностью, но основаны на другой идее.

Дело в том, что проблема существования моментных характеристик неявных сильных численных методов с неявностью в стохастических членах связана главным образом с тем, что гауссовские случайные величины, входящие в указанные численные методы, являются неограниченными случайными величинами. В [196] предлагается преодолеть данную проблему путем замены гауссовых случайных величин специальными ограниченными случайными величинами. Полученные таким образом в [196] численные методы имеют невысокие порядки сильной сходимости (в общем случае 0.5, а в частных случаях 1.0), однако эти численные методы обладают хорошими свойствами устойчивости.

Рассмотрим скалярное СДУ Ито вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)df_t, \quad x_0 = x(0, \omega),$$

где  $x_t \in \mathbb{R}^1$  — случайный процесс, являющийся решением данного уравнения;  $f_t$  — стандартный скалярный винеровский процесс;  $a, \sigma : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  — неслучайные функции;  $x_0$  — начальное условие, которое стохастически не зависит от приращения  $f_\tau - f_0$  при  $\tau > 0$  и удовлетворяет условию АПП теоремы 1.6.

**Теорема 8.1.** [196]. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функции

$$a(x, t), \quad \sigma(x, t), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t), \quad \frac{\partial a}{\partial t}(x, t), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}(x, t), \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x, t)$$

непрерывны при  $t \in [t_0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$  и существует такая постоянная  $L$ , что

$$|a(x, t) - a(y, t)| \leq L|x - y|, \quad \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t) \right| \leq L,$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}(x, t) \leq L(1 + |x|), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t}(x, t) \leq L(1 + |x|)$$

при всех  $t \in [t_0, T]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^1$ .

2. Существует такое  $\delta > 0$ , что если

$$|x - y| \leq \delta(1 + |x|),$$

то выполняется неравенство:

$$\left| \sigma(x, t) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(y, t) \right| \leq L, \quad t \in [t_0, T].$$

3. Случайные величины  $\zeta_{p,\Delta}$  определены следующим образом:

$$\zeta_{p,\Delta} = \begin{cases} \zeta_p & \text{при } |\zeta_p| \leq A_\Delta \\ A_\Delta & \text{при } \zeta_p > A_\Delta \\ -A_\Delta & \text{при } \zeta_p < -A_\Delta \end{cases},$$

где  $\zeta_p$  — независимые стандартные гауссовые случайные величины;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $\Delta = (T - t_0)/N$ ;  $A_\Delta = \sqrt{2|\ln\Delta|}$ .

Тогда численный метод

$$y_{p+1} = y_p + a(y_{p+1}, \tau_p)\Delta - \sigma(y_p, \tau_p) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(y_p, \tau_p)\Delta + \sigma(y_{p+1}, \tau_p)\zeta_{p,\Delta}\sqrt{\Delta},$$

где  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $\tau_p = t_0 + p\Delta$ ;  $\tau_N = T$ , имеет порядок сильной сходимости равный 0.5.

В [196], в частности, отмечается, что если условия теоремы 8.1 дополнить условием Липшица с постоянной  $L$  по переменной  $x$  для функции

$$\sigma(x, t) \frac{\partial \sigma}{\partial t}(x, t),$$

то численный метод вида

$$y_{p+1} = y_p + a(y_{p+1}, \tau_p)\Delta - \sigma(y_{p+1}, \tau_p) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(y_{p+1}, \tau_p)\Delta + \sigma(y_{p+1}, \tau_p)\zeta_{p,\Delta}\sqrt{\Delta} \quad (8.20)$$

будет иметь порядок сильной сходимости равный 0.5.

Кратко коснемся многомерного случая.

Рассмотрим СДУ Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

где  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — случайный процесс, являющийся решением данного уравнения;  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ ;  $\mathbf{a} : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $\Sigma : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times m}$  — неслучайные функции, удовлетворяющие условиям АI, АII (теорема 1.6);  $\mathbf{x}_0$  — начальное условие, которое стохастически не зависит от приращения  $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$  при  $\tau > 0$  и удовлетворяет условию АIII теоремы 1.6.

Многомерный вариант численного метода (8.20) имеет вид [196]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_p) \Delta - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Sigma^{(ij)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_p) \frac{\partial \Sigma_j}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_p) \Delta + \\ & + \sum_{j=1}^m \Sigma_j(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_p) \zeta_{p,\Delta}^{(j)} \sqrt{\Delta}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

где

$$\zeta_{p,\Delta}^{(j)} = \begin{cases} \zeta_p^{(j)} & \text{при } |\zeta_p^{(j)}| \leq A_\Delta \\ A_\Delta & \text{при } \zeta_p^{(j)} > A_\Delta \\ -A_\Delta & \text{при } \zeta_p^{(j)} < -A_\Delta \end{cases},$$

где  $\zeta_p^{(j)}$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных  $p$  или  $j$ ;  $\Sigma_j$  —  $j$ -й столбец матрицы  $\Sigma$ .

В [196] отмечается, что при соответствующих условиях гладкости и ограниченности функций  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$  численный метод (8.21) имеет порядок сильной сходимости равный 0.5. Там же рассмотрены и другие полностью неявные сильные численные методы порядка точности 0.5.

## Глава 9

# Двухшаговые и трехшаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В настоящей главе на примере двухшаговых и трехшаговых рассматриваются многошаговые сильные методы численного решения СДУ Ито. С вычислительной точки зрения многошаговые численные методы в ряде случаев являются более эффективными, нежели одношаговые численные методы такого же порядка точности. Это обстоятельство связано с тем, что многошаговые численные методы используют для вычисления решения на  $k$ -м шаге интегрирования информацию об этом решении на нескольких предшествующих шагах, в то время как в одношаговых численных методах используется информация о решении только на предыдущем шаге интегрирования. Кроме того, в ряде случаев многошаговые численные методы являются более устойчивыми, чем одношаговые численные методы такого же порядка точности. Отметим, что начальные шаги интегрирования, необходимые для старта многошаговой численной схемы (в случае двухшаговых численных методов требуется один начальный шаг, а в случае трехшаговых — два начальных шага), могут осуществляться, например, с помощью явных одношаговых численных методов такого же порядка точности, как и рассматриваемый многошаговый численный метод.

Двухшаговые сильные численные методы решения СДУ Ито приводились в ряде работ. Например, в [76] предложен явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 для СДУ Ито с аддитивным шумом. В [148] получен общий вариант данного численного метода, а

также приведена его конечно-разностная модификация. Там же доказана сильная сходимость явных двухшаговых численных методов общего вида. Неявные сильные двухшаговые численные методы порядка точности 1.0 и 1.5, а также их конечно-разностные модификации получены в [148].

В настоящей главе наряду с известными двухшаговыми сильными численными методами рассматриваются их модификации, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Кроме того, предлагаются новые явные и неявные, в том числе конечно-разностные, сильные двухшаговые численные методы порядка точности 2.0 и 2.5.

В данной главе также рассматриваются пяти и восьми параметрические семейства трехшаговых сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 соответственно для СДУ Ито. Среди этих численных методов представлены также конечно-разностные численные методы.

Отметим, что упомянутые известные одношаговые и двухшаговые сильные численные методы порядков точности 1.0 и 1.5 для СДУ Ито получаются при определенном выборе параметров из отмеченных параметрических семейств трехшаговых численных методов.

## 9.1 Явные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

### 9.1.1 Метод порядка точности 1.0

Рассмотрим следующий двухшаговый явный сильный численный метод порядка точности 1.0 [76], [148]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (9.1)$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \quad (9.2)$$

где здесь и далее сохранен смысл обозначений, введенных в (7.21), (7.35).

Обоснование сходимости численного метода (9.1), а также более точных двухшаговых сильных численных методов, будет дано далее.

**Численный эксперимент 9.1. Для СДУ Ито**

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad f_t \in \Re^1, \quad (9.3)$$

смоделировать 2000 ( $M = 20$  групп по  $N = 100$  реализаций) независимых реализаций случайной величины  $x_T$  при  $T = 1$ ,  $a = b = 1.5$  по формуле

$$x_T = x_0 \exp \left( \left( a - \frac{1}{2} b^2 \right) T + b \sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i \right)$$

и с помощью явного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (9.1). Здесь  $N = T/\Delta$ ;  $\Delta = 2^{-3}$ ;  $\zeta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.1), осуществлять с помощью явного метода Г.Н. Мильштейна (7.35).

Вычислить оценку  $\hat{\varepsilon}_{100,20}$  ошибки

$$\varepsilon = \mathbb{M} \{ |x_T - y_T| \}$$

по формуле (7.3) (ут определяется из (9.1)) и 90%-й доверительный интервал для  $\varepsilon$ . Повторить вычисления при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 4, 5, 6, 7$  и изобразить графически зависимость  $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$  с 90%-ми доверительными интервалами для  $\varepsilon$  при указанных значениях  $\Delta$  (рис. 9.1).

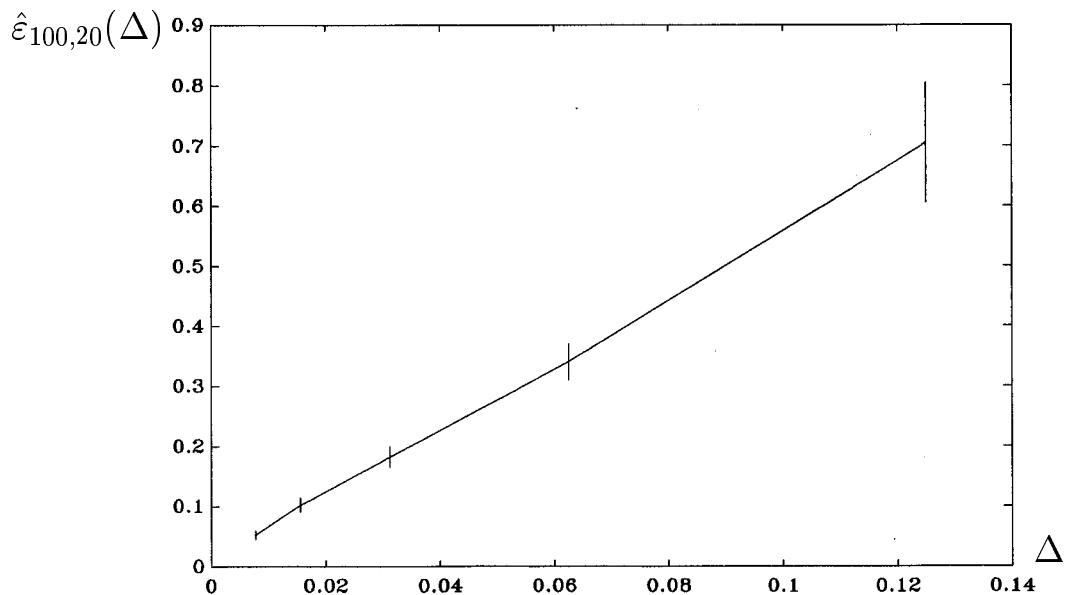


Рис. 9.1. Результат численного эксперимента 9.1.

### 9.1.2 Методы порядка точности 1.5

Рассмотрим модификацию явного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.5 [76], [148], которая основывается на унифици-

рованном разложении Тейлора–Ито

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0_{\tau_p, \tau_{p-1}}}^{(i_1)} + \\ + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right]. \end{aligned} \quad (9.5)$$

**Численный эксперимент 9.2.** (рис. 9.2). Повторить численный эксперимент 9.1 для явного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (9.4).

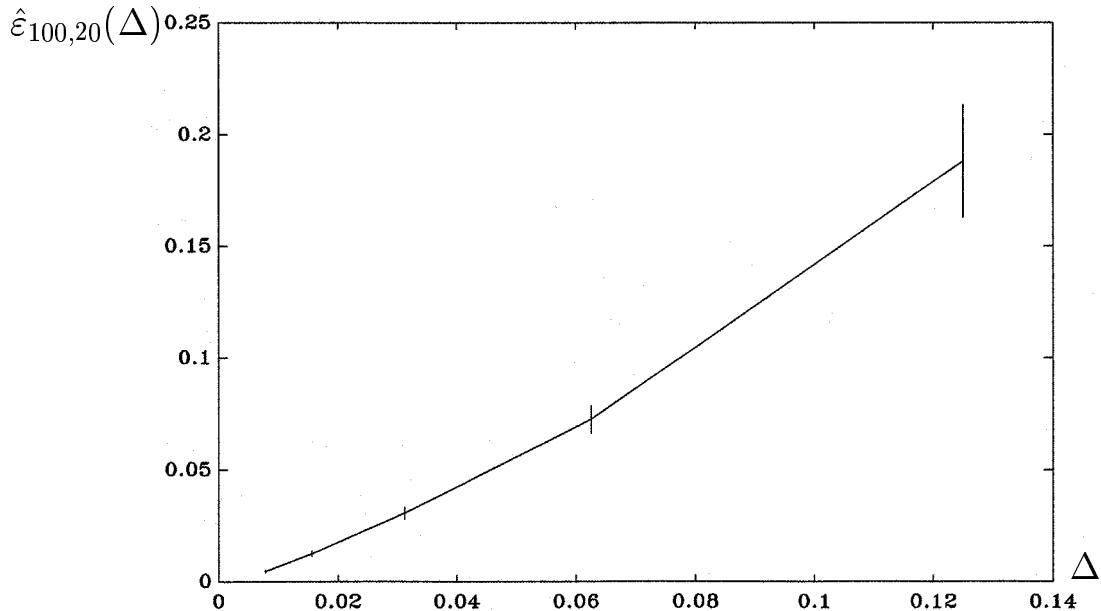


Рис. 9.2. Результат численного эксперимента 9.2.

Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.4), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.41). При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода

(9.4) к уравнению (9.3) и приведения подобных членов (это же касается и начального шага).

### 9.1.3 Методы порядка точности 2.0

Дополнив величину  $\mathbf{v}_p$  вида (9.5) стохастическими слагаемыми порядка  $O(\Delta^2)$  из унифицированного разложения Тейлора–Ито, получим следующую модификацию явного двухшагового численного метода порядка точности 2.0 [148]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \left[ \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0_{\tau_p, \tau_{p-1}}}^{(i_1)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{00_{\tau_p, \tau_{p-1}}}^{(i_2 i_1)} \right] + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right] + \end{aligned}$$

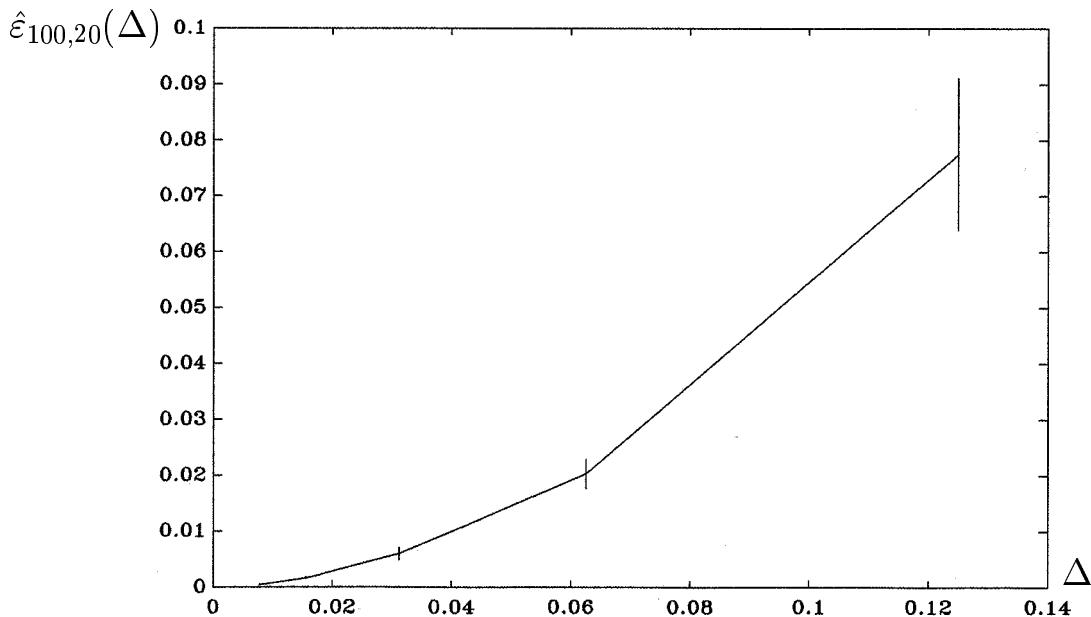


Рис. 9.3. Результат численного эксперимента 9.3.

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
 & \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
 & \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{9.7}
 \end{aligned}$$

**Численный эксперимент 9.3.** (рис. 9.3). Повторить численный эксперимент 9.2 для явного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (9.6). Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.6), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.54).

## 9.2 Неявные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

### 9.2.1 Методы порядка точности 1.0 и 1.5

Рассмотрим трехпараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.0 [76], [148]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\
 & + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \left. \right\} + \\
 & + \mathbf{v}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)}, \tag{9.8}
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{\gamma}_l$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0, 1]$ , а  $\mathbf{v}_p \in \Re^n$  и имеет вид (9.2).

Нетрудно видеть, что при  $\tilde{\gamma}_l = \tilde{\alpha}_l^{(1)} = 1$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$  численный метод (9.8) принимает вид (9.1), т.е. превращается в явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. Если в (9.8) положить  $\tilde{\gamma}_l = 0$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0.5$ , то (9.8) превращается в неявный одношаговый численный метод, который совпадает с численным методом (8.3), если там положить  $\tilde{\alpha}_l = 0.5$ .

Рассмотрим модификацию (основанную на унифицированном разложении Тейлора–Ито) однопараметрического семейства неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.5, которое приведено в книге [148]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \left\{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & \left. + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right\} + \tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

где  $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$ , а величина  $\tilde{\mathbf{v}}_p$  определяется следующим соотношением

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)}, \quad (9.10)$$

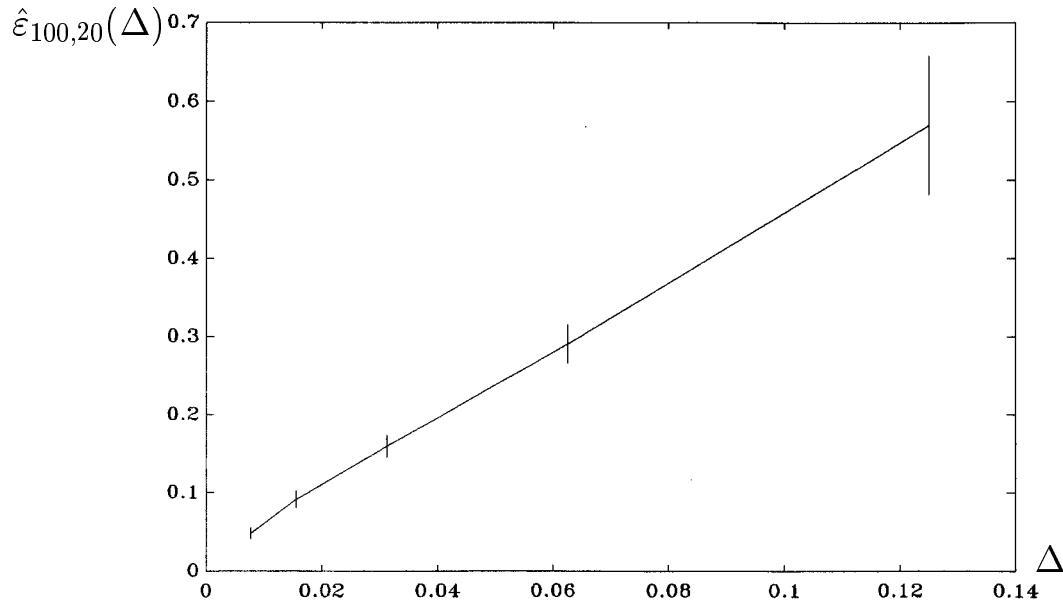


Рис. 9.4. Результат численного эксперимента 9.4.

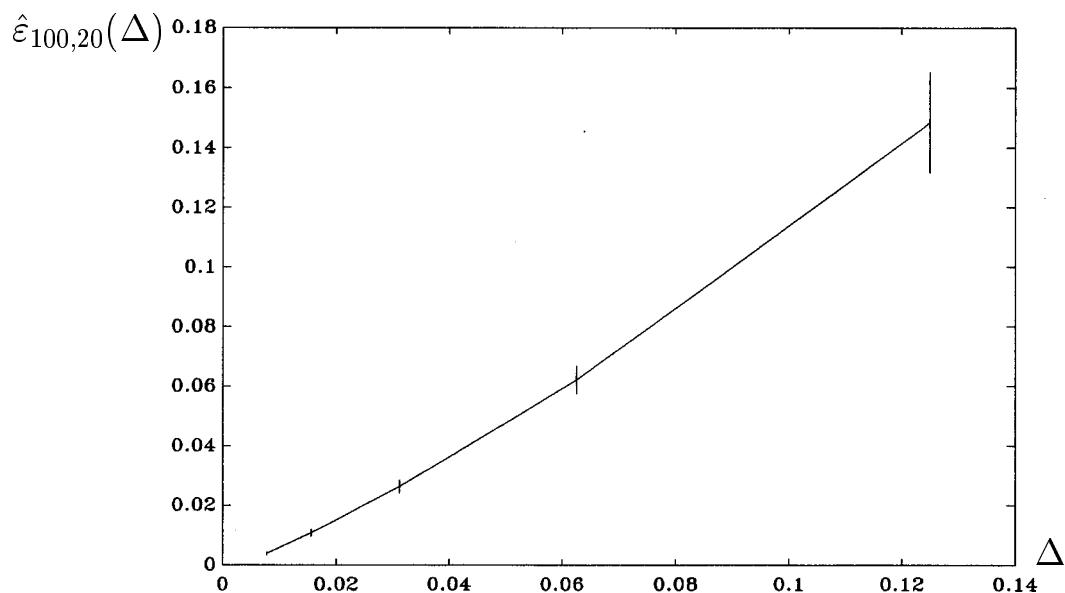


Рис. 9.5. Результат численного эксперимента 9.5.

где  $\mathbf{v}_p$  характеризуется равенством (9.5).

Отметим, что если в (9.9)  $\tilde{\gamma}_l = 0$ , то (9.9) превратится в неявный одностадийный численный метод, который совпадет с численным методом (8.4), если в (8.4) положить  $\tilde{\alpha}_l = 1/2$ ,  $\tilde{\beta}_l \in [0, 1]$ .

**Численный эксперимент 9.4.** (рис. 9.4). Повторить численный эксперимент 9.1 для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (9.8), (9.2) при  $\tilde{\gamma}_1 = 1$ ,  $\tilde{\alpha}_1^{(2)} = \tilde{\alpha}_1^{(1)} = 1/2$ . Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.8), (9.2), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.35).

**Численный эксперимент 9.5.** (рис. 9.5). Повторить численный эксперимент 9.2 для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (9.9), (9.10), (9.5) при  $\tilde{\gamma}_1 = 1$ . Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.9), (9.10), (9.5), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.41).

### 9.2.2 Методы порядка точности 2.0 и 2.5

Рассмотрим следующую модификацию (основанную на унифицированном разложении Тейлора–Ито) неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\ + \tilde{\mathbf{v}}_p + \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \Delta \left\{ \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right\}, \quad (9.12)$$

а  $\mathbf{v}_p$  имеет вид (9.7).

Если для построения неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.5 используются (9.11) и унифицированное разложение Тейлора–Ито, то  $\tilde{\mathbf{v}}_p$  в (9.11) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \Delta \left[ \sum_{i_1=1}^m \left( G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left( \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -LG_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \Big) + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \Big] - \frac{\Delta^3}{12} L^2 \mathbf{a}, \tag{9.13}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
 & \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left( \frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta^2 \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} LL \Sigma_{i_1} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - LG_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ G_0^{(i_3)} LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left( \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - LG_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{9.14}
 \end{aligned}$$

**Численный эксперимент 9.6.** (рис. 9.6). Повторить численный эксперимент 9.2 для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (9.11), (9.12), (9.7). Начальный шаг, необходимый

для старта численного метода (9.11), (9.12), (9.7), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.54).

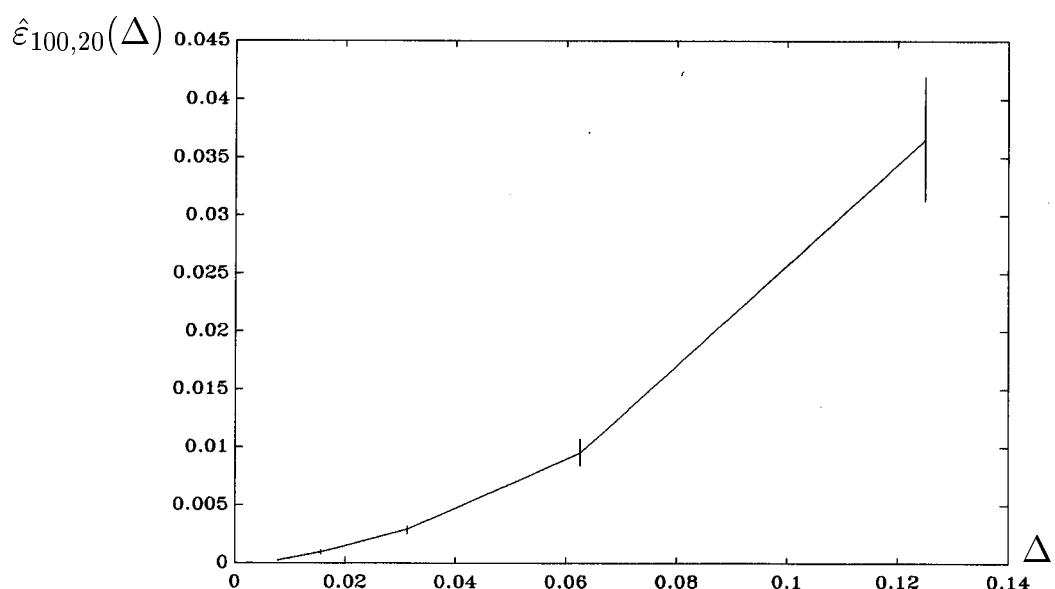


Рис. 9.6. Результат численного эксперимента 9.6.

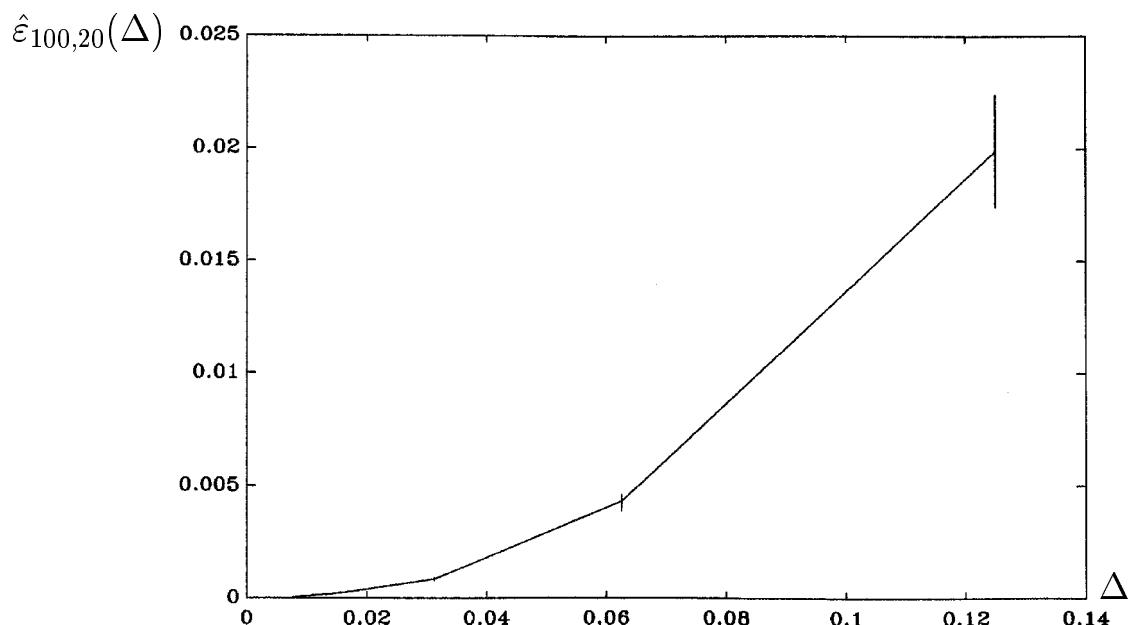


Рис. 9.7. Результат численного эксперимента 9.7.

**Численный эксперимент 9.7.** (рис. 9.7). Повторить численный эксперимент 9.2 для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.5 вида (9.11), (9.13), (9.14).

*Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.11), (9.13), (9.14), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 2.5 вида (7.60).*

### 9.3 О сходимости неявных сильных двухшаговых численных методов

В данном разделе на примере численного метода (9.8) покажем, как может быть обоснована сходимость неявных двухшаговых сильных численных методов.

Предполагается, что все частные производные, встречающиеся в данном разделе, существуют.

Перепишем численный метод (9.8) [148]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & \left. + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right\} + \\ & + \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

где  $\tilde{\gamma}_l$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0, 1]$ , а  $\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$  имеет вид

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}.$$

Докажем сходимость численного метода (9.15). Используя формулу Ито и разложение Тейлора–Ито, получаем

$$\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ с в. 1,} \quad (9.16)$$

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \Delta \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + H_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(l)} \text{ с в. 1,} \quad (9.17)$$

где

$$R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) ds + \sum_{i_1=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)},$$

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} = \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)},$$

а  $H_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(l)}$  — остаточный член разложения Тейлора–Ито, который имеет порядок малости  $3/2$  при  $\Delta \downarrow 0$ ;  $\mathbf{x}_s$  — решение СДУ Ито (7.18).

С учетом (9.16), (9.17) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right\} + \\ &\quad + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + Q_{\tau_{p+1}, \tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \text{ с в. 1}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{\tau_{p+1}, \tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} &\stackrel{\text{def}}{=} H_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l H_{3_{\tau_p, \tau_{p-1}}}^{(l)} - \\ &\quad - \Delta \left( \tilde{\alpha}_l^{(2)} R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)} R_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \right). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_s^{(l)} &= (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (s - \tau_p) \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + \\ &\quad + \Delta \left\{ (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right\} + \\ &\quad + \mathbf{v}_{s, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где  $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$ ;  $p = 1, 2, \dots, N - 1$ .

Оценим  $\mathbb{M}\{| \mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T | \}$ . Из (9.18) при  $\tau_{p+1} = s$  и (9.19) получим

$$\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = (1 - \tilde{\gamma}_l) (\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}^{(l)}) + \tilde{\gamma}_l (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}) + U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)}, \quad (9.20)$$

где

$$\begin{aligned} U_{s, \tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} &\stackrel{\text{def}}{=} (s - \tau_p) \tilde{\alpha}_l^{(2)} (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s)) + \\ &\quad + \Delta \left\{ (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1})) \right\} + \\ &\quad + \mathbf{d}_{s, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + Q_{s, \tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}. \end{aligned}$$

$$+(1-\tilde{\alpha}_l^{(1)})\tilde{\gamma}_l(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}))\Big\} + \\ + \left(\mathbf{d}_{s,\tau_p} - \mathbf{v}_{s,\tau_p}^{(l)}\right) + \tilde{\gamma}_l \left(\mathbf{d}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} - \mathbf{v}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)}\right) + Q_{s,\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)},$$

а  $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max_j \{j : \tau_j \leq s\}; s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]; p = 1, 2, \dots, N-1$ .

Итерируя равенство (9.20), приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} &= \mu_1(\tilde{\gamma}_l)(\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}^{(l)}) + \tilde{\gamma}_l(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}) + U_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}}^{(l)} = \\ &= \mu_2(\tilde{\gamma}_l)(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}) + \mu_1(\tilde{\gamma}_l)\tilde{\gamma}_l(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)}) + \\ &\quad + \mu_1(\tilde{\gamma}_l)U_{\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}} + U_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}}^{(l)} = \dots \\ \dots &= \mu_{n_s}(\tilde{\gamma}_l)(\mathbf{x}_{\tau_1}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}) + \mu_{n_s-1}(\tilde{\gamma}_l)\tilde{\gamma}_l(\mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)}) + \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n_s-1} \mu_p(\tilde{\gamma}_l)U_{\tau_{n_s-p+1},\tau_{n_s-p},\tau_{n_s-p-1}}^{(l)} + U_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.21)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_0(\tilde{\gamma}_l) &= 1, \quad \mu_1(\tilde{\gamma}_l) = 1 - \tilde{\gamma}_l, \\ \mu_{p+1}(\tilde{\gamma}_l) &= (1 - \tilde{\gamma}_l)\mu_p(\tilde{\gamma}_l) + \tilde{\gamma}_l\mu_{p-1}(\tilde{\gamma}_l); \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.22)$$

Покажем, что  $\mu_p(\tilde{\gamma}_l) \in [0, 1]; p = 0, 1, \dots$ , если  $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$ . С помощью (9.22) получим  $0 \leq \mu_2(\tilde{\gamma}_l) \leq 1 - \tilde{\gamma}_l + \tilde{\gamma}_l = 1$ , поскольку  $\mu_0(\tilde{\gamma}_l), \mu_1(\tilde{\gamma}_l) \in [0, 1]$ . Предположим, что  $\mu_{p-1}(\tilde{\gamma}_l), \mu_p(\tilde{\gamma}_l) \in [0, 1]$ . Тогда из (9.22) снова получим, что  $0 \leq \mu_{p+1}(\tilde{\gamma}_l) \leq 1 - \tilde{\gamma}_l + \tilde{\gamma}_l = 1$ . Таким образом, по индукции  $\mu_p(\tilde{\gamma}_l) \in [0, 1]; p = 0, 1, \dots$ , если  $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$ .

Далее, пусть

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_1}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}|^2\} \leq K_1 \Delta^2, \quad \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)}|^2\} \leq K_1 \Delta^2; \quad l = 1, \dots, n,$$

где постоянная  $K_1$  не зависит от  $\Delta$ . Несколько модифицируя доказательство теоремы 7.2 при  $r = 2$  (предполагается, что выполнены условия этой теоремы), а также используя (9.21), получаем следующее неравенство:

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \leq K_2 \Delta^2 + K_3 \int_0^s \mathbf{z}_u^{(l)} du, \quad (9.23)$$

где постоянные  $K_2, K_3$  не зависят от  $\Delta$ , а  $\mathbf{z}_s^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} M\{|\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)}|^2\}$ .

Применяя к (9.23) неравенство Громуолла и полагая затем  $s = T$ , приходим к оценке

$$M\{|\mathbf{x}_T^{(l)} - \mathbf{y}_T^{(l)}|\} \leq \sqrt{\mathbf{z}_T^{(l)}} \leq K_4 \Delta, \quad (9.24)$$

где постоянная  $K_4$  не зависит от  $\Delta$ .

Наконец, из (9.24) нетрудно получить, что

$$M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq K \Delta,$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $\Delta$ , т.е. неявный двухшаговый численный метод (9.15) имеет порядок сильной сходимости 1.0.

Используя предложенную схему, можно обосновать сходимость более точных неявных двухшаговых сильных численных методов. Сходимость явных двухшаговых сильных численных методов может быть получена также с использованием приведенных в данном разделе рассуждений, если положить в них  $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0; l = 1, \dots, n$ .

## 9.4 Двухшаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В качестве основы для построения двухшаговых сильных конечно-разностных численных методов выберем численные схемы, рассмотренные в данной главе, и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в их правые части.

### 9.4.1 Методы порядка точности 1.0 и 1.5

Приведем явный двухшаговый конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 1.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (9.25)$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{(i_1)} \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad (9.26)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (7.108).

В качестве примера неявного двухшагового конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.0 приведем следующее однопараметрическое семейство численных методов:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \left\{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & \left. + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right\} + \mathbf{v}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.27)$$

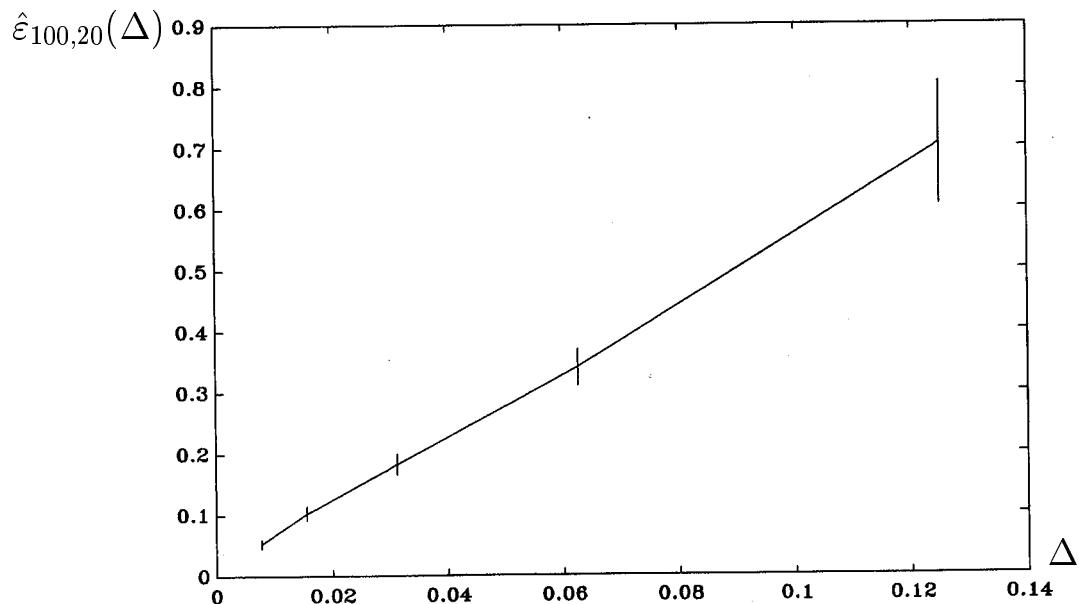


Рис. 9.8. Результат численного эксперимента 9.8.

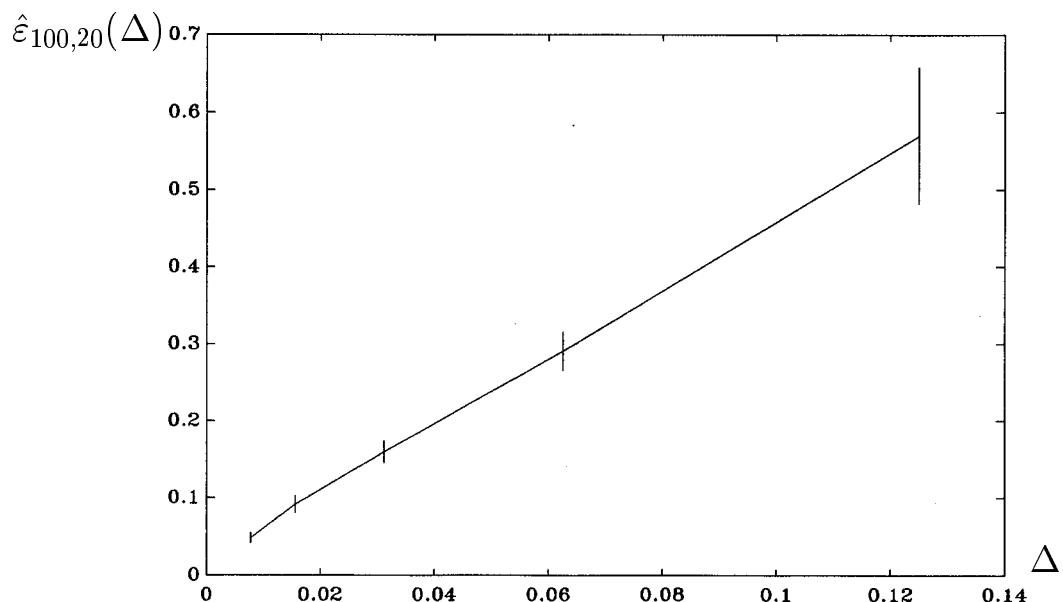


Рис. 9.9. Результат численного эксперимента 9.9.

где  $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$ , а  $\mathbf{v}_p$  имеет вид (9.26).

**Численный эксперимент 9.8.** (рис. 9.8). Повторить численный эксперимент 9.1 для явного двухшагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (9.25). Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.25), осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.108).

**Численный эксперимент 9.9.** (рис. 9.9). Повторить численный эксперимент 9.1 для неявного двухшагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (9.27) при  $\tilde{\gamma}_1 = 1$ . Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.27), осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.108).

Перейдем к рассмотрению двухшаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5.

Рассмотрим на основе численной схемы (9.9) однопараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \left\{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & \left. + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right\} + \mathbf{v}_p^{(l)} + \gamma_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)}; \end{aligned} \quad (9.28)$$

здесь  $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$ , а  $\mathbf{v}_p$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right. \\ & - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \Big] + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2} (\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}, \end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.114).

**Численный эксперимент 9.10.** (рис. 9.10). Повторить численный эксперимент 9.1 для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (9.28) при  $\tilde{\gamma}_1 = 1$ . Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.28), осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.114). Для моделирования стохастических интегралов Ито  $I_{1(p+1)\Delta,p\Delta}^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  использовать формулу

$$I_{1(p+1)\Delta,p\Delta}^{(1)} = -\frac{1}{2}\Delta^{3/2}\left(\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\right), \quad (9.29)$$

где  $\zeta_{0(p+1)\Delta,p\Delta}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0^{(1)}$ ,  $\zeta_{1(p+1)\Delta,p\Delta}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

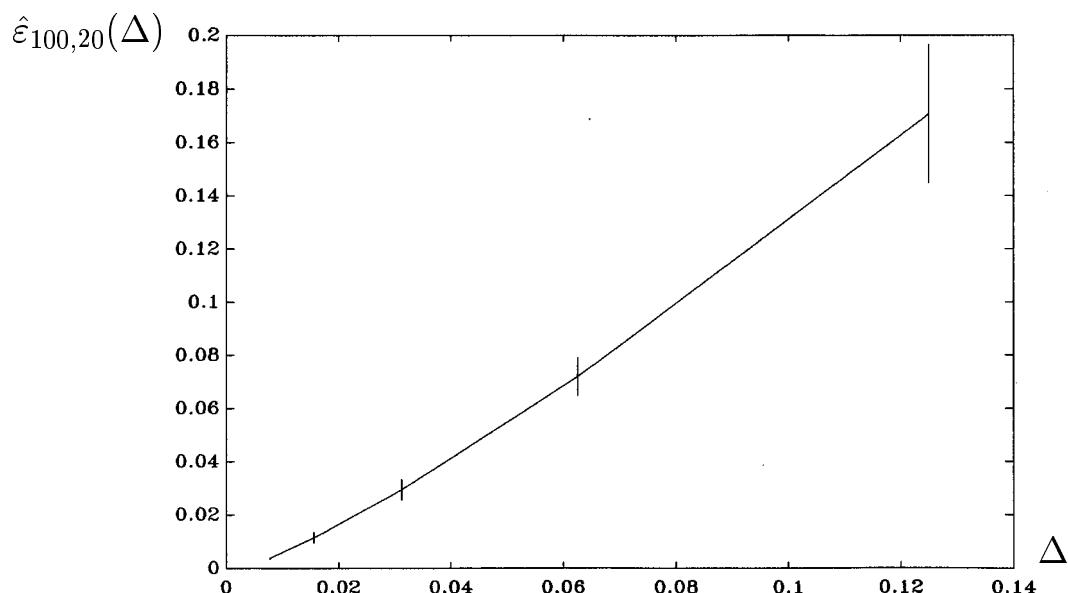


Рис. 9.10. Результат численного эксперимента 9.10.

#### 9.4.2 Метод порядка точности 2.0

Рассмотрим в качестве двухшагового конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 2.0 неявный численный метод:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + \frac{1}{2}\Delta &\left\{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right\} + \\ &+ \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \end{aligned} \quad (9.30)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
 & - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \Big] + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^m \left[ \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left( \hat{I}_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
 & - \left. \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2} (\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
 & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{9.31}
 \end{aligned}$$

где введены такие же обозначения, как и в (8.11).

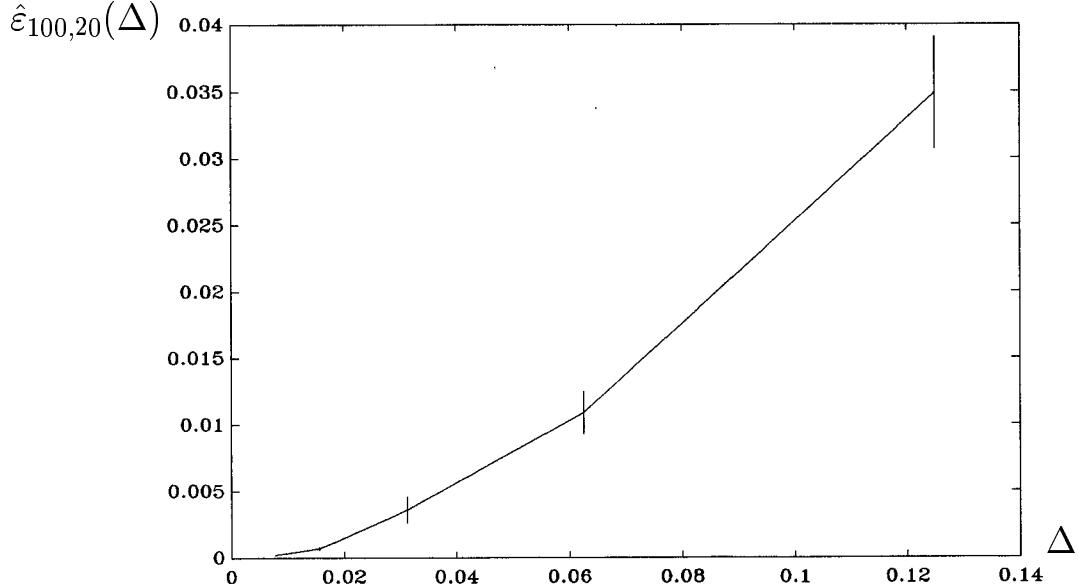


Рис. 9.11. Результат численного эксперимента 9.11.

**Численный эксперимент 9.11.** (рис. 9.11). Повторить численный эксперимент 9.1 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (9.30), (9.31). Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.30), (9.31), осуществлять с помощью неявного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (8.11). Для моделирования стохастических интегралов Ито  $I_{1(p+1)\Delta,p\Delta}^{(1)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  использовать формулу (9.29), а для моделирования стохастических интегралов  $I_{10(p+1)\Delta,p\Delta}^{(11)}$ ,  $I_{01(p+1)\Delta,p\Delta}^{(11)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  — аппроксимацию

$$I_{10(p+1)\Delta,p\Delta}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{4} \left[ \left( \zeta_0^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \zeta_0^{(1)} + \sum_{i=0}^q \left( \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left( \zeta_i^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}} \zeta_i^{(1)} \zeta_{i+2}^{(1)} \right) - 1 \right]$$

и соотношение  $I_{01(p+1)\Delta,p\Delta}^{(11)q} = I_{1(p+1)\Delta,p\Delta}^{(1)} I_{0(p+1)\Delta,p\Delta}^{(1)} - I_{10(p+1)\Delta,p\Delta}^{(11)q} + \Delta^2/2$  при  $q = 1$ ;  $\zeta_{j(p+1)\Delta,p\Delta}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(1)}$ ;  $j = 0, 1, \dots, q+2$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

## 9.5 Общие представления двухшаговых методов

В данном разделе рассмотрим принцип, по которому можно конструировать многопараметрические семейства двухшаговых сильных численных методов решения СДУ Ито.

Предположим, что необходимо построить некоторый неявный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. Тогда в его правую часть должна входить некоторая линейная комбинация величин  $\mathbf{y}_p$ ,  $\mathbf{y}_{p-1}$ ,  $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1})$ ,  $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ ,  $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1})$ . Рассмотрим теперь следующее выражение:

$$(1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right\}, \quad (9.32)$$

где  $\tilde{\gamma}_l$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0, 1]$ ;  $l = 1, \dots, n$ ;  $\mathbf{x}_t$  — решение СДУ Ито (7.18).

Ранее было показано, что с помощью формулы Ито и разложения Тейлора–Ито выражение (9.32) можно привести с вероятностью 1 к выражению вида

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} - \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} - \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + O(\Delta^{3/2}),$$

где

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}. \quad (9.33)$$

Таким образом, заменяя в правой части (9.33) повторные стохастические интегралы на их сильные аппроксимации и отбрасывая члены  $O(\Delta^{3/2})$ , приходим к трехпараметрическому семейству (9.8) неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.0. Это семейство получено в [148]. Варьируя параметры  $\tilde{\gamma}_l$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$  и  $\tilde{\alpha}_l^{(2)}$ , можно получать различные как явные, так и неявные сильные численные схемы порядка точности 1.0. В частности, при  $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$ ,  $\tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\gamma}_l = 1$  из (9.8) имеем численный метод (9.2).

В [148] приведено пятипараметрическое разложение, основанное на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, которое строится по изложенному принципу и позволяет получать различные явные и неявные одношаговые или двухшаговые сильные численные методы порядка точности 2.0. Приведем аналог этого разложения, основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right\} + \\ &\quad + \Delta^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(2)}) + \tilde{\gamma}_l \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \right\} L \mathbf{a}^{(l)} + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\gamma}_l \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(1)}) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right] - \\ &\quad - \Delta \left( \tilde{\alpha}_l^{(2)} G_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\alpha}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l G_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \right) + \\ &\quad + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + O(\Delta^{5/2}) \text{ с в. 1,} \end{aligned} \quad (9.34)$$

где

$$G_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad (9.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} (\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[ G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ & \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (9.36)$$

где  $\tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)}, \tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$ ; если в правых частях (9.34)–(9.36) аргументы у некоторых функций опущены, то эти функции вычислены в точке  $(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)$ .

Если в правой части (9.34) отбросить слагаемые порядка  $O(\Delta^{5/2})$  и заменить повторные стохастические интегралы Ито на их сильные аппроксимации, то получим пятипараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 2.0. В частности, при  $\tilde{\gamma}_l = 1, \tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\alpha}_l^{(2)} = 1/2, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)} \in [0, 1]$  имеем модификацию неявного двухшагового численного метода (9.11).

Построим обобщение разложения (9.34), которое позволяет получать различные явные и неявные одношаговые или двухшаговые сильные численные схемы порядка точности 2.5 и основано на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big\} + \\ & + \Delta^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(2)}) + \tilde{\gamma}_l \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \right\} L \mathbf{a}^{(l)} + \\
& + \tilde{\gamma}_l \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(1)}) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big] - \\
& - \Delta^3 \left[ \left( \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\beta}_l^{(2)} \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) - \frac{1}{6} \right) L^2 \mathbf{a}^{(l)} + \right. \\
& \left. + \tilde{\gamma}_l \left( \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_l^{(1)} + \tilde{\beta}_l^{(1)} \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) - \frac{1}{6} \right) L^2 \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right] - \\
& - \Delta \left( \tilde{\alpha}_l^{(2)} \tilde{G}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\alpha}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l \tilde{G}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \right) + \tilde{\mathbf{d}}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{d}}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} - \\
& - \Delta^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} \tilde{Q}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l \tilde{Q}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \right] + \dots \text{ с в. 1,} \tag{9.37}
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{Q}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \tag{9.38}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\tau_{p+1}, \tau_p} & = G_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \sum_{i_1=1}^m \left[ L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{9.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbf{d}}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} J_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L L \Sigma_{i_1} J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L G_0^{(i_1)} J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[ G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} J_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} J_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{9.40}
\end{aligned}$$

$G_{\tau_{p+1}, \tau_p}$  и  $\mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$  определяются соответственно равенствами (9.35), (9.36);  $\tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)}, \tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$  ( $l = 1, \dots, n$ ); если в правых частях (9.37)–(9.40) аргументы у некоторых функций опущены, то эти функции вычислены в точке  $(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)$ .

Если в правой части (9.37) отбросить слагаемые, обозначенные тремя точками, и в правых частях (9.37)–(9.40) заменить повторные стохастические интегралы Ито их сильными аппроксимациями, то получим пятипараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 2.5. В частности, при  $\tilde{\gamma}_l = 1, \tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\alpha}_l^{(2)} = 1/2, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)} \in [0, 1]$  из (9.37) следует неявный двухшаговый численный метод (9.11) с модификацией величины  $\tilde{\mathbf{v}}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$  вида (9.13).

В заключение отметим, что рассмотренный подход получения различных параметрических семейств численных методов решения СДУ Ито по сути является обобщением аналогичного подхода для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим также, что, составляя линейные комбинации следующих систематических величин:  $\mathbf{x}_{\tau_p}, \dots, \mathbf{x}_{\tau_{p-k}}, \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}), \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p), \dots, \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p-k}}, \tau_{p-k}), \Delta^2 L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}), \Delta^2 L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p), \dots, \Delta^2 L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p-k}}, \tau_{p-k})$ , где  $k \geq 1$ , выбирая определенным образом коэффициенты перед этими членами и дополняя эти комбинации специально подобранными стохастическими членами из разложения Тейлора–Ито, можно в принципе строить различные многошаговые сильные численные схемы решения СДУ Ито.

## 9.6 Трехшаговые численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

### 9.6.1 Методы порядка точности 1.0

Рассмотрим СДУ Ито вида (1.39) и предположим, что выполнены условия теоремы 1.6.

Предложим следующий трехшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0 для СДУ Ито:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\ &+ \Delta \left[ \delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \Big] + \\
 & + (1 - \alpha_l) \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{v}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)}, \tag{9.41}
 \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)},$$

$\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}$ ;  $\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i$ ;  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ ; "шляпка" указывает на то, что соответствующая величина является аппроксимацией повторного стохастического интеграла;  $l = 1, 2, \dots, n$ ;  $p = 2, 3, \dots, N - 1$ ;  $\mathbf{g}^{(l)}$  —  $l$ -я компонента вектора  $\mathbf{g}$ ;  $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]$ ,  $\alpha_l + \beta_l \leq 1$ ,  $\delta_l, \mu_l, \nu_l$  — числовые параметры;  $\tau_p = p\Delta$ ;  $\Delta \in (0, 1)$ ;  $T = N\Delta$ .

Для старта численной схемы (9.41) необходимо знать величины  $\mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}, \mathbf{y}_{\tau_2}^{(l)}$ ;  $l = 1, \dots, n$ . Они могут быть вычислены с помощью явного метода Г.Н. Мильштейна (в частности, он получается из (9.41) при  $\alpha_l = \mu_l = 1, \beta_l = \delta_l = \nu_l = 0$ ). Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящих в правую часть (9.41), можно, например, воспользоваться формулами из главы 6.

Докажем сходимость численного метода (9.41).

**Теорема 9.1.** Пусть для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ;  $s, t \in [0, T]$ ,  $s > t$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $i, j, k = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, n$  и некоторых, независящих от  $\Delta$  постоянных  $K_1, K_2, K_3, C_1, C_2$  выполнены следующие условия:

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_1} - \mathbf{y}_{\tau_1}|^2\} + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_2} - \mathbf{y}_{\tau_2}|^2\} \leq \\
 \leq C_1 \Delta^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + |\Sigma_i(\mathbf{x}, t) - \Sigma_i(\mathbf{y}, t)| + |G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t) - G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{y}, t)| \leq \\
 \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |L\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + |L\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + \\
 + |G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + |LG_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + |G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \leq \\
 \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|),
 \end{aligned}$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$  (определение  $\mathcal{L}$  см. в разд. 4.1),

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} - \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)}\right)^2\right\} + \mathsf{M}\left\{\left(I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(ji)} - \hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(ji)}\right)^2\right\} \leq C_2\Delta^3,$$

$$\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]; \quad \alpha_l + \beta_l \leq 1; \quad |\delta_l| + |\mu_l| + |\nu_l| < \infty.$$

Тогда справедлива оценка

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq C\Delta,$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $\Delta$ ;  $\mathbf{y}_{\tau_1}, \mathbf{y}_{\tau_2}, \mathbf{y}_T$  определяются численной схемой (9.41).

Доказательство. С использованием формулы Ито получаем:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{x}_{\tau_p} + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с. в. 1,} \quad (9.42)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с. в. 1,} \quad (9.43)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) ds + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s^{(i)}, \\ \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \sum_{i=1}^m \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} + \sum_{i,j=1}^m G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(ji)}, \\ \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left( \int_{\tau_p}^s L\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^s G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\mathbf{f}_\theta^{(i)} \right) ds + \\ &+ \sum_{i,j=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left( \int_{\tau_p}^\theta L G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) du + \sum_{k=1}^m \int_{\tau_p}^\theta G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{f}_u^{(k)} \right) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} d\mathbf{f}_s^{(i)} + \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s L \Sigma_i(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta d\mathbf{f}_s^{(i)}. \end{aligned}$$

Применяя формулы (9.42), (9.43) нетрудно прийти к следующему представлению:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \alpha_l \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{x}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\ &+ \Delta \left[ \delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \Big] + \\
 & + (1 - \alpha_l) \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{d}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \\
 & + Q_{\tau_{p+1}, \tau_p, \tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} \text{ с в. 1,} \tag{9.44}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{\tau_{p+1}, \tau_p, \tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} = \\
 = \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + (1 - \alpha_l) \mathbf{h}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{h}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} - \\
 - \Delta \Big[ \delta_l \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + (\delta_l + \mu_l - 1) \mathbf{r}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + \\
 + (\alpha_l + \delta_l + \mu_l + \nu_l - 2) \mathbf{r}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} \Big],
 \end{aligned}$$

а остальные обозначения, входящие в (9.44), такие же, как в (9.41).

Положим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_s^{(l)} = \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\
 + (s - \tau_p) \delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + \Delta \Big[ \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \\
 + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \Big] + \\
 + (1 - \alpha_l) \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{v}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{v}_{s, \tau_p}^{(l)}, \tag{9.45}
 \end{aligned}$$

где  $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$ ;  $p = 2, 3, \dots, N - 1$ , т.е. (9.45) переходит в (9.41) при  $s = \tau_{p+1}$ .

Вычитая (9.45) из (9.44) при  $\tau_{p+1} = s$  получаем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = \\
 = \alpha_l (\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}^{(l)}) + \beta_l (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}) + \\
 + (1 - \alpha_l - \beta_l) (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)}) + U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)}, \tag{9.46}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 U_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}^{(l)} = & (s - \tau_p) \delta_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s)) + \\
 & + \Delta \left[ \mu_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s})) + \right. \\
 & + \nu_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}, \tau_{n_s-1}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}, \tau_{n_s-1})) + \\
 & + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \times \\
 & \times \left. (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}}, \tau_{n_s-2}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}}, \tau_{n_s-2})) \right] + \\
 & + (1 - \alpha_l) (\mathbf{d}_{\tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{v}_{\tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)}) + \\
 & + (1 - \alpha_l - \beta_l) (\mathbf{d}_{\tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)} - \mathbf{v}_{\tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)}) + \\
 & + \mathbf{d}_{s, \tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{v}_{s, \tau_{n_s}}^{(l)} + Q_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)},
 \end{aligned}$$

где  $n_s = \max_j \{j : \tau_j \leq s\}$ .

Итерируя равенство (9.46) имеем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = & \\
 = & e_{n_s-1} (\mathbf{x}_{\tau_2}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_2}^{(l)}) + f_{n_s-1} (\mathbf{x}_{\tau_1}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}) + g_{n_s-1} (\mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)}) = \\
 + & \sum_{j=2}^{n_s-1} q_j U_{\tau_{n_s-j+2}, \tau_{n_s-j+1}, \tau_{n_s-j}, \tau_{n_s-j-1}}^{(l)} + q_1 U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)}, \tag{9.47}
 \end{aligned}$$

где

$$e_{k+1} = \alpha_l e_k + f_k, \quad e_1 = \alpha_l, \tag{9.48}$$

$$f_{k+1} = \beta_l e_k + g_k, \quad f_1 = \beta_l, \tag{9.49}$$

$$g_{k+1} = (1 - \alpha_l - \beta_l) e_k, \quad g_1 = 1 - \alpha_l - \beta_l, \tag{9.50}$$

$$q_{k+1} = e_k, \quad q_1 = 1; \tag{9.51}$$

$k = 1, 2, \dots, n_s - 2$ .

Заметим, что если в правой части (9.41) положить  $\alpha_l = \mu_l = 1$ ,  $\beta_l = \delta_l = \nu_l = 0$ , то численный метод (9.41) превратится в явный одностадийный сильный численный метод порядка точности 1.0 (метод Г.Н. Мильштейна). Сходимость метода Г.Н. Мильштейна доказана в условиях

теоремы 9.1 в [76] (см. также теорему 7.2). Единственное существенное отличие, которое может возникнуть при обосновании сходимости численного метода (9.41) с помощью подхода, изложенного в [76], связано с тем, что коэффициенты  $e_k, f_k, g_k, q_k$  могут расти с ростом  $k$ , в то время как для метода Г.Н. Мильштейна  $e_{n_s-1} = f_{n_s-1} = 0, g_{n_s-1} = 1, q_1 = \dots = q_{n_s-1} = 1$ .

Покажем, что при  $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]$ ,  $\alpha_l + \beta_l \leq 1$  числа  $e_k, f_k, g_k, q_k$  принадлежат промежутку  $[0, 1]$  при всех  $k = 1, 2, \dots, n_s - 1$ .

Из (9.48)–(9.50) получаем:

$$e_{k+1} = \alpha_l e_k + \beta_l e_{k-1} + (1 - \alpha_l - \beta_l) e_{k-2}. \quad (9.52)$$

Запишем несколько очевидных соотношений:

$$0 \leq e_2 = (\alpha_l)^2 + \beta_l \leq \alpha_l + \beta_l \leq 1,$$

$$0 \leq f_2 = \beta_l \alpha_l + 1 - \alpha_l - \beta_l \leq 1 - \alpha_l \leq 1,$$

$$e_2 + f_2 + g_2 = 1, \quad 0 \leq g_2 \leq 1,$$

$$0 \leq e_3 = \alpha_l e_2 + f_2 \leq e_2 + f_2 = 1 - g_2 \leq 1.$$

Таким образом  $e_1, e_2, e_3 \in [0, 1]$ . Согласно этому и (9.52) имеем:

$$0 \leq e_4 \leq \alpha_l + \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1.$$

Предположим теперь, что  $e_{k-2}, e_{k-1}, e_k \in [0, 1]$  при некотором  $k > 3$ . Тогда из (9.52) снова получаем:

$$0 \leq e_{k+1} \leq \alpha_l + \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1,$$

т.е. по индукции  $e_k \in [0, 1]$  при  $k = 1, 2, \dots$

В силу (9.50), (9.51)  $q_k, g_k \in [0, 1]$  при  $k = 1, 2, \dots$ . Из (9.49), (9.50) получаем:

$$0 \leq f_{k+1} = \beta_l e_k + (1 - \alpha_l - \beta_l) e_{k-1} \leq \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1 - \alpha_l \leq 1,$$

т.е.  $f_k \in [0, 1]$  при  $k = 1, 2, \dots$

Итак мы показали, что при  $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]$ ,  $\alpha_l + \beta_l \leq 1$  числа  $e_k, f_k, g_k, q_k$  принадлежат промежутку  $[0, 1]$  при  $k = 1, 2, \dots$

Теперь из (9.47) получаем:

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}\{|x_s^{(l)} - y_s^{(l)}|^2\} \leq L_1 \left( \sum_{k=0}^2 \mathbb{M}\{|x_{\tau_k}^{(l)} - y_{\tau_k}^{(l)}|^2\} + \right.$$

$$+ \mathbb{M} \left\{ \left( \sum_{j=2}^{n_s-1} q_j U_{\tau_{n_s-j+2}, \tau_{n_s-j+1}, \tau_{n_s-j}, \tau_{n_s-j-1}}^{(l)} \right)^2 \right\} + \mathbb{M} \left\{ \left( U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)} \right)^2 \right\} \right), \quad (9.53)$$

где постоянная  $L_1$  не зависит от  $\Delta$ .

Дальнейшее доказательство не сильно отличается от доказательства теоремы 7.2 при  $r = 2$ . В результате получаем оценку:

$$\mathbb{M}\{|x_T - y_T|\} \leq C\Delta,$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $\Delta$ . Теорема доказана.  $\square$

Отметим, что если в (9.41) взять переменный шаг интегрирования, то теорема 9.1 остается в силе. При этом роль  $\Delta$  в формулировке теоремы 9.1 будет играть величина

$$\Delta = \max_{1 \leq j \leq N-1} \Delta_j,$$

где  $\Delta_j$  —  $j$ -й шаг интегрирования.

**Численный эксперимент 9.12.** (рис. 9.12). Смоделировать 2000 ( $M = 20$  групп по  $L = 100$  штук в каждой) независимых реализаций случайной величины  $x_T$  (решение СДУ Ито (7.4)) при  $t = T$ , по формуле

$$x_0 \exp \left( \left( a - \frac{1}{2} b^2 \right) T + b \sqrt{\Delta} \sum_{p=1}^N \zeta_p^{(1)} \right) \quad (9.54)$$

при  $x_0 = 1$ ,  $T = 1$ ,  $a = b = 1.5$ ,  $N = T/\Delta$ ,  $\Delta = 2^{-3}$  и с помощью численного метода (9.41) при тех же исходных данных и  $y_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1/2$  (кривая 1). Два начальных шага осуществить с помощью явного метода Г.Н. Мильштейна (численный метод (9.41) при  $\alpha_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\beta_1 = \delta_1 = \nu_1 = 0$ ). Для моделирования стохастических интегралов Ито, входящих в (9.41) использовать формулы:

$$\hat{I}_{0_{\tau_{p+1}}, \tau_p}^{(1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(1)}, \quad \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}}, \tau_p}^{(11)} = \frac{\Delta}{2} \left( (\zeta_p^{(1)})^2 - 1 \right); \quad (9.55)$$

$\zeta_p^{(1)}$  в (9.54), (9.55) — независимые стандартные гауссовые случайные величины. Вычислить  $\hat{\varepsilon}_{100,20}$  с 90%-м доверительным интервалом, повторить вычисления при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 4, 5, 6, 7$  и построить зависимость  $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ ;  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 3, 4, \dots, 7$ . Повторить расчеты для  $\alpha_1 = \beta_1 = 1/3$ ,  $\delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1/2$  (кривая 2) и  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ,  $\delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = 3/4$  (кривая 3).

Наличие производных в выражении численного метода является, как известно, его недостатком. В связи с этим построим конечно-разностную

модификацию численного метода (9.41). Для этого аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в величины  $\mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}$ ,  $\mathbf{v}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)}$ ,  $\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)}$  в правой части (9.41). Например, в (9.41) вместо  $\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$  можно использовать

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)},$$

где сохранен смысл обозначений формулы (7.108).

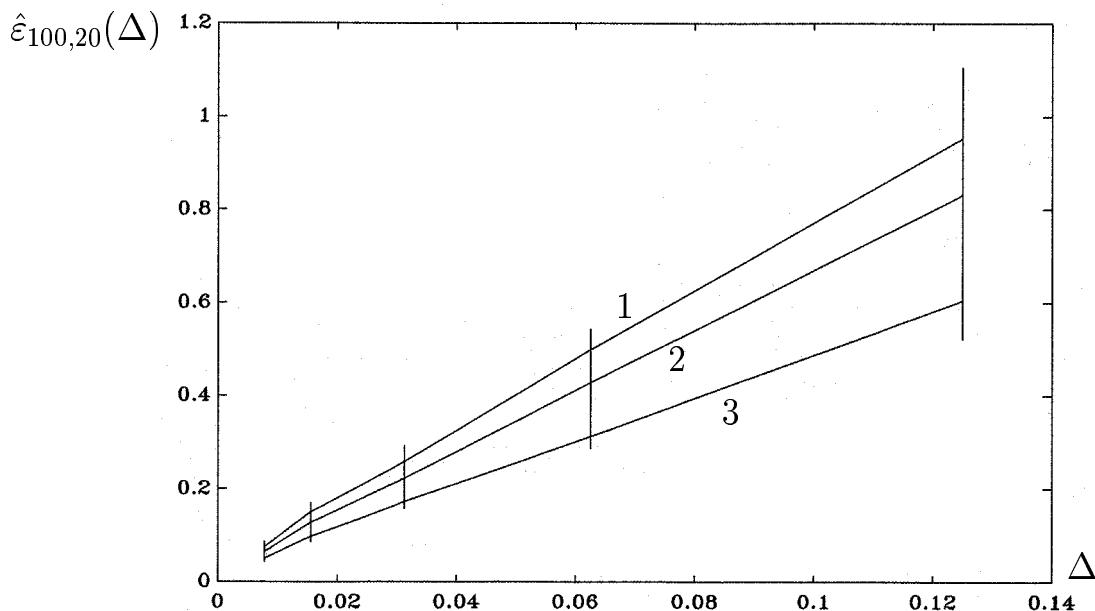


Рис. 9.12. Результат численного эксперимента 9.12.

**Численный эксперимент 9.13.** Повторить численный эксперимент 9.12 для конечно-разностной модификации численного метода (9.41). Два начальных шага осуществить с помощью явного сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.108).

Результаты численного эксперимента 9.13 совпадают с точностью до  $10^{-4}$  с результатами численного эксперимента 9.12.

Поясним кратко, как может быть обоснована сходимость построенного конечно-разностного численного метода. С помощью обычной формулы Тейлора его правая часть приводится к представлению, которое отличается от правой части (9.41) наличием слагаемого, имеющего порядок малости  $3/2$  по  $\Delta$  при  $\Delta \downarrow 0$ . Далее сходимость рассматриваемого численного метода обосновывается аналогично тому, как это сделано в теореме 7.6.

## 9.6.2 Методы порядка точности 1.5

Разовьем подход, изложенный в предыдущем разделе. В результате получим следующий трехшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 (предполагается, что существуют все частные производные и стохастические интегралы данного раздела):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\
 &+ \Delta \left[ \delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] + \\
 &+ \Delta^2 \left[ \varepsilon_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \lambda_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \varphi_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l \right) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] - \\
 &- \Delta \sum_{i=1}^m \left[ \delta_l G_0^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)} + \right. \\
 &\quad \left. + (\delta_l + \mu_l - 1) G_0^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0_{\tau_p, \tau_{p-1}}}^{(i)} + \right. \\
 &\quad \left. + (\alpha_l + \delta_l + \mu_l + \nu_l - 2) G_0^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \hat{I}_{0_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}}^{(i)} \right] + \\
 &+ (1 - \alpha_l) \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{v}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)}, \tag{9.56}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
 &+ \sum_{i_1=1}^m \left[ G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_1^{(i_1)} \right] + \\
 &+ \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что при  $\varepsilon_l = \lambda_l = \varphi_l = 0$ ;  $9/2 - 2\alpha_l - \beta_l/2 - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l = 0$  в правую часть (9.56) войдет меньшее число частных производных, чем в явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 (численный метод (9.56) при  $\beta_l = 0$ ,  $\alpha_l = 1$ ,  $\delta_l = 0$ ,  $\mu_l = 1$ ,  $\nu_l = 0$ ,  $\varepsilon_l = 0$ ,  $\lambda_l = 1/2$ ,  $\varphi_l = 0$ ), т.к. в правую часть последнего входит слагаемое  $\Delta^2 L \mathbf{a}/2$ .

Не приводя доказательство сходимости численного метода (9.56) заметим, что оно может быть проведено аналогично доказательству теоремы 9.1 с использованием следующего представления:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \alpha_l \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{x}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\
 &+ \Delta \left[ \delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] + \\
 &+ \Delta^2 \left[ \varepsilon_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \lambda_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \varphi_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l \right) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] - \\
 &- \Delta \left[ \delta_l \mathbf{q}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + (\delta_l + \mu_l - 1) \mathbf{q}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (\alpha_l + \delta_l + \mu_l + \nu_l - 2) \mathbf{q}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} \right] + \\
 &+ (1 - \alpha_l) \mathbf{g}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{g}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{g}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ в. 1,} \quad (9.57)
 \end{aligned}$$

Где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \sum_{i=1}^m G_0^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)}, \\
 \mathbf{g}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p}, \\
 \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \sum_{i=1}^m \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)} + \sum_{i,j=1}^m G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(ji)} + \\
 &+ \sum_{i=1}^m \left[ G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \left( \Delta I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)} + I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)} \right) - L \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)} \right] + \\
 &+ \sum_{i,j,k=1}^m G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(kji)}, \\
 \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left( \int_{\tau_p}^s LL \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^s G_0^{(i)} L \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\mathbf{f}_\theta^{(i)} \right) ds + \\
 &+ \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left( \int_{\tau_p}^s LG_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta + \sum_{j=1}^m \int_{\tau_p}^s G_0^{(j)} G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) d\mathbf{f}_s^{(i)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = & \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left( \int_{\tau_p}^{\theta} LL\mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) du + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\theta} G_0^{(i)} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{f}_u^{(i)} \right) d\theta ds + \\
 & + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left( \int_{\tau_p}^{\theta} LG_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) du + \sum_{j=1}^m \int_{\tau_p}^{\theta} G_0^{(j)} G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{f}_u^{(j)} \right) d\mathbf{f}_{\theta}^{(i)} ds + \\
 & + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left( \int_{\tau_p}^{\theta} LL\Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) du + \sum_{j=1}^m \int_{\tau_p}^{\theta} G_0^{(j)} L\Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{f}_u^{(j)} \right) d\theta d\mathbf{f}_s^{(i)} + \\
 & + \sum_{i,j=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left( \int_{\tau_p}^{\theta} LG_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) du + \sum_{k=1}^m \int_{\tau_p}^{\theta} G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{f}_u^{(k)} \right) \times \\
 & \quad \times d\mathbf{f}_{\theta}^{(j)} d\mathbf{f}_s^{(i)};
 \end{aligned}$$

остальные обозначения, входящие в (9.57), такие же как и в (9.56).

Отметим, что представление (9.57) получается с использованием соотношений:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = & \mathbf{x}_{\tau_p} + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в. 1,} \\
 \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = & \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \Delta L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \sum_{i=1}^m G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)} + \\
 & + \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в. 1,}
 \end{aligned}$$

которые, в свою очередь, могут быть получены с помощью формулы Ито.

**Численный эксперимент 9.14.** (рис. 9.13). Повторить численный эксперимент 9.12 для численного метода (9.56) при следующих способах выбора параметров:

1.  $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0, \mu_1 = \nu_1 = 1/2, \delta_1 = 1$  (кривая 1);
2.  $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1/2, \varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0, \mu_1 = 1/2, \nu_1 = 1, \delta_1 = 3/4$  (кривая 2);
3.  $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0, \mu_1 = \nu_1 = 1, \delta_1 = 1/2$  (кривая 3).

Для моделирования повторного стохастического интеграла Ито  $I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(111)}$  использовать формулу:

$$\hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(111)} = \frac{\Delta^{3/2}}{6} \left( (\zeta_p^{(1)})^3 - 3\zeta_p^{(1)} \right),$$

где  $\zeta_p^{(1)}$  — такие же случайные величины, как и в численном эксперименте 9.12. Не моделировать стохастический интеграл Ито  $I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(1)}$ , т.к. коэффициент при нем окажется равным нулю в выражении, которое получается после применения численного метода (9.56) к уравнению (7.4).

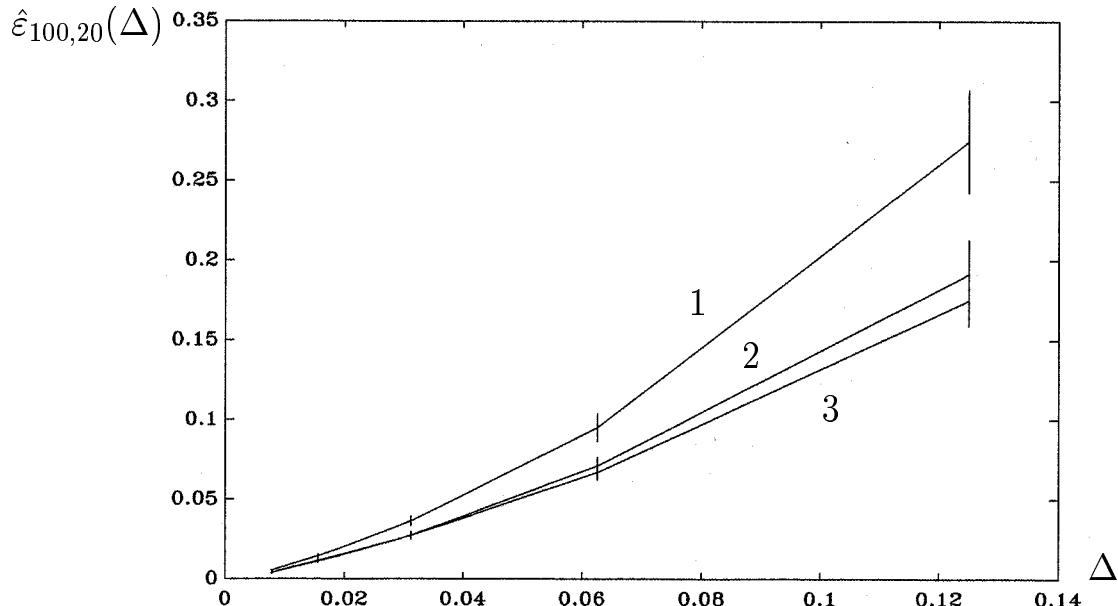


Рис. 9.13. Результат численного эксперимента 9.14.

Построим конечно-разностный вариант численного метода (9.56). Для этого аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в его правую часть. В результате в (9.56) для  $\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$  используем выражение

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \\
 & = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[ \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left( \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right. \\
 & - \left( \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \\
 & \left. + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right], \tag{9.58}
 \end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений формулы (7.114).

**Численный эксперимент 9.15.** (рис. 9.14). Повторить численный эксперимент 9.14 для конечно-разностной модификации численного метода (9.56). Для моделирования стохастического интеграла  $I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(1)}$  использовать формулу:

$$\hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_p^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_p^{(1)} \right),$$

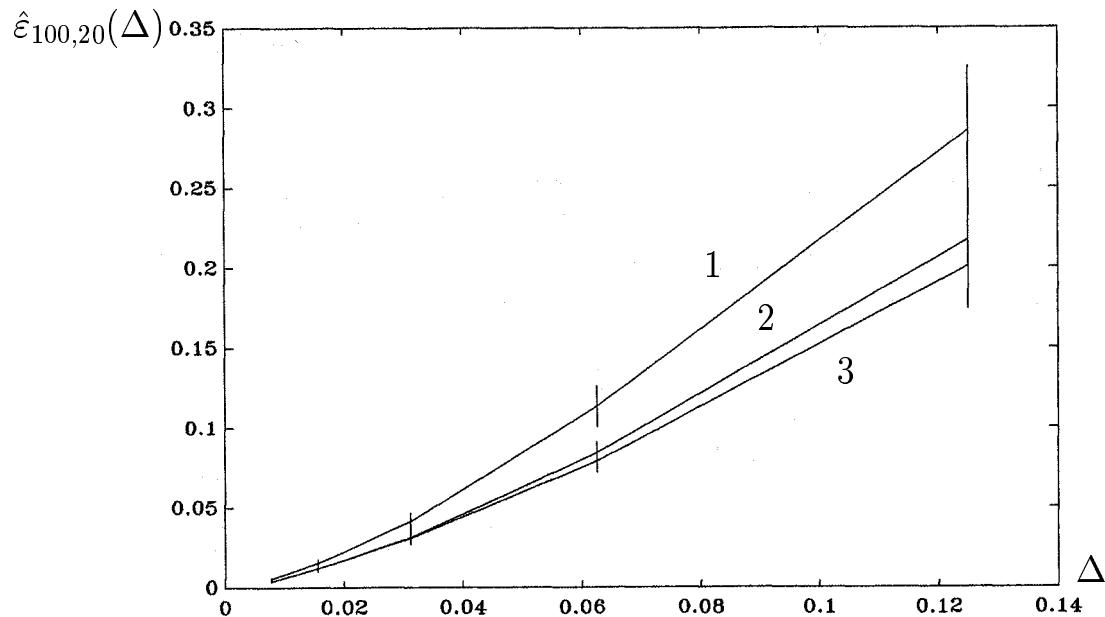


Рис. 9.14. Результат численного эксперимента 9.15.

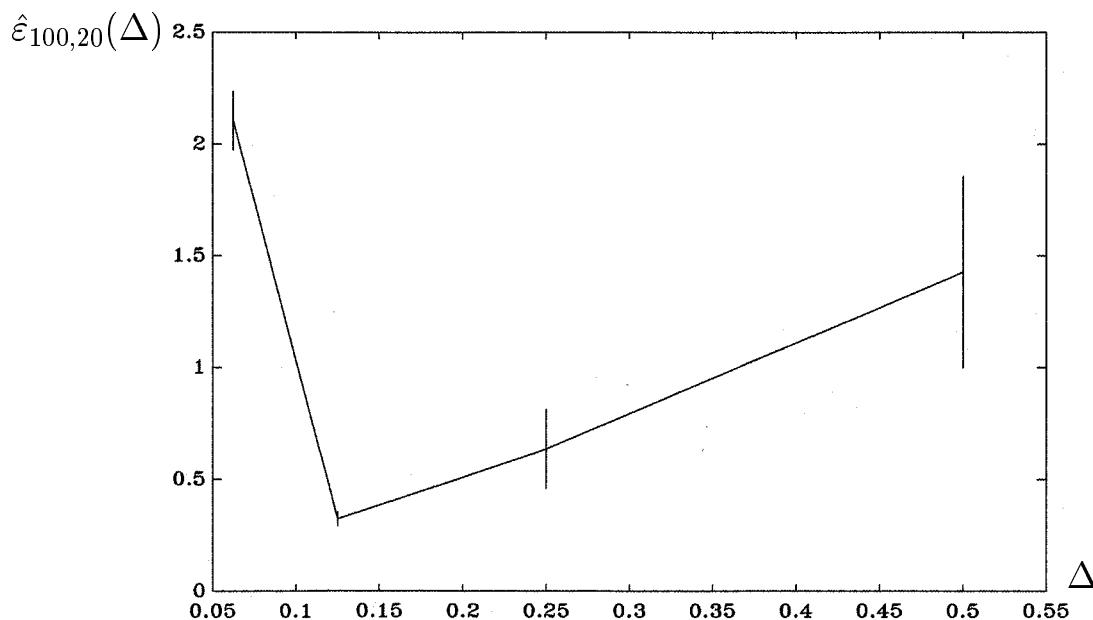


Рис. 9.15. Результат численного эксперимента 9.16.

где  $\zeta_p^{(1)}, \xi_p^{(1)}; p = 0, 1, \dots, N - 1$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины, а  $\zeta_p^{(1)}$  — такие же случайные величины, как в численном эксперименте 9.12. Два начальных шага осуществить с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.114).

Сравнивая рис. 9.13, 9.14 отметим, что ошибки, даваемые конечно-разностной модификацией численного метода (9.56) как и следовало ожидать, незначительно больше, чем соответствующие ошибки, даваемые численным методом (9.56).

В данной главе показывается, что одним из достаточных условий, обеспечивающих сходимость трехшаговых сильных численных методов для СДУ Ито является условие:  $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]; \alpha_l + \beta_l \leq 1$ . В заключение приведем численный пример, в котором не выполнение данного условия приводит к нарушению сходимости рассматриваемого трехшагового численного метода.

**Численный эксперимент 9.16.** (рис. 9.15). Повторить численный эксперимент 9.14 для численного метода (9.56) при  $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 2, \delta_1 = 1/2, \mu_1 = 1/2, \nu_1 = 1, \varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0; \Delta = 2^{-j}; j = 1, 2, 3, 4$ .

Свойства численных методов, в частности их устойчивость, существенно зависят от выбора входящих в них параметров, шага и промежутка интегрирования. Рассмотрению этого вопроса будет посвящен следующий раздел.

## 9.7 Об устойчивости численных методов

Известно, что проблема устойчивости численных методов заключается в том, что ошибка численной схемы может накапливаться в процессе вычислений и в результате может превысить допустимые значения. Однако, в ряде случаев удается гарантировать выполнение требуемого ограничения сверху на ошибку численного метода. Как правило, достижение этого происходит благодаря выбору подходящего шага интегрирования, параметров численной схемы и промежутка интегрирования. Существенное влияние на устойчивость численных методов оказывают также особенности конкретных СДУ, к которым эти методы применяются. Рассмотрим вопросы, связанные с устойчивостью численных методов, более подробно.

Пусть  $y_p; p = 0, 1, \dots$  — дискретная аппроксимация решения СДУ Ито

(7.18), которая стартует в момент  $t_0$  из точки  $\mathbf{y}_0$ . Через  $\bar{\mathbf{y}}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots$  обозначим эту же дискретную аппроксимацию, но стартующую в момент  $t_0$  из точки  $\bar{\mathbf{y}}_0$ . Выберем некоторый конечный промежуток интегрирования  $[t_0, T]$  и покроем его сеткой  $\{\tau_j\}_{j=0}^{n_T}$  такой, что

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n_T} = T, \quad \Delta = \max_{0 \leq j \leq n_T - 1} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Для любого  $t \in [t_0, T]$  определим натуральное  $n_t$  следующим образом:

$$n_t = \max_j \{j : \tau_j \leq t\}.$$

**Определение 9.1.** [148]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация  $\mathbf{y}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots$  стохастически численно устойчива для данного СДУ, если для любого конечного интервала  $[t_0, T]$  существует такое постоянное число  $\Delta_0 > 0$ , что  $\forall \varepsilon > 0$  и  $\forall \Delta \in (0, \Delta_0)$ :

$$\lim_{|\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0| \rightarrow 0} \sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{P} \{ |\mathbf{y}_{n_t} - \bar{\mathbf{y}}_{n_t}| \geq \varepsilon \} = 0.$$

**Определение 9.2.** [148]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация  $\mathbf{y}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots$  стохастически численно устойчива, или просто численно устойчива, если она стохастически численно устойчива для такого СДУ, что  $\mathbf{y}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots$  сходится к решению этого уравнения.

Отметим, что в определение численной устойчивости входит ограничение  $\Delta_0$  на шаг интегрирования  $\Delta$ . Обычно  $\Delta_0$  зависит от промежутка интегрирования  $[t_0, T]$  и рассматриваемого СДУ. Известно [148], что даже для численно устойчивой схемы при увеличении промежутка интегрирования ошибка численной схемы может возрастать и превышать допустимые пределы, хотя теоретически она остается ограниченной. Эта проблема становится особенно актуальной в тех задачах, где промежуток интегрирования  $[t_0, T]$  заранее неизвестен, например, при моделировании момента первого выхода. В связи с этим рассмотрим следующее определение.

**Определение 9.3.** [148]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация  $\mathbf{y}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots$  асимптотически численно устойчива, если она численно устойчива и для любого конечного интервала  $[t_0, T]$  существует такое постоянное число  $\Delta_a > 0$ , что  $\forall \varepsilon > 0$  и  $\forall \Delta \in (0, \Delta_a)$  выполняется условие

$$\lim_{|\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0| \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\mathbf{y}_{n_t} - \bar{\mathbf{y}}_{n_t}| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Отметим, что представленные в настоящей книге одношаговые численные методы являются численно устойчивыми, если коэффициенты диффузии и сноса СДУ Ито, к которым применяются эти методы, удовлетворяют определенным условиям гладкости. Покажем это на примере явного метода Г.Н. Мильштейна в скалярном случае, т.е. когда  $m = n = 1$ . В этой ситуации явный метод Г.Н. Мильштейна решения СДУ Ито вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)df_t$$

определяется равенством

$$y_{p+1} = y_p + a(y_p, \tau_p)\Delta + b(y_p, \tau_p)\Delta f_{\tau_p} + c(y_p, \tau_p)J_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}},$$

где  $a(x, t), b(x, t) : \Re^1 \times [0, T] \rightarrow \Re^1; \Delta f_{\tau_p} = f_{\tau_{p+1}} - f_{\tau_p};$

$$c(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} b(x, t) \frac{\partial b}{\partial x}(x, t);$$

$f_t \in \Re^1$  — стандартный винеровский процесс, причем

$$J_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau} df_{\theta} d\bar{f}_{\tau}.$$

Относительно функций  $a(x, t), b(x, t), c(x, t)$  будем предполагать, что они попарно удовлетворяют условиям АI, АII теоремы 1.6.

Пусть

$$z_t = \sup_{0 \leq s \leq t} M \left\{ |y_{n_s} - \bar{y}_{n_s}|^2 \right\}.$$

Тогда в силу неравенства  $(x_1 + \dots + x_4)^2 \leq 4(x_1^2 + \dots + x_4^2)$  имеем

$$\begin{aligned} z_t &= \sup_{0 \leq s \leq t} M \left\{ \left| y_0 - \bar{y}_0 + \sum_{j=0}^{n_s-1} (y_{j+1} - y_j - \bar{y}_{j+1} + \bar{y}_j) \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq 4 \left\{ |y_0 - \bar{y}_0|^2 + z_t^{(1)} + z_t^{(2)} + z_t^{(3)} \right\}, \end{aligned} \quad (9.59)$$

где

$$\begin{aligned} z_t^{(1)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} M \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_s-1} (a(y_j, \tau_j) - a(\bar{y}_j, \tau_j)) \Delta \right|^2 \right\}; \\ z_t^{(2)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} M \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_s-1} (b(y_j, \tau_j) - b(\bar{y}_j, \tau_j)) \Delta f_{\tau_p} \right|^2 \right\}; \\ z_t^{(3)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} M \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_s-1} (c(y_j, \tau_j) - c(\bar{y}_j, \tau_j)) J_{00_{\tau_{j+1}, \tau_j}} \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Используя условие Липшица и неравенство (1.47), при  $n = 1$  получаем

$$\begin{aligned} z_t^{(1)} &\leq K_1 \sup_{0 \leq s \leq t} M \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_s-1} |y_j - \bar{y}_j| \Delta \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq K_1 M \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_t-1} |y_j - \bar{y}_j| \Delta \right|^2 \right\} \leq K_1 M \left\{ \left| \int_{t_0}^t |y_s - \bar{y}_s| ds \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq K_1(t - t_0) \int_{t_0}^t M \{ |y_s - \bar{y}_s|^2 \} ds \leq K_1(t - t_0) \int_{t_0}^t z_s ds, \quad K_1 < \infty. \quad (9.60) \end{aligned}$$

С учетом условия Липшица имеем

$$\begin{aligned} z_t^{(2)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \left\{ \sum_{j=0}^{n_s-1} M \{ |b(y_j, \tau_j) - b(\bar{y}_j, \tau_j)|^2 \} \Delta \right\} \leq \\ &\leq K_2 \sum_{j=0}^{n_t-1} M \{ |y_j - \bar{y}_j|^2 \} \Delta \leq K_2 \int_{t_0}^t z_s ds, \quad K_2 < \infty. \quad (9.61) \end{aligned}$$

Аналогично (9.61) получаем

$$z_t^{(3)} \leq K_3 \Delta \int_{t_0}^t z_s ds, \quad K_3 < \infty. \quad (9.62)$$

Подставляя (9.60)–(9.62) в (9.59), приходим к следующему неравенству:

$$z_t \leq 4 \left( |y_0 - \bar{y}_0|^2 + (K_1(t - t_0) + K_2 + K_3 \Delta) \int_0^t z_s ds \right). \quad (9.63)$$

Применение неравенства Гронуолла к (9.63) дает

$$\begin{aligned} z_t &\leq 4 |y_0 - \bar{y}_0|^2 \left\{ 1 + 4 (K_1(t - t_0) + K_2 + K_3 \Delta) \times \right. \\ &\quad \times \left. \int_{t_0}^t \exp (4 (K_1(t - t_0) + K_2 + K_3 \Delta) (t - s)) ds \right\}. \quad (9.64) \end{aligned}$$

Используя неравенство Чебышева и (9.64), получаем

$$\lim_{|y_0 - \bar{y}_0| \rightarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq t} P \{ |y_{n_s} - \bar{y}_{n_s}| \geq \varepsilon \} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{|y_0 - \bar{y}_0| \rightarrow 0} z_t = 0. \quad (9.65)$$

Таким образом, в рамках сделанных предположений явный метод Г.Н. Мильштейна является стохастически численно устойчивым для данного

СДУ. Поскольку в условиях теоремы 7.2 этот численный метод сходится сильно с порядком точности 1.0 к решению рассматриваемого СДУ Ито, то по (9.65) и определению 9.2 явный метод Г.Н. Мильштейна является численно устойчивым.

Аналогичные рассуждения можно применить для обоснования численной устойчивости явного метода Г.Н. Мильштейна в векторном случае, а также более точных одношаговых численных методов, рассмотренных в настоящей монографии.

Обычно изучение асимптотической численной устойчивости одношаговых детерминированных численных методов проводится на примере определенного класса тестовых уравнений, например, класса линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

где  $x, \lambda$  — комплексные числа. Для изучения асимптотической численной устойчивости одношаговых стохастических методов выберем класс комплекснозначных линейных СДУ вида [148]:

$$d\mathbf{x}_t = \lambda \mathbf{x}_t dt + df_t, \quad (9.66)$$

где  $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^{(1)} + i\mathbf{x}_t^{(2)}$ ;  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ;  $f_t \in \Re^1$  — стандартный винеровский процесс;  $i$  — мнимая единица.

Применяя некоторую одношаговую дискретную аппроксимацию  $\mathbf{y}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots$  с постоянным шагом  $\Delta$  к уравнению (9.66), получаем следующее равенство:

$$\mathbf{y}_{p+1} = G(\lambda\Delta)\mathbf{y}_p + \mathbf{z}_p, \quad (9.67)$$

где  $G$  — отображение комплексной плоскости в себя;  $\mathbf{z}_p$  — случайные величины, которые не зависят от  $\lambda$  и  $\mathbf{y}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots$

**Определение 9.4.** [148]. *Множество комплексных чисел  $\lambda\Delta$ , для которых  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  и  $|G(\lambda\Delta)| < 1$ , называется областью абсолютной устойчивости численной схемы.*

Известно, что в детерминированном случае  $A$ -устойчивой (абсолютно устойчивой) численной схемой называется такая численная схема, для которой ее область абсолютной устойчивости совпадает с левой полуплоскостью комплексной плоскости.

В стохастическом случае также будем называть численную схему  $A$ -устойчивой, если ее область абсолютной устойчивости является следую-

щим множеством:  $\{\lambda\Delta \in C : \operatorname{Re}(\lambda) < 0, \Delta > 0\}$ , где  $C$  — множество комплексных чисел.

Рассмотрим области абсолютной устойчивости некоторых сильных численных методов.

В [148] показано, что для неявных методов Г.Н. Мильштейна (8.3) при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0, 1]$  (здесь и далее в этом разделе рассматривается случай  $\mathbf{y}_p \in \mathfrak{R}^2$ ) отображение  $G$  имеет вид

$$G(\lambda\Delta) = (1 - \alpha\lambda\Delta)^{-1}(1 + (1 - \alpha)\lambda\Delta).$$

Поэтому неравенство  $|G(\lambda\Delta)| < 1$  в данном случае преобразуется в неравенство вида [148]

$$(1 - 2\alpha)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta^2 + 2\lambda_1\Delta < 0. \quad (9.68)$$

Если  $1/2 \leq \alpha \leq 1$  и  $\lambda_1 < 0$ , то неравенство (9.68) выполнено и рассматриваемые неявные методы Г.Н. Мильштейна являются  $A$ -устойчивыми. Если  $0 \leq \alpha < 1/2$ , то (9.68) можно записать в виде

$$(\lambda_1\Delta + A)^2 + (\lambda_2\Delta)^2 < A^2,$$

где  $A = (1 - 2\alpha)^{-1}$ , т.е. область абсолютной устойчивости — внутренность круга с центром в точке  $(-A, 0)$  и с радиусом  $A$ .

В [148] показано, что для численных схем (8.4) и (8.5) при  $\mathbf{y}_p \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0, 1]$ ,  $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \beta \in [0, 1]$  отображение  $G$  имеет вид

$$\begin{aligned} G(\lambda\Delta) = & \left(1 - \alpha\lambda\Delta - (0.5 - \alpha)\beta\lambda^2\Delta^2\right)^{-1} \times \\ & \times \left(1 + (1 - \alpha)\lambda\Delta + (0.5 - \alpha)(1 - \beta)\lambda^2\Delta^2\right) \end{aligned}$$

и область абсолютной устойчивости этих численных методов определяется в полярных координатах следующим неравенством:

$$\begin{aligned} & (2 + (1 - \alpha - \beta)(1 - 2\alpha)r^2)\cos\theta + 2(1 - 2\alpha)r\cos^2\theta + \\ & + \frac{1}{4}(1 - 2\alpha)^2(1 - 2\beta)r^3 < 0, \end{aligned} \quad (9.69)$$

где  $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ . Отсюда следует, что численные схемы (8.4) и (8.5)  $A$ -устойчивы тогда и только тогда, когда  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta \in [0, 1]$  или  $\alpha, \beta \in [1/2, 1]$ .

Предположим теперь, что параметры неявности, входящие в численные схемы, различны для разных компонент этих схем. В этом случае определение областей абсолютной устойчивости численных схем становится существенно более сложным. Рассмотрим случай  $\mathbf{y}_p \in \Re^2$  и тестовое СДУ вида [148]

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} df_t,$$

где  $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^{(1)} + i\mathbf{x}_t^{(2)}$ ;  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ;  $f_t$  — стандартный винеровский процесс.

В этом случае уравнение (9.67) примет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)\mathbf{y}_p + \mathbf{z}_p,$$

где  $G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) \in \Re^{2 \times 2}$ ;  $\mathbf{z}_p \in \Re^2$  и область абсолютной устойчивости одноступенчатой численной схемы определяется неравенствами [148]

$$\lambda_1 < 0, \|G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)\| < 1,$$

где

$$\|G\| = \left( \sum_{i,j=1}^2 (G^{(ij)})^2 \right)^{1/2}$$

— норма матрицы  $G$ .

В [148] показано, что для неявной схемы Г.Н. Мильштейна (8.3) матрица  $G$  имеет вид

$$\begin{aligned} G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) &= \begin{pmatrix} 1 - \tilde{\alpha}_1\lambda_1\Delta & \tilde{\alpha}_1\lambda_2\Delta \\ -\tilde{\alpha}_2\lambda_2\Delta & 1 - \tilde{\alpha}_2\lambda_1\Delta \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 + (1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_1\Delta & -(1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_2\Delta \\ (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_2\Delta & 1 + (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_1\Delta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а область абсолютной устойчивости определяется следующим неравенством:

$$(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta^2 + 2\lambda_1\Delta < 0. \quad (9.70)$$

Из (9.70) следует, что неявная схема Г.Н. Мильштейна (8.3)  $A$ -устойчива, когда  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in [0, 1]$  и  $1 \leq \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \leq 2$ . Если  $0 \leq \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 < 1$ , то область абсолютной устойчивости этого численного метода является внутренностью круга с радиусом  $A = (1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)^{-1}$  и с центром в точке  $(-A, 0)$ .

В [148] также получено выражение для матрицы  $G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)$  и исследована абсолютная устойчивость аналогов численных методов (8.4) и (8.5) при  $\tilde{\alpha}_1 \neq \tilde{\alpha}_2$ ,  $\tilde{\beta}_1 \neq \tilde{\beta}_2$ . Приведем эти соотношения:

$$A^{(11)} = 1 - \tilde{\alpha}_1\lambda_1\Delta - \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_1)\tilde{\beta}_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Delta^2,$$

$$A^{(12)} = \tilde{\alpha}_1\lambda_2\Delta + (1 - 2\tilde{\alpha}_1)\tilde{\beta}_1\lambda_1\lambda_2\Delta^2, \quad A^{(21)} = -\tilde{\alpha}_2\lambda_2\Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}_2\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$A^{(22)} = 1 - \tilde{\alpha}_2\lambda_1\Delta - \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Delta^2,$$

$$B^{(11)} = 1 + (1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_1\Delta + \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\beta}_1)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Delta^2,$$

$$B^{(12)} = -(1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_2\Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\beta}_1)\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$B^{(21)} = (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_2\Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\beta}_2)\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$B^{(22)} = 1 + (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_1\Delta + \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\beta}_2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Delta^2,$$

где  $A^{(ij)}$ ,  $B^{(ij)}$  — компоненты  $(2 \times 2)$ -матриц  $A$ ,  $B$ , а  $G = A^{-1}B$ .

Область абсолютной устойчивости численных методов (8.4), (8.5) в полярных координатах  $r\cos\theta = \lambda_1\Delta$ ,  $r\sin\theta = \lambda_2\Delta$  определяется неравенством [148]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} [(1 - 2\tilde{\alpha}_1)^2(1 - 2\tilde{\beta}_1) + (1 - 2\tilde{\alpha}_2)^2(1 - 2\tilde{\beta}_2)] r^3 + \\ & + \left[ 2 + \frac{1}{2} \{(1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1) + (1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2)\} r^2 \right] \cos\theta + \\ & + 2(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)r\cos^2\theta < 0. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Если в (9.71) положить  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha$ ,  $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \beta$ , то оно преобразуется в неравенство (9.69).

Отметим, что численный метод (8.6) обладает такой же областью абсолютной устойчивости, как и численные методы (8.4), (8.5), поскольку численные методы (8.4), (8.5) и (8.6) имеют одинаковую систематическую часть и различаются только стохастическими членами.

Заметим, что описанная концепция устойчивости применима также и к слабым численным методам (см. главу 10).

Для тестовых СДУ с мультипликативным шумом построение концепции устойчивости для сильных численных методов сопряжено с существенными трудностями, которые, однако, могут быть преодолены при использовании слабых численных методов. Круг вопросов, связанных с устойчивостью слабых численных методов решения тестовых СДУ с мультипликативным шумом, рассмотрен в [136], [137] (см. также главу 10).

## Глава 10

# Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В предыдущих главах книги рассматривались разнообразные сильные численные методы решения СДУ Ито. Данные численные методы позволяют аппроксимировать, исходя из сильного критерия сходимости, выборочные траектории решения СДУ Ито. При этом основной вычислительной трудностью при реализации сильных численных методов является моделирование повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

В ряде практически важных случаев (см. главу 2) достаточно аппроксимировать не выборочную траекторию решения СДУ Ито, а величину вида  $M\{g(x_t)\}$  для некоторой функции  $g(x)$ , что ведет к построению, так называемых, слабых численных методов (их определение будет дано далее). При этом достаточно с той или иной степенью точности аппроксимировать лишь распределение случайной величины  $x_t$ . Очевидно, что в данном случае используется меньше информации о процессе  $x_t$ ,  $t \in [0, T]$ , чем в случае сильной аппроксимации. В результате, при построении слабых дискретных аппроксимаций мы располагаем гораздо большим числом степеней свободы, что ведет к получению сравнительно простых численных методов.

Среди первых работ по слабой аппроксимации решений СДУ Ито отметим следующие работы: [74] – [76] (Г.Н. Мильштейн), [148] (P.E. Kloeden, E. Platen), [213] (E. Platen), [230] (D. Talay), а также [235], [236] и др. Отметим, что понятие слабого численного метода впервые введено Г.Н. Мильштейном [74].

В настоящей главе приводятся в основном известные слабые методы

численного решения СДУ Ито.

## 10.1 Слабая сходимость и тестирование слабых численных методов

Пусть  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  — решение СДУ Ито (7.18). Рассмотрим разбиение  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  промежутка  $[0, T]$ , для которого

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Пусть  $\mathbf{y}_{\tau_j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$  — дискретная аппроксимация процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , соответствующая максимальному шагу дискретизации  $\Delta$ .

Будем говорить, что функция  $F(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  имеет полиномиальный рост, если существуют такие постоянные  $C > 0$  и  $q \in N$ , зависящие от  $F(\mathbf{x})$ , что для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство  $|F(\mathbf{x})| \leq C(1 + |\mathbf{x}|^{2q})$ .

Обозначим через  $C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$  пространство  $l$  раз непрерывно дифференцируемых функций:  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которые вместе со своими частными производными до порядка  $l$  включительно возрастают полиномиально.

Дадим определение слабой сходимости дискретной аппроксимации.

**Определение 10.1.** [148]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация  $\mathbf{y}_{\tau_j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , соответствующая максимальному шагу дискретизации  $\Delta$ , сходится слабо при  $\Delta \downarrow 0$  к процессу  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  в момент времени  $T$  на классе  $\mathcal{C}$  функций  $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , если выполнено условие*

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} |\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| = 0 \quad \forall g(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}.$$

Рассмотрим определение, характеризующее скорость слабой сходимости дискретной аппроксимации.

**Определение 10.2.** [148]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация  $\mathbf{y}_{\tau_j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$  сходится слабо с порядком  $\gamma > 0$  к процессу  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  в момент времени  $T$  при  $\Delta \downarrow 0$ , если для любой функции  $g(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$  существуют положительная постоянная  $C$ , которая не зависит от  $\Delta$ , и конечное  $\delta > 0$  такие, что*

$$|\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| \leq C\Delta^\gamma \quad \forall \Delta \in (0, \delta). \quad (10.1)$$

Так же, как и в случае сильных численных методов, интерес представляет тестирование слабых численных методов. Рассмотрим теоретичес-

кие основы данного вопроса.

Пусть  $\mathbf{y}_T^{(k,j)}; k = 1, \dots, L; j = 1, \dots, M$  — независимые реализации значения дискретной аппроксимации  $\mathbf{y}_{\tau_j}; j = 0, 1, \dots, N$  в момент времени  $T$ .

Положим

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_L^{(j)} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{y}_T^{(k,j)} - \mathbb{M}\{\mathbf{x}_T\}, \quad \hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left( \hat{\mu}_L^{(j)} - \hat{\mu}_{L,M} \right)^2, \\ \hat{\mu}_{L,M} &= \frac{1}{LM} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^M \mathbf{y}_T^{(k,j)} - \mathbb{M}\{\mathbf{x}_T\},\end{aligned}\tag{10.2}$$

где  $\hat{\mu}_{L,M}$  и  $\hat{\sigma}_\mu^2$  — оценки математического ожидания и дисперсии случайных величин  $\hat{\mu}_L^{(j)}; j = 1, \dots, M$  соответственно.

По аналогии с рассуждениями в разд. 7.1 построим приближенно доверительный интервал

$$I_{L,M} = (\hat{\mu}_{L,M} - \Delta \hat{\mu}_{L,M}, \hat{\mu}_{L,M} + \Delta \hat{\mu}_{L,M}), \quad \Delta \hat{\mu}_{L,M} = t_{M-1}^{1-\alpha} \left( \hat{\sigma}_\mu^2 / M \right)^{1/2}$$

с уровнем достоверности  $1 - \alpha$  для  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$ , т. е. приближенно (при достаточно больших  $L$ ) истинное значение  $\mu$  с вероятностью  $1 - \alpha$  лежит в интервале  $I_{L,M}$ . Здесь коэффициент  $t_{M-1}^{1-\alpha}$  определяется из статистических таблиц для  $t$ -распределения Стьюдента с  $M - 1$  степенью свободы и вероятностью  $\alpha$ .

Рассмотренная схема построения доверительного интервала применена к тестированию слабых численных методов решения СДУ Ито в [148] и будет использоваться нами в дальнейшем.

Отметим, что в данной главе в численных экспериментах так же, как и в [148], в качестве тестовых уравнений выбираем СДУ Ито (7.4), (7.5) и при этом, как правило, полагаем  $N = 100$ ,  $M = 20$ ,  $\alpha = 0.1$ .

## 10.2 Явные слабые численные методы

### 10.2.1 Явный метод Эйлера

В данном разделе рассмотрим наиболее простой из слабых численных методов — метод Эйлера. Применительно к СДУ Ито (7.18) в автономном случае данный численный метод принимает вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p) (\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}),\tag{10.3}$$

где введены обозначения:  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ ;  $\tau_p = p\Delta$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$ ;  $\Delta = T/N$ ;  $\mathbf{a} : \Re^n \rightarrow \Re^1$ ;  $\Sigma : \Re^n \rightarrow \Re^m$ .

Впервые метод Эйлера (10.3) как слабый численный метод трактовался Г.Н. Мильштейном в [74].

Для слабой сходимости численной схемы (10.3) с порядком  $\gamma = 1.0$  достаточно [76], [148] заменить приращение винеровского процесса  $\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}$  случайной величиной  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p = (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(1)}, \dots, \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(m)})^\top$ , каждая компонента  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$  которой удовлетворяет следующему моментному условию:

$$|\mathbb{M}\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\}| + |\mathbb{M}\{(\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^3\}| + |\mathbb{M}\{(\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^2\} - \Delta| \leq K\Delta^2, \quad (10.4)$$

где  $i = 1, \dots, m$ ;  $K < \infty$  — постоянная, а также потребовать, чтобы  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$ ,  $\Sigma^{(ik)}(\mathbf{x}) \in C^4(\Re^n, \Re^1)$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, m$ , и для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$  выполнялись условия

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x})| &\leq K_1(1 + |\mathbf{x}|), \\ |\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}) - \Sigma_i(\mathbf{y})| &\leq K_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \end{aligned}$$

где  $K_1 < \infty$  — постоянная;  $\Sigma_i(\mathbf{x})$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\Sigma(\mathbf{x})$ . Здесь  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$  — независимые при различных  $i$  или  $p$  и  $\mathbf{F}_{\tau_{p+1}}$ -измеримые случайные величины, удовлетворяющие (10.4).

Простым примером случайной величины  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$  является [76], [148], [196] дискретная случайная величина, для которой

$$\mathbb{P}\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} = \pm \sqrt{\Delta}\} = 1/2.$$

Нетрудно видеть, что возможен вариант:  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \sim N(0, \Delta)$ .

Таким образом, в рамках сделанных допущений слабый метод Эйлера имеет порядок слабой сходимости  $\gamma = 1.0$  и записывается в виде

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p)\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p)\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p. \quad (10.5)$$

В [148] отмечается, что переход к неавтономному случаю, т. е. когда функции  $\mathbf{a}$  и  $\Sigma$  зависят не только от  $\mathbf{x}$ , но и от  $t$ , осуществляется путем рассмотрения процесса Ито размерности  $n + 1$ , первой компонентой которого, например, является  $t$ , а последующими  $n$  компонентами — компоненты процесса  $\mathbf{x}_t$ . При этом приведенные требования слабой сходимости

метода Эйлера (10.3) могут быть несколько ослаблены по переменной  $t$  [148].

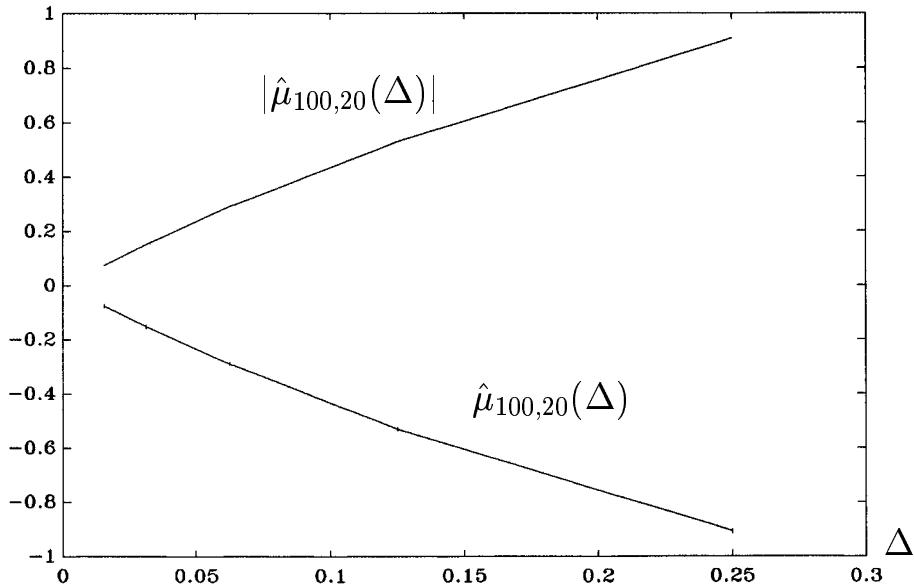


Рис. 10.1. Результат численного эксперимента 10.1.

### Численный эксперимент 10.1.<sup>2</sup> (рис. 10.1). Для СДУ Ито

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad f_t \in \mathbb{R}^1, \quad (10.6)$$

смоделировать 2000 ( $M = 20$  групп по  $N = 100$  реализаций) независимых реализаций случайной величины  $x_T$  при  $T = 1$ ,  $a = 1.5$ ,  $b = 0.05$ ,  $\Delta = 2^{-2}$  с помощью явного слабого метода Эйлера (10.5). Вычислить оценку  $\hat{\mu}_{100,20}$  ошибки  $\mu = M\{y_T\} - M\{x_T\}$  по формуле (10.2), учитывая, что  $M\{x_T\} = x_0 \exp(aT)$  ( $y_T$  определяется из формулы (10.5)). Построить 90%-й доверительный интервал для  $\mu$ . Повторить вычисления при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 3, 4, 5, 6$  и изобразить графически зависимости  $\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)$  и  $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$ , а также 90%-е доверительные интервалы для  $\mu$  при указанных значениях  $\Delta$ .

В [148], [193] показано, что при несколько более слабых условиях, нежели сформулированные ранее, метод Эйлера сходится слабо с порядком  $\gamma \in (0, 1)$ .

Приведем формулировку соответствующего утверждения [148], [193] в случае скалярного винеровского процесса ( $m = 1$ ) и  $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ .

<sup>2</sup>Если не оговаривается противное, то для моделирования повторных стохастических интегралов Ито при реализации слабых численных методов главы 10 используются гауссовские случайные величины.

Будем говорить, что функция  $h(\mathbf{x}) : \Re^d \rightarrow \Re^1$  является гельдеровой с показателем  $\alpha \in (0, 1)$ , если существует положительная постоянная  $K$  такая, что для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^d$  выполнено:

$$|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha.$$

Введем обозначения [148]:

$$\partial_{\mathbf{x}}^\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{\eta_1}}{\partial(\mathbf{x}^{(1)})^{\eta_1}} \cdots \frac{\partial^{\eta_n}}{\partial(\mathbf{x}^{(n)})^{\eta_n}}; \quad \eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \geq 1; \quad \partial_t^0, \quad \partial_{\mathbf{x}}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \cdot; \quad \partial_t^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^k}{\partial t^k},$$

где  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)})^\top$ ;  $\eta_i = 0, 1, \dots$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots$

Обозначим через  $H_l([0, T])$  пространство функций  $h : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^1$ , для которых частные производные  $\partial_t^q \partial_{\mathbf{x}}^g h$  являются гельдеровыми с показателями  $l - [l]$  по  $\mathbf{x}$  и  $(l - 2q - g)/2$  по  $t$  для таких  $q$  и  $g$ , что  $2q + g \leq l$ ; здесь  $l \in (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$  ( $[l]$  — целая часть числа  $l$ ).

Через  $H_l$  будем обозначать пространство всех функций  $h \in H_l([0, T])$ , которые не зависят от  $t$ .

Пусть выполнены следующие условия [148], [193]:

1. Процесс  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  — решение СДУ Ито (7.18) при  $m = 1$  ( $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ), для которого  $\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T|^k\} < \infty$ ;  $k = 1, 2, \dots$
2.  $(\Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq C|\mathbf{z}|^2$  для всех  $t \in [0, T]$ ;  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Re^n$  и некоторой положительной постоянной  $C$  (здесь  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение).
3. Для некоторого  $l \in (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$ :  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \Sigma(\mathbf{x}, t) \in H_l([0, T])$ .
4.  $g(\mathbf{x}) : \Re^n \rightarrow \Re^1$  — функция из пространства  $H_{l+2}$ .
5.  $\mathbf{y}_t$ ,  $t \in [0, T]$  — случайный процесс, определенный равенством

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{\tau_p} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)(t - \tau_p) + \Sigma(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)(\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_{\tau_p}),$$

где  $t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$ ;  $\tau_p = p\Delta$ ;  $\Delta = T/N$ .

Тогда [148], [193]

$$|\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| \leq K\Delta^{r(l)},$$

где

$$r(l) = \begin{cases} l/2 & \text{при } l \in (0, 1) \\ 1/(3-l) & \text{при } l \in (1, 2), \\ 1 & \text{при } l \in (2, 3) \end{cases}$$

$a K < \infty$  — постоянная, которая не зависит от  $\Delta$ .

### 10.2.2 Метод порядка точности 2.0

В этом разделе рассмотрим полученные в [74] (Г.Н. Мильштейн) и [230] (D. Talay) слабые численные методы порядка точности 2.0.

Для построения данных численных методов воспользуемся разложением Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12) при  $s = \tau_{p+1}$ ,  $t = \tau_p$ ,  $r = 2$ ,  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ . Отбрасывая остаточный член в этом разложении и полагая затем  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\}^1 \cdot {}^{(1)}J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\ + {}^{(2)}G_0G_0\{\mathbf{y}_p\}^2 {}^{(2)}J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\}^1 {}^{(1)}J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ + {}^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\}^1 {}^{(1)}J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2}L^2\{\mathbf{y}_p\}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Запишем (10.7) в развернутой форме и заменим повторные стохастические интегралы Ито, входящие в (10.7), на подобранные таким образом аппроксимации (6.283), (6.284), что при определенных условиях (см. теорему 10.1) на функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\Sigma(\mathbf{x})$  полученная численная схема имела бы порядок слабой сходимости 2.0. В результате придет к следующему численному методу [74], [148], [196], [230]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_2)} + V_p^{(i_1 i_2)}) + \\ + \frac{1}{2} \Delta \sum_{i_1=1}^m (L\Sigma_{i_1} + G_0^{(i_1)} \mathbf{a}) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

где функции  $\mathbf{a}$ ,  $\Sigma_{i_1}$ ,  $G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}$ ,  $L\Sigma_{i_1}$ ,  $G_0^{(i_1)} \mathbf{a}$  вычислены в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ ;  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$  — независимые при различных  $p = 0, 1, \dots, N$  или  $i = 1, \dots, m$  случайные величины, удовлетворяющие условию

$$\begin{aligned} |\mathbb{M}\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\}| + \left| \mathbb{M}\left\{(\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^3\right\} \right| + \left| \mathbb{M}\left\{(\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^5\right\} \right| + \\ + \left| \mathbb{M}\left\{(\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^2\right\} - \Delta \right| + \left| \mathbb{M}\left\{(\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^4\right\} - 3\Delta^2 \right| \leq K\Delta^3, \end{aligned} \quad (10.9)$$

где  $i = 1, \dots, m$ ;  $K < \infty$  — постоянная;  $V_p^{(i_1 i_2)}$  — независимые при различных  $i_2 = 1, \dots, i_1 - 1$ ;  $i_1 = 1, \dots, m$  или  $p = 0, 1, \dots, N$  дискретные случайные величины, для которых

$$\mathbb{P}\{V_p^{(i_1 i_2)} = \pm \Delta\} = 1/2,$$

причем

$$V_p^{(i_1 i_1)} = -\Delta \text{ и } V_p^{(i_1 i_2)} = -V_p^{(i_2 i_1)}$$

при  $i_2 = i_1 + 1, \dots, m$  и  $i_1 = 1, \dots, m$ .

Известно [74], [148], [196], [230], что одним из возможных вариантов выбора случайных величин  $\Delta f_p^{(i)}$ , удовлетворяющих условию (10.9), является случайная величина, для которой

$$\mathbb{P}\{\Delta \tilde{f}_p^{(i)} = \pm \sqrt{3\Delta}\} = 1/6, \quad \mathbb{P}\{\Delta \tilde{f}_p^{(i)} = 0\} = 2/3.$$

Отметим, что гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\Delta$  также удовлетворяет условию (10.9).

Рассмотрим случай  $m = 1$ . Тогда (10.7) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Sigma \Delta f_{\tau_p} + \mathbf{a} \Delta + \frac{1}{2} G_0 \Sigma \left( (\Delta f_{\tau_p})^2 - \Delta \right) + \\ + G_0 \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + L \Sigma J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где  $\Sigma : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ; функции  $\Sigma, \mathbf{a}, G_0 \Sigma, G_0 \mathbf{a}, L \Sigma, L \mathbf{a}$  вычислены в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ ;  $\Delta f_{\tau_p} = f_{\tau_{p+1}} - f_{\tau_p}$  — приращение винеровского процесса  $f_t$ ;

$$J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s df_\theta ds, \quad J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s d\theta df_s.$$

Численная схема (10.10) была предложена Г.Н. Мильштейном [74].

Рассмотрим различные способы численного моделирования стохастических интегралов, входящих в (10.10). Поскольку

$$J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} = \Delta \cdot \Delta f_{\tau_p} - J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в. 1,} \quad (10.11)$$

то для численного моделирования стохастических интегралов, входящих в правую часть (10.10), достаточно смоделировать две гауссовские коррелированные случайные величины:  $\Delta f_{\tau_p}$ ,  $J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}$ . Это можно сделать, например, по следующим формулам:

$$\Delta f_{\tau_p} = \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(1)}, \quad J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} = \frac{1}{2} \Delta^{3/2} \left( \zeta_p^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_p^{(2)} \right), \quad (10.12)$$

где  $\zeta_p^{(i)}$ ;  $i = 1, 2$  — независимые при различных  $p$  или  $i$  стандартные гауссовые случайные величины.

Отметим, что формулы (10.12) есть не что иное, как результат применения метода аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанного на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра, к паре стохастических интегралов Ито

$$\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} df_s, \quad \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (s - \tau_p) df_s$$

(ср. с формулами (6.84), (6.85)).

Возможен также и другой вариант [148] совместного численного моделирования случайных величин  $\Delta f_{\tau_p}$ ,  $J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$ . Вместо  $\Delta f_{\tau_p}$  можно взять  $\Delta \tilde{f}_p$ , а вместо  $J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} = 0.5 \Delta (\Delta \tilde{f}_p)$ , где  $\Delta \tilde{f}_p$  —  $F_{\tau_{p+1}}$ -измеримая случайная величина, удовлетворяющая условию типа (10.9). Способы выбора данной случайной величины рассмотрены ранее.

Выпишем варианты численной схемы (10.10) для указанных двух способов численного моделирования пары случайных величин  $\Delta f_{\tau_p}$ ,  $J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Sigma \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(1)} + \mathbf{a} \Delta + \frac{1}{2} \Delta G_0 \Sigma \left( (\zeta_p^{(1)})^2 - 1 \right) + \frac{1}{2} \Delta^2 L \mathbf{a} + \\ & + \frac{1}{2} \Delta^{3/2} \left( G_0 \mathbf{a} \left( \zeta_p^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_p^{(2)} \right) + L \Sigma \left( \zeta_p^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_p^{(2)} \right) \right), \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Sigma \Delta \tilde{f}_p + \mathbf{a} \Delta + \frac{1}{2} G_0 \Sigma \left( (\Delta \tilde{f}_p)^2 - \Delta \right) + \frac{1}{2} \Delta^2 L \mathbf{a} + \\ & + \frac{1}{2} \Delta (G_0 \mathbf{a} + L \Sigma) \Delta \tilde{f}_p. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Приведем формулировку утверждения о слабой сходимости численной схемы (10.8). Результат такого характера впервые был получен в [230] (D. Talay).

**Теорема 10.1.** [230]. Пусть в автономном случае  $\mathbf{y}_0$  и  $\mathbf{x}_0$  имеют одинаковое распределение со всеми конечными моментами, т. е.

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{y}_0|^i\} < \infty, \quad \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^i\} < \infty; \quad i = 1, 2, \dots$$

Пусть также функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\Sigma(\mathbf{x})$  шесть раз непрерывно дифференцируемы, причем все производные ограничены и для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$|\Sigma^{(kj)}(\mathbf{x})\Sigma^{(lj)}(\mathbf{x})| \leq K(1 + |\mathbf{x}|),$$

где  $k, l = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ;  $K < \infty$  — постоянная. Тогда численная схема (10.8) является слабой численной схемой порядка точности 2.0.

Переход к неавтономному случаю осуществляется путем увеличения размерности процесса Ито на единицу так, что, например, его первой компонентой является  $t$ , а последующими  $n$  компонентами — компоненты процесса  $\mathbf{x}_t$ .

**Численный эксперимент 10.2.** (рис. 10.2). Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого численного метода порядка точности 2.0 вида (10.14) при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 3, 4, 5, 6$ .

### 10.2.3 Методы порядка точности 3.0

В данном разделе рассмотрим варианты слабого численного метода порядка точности 3.0. Слабый численный метод порядка точности 3.0 решения скалярного СДУ Ито ( $n = 1$ ) со скалярным шумом ( $m = 1$ ) получен в [213], а слабый численный метод порядка точности 3.0 решения векторного СДУ Ито ( $n > 1$ ) с векторным ( $m > 1$ ), но аддитивным шумом содержится в [76].

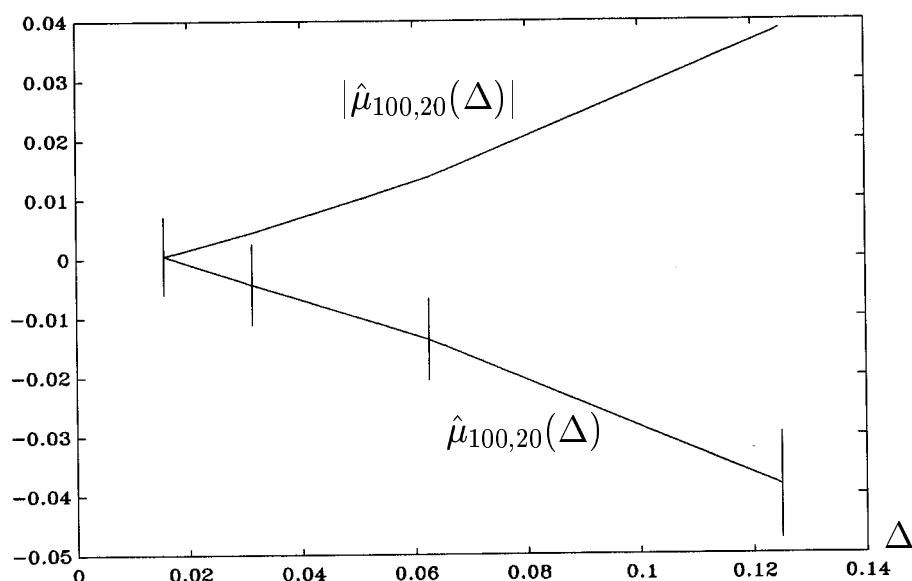


Рис. 10.2. Результат численного эксперимента 10.2.

В качестве основы для построения слабого численного метода порядка точности 3.0 возьмем разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12) при  $s = \tau_{p+1}$ ,  $t = \tau_p$ ,  $r = 3$ ,  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ . После отбрасывания остаточного члена в этом разложении и замены повторных стохастических интегралов на их слабые аппроксимации можно получить слабый численный метод порядка точности 3.0.

Рассмотрим указанное разложение в скалярном случае при  $m = n = 1$  и заменим в нем повторные стохастические интегралы Ито на специальные слабые аппроксимации, которые при определенных дополнительных условиях (см. теорему 10.2) обеспечивают слабую сходимость порядка 3.0 соответствующей численной схемы. В результате получим следующий численный метод [148]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Sigma \Delta f_{\tau_p} + \mathbf{a} \Delta + \frac{1}{2} G_0 \Sigma \left( (\Delta f_{\tau_p})^2 - \Delta \right) + \\ & + G_0 \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + L \Sigma \left( \Delta \cdot \Delta f_{\tau_p} - J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} \right) + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \\ & + \frac{1}{6} (L^2 \Sigma + LG_0 \mathbf{a} + G_0 L \mathbf{a}) \Delta^2 \cdot \Delta f_{\tau_p} + \\ & + \frac{1}{6} (G_0 G_0 \mathbf{a} + G_0 L \Sigma + LG_0 \Sigma) \Delta \left( (\Delta f_{\tau_p})^2 - \Delta \right) + \\ & + \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a} + \frac{1}{6} G_0 G_0 \Sigma \left( (\Delta f_{\tau_p})^2 - 3\Delta \right) \Delta f_{\tau_p}, \end{aligned} \quad (10.15)$$

где  $\mathbf{a}, \Sigma : \Re^1 \times [0, T] \rightarrow \Re^1$ , функции  $\mathbf{h}, G_0 \mathbf{h}, L \mathbf{h}, G_0 G_0 \mathbf{h}, G_0 L \mathbf{h}, L G_0 \mathbf{h}, L^2 \mathbf{h}$  ( $\mathbf{h} = \mathbf{a}$  или  $\Sigma$ ) вычислены в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ ;  $\Delta f_{\tau_p}$  и  $J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}$  — коррелированные гауссовские случайные величины вида

$$\Delta f_{\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} df_s, \quad J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s df_\theta ds,$$

которые могут быть смоделированы численно, например, с помощью формул (6.286), (6.287).

Г.Н. Мильштейном [76] рассмотрен вариант слабого численного метода порядка точности 3.0 в случае аддитивного шума при  $n, m > 1$ , т. е. когда  $\Sigma : [0, T] \rightarrow \Re^{n \times m}$ . Приведем выражение данного численного метода [76]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a} \Delta + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i_1=1}^m \left( L \Sigma_{i_1} \left( \Delta \cdot \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} - J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) + G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{6} \left( L^2 \Sigma_{i_1} + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \right) \Delta^2 \cdot \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \right) + \\
 & \quad + \frac{1}{6} \sum_{i_1,i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left( \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta \right) \Delta, \tag{10.16}
 \end{aligned}$$

где коррелированные гауссовские случайные величины

$$J_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} d\mathbf{f}_s^{(i)}, \quad J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s d\mathbf{f}_{\theta}^{(i)} ds; \quad i = 1, \dots, m$$

могут быть смоделированы численно по формулам

$$\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(i)}, \quad \hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \frac{1}{2} \Delta^{3/2} \left( \zeta_p^{(i)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_p^{(i)} \right), \tag{10.17}$$

или по формулам

$$\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}, \quad \hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}, \tag{10.18}$$

где  $\zeta_p^{(i)}, \eta_p^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины;  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$  и  $\Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  — попарно независимые при различных  $i$  случайные величины, для которых

$$\begin{aligned}
 \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} & \sim N(0, \Delta), \quad \Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)} \sim N(0, \frac{1}{3} \Delta^3), \\
 M\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}\} & = \frac{1}{2} \Delta^2.
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что аппроксимации (10.17) являются частным случаем аппроксимаций (10.18).

Условия, при которых численный метод (10.16) имеет порядок слабой сходимости 3.0, даются теоремой 10.2 [148] (теорема 14.5.2, С. 474).

**Численный эксперимент 10.3.** (рис. 10.3). Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого численного метода порядка точности 3.0 вида (10.15) при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 1, \dots, 6$ . При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (10.15) к уравнению (10.6) и приведения подобных слагаемых.

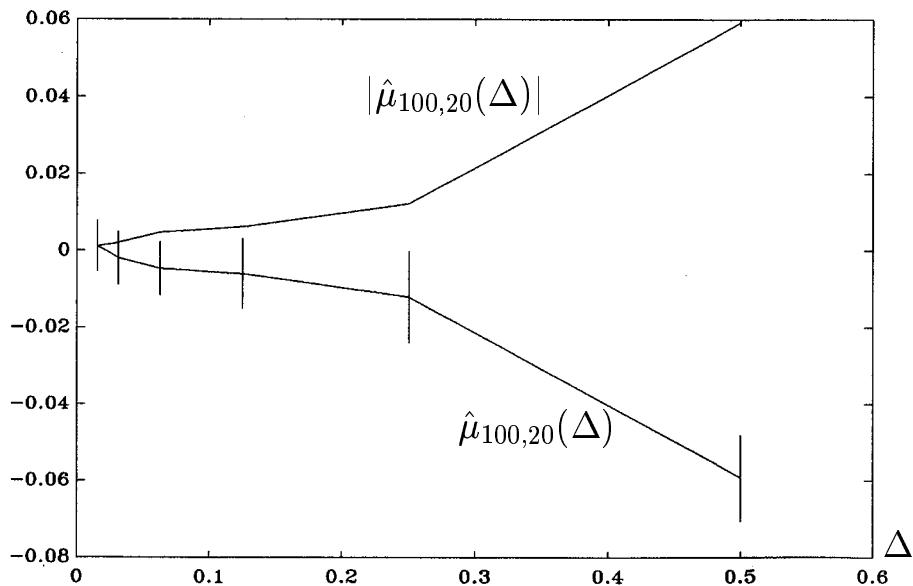


Рис. 10.3. Результат численного эксперимента 10.3.

#### 10.2.4 Методы порядка точности 4.0

Приведем слабый численный метод порядка точности 4.0 для скалярного случая ( $n = m = 1$ ) с аддитивным шумом ( $\Sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ ), который получен в [151]. Этот численный метод имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \Sigma\Delta f_{\tau_p} + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a} + G_0\mathbf{a}J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
 & + L\Sigma(\Delta \cdot \Delta f_{\tau_p} - J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}) + \\
 & + \frac{1}{6}(L^2\Sigma + LG_0\mathbf{a})\Delta^2 \cdot \Delta f_{\tau_p} + G_0L\mathbf{a}\left(\Delta J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{6}\Delta^3 \cdot \Delta f_{\tau_p}\right) + \\
 & + G_0G_0\mathbf{a}\left(2\Delta f_{\tau_p}J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{5}{6}(\Delta f_{\tau_p})^2\Delta - \frac{1}{6}\Delta^2\right) + \frac{\Delta^3}{6}L^2\mathbf{a} + \\
 & + \frac{\Delta^4}{24}L^3\mathbf{a} + \frac{1}{24}(G_0L^2\mathbf{a} + LG_0L\mathbf{a} + L^2G_0\mathbf{a} + L^3\Sigma)\Delta^3 \cdot \Delta f_{\tau_p} + \\
 & + \frac{1}{24}(G_0G_0L\mathbf{a} + LG_0G_0\mathbf{a} + G_0LG_0\mathbf{a})((\Delta f_{\tau_p})^2 - \Delta)\Delta^2 + \\
 & + \frac{1}{24}G_0G_0G_0\mathbf{a}\Delta f_{\tau_p}((\Delta f_{\tau_p})^2 - 3\Delta)\Delta, \tag{10.19}
 \end{aligned}$$

где  $\Delta f_{\tau_p}$ ,  $J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$  — коррелированные гауссовские случайные величины, такие же, как и в предыдущем разделе.

Сравнительная простота численной схемы (10.19) объясняется тем, что в силу аддитивности стохастического возмущения значительная часть повторных стохастических интегралов Ито кратностей 2 – 4 из разложения Тейлора–Ито (4.12) при  $r = 4$  в правой части (10.19) (коэффициентные функции перед этими стохастическими интегралами равны нулю) отсутствует.

Откажемся теперь от предположения аддитивности шума и будем считать, что  $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ;  $m = 1, n \geq 1$ . Построим слабый численный метод порядка точности 4.0 решения СДУ Ито (7.18) в этом случае.

Согласно теореме 10.2 (см. также [148] (теорема 14.5.2, С. 474)) для построения слабого численного метода порядка точности 4.0 решения СДУ Ито (7.18) необходимо использовать разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена (4.12) при  $r = 4$ , т. е. разложение, включающее в себя подлежащие аппроксимации повторные стохастические интегралы Ито кратностей 1 – 4. Число этих стохастических интегралов Ито равно 26. Если вместо разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена (4.12) при  $r = 4$  использовать унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.56) при  $r = 4$ , то число подлежащих аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито можно сократить до 15.

Рассмотрим унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.56) при  $r = 4$ , отбросим в нем остаточный член в интегральной форме и заменим входящие в него повторные стохастические интегралы Ито на их аппроксимации. В результате получим численный метод вида [49]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a} + \sum \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \\ & + G_1 \mathbf{y}_p \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \Delta G_0 \mathbf{a} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_0 \Sigma \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_0 G_0 \Sigma \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \\ & + \Delta G_1 \mathbf{a} \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2} G_0 L \mathbf{a} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_2 \mathbf{y}_p \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_1 \Sigma \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \\ & + G_0 G_1 \mathbf{y}_p \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \Delta G_0 G_0 \mathbf{a} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \frac{\Delta^3}{6} L L \mathbf{a} + \frac{\Delta^4}{24} L L L \mathbf{a} + \\ & + \frac{\Delta^3}{6} G_0 L L \mathbf{a} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2} G_1 L \mathbf{a} \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \Delta G_2 \mathbf{a} \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \\ & + G_3 \mathbf{y}_p \hat{I}_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_1 G_1 \mathbf{y}_p \hat{I}_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_2 \Sigma \hat{I}_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_0 G_2 \mathbf{y}_p \hat{I}_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \\ & + \Delta G_1 G_0 \mathbf{a} \hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \Delta G_0 G_1 \mathbf{a} \hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2} G_0 G_0 L \mathbf{a} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \end{aligned}$$

$$+\Delta G_0 G_0 G_0 \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_1 G_0 \Sigma \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_0 G_1 \Sigma \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \\ + G_0 G_0 G_1 \mathbf{y}_p \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + G_0 G_0 G_0 \Sigma \hat{I}_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}, \quad (10.20)$$

где

$$G_1 = G_0 L - LG_0; \quad G_2 = \frac{1}{2} G_0 LL - LG_0 L + \frac{1}{2} LLG_0; \\ G_3 = \frac{1}{6} G_0 LLL - \frac{1}{2} LG_0 LL + \frac{1}{2} LLG_0 L - \frac{1}{6} LLLG_0;$$

$L\mathbf{y}_p = \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ ,  $G_0\mathbf{y}_p = \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ ; функции  $\mathbf{a}$ ,  $\Sigma$ ,  $L\mathbf{a}, \dots, G_0 G_0 G_0 \Sigma$ , входящие в (10.20), вычислены в точке  $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ ;  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ ;

$$I_{l_1 \dots l_{k_s, t}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^s (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} df_{t_1} \dots df_{t_k} \quad (k \geq 1)$$

— повторный стохастический интеграл Ито;  $\hat{I}_{l_1 \dots l_{k_s, t}}$  — его аппроксимация;  $f_t$ ,  $t \in [0, T]$  — скалярный стандартный винеровский процесс; дифференциальные операторы  $L, G_0$  входят в формулу Ито и имеют в данном случае следующий вид:

$$Lf(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \Sigma^{(i)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(k)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t), \quad (10.21)$$

$$G_0 f(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \Sigma^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad (10.22)$$

где  $f : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  — некоторая функция, для которой существуют правые части (10.21), (10.22).

Для того чтобы численный метод (10.20) был слабым численным методом порядка точности 4.0, необходимо выполнение ряда условий (см. теоремы 10.2, 10.3). Отметим здесь некоторые из них. Так, функции  $\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma^{(k)}(\mathbf{x}, t)$ ;  $k = 1, \dots, n$ , должны удовлетворять условиям AI, AII (теорема 1.6), а, кроме того, следующему условию:  $\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma^{(k)}(\mathbf{x}, t) \in C^{10}(\Re^n \times [0, T], \Re^1)$ .

Выполнение для аппроксимаций  $\hat{I}_{l_1 \dots l_{k_s, t}}$  повторных стохастических интегралов Ито  $I_{l_1 \dots l_{k_s, t}}$  при некоторой постоянной  $K \in (0, \infty)$  условия

$$\left| \mathbf{M} \left\{ \prod_{k=1}^l I_{\alpha_{k_s, t}} - \prod_{k=1}^l \hat{I}_{\alpha_{k_s, t}} \mid \mathcal{F}_t \right\} \right| \leq K(s - t)^5 \quad (10.23)$$

при всех  $s, t \in [0, T]$ , мультииндексах  $\alpha_k \in \mathcal{A}_4$  и  $k = 1, \dots, l; l = 1, 2, \dots, 9$  обеспечит выполнение условия (10.28) теоремы 10.3 при  $r = 4$  ( $\mathcal{A}_4 = \{0, 1, 00, 000, 2, 10, 01, 3, 11, 20, 02, 100, 010, 001, 0000\}$ ).

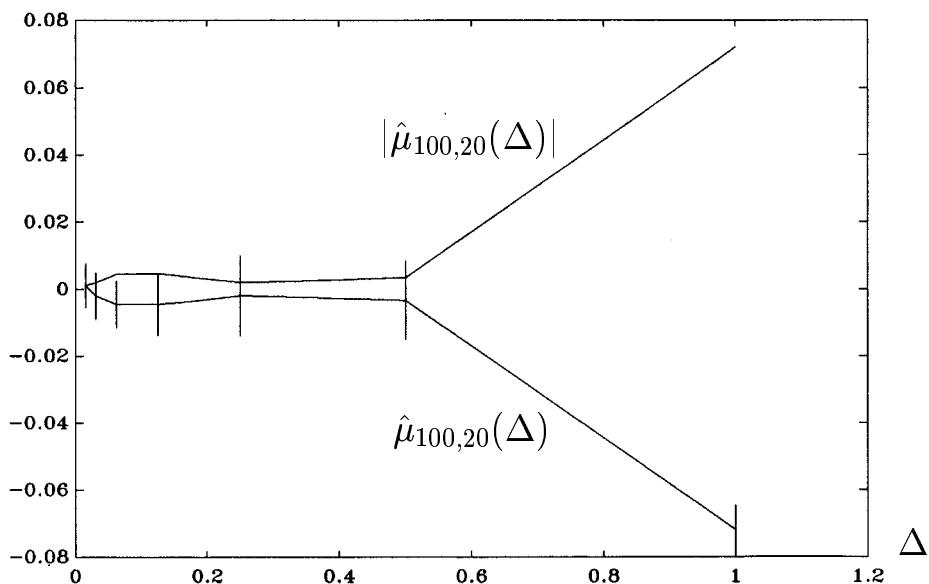


Рис. 10.4. Результат численного эксперимента 10.4 ( $b = 0.05$ ).

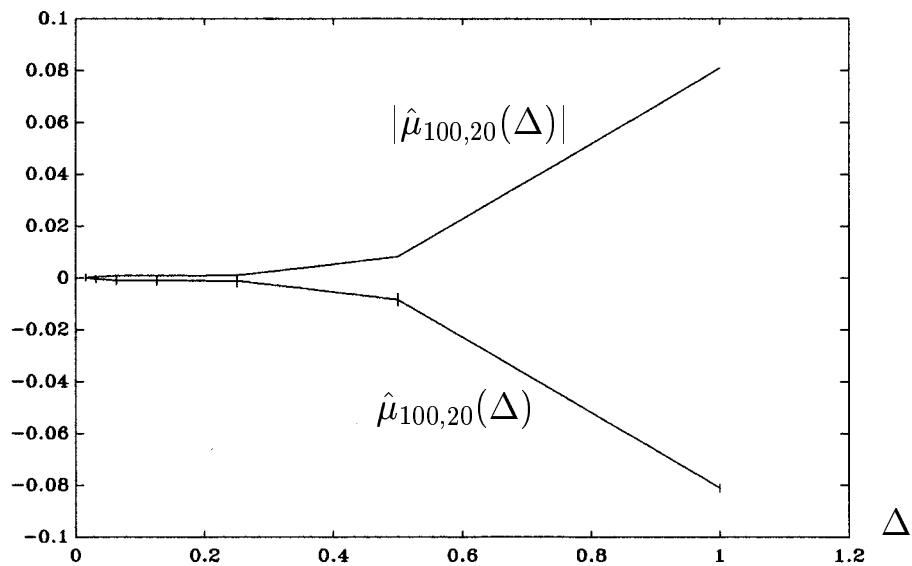


Рис. 10.5. Результат численного эксперимента 10.4 ( $b = 0.01$ ).

Таким образом, для завершения построения слабого численного метода порядка точности 4.0 в случае скалярного неаддитивного шума необходимо построить такие слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящие в (10.20), которые удовлетворяют условию (10.23) и являются по возможности наиболее простыми. В качестве

таких аппроксимаций возьмем аппроксимации, определяемые формулами [49]: (6.289)–(6.297).

**Численный эксперимент 10.4.** (рис. 10.4, 10.5). Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого численного метода порядка точности 4.0 вида (10.20) при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 0, 1, \dots, 6$ . При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (10.20) к уравнению (10.6) и приведения подобных слагаемых. Повторить вычисления при  $b = 0.01$ .

### 10.3 Теорема о сходимости слабых численных методов

В настоящем разделе приведем формулировку теоремы о сходимости слабых численных методов [148], [213].

Рассмотрим разложение Тейлора–Ито (4.12) в форме Вагнера и Платена без остаточного члена для функции  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ :

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_p\} \overset{p_k}{\cdot} \overset{(p_k)}{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}. \quad (10.24)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в формуле (4.12);  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ , а  $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$ , удовлетворяющее условию:

$$0 = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| = \Delta \text{ с в. 1,}$$

где  $\tau_{j+1}$  —  $F_{\tau_j}$ -измеримые случайные величины;  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .

Пусть  $\mathbf{u}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  — дискретная аппроксимация решения  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  СДУ Ито (7.18) в автономном случае, полученная из (10.24) путем замены повторных стохастических интегралов Ито на их слабые аппроксимации:

$$\mathbf{u}_{p+1} = \mathbf{u}_p + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{u}_p\} \overset{p_k}{\cdot} \overset{(p_k)}{\hat{J}}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}, \quad (10.25)$$

$$\overset{(p_k)}{\hat{J}}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \overset{(p_k)}{\hat{J}}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l}, \text{ а } \overset{(i_k \dots i_1)}{\hat{J}}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}$$

— слабая аппроксимация соответствующего стохастического интеграла.

**Теорема 10.2.** [148]. Пусть выполнены следующие условия:

1.  $\mathbf{u}_p; p = 0, 1, \dots, N$  — дискретная аппроксимация (10.25) решения  $\mathbf{x}_t$  СДУ Ито (7.18) в автономном случае,  $\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^k\} < \infty; k = 1, 2, \dots$ , а  $\mathbf{u}_0$  сходится слабо с порядком  $r$  при  $\Delta \rightarrow 0$  к  $\mathbf{x}_0$  для фиксированного  $r = 1.0, 2.0, 3.0, \dots$

2. Для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  существует постоянная  $K < \infty$  такая, что

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x})| \leq K(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}) - \Sigma_i(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

где  $\Sigma_i(\mathbf{x})$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\Sigma(\mathbf{x})$ .

3. Для всех  $k = 1, \dots, n$  и  $j = 1, \dots, m$ :  $\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}), \Sigma^{(kj)}(\mathbf{x}) \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ .

4. Для всех  $k \in N$  существуют постоянные  $K_1 < \infty$  и  $d \in N$ , которые не зависят от  $\Delta$  и такие, что для всех  $q \in \{1, \dots, k\}$  выполнены условия:

a.  $\mathbb{M}\left\{\max_{0 \leq j \leq N} |\mathbf{u}_j|^{2q} |F_0|\right\} \leq K_1(1 + |\mathbf{u}_0|^{2d}).$

b.  $\mathbb{M}\{|\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j|^{2q} |F_{\tau_j}|\} \leq K_1 \left(1 + \max_{0 \leq i \leq j} |\mathbf{u}_i|^{2d}\right) (\tau_{j+1} - \tau_j)^q; j = 0, 1, \dots, N-1.$

c. Для всех  $j = 0, 1, \dots, N-1$  и  $i_1, \dots, i_l = 1, \dots, n; l = 1, 2, \dots, 2r+1$

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{M}\left\{ \prod_{h=1}^l \left( \mathbf{u}_{j+1}^{(i_h)} - \mathbf{u}_j^{(i_h)} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \prod_{h=1}^l \left( \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{ \mathbf{u}_j^{(i_h)} \} \right) {}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{j+1}, \tau_j} \right) |F_{\tau_j} \right\} \right| \leq \\ & \leq K_1 \left( 1 + \max_{0 \leq i \leq N} |\mathbf{u}_i|^{2d} \right) \Delta^r (\tau_{j+1} - \tau_j). \end{aligned}$$

Тогда дискретная аппроксимация  $\mathbf{u}_j; j = 0, 1, \dots, N$  сходится слабо с порядком  $r$  при  $\Delta \downarrow 0$  к процессу  $\mathbf{x}_t$  в момент времени  $T$ .

В [148] показано, что в случае неслучайного разбиения  $\{\tau_i\}_{i=0}^N$  промежутка  $[0, T]$  в условиях теоремы 10.2 для любой функции  $g \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$  существует такая постоянная  $C_g < \infty$ , которая не зависит от  $\Delta$ , что

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_{\tau_i})\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{u}_i)\}| \leq C_g \Delta^r.$$

В заключение приведем аналог теоремы 10.2 для унифицированного разложения Тейлора–Ито.

Рассмотрим унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.56) без остаточного члена для функции  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$  при  $s = \tau_{p+1}$ ,  $t = \tau_p$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} &= \mathbf{y}_p + \\ &+ \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{y}_p\} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \end{aligned} \quad (10.26)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (4.56);  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ , а  $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  — разбиение промежутка  $[0, T]$  такое же, как в (10.24), но неслучайное.

Пусть  $\mathbf{u}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  — дискретная аппроксимация процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , полученная из (10.26) путем замены повторных стохастических интегралов Ито из (10.26) на их слабые аппроксимации:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{p+1} &= \mathbf{u}_p + \\ &+ \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{u}_p\} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \end{aligned} \quad (10.27)$$

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \text{ а } \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$$

— слабая аппроксимация соответствующего стохастического интеграла.

**Теорема 10.3.** Пусть  $\mathbf{u}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  — дискретная аппроксимация (10.27) решения  $\mathbf{x}_t$  СДУ Ито (7.18) в автономном случае. Пусть также выполнены все условия теоремы 10.2, кроме условия 4.с, которое следует заменить следующим условием:

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{h=1}^l \left( \mathbf{u}_{p+1}^{(i_h)} - \mathbf{u}_p^{(i_h)} \right) - \right. \right. \\ &- \prod_{h=1}^l \left( \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{u}_p^{(i_h)}\} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right) | \mathbf{F}_{\tau_p} \left. \right\} \leq \\ &\leq K_1 \left( 1 + \max_{0 \leq i \leq N} |\mathbf{u}_i|^{2d} \right) \Delta^r (\tau_{j+1} - \tau_j) \end{aligned} \quad (10.28)$$

для всех  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  и  $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$ , где  $d, K_1$  входят в условия 4.a, 4.b теоремы 10.2;  $\Delta_p = \tau_{p+1} - \tau_p$ . Тогда дискретная аппроксимация  $\mathbf{u}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  сходится слабо с порядком  $r$  при  $\Delta \downarrow 0$  к процессу  $\mathbf{x}_t$  в момент времени  $T$ .

Отметим, что переход к неавтономному случаю в теоремах 10.2, 10.3 осуществляется так же, как и раньше, т. е. путем ввода  $t$  как дополнительной компоненты процесса Ито.

## 10.4 Экстраполяционные численные методы

В детерминированном численном анализе известен целый класс численных методов, называемых экстраполяционными, которые обладают достаточно высокими порядками сходимости и основываются на численных методах, имеющих существенно более низкие порядки скорости сходимости. Этот подход допускает обобщение на случай стохастических уравнений при вычислении функционалов вида

$$\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\},$$

где  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  — процесс Ито, являющийся решением СДУ Ито (7.18);  $g(\mathbf{x}) : \Re^n \rightarrow \Re^1$  — достаточно гладкая функция.

Наиболее простой экстраполяционный численный метод, имеющий порядок слабой сходимости 2.0, получен в [231] и имеет вид

$$F_{g,2}^\Delta(T) = 2\mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\}, \quad (10.29)$$

где  $\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0}$ ,  $\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0}$  — слабые эйлеровские аппроксимации процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  при  $t = T$ , взятые при шагах дискретизации  $\Delta$  и  $2\Delta$  соответственно. В [231] доказана слабая сходимость порядка 2.0 численной схемы (10.29).

**Численный эксперимент 10.5.** (рис. 10.6). Повторить численный эксперимент 10.1 для экстраполяционного слабого численного метода порядка точности 2.0 вида (10.29) при  $a = 1.5$ ,  $b = 0.01$ ,  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 3, 4, 5, 6$ .

В [148] предложен подход, позволяющий строить экстраполяционные численные методы с порядком слабой сходимости  $2\beta$  ( $\beta = 1.0, 2.0, \dots$ ) на основе слабых аппроксимаций порядка  $\beta$  ( $\beta = 1.0, 2.0, \dots$ ), вычисленных при различных шагах дискретизации. Согласно данному подходу [148] слабая аппроксимация порядка  $2\beta$ , вычисленная в момент времени  $T$ , определяется равенством:

$$F_{g,2\beta}^{\Delta}(T) = \sum_{l=1}^{\beta+1} a_l \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta_l, \beta})\}, \quad (10.30)$$

где  $\Delta_l = d_l \Delta$ ;  $0 < d_1 < \dots < d_{\beta+1} < \infty$ ;  $l = 1, 2, \dots, \beta + 1$ ,

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{\beta+1} a_l = 1 \\ \sum_{l=1}^{\beta+1} a_l (d_l)^{\gamma} = 0 \end{cases}, \quad \gamma = \beta, \beta + 1, \dots, 2\beta - 1.$$

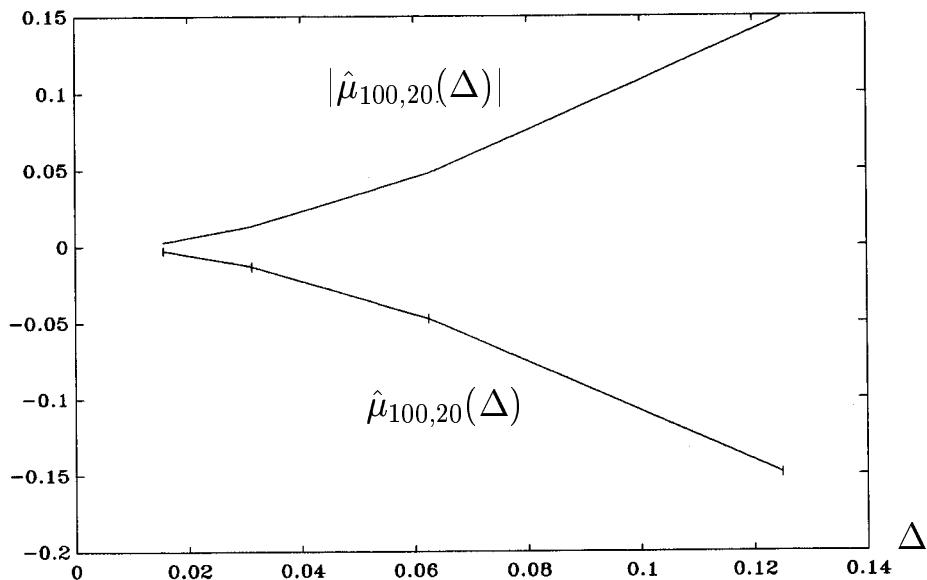


Рис. 10.6. Результат численного эксперимента 10.5.

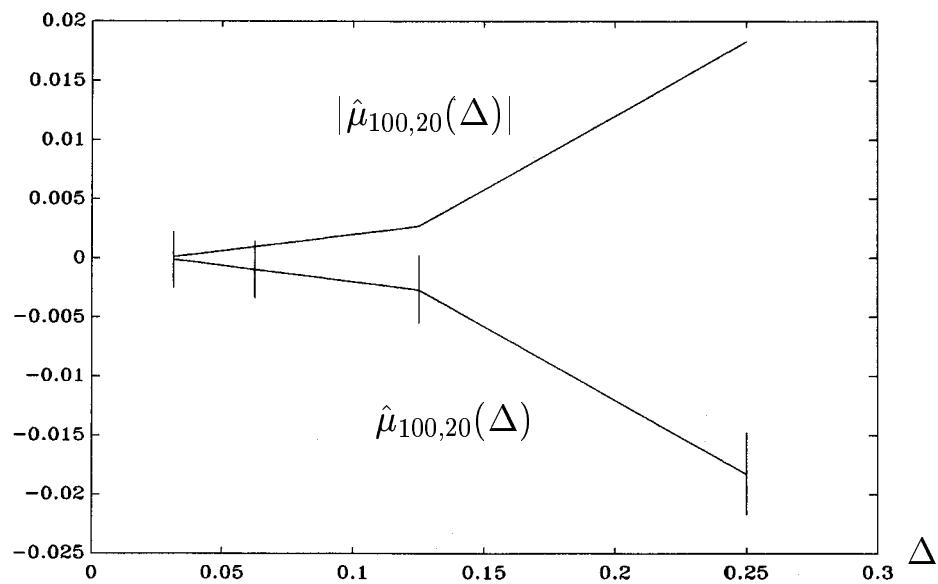


Рис. 10.7. Результат численного эксперимента 10.6.

В (10.30)  $\mathbf{y}_T^{\Delta_l, \beta}; l = 1, 2, \dots, \beta + 1$  — значения слабых аппроксимаций порядка  $\beta$  процесса  $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$  в момент времени  $T$ , которые соответствуют постоянным шагам дискретизации  $\Delta_l; l = 1, 2, \dots, \beta + 1$ .

В [148] доказана слабая сходимость порядка  $2\beta$  численного метода (10.30) и приведен ряд экстраполяционных численных методов, основанных на формуле (10.30):

$$F_{g,4}^\Delta(T) = \frac{1}{21} \left[ 32M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,2.0})\} - 12M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,2.0})\} + M\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,2.0})\} \right], \quad (10.31)$$

$$F_{g,4}^\Delta(T) = \frac{1}{11} \left[ 18M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,2.0})\} - 9M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,2.0})\} + 2M\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,2.0})\} \right],$$

$$\begin{aligned} F_{g,6}^\Delta(T) = \frac{1}{2905} & \left[ 4032M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,3.0})\} - 1512M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,3.0})\} + \right. \\ & \left. + 448M\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,3.0})\} - 63M\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,3.0})\} \right], \end{aligned}$$

где здесь и далее  $\mathbf{y}_T^{\Delta, \beta}$  — значение слабой аппроксимации порядка  $\beta$  в момент времени  $T$ , соответствующей постоянному шагу дискретизации  $\Delta$ .

**Численный эксперимент 10.6.** (рис. 10.7). Повторить численный эксперимент 10.1 для экстраполяционного слабого численного метода порядка точности 4.0 вида (10.31) при  $a = 1.5, b = 0.01, \Delta = 2^{-j}; j = 2, 3, 4, 5$ . В качестве слабого численного метода порядка точности 2.0, используемого в формуле (10.31), взять численный метод (10.14).

Предложим следующие экстраполяционные численные методы со слабым порядком сходимости 8.0, которые основаны на слабых аппроксимациях порядка точности 4.0 вида (10.20) или (10.19) и вытекают из формулы (10.30):

$$\begin{aligned} F_{g,8}^\Delta(T) = \frac{1080000}{874853} & \left[ M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\} - \frac{1}{4}M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\} + \frac{2}{27}M\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,4.0})\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{64}M\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,4.0})\} + \frac{1}{625}M\{g(\mathbf{y}_T^{5\Delta,4.0})\} \right], \end{aligned}$$

$$F_{g,8}^\Delta(T) = \frac{1}{248031} \left[ \frac{4194304}{15} M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\} - 32768M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\} + \right.$$

$$+ \frac{3584}{3} M\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,4.0})\} - 16M\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,4.0})\} + \frac{1}{15}M\{g(\mathbf{y}_T^{16\Delta,4.0})\}\Big].$$

В [151] предложен другой подход к построению экстраполяционных численных методов, который позволяет получать слабые численные методы порядка точности  $\beta$  ( $\beta = 2.0, 3.0, \dots$ ) на основе слабых аппроксимаций фиксированного порядка точности  $\gamma \in \{1.0, 2.0, \dots, \beta - 1\}$ , соответствующих различным шагам дискретизации. Согласно данному подходу [151]

$$F_{g,\alpha,\beta}^{\Delta}(T) = \frac{1}{2^{\beta-1} - 1} (2^{\beta-1} F_{g,\alpha,\beta-1}^{\Delta}(T) - F_{g,\alpha,\beta-1}^{2\Delta}(T)), \quad (10.32)$$

где  $\alpha \in \{1.0, 2.0, \dots, \beta - 1\}$ , а  $M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,\alpha})\} \stackrel{\text{def}}{=} F_{g,\alpha,\alpha}^{\Delta}(T)$ .

На основе формулы (10.32) в [151] построен ряд экстраполяционных численных методов. Приведем некоторые из них [151]:

$$F_{g,1,3}^{\Delta}(T) = \frac{1}{3} \left[ 8M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - 6M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\} + M\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\} \right], \quad (10.33)$$

$$\begin{aligned} F_{g,1,4}^{\Delta}(T) = & \frac{1}{21} \left[ 64M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - 56M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\} + \right. \\ & \left. + 14M\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\} - M\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,1.0})\} \right], \end{aligned} \quad (10.34)$$

$$F_{g,4,5}^{\Delta}(T) = \frac{1}{15} \left[ 16M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\} - M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\} \right],$$

$$\begin{aligned} F_{g,1,5}^{\Delta}(T) = & \frac{1}{315} \left[ 1024M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - 960M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\} + \right. \\ & \left. + 280M\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\} - 30M\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,1.0})\} + M\{g(\mathbf{y}_T^{16\Delta,1.0})\} \right]. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Отметим, что, с одной стороны, соотношение (10.32) позволяет строить экстраполяционные формулы, в правых частях которых находятся слабые аппроксимации, вычисленные в момент времени  $T$  и соответствующие шагам дискретизации  $\Delta, 2\Delta, 4\Delta, 8\Delta, \dots$ , т. е. последовательность шагов дискретизации фиксируется достаточно жестко (формула (10.30) предоставляет больше свободы в выборе последовательности шагов дискретизации:  $\Delta_l = d_l \Delta; 0 < d_1 < \dots < d_{\beta+1} < \infty; l = 1, 2, \dots, \beta + 1$ ). С другой

стороны, формула (10.32) позволяет строить экстраполяционные численные методы достаточно высоких порядков точности (3.0, 4.0, 5.0, ...), используя только слабые аппроксимации существенно более низкого порядка точности, например, порядка точности 1.0 (см. (10.33)–(10.35)).

Следует отметить, что при реализации экстраполяционных численных методов приходится решать СДУ Ито несколько раз независимо с различными шагами интегрирования.

## 10.5 Явные слабые конечно-разностные численные методы

Как и в случае сильных численных методов, интерес представляет построение конечно-разностных слабых численных методов. В [76], [148] представлены различные явные слабые конечно-разностные численные методы порядка точности 2.0. Среди данных численных методов отметим метод, полученный в [148], [213] для автономного случая:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{Y}_p)) \Delta + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left\{ (\Sigma_j(R_p^{(j)+}) + \Sigma_j(R_p^{(j)-}) + 2\Sigma_j) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \right. \\ & + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m (\Sigma_j(U_p^{(r)+}) + \Sigma_j(U_p^{(r)-}) - 2\Sigma_j) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} \Big\} + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^m \left\{ (\Sigma_j(R_p^{(j)+}) - \Sigma_j(R_p^{(j)-})) \left( (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)})^2 - \Delta \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m (\Sigma_j(U_p^{(r)+}) - \Sigma_j(U_p^{(r)-})) (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(r)} + V_p^{(rj)}) \right\}, \end{aligned} \quad (10.36)$$

где  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ ;  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_{\tau_p}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}$ ;  $\tau_p = p\Delta$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$ ;  $T = N\Delta$ ;

$$\begin{aligned} \bar{Y}_p = & \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \sum_{j=1}^m \Sigma_j \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}; \quad R_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta \pm \sqrt{\Delta} \Sigma_j, \\ U_p^{(j)\pm} = & \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta} \Sigma_j, \end{aligned}$$

$\Sigma_j$  —  $j$ -й столбец матрицы  $\Sigma$ ; случайные величины  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}$ ,  $V_p^{(rj)}$  такие же, как в (10.8). В (10.36) и далее, как обычно, аргумент  $\mathbf{y}_p$  опускается, т. е. вместо  $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p)$ ,  $\Sigma_j(\mathbf{y}_p)$  и т.д. мы пишем  $\mathbf{a}$ ,  $\Sigma_j$  и т.д.

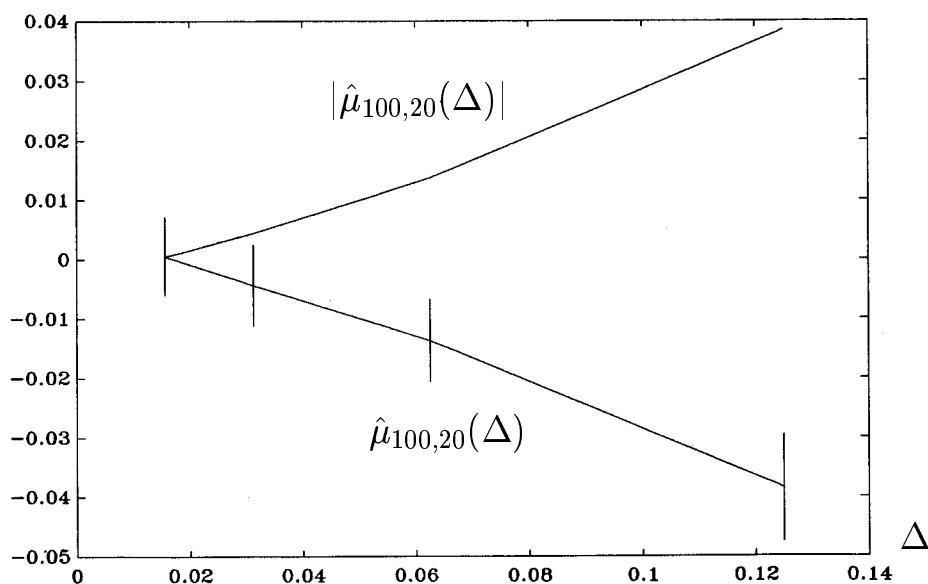


Рис. 10.8. Результат численного эксперимента 10.7.

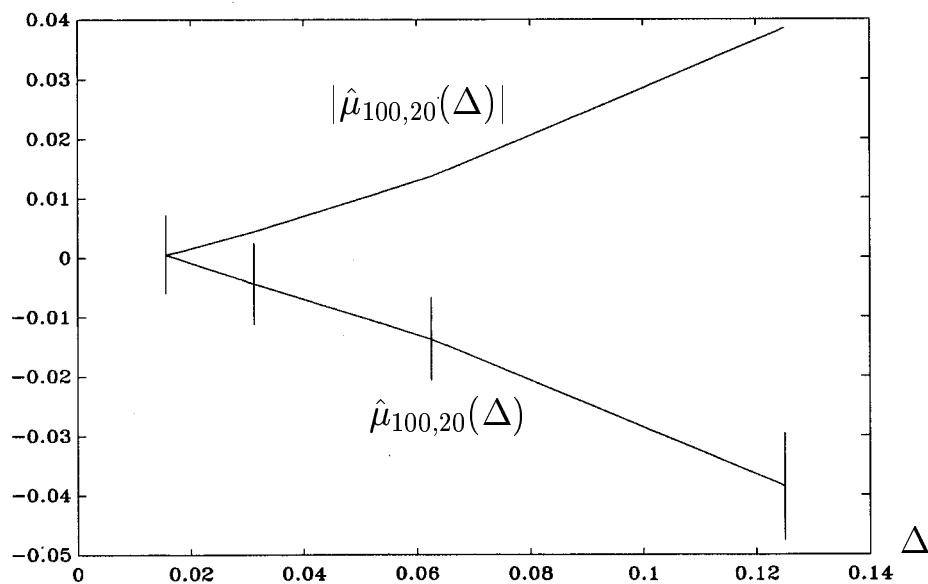


Рис. 10.9. Результат численного эксперимента 10.8.

Рассмотрим слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного шума ( $m = 1$ ) [148], [213]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{Y}_p)) \Delta + \frac{1}{4} (\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p + \\ + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} (\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)) ((\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p)^2 - \Delta), \end{aligned} \quad (10.37)$$

где  $\Sigma : \Re^n \rightarrow \Re^1$ ;  $\bar{Y}_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \Sigma\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p$ ;  $Y_p^\pm = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta \pm \sqrt{\Delta}\Sigma$ ; остальные обозначения такие же, как в (10.36).

**Численный эксперимент 10.7.** (рис. 10.8). Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (10.37) при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 3, 4, 5, 6$ .

Предложим следующий явный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для автономного случая:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)) \Delta + \frac{1}{4} \Delta \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) + \mathbf{a}(Y_p^{(i)-}) - 2\mathbf{a}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i) \right\} \Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} + \\ & + \frac{\sqrt{\Delta}}{4} \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) - \mathbf{a}(Y_p^{(i)-})) \Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{i,j=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(j)+}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)-})) (\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)}) , \end{aligned} \quad (10.38)$$

где  $Y_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta}\Sigma_j$ ;  $Z_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta$ ; остальные обозначения см. в (10.36).

Вариант численной схемы (10.38) в случае ( $m = 1$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)) \Delta + \frac{1}{4} \Delta\tilde{\mathbf{f}}_p \sqrt{\Delta} (\mathbf{a}(Y_p^+) - \mathbf{a}(Y_p^-)) + \\ & + \frac{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p}{4} (\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma(Z_p)) + \frac{1}{4} \Delta (\mathbf{a}(Y_p^+) + \mathbf{a}(Y_p^-) - 2\mathbf{a}) + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} (\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)) \left( (\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p)^2 - \Delta \right) , \end{aligned} \quad (10.39)$$

где  $\Sigma : \Re^n \rightarrow \Re^1$ ;  $Y_p^\pm = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta}\Sigma$ ;  $Z_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta$ .

**Численный эксперимент 10.8.** (рис. 10.9). Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (10.39) при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 3, 4, 5, 6$ .

Сходимость приведенных и рассматриваемых далее численных методов будет обоснована в конце данной главы.

## 10.6 Неявные слабые численные методы

### 10.6.1 Неявные методы Эйлера

В предыдущих главах отмечалось, что неявные сильные численные методы обладают лучшей устойчивостью, чем явные сильные численные методы. Аналогичный вывод справедлив и для слабых численных методов [76], [148], что мотивирует необходимость построения неявных слабых численных схем.

Рассмотрим следующее, предложенное в [148], семейство неявных методов Эйлера:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \{k\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-k)\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} \Delta + \\ & + \{\eta\Sigma(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\eta)\Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p, \end{aligned} \quad (10.40)$$

где  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$ ;  $\tau_p = p\Delta$ ;  $N = T/\Delta$ ;  $k, \eta$  — вещественные параметры;  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p$  —  $m$ -мерный случайный столбец с независимыми компонентами  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ , являющимися дискретными случайными величинами, для которых верно следующее:  $P\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} = \pm \sqrt{\Delta}\} = 1/2$ ;

$$\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \eta \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n \Sigma^{(li)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma_i}{\partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (10.40).

1. Явный метод Эйлера ( $k = \eta = 0$ ) :

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p. \quad (10.41)$$

2. Полунеявный метод Эйлера ( $k = 1, \eta = 0$ ) :

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p.$$

3. Полностью неявный метод Эйлера ( $k = \eta = 1$ ) :

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \bar{\mathbf{a}}_1(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p.$$

4. Симметричные методы Эйлера ( $k = \eta = 0.5$  и  $k = 0.5, \eta = 0$ ):

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + 0.5 (\bar{\mathbf{a}}_{1/2}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \bar{\mathbf{a}}_{1/2}(\mathbf{y}_p, \tau_p)) \Delta +$$

$$+0.5 (\Sigma(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p,$$

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + 0.5 (\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p.$$

Численный метод (10.40) называется [137] супернеявным методом Эйлера, если  $k$  или  $\eta$  не принадлежат отрезку  $[0, 1]$ .

Далее будет показано (см. [137]), что неявные слабые методы Эйлера, и особенно супернеявные методы Эйлера, обладают лучшей устойчивостью по сравнению с явным методом Эйлера. Заметим также, что при подходящих условиях [148] численный метод (10.40) имеет порядок слабой сходимости  $\gamma = 1.0$ . Кроме того, в тех случаях, когда в (10.40)  $\eta \neq 0$ , т. е. неявность входит не только в систематическое, но и в стохастическое слагаемое, вообще говоря, не следует брать в качестве  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) гауссовские случайные величины [148], так как в этом случае для процесса  $\mathbf{y}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots$ , определяемого равенством (10.40), перестают существовать моментные характеристики. Это нетрудно проверить на примере тестового линейного СДУ Ито с мультипликативным шумом ([148], С. 336–337).

**Численный эксперимент 10.9.** (рис. 10.10–10.12). Для СДУ Ито

$$d\begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + b\begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} df_t, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0^{(1)} \\ \mathbf{x}_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $f_t \in \mathbb{R}^1$ ,  $t \in [0, T]$  смоделировать 2000 ( $M = 20$  групп по  $N = 100$  реализаций) независимых реализаций векторной случайной величины  $\mathbf{x}_T = (\mathbf{x}_T^{(1)} \ \mathbf{x}_T^{(2)})^\top$  при  $T = 1$ ,  $a = 1.5$ ,  $b = 0.01$ ,  $\Delta = 2^{-3}$ ,  $\eta = 0$ ,  $k = 0$  с помощью метода Эйлера (10.40). Произвести вычисление оценки  $\hat{\mu}_{100,20} = (\hat{\mu}_{100,20}^{(1)} \ \hat{\mu}_{100,20}^{(2)})^\top$  ошибки  $\mu = (\mu^{(1)} \ \mu^{(2)})^\top$ ,  $\mu^{(i)} = \mathbb{M}\{\mathbf{y}_T^{(i)}\} - \mathbb{M}\{\mathbf{x}_T^{(i)}\}$ ;  $i = 1, 2$  с помощью формулы (10.2), учитывая, что

$$\mathbb{M}\{\mathbf{x}_T\} = \exp(AT)\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.5(1 + \exp(-2aT)) \\ 0.5(1 - \exp(-2aT)) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$$

( $\mathbf{y}_T$  определяется численным методом (10.40)). Построить 90%-е доверительные интервалы для  $\mu^{(1)}$  и  $\mu^{(2)}$ . Повторить вычисления при  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 4, 5, 6$  и изобразить графически зависимости  $\hat{\mu}_{100,20}^{(1)}(\Delta)$ ,  $\hat{\mu}_{100,20}^{(2)}(\Delta)$ ,  $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$ , а также 90%-е доверительные интервалы для  $\mu^{(1)}$  и  $\mu^{(2)}$  при указанных значениях  $\Delta$ . Повторить вычисления при  $\eta = 0$ ,  $k = 1/2$  и  $\eta = 0$ ,

$k = 1$ . Для моделирования приращений винеровского процесса использовать независимые случайные величины  $\Delta \tilde{f}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $N = T/\Delta$ , для которых  $P\{\Delta \tilde{f}_p = \pm \sqrt{\Delta}\} = 1/2$ .

**Численный эксперимент 10.10.** (рис. 10.13). Повторить численный эксперимент 10.9 для метода Эйлера (10.40) при  $\eta = k = 1$ ,  $a = 5$ ,  $b = 0.01$  (остальные параметры и указания такие же, как в численном эксперименте 10.9).

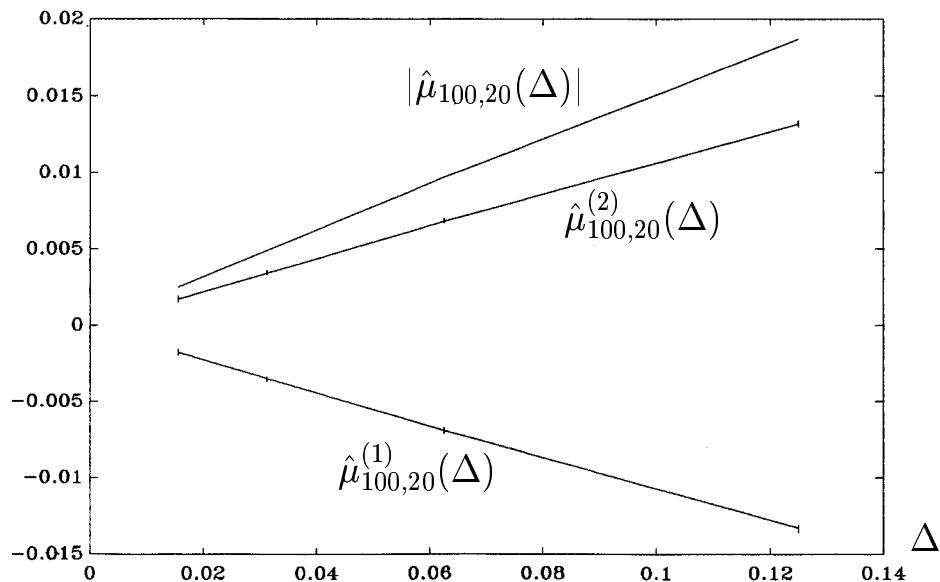


Рис. 10.10. Результат численного эксперимента 10.9 ( $\eta, k = 0$ ).

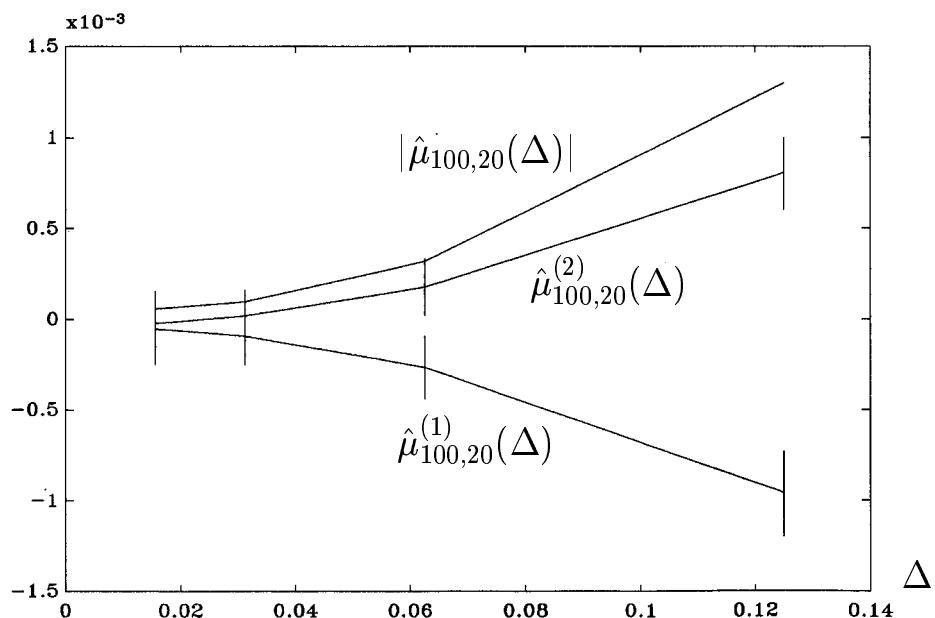


Рис. 10.11. Результат численного эксперимента 10.9 ( $\eta = 0, k = 1/2$ ).

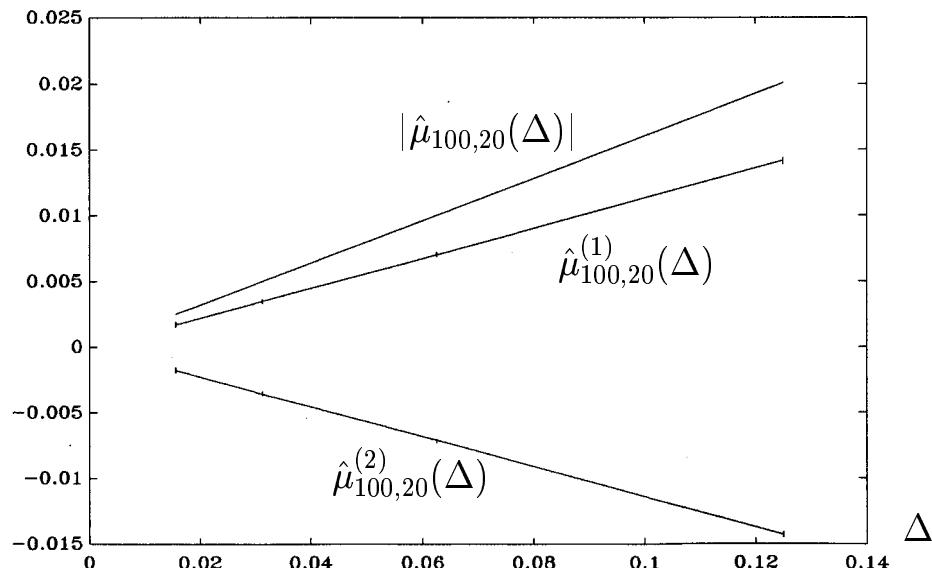


Рис. 10.12. Результат численного эксперимента 10.9 ( $\eta=0, k=1$ ).

### 10.6.2 Методы порядка точности 2.0

Г.Н. Мильштейном в [76] предложено двухпараметрическое семейство неявных слабых численных методов порядка точности 2.0 вида:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \{\tilde{\alpha} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}) \mathbf{a}\} \Delta +$$

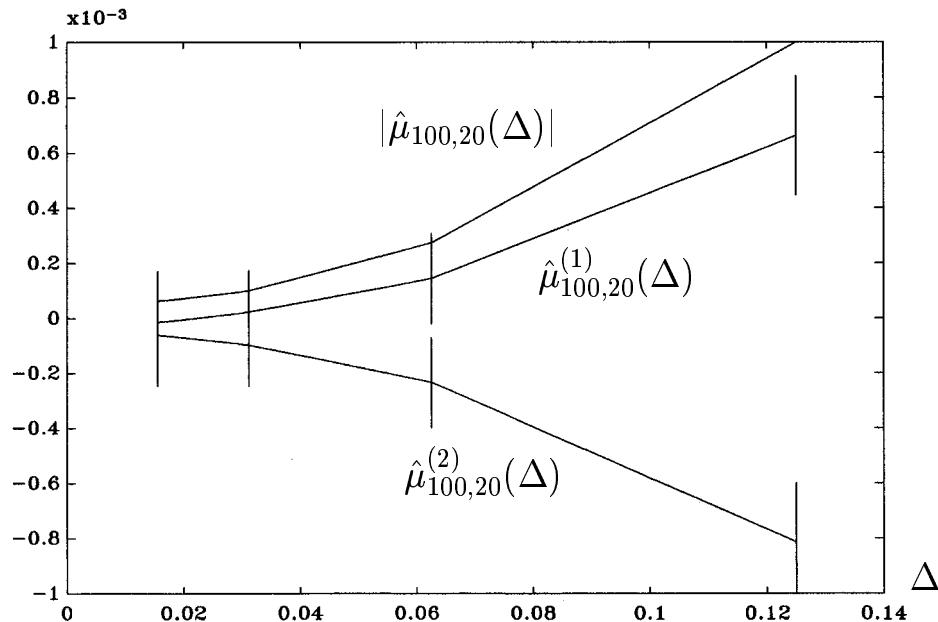


Рис. 10.13. Результат численного эксперимента 10.10.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_1)} \Sigma_{i_2} (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_2)} + V_p^{(i_1 i_2)}) + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left( \Sigma_{i_1} + \frac{1}{2} (L \Sigma_{i_1} + (1 - 2\tilde{\alpha}) G_0^{(i_1)} \mathbf{a}) \Delta \right) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} + \\
 & + \frac{1}{2} (1 - 2\tilde{\alpha}) \{ \tilde{\beta} L \mathbf{a} + (1 - \tilde{\beta}) L \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) \} \Delta^2,
 \end{aligned} \tag{10.42}$$

где  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in [0, 1]$ ; случайные величины  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}, V_p^{(ij)}$  такие же, как в (10.8).

В [148] показано, что численная схема (10.42) при  $\tilde{\alpha} = 1/2$  является  $A$ -устойчивой на классе тестовых СДУ Ито с аддитивным шумом.

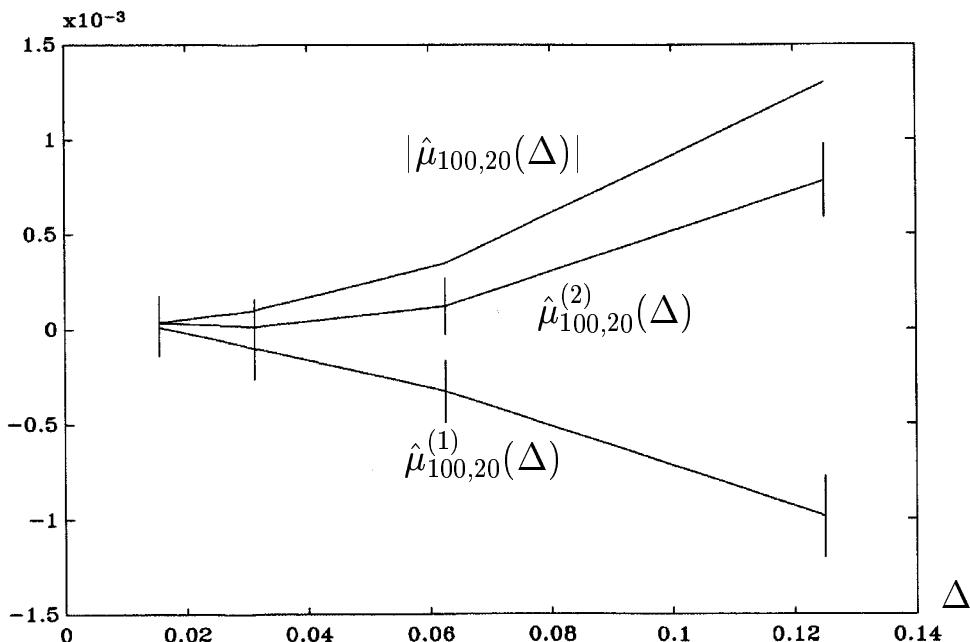


Рис. 10.14. Результат численного эксперимента 10.11.

**Численный эксперимент 10.11.** (рис. 10.14). Повторить численный эксперимент 10.9 для неявного слабого численного метода (10.42) при  $\tilde{\alpha} = 1/2$ . Для моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (10.42), использовать независимые случайные величины  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $N = T/\Delta$ , для которых  $P\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p = \pm \sqrt{\Delta}\} = 1/2$ .

### 10.6.3 Конечно-разностные методы порядка точности 2.0

Приведем неявный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для автономного случая, который получен в [148]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})) \Delta + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left\{ \Sigma_j(R_p^{(j)+}) + \Sigma_j(R_p^{(j)-}) + 2\Sigma_j + \right. \\
 & + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m (\Sigma_j(U_p^{(r)+}) + \Sigma_j(U_p^{(r)-}) - 2\Sigma_j) \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Big\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^m \left\{ (\Sigma_j(R_p^{(j)}) - \Sigma_j(R_p^{(j)-})) \left( (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)})^2 - \Delta \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m (\Sigma_j(U_p^{(r)}) - \Sigma_j(U_p^{(r)})) (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(r)} + V_p^{(r)}) \right\}, \quad (10.43)
 \end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (10.36).

В [148] также представлен неявный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного шума ( $m = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})) \Delta + \frac{1}{4} (\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} (\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)) \left( (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p)^2 - \Delta \right), \quad (10.44)
 \end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (10.37).

Предложим неявный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 вида

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})) \Delta + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i) \right\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{i,j=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(j)}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)})) (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)}), \quad (10.45)
 \end{aligned}$$

где введены такие же обозначения, как в (10.38).

Вариант численной схемы (10.45) для случая ( $m = 1$ ) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})) \Delta + \frac{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p}{4} (\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma(Z_p)) + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} (\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)) \left( (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p)^2 - \Delta \right), \quad (10.46)
 \end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (10.39).

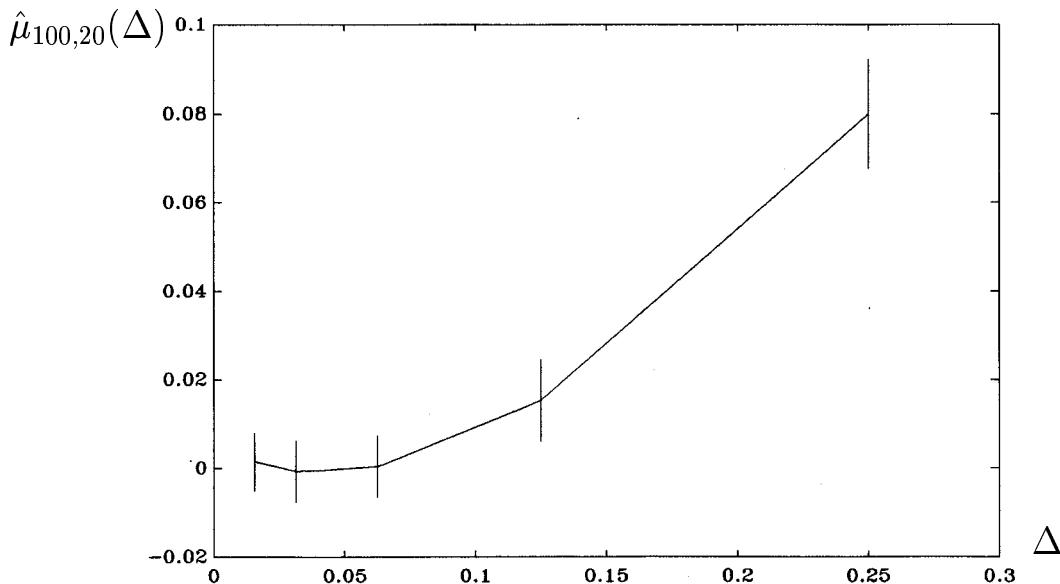


Рис. 10.15. Результат численного эксперимента 10.12.

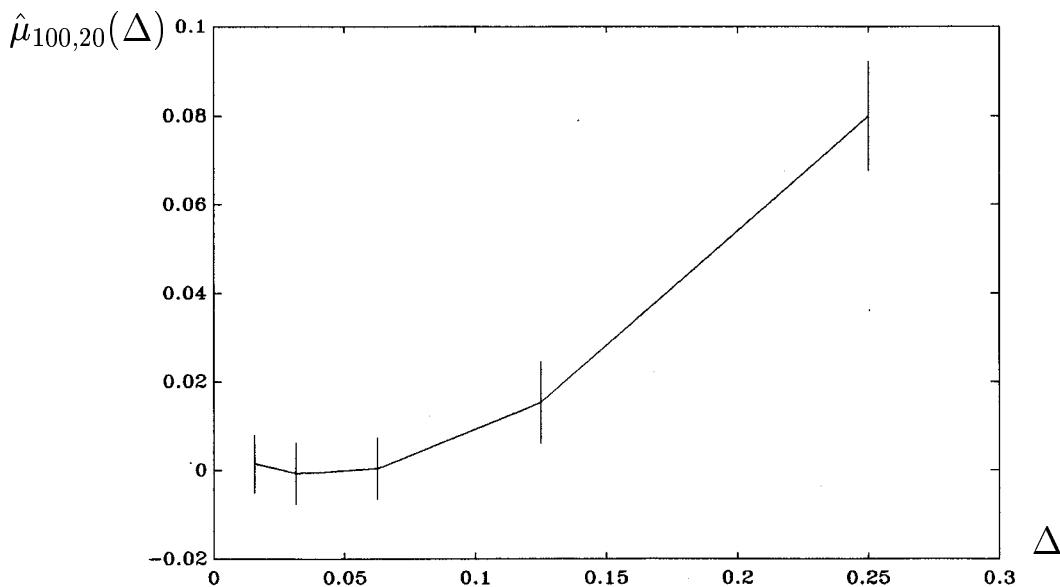


Рис. 10.16. Результат численного эксперимента 10.13.

Отметим, что численные схемы (10.43)–(10.46) являются  $A$ -устойчивыми на классе тестовых СДУ Ито с аддитивным шумом.

**Численный эксперимент 10.12.** (рис. 10.15). Повторить численный эксперимент 10.1 для неявного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (10.44) (не строить зависимость  $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$ ).

**Численный эксперимент 10.13.** (рис. 10.16). Повторить численный эксперимент 10.1 для неявного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (10.46) (не строить зависимость  $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$ ).

## 10.7 Численные методы типа "предсказатель–корректор"

В [215] предложено семейство специфических слабых численных методов, называемых численными методами типа "предсказатель–корректор". В качестве предсказателя выступает случайная величина  $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$ , вычисленная на фиксированном  $p$ -м шаге интегрирования с помощью явной слабой численной схемы некоторого порядка точности  $\gamma$ . Роль корректора играет неявная слабая численная схема того же порядка точности  $\gamma$ , в которой неявность  $\mathbf{y}_{p+1}$  в правой части заменяется на величину  $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$ . Например, семейство слабых численных методов типа "предсказатель–корректор" порядка точности 1.0 имеет вид [148]

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + & \{k\bar{\mathbf{a}}_\eta(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - k)\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} \Delta + \\ & + \sum_{j=1}^m \{\eta \Sigma_j(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \eta) \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)},\end{aligned}\quad (10.47)$$

где  $k, \eta \in [0, 1]$ ;  $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$  определяется правой частью (10.41),

$$\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \eta \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n \Sigma^{(li)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma_i}{\partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t),$$

а остальные обозначения, входящие в (10.47), такие же, как в (10.36).

В [215] получен следующий слабый численный метод типа "предсказатель–корректор" порядка точности 2.0:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + & \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1})) \Delta + U_p, \\ U_p = \sum_{j=1}^m & \left( \Sigma_j + \frac{1}{2} \Delta L \Sigma_j \right) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m G_0^{(i)} \Sigma_j (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ij)}), \\ \bar{\mathbf{y}}_{p+1} = \mathbf{y}_p + & \mathbf{a} \Delta + U_p + \frac{1}{2} L \mathbf{a} \Delta^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} \mathbf{a} \Delta \cdot \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)},\end{aligned}$$

а остальные обозначения такие же, как в (10.36).

Предложим следующий слабый конечно-разностный численный метод типа "предсказатель–корректор" порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{\mathbf{y}}_{p+1})) \Delta + U_p, \quad (10.48)$$

$$U_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i) \right\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} + \\ + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{i,j=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(j)+}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)-})) (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)}) ,$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)) \Delta + U_p + \frac{1}{4} \sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) - \mathbf{a}(Y_p^{(i)-})) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} + \\ + \frac{1}{4} \Delta \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) + \mathbf{a}(Y_p^{(i)-}) - 2\mathbf{a}),$$

где

$$Y_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta} \Sigma_j, \quad Z_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a} \Delta,$$

а остальные обозначения такие же, как в (10.38).

В [148] на примере численных экспериментов показано, что слабые численные методы типа "предсказатель–корректор" обладают хорошей численной устойчивостью, хотя и являются явными численными методами.

**Численный эксперимент 10.14.** (рис. 10.17). Повторить численный эксперимент 10.1 для слабого численного метода порядка точности 1.0 типа "предсказатель–корректор" вида (10.47) при  $\eta = 0$ ,  $k = 1/2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0.01$ ,  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 3, 4, 5, 6$ . В качестве  $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$  в (10.47) взять правую часть численного метода (10.41). Для моделирования приращений винеровского процесса использовать независимые случайные величины  $\Delta \tilde{f}_p$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $N = T/\Delta$ , для которых  $P\{\Delta \tilde{f}_p = \pm \sqrt{\Delta}\} = 1/2$ .

**Численный эксперимент 10.15.** (рис. 10.18). Повторить численный эксперимент 10.14 для слабого численного метода порядка точности 2.0 типа "предсказатель–корректор" вида (10.48) (не строить зависимость  $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$ ). Для моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (10.48), использовать те же случайные величины, что и в численном эксперименте 10.14.

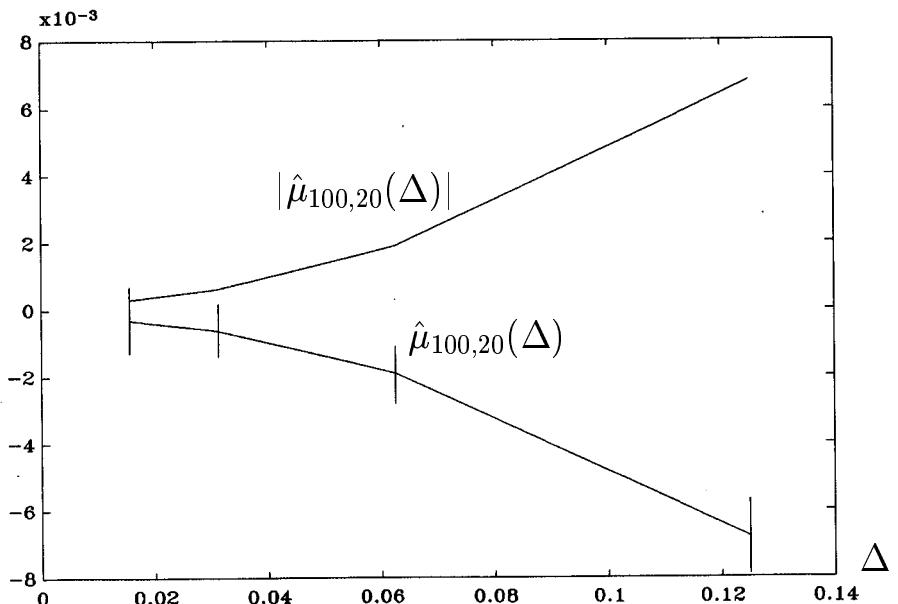


Рис. 10.17. Результат численного эксперимента 10.14.

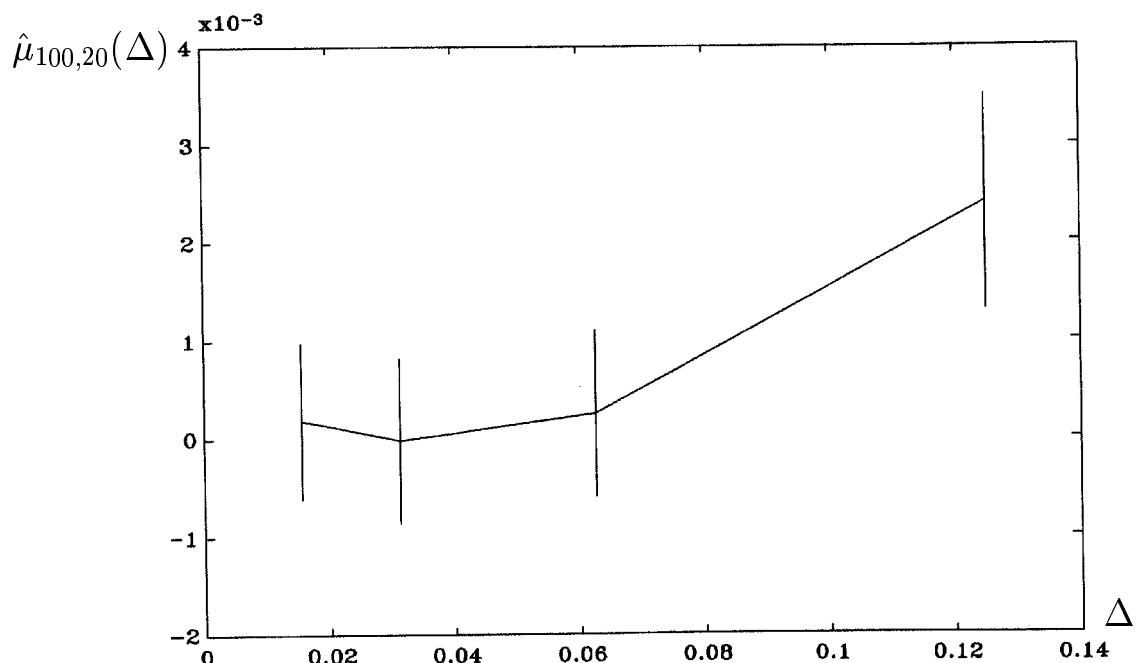


Рис. 10.18. Результат численного эксперимента 10.15.

## 10.8 О сходимости слабых численных методов

Сходимость слабых численных методов рассмотрим на примере численных методов порядка точности 2.0.

Приведем выражения условных математических ожиданий вида:

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^k \left( \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathbf{F}_{\tau_p} \right\}; \quad k = 1, 2, \dots, 5; \quad i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m,$$

где  $\mathbf{y}_{\tau_p}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} &= \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\} {}^1J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\ &+ {}^{(2)}G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} {}^2J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\} {}^1J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ &+ {}^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\} {}^1J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2}L^2\{\mathbf{y}_p\} \end{aligned}$$

(усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12) при  $s = \tau_{p+1}$ ,  $t = \tau_p$ ,  $r = 2$ ,  $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$  после отбрасывания остаточного члена), где  $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ .

Имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_1)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1)} | \mathbf{F}_{\tau_p} \right\} = \mathbf{a}^{(i_1)}\Delta + \frac{1}{2}L\mathbf{a}^{(i_1)}\Delta^2 + O(\Delta^3), \quad (10.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^2 \left( \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathbf{F}_{\tau_p} \right\} &= \Delta \sum_{j=1}^m \Sigma^{(i_2 j)} \Sigma^{(i_1 j)} + \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} \left\{ 2\mathbf{a}^{(i_1)}\mathbf{a}^{(i_2)} + \sum_{j=1}^m \left( \Sigma^{(i_1 j)} L \Sigma^{(i_2 j)} + \Sigma^{(i_1 j)} G_0^{(j)} \mathbf{a}^{(i_2)} + L \Sigma^{(i_1 j)} \Sigma^{(i_2 j)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G_0^{(j)} \mathbf{a}^{(i_1)} \Sigma^{(i_2 j)} \right) + \sum_{i,j=1}^m G_0^{(i)} \Sigma^{(i_1 j)} G_0^{(i)} \Sigma^{(i_2 j)} \right\} + O(\Delta^3), \quad (10.50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^3 \left( \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathbf{F}_{\tau_p} \right\} &= \Delta^2 \sum_{j=1}^m \left( \mathbf{a}^{(i_1)} \Sigma^{(i_2 j)} \Sigma^{(i_3 j)} + \mathbf{a}^{(i_2)} \Sigma^{(i_1 j)} \Sigma^{(i_3 j)} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{a}^{(i_3)} \Sigma^{(i_1 j)} \Sigma^{(i_2 j)} \right) + \sum_{i,j,k,l=1}^m \left( \Sigma^{(i_1 i)} \Sigma^{(i_2 j)} G_0^{(k)} \Sigma^{(i_3 l)} + \Sigma^{(i_1 i)} \Sigma^{(i_3 j)} G_0^{(k)} \Sigma^{(i_2 l)} + \right. \\ &\quad \left. + \Sigma^{(i_2 i)} \Sigma^{(i_3 j)} G_0^{(k)} \Sigma^{(i_1 l)} \right) G^{(ijkl)}(\Delta) + O(\Delta^3), \quad (10.51) \end{aligned}$$

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^4 \left( \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathbf{F}_{\tau_p} \right\} = \Delta^2 \sum_{k,q=1}^m \left( \Sigma^{(i_1 k)} \Sigma^{(i_2 k)} \Sigma^{(i_3 q)} \Sigma^{(i_4 q)} + \right.$$

$$+ \sum^{(i_1 k)} \sum^{(i_2 q)} \sum^{(i_3 k)} \sum^{(i_4 q)} + \sum^{(i_1 k)} \sum^{(i_2 q)} \sum^{(i_3 q)} \sum^{(i_4 k)} \Big) + \\ + \sum_{i,j,k,l=1}^m \sum^{(i_1 i)} \sum^{(i_2 j)} \sum^{(i_3 k)} \sum^{(i_4 l)} Q^{ijkl}(\Delta) + O(\Delta^3), \quad (10.52)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^5 \left( \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathbf{F}_{\tau_p} \right\} = O(\Delta^3), \quad (10.53)$$

где

$$G^{ijkl}(\Delta) = \begin{cases} \Delta^2 & \text{при } i = j = k = l \\ \Delta^2/2 & \text{при } k \neq l, i = k, j = l \text{ или } k \neq l, i = l, j = k, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases},$$

$$Q^{ijkl}(\Delta) = \begin{cases} 3\Delta^2 & \text{при } i = j = k = l \\ \Delta^2 & \text{среди } i, j, k, l \text{ две пары равных чисел ;} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$ ; все функции в правых частях (10.49)–(10.53) вычислены в точке  $\mathbf{y}_{\tau_p}$ .

Нетрудно проверить, что для численной схемы (10.8) получаем такие же по виду выражения для условных моментов

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^k \left( \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathbf{F}_{\tau_p} \right\}; \quad k = 1, 2, \dots, 5; \quad i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m,$$

как и (10.49)–(10.53). Далее, используя теорему 10.2, можно показать, что численный метод (10.8) имеет порядок слабой сходимости 2.0.

Если мы рассматриваем явные конечно-разностные слабые численные методы (10.36), (10.38), то с помощью обычного разложения Тейлора правые части данных численных методов могут быть приведены к выражениям, с помощью которых нетрудно получить равенства вида (10.49)–(10.53) для численных методов (10.36), (10.38). Далее слабая сходимость

численных методов (10.36), (10.38) порядка точности 2.0 проверяется аналогично тому, как это делается для численного метода (10.8) [148]. По рассмотренной схеме можно также обосновать сходимость слабых численных методов типа "предсказатель–корректор".

Поясним теперь, как обосновывается сходимость неявных слабых численных методов на примере слабых численных методов порядка точности 2.0.

Используя разложение Тейлора–Ито и слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, можно получить следующее приближенное представление [148]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{x}_{\tau_p} &\approx \left\{ \tilde{\alpha} \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \right\} \Delta + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m G_0^{(i)} \Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \left( \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ij)} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \left( \Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \frac{\Delta}{2} \left( L \Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - 2\tilde{\alpha}) G_0^{(j)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \right) \right) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - 2\tilde{\alpha}) \left\{ \tilde{\beta} L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\beta}) L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) \right\} \Delta^2, \end{aligned} \quad (10.54)$$

где  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in [0, 1]$ ; знак " $\approx$ " означает, что левая и правая части (10.54) имеют одинаковые условные моменты, необходимые для обеспечения слабой сходимости порядка 2.0 численной схемы (10.42) (см. теорему 10.2); случайные величины  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}, V_p^{(ij)}$  такие же, как в (10.8). С помощью представления (10.54) и теоремы 10.2 можно доказать слабую сходимость порядка 2.0 семейства неявных численных методов (10.42), а с помощью обычного разложения Тейлора и тех же аргументов можно доказать слабую сходимость порядка 2.0 неявных конечно-разностных численных схем (10.43)–(10.46). Более подробно сходимость слабых численных методов рассмотрена в [76], [148].

## 10.9 Устойчивость слабых численных методов в случае мультипликативного шума

При решении прикладных задач СДУ с мультипликативным шумом встречаются отнюдь не реже СДУ с аддитивным шумом. В связи с этим

возникает необходимость построения концепции устойчивости численных методов решения СДУ с мультипликативным шумом.

В частности, в [136], [137] предлагается рассматривать устойчивость численных методов в случае мультипликативного шума на следующем классе тестовых СДУ Стратоновича:

$$dx_t = (1 - \alpha)\lambda x_t dt + \sqrt{\alpha}\gamma x_t d^* f_t, \quad (10.55)$$

где  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ;  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ;  $f_t$  — скалярный стандартный винеровский процесс;  $\alpha \in [0, 2]$ ;  $i$  — мнимая единица. Параметр  $\alpha$  регулирует вес сносового и диффузационного слагаемых в правой части (10.55).

Выберем следующие значения  $\gamma_1, \gamma_2$  [136], [137]:

$$\gamma_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda_1)}, \quad \gamma_2 = -\lambda_2/(2\gamma_1), \quad \gamma^2 = \lambda.$$

Концепция слабых численных методов позволяет изучать устойчивость численных методов с неявностью не только в систематических, но и в стохастических членах относительно класса (10.55) тестовых уравнений. Именно такие слабые численные методы, как будет видно далее, обладают [136], [137] наилучшей устойчивостью. Возможность применения слабых численных методов с неявностью в стохастических членах к СДУ (10.55) объясняется возможностью выбора ограниченных случайных величин, входящих в рассматриваемые численные методы и играющих роль слабых аппроксимаций стохастических интегралов Ито. Более детально этот вопрос рассмотрен в [148] (С. 336–337).

Предположим, что применение некоторой численной схемы с постоянным шагом интегрирования  $\Delta$  к тестовому уравнению (10.55) дает следующий результат [136], [137]:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = G(\lambda\Delta, \alpha)\mathbf{y}_{\tau_p}, \quad (10.56)$$

где  $G$  — случайная комплекснозначная функция, которая независима от  $\mathbf{y}_{\tau_0}, \mathbf{y}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}$ ;  $\tau_p = p\Delta$ ;  $p = 0, 1, \dots, N - 1$ .

В [136], [137] вводится область сильной устойчивости  $\Gamma_\alpha$  численной схемы, которая является подмножеством комплексной плоскости  $C$  и определяется равенством

$$\Gamma_\alpha = \{\lambda\Delta \in C : \operatorname{Re}(\lambda) < 0, \operatorname{ess}_\omega \sup |G(\lambda\Delta, \alpha)|^2 < 1\}, \quad (10.57)$$

где  $\text{ess}_{\omega}\sup$  — essential supremum по всем  $\omega \in \Omega$ .

Если для данной численной схемы область  $\Gamma_\alpha$  при некотором  $\alpha \in [0, 2]$  содержит всю левую полуплоскость комплексной плоскости  $C$ , то соответствующую численную схему будем называть сильно  $A$ -устойчивой [136], [137] при данном  $\alpha \in [0, 2]$ .

Главное различие при исследовании устойчивости численных методов решения СДУ с аддитивными и мультипликативными шумами заключается в том, что в случае мультипликативного шума в выражение функции  $G$  из (10.56) входят случайные величины, а в случае аддитивного шума функция  $G$  из (9.67) является неслучайной.

Отметим, что, очевидно, класс тестовых СДУ, относительно которого исследуется устойчивость численных методов, сам по себе должен обладать хорошей устойчивостью решений. Кроме того, устойчивость решений тестовых уравнений должна наблюдаться при  $\text{Re}(\lambda) < 0$  (см. (10.57)) и в достаточно широком диапазоне изменения  $\alpha$ . В связи с этим поясним, почему выбор класса (10.55) [136], [137] тестовых уравнений оправдан.

Поскольку точное решение уравнения (10.55) имеет вид [137]:

$$x_t = \exp((1 - \alpha)\lambda t + \sqrt{\alpha}\gamma f_t) x_0,$$

то [136], [137]:

$$\begin{aligned} (x_t)^\nu &= (x_0)^\nu + \int_0^t \nu(1 - \alpha)\lambda(x_s)^\nu ds + \int_0^{*t} \nu\sqrt{\alpha}\gamma(x_s)^\nu df_s = \\ &= (x_0)^\nu + \int_0^t (\nu(1 - \alpha)\lambda + 0.5\nu^2\alpha\gamma^2)(x_s)^\nu ds + \\ &\quad + \int_0^t \nu\sqrt{\alpha}\gamma(x_s)^\nu df_s \text{ с. в. 1, } \nu \geq 0. \end{aligned} \quad (10.58)$$

С помощью (10.58) получаем

$$|\mathbf{M}\{(x_t)^\nu\}| = |\mathbf{M}\{(x_0)^\nu\}| \exp(\lambda_1 t \nu (1 + \alpha (0.5 \nu - 1))). \quad (10.59)$$

Это означает, что условие  $\lambda_1 = \text{Re}(\lambda) \leq 0$  при  $\nu \geq 0$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  обеспечивает выполнение оценки [136], [137]:

$$|\mathbf{M}\{(x_t)^\nu\}| \leq |\mathbf{M}\{(x_0)^\nu\}|,$$

которая означает устойчивость всех моментов решения тестового уравнения (10.55). Если  $\alpha \in [1, 2]$ , то согласно (10.59) имеем устойчивость моментов  $x_t$  порядка  $\nu \geq 2(1 - 1/\alpha)$  [136], [137].

В [136], [137] найдены точные выражения функции

$$H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess}_\omega \sup |G(\lambda\Delta, \alpha)|^2$$

для явного, полуяявного, полностью неявного, симметричных и суперяявных слабых методов Эйлера. Кроме того, в [136], [137] визуализированы в координатах  $\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta, \alpha$  семейства областей  $\Gamma_\alpha$  сильной устойчивости для указанных численных методов.

Для явного слабого метода Эйлера

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + a(y_{\tau_p}, \tau_p)\Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\sqrt{\Delta}\zeta_p \quad (10.60)$$

(здесь и далее  $\tau_p = p\Delta; p = 0, 1, \dots, N - 1; a, \sigma : \Re^1 \times [0, T] \rightarrow \Re^1; \zeta_p$  — независимые случайные величины, для которых  $P\{\zeta_p = \pm 1\} = 1/2$ ) функция  $H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)$  имеет вид [136], [137]:

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) &= (1 + (1 - \alpha/2)\lambda_1\Delta)^2 + (1 - \alpha/2)^2(\lambda_2\Delta)^2 + \\ &+ \alpha|\lambda|\Delta + \sqrt{2\alpha\Delta(|\lambda| + \lambda_1)}(1 + (1 - \alpha/2)|\lambda|\Delta); \quad \alpha \in [0, 2]. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Из (10.61) следует, что при  $\alpha = 0$  (детерминированный случай) область  $\Gamma_\alpha$  — внутренность круга с центром в точке  $(-1, 0)$  и с радиусом 1. Для фиксированного  $\alpha \in (0, 1)$  область  $\Gamma_\alpha$  — внутренность соответствующего эллипса, симметричного вдоль оси  $\lambda_1\Delta$ . При  $\alpha \geq 1$  численный метод (10.60) неустойчив по определению (10.57).

Для полуяявного слабого метода Эйлера

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + a(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\sqrt{\Delta}\zeta_p \quad (10.62)$$

функция  $H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta); \alpha \in [0, 2]$  имеет вид [136], [137]

$$H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) = \frac{1 + \sqrt{2\alpha\Delta(|\lambda| + \lambda_1)} + \alpha|\lambda|\Delta}{(1 - (1 - \alpha/2)\lambda_1\Delta)^2 + (1 - \alpha/2)^2(\lambda_2\Delta)^2}. \quad (10.63)$$

Согласно (10.63) при  $\alpha = 0$  область  $\Gamma_\alpha$  — внешность круга с центром в точке  $(1, 0)$  и с радиусом 1. При изменении  $\alpha$  на отрезке  $[0, 1]$  семейство областей  $\Gamma_\alpha$  в координатах  $\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta, \alpha$  представляет собой внешность соответствующей поверхности [136], [137], расширяющейся с ростом  $\alpha$ . Отметим [136], что при  $\alpha \in [0, 0.2]$  численный метод (10.62) сильно  $A$ -устойчив. При росте  $\alpha$ , когда  $\alpha > 0.2$ , область, в которой численный метод (10.62) не является сильно устойчивым, увеличивается и распространяется в левую полуплоскость комплексной плоскости  $C$  [136].

Приведенные результаты показывают, что при достаточно больших  $\alpha$  и достаточно малых  $\Delta$  численные методы (10.60), (10.62) оказываются неустойчивыми по критерию (10.57), однако численный метод (10.62) все же несколько более устойчив, чем численный метод (10.60).

Рассмотрим два симметричных слабых метода Эйлера [136]:

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \frac{1}{2} \{a(y_{\tau_p}, \tau_p) + a(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\} \Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p) \sqrt{\Delta} \zeta_p, \quad (10.64)$$

$$\begin{aligned} y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \frac{1}{2} \{\bar{a}(y_{\tau_p}, \tau_p) + \bar{a}(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\} \Delta + \\ + \frac{1}{2} \{\sigma(y_{\tau_p}, \tau_p) + \sigma(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\} \sqrt{\Delta} \zeta_p, \end{aligned} \quad (10.65)$$

где

$$\bar{a}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} a(x, t) - \frac{1}{2} \sigma(x, t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t).$$

При  $\alpha = 0$  численные методы (10.64), (10.65) являются сильно  $A$ -устойчивыми. Однако при росте  $\alpha$  вплоть до единицы области  $\Gamma_\alpha$  сильной устойчивости этих численных методов уменьшаются, причем численный метод (10.65) всюду в  $C$  не является сильно устойчивым при  $\alpha \geq 1$  [136].

Рассмотрим семейство слабых методов Эйлера [136], [137] вида

$$\begin{aligned} y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \{k\bar{a}_\eta(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - k)\bar{a}_\eta(y_{\tau_p}, \tau_p)\} \Delta + \\ + \{\eta\sigma(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - \eta)\sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\} \sqrt{\Delta} \zeta_p, \end{aligned} \quad (10.66)$$

где

$$\bar{a}_\eta(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} a(x, t) - \eta\sigma(x, t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t);$$

$k, \eta$  — вещественные параметры, которые могут быть отрицательными и превышающими по модулю единицу. Напомним, что если  $k$  или  $\eta$  не принадлежат отрезку  $[0, 1]$ , то численный метод (10.66) называется [137] супернеявным методом Эйлера.

Пусть  $k = \eta = 1$  в (10.66) (полностью неявный слабый метод Эйлера). Для этого численного метода имеем [137]

$$H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) = \left| (1 - (1 - 3/(2\alpha))\lambda_1\Delta)^2 + (1 - 3/(2\alpha))^2(\lambda_2\Delta)^2 + \alpha|\lambda|\Delta - \sqrt{2\alpha\Delta(|\lambda| + \lambda_1)} |1 - (1 - 3/(2\alpha))|\lambda|\Delta \right|^{-1}. \quad (10.67)$$

Согласно (10.67) [137] при увеличении  $\alpha$  от нуля до  $\alpha \approx 0.3$  полностью неявный слабый метод Эйлера сильно  $A$ -устойчив. При дальнейшем увеличении  $\alpha$  до единицы область его сильной устойчивости постепенно уменьшается, однако при  $\alpha > 1$  она вновь увеличивается. При достаточно больших  $\alpha$  ( $\alpha \approx 2$ ) полностью неявный слабый метод Эйлера "почти" сильно  $A$ -устойчив [137].

Поскольку  $\alpha = 2$  соответствует тестовому СДУ Ито без сноса, то полностью неявный слабый метод Эйлера целесообразно применять к такого типа уравнениям [137].

В [137] показано, что супернеявные слабые методы Эйлера при  $k = 1$ ,  $\eta = -2$  и  $k = 1$ ,  $\eta = -5$  обладают существенно большей степенью сильной устойчивости (они "почти" сильно  $A$ -устойчивы для всех  $\alpha \in [0, 1]$ ), чем полностью неявный слабый метод Эйлера ( $k = \eta = 1$ ) и тем более явный слабый метод Эйлера.

Таким образом, супернеявные слабые методы Эйлера, в частности, соответствующие  $k = 1$ ,  $\eta = -2$  и  $k = 1$ ,  $\eta = -5$ , оказываются более предпочтительными по устойчивости, чем другие, рассмотренные ранее модификации метода Эйлера.

## 10.10 Численное моделирование СДУ Ито с использованием метода Монте–Карло и уменьшение дисперсии

Рассмотрим функционал вида  $M\{g(x_T)\}$ , где  $x_t$ ,  $t \in [0, T]$  — решение СДУ Ито (7.18), а  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  — некоторая заданная функция.

Пусть  $\mathbf{y}_{\tau_p}; p = 0, 1, \dots, N$  — слабая дискретная аппроксимация процесса  $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$ , которая соответствует разбиению  $\{\tau_p\}_{p=0}^N$  промежутка  $[0, T]$  с рангом дробления  $\Delta_N$ , причем  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ . Согласно методу Монте–Карло оценка для величины  $M\{g(\mathbf{y}_T)\}$  имеет вид

$$\zeta_M = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M g(\mathbf{y}_T(\omega_j)),$$

$\mathbf{y}_T(\omega_j); j = 1, \dots, M$  — независимые реализации случайной величины  $\mathbf{y}_T$ .

Введем ошибку  $\varepsilon$ , соответствующую разнице между истинным значением функционала  $M\{g(\mathbf{x}_T)\}$  и его оценкой  $\zeta_M$  [76], [148]:

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_M - M\{g(\mathbf{x}_T)\} = \varepsilon_{\text{syst}} + \varepsilon_{\text{stat}},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{syst}} &= M\{g(\mathbf{y}_T)\} - M\{g(\mathbf{x}_T)\}, \\ \varepsilon_{\text{stat}} &= \varepsilon - \varepsilon_{\text{syst}} = \zeta_M - M\{g(\mathbf{y}_T)\}. \end{aligned}$$

Систематическая ошибка  $\varepsilon_{\text{syst}}$  определяется используемой слабой численной схемой и удовлетворяет оценке

$$|\varepsilon_{\text{syst}}| \leq C(\Delta_N)^\gamma,$$

где  $C < \infty$  — постоянная, которая не зависит от  $\Delta_N$ , а  $\gamma > 0$  — порядок соответствующего слабого численного метода.

Статистическая ошибка  $\varepsilon_{\text{stat}}$  при  $M \rightarrow \infty$  очевидно является асимптотически нормальной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией вида

$$D\{\varepsilon_{\text{stat}}\} = \frac{1}{M} D\{g(\mathbf{y}_T)\}.$$

Отметим, что длина доверительного интервала убывает с ростом числа  $M$  независимых реализаций достаточно медленно — со скоростью  $1/\sqrt{M}$ . Таким образом, для получения достаточно малого доверительного интервала необходимо, чтобы дисперсия  $D\{g(\mathbf{y}_T)\}$  была небольшой, поскольку длина доверительного интервала пропорциональна  $\sqrt{D\{g(\mathbf{y}_T)\}}$ .

В [76], [148] отмечается, что при использовании для моделирования процесса  $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$  слабых численных методов дисперсия  $D\{g(\mathbf{y}_T)\}$  оказывается достаточно близкой к дисперсии  $D\{g(\mathbf{x}_T)\}$ , которая, в свою очередь, зависит от функции  $g$  и конкретного СДУ Ито и в ряде случаев может

быть достаточно большой. В связи с этим возникает вопрос, возможно ли уменьшение дисперсии  $D\{g(\mathbf{x}_T)\}$ ?

В литературе [76], [148] известно несколько подходов к уменьшению такой дисперсии. Один из них был предложен Г.Н. Мильштейном в [76] (см. также [148]). Он основан на преобразовании Гирсанова исходной вероятностной меры  $P$  и переходе от процесса Ито  $\mathbf{x}_t$  к новому процессу Ито  $\hat{\mathbf{x}}_t$  и специальному корректирующему скалярному процессу  $z_t$  так, что

$$M\{g(\hat{\mathbf{x}}_T)z_T\} = M\{g(\mathbf{x}_T)\}.$$

При этом дисперсия  $D\{g(\hat{\mathbf{x}}_T)z_T\}$  может быть уменьшена путем специального выбора  $\hat{\mathbf{x}}_T$  [76], [148]. Рассмотрим данный подход подробнее, руководствуясь работами [76], [148].

Пусть заданы вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и поток  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \in [0, T]\}$ . Пусть также  $\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{x}} \in \Re^n; s \leq t \leq T$  — процесс Ито, являющийся решением следующего СДУ Ито:

$$\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_s^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{s, \mathbf{x}}, \tau) d\tau + \int_s^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{s, \mathbf{x}}, \tau) d\mathbf{f}_\tau,$$

где неслучайные функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^{n \times m}$  удовлетворяют условиям теоремы 1.6;  $\mathbf{f}_\tau, \tau \in [0, T]$  —  $m$ -мерный и  $\mathcal{F}_\tau$ -измеримый при каждом  $\tau \in [0, T]$  стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами;  $\mathbf{x} \in \Re^n$ .

Рассмотрим функционал вида

$$u(\mathbf{x}, s) = M\{g(\mathbf{x}_T^{s, \mathbf{x}})\}, \quad (10.68)$$

где  $g(\mathbf{x}) : \Re^n \rightarrow \Re^1$  — заданная функция. В соответствии с (10.68) нашей целью является аппроксимация  $u(\mathbf{x}, 0)$ .

Предположим, что функции  $g(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют условиям теоремы 2.6. Тогда функция  $u(\mathbf{x}, s)$  является решением задачи

$$Lu(\mathbf{x}, s) = 0, \quad u(\mathbf{y}, T) = g(\mathbf{y}), \quad (10.69)$$

для всех  $(\mathbf{x}, s) \in (0, T) \times \Re^n$ ,  $\mathbf{y} \in \Re^n$ , где

$$Lu(\mathbf{x}, s) = \frac{\partial u}{\partial s}(\mathbf{x}, s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, s) +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{l=1}^m \Sigma^{(il)}(\mathbf{x}, s) \Sigma^{(jl)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s).$$

В [76] предлагается использовать преобразование Гирсанова для преобразования исходной вероятностной меры  $P$  так, что процесс  $\hat{\mathbf{f}}_t$  с компонентами

$$\hat{\mathbf{f}}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)} - \int_0^t \mathbf{c}^{(i)}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\tau; \quad i = 1, \dots, m$$

оказывается винеровским относительно вероятностной меры  $\hat{P}$ , т. е. на новом вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{P})$ , мера  $\hat{P}$  абсолютно непрерывна относительно меры  $P$  и имеет производную Радона–Никодима вида

$$\frac{d\hat{P}}{dP} = \frac{z_t}{z_0}, \quad (10.70)$$

процессы Ито  $\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}}$  и  $z_t$  удовлетворяют следующим СДУ Ито:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_s^t \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\tau + \int_s^t \Sigma(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\hat{\mathbf{f}}_\tau, \quad (10.71)$$

$$z_t = z_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t z_\tau \mathbf{c}^{(j)}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\hat{\mathbf{f}}_\tau^{(j)}; \quad (10.72)$$

$z_0 \neq 0$ ;  $\mathbf{c}^{(j)}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^1$  — заданная функция.

Используя (10.70)–(10.72), нетрудно получить [76], [148], что

$$\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T^{0,\mathbf{x}})\} = \mathbb{M}\left\{g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}\right\}. \quad (10.73)$$

Если предположить, что существуют решения уравнений (10.71) и (10.72),  $u(\mathbf{x}, s) > 0$  при всех  $(\mathbf{x}, s) \in \Re^n \times [0, T]$ , и положить [76], [148]:

$$\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{x}, s) = -\frac{1}{u(\mathbf{x}, s)} \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s) \quad (10.74)$$

для всех  $(\mathbf{x}, s) \in \Re^n \times [0, T]$ ;  $i = 1, \dots, m$ , то с помощью (10.69), (10.71), (10.72), (10.74) и формулы Ито можно установить [76], [148], что

$$u(\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}}, t)z_t = u(\mathbf{x}, 0)z_0 \quad (10.75)$$

для всех  $t \in [0, T]$ . Теперь из (10.69) и (10.75) получаем

$$u(\mathbf{x}, 0) = g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}, \quad (10.76)$$

т. е. величина  $g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}})z_T/z_0$  неслучайна и, следовательно, имеет нулевую дисперсию.

Казалось бы, величину

$$\mathbb{M} \left\{ g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0} \right\}$$

можно численно смоделировать с помощью слабых численных методов решения системы уравнений (10.71) и (10.72). Однако при получении (10.76) мы использовали представление (10.74), в которое входит неизвестная функция  $u(\mathbf{x}, s)$  вида (10.68), являющаяся решением задачи (10.69), и аппроксимация значения которой при  $s = 0$  является нашей исходной целью. Тем не менее если по каким-либо соображениям подобрана функция  $\hat{u}(\mathbf{x}, s)$ , которая достаточно близка к функции  $u(\mathbf{x}, s)$ , то можно надеяться, что  $g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}})z_T/z_0$  окажется случайной величиной с достаточно малой дисперсией при следующем выборе функции  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{x}, s) = -\frac{1}{\hat{u}(\mathbf{x}, s)} \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s); \quad i = 1, \dots, m.$$

Теперь, при таком выборе функции  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s)$  с помощью слабых численных схем можно аппроксимировать величину

$$\mathbb{M} \left\{ g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0} \right\}$$

и тем самым аппроксимировать, согласно (10.73), функционал  $\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T^{0,\mathbf{x}})\}$ .

Мы предполагали ранее, что функция  $u$  является строго положительной. Это условие очевидно выполнено, если, в свою очередь, функция  $g$  строго положительна, что далеко не всегда выполнимо. В [76], [148] описан способ снятия условия  $g > 0$ .

Так, если функция  $g$  ограничена и не является строго положительной, то можно подобрать такую постоянную  $K \in (0, +\infty)$ , что функция  $g +$

$K$  будет строго положительной. Если же функция  $g$  не ограничена, то ее можно представить в виде разности двух неотрицательных функций  $g_+$  и  $g_-$  следующим образом

$$g = g_+ - g_- = \frac{1}{2} (g + |g|) - \frac{1}{2} (|g| - g).$$

Далее для некоторой постоянной  $K_1 \in (0, +\infty)$  функции  $g_+ + K_1$  и  $g_- + K_1$  будут строго положительными и при этом  $g = (g_+ + K_1) - (g_- + K_1)$ . Теперь очевидно, что описанный метод можно применять для строго положительных функций  $g + K$ ,  $g_+ + K_1$ ,  $g_- + K_1$ .

# Глава 11

## Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Линейные стохастические системы занимают особое место как в теории стохастических систем, так и в их приложениях в механике, электротехнике и других областях. Прикладная значимость линейных систем определяется тем, что они являются универсальным средством математического описания малых отклонений поведения реальных систем от номинальных режимов их функционирования. Теория стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений (ССЛСДУ) основывается на точных интегральных представлениях их решений и допускает применение специальных эффективных методов численного интегрирования. Настоящая глава посвящена методам численного моделирования ССЛСДУ и их практической реализации.

### 11.1 Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты

Рассмотрим систему линейных СДУ общего вида (СЛСДУОВ):

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t)) dt + \sum_{j=1}^m B_j(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(j)} + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (11.1)$$

где  $t \in [0, T]$ ;  $\mathbf{x}_t$  —  $n$ -мерный случайный процесс, являющийся решением СЛСДУОВ (11.1) с начальным условием  $\mathbf{x}_0$ ;  $\mathbf{f}_t$  —  $m$ -мерный стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ); начальное условие  $\mathbf{x}_0$  и матричные функции  $A(t)$ ,  $B_1(t), \dots, B_m(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{g}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  удовлетворяют условиям АI–АIII (теорема 1.6) существования и единственности решения СДУ Ито.

Если все матричные функции  $B_1(t), \dots, B_m(t)$  в (11.1) равны нулевой матрице, то система (11.1) принимает вид

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t)) dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (11.2)$$

и в дальнейшем называется системой линейных СДУ (СЛСДУ).

Если матричные функции  $\mathbf{g}(t)$  и  $\Sigma(t)$  в (11.1) равны нулевым матрицам соответствующих размеров, то СЛСДУОВ (11.1) преобразуется в следующую однородную СЛСДУ (ОСЛСДУ):

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \sum_{j=1}^m B_j(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(j)}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (11.3)$$

Систему (11.2) можно трактовать как систему СДУ Ито или Стратоновича (в обоих случаях получаем эквивалентные системы, поскольку стохастический интеграл Ито

$$\int_0^t \Sigma(\tau) d\mathbf{f}_\tau$$

с в. 1 равен соответствующему интегралу Стратоновича).

В связи с этим, часто применяемая в технической литературе форма записи системы (11.2) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t) + \Sigma(t)\mathbf{f}_t^\cdot, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega)$$

с белым шумом  $\mathbf{f}_t^\cdot$  в правой части не приводит к неоднозначности математического определения решений системы (11.2).

Линейные СДУ (ЛСДУ) исследовались в ряде работ. Так, в [17], [72], [106], [148], [187], [188], [220] рассматривались скалярные ЛСДУ. В этих работах получено интегральное представление решения скалярного ЛСДУ через фундаментальное решение, а также изучены свойства решений скалярных ЛСДУ. Точные решения некоторых скалярных ЛСДУ можно найти

в [84], [106], [126], [148]. В работах [17], [72], [84], [148], [228] выведены интегральные представления решений СЛСДУ и СЛСДУОВ через фундаментальную матрицу решений. В книге М. Арато [105] дано интегральное представление решений СЛСДУ с постоянными коэффициентами через матричную экспоненту и исследованы основные свойства этих систем. Кроме того, в [105] изучены дискретные линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами, для которых построен алгоритм численного моделирования. Вопросы, связанные с численным моделированием СЛСДУ, рассматривались также в работах [8], [226].

Настоящая глава посвящена построению численных методов решения стационарных СЛСДУ (ССЛСДУ), основанных на точном интегральном представлении их решений (определение ССЛСДУ будет дано далее). При этом рассматривается ряд вопросов, связанных с особенностями численной реализации построенных численных методов.

### 11.1.1 Интегральные представления решений СЛСДУ

Рассмотрим хорошо известные результаты (см., например, [17], [72], [84], [148], [228]) по интегральному представлению решений СЛСДУОВ.

Сначала обратимся к скалярному случаю:

$$dx_t = (a(t)x_t + g(t))dt + (b(t)x_t + \sigma(t))df_t, \quad (11.4)$$

где  $a(t), b(t), g(t), \sigma(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;  $x_t, f_t \in \mathbb{R}^1$ . Пусть  $X_{t,t_0} \in \mathbb{R}^1$ ;  $0 \leq t_0 \leq t \leq T$  — фундаментальное решение однородного уравнения

$$dx_t = a(t)x_t dt + b(t)x_t df_t, \quad (11.5)$$

которое удовлетворяет условию  $X_{t_0,t_0} = 1$ . Тогда

$$dX_{t,t_0} = a(t)X_{t,t_0}dt + b(t)X_{t,t_0}df_t. \quad (11.6)$$

Рассмотрим случайный процесс  $\ln(X_{t,t_0})$  и найдем с помощью формулы Ито и соотношения (11.6) его стохастический дифференциал:

$$d\ln(X_{t,t_0}) = \left( a(t) - \frac{1}{2}b^2(t) \right) dt + b(t)df_t. \quad (11.7)$$

Правая часть (11.7) содержит только известные функции, и поэтому  $X_{t,t_0}$  может быть найдено из (11.7):

$$X_{t,t_0} = \exp \left( \int_{t_0}^t \left( a(s) - \frac{1}{2}b^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b(s)df_s \right). \quad (11.8)$$

Воспользовавшись фундаментальным решением  $X_{t,t_0}$  однородного уравнения (11.5), найдем интегральное представление решения ЛСДУ (11.4). С этой целью рассмотрим случайный процесс  $X_{t,t_0}^{-1}x_t$ , где  $x_t$  — решение ЛСДУ (11.4), и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал. Поскольку из формулы Ито и (11.6) следует равенство

$$dX_{t,t_0}^{-1} = (-a(t) + b^2(t)) X_{t,t_0}^{-1} dt - b(t) X_{t,t_0}^{-1} df_t, \quad (11.9)$$

то по формуле Ито и (11.4), (11.9) получаем

$$d(X_{t,t_0}^{-1}x_t) = (g(t) - b(t)\sigma(t)) X_{t,t_0}^{-1} dt + \sigma(t) X_{t,t_0}^{-1} df_t.$$

Из последнего равенства с учетом того, что  $X_{t_0,t_0} = 1$ , имеем следующее интегральное представление решения ЛСДУ (11.4):

$$x_t = X_{t,t_0} \left( x_{t_0} + \int_{t_0}^t (g(s) - b(s)\sigma(s)) X_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t \sigma(s) X_{s,t_0}^{-1} df_s \right), \quad (11.10)$$

где

$$X_{t,t_0} = \exp \left( \int_{t_0}^t \left( a(s) - \frac{1}{2} b^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b(s) df_s \right).$$

Перейдем к рассмотрению СЛСДУОВ (11.1). Обобщив (11.10) на случай СЛСДУОВ (11.1), получим

$$\mathbf{x}_t = X_{t,t_0} \left( \mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t X_{s,t_0}^{-1} \left( \mathbf{g}(s) - \sum_{j=1}^m B_j(s) \Sigma_j(s) \right) ds + \int_{t_0}^t X_{s,t_0}^{-1} \Sigma(s) d\mathbf{f}_s \right), \quad (11.11)$$

где  $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ ;  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — решение СЛСДУОВ (11.1);  $X_{t,t_0} \in \Re^{n \times n}$  — фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3);  $\Sigma_j(t)$  —  $j$ -й столбец матрицы  $\Sigma(t)$ ;  $\mathbf{f}_s$  —  $m$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_s^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ); остальные обозначения, входящие в (11.11), такие же, как в (11.1).

Таким образом, проблема отыскания решения СЛСДУОВ (11.1) свелась к отысканию фундаментальной матрицы решений ОСЛСДУ (11.3). Известно (см., например, [148]), что фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3) может быть найдена в том случае, когда матрицы  $A(t), B_j(t)$ ;  $j = 1, \dots, m$  постоянны и попарно коммутируют, т. е.  $AB_j = B_jA$ ,  $B_iB_j = B_jB_i$ ;  $i, j = 1, \dots, m$ . В этом случае фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3) имеет вид

$$X_{t,t_0} = \exp \left( \left( A - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m B_j^2 \right) (t - t_0) + \sum_{j=1}^m B_j \left( \mathbf{f}_t^{(j)} - \mathbf{f}_{t_0}^{(j)} \right) \right), \quad (11.12)$$

где  $\exp(C)$  — матричная экспонента [125]:

$$\exp(C) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!},$$

$C$  — квадратная матрица;  $C^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$  — единичная матрица.

Если матрицы  $B_j(t); j = 1, \dots, m$  нулевые, то из (11.12) получаем  $X_{t,t_0} = \exp(A(t - t_0))$ .

Стационарной СЛСДУ (ССЛСДУ) называем систему (11.2), если  $A(t) \equiv A$ ,  $\Sigma(t) \equiv \Sigma$ :

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t)) dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (11.13)$$

В этом случае фундаментальная матрица решений  $X_{t,t_0}$  представляет собой матричную экспоненту:

$$X_{t,t_0} = \exp(A(t - t_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t - t_0)^k}{k!}.$$

Формулу (11.11) запишем при этом в виде

$$\mathbf{x}_t = \exp(A(t - t_0))\mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t \exp(A(t - s))\mathbf{g}(s)ds + \int_{t_0}^t \exp(A(t - s))\Sigma d\mathbf{f}_s, \quad (11.14)$$

где  $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ .

Формулу (11.14) в дальнейшем иногда будем называть формулой Коши в силу ее некоторого внешнего сходства с формулой Коши решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Таким образом, если в случае ССЛСДУ (11.13) взять временную сетку  $\{\tau_k\}_{k=0}^K$  такую, что  $\tau_k = k\Delta$ ;  $K\Delta = T$ ;  $k = 0, 1, \dots, K$ , где  $\Delta$  — шаг сетки, и ввести обозначения

$$\tilde{A}(\Delta) = \exp(A\Delta), \quad \tilde{\mathbf{g}}(k, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\Delta \exp(A(\Delta - s))\mathbf{g}(k\Delta + s)ds,$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\Delta \exp(A(\Delta - s))\Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s},$$

то решение системы (11.13) в дискретные моменты времени  $\tau_k$  может быть найдено с помощью рекуррентной формулы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}(\Delta)\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{g}}(k, \Delta) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (11.15)$$

где  $\mathbf{x}_{\tau_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$ ;  $\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)$  — векторный гауссовский дискретный случайный процесс такой, что  $\mathbb{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\} = 0$ ,  $\mathbb{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_l^\top(\Delta)\} = \mathbf{1}_{\{k=l\}}D_f(\Delta)$ , с дисперсионной матрицей

$$D_f(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_k^\top(\Delta)\} = \int_0^\Delta \exp(A(\Delta-s))\Sigma\Sigma^\top \exp(A^\top(\Delta-s))ds, \quad (11.16)$$

равной при  $t = \Delta$  решению уравнения вида

$$\frac{dD_f}{dt}(t) = AD_f(t) + D_f(t)A^\top + \Sigma\Sigma^\top, \quad D_f(0) = O_{n \times n}, \quad (11.17)$$

которое может быть получено с использованием формулы Ито; здесь  $O_{n \times n}$  — нулевая  $(n \times n)$ -матрица.

Если все собственные числа матрицы  $A$  лежат в левой полуплоскости:  $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ , где  $\lambda_i(A)$  — собственные числа матрицы  $A$ , то уравнение (11.17) имеет стационарное решение  $D_f(\infty)$ , удовлетворяющее следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$AD_f(\infty) + D_f(\infty)A^\top + \Sigma\Sigma^\top = 0.$$

### 11.1.2 Моментные характеристики решений СЛСДУ

Приведем известные в литературе (см., например, [17], [72], [84], [148], [228]) уравнения, которым удовлетворяют моментные характеристики решений СЛСДУ.

Введем обозначения  $\mathbb{M}\{\mathbf{x}_t\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_x(t)$ ,  $\mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_t$ ,  $\mathbb{M}\{\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^\top\} \stackrel{\text{def}}{=} Q_x(t)$ ,  $\mathbb{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t \overset{\circ}{\mathbf{x}}_\tau^\top\} \stackrel{\text{def}}{=} R_x(t, \tau)$ ,  $R_x(t, t) \stackrel{\text{def}}{=} D_x(t)$ .

В случае СЛСДУОВ из (11.1) при  $t \geq 0$  получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}_x}{dt}(t) &= A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t), \\ \frac{dQ_x}{dt}(t) &= A(t)Q_x(t) + Q_x(t)A^\top(t) + \sum_{i=1}^m B_i(t)Q_x(t)B_i^\top(t) + \\ &+ \mathbf{g}(t)\mathbf{m}_x^\top(t) + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{g}^\top(t) + \sum_{i=1}^m \left( B_i(t)\mathbf{m}_x(t)\Sigma_i^\top(t) + \right. \\ &\quad \left. + \Sigma_i(t)\mathbf{m}_x^\top(t)B_i(t) + \Sigma_i(t)\Sigma_i^\top(t) \right), \end{aligned} \quad (11.18)$$

где  $Q_x(0) = \mathbb{M}\{\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^\top\}$ ;  $\mathbf{m}_x(0) = \mathbb{M}\{\mathbf{x}_0\}$ .

Отметим, что уравнение (11.18) может быть получено с использованием формулы Ито.

Рассмотрим СЛСДУ (11.2). В этом случае при  $t \geq 0$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}_x}{dt}(t) &= A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{m}_x(0) = \mathbb{M}\{\mathbf{x}_0\}, \\ \frac{dD_x}{dt}(t) &= A(t)D_x(t) + D_x(t)A(t)^T + \Sigma(t)\Sigma^T(t), \quad D_x(0) = \mathbb{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \overset{\circ}{\mathbf{x}}_0^T\}, \\ \frac{\partial R_x}{\partial t}(t, \tau) &= A(t)R_x(t, \tau) \text{ при } t \geq \tau \geq 0, \\ R(t, \tau) &= R^T(\tau, t) \text{ при } 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned}$$

В случае ССЛСДУ (11.13) при  $t \geq 0$  получим:

$$\frac{d\mathbf{m}_x}{dt}(t) = A\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{m}_x(0) = \mathbb{M}\{\mathbf{x}_0\},$$

или в интегральной форме,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_x(t) &= \exp(At)\mathbf{m}_x(0) + \int_0^t \exp(A(t-\tau))\mathbf{g}(\tau)d\tau, \\ \frac{dD_x}{dt}(t) &= AD_x(t) + D_x(t)A^T + \Sigma\Sigma^T, \quad D_x(0) = \mathbb{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \overset{\circ}{\mathbf{x}}_0^T\}, \quad (11.19) \\ \frac{\partial R_x}{\partial t}(t, \tau) &= AR_x(t, \tau) \text{ при } t \geq \tau \geq 0, \\ R(t, \tau) &= R^T(\tau, t) \text{ при } 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в данном случае

$$R_x(t, \tau) = \begin{cases} \exp(A(t-\tau))D_x(\tau) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(t)\exp(A^T(\tau-t)) & \text{при } \tau \geq t \end{cases}.$$

Для гурвицовой матрицы  $A$  матричное уравнение (11.19) имеет стационарное решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений

$$AD_x(\infty) + D_x(\infty)A^T + \Sigma\Sigma^T = 0.$$

Пусть выходными переменными ССЛСДУ (11.13) являются линейные комбинации  $\mathbf{y}_t = H^T \mathbf{x}_t \in \Re^l$  компонент вектора состояния  $\mathbf{x}_t$ , где  $H \in \Re^{n \times l}$  — числовая матрица.

Тогда моментные характеристики процесса  $\mathbf{y}_t$  определяются по формулам

$$\mathbb{M}\{\mathbf{y}_t\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_y(t) = H^\top \mathbf{m}_x(t),$$

$$\mathbb{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t \overset{\circ}{\mathbf{y}}_\tau^\top\} \stackrel{\text{def}}{=} R_y(t, \tau) = H^\top R_x(t, \tau) H, \quad R_y(t, t) \stackrel{\text{def}}{=} D_y(t) = H^\top D_x(t) H. \quad (11.20)$$

## 11.2 Метод численного моделирования ССЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении

В данном разделе изучается метод численного решения ССЛСДУ, основанный на представлении их решений по формуле Коши и спектральном разложении дисперсионной матрицы случайной составляющей ССЛСДУ.

### 11.2.1 Общий подход к моделированию. Структурирование проблемы

Рассмотрим СЛСДУ вида (11.2) в предположениях:

$$A(t) \equiv A, \quad \mathbf{g}(t) \equiv B\mathbf{u}(t), \quad \Sigma(t) \equiv \Sigma. \quad (11.21)$$

Выходом системы будем считать линейную комбинацию компонент вектора состояния системы. С учетом (11.21) система уравнений (11.2) может быть переписана в виде

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t)) dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{y}_t = H^\top \mathbf{x}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (11.22)$$

Здесь  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — решение ССЛСДУ (11.22);  $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \Re^k$  — детерминированное внешнее возмущение;  $\mathbf{y}_t \in \Re^l$  — процесс на выходе, численная реализация которого является целью численного моделирования;  $H \in \Re^{n \times l}$ ,  $A \in \Re^{n \times n}$ ,  $\Sigma \in \Re^{n \times m}$ ,  $B \in \Re^{n \times k}$  — числовые матрицы;  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим временную сетку  $\{\tau_k\}_{k=0}^K$  с постоянным шагом  $\Delta > 0$ , т. е. такую, что  $\tau_k = k\Delta$ ,  $K\Delta = T$ ;  $k = 0, 1, \dots, K$ .

Интегральное представление решения системы (11.22) на этой временной сетке с постоянным шагом  $\Delta$  запишем в форме Коши в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \exp(A\Delta)\mathbf{x}_k + \int_0^{\Delta} \exp(A(\Delta-\tau))B\mathbf{u}(\tau+k\Delta)d\tau + \int_0^{\Delta} \exp(A(\Delta-\tau))\Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \quad (11.23)$$

где  $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k; k = 0, 1, \dots, K; K\Delta = T$ .

Исходя из смысла слагаемых, входящих в правую часть (11.23), будем называть первое слагаемое *переходной*, или *динамической*, составляющей, второе — *систематической* составляющей, а третье — *случайной* составляющей векторного случайного процесса  $\mathbf{x}_k; k = 0, 1, \dots, K$ . Рассмотрим особенности численного моделирования каждой из этих составляющих.

### 11.2.2 Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения

Вычисление динамической составляющей процесса  $\mathbf{x}_k; k = 0, 1, \dots, K$  на каждом шаге численного моделирования требует знания матрицы  $\exp(A\Delta)$ . По определению матричная экспонента задается в виде ряда:

$$\exp(A\Delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i \Delta^i}{i!}, \quad (11.24)$$

где  $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$  — единичная матрица. Однако использование формулы (11.24) непосредственно для вычисления  $e^{A\Delta}$  не рационально, так как достижение приемлемой точности вычисления матричной экспоненты требует в этом случае выполнения большого числа операций матричного умножения и сложения. Для эффективного вычисления матричной экспоненты в [13] рекомендуется использовать специальный алгоритм "быстрого" вычисления, основанный на формуле

$$\exp(A\Delta) = \left( \exp\left(A\frac{\Delta}{2^M}\right) \right)^{2^M} \approx \left( \sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!} \left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^i \right)^{2^M}, \quad (11.25)$$

где  $N \geq 1, M \geq 0$  — некоторые целые числа.

Отметим, что если  $M = 0, N = \infty$ , то правая часть формулы (11.25) совпадает с правой частью формулы (11.24). При  $M = 2, 3, \dots$  величина  $\Delta/(2^M)$  значительно меньше  $\Delta$ , и, следовательно, для аппроксимации с достаточной точностью матричной экспоненты  $\exp(A\Delta)$  число  $N + 1$  членов суммы в (11.25) может быть взято значительно меньшим, чем при  $M = 0$ .

В работе [6] показано, что для вычисления матричной экспоненты  $\exp(A\Delta)$  по формуле (11.25) с точностью  $\varepsilon$ :

$$\|\exp(A\Delta) - \exp_*(A\Delta)\| \leq \varepsilon$$

достаточно выбрать такие целые  $N \geq 1$  и  $M \geq 0$ , при которых выполняется условие

$$\frac{\exp(\|A\|\Delta) (\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{MN}(N+1)!} \leq \varepsilon, \quad (11.26)$$

поскольку [6]:

$$\|\exp(A\Delta) - \exp_*(A\Delta)\| \leq \frac{\exp(\|A\|\Delta) (\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{MN}(N+1)!}$$

при условии, что

$$\frac{(2^{-M}\|A\|\Delta)^{N+1}}{(N+1)!} \leq 1. \quad (11.27)$$

Здесь

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A^{(ij)}|,$$

$A^{(ij)}$  — компонента матрицы  $A$ ,  $\exp_*(A\Delta)$  — приближенное значение  $\exp(A\Delta)$ .

В работе [33] изучаются задачи оптимизации вычисления матричной экспоненты с учетом условия (11.27).

Положим

$$F(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\exp(\|A\|\Delta) (\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{MN}(N+1)!},$$

$$G(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(2^{-M}\|A\|\Delta)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Рассмотрим следующие задачи оптимизации:

$$\min_{M, N} \{M + N : F(M, N) \leq \varepsilon, G(M, N) \leq 1; M = 0, 1, \dots; N = 1, 2, \dots\}, \quad (11.28)$$

$$\min_{M, N} \{F(M, N) : M + N \leq L, G(M, N) \leq 1; M = 0, 1, \dots; N = 1, 2, \dots\}, \quad (11.29)$$

где  $L$  — заданная постоянная.

Задача (11.28) является задачей минимизации числа арифметических операций при заданном уровне погрешности  $\varepsilon$  вычисления матричной экспоненты с учетом условия (11.27).

Задача (11.29) представляет собой задачу о минимизации оценки погрешности вычисления матричной экспоненты при ограничении  $L$  на число арифметических операций с учетом того же условия.

В [33] решены обе задачи — (11.28), (11.29). Приведем их решения.

Рассмотрим задачу (11.29). Область возможных значений  $\|A\|\Delta$  (положительная полуось) разбивается на интервалы

$$(0, C_1], (C_1, C_2), [C_2, C_3], (C_3, +\infty),$$

где

$$C_1 = 2^{-L} \exp(\psi(L+2)), \quad C_2 = 2^{L-2} \exp(3/2 - \mathbf{C}), \quad C_3 = 2^{L-1/2},$$

а  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  ( $\Gamma(z)$  — гамма-функция; штрих соответствует производной по  $z$ );  $\mathbf{C} = 0.5772156\dots$  — постоянная Эйлера.

Если  $\|A\|\Delta \in (0, C_1]$ , то оптимальными параметрами являются  $N = L$ ,  $M = 0$ , а наиболее точной формулой для вычисления матричной экспоненты — формула

$$\exp(A\Delta) \approx \sum_{k=0}^L \frac{A^k \Delta^k}{k!}.$$

В том случае, когда  $\|A\|\Delta \in (C_1, C_2)$ , то оптимальным  $N$  является одно из двух целых чисел, между которыми находится единственный корень  $\bar{N} \in [1, L]$  уравнения

$$2N\ln 2 - \psi(N+2) = L\ln 2 - \ln(\|A\|\Delta). \quad (11.30)$$

При этом оптимальное значение  $N$  равно  $[\bar{N}]$ , если  $Q([\bar{N}]) < Q([\bar{N}]+1)$  или  $P([\bar{N}]+1) > 0$ , и равно  $[\bar{N}]+1$  в противном случае. Здесь

$$Q(N) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left\{ \frac{\exp(\|A\|\Delta)(\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{(L-N)N}\Gamma(N+2)} \right\},$$

$$P(N) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left\{ \frac{(\|A\|\Delta 2^{N-L})^{N+1}}{\Gamma(N+2)} \right\},$$

$[x]$  — целая часть числа  $x$ .

После определения оптимального  $N$  оптимальное  $M$  находим по формуле  $M = L - N$ .

Единственный корень уравнения (11.30) может быть вычислен, например, с помощью метода Ньютона, старт которого осуществляется из точки  $N = L$  [33].

Если  $\|A\|\Delta \in [C_2, C_3]$ , то оптимальными параметрами являются  $N = 1$ ,  $M = L - 1$ , а наиболее точной формулой для вычисления матричной экспоненты — следующая формула:

$$\exp(\|A\|\Delta) \approx \left( I + \frac{A\Delta}{2^{L-1}} \right)^{2^{L-1}}.$$

Наконец, если  $\|A\|\Delta \in (C_3, +\infty)$ , то решения задачи (11.29) не существует.

Рассмотрим теперь задачу (11.28). В [33] показано, что задача (11.28) эквивалентна задаче одномерной целочисленной оптимизации

$$\min_{N \geq 1} \{N + M(N)\}, \quad (11.31)$$

$$M(N) = \max\{M_1(N), M_2(N)\}, \quad (11.32)$$

$$M_1(N) = \max \left\{ 0, \left[ \frac{1}{N \ln 2} \ln \left\{ \frac{\exp(\|A\|\Delta)(\|A\|\Delta)^{N+1}}{(N+1)! \varepsilon} \right\} \right] + 1 \right\},$$

$$M_2(N) = \max \left\{ 0, \left[ \frac{1}{(N+1) \ln 2} \ln \left\{ \frac{(\|A\|\Delta)^{N+1}}{(N+1)!} \right\} \right] + 1 \right\},$$

$[x]$  — целая часть числа  $x$ , а  $\varepsilon$  — то же, что и в формуле (11.26).

В [33] предлагается решать задачу (11.31) следующим образом. Пусть

$$\hat{N} = \min_{N \geq 1} \{N : M(N) = 0\}.$$

Если  $N > \hat{N}$ , то очевидно, что задача (11.31) переходит в задачу:

$$\min \left\{ \hat{N}, \min_{1 \leq N \leq \hat{N}} \{N + M(N)\} \right\},$$

которая решается одномерным целочисленным перебором по  $N$  от 1 до  $\hat{N}$ . При этом перебор можно прекратить как только текущее значение  $N$

достигнет текущего минимального значения  $M + N$ . После того как определено оптимальное  $N$ , оптимальное  $M$  находим как  $M(N)$  по формуле (11.32).

Приведем алгоритм вычисления матричной экспоненты.

**Алгоритм 11.1.** Вычисление матричной экспоненты  $\exp(A\Delta)$  с точностью  $\varepsilon$ .

1. Вычисление  $\|A\|\Delta$ .
2. По заданному  $\varepsilon > 0$  выбирают подходящие значения  $M$  и  $N$ .
3.  $i := 0$ .
4.  $G := \sum_{j=0}^N \frac{A^j}{j!} \left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^j$ .
5.  $i := i + 1$ .
6.  $G := G^2$ .
7. Если  $i < M$ , то выполняется переход к шагу 5.
8.  $\exp^*(A\Delta) := G$ .
9. Конец работы алгоритма 11.1.

### 11.2.3 Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения

Проблема численного моделирования систематической составляющей решения ССЛСДУ (11.22) согласно (11.23) сводится к вычислению интеграла

$$J_\Delta = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} B \mathbf{u}(\tau + k\Delta) d\tau; \quad k = 0, 1, \dots, K-1. \quad (11.33)$$

Рассмотрим различные способы приближенного вычисления интеграла  $J_\Delta$ . Будем считать, что векторная функция  $\mathbf{u}(k\Delta + \tau)$  при всех  $k = 0, 1, \dots, K-1$  и  $\tau \in [0, \Delta]$  представима в виде

$$\mathbf{u}(k\Delta + \tau) = \sum_{j=0}^l \mathbf{v}_j(k) \tau^j + \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau), \quad (11.34)$$

причем

$$\|\mathbf{r}_{l+1}(k, \tau)\| \leq C_l \tau^{l+1}, \quad (11.35)$$

где  $C_l < \infty$ ;  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ ;  $\tau \in [0, \Delta]$ ; норма вектора  $\mathbf{x} \in \Re^n$  определяется следующим образом:

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{x}^{(i)}|;$$

$\mathbf{v}_j(k)$  ( $j = 0, 1, \dots, l$ ) — векторные коэффициенты, которые могут быть выбраны разными способами (далее будут рассмотрены некоторые из них).

Достаточным условием, обеспечивающим возможность представления (11.34), является  $(l + 1)$ -кратная непрерывная дифференцируемость функции  $\mathbf{u}(t)$  на промежутке  $[0, T]$ . Однако возможны и другие, менее ограничительные условия.

Подставим (11.34) в (11.33). В результате получим следующее выражение:

$$J_\Delta = \sum_{j=0}^l J_{\Delta,j} B \mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l+1}, \quad (11.36)$$

где

$$J_{\Delta,j} = \int_0^\Delta \tau^j \exp(A(\Delta - \tau)) d\tau, \quad R_{\Delta,l+1} = \int_0^\Delta \exp(A(\Delta - \tau)) B \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau) d\tau,$$

причем согласно (11.35)

$$\|R_{\Delta,l+1}\| \leq H_{l+1} \Delta^{l+2}, \quad H_{l+1} < \infty. \quad (11.37)$$

Остановимся подробнее на вычислении интегралов  $J_{\Delta,j}$ ;  $j = 0, 1, \dots, l$ . Нетрудно видеть, что

$$J_{\Delta,0} = A^{-1} (e^{A\Delta} - I), \quad (11.38)$$

$$J_{\Delta,j} = -A^{-1} (\Delta^j I - j J_{\Delta,j-1}); \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (11.39)$$

Итерируя формулу (11.39), приходим к следующему выражению:

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[ A J_{\Delta,0} - \sum_{i=1}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right], \quad j \geq 1. \quad (11.40)$$

Подставляя (11.38) в (11.40), получаем окончательное выражение для интеграла  $J_{\Delta,j}$ ,  $j \geq 0$ :

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[ \exp(A\Delta) - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right], \quad j \geq 0, \quad (11.41)$$

где  $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$  — единичная матрица.

Подставляя (11.41) в (11.36) и отбрасывая остаточный член  $R_{\Delta,l+1}$ , приходим к следующему приближенному представлению:

$$J_\Delta \approx \sum_{j=0}^l A^{-(j+1)} j! \left[ \exp(A\Delta) - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B \mathbf{v}_j(k). \quad (11.42)$$

Рассмотрим некоторые способы выбора коэффициентов  $\mathbf{v}_j(k); j = 0, 1, \dots, l$  по формуле (11.34) и соответствующие этим способам приближенные представления для интеграла  $J_\Delta$ . При этом будем обозначать  $\mathbf{u}((k + p/q)\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{k+p/q}; p = 0, 1, 2, \dots; k, q = 1, 2, \dots$

1. Аппроксимация с помощью формулы Тейлора:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j(k) &= \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathbf{u}}{dt^j}(k\Delta), \\ \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau) &= \frac{\tau^{l+1}}{(l+1)!} \frac{d^{l+1} \mathbf{u}}{dt^{l+1}}(k\Delta + \theta\tau), \quad \theta \in (0, 1), \\ J_\Delta &\approx \sum_{j=0}^l A^{-(j+1)} \left[ \exp(A\Delta) - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B \frac{d^j \mathbf{u}}{dt^j}(k\Delta). \end{aligned}$$

2. Кусочно-постоянная аппроксимация ( $l = 0$ ):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \quad J_\Delta \approx A^{-1} (\exp(A\Delta) - I) B \mathbf{u}_k.$$

3. Линейная интерполяция ( $l = 1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(k) &= \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{v}_1(k) &= \frac{1}{\Delta} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k), \\ J_\Delta &\approx A^{-1} (\exp(A\Delta) - I) B \mathbf{u}_k + \\ &+ \frac{A^{-2}}{\Delta} [\exp(A\Delta) - I - \Delta A] B (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k). \end{aligned}$$

4. Квадратичная интерполяция ( $l = 2$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(k) &= \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{v}_1(k) &= \frac{1}{\Delta} (4\mathbf{u}_{k+1/2} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{2}{\Delta^2} (\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+1/2}),$$

$$\begin{aligned} J_\Delta &\approx A^{-1} (\exp(A\Delta) - I) B \mathbf{u}_k + \\ &+ \frac{A^{-2}}{\Delta} [\exp(A\Delta) - I - \Delta A] B (4\mathbf{u}_{k+1/2} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1}) + \\ &+ \frac{4A^{-3}}{\Delta^2} \left[ \exp(A\Delta) - I - \sum_{q=1}^2 \frac{(\Delta A)^q}{q!} \right] B (\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+1/2}). \end{aligned}$$

5. Кубическая интерполяция ( $l = 3$ ):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{2\Delta} (2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+1/3} - 9\mathbf{u}_{k+2/3} - 11\mathbf{u}_k),$$

$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{9}{2\Delta^2} (-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+1/3} + 4\mathbf{u}_{k+2/3} + 2\mathbf{u}_k),$$

$$\mathbf{v}_3(k) = \frac{9}{2\Delta^3} (\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+1/3} - 3\mathbf{u}_{k+2/3} - \mathbf{u}_k),$$

$$\begin{aligned} J_\Delta &\approx A^{-1} (\exp(A\Delta) - I) B \mathbf{u}_k + \\ &+ \frac{A^{-2}}{2\Delta} [\exp(A\Delta) - I - \Delta A] B (2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+1/3} - 9\mathbf{u}_{k+2/3} - 11\mathbf{u}_k) + \\ &+ \frac{9A^{-3}}{\Delta^2} \left[ \exp(A\Delta) - I - \sum_{q=1}^2 \frac{(\Delta A)^q}{q!} \right] B (2\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+1/3} + 4\mathbf{u}_{k+2/3}) + \\ &+ \frac{27A^{-4}}{\Delta^3} \left[ \exp(A\Delta) - I - \sum_{q=1}^3 \frac{(\Delta A)^q}{q!} \right] B (\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+1/3} - 3\mathbf{u}_{k+2/3} - \mathbf{u}_k). \end{aligned}$$

Из (11.42) следует, что численное моделирование систематической составляющей решения ССЛСДУ (11.22) сводится практически к вычислению матриц  $B_j(\Delta)$  вида

$$B_j(\Delta) = A^{-(j+1)} j! \left[ \exp(A\Delta) - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B; \quad j = 0, 1, \dots, l. \quad (11.43)$$

Если матрица  $A$  невырожденная, то матрицы  $B_j(\Delta)$  могут быть вычислены непосредственно по формуле (11.43) с использованием алгоритма 11.1 вычисления матричной экспоненты  $\exp(A\Delta)$ . Однако матрицы  $B_j(\Delta)$

могут быть вычислены и в случае вырожденной матрицы  $A$ , поскольку  $B_j(\Delta)$  согласно (11.43) представимы в виде

$$B_j(\Delta) = j!A^{-(j+1)} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\Delta^i}{i!} A^i B; \quad j = 0, 1, \dots, l. \quad (11.44)$$

Из последнего равенства следует существование конечного предела правой части (11.44) при  $\det(A) \rightarrow 0$ .

Для вычисления матриц  $B_j(\Delta)$  в случае вырожденной матрицы  $A$  используем следующий подход.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B \sum_{j=0}^l t^j \mathbf{v}_j(k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = O_{n,1}, \quad (11.45)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \Re^n$ ;  $O_{n,1}$  — нулевой столбец длины  $n$ .

Нетрудно видеть, что решение системы (11.45) имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \exp(At)\hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^l J_{t,j} B \mathbf{v}_j(k),$$

откуда

$$\hat{\mathbf{x}}(\Delta) = \exp(A\Delta)\hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k).$$

Введем в рассмотрение расширенную векторную функцию:

$$\hat{\mathbf{y}}^T(t) = (\hat{\mathbf{x}}^T(t) \quad \mathbf{x}_{n+1}^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}_{n+l+1}^T(t) \quad \mathbf{x}_{n+l+2}^T(t)),$$

которая является решением однородной системы ОДУ вида

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt}(t) = A_1 \hat{\mathbf{y}}(t), \quad \hat{\mathbf{y}}^T(0) = (O_{1,n} \quad \mathbf{v}_0^T(k) \quad \mathbf{v}_1^T(k) \quad 2!\mathbf{v}_2^T(k) \quad \dots \quad l!\mathbf{v}_l^T(k)), \quad (11.46)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & B & O_{n,k} & O_{n,k} & \dots & O_{n,k} & O_{n,k} \\ O_{k,n} & O_k & I_k & O_k & \dots & O_k & O_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & I_k & O_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & I_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & O_k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^l t^j \mathbf{v}_j(k), \quad \frac{d\mathbf{x}_{n+p+1}}{dt}(t) = \mathbf{x}_{n+p+2}(t),$$

$$\frac{d\mathbf{x}_{n+l+2}}{dt}(t) = O_{k,1},$$

$p = 0, 1, \dots, l$ ,  $O_k$  — нулевая  $(k \times k)$ -матрица;  $I_k$  — единичная  $(k \times k)$ -матрица;  $O_{n,k}$  — нулевая  $(n \times k)$ -матрица.

Решением системы (11.46) является матричная функция вида

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = e^{A_1 t} \hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} \exp(A_1 t) & J_{t,0}B & J_{t,1}B & \dots & (J_{t,l}B)/l! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}(0).$$

Таким образом, вычислив матричную экспоненту  $\exp(A_1 \Delta)$ , можно получить сразу как матрицу  $e^{A \Delta}$ , так и матрицы  $B_j(\Delta)$ ;  $j = 0, 1, \dots, l$ .

Сформулируем полученный результат в виде следующего алгоритма.

**Алгоритм 11.2.** Вычисление матриц  $\exp(A \Delta)$  и  $B_j(\Delta)$ ;  $j = 0, 1, \dots, l$ .

1. Из матриц  $A$  и  $B$  системы (11.22) формируется матрица  $A_1$  системы (11.46).

2. К матрице  $A_1 \Delta$  применяется алгоритм 11.1 вычисления матричной экспоненты, результатом которого с точностью  $\varepsilon$  оказывается матрица

$$\tilde{A}_1(\Delta) = \begin{pmatrix} \exp(A \Delta) & J_{\Delta,0}B & J_{\Delta,1}B & \dots & (J_{\Delta,l}B)/l! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

3. Левый верхний блок (размера  $n \times n$ ) матрицы  $\tilde{A}_1(\Delta)$  является с точностью  $\varepsilon$  матрицей  $\exp(A \Delta)$ .

4.  $j := 1$ .

5.  $(j+1)$ -й левый верхний блок (размера  $n \times k$ ) матрицы  $\tilde{A}_1(\Delta)$  является с точностью  $\varepsilon$  матрицей

$$\hat{B}_j(\Delta) = \frac{1}{j!} J_{\Delta,j} B.$$

6.  $B_j(\Delta) := j! \hat{B}_j(\Delta)$ .

7. Если  $j < l + 1$ , то  $j := j + 1$  и выполняется переход к шагу 5.

8. Конец работы алгоритма 11.2.

### 11.2.4 Алгоритм численного моделирования стохастической составляющей решения

Найдем такое представление случайного столбца  $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$  вида

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = \int_0^\Delta \exp(A(\Delta - s)) \Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s},$$

которое было бы удобно для численного моделирования. Для этого рассмотрим дисперсионную матрицу случайного столбца  $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ :

$$\mathbb{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^T(\Delta)\} \stackrel{\text{def}}{=} D_f(\Delta).$$

Спектральное разложение дисперсионной матрицы  $D_f(\Delta)$  имеет вид

$$D_f(\Delta) = S_D(\Delta) \Lambda_D^2(\Delta) S_D^{-1}(\Delta), \quad (11.47)$$

где  $S_D(\Delta)$  — матрица ортонормированных собственных векторов матрицы  $D_f(\Delta)$ , а  $\Lambda_D(\Delta)$  — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы  $D_f(\Delta)$ . Отметим, что  $D_f(\Delta)$  — симметричная, неотрицательно определенная матрица, поэтому ее собственные числа неотрицательны, а матрица собственных векторов ортогональная.

Представим случайный столбец  $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$  в виде

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = S_D(\Delta) \Lambda_D(\Delta) \bar{\mathbf{f}}_{k+1}, \quad (11.48)$$

где  $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$  — такой случайный столбец, что его компоненты  $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, n$  являются независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами, причем столбцы  $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$  и  $\bar{\mathbf{f}}_{l+1}$  независимы при  $k \neq l$ .

Таким образом, при представлении (11.48) справедливо соотношение (11.47). Для численного моделирования случайного столбца  $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$  по формуле (11.48) необходимо найти матрицу  $D_f(\Delta)$ , ее собственные числа и собственные векторы, а также численно смоделировать  $n$  независимых стандартных гауссовских случайных величин, которые являются компонентами случайного столбца  $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$ . Выражение для матрицы  $D_f(\Delta)$  и дифференциальное уравнение для ее определения даны соотношениями (11.16) и (11.17) соответственно. Отметим, что так как матрица  $D_f(\Delta)$  симметричная, то полезную информацию несут  $(n^2 + n)/2$  ее элементов, расположенных над (под) главной диагональю  $D_f(\Delta)$ , включая главную диагональ.

Для нахождения матрицы  $D_f(\Delta)$  надо решить уравнение (11.17). С этой целью данное уравнение приводим к уравнению вида

$$\frac{d\mathbf{d}_f}{dt}(t) = \hat{A}\mathbf{d}_f(t) + \mathbf{b}, \quad (11.49)$$

где столбцы  $\mathbf{d}_f(t)$ ,  $\mathbf{b} \in \Re^{(n^2+n)/2}$  и имеют вид

$$\mathbf{d}_f^\top(t) = (\mathbf{d}_{f_1}^\top(t) \dots \mathbf{d}_{f_n}^\top(t)), \quad \mathbf{b}^\top = (\mathbf{b}_1^\top \dots \mathbf{b}_n^\top), \quad (11.50)$$

$$\mathbf{d}_{f_j}^\top(t) = (D_f^{(1j)}(t) \dots D_f^{(n-j+1 \ n)}(t)),$$

$$\mathbf{b}_j^\top = (S^{(1j)} \dots S^{(n-j+1 \ n)});$$

$$j = 1, \dots, n; \quad S \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma\Sigma^\top.$$

Матрицу  $\hat{A}$  размера  $(n^2+n)/2 \times (n^2+n)/2$ , входящую в (11.49), строим следующим образом.

Сначала рассматриваем матрицы  $Q_{ip}$ ;  $p = 0, \dots, n-1$ ;  $i = 1, \dots, n-p$  размера  $n \times n$  с элементами  $Q_{ip}^{(kl)}$  вида

$$Q_{ip}^{(kl)} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i, l = i+p \text{ или } k = i+p, l = i \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Затем рассматриваем матрицы  $R_{ip}$ ;  $p = 0, \dots, n-1$ ;  $i = 1, \dots, n-p$  вида

$$R_{ip} = Q_{ip}A^\top + A Q_{ip}.$$

Далее нетрудно заметить, что первые  $n$  столбцов матрицы  $\hat{A}$  строятся из матриц  $R_{i0}$ ;  $i = 1, \dots, n$  подобно тому, как строится столбец  $\mathbf{d}_f(t)$  из матрицы  $D_f(t)$  по правилу (11.50). После этого из матриц  $R_{i1}$ ;  $i = 1, \dots, n-1$  получаем следующие  $n-1$  столбец матрицы  $\hat{A}$  по тому же правилу, и т.д.

Теперь, когда определены  $\mathbf{d}_f(t)$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\hat{A}$ , можно найти решение уравнения (11.49):

$$\mathbf{d}_f(t) = \hat{A}^{-1}(e^{\hat{A}t} - I)\mathbf{b}$$

и вычислить  $\mathbf{d}_f(\Delta)$ .

Следует отметить, что при переходе от (11.17) к (11.49) резко возрастает размерность задачи, что является недостатком рассматриваемого метода.

Далее после перехода от  $\mathbf{d}_f(\Delta)$  к  $D_f(\Delta)$  можно вычислить матрицы  $S_D(\Delta)$  и  $\Lambda_D(\Delta)$ . После этого можно приступить к моделированию случайной составляющей решения ССЛСДУ по формуле (11.48).

Сформулируем изложенные идеи в виде алгоритмов.

**Алгоритм 11.3.** *Преобразование симметричной  $(n \times n)$ -матрицы  $A$  в столбец  $\mathbf{b}$  размера  $(n^2 + n)/2$ .*

1.  $i := 0$ .
2.  $j := 1$ .
3.  $q := 1$ .
4.  $\mathbf{b}^{(q+i)} := A^{(q \ q+j-1)}$ .
5. Если  $q < n - j + 1$ , то  $q := q + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 4.
6.  $i := i + n - j + 1$ .
7. Если  $j < n$ , то  $j := j + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 3.
8. Конец работы алгоритма 11.3.

**Алгоритм 11.4.** *Преобразование столбца  $\mathbf{b}$  размера  $(n^2 + n)/2$  в симметричную  $(n \times n)$ -матрицу  $A$ .*

1.  $i := 0$ .
2.  $j := 1$ .
3.  $q := 1$ .
4.  $A^{(q \ q+j-1)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$ .
5.  $A^{(q+j-1 \ q)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$ .
6. Если  $q < n - j + 1$ , то  $q := q + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 4.
7.  $i := i + n - j + 1$ .
8. Если  $j < n$ , то  $j := j + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 3.
9. Конец работы алгоритма 11.4.

**Алгоритм 11.5.** *Преобразование симметричной  $(n \times n)$ -матрицы  $A$  в*

матрицы  $\hat{A}$  размера  $(n^2 + n)/2 \times (n^2 + n)/2$ .

1.  $Q := O_n$  (нулевая матрица размера  $n \times n$ ).
2.  $r := 1$ .
3.  $j := 1$ .
4.  $q := 1$ .
5.  $i := q + j - 1$ .
6.  $Q^{(qi)} := 1$ .
7.  $Q^{(iq)} := 1$ .
8.  $R := QA^\top + AQ$ .
9.  $m := 0$ .
10.  $s := 1$ .
11.  $l := 1$ .
12.  $\hat{A}^{(l+m \ r)} := R^{(l \ l+s-1)}$ .

13. Если  $l < n - s + 1$ , то  $l := l + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 12.

14.  $m := m + n - s + 1$ .
15. Если  $s < n$ , то  $s := s + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 11.
16.  $Q := O_n$ .
17.  $r := r + 1$ .
18. Если  $q < n - j + 1$ , то  $q := q + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 5.
19. Если  $j < n$ , то  $j := j + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 4.
20. Конец работы алгоритма 11.5.

**Алгоритм 11.6.** Численное моделирование случайной составляющей решения ССЛСДУ.

1. Формирование столбца  $\mathbf{b}$  из матрицы  $\Sigma\Sigma^\top$  по алгоритму 11.3.
2. Формирование матрицы  $\hat{A}$  из матрицы  $A$  по алгоритму 11.5.
3. Определение столбца

$$\mathbf{d}_f(\Delta) = \hat{A}^{-1} (\exp(\hat{A}\Delta) - I) \mathbf{b}$$

по алгоритму 11.2.

4. Формирование матрицы  $D_f(\Delta)$  из столбца  $\mathbf{d}_f(\Delta)$  по алгоритму 11.4.
5. Выполнение спектрального разложения матрицы  $D_f(\Delta)$  и определение матриц  $S_D(\Delta)$ ,  $\Lambda_D^2(\Delta)$ .
6. Определение матрицы  $\Lambda_D(\Delta)$ .
7.  $i := 1$ .
8. Моделирование случайной величины  $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{(i)}$ .
9. Если  $i < n$ , то  $i := i + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 7.
10.  $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) := S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$ .
11. Конец работы алгоритма 11.6.

**Алгоритм 11.7. Численное моделирование решения ССЛСДУ.**

1. Вычисление матриц  $\exp(A\Delta)$  и

$$B_j(\Delta) = \int_0^\Delta \exp(A(\Delta - \tau))\tau^j d\tau B; \quad j = 0, 1, \dots, l$$

с точностью  $\varepsilon$  по алгоритму 11.2.

2.  $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}(0)$ .
3.  $k := 1$ .
4. Моделирование случайного столбца  $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$  по алгоритму 11.6.
5. Вычисление  $\mathbf{x}_{k+1}$ :

$$\mathbf{x}_{k+1} := \exp(A\Delta)\mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta)\mathbf{v}_j(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta).$$

6.  $\mathbf{y}_k := H^\top \mathbf{x}_k$ .
7. Если  $k < N$ , то  $k := k + 1$  и требуется выполнить переход к шагу 4.
8. Конец работы алгоритма 11.7.

Запишем точное и приближенное представления решения ССЛСДУ:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \exp(A\Delta)\mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^{l-1} B_j(\Delta)\mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l} + S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}, \quad (11.51)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \exp_*(A\Delta)\tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^{l-1} B_j^*(\Delta)\mathbf{v}_j(k) + S_D^*(\Delta)\Lambda_D^*(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}, \quad (11.52)$$

где  $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$  — точное решение ССЛСДУ (11.13) и его аппроксимация соответственно в моменты времени  $k\Delta$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ),  $B_j^*(\Delta)$ ,  $\exp_*(A\Delta)$ ,  $S_D^*(\Delta)$ ,  $\Lambda_D^*(\Delta)$  — вычисленные приближенные значения матриц  $B_j(\Delta)$ ,  $\exp(A\Delta)$ ,  $S_D(\Delta)$ ,  $\Lambda_D(\Delta)$ . При этом  $\exp_*(A\Delta)$ ,  $B_j^*(\Delta)$  вычисляются с помощью изложенных в предыдущих разделах алгоритмов, а  $S_D(\Delta)$ ,  $\Lambda_D(\Delta)$  — стандартными численными методами [13].

Оценим скорость сходимости алгоритма (11.52).

**Лемма 11.1.** *Пусть для всех  $j = 0, 1, \dots, l$  и  $k = 0, 1, \dots, K - 1$  существует такая постоянная  $L < \infty$ , что*

$$\begin{aligned} M\{\|\mathbf{e}_0\|\} &\leq L\Delta^l, \quad M\{\|\mathbf{x}_0\|\} \leq L, \\ \|S_D(\Delta) - S_D^*(\Delta)\|, \quad \|\Lambda_D(\Delta) - \Lambda_D^*(\Delta)\| &\leq L\Delta^{l+1}, \\ \|B_j(\Delta) - B_j^*(\Delta)\|, \quad \|R_{\Delta,l}\| &\leq L\Delta^{l+1}, \\ \|B_j^*(\Delta)\|, \quad \|\mathbf{v}_j(k)\|, \quad \|\Lambda_D^*(\Delta)\|, \quad \|S_D^*(\Delta)\| &\leq L, \\ \|\exp(A\Delta) - \exp_*(A\Delta)\| &\leq L\Delta^{l+2}, \\ \|\exp(A\Delta)\|, \quad \|\exp_*(A\Delta)\| &\leq 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\max_{1 \leq m \leq K} M\{\|\mathbf{e}_m\|\} \leq C\Delta^l,$$

где  $C$  — постоянная, которая не зависит от  $\Delta$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_k$ ,  $T = K\Delta$ ,  $l$  — натуральное.

**Доказательство.** Из (11.51), (11.52) и условий леммы 11.1 получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\| &\leq \|\exp_*(A\Delta) - \exp(A\Delta)\| \|\tilde{\mathbf{x}}_k\| + \|\exp(A\Delta)\| \|\mathbf{e}_k\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{l-1} \|B_j^*(\Delta) - B_j(\Delta)\| \|\mathbf{v}_j(k)\| + \|R_{\Delta,l}\| + \\ &+ \left( \|S_D^*(\Delta) - S_D(\Delta)\| \|\Lambda_D^*(\Delta)\| + \right. \\ &\quad \left. + \|S_D(\Delta)\| \|\Lambda_D^*(\Delta) - \Lambda_D(\Delta)\| \right) \|\bar{\mathbf{f}}_{k+1}\| \quad \text{с в. 1,} \end{aligned}$$

а также  $M\{\|\tilde{x}_k\|\} \leq C_0 k$  ( $k = 1, \dots, K$ ), где  $C_0$  — постоянная, которая не зависит от  $\Delta$ .

По неравенству Ляпунова имеем:

$$M\{\|\bar{f}_{k+1}\|\} \leq \sqrt{M\{\|\bar{f}_{k+1}\|^2\}} = 1$$

(здесь норма определена как максимальный элемент вектора). Величина  $M\{\|\bar{f}_{k+1}\|\}$  будет оцениваться  $\sqrt{n}$ , если норма понимается как евклидова. Далее, в силу предположений леммы 11.1 имеем

$$M\{\|e_{k+1}\|\} \leq M\{\|e_k\|\} + C_1 \Delta^{l+1},$$

где постоянная  $C_1$  не зависит от  $\Delta$ . Итерируя это неравенство и учитывая, что  $M\{\|e_0\|\} \leq L \Delta^l$ , получаем

$$\begin{aligned} M\{\|e_m\|\} &\leq (C_1 m \Delta + L) \Delta^l \leq \\ &\leq (C_1 K \Delta + L) \Delta^l \leq C \Delta^l, \end{aligned}$$

где  $1 \leq m \leq K$ . Лемма доказана.  $\square$

## 11.3 Метод численного моделирования ССЛСДУ, основанный на кусочно-постоянных случайных процессах

### 11.3.1 Введение

Рассмотренный в предыдущем разделе метод численного решения ССЛСДУ позволяет на алгоритмическом уровне точно представлять случайную составляющую решения этой системы и, в свете сильного критерия сходимости численных методов (см. главу 7), может трактоваться как сильный численный метод (см. лемму 11.1).

В настоящем разделе будет представлен другой метод численного решения ССЛСДУ, который аппроксимирует не само решение указанной системы, а его моментные характеристики 1 и 2 порядка.

Идея указанного метода заключается в том, что стохастический интеграл в (11.23) аппроксимируется с помощью кусочно-постоянных случайных процессов  $w_t$ .

Выберем на промежутке интегрирования  $[0, T]$  шаг  $\Delta$  такой, что  $\Delta = T/M$ . Покроем промежуток  $[0, T]$  более густой сеткой с шагом  $\delta = T/(NM)$ ,  $N \geq 1$ .

Сначала рассмотрим постоянный на интервалах времени  $[r\delta, (r+1)\delta)$ ;  $r = 0, 1, \dots, MN - 1$  гауссовский случайный векторный процесс  $\mathbf{w}_t \in \Re^m$  с независимыми значениями на этих интервалах, а именно:  $\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{r\delta}$  при  $t \in [r\delta, (r+1)\delta)$  ( $r = 0, 1, \dots, MN - 1$ ). Кроме того, положим:

$$\mathbb{M}\{\mathbf{w}_{r\delta}\} \equiv 0, \quad \mathbb{M}\{\mathbf{w}_{r\delta}\mathbf{w}_{q\delta}^\top\} = \frac{1}{\delta} \mathbf{1}_{\{r=q\}} I,$$

где  $I$  — единичная матрица.

Отметим, что результаты данного раздела останутся в силе, если случайные величины  $\mathbf{w}_{r\delta}$  покомпонентно имеют специальное дискретное распределение и ограничены (см. разд. 11.3.3).

### 11.3.2 Алгоритм численного моделирования решений ССЛСДУ

Рассмотрим ССЛСДУ (11.22) и запишем рекуррентное соотношение для ее решения на сетке с постоянным шагом  $\Delta > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} = & \exp(A\Delta)\mathbf{x}_k + \int_0^\Delta \exp(A(\Delta-\tau))B\mathbf{u}(\tau+k\Delta)d\tau + \\ & + \int_0^\Delta \exp(A(\Delta-\tau))\Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \end{aligned} \quad (11.53)$$

где  $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$ ;  $k = 0, 1, \dots, M$ ;  $M\Delta = T$ .

Введем приближенное представление  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  процесса  $\mathbf{x}_k$ , заменив стохастический интеграл в правой части (11.53) в соответствии с рассуждениями предыдущего раздела

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = & \exp(A\Delta)\tilde{\mathbf{x}}_k + \int_0^\Delta \exp(A(\Delta-\tau))B\mathbf{u}(\tau+k\Delta)d\tau + \\ & + \int_0^\Delta \exp(A(\Delta-\tau))\Sigma \mathbf{w}_{\tau+k\Delta}d\tau, \end{aligned} \quad (11.54)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$ . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^\Delta \exp(A(\Delta - \tau)) \Sigma \mathbf{w}_{\tau+k\delta} d\tau &= \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \exp(A(\Delta - \tau)) d\tau \Sigma \mathbf{w}_{(kN+j-1)\delta} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} A^{-1} [\exp(A\delta) - I] \sum_{j=1}^N \exp(A(\Delta - j\delta)) \Sigma \mathbf{z}_{k,j}, \end{aligned} \quad (11.55)$$

где  $\mathbf{z}_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\delta} \mathbf{w}_{(kN+j-1)\delta} \in \Re^m$  — столбец независимых стандартных гауссовских случайных величин. Кроме того, столбцы  $\mathbf{z}_{k,j}$  и  $\mathbf{z}_{k',j'}$  независимы при  $k \neq k'$  или  $j \neq j'$ .

Воспользовавшись результатами из разд. 11.2.3 и формулами (11.54), (11.55), запишем следующую рекуррентную формулу для процесса  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \exp(A\Delta) \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l+1} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\delta}} \bar{A}(\delta) \sum_{j=1}^N \exp(A(\Delta - j\delta)) \Sigma \mathbf{z}_{k,j}, \end{aligned} \quad (11.56)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}(\delta) &= A^{-1} [\exp(A\delta) - I], \\ B_j(\Delta) &= A^{-(j+1)} j! \left[ \exp(A\Delta) - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B, \\ \|R_{\Delta,l+1}\| &\leq H_{l+1} \Delta^{l+2}, \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{y}}_k = H^T \tilde{\mathbf{x}}_k$  — выход системы;  $\mathbf{v}_j(k) \in \Re^n$  — векторные коэффициенты, входящие в формулу (11.34);  $H_{l+1} < \infty$  — постоянная.

С учетом рекуррентного соотношения (11.56) построим алгоритм численного моделирования решений ССЛСДУ, отбросив  $R_{\Delta,l+1}$ .

#### Алгоритм 11.8. Численное моделирование решений ССЛСДУ.

1. Вычисление с точностью  $\varepsilon$  матрицы  $\exp(A\delta)$  по алгоритму 11.1.
2. Вычисление матриц  $\exp(A\Delta)$ ,  $B_j(\Delta)$ ;  $j = 0, 1, \dots, l$  с точностью  $\varepsilon$  по алгоритму 11.2.
3.  $\bar{A}(\delta) := A^{-1} [\exp(A\delta) - I]$ .
4.  $\tilde{\mathbf{x}}_1 := \mathbf{x}(0)$ .
5.  $k := 1$ .
6.  $i := 1$ .

7.  $l := 1$ .

8. Численное моделирование случайной величины  $\mathbf{z}_{k,i}^{(l)}$  — компоненты вектора  $\mathbf{z}_{k,i}$ .

9. Если  $l < m$ , то  $l := l + 1$ , и требуется перейти к шагу 8.

10. Вычисление с точностью  $\varepsilon$  матрицы  $\exp(A(\Delta - i\delta))$  по алгоритму 11.1.

11. Если  $i < N$ , то  $i := i + 1$ , и требуется перейти к шагу 7.

12. Вычисление  $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} := \exp(A\Delta)\tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta)\mathbf{v}_j(k) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\bar{A}(\delta) \sum_{j=1}^N \exp(A(\Delta - j\delta))\Sigma\mathbf{z}_{k,j}.\end{aligned}$$

13.  $\tilde{\mathbf{y}}_k = H^\top \tilde{\mathbf{x}}_k$ .

14. Если  $k < M$ , то  $k := k + 1$ , и требуется перейти к шагу 6.

15. Конец работы алгоритма 11.8.

### 11.3.3 Оценка скорости сходимости алгоритма

Сравним моментные характеристики случайных процессов  $\mathbf{x}_k$  и  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ , определяемых соотношениями (11.53) и (11.56) соответственно.

Введем обозначения

$$\mathbb{M}\{\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k^\top\} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\tilde{x}}(k), \quad \mathbb{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_k \overset{\circ}{\mathbf{x}}_k^\top\} \stackrel{\text{def}}{=} D_x(k), \quad E_D(k) \stackrel{\text{def}}{=} D_x(k) - D_{\tilde{x}}(k),$$

$\|G\|$  — норма матрицы  $G$ , понимаемая как максимальное по модулю ее собственное число.

Заметим, что, если  $\mathbb{M}\{\tilde{\mathbf{x}}_0\} = \mathbb{M}\{\mathbf{x}_0\}$ , то согласно соотношениям (11.53), (11.54) имеем  $\mathbb{M}\{\tilde{\mathbf{x}}_k\} = \mathbb{M}\{\mathbf{x}_k\}$ ;  $k = 1, 2, \dots, M$ . Здесь мы считаем, что систематическая составляющая в приближенном представлении (11.54) вычислена точно.

**Лемма 11.2.** Пусть  $E_D(0) = O_{n \times n}$  и  $N \geq 1$ . Тогда, если  $\|\exp(A\Delta)\| \leq 1$ , то

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|E_D(k)\| \leq M \left( \frac{1}{12} \delta^3 \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| + O(\delta^4) \right) \frac{\exp(2 \|A\| \Delta) - 1}{\exp(2 \|A\| \delta) - 1}. \quad (11.57)$$

Если же  $\|\exp(A\Delta)\| < 1$ , то существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_D(k)\|$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_D(k)\| \leq \frac{12^{-1}\delta^3 \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| + O(\delta^4)}{1 - \|\exp(A\Delta)\|^2} \cdot \frac{\exp(2\|A\|\Delta) - 1}{\exp(2\|A\|\delta) - 1}, \quad (11.58)$$

где  $O_{n \times n}$  — нулевая  $(n \times n)$ -матрица,  $\tilde{\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \Sigma^\top$ .

**Доказательство.** Рассмотрим рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции  $D_x(k)$ . Согласно (11.53) имеем

$$\begin{aligned} D_x(k+1) &= \\ &= \exp(A\Delta)D_x(k)\exp(A^\top\Delta) + \int_0^\Delta \exp(A(\Delta-\tau))\tilde{\Sigma}\exp(A^\top(\Delta-\tau))d\tau = \\ &= \exp(A\Delta)D_x(k)\exp(A^\top\Delta) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \exp(A(\Delta-\tau))\tilde{\Sigma}\exp(A^\top(\Delta-\tau))d\tau = \\ &= \exp(A\Delta)D_x(k)\exp(A^\top\Delta) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \exp(A(\Delta-i\delta)) \int_0^\delta \exp(A(\delta-\tau))\tilde{\Sigma}\exp(A^\top(\delta-\tau))d\tau \times \\ &\times \exp(A^\top(\Delta-i\delta)). \end{aligned} \quad (11.59)$$

Запишем рекуррентное соотношение для центрированной составляющей процесса  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ ;  $k = 0, 1, \dots, M$ :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_{k+1} &= \exp(A\Delta)\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \int_0^\Delta \exp(A(\Delta-\tau))\Sigma\mathbf{w}_{\tau+k\Delta}d\tau = \\ &= \exp(A\Delta)\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \exp(A(\Delta-\tau))\Sigma d\tau \mathbf{w}_{(i-1)\delta+k\Delta} = \\ &= \exp(A\Delta)\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + A^{-1} \sum_{i=1}^N \exp(A(\Delta-i\delta)) (\exp(A\delta) - I) \Sigma \mathbf{w}_{(i-1+kN)\delta}. \end{aligned} \quad (11.60)$$

С помощью (11.60) нетрудно получить следующее рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции  $D_{\tilde{x}}(k)$ :

$$\begin{aligned}
 D_{\tilde{x}}(k+1) = & \exp(A\Delta)D_{\tilde{x}}(k)\exp(A^\top\Delta) + \\
 & + \frac{1}{\delta}A^{-1}\sum_{i=1}^N \exp(A(\Delta - i\delta))(\exp(A\delta) - I)\tilde{\Sigma}(\exp(A^\top\delta) - I) \times \\
 & \times \exp(A^\top(\Delta - i\delta))(A^{-1})^\top. \tag{11.61}
 \end{aligned}$$

Вычитая (11.61) из (11.59) и учитывая:

$$\begin{aligned}
 A^{-1}C_i(\delta, \Delta) &= C_i(\delta, \Delta)A^{-1}, \\
 (A^{-1})^\top(C_i(\delta, \Delta))^\top &= (C_i(\delta, \Delta))^\top(A^{-1})^\top, \\
 \exp(A(\Delta - i\delta))(\exp(A\delta) - I) &\stackrel{\text{def}}{=} C_i(\delta, \Delta),
 \end{aligned}$$

получаем следующее рекуррентное соотношение для ошибки  $E_D(k)$ :

$$E_D(k+1) = \exp(A\Delta)E_D(k)\exp(A^\top\Delta) + \sum_{i=1}^N Q_i(\delta, \Delta), \tag{11.62}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_i(\delta, \Delta) = & \exp(A(\Delta - i\delta)) \left[ \int_0^\delta \exp(A(\delta - \tau))\tilde{\Sigma}\exp(A^\top(\delta - \tau))d\tau - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\delta}(\exp(A\delta) - I)A^{-1}\tilde{\Sigma}(A^{-1})^\top(\exp(A^\top\delta) - I) \right] \exp(A^\top(\Delta - i\delta)). \tag{11.63}
 \end{aligned}$$

С помощью стандартной формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^\delta \exp(A(\delta - \tau))\tilde{\Sigma}\exp(A^\top(\delta - \tau))d\tau &= \int_0^\delta \exp(Au)\tilde{\Sigma}\exp(A^\top u)du = \\
 &= \int_0^\delta \left[ I + Au + \frac{A^2u^2}{2} + O(u^3) \right] \tilde{\Sigma} \left[ I + A^\top u + \frac{(A^\top)^2u^2}{2} + O(u^3) \right] du = \\
 &= \tilde{\Sigma}\delta + (A\tilde{\Sigma})^s\delta^2 + \frac{1}{3} \left[ A\tilde{\Sigma}A^\top + (A^2\tilde{\Sigma})^s \right] \delta^3 + O(\delta^4), \tag{11.64}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\delta}(\exp(A\delta) - I)A^{-1}\tilde{\Sigma}(A^{-1})^\top(\exp(A^\top\delta) - I) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\delta} \left[ A\delta + \frac{A^2\delta^2}{2} + \frac{A^3\delta^3}{6} + O(\delta^4) \right] A^{-1} \tilde{\Sigma} (A^{-1})^\top \times \\
 &\quad \times \left[ A^\top \delta + \frac{(A^\top)^2 \delta^2}{2} + \frac{(A^\top)^3 \delta^3}{6} + O(\delta^4) \right] = \\
 &= \tilde{\Sigma} \delta + (A \tilde{\Sigma})^s \delta^2 + \left[ \frac{1}{4} A \tilde{\Sigma} A^\top + \frac{1}{3} (A^2 \tilde{\Sigma})^s \right] \delta^3 + O(\delta^4), \tag{11.65}
 \end{aligned}$$

где

$$B^s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (B + B^\top)$$

— симметричная часть матрицы  $B$ .

Подставляя (11.64) и (11.65) в (11.63), а затем (11.63) — в (11.62), получаем

$$\begin{aligned}
 E_D(k+1) &= \exp(A\Delta) E_D(k) \exp(A^\top \Delta) + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \exp(A(\Delta - i\delta)) \left( \frac{\delta^3}{12} A \tilde{\Sigma} A^\top + O(\delta^4) \right) \exp(A^\top (\Delta - i\delta)). \tag{11.66}
 \end{aligned}$$

Оценим норму  $\|E_D(k+1)\|$ :

$$\begin{aligned}
 \|E_D(k+1)\| &\leq \|\exp(A\Delta)\|^2 \|E_D(k)\| + \\
 &+ \left( \frac{\delta^3}{12} \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| + O(\delta^4) \right) \sum_{i=1}^N \exp(2 \|A\| (\Delta - i\delta)). \tag{11.67}
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^N \exp(2 \|A\| (\Delta - i\delta)) = \frac{\exp(2 \|A\| \Delta) - 1}{\exp(2 \|A\| \delta) - 1},$$

то из (11.67) имеем

$$\begin{aligned}
 \|E_D(k+1)\| &\leq \|\exp(A\Delta)\|^2 \|E_D(k)\| + \\
 &+ \left( \frac{1}{12} \delta^3 \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| + O(\delta^4) \right) \frac{\exp(2 \|A\| \Delta) - 1}{\exp(2 \|A\| \delta) - 1}. \tag{11.68}
 \end{aligned}$$

Если  $\|\exp(A\Delta)\| \leq 1$  и  $\|E_D(0)\| = 0$ , то используя эти условия и итерируя неравенство (11.68), получаем (11.57).

Пусть теперь  $\|\exp(A\Delta)\| < 1$ . Известно [105] (лемма 2, с. 94), что в условиях леммы 11.2 существуют и единственны пределы  $\lim_{k \rightarrow \infty} D_x(k)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} D_{\tilde{x}}(k)$ , где  $D_x(k)$  и  $D_{\tilde{x}}(k)$  определяются соотношениями (11.59) и (11.61) соответственно. Тогда предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_D(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (D_x(k) - D_{\tilde{x}}(k))$$

существует и единственен. Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в (11.68), получаем (11.58). Лемма доказана.  $\square$

При  $N = 1$  ( $\Delta = \delta$ ) из (11.57) и (11.58) соответственно получаем

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|E_D(k)\| \leq T \left( \frac{1}{12} \Delta^2 \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| + O(\Delta^3) \right), \quad (11.69)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_D(k)\| \leq \frac{12^{-1} \Delta^3 \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| + O(\Delta^4)}{1 - \|\exp(A\Delta)\|^2}. \quad (11.70)$$

Рассмотрим несколько иной способ. Заменим стохастический интеграл Ито в правой части (11.53) интегральной итоговской суммой вида

$$\sum_{j=1}^N \exp(A(\Delta - j\delta)) \exp(A\delta) \Sigma (\mathbf{f}_{k\Delta+j\delta} - \mathbf{f}_{k\Delta+(j-1)\delta}). \quad (11.71)$$

Повторяя выкладки из доказательства леммы 11.2 для этого случая получаем

$$\begin{aligned} Q_i(\delta, \Delta) &= \exp(A(\Delta - i\delta)) \left[ \int_0^\delta \exp(A(\delta - \tau)) \tilde{\Sigma} \exp(A^\top(\delta - \tau)) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \delta \exp(A\delta) \tilde{\Sigma} \exp(A^\top\delta) \right] \exp(A^\top(\Delta - i\delta)) = \\ &= \exp(A(\Delta - i\delta)) \left[ - (A\tilde{\Sigma})^s \delta^2 + O(\delta^3) \right] \exp(A^\top(\Delta - i\delta)). \end{aligned}$$

В результате приходим к оценкам

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|E_D(k)\| \leq M \left( \delta^2 \|A\| \|\tilde{\Sigma}\| + O(\delta^3) \right) \frac{\exp(2 \|A\| \Delta) - 1}{\exp(2 \|A\| \delta) - 1}, \quad (11.72)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_D(k)\| \leq \frac{\delta^2 \|A\| \|\tilde{\Sigma}\| + O(\delta^3)}{1 - \|\exp(A\Delta)\|^2} \cdot \frac{\exp(2\|A\|\Delta) - 1}{\exp(2\|A\|\delta) - 1}, \quad (11.73)$$

которые при  $N = 1$  ( $\Delta = \delta$ ) переходят в неравенства:

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|E_D(k)\| \leq T \left( \Delta \|A\| \|\tilde{\Sigma}\| + O(\Delta^2) \right), \quad (11.74)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_D(k)\| \leq \frac{\Delta^2 \|A\| \|\tilde{\Sigma}\| + O(\Delta^3)}{1 - \|\exp(A\Delta)\|^2}. \quad (11.75)$$

Очевидно, что оценки (11.74), (11.75) на порядок хуже оценок (11.69), (11.70).

Нетрудно видеть, что оценки (11.57), (11.58) останутся в силе, если взять в (11.60) случайные столбцы  $\mathbf{w}_{r\delta}$  с дискретным распределением вида:

$$P\{\mathbf{w}_{r\delta} = \pm \mathbf{e}/\sqrt{\delta}\} = 1/2,$$

независимые при различных  $r$  и с независимыми компонентами  $\mathbf{w}_{r\delta}^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$ . Здесь  $\mathbf{e}$  — столбец длины  $m$ , состоящий из единиц.

Оценки (11.74), (11.75) также останутся в силе, если взять в (11.71) вместо приращений  $\Delta \mathbf{f}_{k,j} = \mathbf{f}_{k\Delta+j\delta} - \mathbf{f}_{k\Delta+(j-1)\delta}$  независимые при различных  $k$  или  $j$  случайные столбцы  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_{k,j}$  с независимыми компонентами  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_{k,j}^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  и дискретным распределением

$$P\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_{k,j} = \pm \mathbf{e}\sqrt{\delta}\} = 1/2,$$

где  $\mathbf{e}$  — также столбец длины  $m$ , состоящий из единиц.

Отметим, что с силу гауссовой сложности случайного процесса  $\mathbf{x}_k$ ;  $k = 0, 1, \dots, M$ , критерия слабой сходимости численных методов (см. главу 10) и леммы 11.2, рассмотренный в данном разделе численный метод может трактоваться как слабый численный метод решения ССЛСДУ.

## 11.4 Метод численного моделирования ССЛСДУ, основанный на разложении Тейлора–Ито и полиномах Лежандра

В предыдущих главах рассматривалась общая теория численного решения нелинейных СДУ Ито, основанная на разложениях Тейлора–Ито и

Тейлора–Стратоновича, а также на специальных методах численного моделирования повторных стохастических интегралов, входящих в эти разложения. Естественно, что данная общая теория численного решения СДУ Ито применима и к ССЛСДУ.

В данном разделе рассмотрим применение указанной общей теории (в сильном смысле) к изучаемому вопросу.

Однако, сразу оговоримся, что структура ССЛСДУ допускает построение специальных методов (см., например, разд. 11.2) численного интегрирования, основанных на точном интегральном представлении их решений и которые оказываются существенно проще в сравнении с численными методами решения этих систем, построенными согласно общей теории численного интегрирования СДУ Ито.

Унифицированное разложение Тейлора–Ито для решения системы (11.13) при  $\mathbf{g}(t) \equiv B\mathbf{u}(t)$  (здесь  $B$  — числовая матрица, а  $\mathbf{u}(t)$  — векторная функция соответствующих размерностей) и  $t > t_0$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( (t - t_0)^j A^j \mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t (t - s)^j A^j B \mathbf{u}(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t (t - s)^j A^j \Sigma d\mathbf{f}_s \right), \end{aligned} \quad (11.76)$$

где ряд сходится с вероятностью 1 для всех  $t \in (t_0, T] \subset [0, T]$ .

Отметим, что формула (11.76) может быть получена путем подстановки матричных экспонент в виде рядов в интегральное представление решения системы (11.13).

Положим в (11.76)

$$t = \tau_{k+1}, \quad t_0 = \tau_k, \quad \tau_k = k\Delta, \quad \Delta > 0; \quad k = 0, 1, \dots,$$

и заменим ряд конечной суммой. В результате получим рекуррентное представление аппроксимации  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  процесса  $\mathbf{x}_k$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{j=0}^J \frac{1}{j!} \left( \Delta^j A^j \tilde{\mathbf{x}}_k + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j A^j B \mathbf{u}(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j A^j \Sigma d\mathbf{f}_s \right), \end{aligned} \quad (11.77)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$ ;  $k = 0, 1, \dots$ . Далее на каждом шаге интегрирования необходимо моделировать совокупности стохастических интегралов Ито вида

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j d\mathbf{f}_s^{(i)}; \quad j = 0, 1, \dots, J < \infty; \quad i = 1, \dots, m,$$

входящих в правую часть (11.77).

В главах 5 и 6 рассмотрен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на обобщенных кратных рядах Фурье и, в частности, на рядах Фурье–Лежандра. Согласно этому методу (см. главу 6) с в. 1 при  $j = 0, 1, 2, 3$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{f}_s^{(i)} &= \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)}, \\ \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s) d\mathbf{f}_s^{(i)} &= \frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(i)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i)} \right), \\ \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^2 d\mathbf{f}_s^{(i)} &= \frac{\Delta^{5/2}}{3} \left( \zeta_0^{(i)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i)} \right), \\ \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^3 d\mathbf{f}_s^{(i)} &= \frac{\Delta^{7/2}}{4} \left( \zeta_0^{(i)} - \frac{3\sqrt{3}}{5} \zeta_1^{(i)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i)} - \frac{1}{5\sqrt{7}} \zeta_3^{(i)} \right), \end{aligned}$$

где

$$\zeta_j^{(i)} = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)},$$

а  $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^\infty$  — полная ортонормированная в пространстве  $L_2([\tau_k, \tau_{k+1}])$  система полиномов Лежандра.

Аналогично действуем и при  $j > 3$ :

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j d\mathbf{f}_s^{(i)} = \sum_{l=0}^j C_l \zeta_l^{(i)}; \quad j = 4, 5, \dots, \quad (11.78)$$

где

$$C_l = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j \phi_l(s) ds.$$

Несмотря на относительную простоту, разложения вида (11.78) все же неудобны, поскольку для получения приемлемой точности при численном решении ССЛСДУ (11.13) необходимо выбирать число  $J$  в (11.77) по возможности достаточно большим, что ведет к существенному усложнению вычислительной схемы.

Отметим, что сильная сходимость численного метода (11.77) может быть рассмотрена с помощью теоремы 7.2.

## Глава 12

# Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

В настоящей главе рассматриваются методы численного интегрирования СДУ со скачкообразной компонентой. При построении таких численных методов используется специальная, адаптированная к скачкам процесса Пуассона, временная дискретизация, которая позволяет раздельно численно моделировать диффузионную и скачкообразную составляющие решения СДУ со скачкообразной компонентой.

Представленные численные методы отличаются от известных в литературе способом численного моделирования диффузионной составляющей решения СДУ со скачкообразной компонентой. Различия связаны с применением унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также новых методов численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, основанных на теоремах 5.1 – 5.7\* главы 5 (см. также главу 6).

Наряду с СДУ Ито на практике интерес представляют также более общие стохастические уравнения — СДУ со скачкообразной компонентой. Данные стохастические уравнения, в частности, применяются в качестве математических моделей в стохастической финансовой математике [102], [112], [138], [139], [189], [190] (см. также главу 2) и адекватно отражают скачкообразные изменения в динамике процентных ставок, форвардных процентных ставок и цен облигаций.

Одна из первых попыток построения численных методов решения СДУ

со скачкообразной компонентой и их численной реализации была предпринята в работе [239] (D.J. Wright, 1980). В указанной работе рассматривалось скалярное СДУ со скачкообразной компонентой без диффузионного и сносового членов. В данном уравнении вместо пуассоновской меры выбирался также обычный процесс Пуассона. Для таких частных стохастических уравнений в [239] построены численные методы, причем правая часть стохастического уравнения выбиралась специальным образом.

В [24] (З.А. Дзагнидзе, Р.Я. Читашвили, 1975) рассмотрено скалярное СДУ со скачкообразной компонентой и построены численные методы решения данного уравнения. В [18] (И.И. Гихман, А.В. Скороход, 1975) рассмотрен метод Эйлера решения СДУ со скачкообразной компонентой и доказана его среднеквадратическая сходимость.

Дальнейшее развитие теория численного интегрирования СДУ со скачкообразной компонентой получила в работах [211] (E. Platen, 1982), [184] (Y. Maghsoodi, C.J. Harris, 1987), [192] (R. Mikulevicius, E. Platen, 1988), [185] (Y. Maghsoodi, 1994).

В [211] построен аналог разложения Тейлора–Ито для решения СДУ со скачкообразной компонентой и предложен подход к численному интегрированию, основанный на применении данного разложения, который позволяет "раздельно" численно моделировать диффузионную и скачкообразную компоненты решения СДУ со скачкообразной компонентой на каждом шаге интегрирования.

В [211] представлен ряд сильных, а в [192] — слабых численных методов решения СДУ со скачкообразной компонентой, которые основаны на данном подходе, а также доказана сходимость этих численных методов. Таким образом, благодаря работам [192], [211] можно численно решать СДУ со скачкообразной компонентой так, что на каждом шаге интегрирования диффузионная и скачкообразная компоненты решения моделируются "раздельно". Это означает, что для численного моделирования диффузионной компоненты решения можно использовать численные методы решения СДУ Ито, которым посвящено большое число работ (см. библиографию к данной книге), а также несколько глав настоящей монографии.

В данной главе приводятся основные результаты по численному интегрированию СДУ со скачкообразной компонентой, полученные в [192], [211]. Кроме того, предлагаются модификации численных методов, построенных в [192], [211], которые отличаются от своих аналогов способом моделирования диффузионной составляющей решения СДУ со скачкообразной

компонентой. При этом различия связаны с использованием унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также новых методов численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (см. главы 5 и 6).

## 12.1 Разложение Тейлора–Ито для решений стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — фиксированное вероятностное пространство, а  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  — неубывающее, непрерывное справа семейство  $\sigma$ -подалгебр  $\mathcal{F}$ . Рассмотрим следующую систему СДУ со скачкообразной компонентой:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) ds + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s + \int_0^t \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_s, s, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}), \quad (12.1)$$

где  $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$  — решение системы (12.1);  $\mathbf{f}_s$  —  $\mathcal{F}_s$ -измеримый при всех  $s \in [0, T]$   $m$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_s^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \stackrel{\text{def}}{=} X$ ;  $\nu(ds, d\mathbf{y})$  — пуассоновская мера, заданная в  $[0, T] \times X$  и независимая с винеровским процессом  $\mathbf{f}_s$ ;

$$\tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}) = \nu(ds, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})ds$$

— мартингальная пуассоновская мера;

$$\mathbb{M}\{\nu(ds, d\mathbf{y})\} = \Pi(d\mathbf{y})ds;$$

$\Pi(d\mathbf{y})ds$  — мера интенсивности;  $\Pi(X) < \infty$ ;  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  — матричные функции, удовлетворяющие условиям теоремы 1.12 о существовании и единственности решения уравнения (12.1);  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина. Второй интеграл в правой части (12.1) понимается как стохастический интеграл Ито, а третий — как стохастический интеграл по мартингальной пуассоновской мере (см. главу 1).

Далее в настоящем разделе будем использовать компактные обозначения, принятые в [211].

Пусть

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(i_1, \dots, i_k) : k \in N, i_l = 0, 1, \dots, m+1; l = 1, \dots, k\},$$

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \dots, i_k), \quad l(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} k \geq 1, \quad -\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (i_2, \dots, i_k), \quad \alpha^- \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \dots, i_{k-1}).$$

Через  $\mathcal{G}_k([0, T])$ ;  $k = 0, 1, \dots$  обозначим класс  $F_t$ -измеримых функций

$$G(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega) : [0, T] \times X^k \times \Omega \rightarrow \Re^n,$$

для которых

$$\mathsf{M} \left\{ \int_0^T \int_X \dots \int_X |G(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega)|^2 \Pi(d\mathbf{y}_1) \dots \Pi(d\mathbf{y}_k) dt \right\} < \infty,$$

где повторный интеграл понимается как предел последовательности ступенчатых функций  $G_p(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega)$ , которые непрерывны слева,  $F_t$ -измеримы и для которых величина:

$$\mathsf{M} \left\{ \int_0^T \int_X \dots \int_X |G(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega) - G_p(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega)|^2 \Pi(d\mathbf{y}_1) \dots \Pi(d\mathbf{y}_k) dt \right\}$$

стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$ .

Положим

$$I_\alpha[G(\cdot)]_{\tau, t} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_t^\tau I_{\alpha^-}[G(\cdot)]_{s, t} ds & \text{при } i_{l(\alpha)} = 0 \\ \int_t^\tau I_{\alpha^-}[G(\cdot)]_{s, t} d\mathbf{f}_s^{(i_{l(\alpha)})} & \text{при } i_{l(\alpha)} = 1, \dots, m, \\ \int_t^\tau \int_X I_{\alpha^-}[G(\cdot)]_{s, t} \tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}_{z(\alpha)}) & \text{при } i_{l(\alpha)} = m + 1 \end{cases}$$

где

$$G(\cdot, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \stackrel{\text{def}}{=} G(\cdot);$$

$z(\alpha)$  — число компонент мультииндекса  $\alpha$ , которые равны  $m + 1$ ;  $G(\cdot) \in \mathcal{G}_{z(\alpha)}([0, T])$ ;  $t, \tau$  — моменты остановки, для которых  $0 \leq t \leq \tau \leq T$  с вероятностью 1.

Пусть  $D_n([0, T])$  — множество непрерывных справа функций  $\xi(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \Re^n$ , имеющих пределы слева.

Введем в рассмотрение множества  $\mathcal{L}_i$ ;  $i = 0, 1, \dots, m + 1$  функций  $g(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$  следующим образом:  $\mathcal{L}_0$  — множество функций  $g(\mathbf{x}, t)$ , для которых существуют частные производные

$$\frac{\partial g}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \quad i, j = 1, \dots, n$$

и при всех  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x} \in \Re^n$  функция

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), t) - g(\mathbf{x}, t) - \sum_{k=1}^n \mathbf{c}^{(k)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t)$$

является  $\Pi(dy)$ -интегрируемой;  $\mathcal{L}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — множества функций  $g(\mathbf{x}, t)$ , для которых существуют частные производные

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t); \quad i = 1, \dots, n,$$

а  $\mathcal{L}_{m+1}$  — множество функций  $g(\mathbf{x}, t)$ , для которых функция

$$(g(\mathbf{x} + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), t) - g(\mathbf{x}, t))^2$$

является  $\Pi(dy)$ -интегрируемой при всех  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x} \in \Re^n$ .

Определим операторы  $L_i$ ;  $i = 0, 1, \dots, m+1$  на множествах  $\mathcal{L}_i$ ;  $i = 0, 1, \dots, m+1$  соотношениями ( $t \in [0, T]$ ,  $\xi_t \in D_n([0, T])$ ):

$$\begin{aligned} L_0 g(\xi_t, t) &= \frac{\partial g}{\partial t}(\xi_t, t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{a}^{(k)}(\xi_t, t) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t, t) \sum_{i=1}^m \Sigma^{(ki)}(\xi_t, t) \Sigma^{(ji)}(\xi_t, t) + \\ &+ \int_X \left( g(\xi_t + \mathbf{c}(\xi_t, t, \mathbf{y}), t) - g(\xi_t, t) - \sum_{k=1}^n \mathbf{c}^{(k)}(\xi_t, t, \mathbf{y}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t, t) \right) \Pi(dy), \\ L_i g(\xi_t, t) &= \sum_{k=1}^n \Sigma^{(ki)}(\xi_t, t) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t, t), \quad i = 1, \dots, m, \\ L_{m+1} g(\xi_t, t) &= g(\xi_{t-} + \mathbf{c}(\xi_t, t, \mathbf{y}), t) - g(\xi_{t-}, t). \end{aligned}$$

Для всех  $\alpha = (i_1, \dots, i_{l(\alpha)})$  определим функции  $F_\alpha : \Re^n \times [0, T] \times X^{z(\alpha)} \rightarrow \Re^n$  следующим образом:

$$F_\alpha(\xi_t, t) = \begin{cases} \mathbf{a}(\xi_t, t) & \text{при } l(\alpha) = 1, i_1 = 0 \\ \Sigma_{i_1}(\xi_t, t) & \text{при } l(\alpha) = 1, i_1 = 1, \dots, m \\ \mathbf{c}(\xi_t, t, \mathbf{y}_1) & \text{при } l(\alpha) = 1, i_1 = m+1 \\ L_{i_1} F_{-\alpha}(\xi_t, t) & \text{при } l(\alpha) \geq 2, i_1 = 0, 1, \dots, m+1 \end{cases},$$

где

$$F_\alpha(\xi_t, t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \stackrel{\text{def}}{=} F_\alpha(\xi_t, t);$$

$t \in [0, T]$ ;  $\xi_t \in D_n([0, T])$ ;  $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ .

Приведем формулировку доказанной в [211] теоремы об аналоге разложения Тейлора–Ито для решения СДУ (12.1).

**Теорема 12.1.** [211]. Пусть для  $A \subset \mathcal{M}$ ,  $A \neq \emptyset$  выполнены условия:

1.  $\sup_{\alpha \in A} l(\alpha) < \infty$ .
2.  $-\alpha \in A$  для всех  $\alpha \in A$ .
3.  $F_{-\alpha} \in \bigcap_{i=0}^{m+1} \mathcal{L}_i$  для всех  $\alpha \in A \cup B(A)$ ;  $B(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus A : -\alpha \in A\}$ .
4.  $F_\alpha(\mathbf{x}_s, s, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \in \mathcal{G}_{z(\alpha)}([0, T])$  для всех  $\alpha \in A$  и всех моментов остановки  $s \in [0, T]$ .
5.  $F_\alpha(\mathbf{x}_t, t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \in \mathcal{G}_{z(\alpha)}([0, T])$  для всех  $\alpha \in B(A)$ .

Тогда для любых двух моментов остановки  $s, \tau$  таких, что

$$\mathbb{P}\{0 \leq \tau \leq s \leq T\} = 1,$$

с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_\tau + \sum_{\alpha \in A} I_\alpha[F_\alpha(\mathbf{x}_\tau, \tau)]_{s,\tau} + \sum_{\alpha \in B(A)} I_\alpha[F_\alpha(\mathbf{x}_\cdot, \cdot)]_{s,\tau}, \quad (12.2)$$

где

$$F_\alpha(\mathbf{x}_t, t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \stackrel{\text{def}}{=} F_\alpha(\mathbf{x}_t, t),$$

а  $\mathbf{x}_t$  — решение СДУ (12.1).

## 12.2 Сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

Нетрудно видеть, что разложение (12.2) может быть использовано для построения численных методов решения СДУ со скачкообразной компонентой подобно тому, как разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича использовались для построения численных методов решения СДУ Ито.

Формула (12.2) включает в себя повторные стохастические интегралы не только по винеровскому процессу, но и по мартингальной пуассоновской мере. Во избежание проблем, связанных с аппроксимацией повторных стохастических интегралов по мартингальной пуассоновской мере,

при построении численных методов решения СДУ (12.1) можно выбрать специальное, адаптированное к скачкам процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  разбиение промежутка  $[0, T]$  [192], [211]. При этом удается добиться того, что на каждом шаге интегрирования диффузионная и скачкообразная компоненты решения моделируются "раздельно".

Рассмотрим указанный подход подробнее, опираясь на работы [192], [211]. В данном разделе вернемся к принятым ранее в настоящей книге обозначениям.

Процесс Пуассона  $\nu([0, t), X)$ ,  $t \in [0, T]$  с интенсивностью  $\Pi(X) < \infty$  генерирует последовательность моментов своих скачков, которые очевидно являются моментами скачков и процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , являющегося решением уравнения (12.1).

Введем в рассмотрение последовательность  $\{\tau_j\}_{j=0}^{\infty}$  моментов остановки, для которой

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n_T+1} = T, \quad n_T < \infty \text{ с в. 1,}$$

$$\max_{1 \leq i \leq n_T+1} |\tau_i - \tau_{i-1}| \leq \Delta \text{ с в. 1,}$$

где  $n_t = \max\{i : \tau_i < t\}$  для всех  $t \in [0, T]$ .

Предполагается также, что среди  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n_T+1}$  встречаются все моменты скачков процесса  $\nu([0, t), X)$ ,  $t \in [0, T]$  не превосходящие  $T$ , и если  $\tau_{i+1}$  не является моментом скачка процесса  $\nu([0, t), X)$ ,  $t \in [0, T]$ , то он  $F_{\tau_i}$ -измерим.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{\tau_i} + \int_{\tau_i}^t \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_s, s) ds + \int_{\tau_i}^t \Sigma(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s \text{ с в. 1,} \quad (12.3)$$

где

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})$$

и  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ ;  $i = 0, 1, \dots, n_T$ .

В то же время

$$\mathbf{x}_{\tau_i} = \mathbf{x}_{\tau_{i-}} + \int_{\tau_{i-}}^{\tau_{i+1}-} \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i-}}, \tau_i, \mathbf{y}) \nu(ds, d\mathbf{y}), \quad (12.4)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n_T + 1$ .

Из (12.3), (12.4) получаем

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\tau_{i+1}-} = \mathbf{x}_{\tau_i} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_s, s) ds + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} \Sigma(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s \\ \mathbf{x}_{\tau_{i+1}} = \mathbf{x}_{\tau_{i+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{i+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases} \quad (12.5)$$

с вероятностью 1, где  $i = 0, 1, \dots, n_T$ .

Если момент  $\tau_{i+1}$  в (12.5) является моментом скачка процесса Пуассона, то в [24], [192] предлагается численно моделировать стохастический интеграл во втором соотношении (12.5) по формуле

$$\int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{i+1}\}, d\mathbf{y}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \xi_{i+1}),$$

где  $\xi_i; i = 1, \dots, n_T + 1$  — независимые,  $\Pi(d\mathbf{y})/\Pi(X)$  — распределенные случайные величины.

При этом, как известно, временные интервалы между последовательными скачками процесса Пуассона являются независимыми и экспоненциально распределенными с параметром  $\Pi(X)$  случайными величинами, т. е.

$$\mathbb{P}\{\theta_{i+1} - \theta_i > t\} = \exp(-\Pi(X)t),$$

где  $\theta_i, \theta_{i+1}$  — последовательные моменты скачков процесса Пуассона.

Согласно (12.3) между моментами скачков процесса  $\nu([0, t], X)$ ,  $t \in [0, T]$  процесс Ито  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  описывается СДУ Ито, численным методам интегрирования которых было посвящено несколько предыдущих глав книги.

Пусть  $\mathcal{L}$  — множество функций  $R(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^n$ , для которых при всех  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ,  $t \in [0, T]$  существуют и непрерывны следующие частные производные

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Формулы (12.5) позволяют конструировать численные методы решения СДУ (12.1).

Так, в [211] предложено следующее семейство явных сильных численных методов, основанных на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}'_{qk}}^{(p_k)} (\tilde{Q}_{\lambda_k} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\})^{p_k} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(p_k)}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{array} \right. , \quad (12.6)$$

где  $p = 0, 1, \dots, n_T$ ;

$$(\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(p_k)})^{(i_k \dots i_1)} = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k};$$

$$\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)}$$

— аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)};$$

$\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_t^{(0)} = \tau$ ;  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  — независимые стандартные винеровские процессы;  $\lambda_l = 1$  или  $\lambda_l = 0$ ;

$$p_l = \sum_{j=1}^l \lambda_j;$$

$\tilde{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \tilde{L}$  и  $i_l = 0$  при  $\lambda_l = 0$ ;  $\tilde{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$  и  $i_l = 1, \dots, m$  при  $\lambda_l = 1$ ;  
 $l = 1, \dots, k$ ;

$$\mathcal{E}'_{qk} = \mathcal{E}_{qk} \cup \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \text{ и } 2k = q + 1\};$$

операторы  $\tilde{L}$  и  $G_0^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{L}R(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{a}}^{(k)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \sum_{i=1}^m \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t); \\ G_0^{(i)}R(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Здесь  $R(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$ ;

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}).$$

Через  $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}; p = 0, 1, \dots, n_T + 1$  будем обозначать дискретную аппроксимацию, которая отличается от дискретной аппроксимации  $\mathbf{y}_{\tau_p}; p = 0, 1, \dots, n_T + 1$  вида (12.6) тем, что в  $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$  производится замена

$${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_p, \tau_{p-1}} \text{ на } {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_p, \tau_{p-1}}.$$

В [211] сформулировано и доказано следующее утверждение.

**Теорема 12.2.** [211]. Пусть для данных  $r \in N, \Delta > 0$  выполнены следующие условия:

1. Для всех  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q,k=1}^r \mathcal{E}'_{qk}, t \in [0, T]$  и  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Re^n$ :

$$\left| \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} - \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{z} \right| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{z}|, \quad K_1 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - \mathbf{c}(\mathbf{z}, t, \mathbf{y})| \leq C_1(\mathbf{y}) |\mathbf{x} - \mathbf{z}|,$$

где  $(C_1(\mathbf{y}))^2 = \Pi(dy)$ -интегрируемая функция.

2. Для всех  $p \in \{0, 1, \dots, n_T\} : \tau_{p+1} - \mathbf{F}_{\tau_p}$ -измеримая случайная величина, если  $\tau_{p+1}$  не является моментом скачка процесса Пуассона

$$\nu([0, t), X), \quad t \in [0, T] \text{ и } \mathsf{P}\{\tau_{p+1} - \tau_p \leq \Delta\} = 1.$$

3. Для всех  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{M}_q$ :

$$\tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \quad \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_{\tau_p} \in \mathcal{G}_0([0, T]);$$

$p \in \{0, 1, \dots, n_T + 1\}$  и для всех  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}$ :

$$\tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_0([0, T]).$$

4. Для всех  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q=1}^{r+1} \mathcal{M}_q, t \in [0, T], \mathbf{x} \in \Re^n$  и  $\mathbf{y} \in X$ :

$$\left| \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right| \leq K_2(1 + |\mathbf{x}|), \quad K_2 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| \leq C_2(\mathbf{y})(1 + |\mathbf{x}|),$$

где  $(C_2(\mathbf{y}))^2 = \Pi(dy)$ -интегрируемая функция; здесь

$$\mathcal{M}_q = \{(\lambda_q, \dots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0, 1\}; l = 1, \dots, q\}.$$

5. Для всех  $s, t \in [0, T], \mathbf{x} \in \Re^n, \mathbf{y} \in X$  и  $i = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| &\leq K_3(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{1/2}, \quad K_3 < \infty, \\ |\Sigma_i(\mathbf{x}, s) - \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| &\leq K_4(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{1/2}, \quad K_4 < \infty, \\ |\mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) - \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| &\leq C_3(\mathbf{y})(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $(C_3(\mathbf{y}))^2$  —  $\Pi(dy)$ -интегрируемая функция;  $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$  —  $i$ -й столбец матрицы  $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{y}}_t|^2 |F_0 \right\} &\leq K_5(1 + |\mathbf{x}_0|^2)\Delta^r + \\ &+ K_6|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0|^2, \end{aligned} \quad (12.7)$$

где постоянные  $K_5, K_6$  не зависят от  $\Delta$ , и

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_t = \bar{\mathbf{y}}_0 + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}'_{qk}} &\left[ \sum_{p=0}^{n_t-1} {}^{(p_k)}\tilde{Q}_{\lambda_k} \dots {}^{(p_k)}\tilde{Q}_{\lambda_1} \{ \bar{\mathbf{y}}_{\tau_p} \} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p} + \right. \\ &+ {}^{(p_k)}\tilde{Q}_{\lambda_k} \dots {}^{(p_k)}\tilde{Q}_{\lambda_1} \{ \bar{\mathbf{y}}_{\tau_{n_t}} \} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}} \Big] + \\ &+ \int_0^t \int_X \mathbf{c}(\bar{\mathbf{y}}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s}, \mathbf{y}) \nu(ds, d\mathbf{y}); \end{aligned} \quad (12.8)$$

$t \in [0, T]$ ;  $\bar{\mathbf{y}}_0, \mathbf{x}_0$  —  $F_0$ -измеримые случайные величины.

Если предположить, что дополнительно к условиям теоремы 12.2 выполнены условия

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty, \quad (12.9)$$

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0|^2\} \leq K_7\Delta^r, \quad K_7 < \infty, \quad (12.10)$$

то из (12.7) получаем следующую оценку [211]:

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{y}}_t|^2 \right\} \leq K_8\Delta^r,$$

где постоянная  $K_8$  не зависит от  $\Delta$ .

Следует отметить, что теорема 12.2 фактически обобщает результат среднеквадратической сходимости метода Эйлера для стохастического дифференциального уравнения (12.1), полученный в [18].

Предположим, что кроме условий теоремы 12.2 и условий (12.9), (12.10) выполнены условия

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} \leq C_0\Delta^r,$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq C \Delta^{r+1},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left( J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}}^{(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq C \Delta^{r+1}$$

для всех  $p \in \{0, 1, \dots, n_t - 1\}$  и

$$(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q,k=1}^r \mathcal{E}_{qk}, \quad \sum_{q=1}^k i_q^2 > 0,$$

где  $C_0, C < \infty$  — постоянные, а  $\mathbf{y}_0$  —  $F_0$ -измеримая случайная величина.

Тогда нетрудно получить следующую оценку:

$$\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|^2 \} \leq C_1 \Delta^r,$$

где постоянная  $C_1$  не зависит от  $\Delta$ , а процесс  $\mathbf{y}_t$ ,  $t \in [0, T]$  получаем из процесса  $\bar{\mathbf{y}}_t$ ,  $t \in [0, T]$  вида (12.8) путем замены в (12.8)

$$(p_k) J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}; \quad p = 0, 1, \dots, n_t - 1 \text{ и } (p_k) J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}}$$

на

$$(p_k) \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}; \quad p = 0, 1, \dots, n_t - 1 \text{ и } (p_k) \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}}$$

соответственно.

Для аппроксимации величины  $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$  из (12.5) можно использовать разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена. Тогда вместо (12.6) при четном  $r$  получаем, в частности, следующую численную схему:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} (p_k) \tilde{D}_{\lambda_k} \dots \tilde{D}_{\lambda_1} \{ \mathbf{y}_{\tau_p} \} \stackrel{p_k}{\cdot} (p_k) \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^*, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases}, \quad (12.11)$$

где  $p = 0, 1, \dots, n_T$ ;

$$(p_k) \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k};$$

$$\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)}$$

— аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)};$$

$\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ ;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые стандартные винеровские процессы;  $\lambda_l = 1$  или  $\lambda_l = 0$ ;

$$p_l = \sum_{j=1}^l \lambda_j;$$

$$\tilde{D}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \tilde{L} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)} \text{ и } i_l = 0 \text{ при } \lambda_l = 0;$$

$$\tilde{D}_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)} \text{ и } i_l = 1, \dots, m \text{ при } \lambda_l = 1;$$

$$l = 1, \dots, k;$$

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0, 1\}; 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q; l = 1, \dots, k\};$$

операторы  $\tilde{L}$  и  $G_0^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  такие же, как в (12.6).

Отметим, что разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена были получены для моментов остановки, в то время как унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича — для постоянных моментов времени (см. главу 4). Это означает, что формально нельзя заменить правые части (12.6) и (12.11) на аналогичные выражения, полученные с помощью унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Однако если все узлы разбиения  $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$  вычислены до старта численного метода или вычислены заранее хотя бы последующий по отношению к текущему шагу интегрирования узел, то очевидно (12.6) или (12.11) можно заменять аналогичными выражениями, полученными с помощью унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Рассмотрим разбиения  $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ , для которых выполняются указанные требования.

Ранее отмечалось, что процесс Пуассона  $\nu([0, t], X)$ ,  $t \in [0, T]$  с интенсивностью  $\Pi(X) < \infty$  генерирует последовательность моментов своих скачков, которые являются одновременно моментами скачков и процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Поскольку последовательность моментов скачков процесса Пуассона может быть численно смоделирована заранее, то последовательность моментов скачков процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  не умаляя общности, можно считать известной и фиксированной.

Одним из разбиений  $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$  может являться разбиение, представляющее собой суперпозицию некоторого детерминированного разбиения с рангом дробления  $\Delta$  и последовательности моментов скачков процесса  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  [211]. В данном случае способ вычисления узлов разбиения  $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$  очевиден.

Рассмотрим другой способ построения разбиения  $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$  [211]. В момент времени  $\tau_0$  вычисляется  $F_{\tau_0}$ -измеримый случайный момент  $\tilde{\tau}_1$ , для которого  $\tilde{\tau}_1 - \tau_0 \leq \Delta$  с вероятностью 1. Если между  $\tau_0$  и  $\tilde{\tau}_1$  скачки процесса  $\nu([0, t], X)$ ,  $t \in [0, T]$  отсутствуют, то полагаем  $\tilde{\tau}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_1$ . В противном случае за  $\tau_1$  принимается первый после  $\tau_0$  скачок процесса  $\nu([0, t], X)$ ,  $t \in [0, T]$ . Аналогичным образом определяем момент  $\tau_2$ , и т. д.

Очевидно, что описанные способы вычисления узлов разбиения  $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$  допускают использование унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича для построения численных методов решения СДУ со скачкообразной компонентой, так как a priori позволяют получать численные значения случайных величин  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n_T+1}$  перед стартом (или в процессе) реализации численного метода.

При использовании для аппроксимации величины  $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$  из (12.5) унифицированных разложений Тейлора–Ито получаем следующие численные схемы для уравнения (12.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}'_q} ((\Delta_p)^j / j!) \cdot {}^{(k)}\tilde{G}_{l_1} \dots \tilde{G}_{l_k} \tilde{L}^j \{ \mathbf{y}_{\tau_p} \}^k \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{array} \right. , \quad (12.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}'_q} ((\Delta_p)^j / j!) \cdot {}^{(k)}\tilde{L}^j \tilde{G}_{l_1} \dots \tilde{G}_{l_k} \{ \mathbf{y}_{\tau_p} \}^k \cdot {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{array} \right. , \quad (12.13)$$

где  $p = 0, 1, \dots, n_T$ ;  $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$ ;

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m; \quad {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m;$$

$$\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \text{ и } \hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$$

— аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида

$$I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{t_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}$$

и

$$J_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_{p+1} - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{t_2} (\tau_{p+1} - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}$$

соответственно;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые стандартные винеровские процессы;

$$\mathcal{D}'_q = \mathcal{D}_q \cup \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k = l_1 = \dots = l_k = 0 \text{ и } 2j = q + 1\};$$

$$\tilde{G}_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left( \tilde{G}_{p-1}^{(i)} \tilde{L} - \tilde{L} \tilde{G}_{p-1}^{(i)} \right); \quad p = 1, 2, \dots; \quad i = 1, \dots, m;$$

операторы  $\tilde{L}$  и  $\tilde{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  такие же, как в (12.6).

Если для аппроксимации величины  $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$  из (12.5) используются унифицированные разложения Тейлора–Стратоновича, то при четном  $r$  получаем, в частности, следующие численные схемы для уравнения (12.1):

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} ((\Delta_p)^j / j!) \cdot {}^{(k)}\hat{G}_{l_1} \dots \hat{G}_{l_k} \hat{L}^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\}^k \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^* \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases}, \quad (12.14)$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} ((\Delta_p)^j / j!) \cdot {}^{(k)}\hat{L}^j \hat{G}_{l_1} \dots \hat{G}_{l_k} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\}^k \cdot {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^* \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases}, \quad (12.15)$$

где  $p = 0, 1, \dots, n_T$ ;  $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$ ;

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m; \quad {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m;$$

$$\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} \text{ и } \hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)}$$

— аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича

$$I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{*t_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1 \\ 1 & \text{при } k = 1 \end{cases}$$

и

$$J_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} (\tau_{p+1} - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{*t_2} (\tau_{p+1} - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1 \\ 1 & \text{при } k = 1 \end{cases}$$

соответственно;  $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые стандартные винеровские процессы;

$$\hat{G}_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left( \hat{G}_{p-1}^{(i)} \hat{L} - \hat{L} \hat{G}_{p-1}^{(i)} \right); \quad p = 1, 2, \dots; \quad i = 1, \dots, m;$$

$$\hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{L} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}; \quad \hat{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}; \quad i = 1, \dots, m;$$

остальные обозначения такие же, как в (12.6), (12.12), (12.13).

Отметим, что нетрудно переформулировать теорему 12.2 для численных схем (12.11)–(12.15).

### 12.3 Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

В настоящем разделе рассмотрим слабые численные методы решения СДУ (12.1) в автономном случае, т. е. когда

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}), \Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \Sigma(\mathbf{x}), \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Для построения слабых численных методов решения СДУ (12.1) в автономном случае в [192] используются соотношения (12.5) в автономном случае и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)} \check{Q}_{\lambda_k} \dots \check{Q}_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{array} \right. , \quad (12.16)$$

где  $p = 0, 1, \dots, n_T$ ;

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0, 1\}; l = 1, \dots, k\};$$

$\check{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \check{L}$  и  $i_l = 0$  при  $\lambda_l = 0$ ;  $\check{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \check{G}_0^{(i_l)}$  и  $i_l = 1, \dots, m$  при  $\lambda_l = 1$ ;  
 $l = 1, \dots, k$ ; операторы  $\check{L}$  и  $\check{G}_0^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  имеют вид

$$\begin{aligned} \check{L}R(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{a}}^{(k)}(\mathbf{x}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \sum_{i=1}^m \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}) \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t); \\ \check{G}_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Здесь  $R(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$ ;

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y});$$

остальные обозначения, входящие в (12.16), такие же, как в (12.6).

Через  $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$ ;  $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$  будем обозначать дискретную аппроксимацию, которая отличается от дискретной аппроксимации  $\mathbf{y}_{\tau_p}$ ;  $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$  вида (12.16) тем, что в  $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$ ;  $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$  производится замена

$${}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_p, \tau_{p-1}} \text{ на } {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_p, \tau_{p-1}}.$$

В [192] сформулировано и доказано следующее утверждение.

**Теорема 12.3.** [192]. Пусть для фиксированного  $r \in N$  выполнены условия:

1. Функция  $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  принадлежит классу  $C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$  (см. главу 10).
2. Функции  $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \Sigma(\mathbf{x}), \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  2( $r+1$ ) раз непрерывно дифференцируемы и их производные ограничены.
3. Для всех  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{M}_q$  и  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\left| \check{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \check{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right| \leq K(1 + |\mathbf{x}|), \quad K < \infty.$$

Тогда

$$|\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\bar{\mathbf{y}}_T)\}| \leq C\Delta^r,$$

где постоянная  $C < \infty$  не зависит от  $\Delta$ .

Предположим, что аппроксимации повторных стохастических интегралов, входящие в (12.16), удовлетворяют следующему набору моментных условий:

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)}, \dots, \lambda_1^{(g)}) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_{k_g}^{(g)}, \dots, i_1^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \hat{J}_{(\lambda_{k_g}^{(g)}, \dots, \lambda_1^{(g)}) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_{k_g}^{(g)}, \dots, i_1^{(g)})} | F_{\tau_p} \right\} \right| \leq K_1 \Delta^{r+1} \quad (12.17)$$

при всех

$$p = 0, 1, \dots, n_T; \quad (\lambda_{k_g}^{(g)}, \dots, \lambda_1^{(g)}) \in \mathcal{M}_{k_g}; \quad i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 0, 1, \dots, m;$$

$$k_g \leq r; \quad g = 1, \dots, l; \quad l = 1, 2, \dots, 2r + 1,$$

где  $K_1 < \infty$  — постоянная.

Нетрудно показать, что если выполнены условия теоремы 12.3 и условие (12.17), то справедлива оценка

$$|\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| \leq C_1 \Delta^r, \quad (12.18)$$

где постоянная  $C_1 < \infty$  не зависит от  $\Delta$ , а  $\mathbf{y}_T$  определяется равенствами (12.16) при  $p = n_T$ .

Если предположить, что узлы разбиения  $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$  вычислены до старта численной схемы или на каждом  $p$ -м шаге интегрирования вычислен заранее узел  $\tau_{p+1}$ , то правую часть (12.16) можно заменить аналогичными выражениями, полученными с помощью унифицированных разложений Тейлора–Ито. Соответствующие численные схемы имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} ((\Delta_p)^j/j!) \cdot {}^{(k)}\check{G}_{l_1} \dots \check{G}_{l_k} \check{L}^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\}^k \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{array} \right. , \quad (12.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} ((\Delta_p)^j/j!) \cdot {}^{(k)}\check{L}^j \check{G}_{l_1} \dots \check{G}_{l_k} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\}^k \cdot {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{array} \right. , \quad (12.20)$$

где  $p = 0, 1, \dots, n_T$ ;  $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$ ;

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q, k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\};$$

$$\check{G}_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left( \check{G}_{p-1}^{(i)} \check{L} - \check{L} \check{G}_{p-1}^{(i)} \right); p = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m;$$

операторы  $\check{L}$  и  $\check{G}_0^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  такие же, как в (12.16); остальные обозначения, введенные в (12.19), (12.20), такие же, как в (12.12), (12.13).

Для того, чтобы для численной схемы (12.19) выполнялась оценка (12.18) достаточно потребовать выполнения условий 1, 2 теоремы 12.3, а также выполнения следующих условий:

(I) Для всех  $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{A}_q$  и  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  имеет место:

$$|\check{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \check{G}_{l_k}^{(i_k)} \check{L}^j \{\mathbf{x}\}| \leq K(1 + |\mathbf{x}|), \quad K < \infty,$$

где  $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ .

(II) Для всех

$$(k_g, j_g, l_1^{(g)}, \dots, l_{k_g}^{(g)}) \in \mathcal{A}_{q_g}; i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 1, \dots, m; q_g \leq r;$$

$$g = 1, \dots, l; l = 1, 2, \dots, 2r + 1; p = 0, 1, \dots, n_T$$

выполнено условие:

$$\left| M \left\{ \prod_{g=1}^l \frac{\Delta^{j_g}}{j_g!} I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1^{(g)}) \dots (i_{k_g}^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \frac{\Delta^{j_g}}{j_g!} \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1^{(g)}) \dots (i_{k_g}^{(g)})} | F_{\tau_p} \right\} \right| \leq K_1 \Delta^{r+1},$$

где  $K_1 < \infty$  — постоянная.

Нетрудно также сформулировать аналоги условий (I) и (II) для численной схемы (12.20).

## **Часть IV**

# **Численное моделирование: алгоритмы, программы, результаты**

# Глава 13

## Компьютерная программа в системе MATLAB 7.0 для численного моделирования решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

В настоящей главе рассматривается программа в системе MATLAB 7.0, позволяющая численно моделировать решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений (ССЛСДУ).

### 13.1 Введение

ССЛСДУ весьма часто встречаются в качестве математических моделей динамических систем находящихся под воздействием случайных возмущений, а также широко используются при решении математических задач, таких как задача линейной стационарной фильтрации Калмана–Бьюси, задача о стохастическом оптимальном управлении, задача о тестировании процедур оценивания параметров и т.д. (см. главу 2, а также часть III монографии [148]).

Помимо своей важности для приложений, ССЛСДУ, как мы видели в главе 11, допускают построение специальных и достаточно эффективных численных методов своего решения, которые не используют численного моделирования повторных стохастических интегралов, что является сложной во многих отношениях проблемой (см. главы 5 и 6). Кроме того, указанные

методы весьма "спокойно" реагируют на повышение размерности системы ССЛСДУ.

В данной главе приводится текст программы в системе MATLAB 7.0, которая позволяет численно моделировать решения ССЛСДУ общего вида, при этом допускается выбор размерностей вектора состояния (решения) ССЛСДУ, векторного винеровского процесса и матриц правой части ССЛСДУ.

## 13.2 Математическая модель объекта моделирования

Предлагаемая ниже программа в системе MATLAB 7.0 позволяет моделировать численно на временной сетке с постоянным шагом  $\Delta > 0 : t_k = k\Delta; k = 0, 1, \dots$  решение ССЛСДУ вида

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t)) dt + F d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0),$$

где  $\mathbf{x}_t \in \Re^n$  — решение ССЛСДУ;  $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \Re^k$  — детерминированное внешнее возмущение, которое может интерпретироваться как управляющее воздействие;  $\mathbf{y}_t \in \Re^1$  — процесс на выходе, численная реализация которого является целью моделирования;  $H^\top \in \Re^n$ ,  $A \in \Re^{n \times n}$ ,  $F \in \Re^{n \times m}$ ,  $B \in \Re^{n \times k}$  — числовые матрицы;  $\mathbf{f}_t \in \Re^m$  — стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $n, m, k \geq 1$ .

В зависимости от вида числовой матрицы-строки  $H$  на выходе системы можно получать любую из компонент решения  $\mathbf{x}_t$ , а также различные линейные комбинации компонент этого решения.

Шаг интегрирования  $\Delta$  предполагается настолько малым, что детерминированное воздействие  $\mathbf{u}(t)$  с достаточной степенью точности может быть аппроксимировано кусочно-постоянной функцией  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$  при  $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]; k = 0, 1, \dots$ , где  $\mathbf{u}(k\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_k$ .

Такое предположение вводится для того, чтобы сосредоточить основное внимание на особенностях численного моделирования стохастического интеграла, входящего в интегральное представление решения ССЛСДУ (см. главу 11).

При введенном предположении с помощью формулы Коши может быть получено (см. главу 11) следующее рекуррентное соотношение для решения

ССЛСДУ:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \exp(A\Delta)\mathbf{x}_k + A^{-1}\left(\exp(A\Delta) - I\right)B\mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \quad (13.1)$$

где  $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$ ;  $\mathbf{y}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k$ ;  $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \in \Re^n$  — случайный столбец, который вычисляется по формуле

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1};$$

$\bar{\mathbf{f}}_k \in \Re^n$  — столбец из независимых стандартных гауссовских случайных величин, причем  $M\{\bar{\mathbf{f}}_k \bar{\mathbf{f}}_r^\top\} = O_{n \times n}$  при  $k \neq r$ , где  $O_{n \times n}$  — нулевая  $(n \times n)$ -матрица;  $S_D(\Delta)$  — матрица ортонормированных собственных векторов матрицы  $D_f(\Delta)$  вида

$$D_f(\Delta) = M\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^\top(\Delta)\} = \int_0^\Delta \exp(A(\Delta - \tau))FF^\top \exp(A^\top(\Delta - \tau))d\tau,$$

которую получают как решение  $D_f(t)$  при  $t = \Delta$  матричного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dD_f}{dt}(t) = AD_f(t) + D_f(t)A^\top + FF^\top, \quad D_f(0) = O_{n \times n};$$

$\Lambda_D(\Delta)$  — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы  $D_f(\Delta)$ .

Выходом системы (13.1) считаем  $\mathbf{y}_k = H\mathbf{x}_k$ .

Ранее (см. главу 11) мы назвали первое слагаемое, входящее в правую часть (13.1), *переходной* или *динамической* составляющей, второе — *систематической* составляющей, а третье — *случайной* составляющей решения ССЛСДУ. В дальнейшем будем придерживаться этой терминологии.

### 13.3 Задачи, решаемые программой

Рекуррентное соотношение (13.1) положено в основу приводимого далее текста программы в системе MATLAB 7.0 для численного моделирования решений ССЛСДУ.

Программа позволяет решать следующие задачи:

1. Вводить в диалоговом режиме необходимые для моделирования исходные параметры задачи, причем следует обратить внимание, что па-

метры  $n$ ,  $m$ ,  $k$  можно вводить в зависимости от потребностей пользователя, т.е. размерность вектора состояния, винеровского процесса и детерминированного управляющего воздействия может задаваться в процессе работы с программой.

2. Вычислять матричные функции динамической и систематической составляющих решения ССЛСДУ.
3. Вычислять матричные функции, необходимые для генерирования случайной составляющей моделируемого случайного процесса.
4. Вычислять моментные характеристики решения и выхода ССЛСДУ.
5. Выбирать и вычислять детерминированное управляющее воздействие на систему.
6. Моделировать решение ССЛСДУ.
7. Представлять графически смоделированное решение и его дисперсию.

Структурная блок-схема программы приведена на рис. 13.1.

### 13.4 Текст программы

Приведем текст программы в системе MATLAB 7.0 для численного моделирования решения ССЛСДУ.

```
%NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR
%STATIONARY SYSTEM OF STOCHASTIC
%DIFFERENTIAL EQUATIONS
%
% dX = AX dt + BU dt + F df,  X(0) = X0
% Y = HX
%
% X - size n x 1, Y - size 1 x 1, U - size k x 1,
% f - size m x 1, A - size n x n, B - size n x k,
% F - size n x m, H - size 1 x n
%
% n, k, m >= 1

clear;
randn('state', 0);
type title.doc      %TITLE
                      %INPUT OF DATA
n = input('n = ? (n >= 1) ');
                           %INPUT OF SIZE n
while n < 1,
```

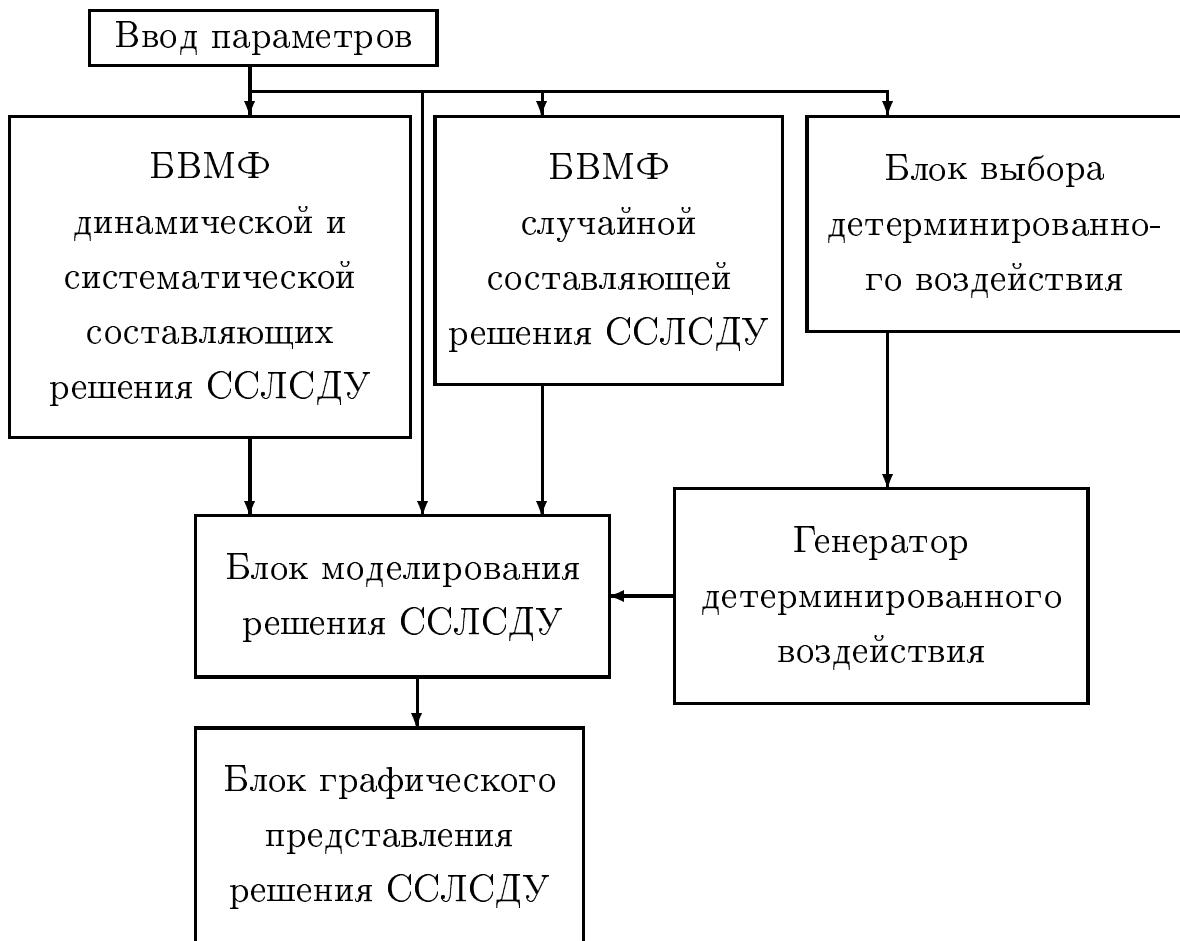


Рис. 13.1. Блок-схема структуры программы численного моделирования решения ССЛСДУ; БВМФ — блок вычисления матричных функций.

```

n = input('INPUT OF NEW n (n >= 1) ');
end; %while;
k = input('k = ? (k >= 1) '); %INPUT OF SIZE k
while k < 1,
    k = input('INPUT OF NEW k (k >= 1) ');
end; %while
m = input('m = ? (m >= 1) '); %INPUT OF SIZE m
while m < 1,
    m = input('INPUT OF NEW m (m >= 1) ');
end; %while
A = input('A = ? - n x n '); %INPUT OF MATRIX A
B = input('B = ? - n x k '); %INPUT OF MATRIX B
F = input('F = ? - n x m '); %INPUT OF MATRIX F
H = input('H = ? - 1 x n '); %INPUT OF MATRIX H
x0 = input('x0 = ? - n x 1 '); %INPUT OF START VALUE X(0)

```

```
dt = input('dt = ? (dt > 0) '); %INPUT OF STEP OF INTEGRATION
t0 = input('t0 = ? '); %INPUT OF START POINT
tk = input('tk = ? (tk > t0 + dt) '); %INPUT OF FINAL POINT
while dt <= 0 | t0 > tk - dt
    dt = input('INPUT OF NEW dt (dt > 0) ');
    t0 = input('t0= ? ');
    tk = input('tk = ? (tk > t0 + dt) ');
end; % while
type uprav.doc; %TITLE
%CHOOSE OF CONTROL
key = input('key = ? [c,p,h,o,z] ','s');
if key == 'c', %CONSTANT CONTROL
    disp('U = u0 - k x 1 ');
    u0 = input('u0 = ? - k x 1 ');
    un = 1;
elseif key == 'p', %POLYNOMIAL CONTROL
    disp('U = U(1) + U(2) * t + ... + U(p+1) * t^p - k x 1 ');
    p = input('degree of polynomial p = ? ');
    for i = 1:p+1,
        disp('i = '); disp(i);
        U(:,i) = input(' U(i) = ? - k x 1 ');
    end; % for
    un = 2;
elseif key == 'h', %HARMONIC CONTROL
    disp('U = D * sin(w * t + fi) - k x 1 ');
    D = input('D = ? - k x 1 ');
    w = input('w = ? - k x 1 ');
    fi = input('fi = ? - k x 1 ');
    un = 3;
elseif key == 'o', %ZERO CONTROL
    un = 4;
elseif key == 'z', %COMBINE CONTROL
    for i = 1:k,
        type upr.doc; %TITLE
        disp('i = '); disp(i);
        key=input('key = ? [c,p,h] ','s');
        if key == 'c',
            u00 = input('u00 = ? ');
            ua(i) = 1;
            key = 0;
        elseif key == 'p',
            u01 = input('u01 = ? ');
            u02 = input('u02 = ? ');
            u03 = input('u03 = ? ');
            ua(i) = 2;
            key = 0;
        elseif key == 'h',

```

```
D0 = input('D0 = ? ');
w0 = input('w0 = ? ');
fi0 = input('fi0 = ? ');
ua(i) = 3;
key = 0;
else
end; %if
end; % for
un = 5;
else
end; % if key == 'z'
%CALCULATION OF MATRIXES OF DYNAMICAL
%PART OF SOLUTION - Ad AND DETERMINISTIC
%PART OF SOLUTION - Bd (ALGORITHM 11.2)
[Ad,Bd] = dindet(n,k,A,B,dt);
yn = input('SEE OF Ad, Bd [y/n] ', 's');
if yn == 'y',
    disp('Ad = '); %SEE OF MATRIX Ad
    disp(Ad);
    disp('Bd = '); %SEE OF MATRIX Bd
    disp(Bd);
    type press.doc
    pause;
end; %if
%CALCULATION OF MATRIX OF STOCHASTIC
%PART OF SOLUTION - Fd (ALGORITHM 11.6)
[Fd]=stoch(n, A, F, dt);
yn = input('SEE OF Fd [y/n] ', 's');
if yn == 'y',
    disp('Fd = '); %SEE OF MATRIX Fd
    disp(Fd);
    type press.doc
    pause;
end; %if
t1 = t0; %SECONDARY VARIABLES t1, tk1, x1 FOR SAVING
tk1 = tk; %OF START DATA t0, tk, x0
x1 = x0;
an = input('CONTINUE? [y/n]', 's');
if an == 'y',
    t0 = t1; tk = tk1;
    x0 = x1; mx0 = x0;
    Dx0 = zeros(n,n);
    yn=input('MODELING? [y/n]', 's');
    while yn == 'y',
        kk = 1;
        yt(kk) = H*x0; my(kk) = H*mx0;
        Dy(kk) = H*Dx0*H'; kt(kk) = t0;
```

```
tk2 = tk; t2 = tk - t0;
nn = t2 / dt + 1;
    for kk = 2:nn,
        t=t0 + (kk - 1) * dt;
            %CALCULATION OF CONTROL
if un == 1,           %CONSTANT CONTROL
    ut = u0;
elseif un == 2,       %POLYNOMIAL CONTROL
    ut = zeros(k,1);
    for i = 1:p+1;
        ut = ut + U(:,i) * (t^(i-1));
    end; % for
elseif un == 3,       %HARMONIC CONTROL
    ut=zeros(k,1);
    for i = 1:k ,
ut(i,1) = ut(i,1) + D(i,1) * sin(w(i,1) * t + fi(i,1));
    end; %for
elseif un == 4,       %ZERO CONTROL
    ut = zeros(k,1);
elseif un == 5,       %COMBINE CONTROL
    for j = 1:k,
        if ua(j) == 1,
            ut(j,1) = u00;
        elseif ua(j) == 2,
            ut(j,1) = u01 + u02 * t + u03 * (t^2);
        elseif ua(j) == 3,
            ut(j,1) = D0 * sin (w0 * t + fi0);
        else
            end; % if
        end; % for
    else
        end; % if
            %MODELING OF SOLUTION OF SDE
ft = randn(n,1);
xt = Ad * x0 + Bd * ut + Fd * ft;  %SOLUTION OF SDE
mx = Ad * mx0 + Bd * ut;           %EXPECTATION OF
                                    %SOLUTION OF SDE
Dx = Ad * Dx0 * Ad' + Fd * Fd';  %DISPERTION OF
                                    %SOLUTION OF SDE
rx = expm(A * (tk - t)) * Dx;    %COVARIANCE MATRIX OF
                                    %SOLUTION OF SDE
yt(kk) = H * xt;                 %EXIT PROCESS OF STOCHASTIC SYSTEM
my(kk) = H * mx ;                %EXPECTATION OF EXIT PROCESS
Dy(kk) = H * Dx * H';             %DISPERSION OF EXIT PROCESS
ry(kk) = H * rx * H';             %COVARIANCE MATRIX OF EXIT PROCESS
kt(kk) = t; x0 = xt;
mx0 = mx; Dx0 = Dx;
```

```

    end; % for
    tk = tk2 + t2; t0 = tk2;
plot(kt,yt,'b',kt,my,'r'),
ylabel('blue - SDE, red - ODE'),
 xlabel('time'),
type press.doc
 pause;
plot(kt,Dy,'b'),
 ylabel('dispertion of Y'),
 xlabel('time'),
type press.doc
 pause;
yn=input('MODELING ON NEXT INTERVAL? [y/n] ','s');
end; % bn == 'y'
end; % an == 'y'

```

Данная программа использует две функции: **dindet.m** (для вычисления матриц динамической и детерминированной составляющих решения ССЛ-СДУ) и **stoch.m** (для вычисления стохастической составляющей решения ССЛСДУ). Приведем тексты указанных функций.

```

function [Ad,Bd] = dindet(n,k,A,B,dt);
type dindet.doc; %TITLE
Okn = zeros(k,n); %CALCULATION OF
Okk = zeros(k,k); %MATRICES OF DYNAMICAL PART
Idt = eye(n+k)*dt; %OF SOLUTION - Ad AND
AA=[A B;Okn Okk]; %DETERMINISTIC PART
ex_aah = expm(AA*Idt); %OF SOLUTION - Bd
Ad = ex_aah(1:n,1:n); %(ALGORITHM 11.2)
nb1 = n + 1; nbk = n + k;
Bd = ex_aah(1:n,nb1:nbk);

function [Fd] = stoch (n,A,F,dt);
type stoch.doc; %TITLE
%CALCULATION OF MATRIX OF STOCHASTIC
%PART OF SOLUTION - Fd (ALGORITHM 11.6)
one1 = zeros(n,n); %ALGORITHM 11.5
rr1 = 1;
for jj1 = 1:n,
nb1 = n -jj1 + 1;
for kk1 = 1:nb1,
ii1 = kk1+jj1 - 1;
one1(kk1,ii1) = 1;
one1(ii1,kk1) = 1;
oneA = one1*(A') + A*one1;
oo1 = 0;

```

```

        for ss1 = 1:n,
            l111 = n - ss1 + 1;
        for l11 = 1:l111,
            Ac(l11+oo1,rr1) = oneA(l11,l11+ss1-1);
        end; %l11
            oo1 = oo1 + n - ss1 + 1;
        end; %ss1
    one1 = zeros(n,n);
    rr1 = rr1 + 1;
    end; %kk1
end; %jj1
G = F * (F');
        ii1 = 0;                                %ALGORITHM 11.3
for jj1 = 1:n,
    nb1 = n - jj1 + 1;
    for kk1 = 1:nb1,
        Vec(kk1+ii1,1) = G(kk1,kk1+jj1-1);
    end; %kk1
    ii1 = ii1 + n - jj1 + 1;
end; %jj1
gv = Vec;
nn2 = n * (n+1) / 2;
[Dd,Dv] = dindet(nn2,1,Ac,gv,dt); %ALGORITHM 11.2
        ii1 = 0;                                %ALGORITHM 11.4
for jj1 = 1:n,
    nb1 = n - jj1 + 1;
    for kk1 = 1:nb1,
        D1(kk1,kk1+jj1-1) = Dv(kk1+ii1,1);
        D1(kk1+jj1-1,kk1) = Dv(kk1+ii1,1);
    end; %kk1
    ii1 = ii1 + n - jj1 + 1;
end; %jj1
[S,L2] = eig(D1); %FINISH OF MATRIX Fd
[L] = sqrt(L2); %CALCULATION
Fd = S*L;

```

## 13.5 Работа с программой

Для использования программы на РС пользователя должна быть установлена система MATLAB 7.0, подробное руководство по которой содержится в [23].

Работа начинается с запуска системы MATLAB 7.0, после чего в верхней строке меню следует выбрать с помощью закладок file → open → OK файл, содержащий текст программы, приведенной в предыдущем разделе

(файлы `dindet.m` и `stoch.m`, а также файлы заставок `title.doc`, `upr.doc`, `uprav.doc`, `dindet.doc`, `stoch.doc`, `press.doc`, о которых будет сказано ниже, должны находиться в одной директории с указанным файлом). После этого в окне встроенного в MATLAB 7.0 редактора должен появиться текст программы.

Далее в верхней строке меню следует выбрать `debug → run`. Программа будет запущена после применения команды `run`, которая к этому моменту уже становится активной.

Сначала на экране РС должна появиться заставка `title.doc` следующего содержания:

```
NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR
STATIONARY SYSTEM OF STOCHASTIC
DIFFERENTIAL EQUATIONS

dX = AX dt + BU dt + F df, X(0)=X0
Y = HX,
X - n x 1, Y - 1 x 1, U - k x 1,
f - m x 1, A - n x n, B - n x k,
F - n x m, H - 1 x n

n, m, k >= 1

INPUT OF DATA
```

Ниже сразу же должна появиться строка:

```
n = ? (n >= 1)
```

Далее следует ввести с клавиатуры необходимое значение `n`, например, 4 и нажать клавишу `enter`.

Затем, подобным образом должны вводиться остальные исходные данные. Например, после ввода конкретных исходных данных на экране РС может появиться следующее:

```
n = ? (n >= 1) 4
k = ? (k >= 1) 3
m = ? (m >= 1) 5
A = ? - n x n [-1 0 0 0; 0 -2 0 0;
                  0 0 -1 0; 0 0 0 -3]
B = ? - n x k [1 1 1; 1 1 1; 1 1 1; 1 1 1]
F = ? - n x m [0.2 0.1 0.1 0.1 0.1; 0.1 0.2 0.1 0.1 0.1];
```

```
0.1 0.1 0.2 0.1 0.1; 0.1 0.1 0.1 0.2 0.1]
H = ? - 1 x n [0 0 1 0]
x0 = ? - n x 1 [2; 2; 2; 2]
dt = ? (dt > 0) 0.001
t0 = ? 0
tk = ? (tk > t0 + dt) 10
```

Здесь  $[t_0, tk]$  — промежуток интегрирования,  $dt$  — шаг интегрирования,  $x_0$  — столбец начальных условий.

Нажав в очередной раз на клавишу **enter**, после набора числа 10 (см. выше), пользователь должен увидеть меню **uprav.doc**, которое выглядит следующим образом:

CHOOSE OF CONTROL

CONSTANT	u = u0	[c]
POLYNOMIAL	u = U(1) + U(2) * t + ... + U(p+1) * t^p	[p]
HARMONIC	u = D * sin(w * t + fi)	[h]
ZERO	u = 0	[o]
COMBINE		[z]

Следом за ним сразу же должна появиться строка:

```
key = ? [c,p,h,o,z]
```

Сначала поговорим о содержании меню. Оно предлагает выбрать одно из нескольких внешних детерминированных управляемых воздействий: постоянное, полиномиальное, гармоническое, нулевое и комбинированное.

При выборе **c** Вам будет предложено ввести вектор-столбец длины  $k$ , компонентами которого являются вещественные числа. Выглядеть это будет следующим образом

```
key = ? [c,p,h,o,z] c
U = u0 - k x 1
u0 = ? - k x 1 [-0.01; -0.02; -0.03]
```

При вводе **p** Вам поступит предложение ввести сначала степень полиномиального управляемого воздействия  $p$ , а после этого векторы-столбцы  $U(1), \dots, U(p+1)$  длины  $k$ , являющиеся коэффициентами полиномиального управляемого воздействия.

Выглядеть это будет так:

```
key = ? [c,p,h,o,z] p
U = U(1) + U(2) * t + ... + U(p+1) * t^p - k x 1
degree of polynomial p = ? 2
i=
    1
U(i) = ? - k x 1 [-0.01; -0.02; -0.03]
i=
    2
U(i) = ? - k x 1 [0.01; 0.02; 0.03]
i=
    3
U(i) = ? - k x 1 [-0.01; 0.02; -0.03]
```

Если вводится  $h$ , то поступает предложение ввести числовые вектор-столбцы  $D, w, f_i$  длины  $k$ , которые сформируют гармоническое управляемое воздействие с компонентами вида:  $u(i) = D(i) * \sin(w(i) * t + f_i(i))$ , где  $i = 1, \dots, k$ .

Выглядеть это будет, например, следующим образом:

```
key = ? [c,p,h,o,z] h
U = D * sin(w * t + fi) - k x 1
D = ? - k x 1 [0.01; 0.02; 0.03]
w = ? - k x 1 [1; 2; 3]
fi = ? - k x 1 [0.1; 0.2; 0.3]
```

При выборе  $o$  ничего вводить не потребуется, поскольку управляемое воздействие автоматически будет положено программой нулевым вектор-столбцом длины  $k$ .

Выбор  $z$  соответствует комбинированному управляемому воздействию. Выбрав  $z$  и нажав на клавишу **enter** пользователь должен будет увидеть меню **upr.doc**, которое выглядит следующим образом:

CHOOSE OF COMBINE CONTROL

U - size k x 1

COMPONENTS OF U

CONSTANT COMPONENT	u(i) = u00	[c]
POLYNOMIAL COMPONENT	u(i) = u01 + u02 * t + u03 * t^2	[p]
HARMONIC COMPONENT	u(i) = D0 * sin(wt0 + fi0)	[h]

Кроме того сразу же должна появиться строка:

```
i=
    1
key = ? [c,p,h]
```

У нас ранее было выбрано  $k = 3$  и если мы захотим, чтобы каждая компонента управляющего воздействия определялась своей собственной зависимостью, например, первая компонента — постоянная, вторая — квадратичная, а третья — гармоническая, то это будет соответствовать следующему:

```
i=
1
key = ? [c,p,h] c
u00 = ? -0.01
i=
2
key = ? [c,p,h] p
u01 = ? -0.01
u02 = ? -0.02
u03 = ? -0.03
i=
3
key = ? [c,p,h] h
D0 = ? 0.01
w0 = ? 0.02
f10 = ? 0.03
```

На этом завершается ввод исходных данных.

Далее появится (никаких клавиш для этого нажимать не нужно) заставка *dindet.doc* вида:

```
CALCULATION OF MATRIXES
Ad - MATRIX OF DYNAMICAL PART OF SOLUTION
Bd - MATRIX OF DETERMINISTIC PART OF SOLUTION
```

Она извещает о том, что программа готова к вычислениям матриц *Ad* и *Bd* динамической и систематической составляющих решения ССЛСДУ. Сразу же за заставкой *dindet.doc* на экране РС должна будет появиться строка следующего содержания:

```
SEE OF Ad, Bd [y/n]
```

Это означает, что предлагается просмотреть результаты расчета *Ad* и *Bd*. Это предложение можно принять, введя *y*, или отказаться от него, введя *n*.

После этого аналогичные действия будут сопровождать вычисление матрицы *Fd* случайной составляющей решения ССЛСДУ, а именно:

SEE OF Fd [y/n]

Затем, после нажатия клавиши **enter** (это нужно делать по необходимости при работе с программой) поступит предложение:

CONTINUE? [y/n]

Отказ повлечет за собой окончание работы программы и выход в меню системы MATLAB. При согласии мы должны будем получить следующее:

MODELING? [y/n]

Отказ, опять таки приведет к завершению работы программы, а согласие — к началу процесса численного моделирования решения (точнее выборочной траектории решения) ССЛСДУ.

Через некоторое время на экране РС появится график выборочной траектории решения ССЛСДУ и решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая соответствует нулевой матрице F, а кроме того, просьба следующего содержания

PLEASE, PRESS "ENTER"

Данное сообщение генерируется файлом **press.doc** и должно к этому моменту уже быть знакомо пользователю РС, так как уже появлялось несколько раз ранее.

Выполнив эту просьбу, пользователь РС заметит, что график сменится другим, на котором будет изображена дисперсия (как функция времени) решения ССЛСДУ, а кроме того появится повторная просьба

PLEASE, PRESS "ENTER"

Если график дисперсии не появится непосредственно на экране РС, то ссылка на него окажется на панели задач.

Приняв повторно предложение нажать на клавишу **enter**, пользователь РС увидит следующее сообщение

MODELING ON NEXT INTERVAL? [y/n]

Отказ должен будет привести к завершению работы программы и к выходу в меню системы MATLAB, а согласие должно будет, в свою очередь, привести к продолжению вычислений на временном интервале  $[t_k, t_k + (t_k - t_0)]$ , причем начальное условие будет выбираться по результатам численного интегрирования на временном интервале  $[t_0, t_k]$ .

Затем можно будет посмотреть графики решения и его дисперсии и т.д.

Еще раз отметим, что увеличение параметров  $m$ ,  $n$ ,  $k$  (в разумных пределах) практически не ощутимо по временным затратам на численное моделирование решений ССЛСДУ на достаточно мощном РС.

Рассмотренная программа численного решения ССЛСДУ очевидно является лишь попыткой создания программного продукта, решающего поставленную задачу.

Программа, в частности, может быть усовершенствована в своей диалоговой части, в части ассортимента внешних детерминированных управляемых воздействий, а также по ряду других направлений.

## 13.6 Примеры численного моделирования решений ССЛСДУ

В данном разделе будут рассмотрены задачи о численном моделировании чандлеровских колебаний, солнечной активности и лагранжевой динамики частицы жидкости.

### 13.6.1 Численное моделирование чандлеровских колебаний

Запишем математическую модель в виде ССЛСДУ [105], которая описывает чандлеровские колебания:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -w \\ w & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (13.2)$$

где  $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)} \in \Re^1$  — случайные процессы, определяющие положение Северного полюса Земли;  $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)} \in \Re^1$  — независимые стандартные винеровские процессы;  $w/(2\pi)$  — частота (циклов в год);  $1/\lambda$  — релаксация (лет),  $a$  — интенсивность случайных возмущений.

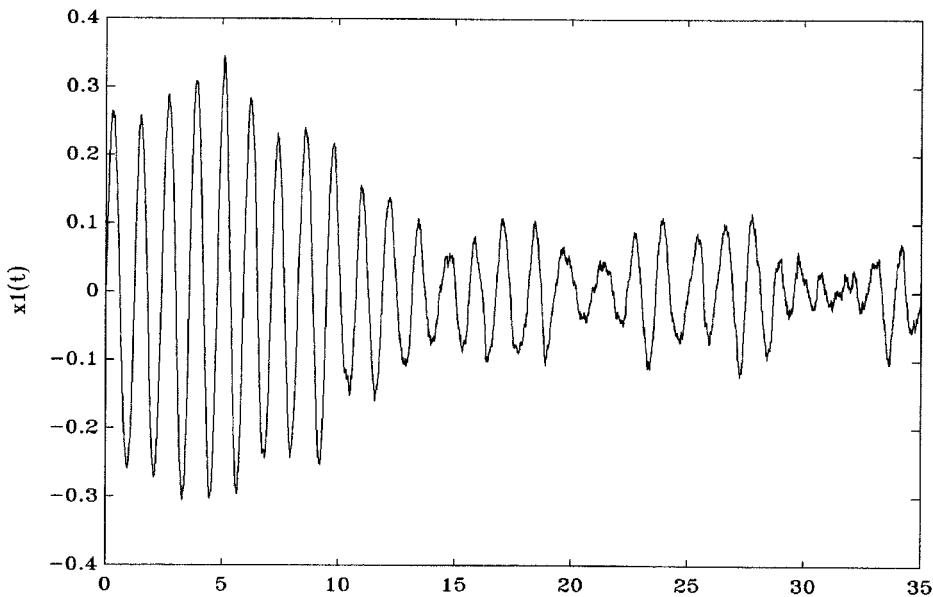


Рис. 13.2. Моделирование чандлеровских колебаний при  
 $\lambda = 0.06$ ,  $a = 0.035$ ,  $w = 5.274$ .

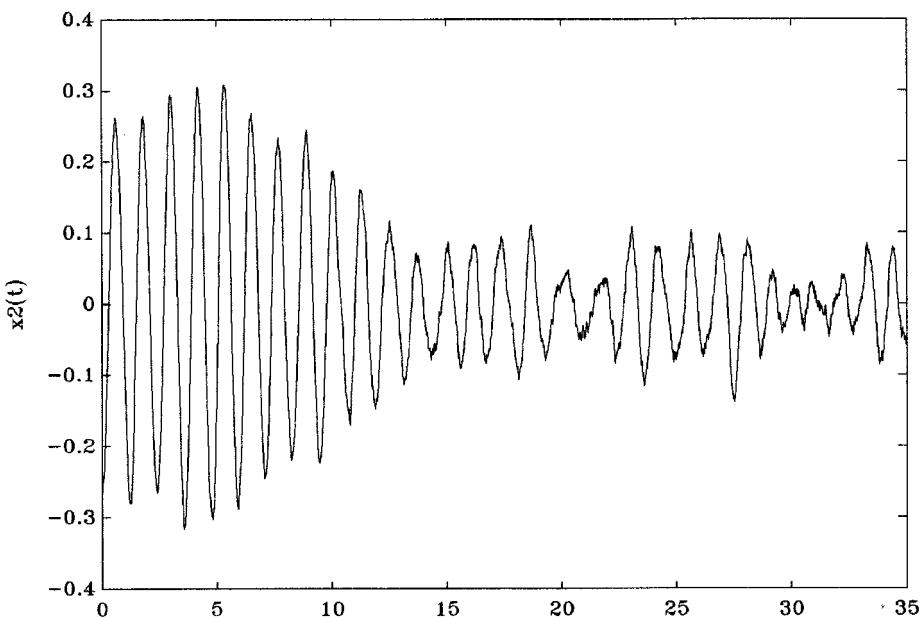


Рис. 13.3. Моделирование чандлеровских колебаний при  
 $\lambda = 0.06$ ,  $a = 0.035$ ,  $w = 5.274$ .

Согласно оценкам, полученным в работах [4], [105], параметры  $\lambda$ ,  $a$ ,  $w$  таковы:  $\lambda = 0.06$  (1/год),  $a = 0.035''$ ,  $w = 5.274$ .

Выберем исходные (на начало 1968 г.) данные, зарегистрированные Международной Службой Широты:  $\mathbf{x}_0^{(1)} = -0.03''$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = -0.27''$ . Смоделируем численно решение ССЛСДУ (13.2) на временном интервале 35 лет

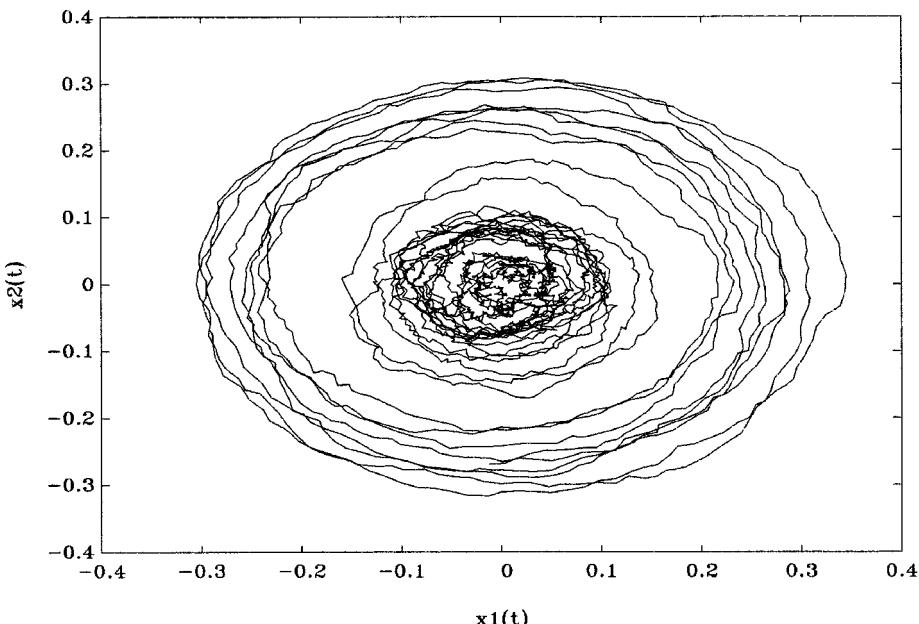


Рис. 13.4. Чандлеровские колебания. Фазовый портрет при  $\lambda = 0.06$ ,  $a = 0.035$ ,  $w = 5.274$ .

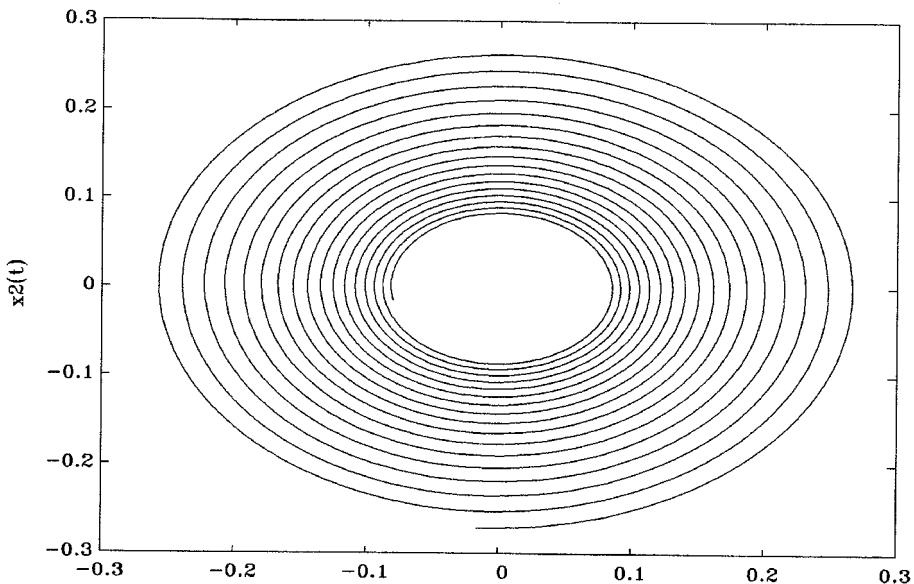


Рис. 13.5. Чандлеровские колебания. Фазовый портрет при  $\lambda = 0.06$ ,  $a = 0.0$ ,  $w = 5.274$ .

с шагом 0.01 года с помощью точного интегрального представления решения этой системы и алгоритмов 11.1–11.7, полученных в главе 11.

На рис. 13.2, 13.3 показано поведение процессов  $\mathbf{x}_t^{(1)}$  и  $\mathbf{x}_t^{(2)}$  во времени, а на рис. 13.4 приведены фазовые траектории системы (13.2). Если положить  $a = 0.00''$ , то фазовые траектории системы (13.2) принимают вид, изображенный на рис. 13.5.

### 13.6.2 Численное моделирование солнечной активности

Рассмотрим ССЛСДУ [105], которая описывает солнечную активность без учета ее среднего значения:

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \quad (13.3)$$

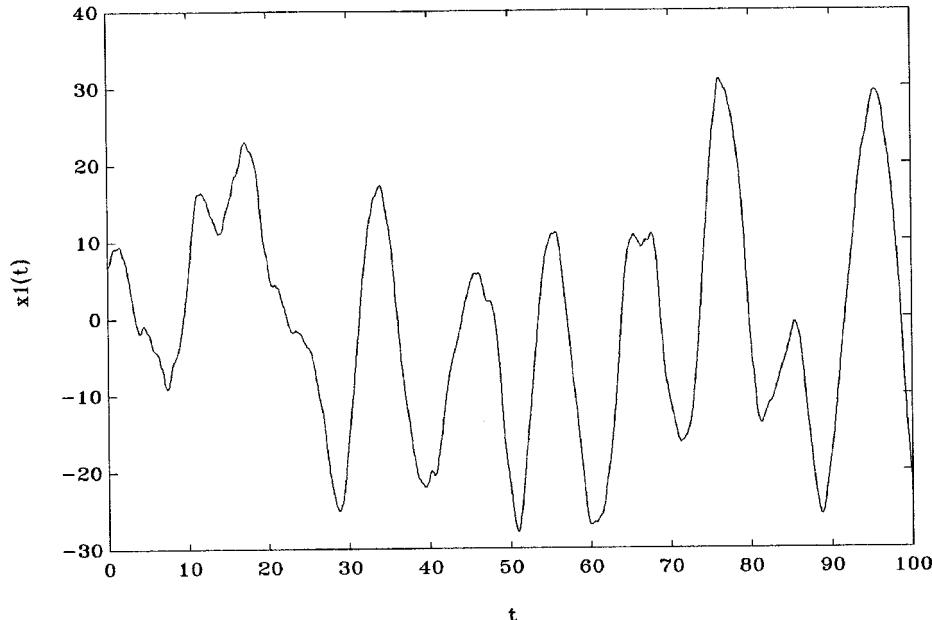


Рис. 13.6. Моделирование солнечной активности при  
 $\lambda = 0.07, \sqrt{a_2} = 0.5661, c = 5.08.$

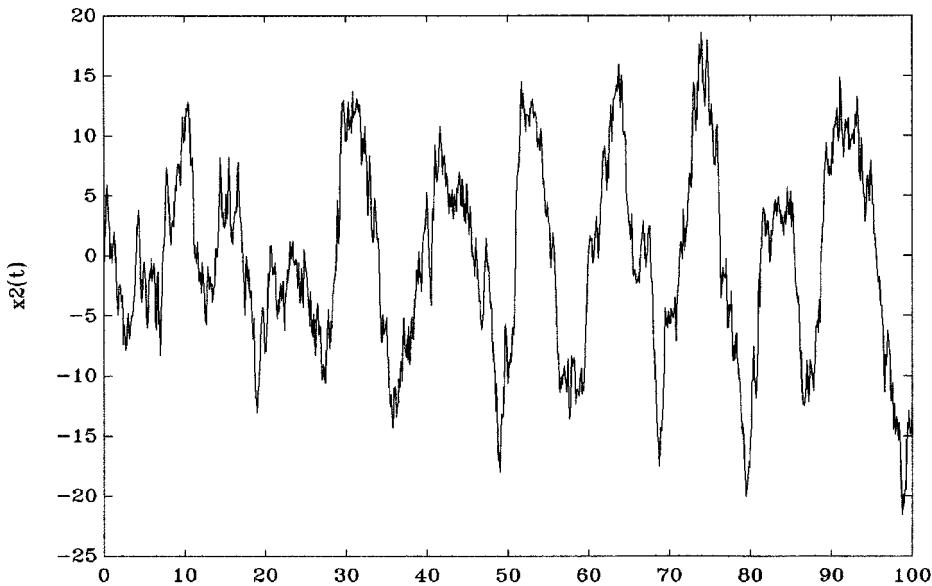


Рис. 13.7. Моделирование солнечной активности при  
 $\lambda = 0.07, \sqrt{a_2} = 0.5661, c = 5.08.$

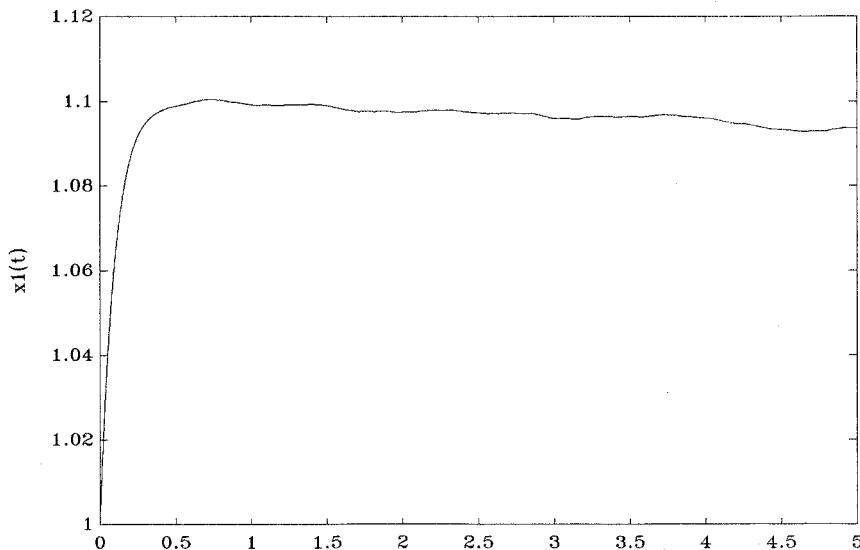


Рис. 13.8. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при  $T = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\Delta = 0.002$ .

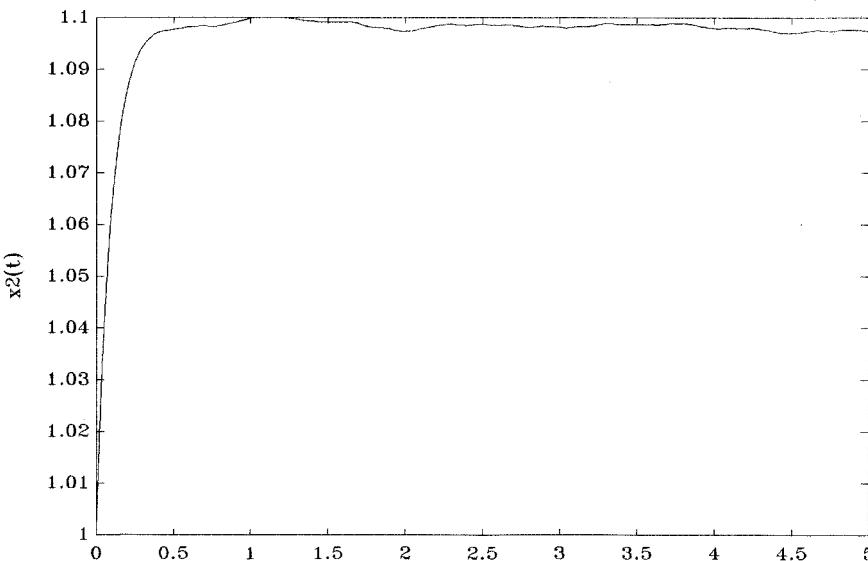


Рис. 13.9. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при  $T = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\Delta = 0.002$ .

где  $x_t$  — число пятен на Солнце;  $f_t \in \mathbb{R}^1$  — стандартный винеровский процесс;  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $c$  — постоянные.

По данным Е.Е. Слуцкого [92], период  $T_0$  колебаний солнечной активности равен 11.103 года,  $\sqrt{a_2} = 2\pi/T_0 = 0.5661$ ,  $\lambda = a_1/2 = 0.07$ . Параметр  $c$  определен в [105] и равен 5.08. Согласно числам Вольфера [105], на начало 1821 г. приходилось приблизительно семь солнечных пятен ( $x_0 = 7$ ). Примем также  $y_0 = -0.25$ .

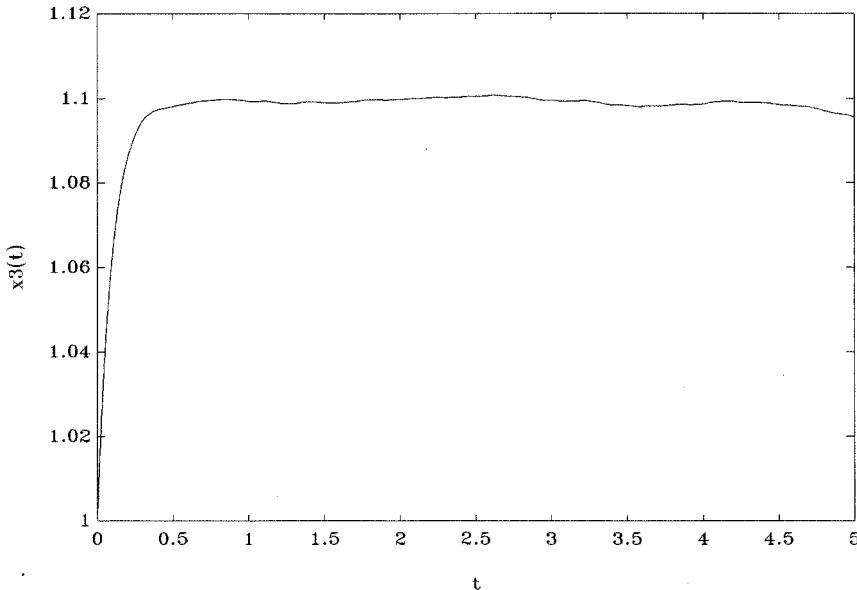


Рис. 13.10. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при  $T = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\Delta = 0.002$ .

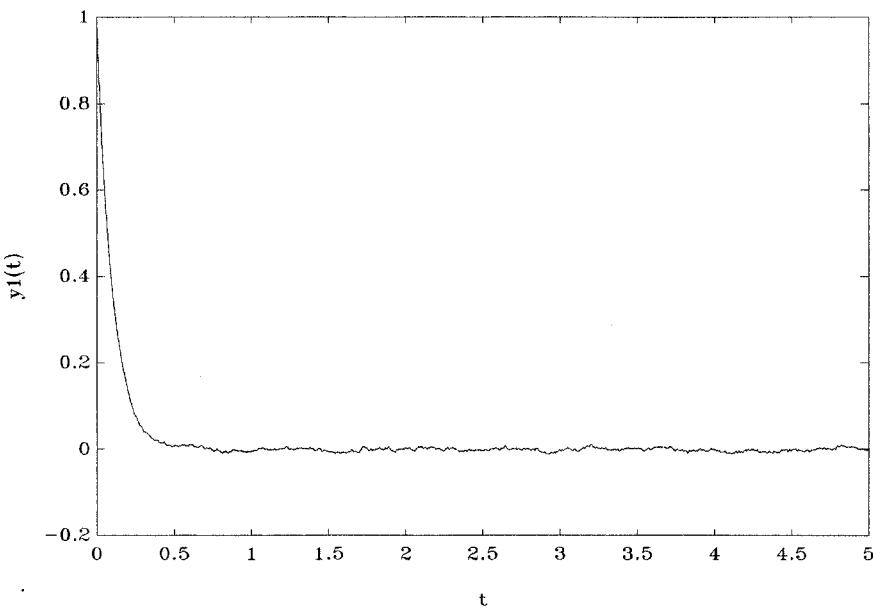


Рис. 13.11. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при  $T = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\Delta = 0.002$ .

Смоделируем численно решение уравнения (13.3) на временном интервале 1821–1921 гг. с шагом 0.1 года при указанных исходных данных с помощью алгоритмов 11.1–11.7 из главы 11. Результат численного моделирования представлен на рис. 13.6, 13.7. На рис. 13.6 показана зависимость числа солнечных пятен без учета среднего значения от времени. На этом рисунке прослеживается периодичность колебаний, равная приблизительно 11 годам, что соответствует экспериментальным данным.

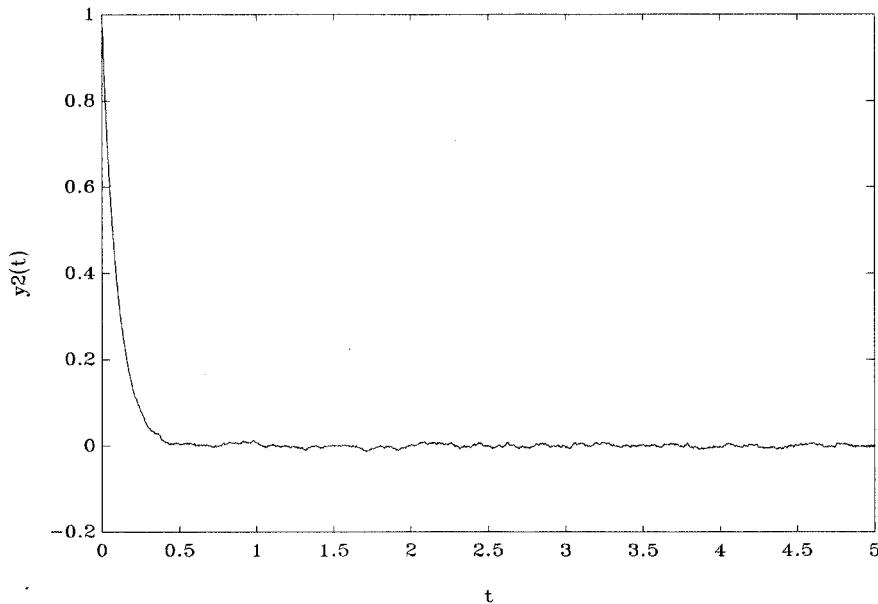


Рис. 13.12. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при  $T = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\Delta = 0.002$ .

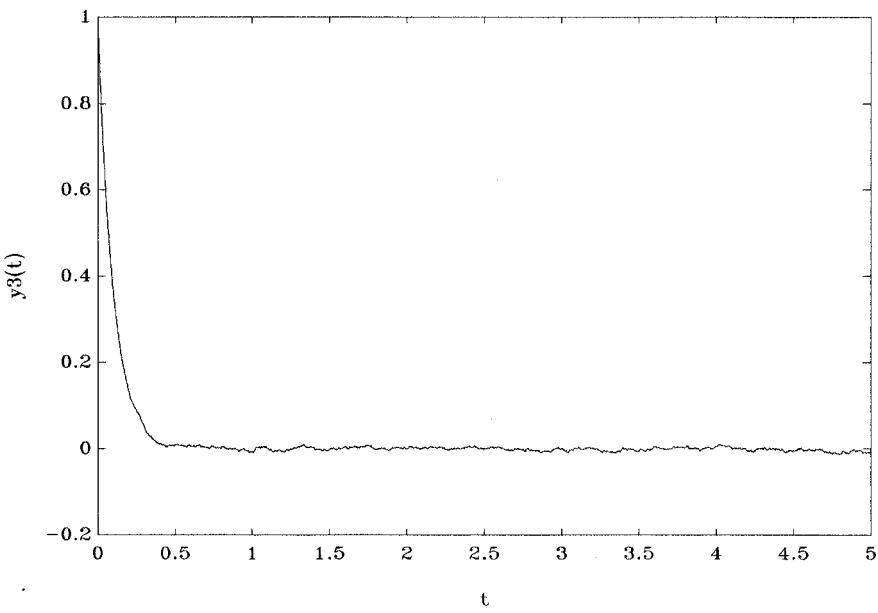


Рис. 13.13. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при  $T = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\Delta = 0.002$ .

### 13.6.3 Численное моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости

Перепишем систему уравнений (2.26), (2.27) в виде:

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad (13.4)$$

$$A = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & -T^{-1}I_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} \\ \sigma I_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad X_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{v}_t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_t^{(1)} \\ \mathbf{v}_t^{(2)} \\ \mathbf{v}_t^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix},$$

где  $O_{3 \times 3}, I_{3 \times 3}$  — нулевая и единичная  $(3 \times 3)$ -матрицы.

Смоделируем численно решение системы (13.4) при  $T = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\mathbf{x}_0^\top = (1 \ 1 \ 1)$ ,  $\mathbf{v}_0^\top = (1 \ 1 \ 1)$  на промежутке  $[0, 5]$  с постоянным шагом интегрирования  $\Delta = 0.002$ , пользуясь алгоритмами 11.1–11.7. Результат численного моделирования представлен на рис. 13.8–13.13.

Физически при достаточно большой силе сопротивления, действующей на частицу жидкости, частица быстро теряет начальную скорость и начинает хаотично двигаться вблизи некоторого фиксированного положения при наличии сил, действующих на нее со стороны окружающих частиц жидкости. Описанная качественная картина движения частицы жидкости нашла отражение на рис. 13.8–13.13.

## Глава 14

# Моделирование выборочных траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений Ито

В настоящей главе приводятся примеры численного моделирования выборочных траекторий решений СДУ Ито с помощью сильных численных методов. Рассматриваются преимущественно нелинейные системы СДУ Ито второго и третьего порядка. Для численного моделирования повторных стохастических интегралов, входящих в применяемые сильные численные схемы, используется метод, основанный на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра (теоремы 5.1 – 5.14).

### 14.1 Численное интегрирование модели Блэка–Шоулза

Рассмотрим математическую модель динамики цены акции  $S_t$  в виде СДУ Ито (модель Блэка–Шоулза):

$$dS_t = \mu S_t dt + \lambda S_t df_t, \quad (14.1)$$

где  $t \in [0, T]$ ;  $f_t \in \mathbb{R}^1$  — стандартный винеровский процесс;  $\mu, \lambda$  — параметры.

Точное решение уравнения (14.1) имеет вид

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \lambda^2 \right) t + \lambda f_t \right), \quad t \in [0, T].$$

Введем в рассмотрение разбиение  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  промежутка  $[0, T]$  такое, что  $\tau_j = j\Delta$ ,  $N\Delta = T$ . Очевидно, что решение уравнения (14.1) может быть за-

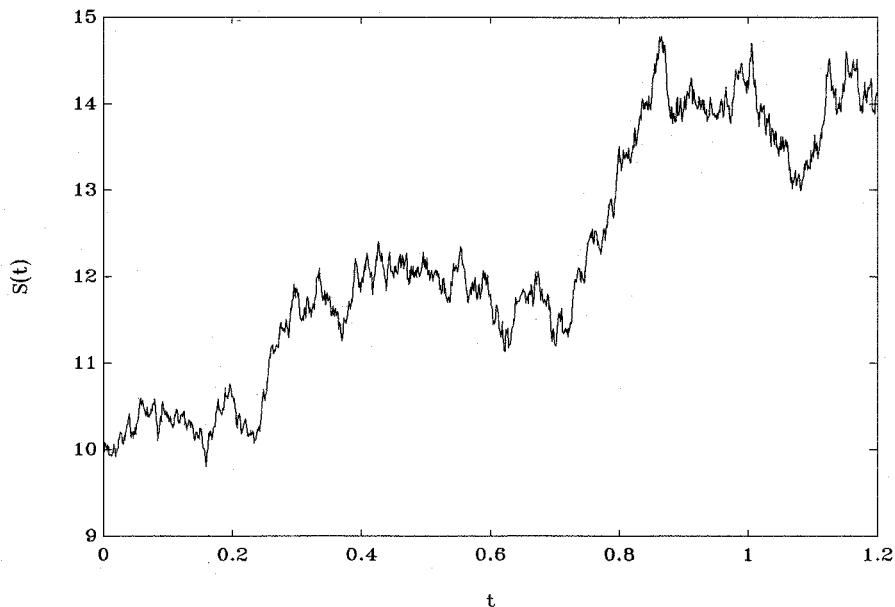


Рис. 14.1. Модель Блэка–Шоулза при  $\mu = 0.15$ ,  $\lambda = 0.2$ .

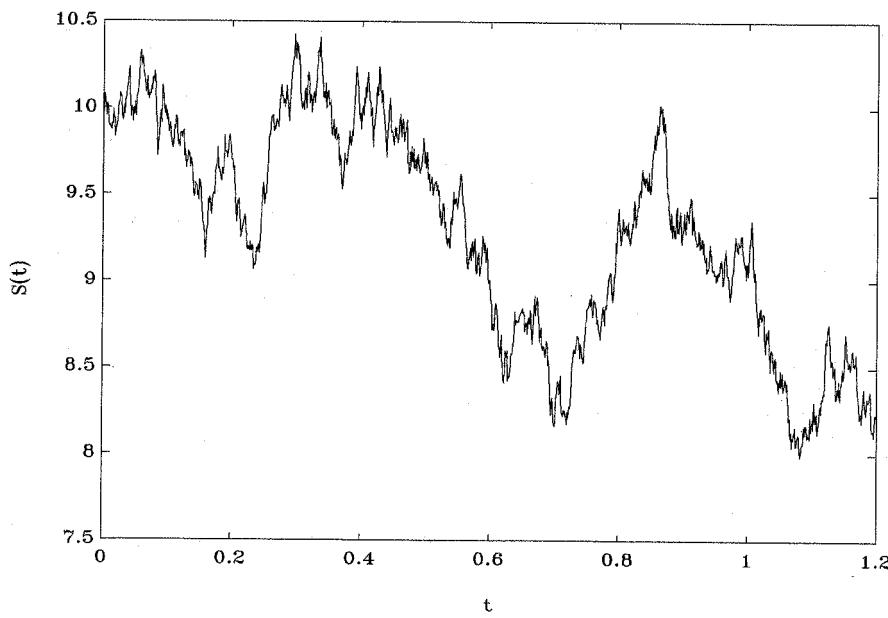


Рис. 14.2. Модель Блэка–Шоулза при  $\mu = -0.30$ ,  $\lambda = 0.2$ .

писано в дискретные моменты времени  $\tau_j$  следующим образом:

$$S_{k+1} = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \lambda^2 \right) k \Delta + \lambda \sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{k-1} \zeta_i \right), \quad (14.2)$$

где  $S_{\tau_k} \stackrel{\text{def}}{=} S_k$ ;  $(f_{\tau_{k+1}} - f_{\tau_k}) / \sqrt{\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_k$ ;  $k = 0, 1, \dots, N$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Смоделируем решение уравнения (14.1) с помощью представления (14.2) при  $\mu = 0.15$ ,  $\lambda = 0.2$ ,  $\Delta = 2^{-10}$ ,  $T = 1.2$ ,  $S_0 = 10$ . Результат численного моделирования приведен на рис. 14.1. Выберем теперь  $\mu = -0.3$ ,  $\lambda = 0.2$ . Результат численного моделирования решения уравнения (14.1) с новыми параметрами, но на той же реализации последовательности случайных величин  $\zeta_k$ ;  $k = 0, 1, \dots, N$ , что и в предыдущем случае, представлен на рис. 14.2.

## 14.2 Численное интегрирование стохастической модели Лотки–Вольтерра 2 порядка

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки–Вольтерра динамики численностей двух конкурирующих видов животных или динамики концентраций двух реагентов:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \left( k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (14.3)$$

где  $\mathbf{x}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}_t^{(2)}$  — численности двух конкурирующих видов животных (концентрации двух реагирующих веществ);  $\mathbf{f}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{f}_t^{(2)}$  — независимые стандартные винеровские процессы;  $a_1, a_2$  — коэффициенты смертностей видов (коэффициенты снижения уровней концентраций реагирующих веществ);  $k_1, k_2$  — коэффициенты рождаемостей видов (роста концентраций);  $\sigma_1, \sigma_2$  — коэффициенты, характеризующие степень влияния случайных факторов на систему. Запишем метод Г.Н. Мильштейна для системы (14.3), используя для представления стохастических интегралов  $I_{0,s,t}^{(i)}$ ,  $I_{1,s,t}^{(i)}$ ;  $i = 1, 2$  полиномы Лежандра, а для представления стохастических интегралов  $I_{00,s,t}^{(ii)}$ ,  $I_{000,s,t}^{(iii)}$ ;  $i = 1, 2$  полиномы Эрмита (см. главу 6):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = & \mathbf{y}_k^{(1)} \left[ 1 + \left( k_1 + a_1 \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \Delta - \frac{\sigma_1 \Delta^{3/2}}{\sqrt{3}} \left( k_1 + a_1 \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \zeta_1^{(1)} + \right. \\ & + \sigma_1 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)} + a_1 \sigma_2 \mathbf{y}_k^{(2)} \frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(2)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(2)} \right) + \\ & \left. + \frac{\sigma_1^2 \Delta}{2} \left( \left( \zeta_0^{(1)} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\sigma_1^3 \Delta^{3/2}}{6} \left( \left( \zeta_0^{(1)} \right)^3 - 3 \zeta_0^{(1)} \right) \right], \end{aligned}$$

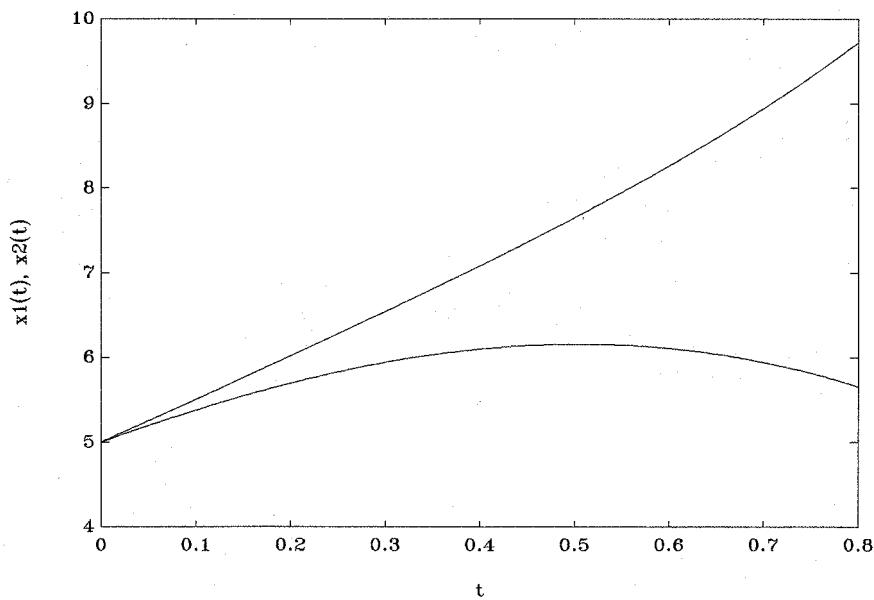


Рис. 14.3. Модель Лотки–Вольтерра второго порядка при  $k_1 = 2.0$ ,  $k_2 = 2.3$ ,  $a_1 = -0.2$ ,  $a_2 = -0.3$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0$ .

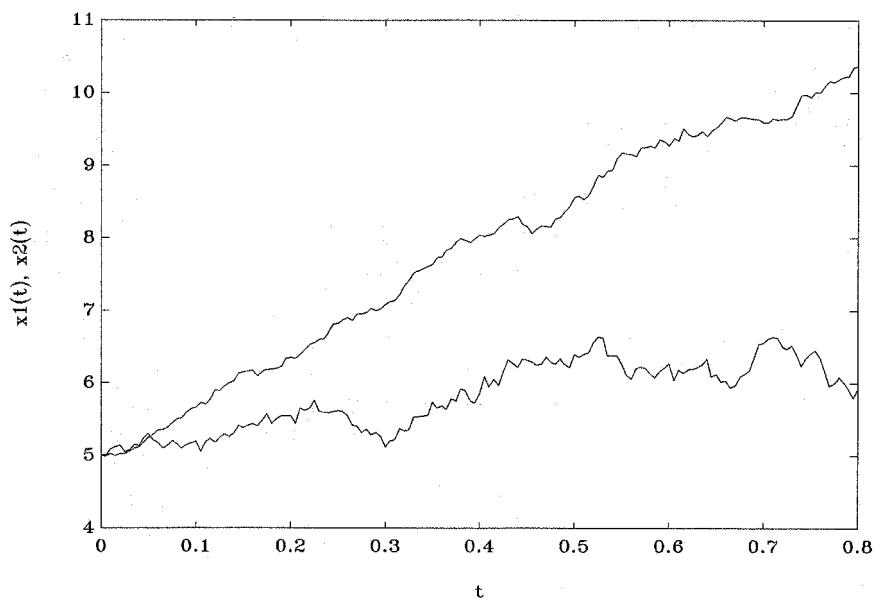


Рис. 14.4. Модель Лотки–Вольтерра второго порядка при  $k_1 = 2.0$ ,  $k_2 = 2.3$ ,  $a_1 = -0.2$ ,  $a_2 = -0.3$ ,  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\sigma_2 = 0.2$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = & \mathbf{y}_k^{(2)} \left[ 1 + \left( k_2 + a_2 \mathbf{y}_k^{(1)} \right) \Delta - \frac{\sigma_2 \Delta^{3/2}}{\sqrt{3}} \left( k_2 + a_2 \mathbf{y}_k^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\ & \left. + \sigma_2 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)} + a_2 \sigma_1 \mathbf{y}_k^{(1)} \frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sigma_2^2 \Delta}{2} \left( \left( \zeta_0^{(2)} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\sigma_2^3 \Delta^{3/2}}{6} \left( \left( \zeta_0^{(2)} \right)^3 - 3\zeta_0^{(2)} \right),$$

где  $\mathbf{y}_{k\Delta}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k^{(i)}$ ;  $i = 1, 2$ ;  $\Delta$  — шаг интегрирования;  $\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}$ ;  $i = 1, 2$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины, которые независимы с аналогичными случайными величинами, генерируемыми на всех предыдущих шагах интегрирования относительно текущего шага.

Смоделируем решение системы (14.3) при следующих исходных данных:  $k_1 = 2.0$ ,  $k_2 = 2.3$ ,  $a_1 = -0.2$ ,  $a_2 = -0.3$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = 5$ ,  $\sigma_1 = 0.0$ ,  $\sigma_2 = 0.0$ ,  $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $t \in [0, 0.8]$ . Результат численного моделирования представлен на рис. 14.3.

Введем стохастическое возмущение, т.е. положим  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\sigma_2 = 0.2$  и повторим численное моделирование решения системы (14.3), сохранив исходные данные прежними. На рис. 14.4 показано поведение обеих компонент решения системы (14.3) во времени.

### 14.3 Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг

В финансовой математике среди множества математических моделей встречается модель динамики доходности портфеля ценных бумаг вида:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{m}^{(n)} \end{bmatrix} dt + \exp \left( \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)} \right) \begin{bmatrix} B^{(11)} & \dots & B^{(1m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{(n1)} & \dots & B^{(nm)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_t^{(m)} \end{bmatrix}, \quad (14.4)$$

где  $\mathbf{x}_t^{(i)}$  — доходность  $i$ -й ценной бумаги;  $\mathbf{m}^{(i)}$  — средняя доходность  $i$ -й ценной бумаги;  $\gamma$  — эмпирический коэффициент;  $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)} / n$  и  $\|B^{(ij)}\|_{i,j=1}^{n,m}$  — средняя доходность по множеству ценных бумаг и числовая матрица, характеризующая перемешивание соответственно;  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — независимые стандартные винеровские процессы.

Метод Г.Н. Мильштейна для системы (14.4) в случае  $n = m = 2$  при постоянном шаге интегрирования  $\Delta$  имеет вид

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{m}^{(1)} \Delta + \exp \left( \frac{1}{2} \gamma \left( \mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \right) \left( B^{(11)} I_{0_{\tau_{k+1}}, \tau_k}^{(1)} + B^{(12)} I_{0_{\tau_{k+1}}, \tau_k}^{(2)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & +\frac{\gamma}{2} \exp \left(\gamma\left(\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\right) \left[B^{(11)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right) \frac{1}{2}\left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)}\right)^2-\Delta\right)+\right. \\
 & +B^{(11)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(21)q}+B^{(12)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(12)q}+ \\
 & \left.+B^{(12)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right) \frac{1}{2}\left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)}\right)^2-\Delta\right)\right], \quad (14.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{k+1}^{(2)}=\mathbf{y}_k^{(2)}+\mathbf{m}^{(2)} \Delta+\exp \left(\frac{1}{2} \gamma\left(\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\right)+\left(B^{(21)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)}+B^{(22)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)}\right)+ \\
 +\frac{\gamma}{2} \exp \left(\gamma\left(\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\right) \left[B^{(21)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right) \frac{1}{2}\left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)}\right)^2-\Delta\right)+\right. \\
 +B^{(21)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(21)q}+B^{(22)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(12)q}+ \\
 \left.+B^{(22)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right) \frac{1}{2}\left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)}\right)^2-\Delta\right)\right], \quad (14.6)
 \end{aligned}$$

где сохранен смысл введенных ранее обозначений и (см. главу 6):

$$I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)}=\sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)}, \quad I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)}=\sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)}, \quad (14.7)$$

$$I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(21)q}=\frac{1}{2} \Delta\left[\zeta_0^{(1)} \zeta_0^{(2)}+\sum_{r=1}^q \frac{1}{\sqrt{4 r^2-1}}\left(\zeta_{r-1}^{(2)} \zeta_r^{(1)}-\zeta_r^{(2)} \zeta_{r-1}^{(1)}\right)\right], \quad (14.8)$$

$$I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(12)q}=\frac{1}{2} \Delta\left[\zeta_0^{(2)} \zeta_0^{(1)}+\sum_{r=1}^q \frac{1}{\sqrt{4 r^2-1}}\left(\zeta_{r-1}^{(1)} \zeta_r^{(2)}-\zeta_r^{(1)} \zeta_{r-1}^{(2)}\right)\right], \quad (14.9)$$

где  $\zeta_r^{(i)} ; r=0,1, \ldots, q ; i=1,2$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Число  $q$  в (14.8), (14.9), необходимо выбирать из следующего условия (см. главы 6, 7):

$$\frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{r=1}^q \frac{1}{4 r^2-1}\right) \leq C \Delta^3, \quad (14.10)$$

где постоянная  $C$  входит в условие (7.22) при  $r=2$  теоремы 7.2.

Отметим, что на  $k$ -м шаге интегрирования система случайных величин  $\zeta_r^{(i)} ; r=0,1, \ldots, q ; i=1,2$  в (14.8), (14.9) должна генерироваться независимой относительно аналогичных систем, генерируемых на всех предшествующих шагах.

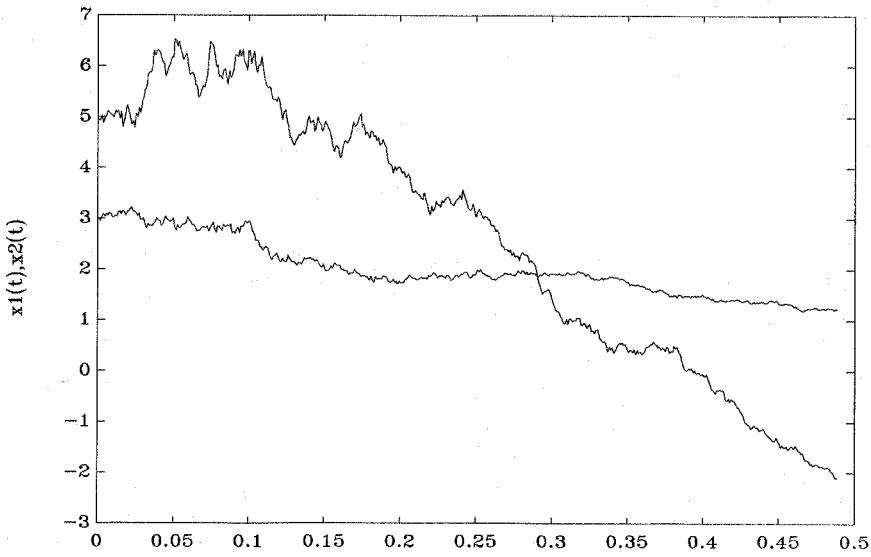


Рис. 14.5. Моделирование решения системы (14.4) при  
 $B^{(11)} = 0.5$ ,  $B^{(22)} = 1.2$ ,  $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$ ,  $q = 10$ ,  
 $\mathbf{m}^{(1)} = -1$ ,  $\mathbf{m}^{(2)} = -15$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = 3$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = 5$ ,  $\gamma = 0.3$ .

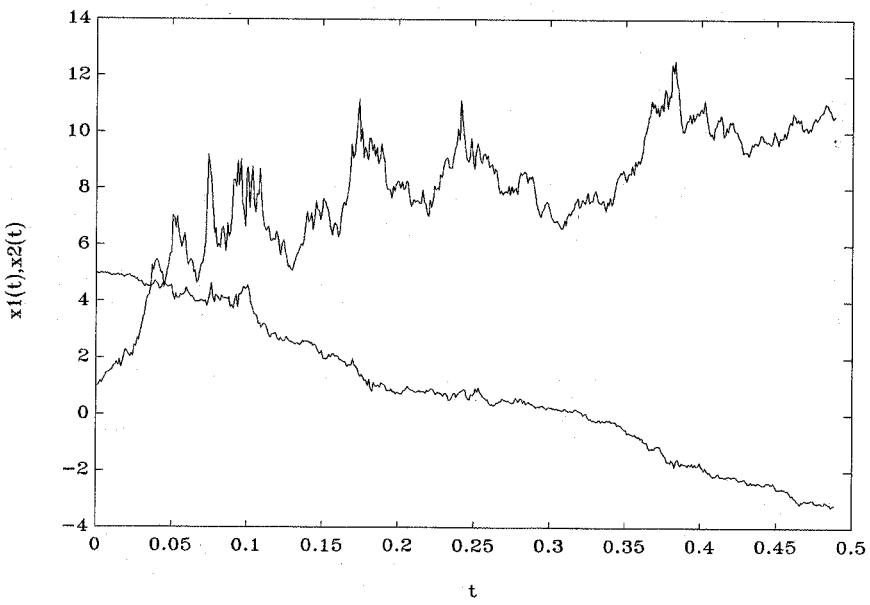


Рис. 14.6. Моделирование решения системы (14.4) при  
 $B^{(11)} = 0.1$ ,  $B^{(22)} = 0.4$ ,  $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$ ,  $q = 10$ ,  
 $\mathbf{m}^{(1)} = -10$ ,  $\mathbf{m}^{(2)} = 40$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = 5$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$ ,  $\gamma = 0.7$ .

Выполним численное моделирование решения системы (14.4) с помощью метода Г.Н. Мильштейна (14.5), (14.6) и соотношений (14.7), (14.8), (14.9) при следующих исходных данных:  $B^{(11)} = 0.5$ ,  $B^{(22)} = 1.2$ ,  $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$ ,  $q = 10$ ,  $\mathbf{m}^{(1)} = -1$ ,  $\mathbf{m}^{(2)} = -15$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = 3$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = 5$ ,  $\gamma = 0.3$  (здесь

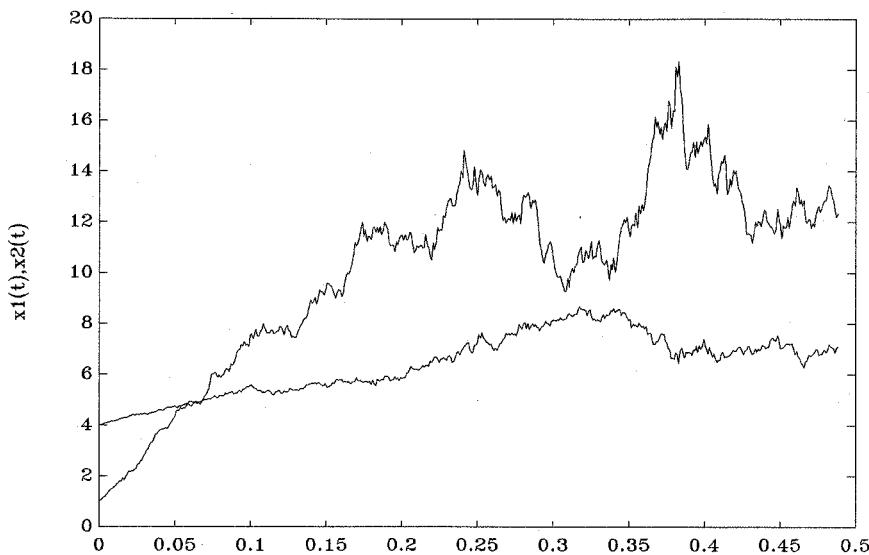


Рис. 14.7. Моделирование решения системы (14.4) при  
 $B^{(11)} = 0.2$ ,  $B^{(22)} = 0.6$ ,  $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$ ,  $q = 10$ ,  
 $\mathbf{m}^{(1)} = 15$ ,  $\mathbf{m}^{(2)} = 50$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = 4$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$ ,  $\gamma = 0.3$ .

и далее в настоящем разделе  $\Delta = 2^{-10}$ , число итераций  $N = 500$ ). Результат численного моделирования представлен на рис. 14.5.

Повторим численное моделирование решения системы уравнений (14.4) при  $B^{(11)} = 0.1$ ,  $B^{(22)} = 0.4$ ,  $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$ ,  $q = 10$ ,  $\mathbf{m}^{(1)} = -10$ ,  $\mathbf{m}^{(2)} = 40$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = 5$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$ ,  $\gamma = 0.7$ . На рис. 14.6 отражена динамика системы (14.4) при этих начальных данных.

Пусть теперь  $B^{(11)} = 0.2$ ,  $B^{(22)} = 0.6$ ,  $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$ ,  $q = 10$ ,  $\mathbf{m}^{(1)} = 15$ ,  $\mathbf{m}^{(2)} = 50$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = 4$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$ ,  $\gamma = 0.3$ . Результат численного моделирования решения системы (14.4) при этих условиях приведен на рис. 14.7.

Во всех трех рассмотренных случаях выбиралась одна и та же реализация последовательности случайных величин  $\zeta_r^{(i)}$ ;  $r = 0, 1, \dots, q$ ;  $i = 1, 2$ .

#### 14.4 Численное исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца

В связи с проблемой турбулентности жидкостей, газов и плазмы возник значительный интерес к трехмерной дискретной модели конвективной

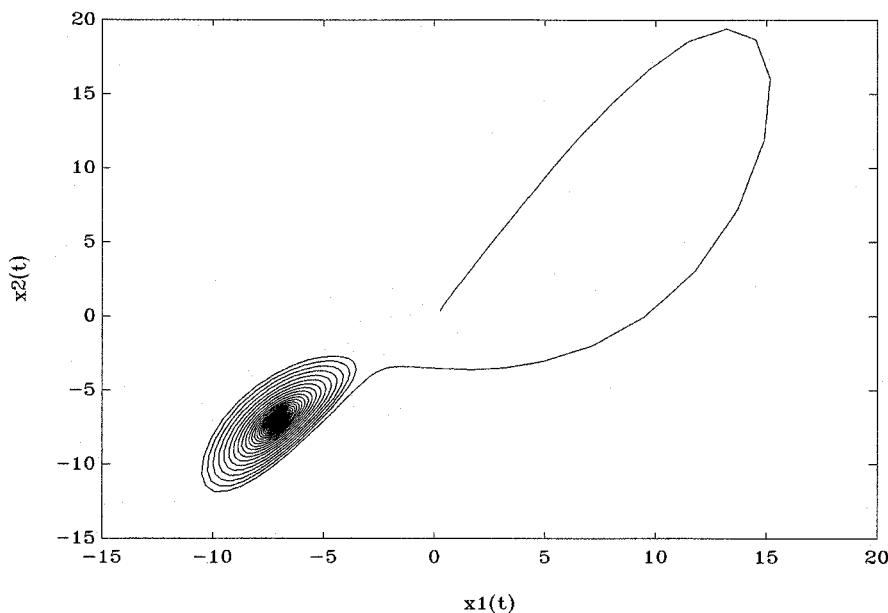


Рис. 14.8. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 19.8$ .

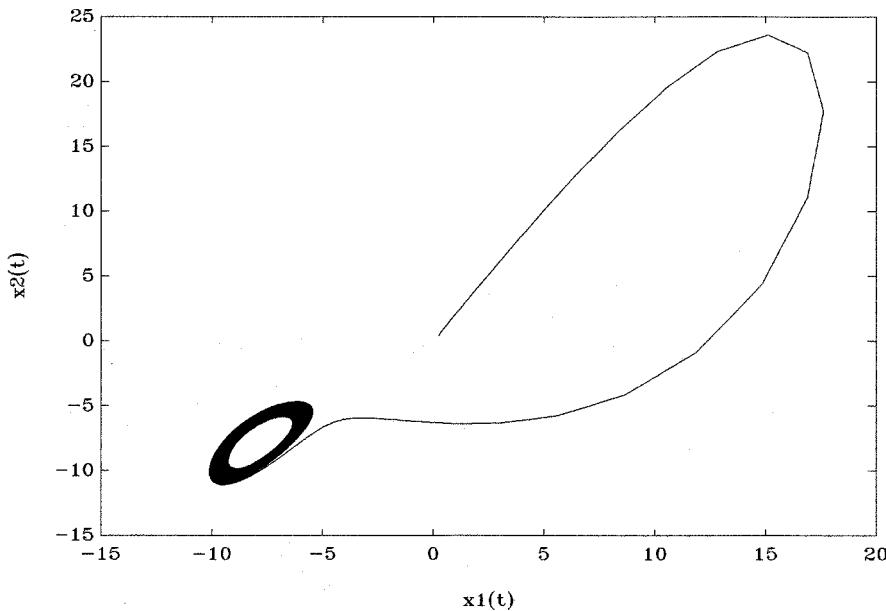


Рис. 14.9. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 24.0$ .

турбулентности Лоренца, описываемой следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^{(1)}(t) &= \left( -a\mathbf{x}^{(1)}(t) + a\mathbf{x}^{(2)}(t) \right) dt, \\ d\mathbf{x}^{(2)}(t) &= \left( r\mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(2)}(t) - \mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(3)}(t) \right) dt, \\ d\mathbf{x}^{(3)}(t) &= \left( -b\mathbf{x}^{(3)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(2)}(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (14.11)$$

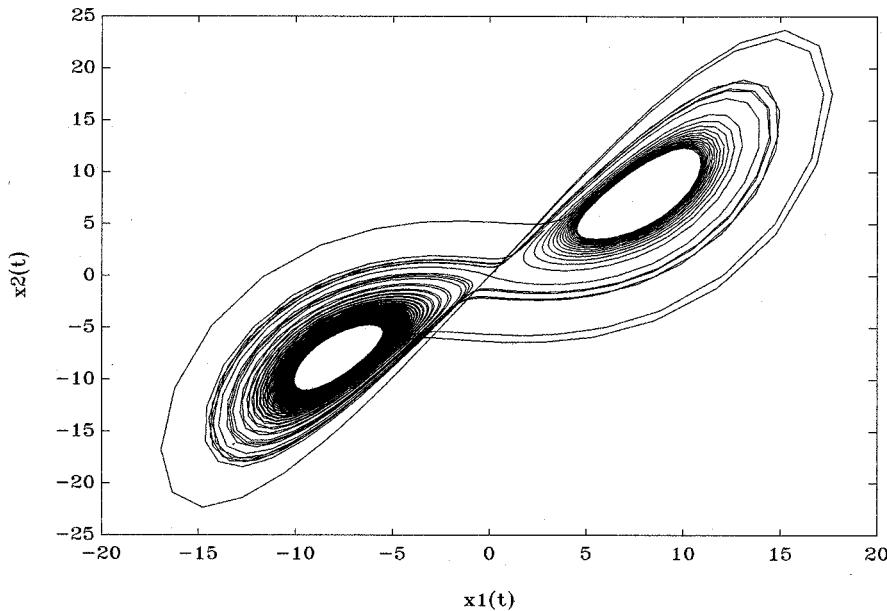


Рис. 14.10. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 24.1$ .

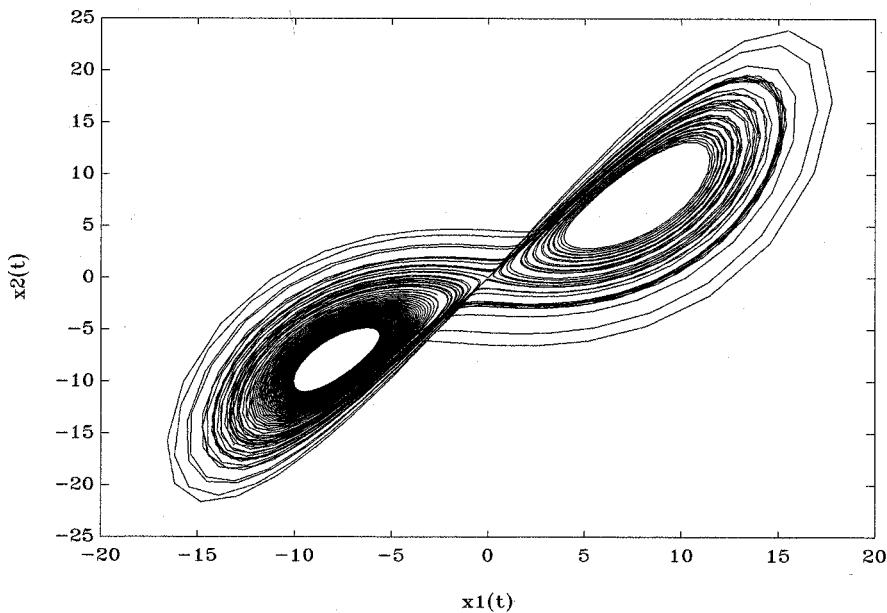


Рис. 14.11. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 24.3$ .

Известно [79], что в системе (14.11) при определенном сочетании параметров  $a$ ,  $r$ ,  $b$  возникают хаотические движения вокруг двух состояний равновесия (здесь под движением мы понимаем решение системы (14.11)).

Эти движения можно трактовать как переход из одного состояния равновесия в другое в результате нарастания колебаний возле каждого из них. Такие колебания могут происходить не только от одного неустойчивого

состояния равновесия к другому, но и от одного неустойчивого периодического движения к другому.

Одно из таких хаотических движений возникает в системе (14.11) при возрастании параметра  $r$  и переходе его через значение 24.06 при  $b = 8/3$ ,  $a = 10.00$ . Это хаотическое движение носит название странного аттрактора Лоренца.

Выполним численное моделирование решения системы (14.11) с помощью метода третьего порядка точности (имеется в виду метод, основанный на стандартной формуле Тейлора) при следующих исходных данных:  $t \in [0, 100.00]$ ,  $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $b = 8/3$ ,  $a = 10.00$ .

Эволюция фазовых траекторий системы (14.11) на фазовой плоскости  $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$  при  $r = 19.8$ , 24.00, 24.10, 24.30 представлена на рис. 14.8–14.11 соответственно. При этом на графиках выводилась каждая 5-я точка, которая соединялась с предыдущей и последующей точками ломаной.

Интересным представляется поведение системы (14.11) при воздействии на нее стохастического возмущения. Рассмотрим такую возмущенную систему, понимаемую как систему СДУ Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\mathbf{x}_t^{(1)} + a\mathbf{x}_t^{(2)} \\ r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \\ -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (14.12)$$

где  $\mathbf{x}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}_t^{(2)}$ ,  $\mathbf{x}_t^{(3)}$  — компоненты решения  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$  уравнения (14.12);  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — независимые стандартные винеровские процессы;  $a$ ,  $r$ ,  $b$ ,  $c$  — постоянные.

Рассуждения, приведенные ниже, носят очевидно нестрогий и качественный характер.

Представляется естественным, что стохастическое возмущение усиливает случайным образом колебания вокруг двух положений равновесия, в результате чего выборочная траектория решения СДУ Ито (14.12), внешне напоминающая странный аттрактор Лоренца, возникнет, вообще говоря, при  $r < 24.06$ . Среднее пороговое значение параметра  $r$ , при котором рождается "стохастический аналог аттрактора Лоренца", очевидно зависит от интенсивности стохастического возмущения (от значения параметра  $c$ ), а также от промежутка интегрирования  $[0, T]$ .

В качестве численного метода для решения системы (14.12) возьмем

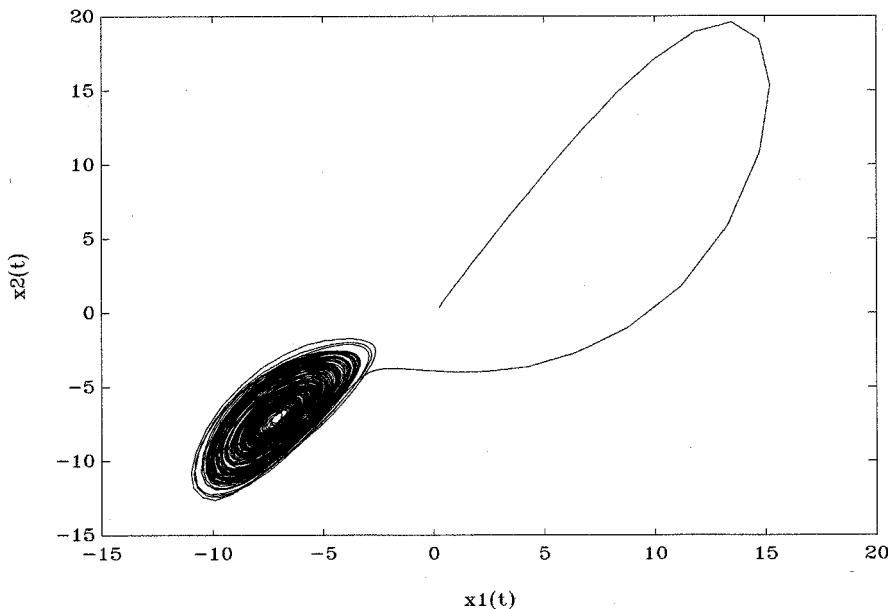


Рис. 14.12. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 20.0$ ,  $c = 2.0$ .

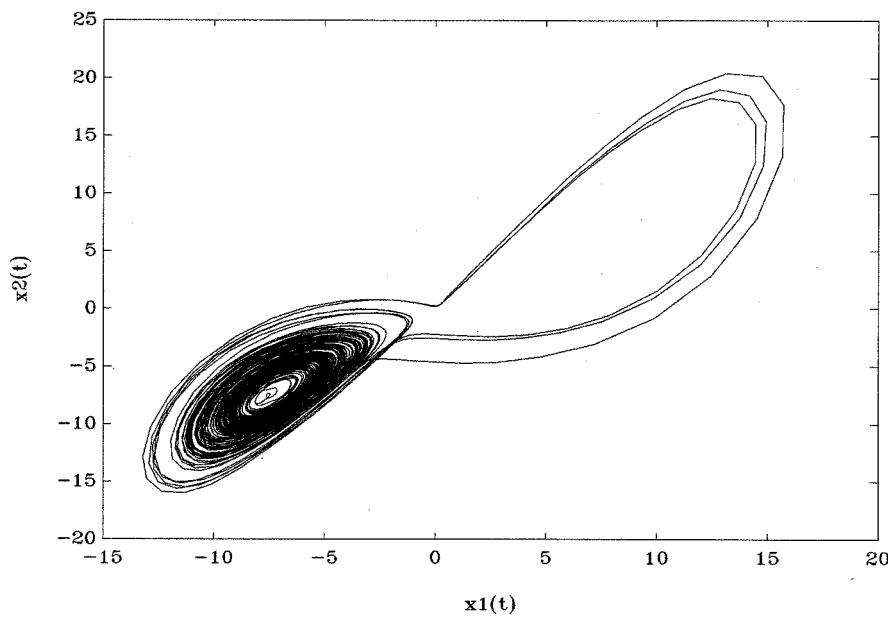


Рис. 14.13. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 21.0$ ,  $c = 2.0$ .

соотношения (4.107)–(4.109) (без остаточных членов) на разбиении  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  промежутка  $[0, T]$  с шагом  $\Delta$ :  $\tau_j = j\Delta$ ;  $j = 0, 1, \dots, N$ ;  $N\Delta = T$ , а также формулы (6.84)–(6.86) для моделирования стохастических интегралов. В результате получим следующую явную численную схему:

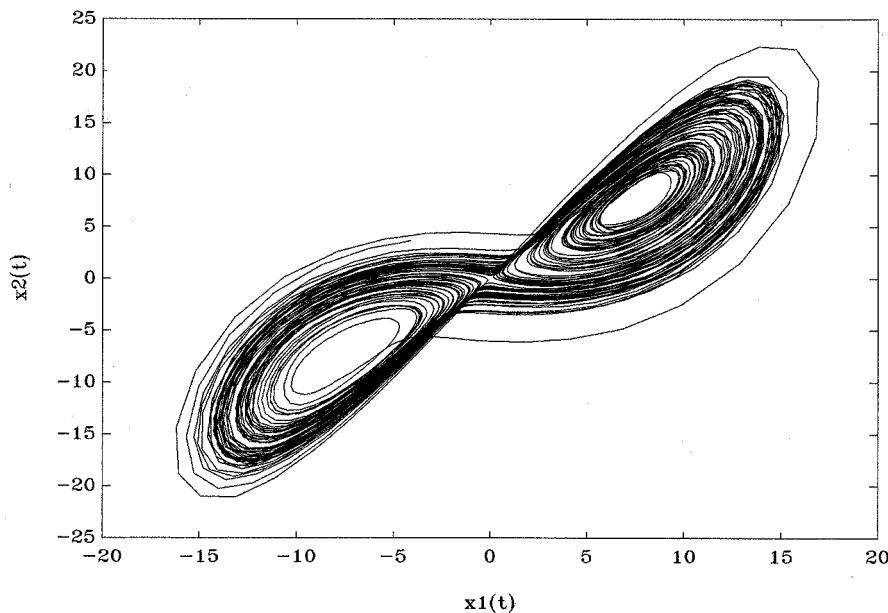


Рис. 14.14. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 23.0$ ,  $c = 2.0$ .

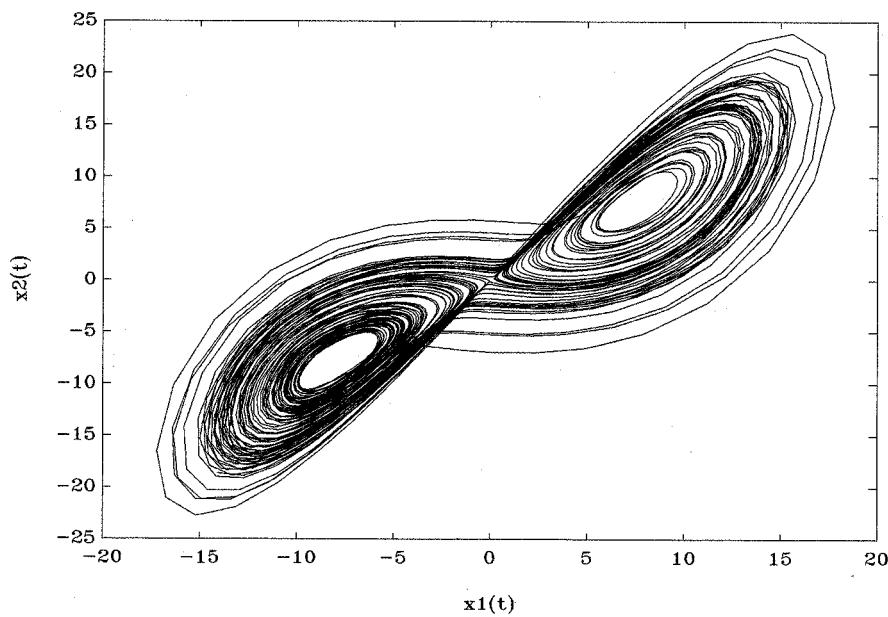


Рис. 14.15. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 24.3$ ,  $c = 2.0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(1)} &= \mathbf{y}_k^{(1)} + a\Delta \left( -\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) + \\ &+ a\frac{\Delta^2}{2} \left[ -a \left( -\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) + r\mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -ac\mathbf{y}_k^{(1)}\Delta^{5/2}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(3)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(3)}+\frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_2^{(3)}\right]+ \\
 & +a\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(a+r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)-(a+1)\times\right. \\
 & \times\left.\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right)-\mathbf{y}_k^{(1)}\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\right], \quad (14.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = & \\
 = & \mathbf{y}_k^{(2)} + \Delta\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right) - c\mathbf{y}_k^{(1)}\Delta^{3/2}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_1^{(3)}-\frac{1}{2}\zeta_0^{(3)}\right]+ \\
 & +\frac{\Delta^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)-r\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}+\right. \\
 & \left.+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\right]+\left(a\left(\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+\right. \\
 & +(1+b)\mathbf{y}_k^{(1)})c\Delta^{5/2}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(3)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(3)}+\frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_2^{(3)}\right]+ \\
 & +ac\Delta^{3/2}\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left[-\frac{1}{6}\zeta_0^{(3)}+\frac{1}{3\sqrt{20}}\zeta_2^{(3)}\right]+ \\
 & +\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(-(a+1)\left(r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)+b\mathbf{y}_k^{(3)}-2\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+\right. \\
 & +\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right)\left(\left(r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)a+1-\left(\mathbf{y}_k^{(1)}\right)^2\right)+ \\
 & \left.+\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(a\left(\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+\mathbf{y}_k^{(1)}(1+b)\right)\right], \quad (14.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{k+1}^{(3)} = & \\
 = & \mathbf{y}_k^{(3)} + cI_{0_{s,t}}^{(3)} + \Delta\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right) - bc\Delta^{3/2}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_1^{(3)}-\frac{1}{2}\zeta_0^{(3)}\right]+ \\
 & +\frac{\Delta^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\mathbf{y}_k^{(2)}+\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right)\mathbf{y}_k^{(1)}-\right. \\
 & \left.-b\left(\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}-b\mathbf{y}_k^{(3)}\right)\right]+ \\
 & +c\left(b^2-\left(\mathbf{y}_k^{(1)}\right)^2\right)\Delta^{5/2}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(3)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(3)}+\frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_2^{(3)}\right]+ \\
 & +\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(-a\mathbf{y}_k^{(2)}+r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\right.\right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)} \left( r - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) - b \mathbf{y}_k^{(2)} \Big) + \\
& + \left( r \mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(3)} \right) \left( -a \mathbf{y}_k^{(1)} + 2a \mathbf{y}_k^{(2)} - (1+b) \mathbf{y}_k^{(1)} \right) + \\
& + \left( -b \mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left( b^2 - \left( \mathbf{y}_k^{(1)} \right)^2 \right) \Big], \tag{14.15}
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{y}_{k\Delta}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ), а  $\zeta_i^{(3)}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины, которые независимы с аналогичными случайными величинами, генерируемыми на всех предыдущих шагах интегрирования относительно текущего шага.

Смоделируем численно решение системы (14.12) с помощью метода (14.13)–(14.15) при следующих исходных данных:  $t \in [0, 100.00]$ ,  $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $b = 8/3$ ,  $a = 10.00$ ,  $c = 2.00$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.25$ .

Эволюция фазовых траекторий (выборочной траектории решения СДУ Ито) системы (14.12) на фазовой плоскости  $(\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)})$ , полученная на одной и той же реализации последовательности случайных величин из (14.13)–(14.15) при  $r = 20.00, 21.00, 23.00$  и  $24.30$ , изображена на рис. 14.12–14.15.

На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, внешне напоминающие странный аттрактор Лоренца, возникают при  $r < 24.06$ . Кроме того, фазовые траектории становятся менее регулярными, чем в детерминированном случае, вследствие воздействия на систему (14.12) случайного возмущения.

Повторим численное моделирование решения системы (14.12) с помощью численного метода (14.13)–(14.15) при тех же исходных данных, но возьмем  $c = 4.00$ . В этом случае эволюция фазовых траекторий системы (14.12) на фазовой плоскости  $(\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)})$ , полученная на одной (той же, что и в случае  $c = 2.00$ ) реализации последовательности случайных величин, входящих в (14.13)–(14.15), при  $r = 11.00, 13.00, 20.00$  и  $24.30$  показана на рис. 14.16–14.19.

На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, внешне напоминающие странный аттрактор Лоренца, возникают при  $r$  меньших, чем в случае  $c = 2.00$ . При этом нерегулярность траекторий становится еще более заметной.

Увеличим теперь значение параметра  $c$  до 8.00 и повторим численное моделирование решения системы (14.12) с помощью численного метода (14.13)–(14.15) при тех же значениях остальных параметров и на той

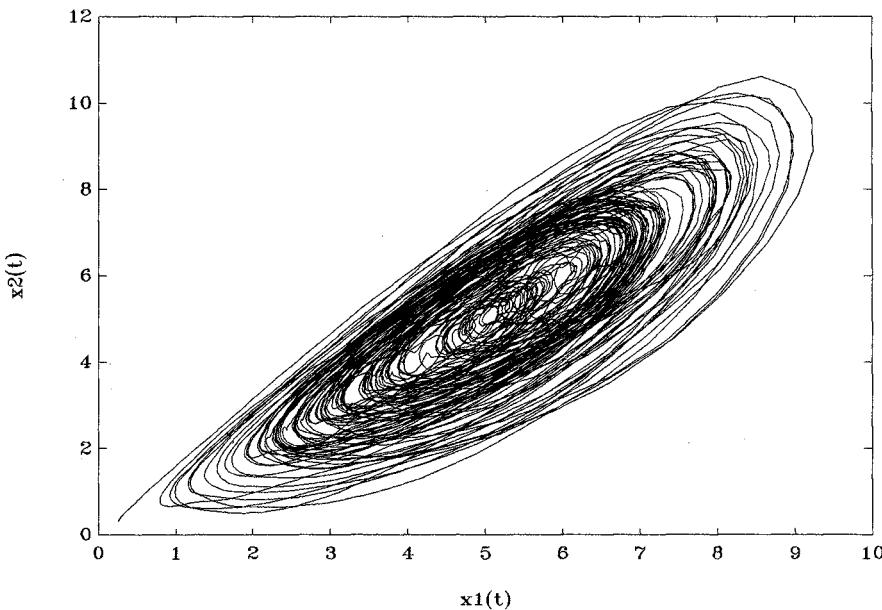


Рис. 14.16. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 11.0$ ,  $c = 4.0$ .

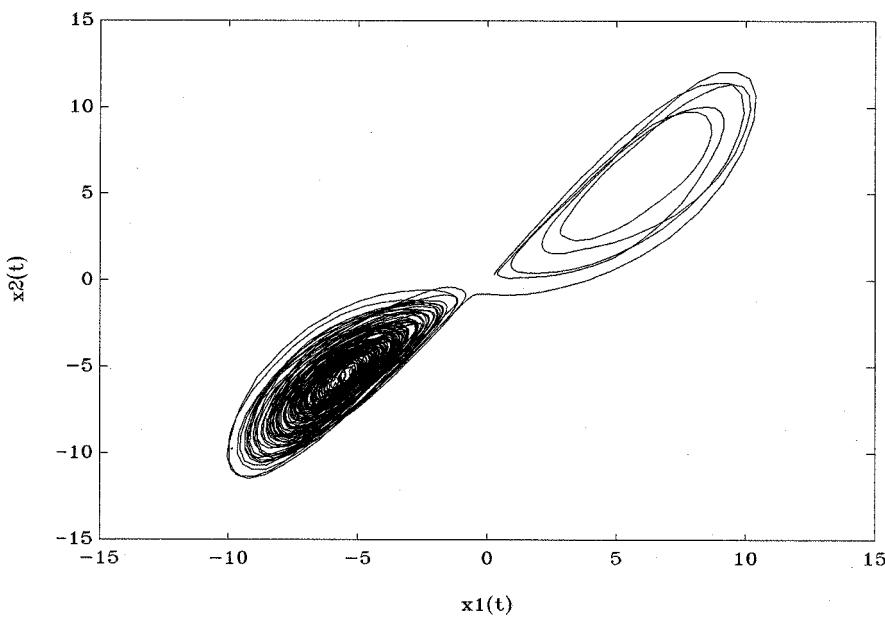


Рис. 14.17. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 13.0$ ,  $c = 4.0$ .

же реализации последовательности случайных величин, входящих в (14.13) – (14.15), что и в предыдущих случаях. Результат численного моделирования при  $r = 1.50$ ,  $5.00$ ,  $20.00$  и  $24.30$  представлен на рис. 14.20–14.23. На этих рисунках в еще большей степени, чем при  $c = 2.00$  и  $c = 4.00$ , проявляется нерегулярность фазовых траекторий.

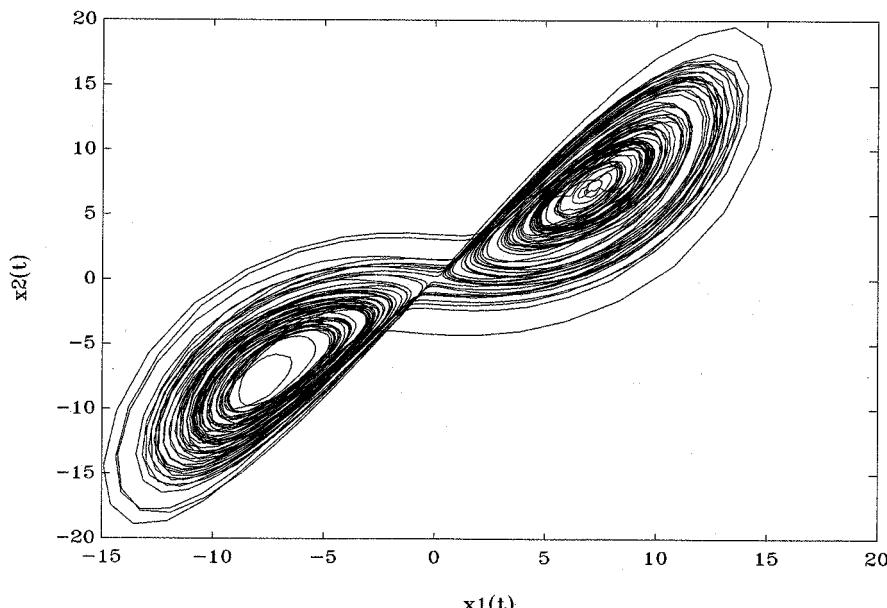


Рис. 14.18. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 20.0$ ,  $c = 4.0$ .

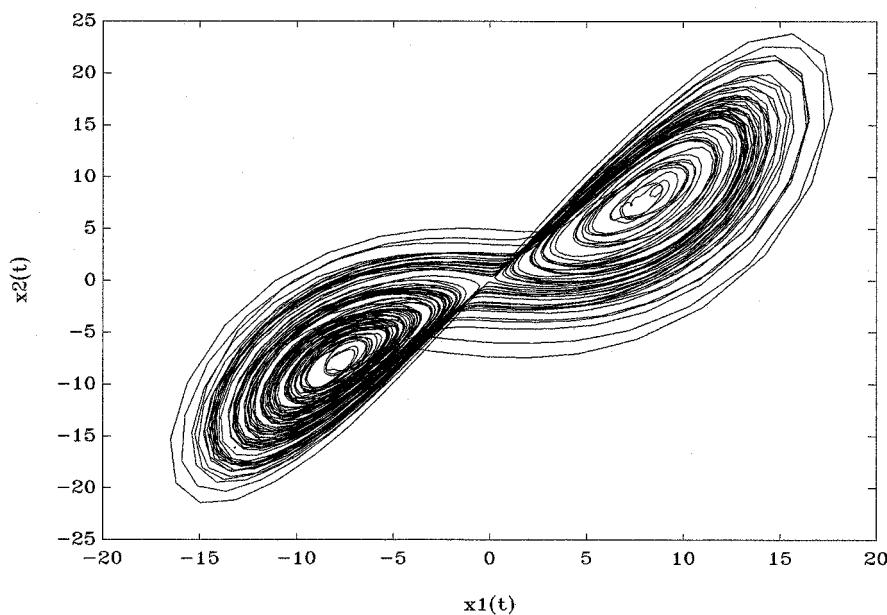


Рис. 14.19. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 24.3$ ,  $c = 4.0$ .

В заключение данного раздела отметим, что полиномы Лежандра выбраны в данной книге в качестве основной системы функций для численного моделирования повторных стохастических интегралов с помощью метода, основанного на обобщенных кратных рядах Фурье и отраженного в теоремах 5.1 – 5.14 главы 5.

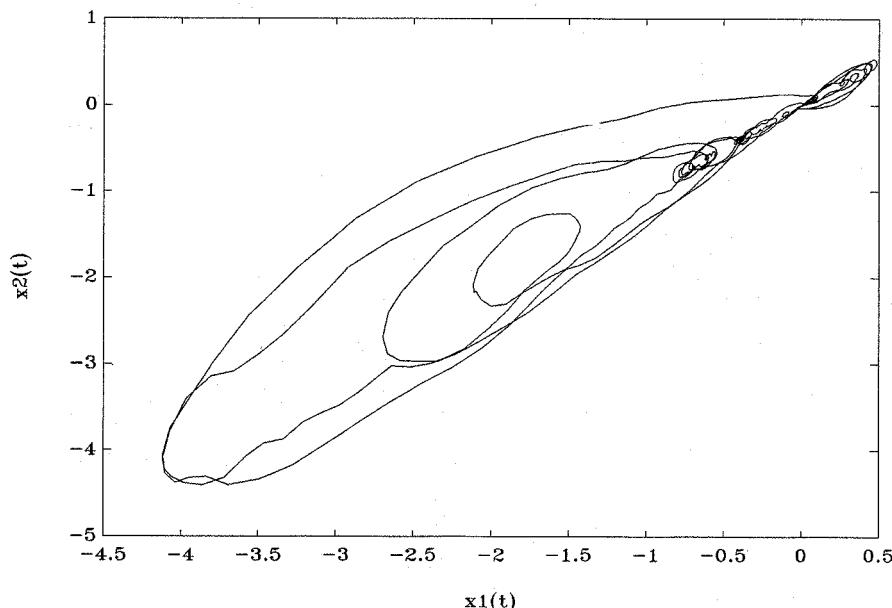


Рис. 14.20. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 1.5$ ,  $c = 8.0$ .

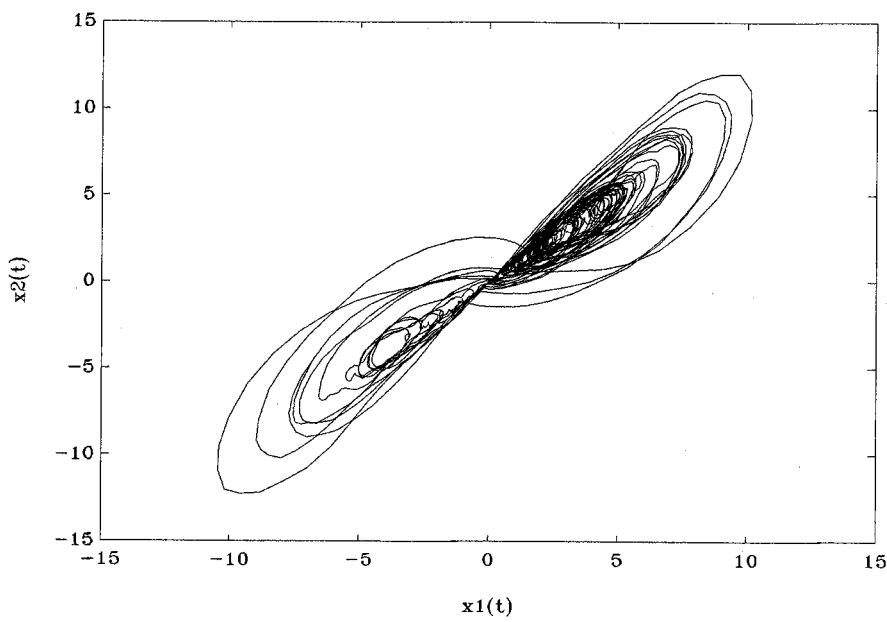


Рис. 14.21. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 5.0$ ,  $c = 8.0$ .

Формулы для аппроксимаций указанных интегралов, входящие в (14.13)–(14.15), могут быть получены напрямую с помощью теоремы 5.1 при  $k = 1$  или методом ортогонализации, который хорошо известен [76], [148], [196]. В более сложных случаях (см. следующий раздел) теорема 5.1 и ряды Фурье–Лежандра используются гораздо в большем объеме.

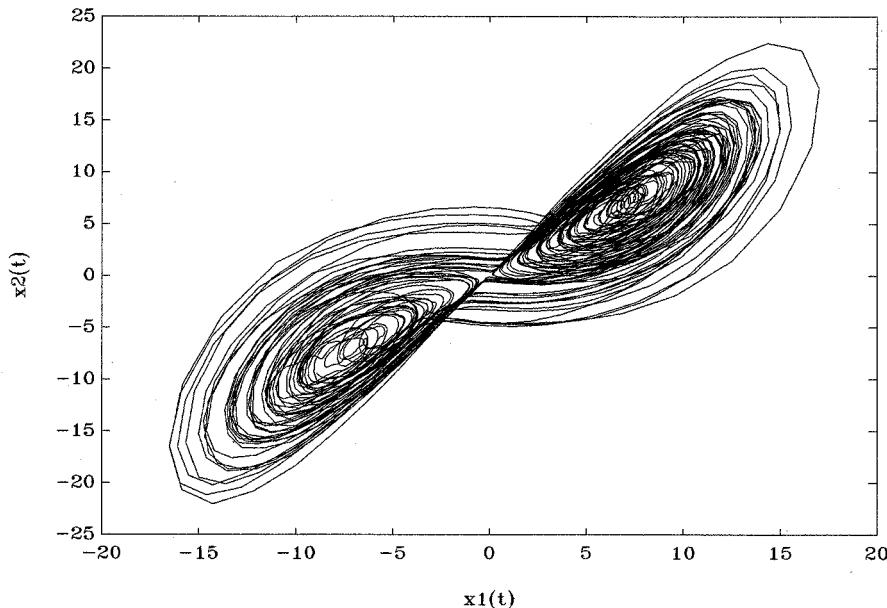


Рис. 14.22. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 20.0$ ,  $c = 8.0$ .

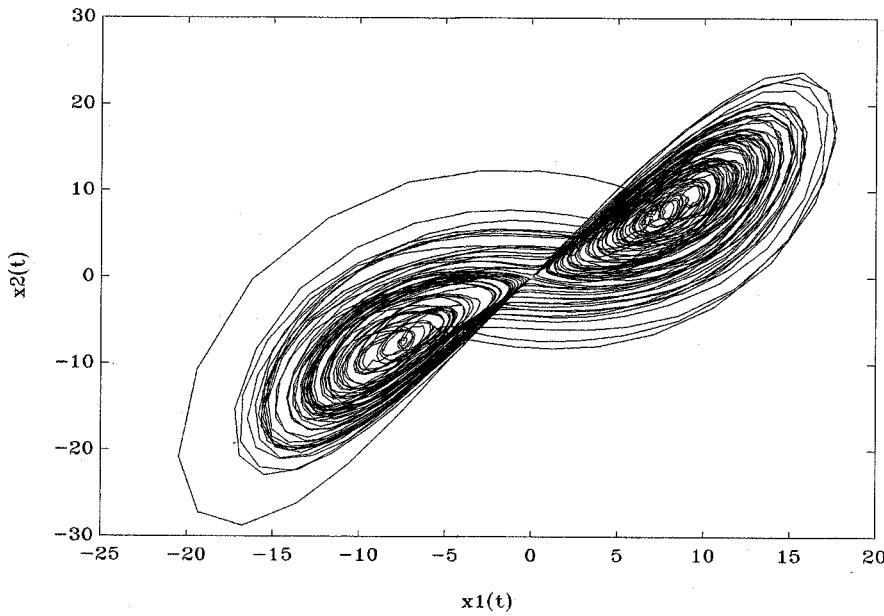


Рис. 14.23. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при  $b = 8/3$ ,  $a = 10$ ,  $r = 24.3$ ,  $c = 8.0$ .

## 14.5 Численное исследование влияния стохастического возмущения на уравнения Рёсслера

Рассмотрим систему уравнений Рёсслера [79] со стохастическим возмущением в виде следующей системы СДУ Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \\ f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)}, \quad (14.16)$$

где  $\mathbf{x}_t^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}_t^{(2)}$ ,  $\mathbf{x}_t^{(3)}$  — компоненты решения  $\mathbf{x}_t$  системы (14.16);  $\mathbf{f}_t^{(1)}$  — стандартный скалярный винеровский процесс;  $e, f, \mu, c$  — параметры.

В главе 4 были приведены унифицированные разложения Тейлора–Ито (4.111)–(4.113) для компонент решения  $\mathbf{x}_t$  системы (14.16) до малых  $O((s-t)^{5/2})$ . Положим в этих разложениях  $s = (k+1)\Delta$ ,  $t = k\Delta$ ;  $k = 0, 1, \dots$ . Отбросим в них остаточные члены и аппроксимируем повторные стохастические интегралы Ито, входящие в эти разложения, с помощью методов, изложенных в главе 6. В результате получим следующие выражения для численного метода, основанного на представлениях (4.111)–(4.113):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(1)} &= \mathbf{y}_k^{(1)} + \Delta \left( -\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) + c\mathbf{y}_k^{(3)} \left[ \Delta I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} \right] + \\ &\quad + \frac{\Delta^2}{2} \left[ \mu\mathbf{y}_k^{(3)} - \mathbf{y}_k^{(1)} - e\mathbf{y}_k^{(2)} - f - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} \right] - \\ &\quad - c^2\mathbf{y}_k^{(3)} \left[ I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} + \Delta I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} \right], \end{aligned} \quad (14.17)$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{y}_k^{(2)} + \Delta \left( \mathbf{y}_k^{(1)} + e\mathbf{y}_k^{(2)} \right) + \frac{\Delta^2}{2} \left[ -\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)} + e \left( \mathbf{y}_k^{(1)} + e\mathbf{y}_k^{(2)} \right) \right], \quad (14.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(3)} &= \mathbf{y}_k^{(3)} - c\mathbf{y}_k^{(3)} I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + \Delta \left( f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)} \right) + \\ &\quad + c^2\mathbf{y}_k^{(3)} I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} + c\mathbf{y}_k^{(3)} \left( \mu - \mathbf{y}_k^{(1)} \right) \left[ \Delta I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} \right] + \\ &\quad + c \left( f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)} \right) I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} - c^3\mathbf{y}_k^{(3)} I_{000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(111)} + \\ &\quad + \frac{\Delta^2}{2} \left[ \left( -\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) \mathbf{y}_k^{(3)} + \left( f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)} \right) \left( \mathbf{y}_k^{(1)} - \mu \right) \right] + \\ &\quad + c^2\mathbf{y}_k^{(3)} \left( \mathbf{y}_k^{(1)} - \mu \right) \left[ I_{10\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} - I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} \right] - \\ &\quad - c^2 \left( f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)} \right) I_{10\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} - \\ &\quad - c^2\mathbf{y}_k^{(3)} \left( \mu - \mathbf{y}_k^{(1)} \right) \left[ I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} + \Delta I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} \right] + c^4\mathbf{y}_k^{(3)} I_{0000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1111)}, \end{aligned} \quad (14.19)$$

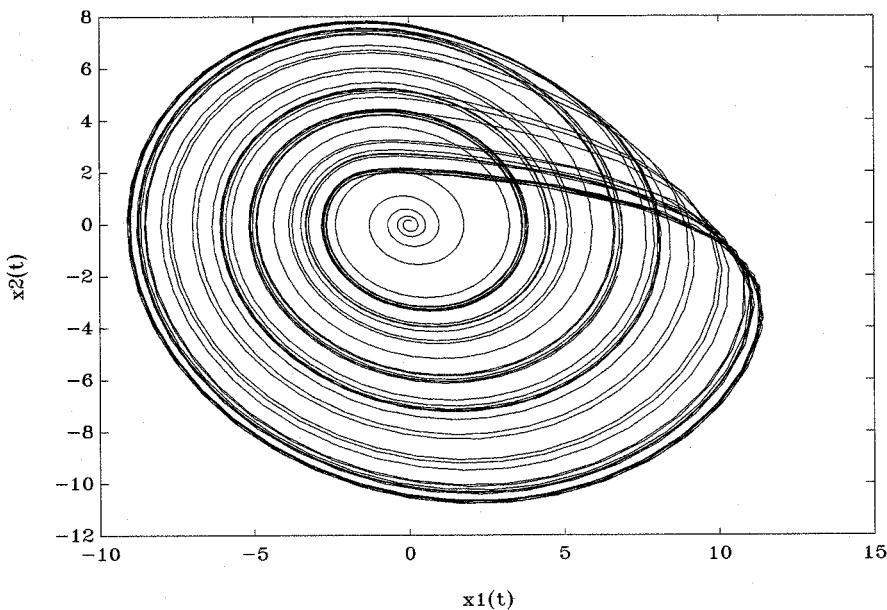


Рис. 14.24. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера при  $c = 0.0$ ,  $e = f = 0.2$ ,  $\mu = 5.7$ .

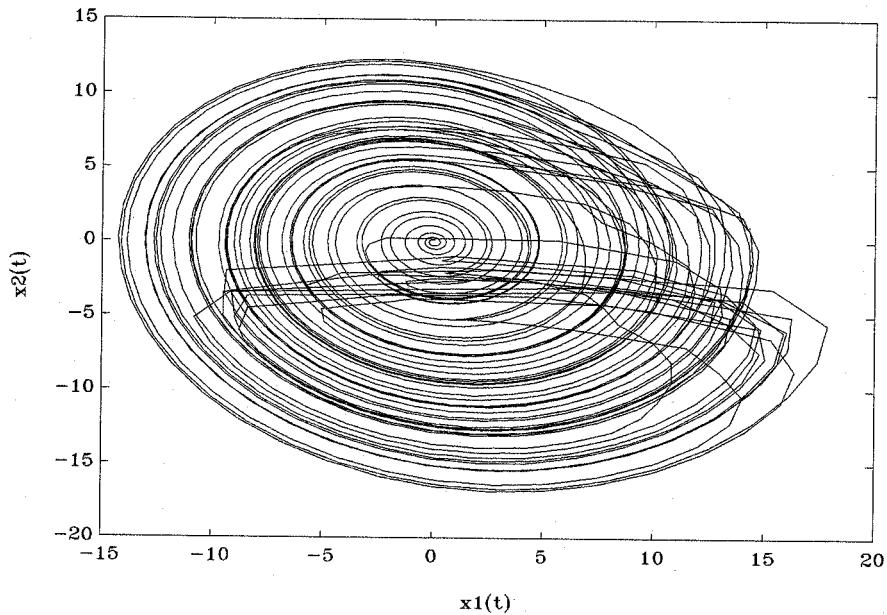


Рис. 14.25. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при  $c = 2.0$ ,  $e = f = 0.2$ ,  $\mu = 5.7$ .

Где

$$I_{0\tau_{k+1},\tau_k}^{(1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0,$$

$$I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(11)} = \frac{1}{2}\Delta((\zeta_0)^2 - 1),$$

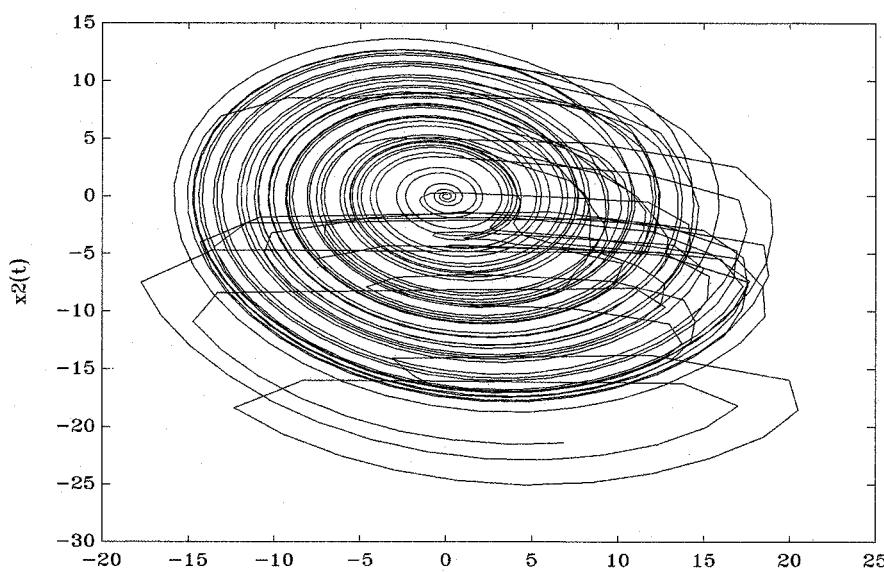


Рис. 14.26. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при  $c = 2.5$ ,  $e = f = 0.2$ ,  $\mu = 5.7$ .

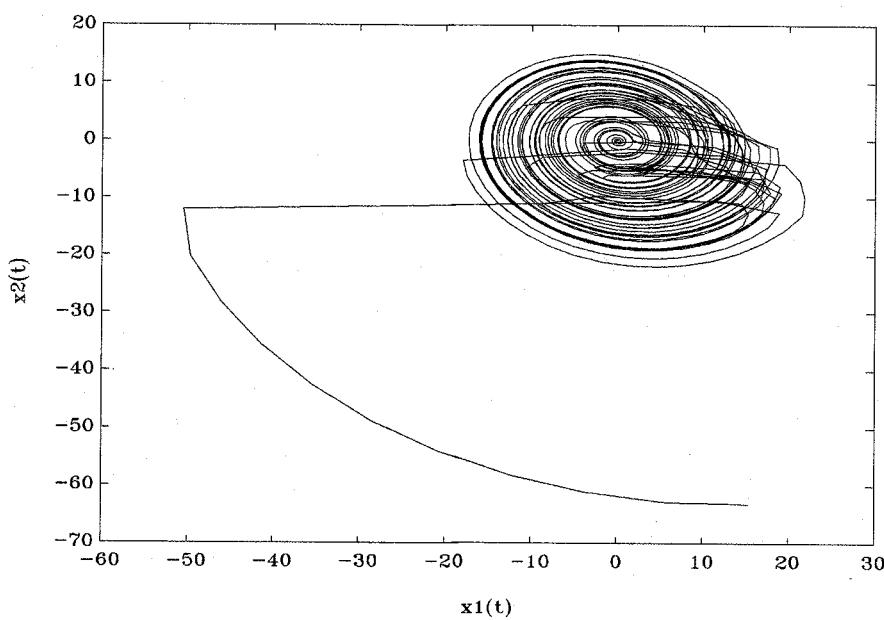


Рис. 14.27. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при  $c = 2.9$ ,  $e = f = 0.2$ ,  $\mu = 5.7$ .

$$I_{1_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right),$$

$$I_{000_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(111)} = \frac{\Delta^{3/2}}{6} \left( (\zeta_0)^3 - 3\zeta_0 \right),$$

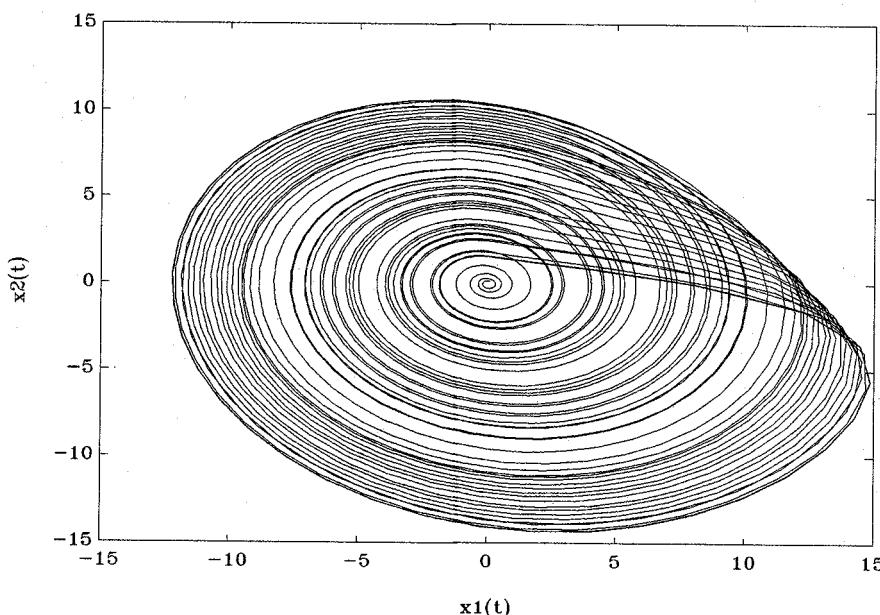


Рис. 14.28. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера при  $c = 0.0$ ,  $e = 0.19$ ,  $f = 0.4$ ,  $\mu = 8.5$ .

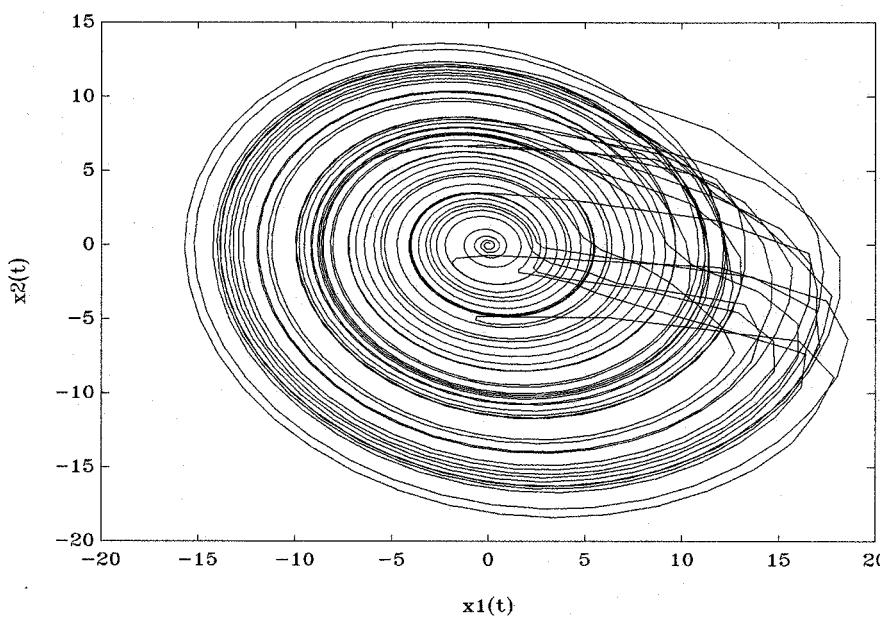


Рис. 14.29. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при  $c = 2.0$ ,  $e = 0.19$ ,  $f = 0.4$ ,  $\mu = 8.5$ .

$$I_{0000\tau_{k+1},\tau_k}^{(1111)} = \frac{\Delta^2}{24} \left( (\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3 \right),$$

$$I_{01\tau_{k+1},\tau_k}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{4} \left( (\zeta_0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 + \right.$$

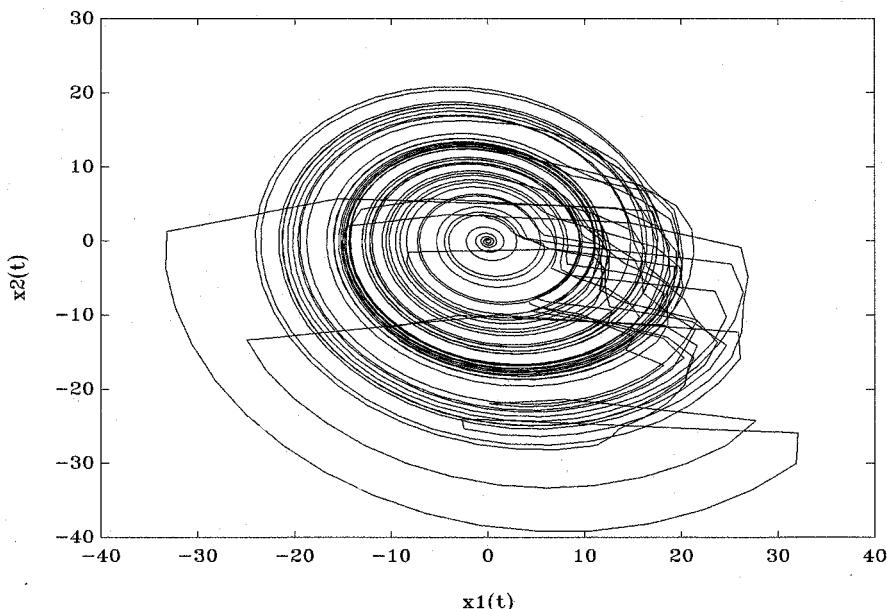


Рис. 14.30. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при  $c = 3.77$ ,  $e = 0.19$ ,  $f = 0.4$ ,  $\mu = 8.5$ .

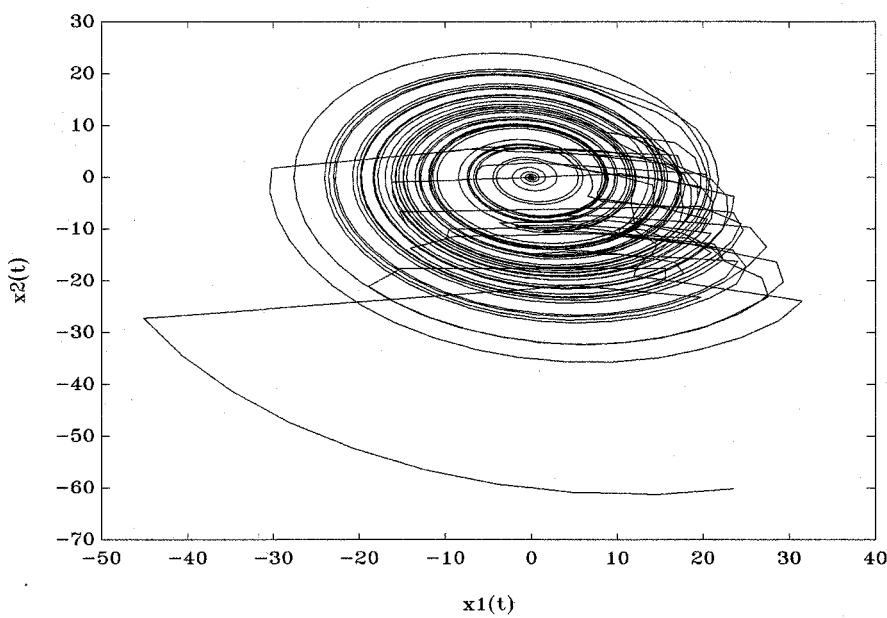


Рис. 14.31. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при  $c = 3.775$ ,  $e = 0.19$ ,  $f = 0.4$ ,  $\mu = 8.5$ .

$$+ \sum_{i=0}^q \left( \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i \zeta_{i+2} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} (\zeta_i)^2 \right) - 1 \right),$$

$$I_{10_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{2}\zeta_0\left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right) + \frac{\Delta^2}{2} - I_{01_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)q}, \quad (14.20)$$

где  $\tau_k = k\Delta$ ,  $\mathbf{y}_{\tau_k}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\zeta_j$  ( $j = 0, 1, \dots, q+2$ ) — система независимых стандартных гауссовских случайных величин, которая генерируется на  $k$ -м шаге интегрирования и является независимой с аналогичными системами случайных величин, которые генерируются на всех предшествующих шагах интегрирования, причем число  $q$  выбирается (см. главы 6 и 7) из условия:

$$\frac{\Delta^4}{16}\left(\frac{1}{9} - \sum_{i=0}^q \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} - 2 \sum_{i=1}^q \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right) \leq C\Delta^5,$$

где постоянная  $C$  входит в условие (7.22) теоремы 7.2 при  $r = 5$ .

Следует отметить, что соотношение (14.20) вытекает из равенства

$$I_{10_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)} + I_{01_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)} - \frac{\Delta^2}{2} = I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} I_{1_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} \text{ с. 1,}$$

которое может быть получено, например, с помощью теоремы о замене порядка интегрирования (см. главу 3) или по формуле Ито.

Положим  $c = 0.0$ ,  $e = f = 0.2$ ,  $\mu = 5.7$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.1$ . Результат численного моделирования решения системы (14.16) в этом случае при  $t \in [0, 300]$  с шагом интегрирования  $\Delta = 0.03$  приведен на фазовой плоскости  $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$  (рис. 14.24).

На указанном рисунке представлена проекция на фазовой плоскости  $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$  аттрактора Рёссlera, названного им "слоистым". Как известно [79], этот аттрактор возникает в результате последовательности бифуркаций периода, которая начинается при  $\mu = 3.50$  [79] и при  $\mu = 4.20$  [79] приводит к появлению аттрактора.

Введем стохастическое возмущение, то есть будем брать теперь  $c > 0$ . Выполним численное моделирование решения системы (14.16) с помощью соотношений (14.17)–(14.19) при  $q = 2$  и  $c = 2.0, 2.5, 2.9$ , сохранив при этом значения остальных параметров. На рис. 14.25–14.27 представлена эволюция фазовых траекторий (выборочной траектории решения СДУ Ито) системы (14.16) на фазовой плоскости  $(\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)})$ .

На этих рисунках с ростом интенсивности  $c$  стохастического возмущения прослеживается тенденция к уходу фазовых траекторий из области притяжения аттрактора, которая условно заканчивается этим уходом при

достижении с значения 2.9 (здесь речь идет только о выборочных траекториях решения СДУ Ито (14.16), соответствующих  $c = 2.0, 2.5, 2.9$  и одной и той же (во всех трех случаях) выборочной траектории винеровского случайного процесса  $f_t^{(1)}$ ).

При изменении значений  $e, f, \mu$  внешний вид аттрактора меняется. Так, при  $e = 0.19, f = 0.4, \mu = 8.5, c = 0.0$  проекция аттрактора на фазовую плоскость  $(x_t^{(1)}(t), x_t^{(2)}(t))$  изображена на рис. 14.28.

На рис. 14.29–14.31 показана эволюция фазовых траекторий (выборочной траектории решения СДУ Ито) системы (14.16) на фазовой плоскости  $(x_t^{(1)}, x_t^{(2)})$  при тех же значениях параметров  $e, f, \mu$  и  $c = 2.0, 3.77, 3.775$  соответственно. На этих рисунках с ростом  $c$  также заметна тенденция к уходу фазовых траекторий из области притяжения аттрактора, которая условно завершается им при достижении  $c$  значения 3.775 (здесь речь идет только о выборочных траекториях решения СДУ Ито (14.16), соответствующих  $c = 2.0, 3.77, 3.775$  и одной и той же (во всех трех случаях) выборочной траектории винеровского случайного процесса  $f_t^{(1)}$ ).

Отметим, что при построении рис. 14.25–14.27, 14.29–14.31 бралась одна и та же реализация последовательности гауссовских случайных величин  $\zeta_j; j = 0, 1, \dots, q$ .

# Глава 15

## Примеры применения сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач

### 15.1 Тестирование процедур оценивания параметров

Отметим, что существует ряд работ (см., например, [153]), в которых исследовалась проблема оценки параметров в коэффициенте сноса диффузионных процессов, которые наблюдаются непрерывно. При этом получены явные выражения для функции правдоподобия. На практике часто диффузионный процесс наблюдается только в дискретные моменты времени. Явные представления для функции правдоподобия известны в этой ситуации только в достаточно редких случаях.

Простой способ получения процедур оценивания параметров при дискретном наблюдении заключается в аппроксимации, на основе дискретизации по времени, известных процедур оценивания параметров при непрерывном наблюдении (см., например, [148], [151], [153]).

#### 15.1.1 Двухмерная линейная модель

В настоящем разделе проиллюстрируем приложение сильных численных методов к тестированию процедур оценивания параметров на примере двухмерного процесса Ито, описываемого следующим СДУ Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_2 & -\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \quad (15.1)$$

$$\mathbb{M}\{\mathbf{x}_t^{(1)}\} = \mathbb{M}\{\mathbf{x}_t^{(2)}\} = 0,$$

где  $\theta_1, \theta_2, c > 0$ ;  $f_t \in \Re^1$  — стандартный винеровский процесс, который независим от  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0^{(1)} \ \mathbf{x}_0^{(2)})^\top$ ,  $t \in [0, T]$ ;  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры, подлежащие определению на основе наблюдений за процессом  $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_t^{(1)} \ \mathbf{x}_t^{(2)})^\top$  на промежутке  $[0, T]$ .

Приближенные решения уравнения правдоподобия для  $\theta_1, \theta_2$  из (15.1) имеют вид [105]

$$\hat{\theta}_{1,T} = - \int_0^T \mathbf{x}_t^{(2)} d\mathbf{x}_t^{(2)} \left( \int_0^T (\mathbf{x}_t^{(2)})^2 dt \right)^{-1}, \quad (15.2)$$

$$\hat{\theta}_{2,T} = \int_0^T (\mathbf{x}_t^{(2)})^2 dt \left( \int_0^T (\mathbf{x}_t^{(1)})^2 dt \right)^{-1}. \quad (15.3)$$

По формуле Ито

$$\int_0^T \mathbf{x}_t^{(2)} d\mathbf{x}_t^{(2)} = \frac{1}{2} \left( (\mathbf{x}_T^{(2)})^2 - (\mathbf{x}_0^{(2)})^2 - c^2 T \right) \text{ с. в. 1.} \quad (15.4)$$

Подставляя (15.4) в (15.2), получаем

$$\hat{\theta}_{1,T} = - \frac{1}{2} \left( (\mathbf{x}_T^{(2)})^2 - (\mathbf{x}_0^{(2)})^2 - c^2 T \right) \left( \int_0^T (\mathbf{x}_t^{(2)})^2 dt \right)^{-1}. \quad (15.5)$$

Заменяя стохастические интегралы в правых частях (15.3), (15.5) интегральными суммами имеем следующие процедуры оценивания параметров  $\theta_1, \theta_2$  ( $T = N_T \Delta$ ):

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{1,T}^\Delta &= \\ &= - \left( (\mathbf{x}_T^{(2)})^2 - (\mathbf{x}_0^{(2)})^2 - c^2 T \right) \left( \sum_{k=0}^{N_T-1} \left( (\mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)})^2 + (\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(2)})^2 \right) \Delta \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (15.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{2,T}^\Delta &= \\ &= \sum_{k=0}^{N_T-1} \left( (\mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)})^2 + (\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(2)})^2 \right) \Delta \left( \sum_{k=0}^{N_T-1} \left( (\mathbf{x}_{k\Delta}^{(1)})^2 + (\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(1)})^2 \right) \Delta \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

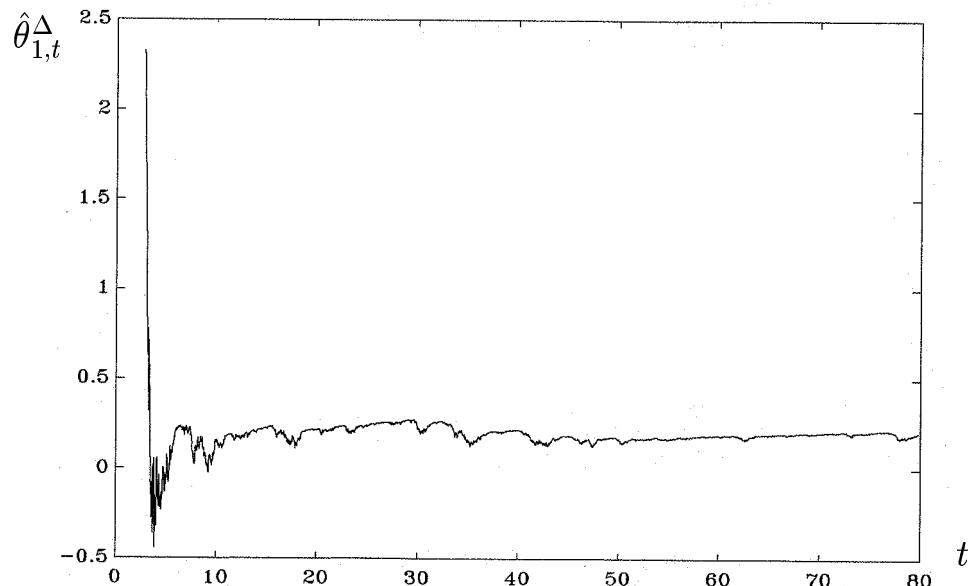


Рис. 15.1. Результат численного эксперимента 15.1.

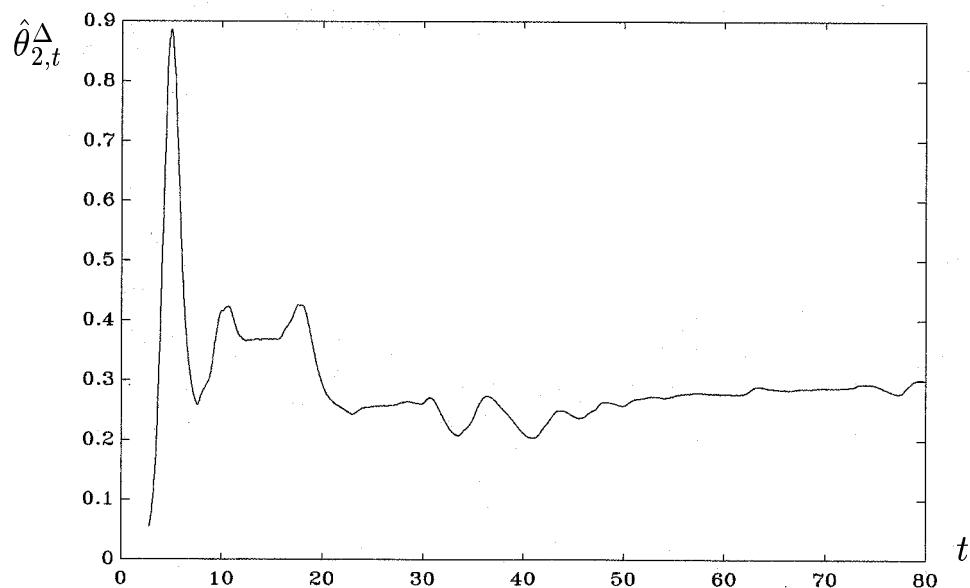


Рис. 15.2. Результат численного эксперимента 15.1.

**Численный эксперимент 15.1.** Смоделировать решение системы (15.1) при  $\theta_1 = 0.14$ ,  $\theta_2 = 0.5661^2 \approx 0.3205$ ,  $c = 5.08$ ,  $\mathbf{x}_0^{(1)} = 7$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = -0.25$  на промежутке времени  $[0, T]$ ,  $T = 80$ , с шагом  $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$ , пользуясь явным сильным методом Эйлера. Смоделировать процессы  $\hat{\theta}_{1,k\Delta}^\Delta$ ,  $\hat{\theta}_{2,k\Delta}^\Delta$  ( $k = 0, 1, \dots, N_T$ ),  $N_T = 20000$ ,  $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $\hat{\theta}_{1,0}^\Delta = 0$ ,  $\hat{\theta}_{2,0}^\Delta = 0$ , с помощью формул (15.6) и (15.7), в которых  $T$  заменяется на  $k\Delta$ . Результат численного моделирования представить графически (рис. 15.1, 15.2). При этом выводить на графики каждую пятую точку, начиная с 700-й.

Отметим, что тестирование процедур оценивания параметров случайных процессов, описываемых линейными СДУ Ито, рассматривалось в ряде работ (см., например, [148], [151], [153]). Однако формулы (15.6) и (15.7) не могут быть получены с помощью подхода, описанного в [148], [153], так как в этих работах предполагается, что матрица  $D = \Sigma\Sigma^T$  невырождена (здесь  $\Sigma$ , как обычно, матрица, умножаемая на дифференциал винеровского процесса, в правой части СДУ Ито).

### 15.1.2 Нелинейная одномерная модель

В [153] рассмотрена следующая математическая модель популяционной динамики:

$$dx_t = (\theta_1 x_t + \theta_2 x_t^2)dt + \sigma \sqrt{x_t} df_t, \quad (15.8)$$

где  $\theta_1 = \alpha K$ ,  $\theta_2 = -\alpha$ ;  $\sigma, \alpha, K$  — параметры;  $f_t$  — стандартный винеровский процесс; параметр  $\sigma$  предполагается известным.

В [153] получены выражения для оценок  $\hat{\theta}_{1,T}$ ,  $\hat{\theta}_{2,T}$  максимального правдоподобия параметров  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{1,T} &= \left( (x_T - x_0) \int_0^T x_t^3 dt - \int_0^T x_t dx_t \int_0^T x_t^2 dt \right) / N_T = \\ &= \left( (x_T - x_0) \int_0^T x_t^3 dt - \frac{1}{2} \left( x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 \int_0^T x_t dt \right) \int_0^T x_t^2 dt \right) / N_T, \end{aligned} \quad (15.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{2,T} &= \left( \int_0^T x_t dx_t \int_0^T x_t dt - (x_T - x_0) \int_0^T x_t^2 dt \right) / N_T = \\ &= \left( \frac{1}{2} \left( x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 \int_0^T x_t dt \right) \int_0^T x_t dt - (x_T - x_0) \int_0^T x_t^2 dt \right) / N_T, \end{aligned} \quad (15.10)$$

где

$$N_T = \int_0^T x_t dt \int_0^T x_t^3 dt - \left( \int_0^T x_t^2 dt \right)^2.$$

Полагая в (15.9), (15.10)

$$\int_0^T x_t^j dt \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_T-1} ((x_{k\Delta})^j + (x_{(k+1)\Delta})^j) \Delta \stackrel{\text{def}}{=} S_{j,T}^\Delta; \quad j = 1, 2, 3,$$

получим [153] следующие процедуры оценивания параметров  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  на основе дискретных данных  $x_{k\Delta}$ ;  $k = 0, 1, \dots, N_T$ ;  $T = N_T \Delta$ :

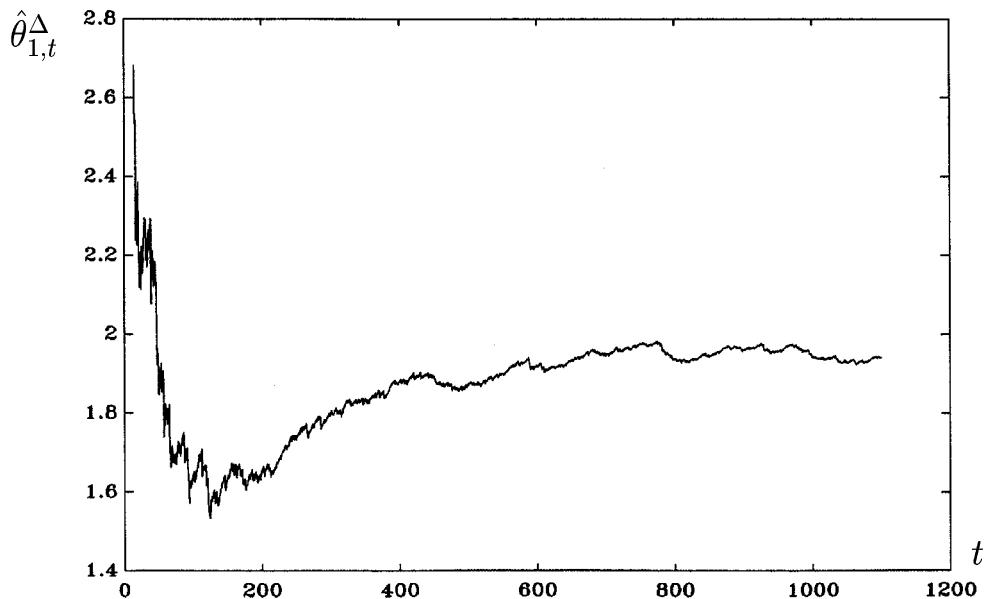


Рис. 15.3. Результат численного эксперимента 15.2.

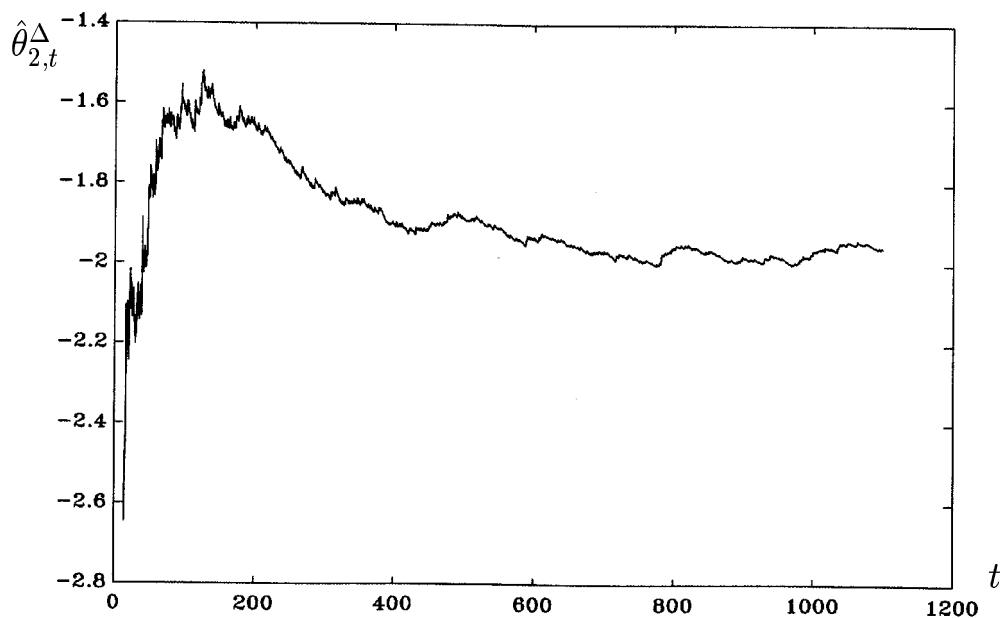


Рис. 15.4. Результат численного эксперимента 15.2.

$$\hat{\theta}_{1,T}^\Delta = \left( (x_T - x_0) S_{3,T}^\Delta - \frac{1}{2} (x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 S_{1,T}^\Delta) S_{2,T}^\Delta \right) / N_T^\Delta, \quad (15.11)$$

$$\hat{\theta}_{2,T}^\Delta = \left( \frac{1}{2} (x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 S_{1,T}^\Delta) S_{1,T}^\Delta - (x_T - x_0) S_{2,T}^\Delta \right) / N_T^\Delta, \quad (15.12)$$

где

$$N_T^\Delta = S_{1,T}^\Delta S_{3,T}^\Delta - (S_{2,T}^\Delta)^2.$$

В [153] исследованы статистические свойства процедур (15.11), (15.12)

оценивания параметров с использованием численного интегрирования СДУ Ито (15.8) явным сильным численным методом типа Рунге–Кутта порядка точности 1.0. Повторим численный эксперимент из [153], используя метод (7.108), принадлежащий к этому же классу численных методов.

**Численный эксперимент 15.2.** Смоделировать решение СДУ Ито (15.8) при  $\theta_1 = 2$ ,  $\theta_2 = -2$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $x_0 = 0.5$  на промежутке времени  $[0, T]$ ,  $T = 1100$ , с шагом  $\Delta = 2 \cdot 10^{-2}$ , пользуясь явным сильным конечно-разностным численным методом (7.108), по формуле:

$$\begin{aligned} y_{p+1} = & y_p + (\theta_1 y_p + \theta_2 y_p^2) \Delta + \sigma \sqrt{y_p^+} \sqrt{\Delta} \zeta_p + \\ & + \frac{\sigma \sqrt{\Delta}}{4} (\zeta_p^2 - 1) \left( \sqrt{\left( y_p + 2 \sqrt{\Delta} \sigma \sqrt{y_p^+} \right)^+} - \sqrt{y_p^+} \right), \end{aligned} \quad (15.13)$$

где  $y_{p\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} y_p$ ;  $x^+ = x$  при  $x \geq 0$  и  $x^+ = 0$  при  $x < 0$ ;  $\zeta_p$  ( $p = 0, 1, \dots, N_T - 1$ ) — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Смоделировать процессы  $\hat{\theta}_{1,k\Delta}^\Delta$ ,  $\hat{\theta}_{2,k\Delta}^\Delta$  ( $k = 0, 1, \dots, N_T$ ),  $N_T = 55000$ ,  $\Delta = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\hat{\theta}_{1,0}^\Delta = 0$ ,  $\hat{\theta}_{2,0}^\Delta = 0$ , с помощью формул (15.11), (15.12), в которых  $T$  заменяется на  $k\Delta$ . Результат численного моделирования представить графически (рис. 15.3, 15.4). При этом выводить на графики каждую пятнадцатую точку, начиная с 700-й.

Отметим, что выбор конечно-разностного метода типа Рунге–Кутта для численного решения СДУ Ито (15.8) обусловлен тем, что производная  $\sqrt{x}$  при малых  $x$  принимает большие значения, что ведет к численной неустойчивости (правая часть (15.13) не содержит производных).

Результаты, приведенные на рис. 15.3, 15.4, близки к соответствующим численным результатам, полученным в работе [153].

## 15.2 Фильтрация марковской цепи с конечным числом состояний

Цель настоящего раздела — приложение сильных численных методов решения СДУ Ито к фильтрации марковских цепей с конечным числом состояний. При изложении мы основываемся на монографиях [148], [151].

Пусть заданы вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  с потоком  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , процесс состояния  $\eta_t$ ,  $t \in [0, T]$ , который является однородной

марковской цепью с непрерывным временем и пространством состояний  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $n < \infty$ , а также столбец вероятностей  $p(t)$  с компонентами  $p^{(i)}(t) = P\{\eta_t = y_i\}; i = 1, \dots, n$ , удовлетворяющий уравнению

$$dp/dt = Ap$$

(здесь  $A \in \Re^{n \times n}$  — матрица интенсивности).

Предположим, что наблюдаемый  $m$ -мерный процесс  $\mathbf{w}_t$ ,  $t \in [0, T]$  определяется равенством

$$\mathbf{w}_t = \int_0^t \mathbf{a}(\eta_\tau) d\tau + \mathbf{f}_t, \quad (15.14)$$

где  $\mathbf{f}_t$ ,  $t \in [0, T]$  ( $\mathbf{f}_0 = 0$ ) —  $F_t$ -измеримый при всех  $t \in [0, T]$   $m$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами относительно вероятностной меры  $P$ , в свою очередь независимый с процессом  $\eta_t$ ,  $t \in [0, T]$ , при этом  $\mathbf{a}(x) : Y \rightarrow \Re^m$ . Далее через  $F_t^W$  будем обозначать  $\sigma$ -алгебру, порожденную процессом  $\mathbf{w}_\tau$ ,  $\tau \in [0, t]$ .

Задача состоит в фильтрации процесса  $\eta_t$ ,  $t \in [0, T]$  на основе наблюдаемого процесса  $\mathbf{w}_t$ ,  $t \in [0, T]$  вида (15.14).

Для удобства с помощью преобразования Гирсанова введем новую вероятностную меру  $\tilde{P}$ :

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = (Q_T)^{-1}, \quad Q_T = \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^T |\mathbf{a}(\eta_\tau)|^2 d\tau + \int_0^T \mathbf{a}(\eta_\tau)^\top d\mathbf{w}_\tau \right),$$

где процесс  $\mathbf{w}_t$ ,  $t \in [0, T]$  является винеровским относительно вероятностной меры  $\tilde{P}$ .

Согласно формуле Каллианпур-Стрибела имеем

$$P\{\eta_t = y_i | F_t^W\} = M_P\{\mathbf{1}_{\{\eta_t = y_i\}} | F_t^W\} = \mathbf{x}_t^{(i)} / \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}$$

для всех  $y_i \in Y$ ;  $t \in [0, T]$ , где  $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_t^{(1)} \dots \mathbf{x}_t^{(n)})^\top$  — столбец с компонентами  $\mathbf{x}_t^{(i)} = M_{\tilde{P}}\{\mathbf{1}_{\{\eta_t = y_i\}} Q_t | F_t^W\}$ , который удовлетворяет следующему СДУ Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + \sum_{i=1}^m G_i \mathbf{x}_t d\mathbf{w}_t^{(i)}, \quad \mathbf{x}_0 = p(0), \quad t \in [0, T], \quad (15.15)$$

где  $G_i = \text{diag}\{\mathbf{a}^{(i)}(y_j)\}_{j=1}^n$ ;  $i = 1, \dots, m$ , называемому уравнением Закаи. Здесь  $M_P\{\cdot | F_t^W\}$ ,  $M_{\tilde{P}}\{\cdot | F_t^W\}$  — условные математические ожидания относительно вероятностных мер  $P$  и  $\tilde{P}$  соответственно.

Оптимальная оценка для  $g(\eta_t)$  ( $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{M}_P\{|g(\eta_t)|^2\} < \infty$  при всех  $t \in [0, T]$ ) по методу наименьших квадратов, полученная на основе наблюдаемого процесса  $\mathbf{w}_s$ ,  $s \in [0, t]$ , определяется равенством

$$F_{t,g} = \mathbb{M}_P\{g(\eta_t) | F_t^w\} = \sum_{i=1}^n g(y_i) \mathbf{x}_t^{(i)} / \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}. \quad (15.16)$$

Оценка  $F_{t,g}$  вида (15.16) называется оптимальным фильтром марковской цепи.

Очевидно, что для реализации фильтра (15.16) необходимо численно интегрировать уравнение Закаи (15.15). Это можно сделать, например, с помощью численных методов, обсуждаемых в данной книге.

Отметим, что на практике, как правило, возможно наблюдать реализацию не всего процесса  $\mathbf{w}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , а лишь его некоторых интегральных характеристик, полученных по результатам наблюдений на небольших временных интервалах. Эти интегральные характеристики можно интерпретировать как повторные стохастические интегралы Ито относительно вероятностной меры  $\tilde{\mathbb{P}}$ . В частности, в наиболее простом случае это могут быть приращения вида

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} d\mathbf{w}_s^{(j)}; \quad i = 1, 2, \dots; \quad \tau_i = i\Delta; \quad j = 1, \dots, m.$$

Используя полученную по результатам наблюдений информацию о процессе  $\mathbf{w}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , можно конструировать приближенные фильтры

$$\hat{F}_{\tau_p,g}^\Delta = \sum_{i=1}^n g(y_i) \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i)} / \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i)}; \quad p = 0, 1, \dots, N, \quad (15.17)$$

где  $\mathbf{y}_{\tau_p}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  — дискретная аппроксимация решения  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  уравнения (15.15), которая соответствует максимальному шагу дискретизации  $\Delta$ .

**Определение 15.1.** [148]. Приближенный фильтр  $\hat{F}_{\tau_p,g}^\Delta$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$ , соответствующий максимальному шагу дискретизации  $\Delta$ , называется сходящимся на временном интервале  $[0, T]$  с порядком  $\gamma > 0$  к оптимальному фильтру  $F_{t,g}$ ,  $t \in [0, T]$  для заданной функции  $g$ , если существуют постоянная  $C < \infty$ , которая не зависит от  $\Delta$ , и число  $\Delta_0 \in (0, 1)$  такие, что  $\mathbb{M}_P\{|F_{\tau_p,g} - \hat{F}_{\tau_p,g}^\Delta|\} \leq C\Delta^\gamma$  для всех  $\Delta \in (0, \Delta_0)$  и  $\tau_p \in [0, T]$ .

В [148] отмечается, что можно показать сходимость приближенного фильтра  $\hat{F}_{\tau_p,g}^\Delta$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  на временном интервале  $[0, T]$  с порядком

$\gamma > 0$  к оптимальному фильтру  $F_{t,g}$ ,  $t \in [0, T]$  для заданной ограниченной функции  $g$ , если дискретная аппроксимация  $\mathbf{y}_{\tau_p}; p = 0, 1, \dots, N$  сходится сильно с тем же порядком  $\gamma > 0$  к решению  $\mathbf{x}_t$ ,  $t \in [0, T]$  уравнения Закаи (15.15). В частности, при  $\gamma = 0.5$  и  $\gamma = 1.0$  этот результат получен в [201] – [203].

В работах [148], [151], [201] – [203] рассмотрен ряд явных и неявных приближенных фильтров порядка точности 0.5, 1.0, 1.5 и 2.0 для случаев  $m = 1$  и  $m > 1$ .

Далее приводим лишь небольшую часть упомянутых приближенных фильтров для случая  $m > 1$ . При этом будем использовать сильные численные схемы решения уравнения Закаи (15.15), основанные на разложении Тейлора–Стратоновича.

Явные сильные методы Эйлера и Г.Н. Мильштейна, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича и примененные к уравнению Закаи (15.15), имеют соответственно следующий вид [151]:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = (I + A\Delta + S_p) \mathbf{y}_{\tau_p}, \quad (15.18)$$

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \left( I + \bar{A}\Delta + S_p \left( I + \frac{1}{2}S_p \right) \right) \mathbf{y}_{\tau_p}, \quad (15.19)$$

где  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$ ;  $I \in \Re^{n \times n}$  — единичная матрица;

$$S_p = \sum_{i=1}^m G_i \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)}, \quad \bar{A} = A - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (G_i)^2.$$

Отметим, что в силу специальной мультипликативной структуры уравнения Закаи (15.15) для реализации численных схем (15.18), (15.19) достаточно информации о процессе  $\mathbf{w}_t$ ,  $t \in [0, T]$  которая содержится в  $\sigma$ -алгебре  $\hat{\mathcal{F}}_N^{1,0}$ , порожденной приращениями

$$\int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} d\mathbf{w}_s^{(i)}; \quad p = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, \dots, m.$$

Обозначим  $\hat{\mathcal{F}}_N^{1,5}$   $\sigma$ -алгебру, состоящую из  $\sigma$ -алгебры  $\hat{\mathcal{F}}_N^{1,0}$  и  $\sigma$ -алгебры, порожденной интегральными наблюдениями:

$$J_{(10)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i)} = \int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} \int_{\tau_{p-1}}^s d\mathbf{w}_\tau^{(i)} ds; \quad p = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, \dots, m.$$

Информации, содержащейся в  $\sigma$ -алгебре  $\hat{F}_N^{1.5}$ , достаточно для реализации численного метода [151]

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = & \left( I + \bar{A}\Delta + S_p + \frac{\Delta^2}{2}A^2 + AR_p - R_pA + \right. \\ & \left. + S_p\bar{A}\Delta + \frac{1}{2}(S_p)^2 + \frac{1}{6}(S_p)^3 \right) \mathbf{y}_{\tau_p}, \quad R_p = \sum_{i=1}^m G_i J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)}, \end{aligned} \quad (15.20)$$

являющегося результатом применения явной сильной одношаговой численной схемы порядка точности 1.5 к уравнению Закаи (15.15). В (15.20) сохранен смысл обозначений, введенных в (15.18), (15.19).

Для реализации явной сильной одношаговой численной схемы порядка точности 2.0 в терминах унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича, примененной к уравнению Закаи (15.15), достаточно информации о процессе  $\mathbf{w}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , содержащейся в  $\sigma$ -алгебре  $\hat{F}_N^{2.0}$ , состоящей из  $\sigma$ -алгебры  $\hat{F}_N^{1.5}$  и  $\sigma$ -алгебры, порожденной семейством повторных стохастических интегралов Стратоновича:  $I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)}$ ,  $I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)}$ ,  $I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)}$ ;  $p = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ . Запишем указанную численную схему:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = & \left( I + \bar{A}\Delta \left( I + \frac{1}{2}\bar{A}\Delta \right) - R_p\bar{A} + \bar{A}R_p + \right. \\ & + S_p \left( I + \bar{A}\Delta + \frac{1}{2}S_p \left( I + \frac{1}{3}S_p \left( I + \frac{1}{4}S_p \right) \right) \right) + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left( \bar{A}G_{i_2}G_{i_1} \left( \Delta I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} + I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} \right) + \right. \\ & \left. \left. + G_{i_2}\bar{A}G_{i_1} \left( I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} - I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} \right) - G_{i_2}G_{i_1}\bar{A}I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_2)} \right) \right) \mathbf{y}_{\tau_p}, \end{aligned} \quad (15.21)$$

Где

$$\begin{aligned} I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \\ R_p &= \sum_{i=1}^m G_i \left( \Delta I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i)} + I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i)} \right), \quad S_p = \sum_{i=1}^m G_i I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i)}, \end{aligned} \quad (15.22)$$

а также сохранен смысл обозначений, введенных в (15.18)–(15.20).

В [151] приведены также, так называемые, неявные приближенные фильтры, основанные на неявных сильных численных схемах. Там же отмечается, что эти фильтры ведут себя "лучше", чем фильтры, основанные

на явных сильных численных методах, если интенсивность шумов в наблюдениях достаточно высока.

В заключение рассмотрим численные эксперименты, которые аналогичны соответствующим численным экспериментам из [148], [151] и иллюстрируют описанный подход.

Пусть  $\eta_t$ ,  $t \in [0, 2]$  — так называемый телеграфный процесс, являющийся марковской цепью с непрерывным временем, пространством состояний  $Y = \{-1, 1\}$  и матрицей интенсивности

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим одну из возможных реализаций процесса  $\eta_t$ ,  $t \in [0, 2]$  вида

$$\eta_t = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, 1) \\ -1 & \text{при } t \in [1, 2] \end{cases}. \quad (15.23)$$

Пусть также

$$\mathbf{a}(\eta_t) = \begin{cases} 10 & \text{при } \eta_t = 1 \\ 2 & \text{при } \eta_t = -1 \end{cases}, \quad g(x) \equiv x. \quad (15.24)$$

В рамках сделанных предположений (15.17) имеет вид

$$\hat{F}_{\tau_p, g}^{\Delta} = \frac{\mathbf{y}_{\tau_p}^{(2)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(1)}}{\mathbf{y}_{\tau_p}^{(2)} + \mathbf{y}_{\tau_p}^{(1)}}; \quad p = 0, 1, \dots, N. \quad (15.25)$$

Нетрудно видеть, что если существует  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$  такое, что  $\tau_j = 1$ , то с учетом (15.24) с вероятностью 1 получаем

$$I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} = \mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\Delta + \bar{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)}, \quad (15.26)$$

$$I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} = -\mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\frac{\Delta^2}{2} + \bar{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)}, \quad (15.27)$$

$$I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(11)} = \bar{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(11)} - \mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\left(\frac{\Delta^2}{2}\bar{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} + \frac{1}{2}\bar{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)}\right) - \mathbf{a}^2(\eta_{\tau_p})\frac{\Delta^3}{3}, \quad (15.28)$$

$$\bar{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

где  $\tau_p = p\Delta$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$ .

Кроме того, с вероятностью 1

$$I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(11)} = \frac{1}{2} \left( I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)} \right)^2, \quad I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(11)} = I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)} I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)} - I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(11)}. \quad (15.29)$$

Для аппроксимации стохастических интегралов Стратоновича  $\bar{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)}$ ,  $\bar{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)}$ ,  $\bar{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)}$ ,  $\bar{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(11)}$  воспользуемся формулами, основанными на теоремах 5.1–5.3 для случая полиномов Лежандра (см. главы 5 и 6):

$$\bar{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad (15.30)$$

$$\bar{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right), \quad (15.31)$$

$$\bar{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)} = \frac{\Delta^{5/2}}{3} \left( \zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1 + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2 \right), \quad (15.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(11)q} = & -\frac{\Delta^2}{4} \left( (\zeta_0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0 \zeta_1 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^q \left( \frac{\zeta_i \zeta_{i+2}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{(\zeta_i)^2}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned} \quad (15.33)$$

где  $\zeta_{j,p} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j$ ;  $j = 0, 1, \dots, q+2$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

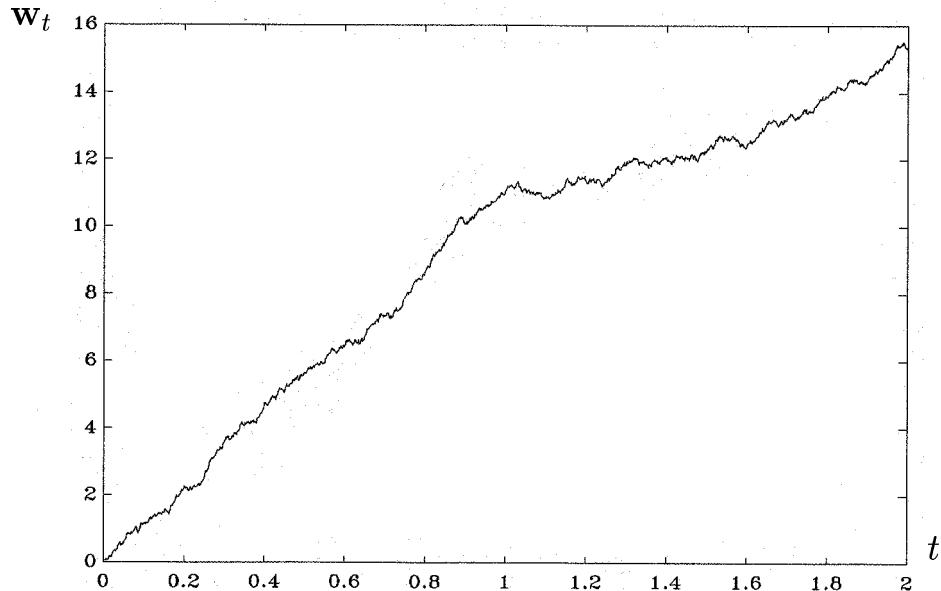


Рис. 15.5. Результат численного эксперимента 15.3.

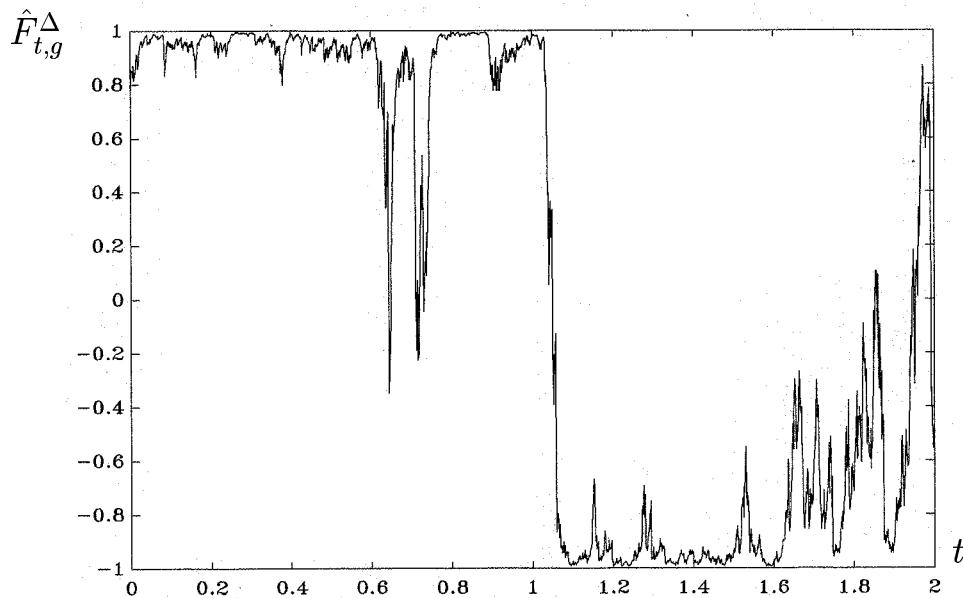


Рис. 15.6. Результат численного эксперимента 15.4  
(метод Эйлера).

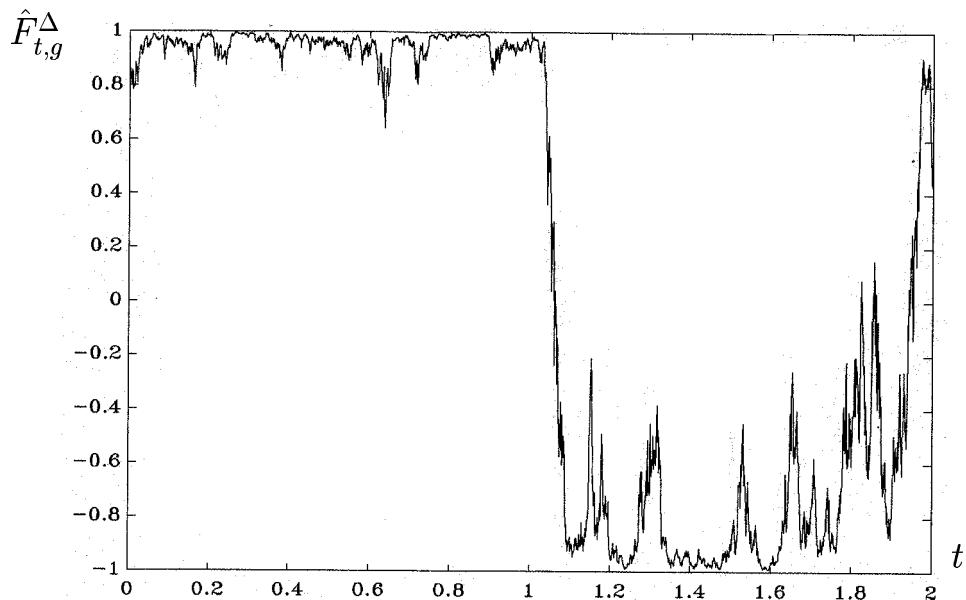


Рис. 15.7. Результат численного эксперимента 15.4  
(метод Г.Н. Мильштейна).

**Численный эксперимент 15.3.** Смоделировать реализацию наблюдаемого процесса  $\mathbf{w}_t$ ,  $t \in [0, 2]$  вида (15.14) с учетом (15.23), (15.24) по формуле  $\mathbf{w}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{w}_{\tau_p} + \mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\Delta + \sqrt{\Delta}\zeta_0$ ;  $\mathbf{w}_0 = 0$ , где  $\tau_p = p\Delta$ ;  $p = 0, 1, \dots, 2000$ ;  $\Delta = 10^{-3}$ ;  $\zeta_{0,p} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Изобразить графически результат численного моделирования (рис. 15.5).

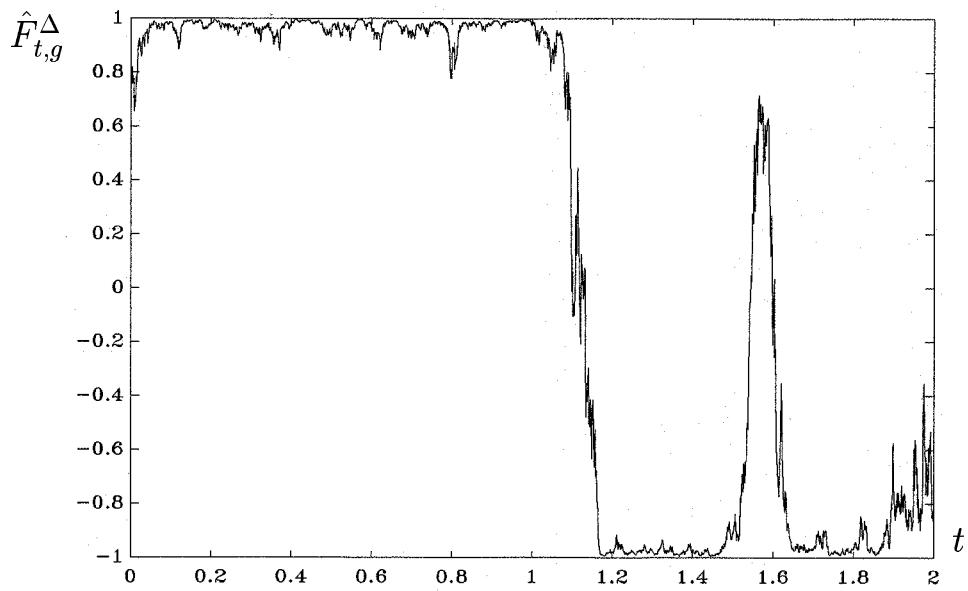


Рис. 15.8. Результат численного эксперимента 15.4  
(метод порядка точности 1.5).

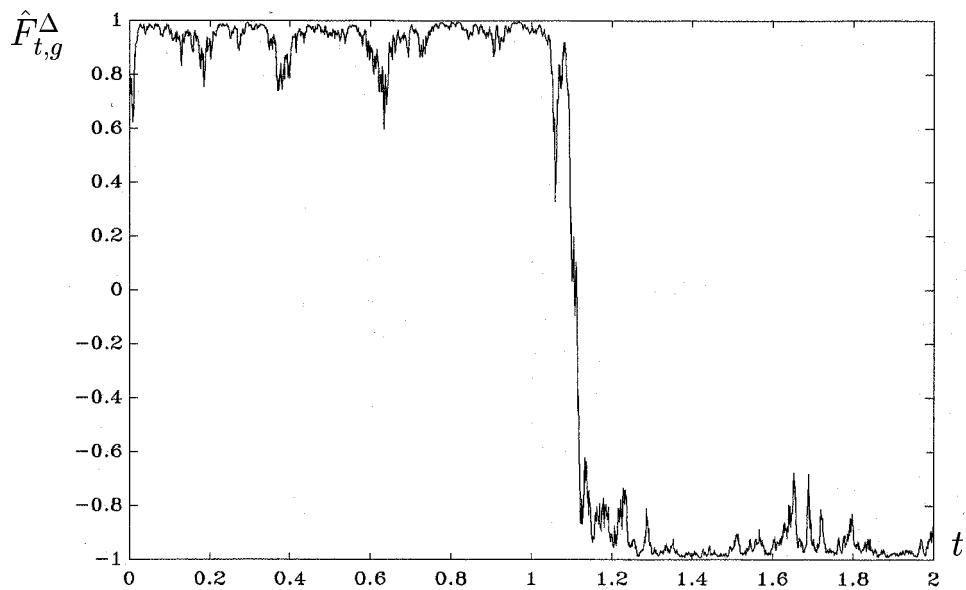


Рис. 15.9. Результат численного эксперимента 15.5  
(метод порядка точности 2.0),  $q = 60$ .

**Численный эксперимент 15.4.** С учетом (15.23), (15.24) смоделировать приближенный фильтр (15.25) при  $\tau_p = p\Delta$ ;  $p = 0, 1, \dots, 2000$ ;  $\Delta = 10^{-3}$ ,  $p(0) = (0.2 \ 0.8)^\top$ , применяя формулы (15.22), (15.26), (15.27), (15.30), (15.31) и численные методы (15.18)–(15.20). Во всех трех случаях использовать ту же реализацию последовательности случайных величин  $\zeta_{0,p}$ ;  $p = 0, 1, \dots, 2000$ , что и в численном эксперименте 15.3. Изобразить графически результат численного моделирования (рис. 15.6–15.8).

**Численный эксперимент 15.5.** Повторить численный эксперимент 15.4 численным методом (15.21). При моделировании стохастических интегралов следует использовать формулы (15.26) – (15.33). Последовательность случайных величин  $\zeta_{0,p}$ ;  $p = 0, 1, \dots, 2000$  выбирать ту же, что и в численном эксперименте 15.3. В (15.33) положить  $q = 60$ . Результат численного моделирования изобразить графически (рис. 15.9).

### 15.3 Линейная фильтрация Калмана–Бьюси

Рассмотрим задачу фильтрации сигнала на фоне случайной помехи в постановке разд. 2.4.1 и будем предполагать, что параметры рассматриваемой задачи таковы:  $k, l, m, n = 2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = bI_2, \quad H = I_2, \quad \Sigma = \sigma I_2, \quad (15.34)$$

где  $I_2$  — единичная  $(2 \times 2)$ -матрица.

Численная реализация оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки  $\hat{x}_t$  процесса  $x_t$  на основе наблюдений  $y_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ , полученной по методу Калмана–Бьюси, может осуществляться с помощью численного интегрирования СДУ Ито сильными численными методами, обсуждаемыми в данной книге.

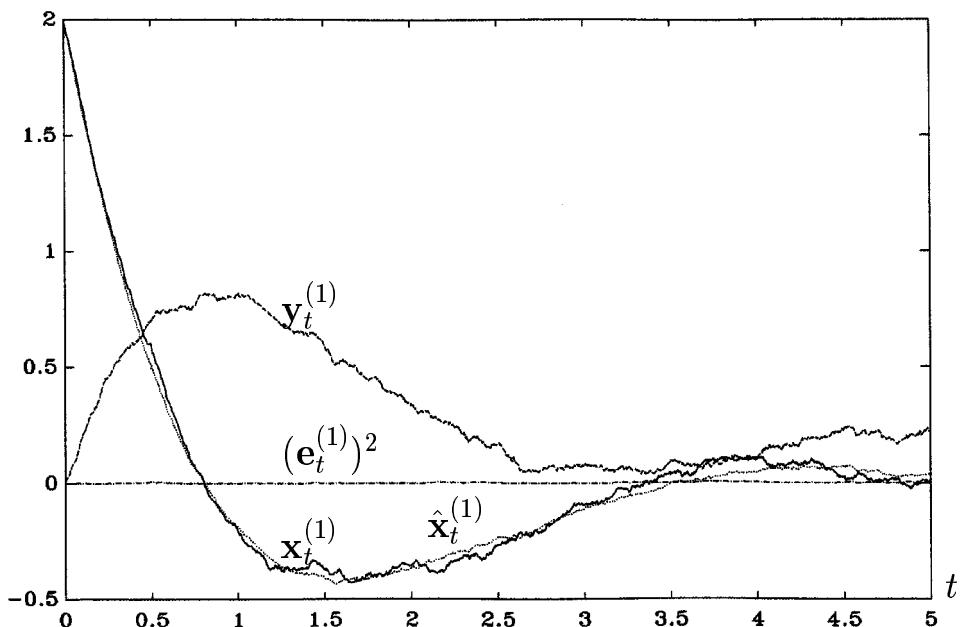


Рис. 15.10. Результат численного эксперимента 15.6.

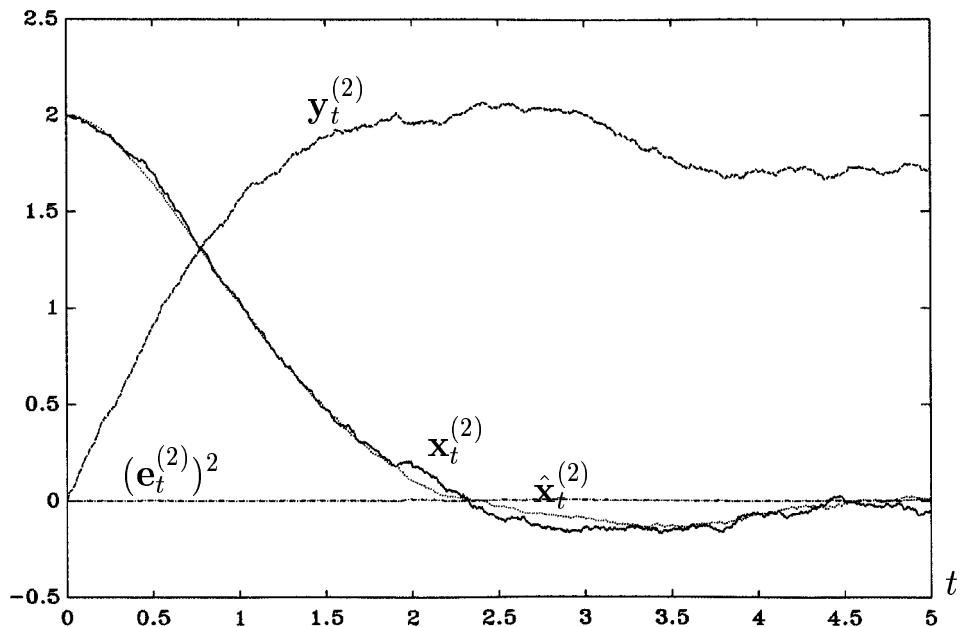


Рис. 15.11. Результат численного эксперимента 15.6.

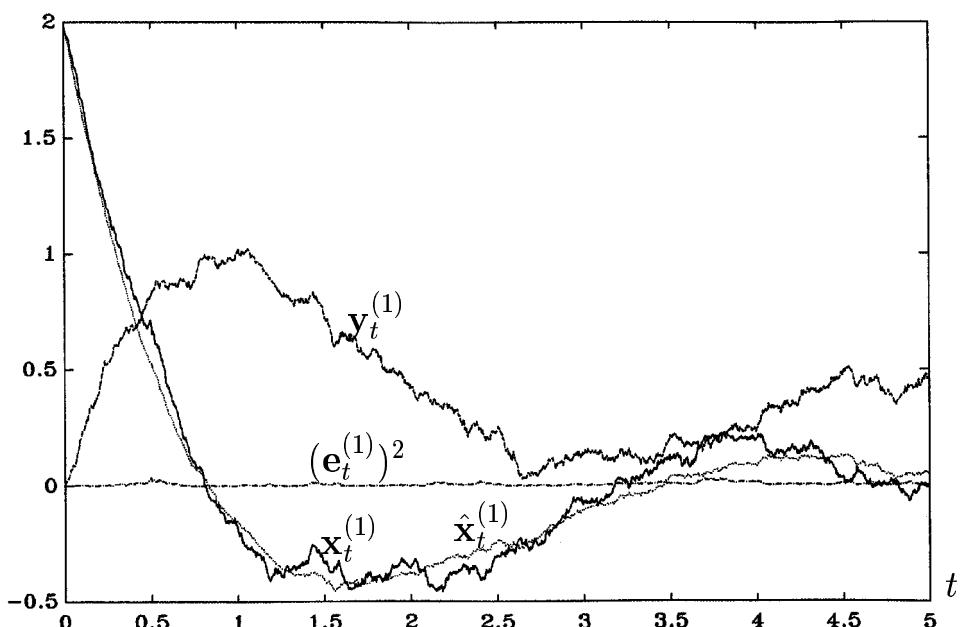


Рис. 15.12. Результат численного эксперимента 15.6.

**Численный эксперимент 15.6.** Смоделировать численно решение СДУ Ито вида

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \\ \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H & O_2 & O_2 & O_2 \\ R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H & A & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & A & O_2 \\ O_2 & O_2 & O_2 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \\ \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} dt +$$

$$+ \begin{bmatrix} B & -R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1}\Sigma \\ O_2 & R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1}\Sigma \\ B & O_2 \\ O_2 & \Sigma \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{f}_t \end{bmatrix},$$

где  $R(t)$  определяется из уравнения Рикката (2.38), на промежутке времени  $[0, 5]$  с шагом  $\Delta = 10^{-3}$  с помощью явного сильного численного метода Г.Н. Мильштейна при исходных данных (15.34) и  $R(0) = O_2$ ,  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{y}_0 = (0 \ 0)^\top$ ,  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 = (2 \ 2)^\top$ ,  $\sigma = b = 0.07$ . Здесь  $O_2$  — нулевая  $(2 \times 2)$ -матрица. Значения  $R(k\Delta)$ ;  $k = 1, \dots, 5000$  получить с помощью решения уравнения (2.38) явным численным методом порядка 2.0 (численный метод, основанный на формуле Тейлора). Результат численного моделирования изобразить графически (рис. 15.10, 15.11). Повторить вычисления при  $\sigma = b = 0.14$  (рис. 15.12, 15.13).

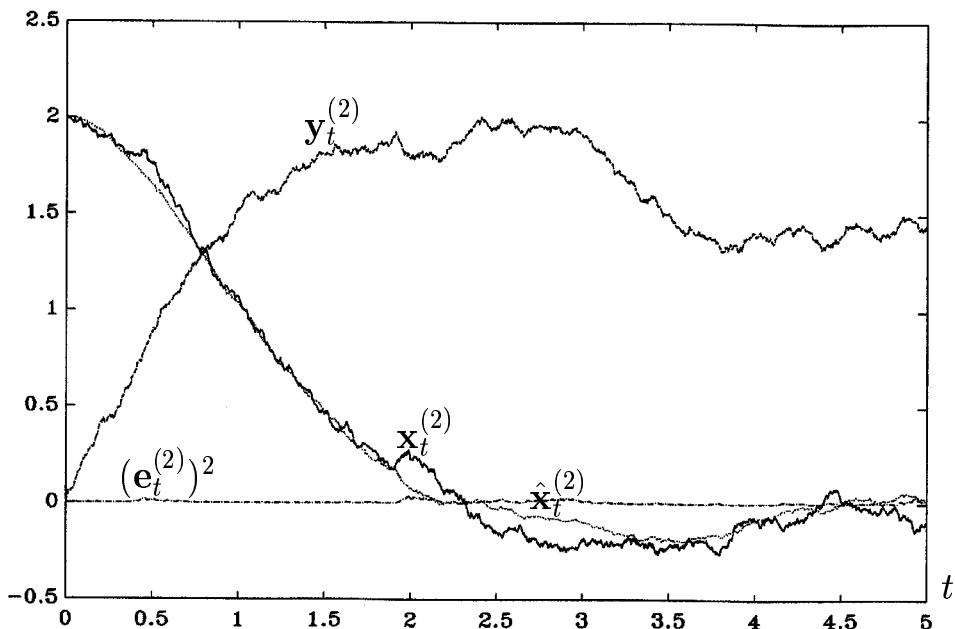


Рис. 15.13. Результат численного эксперимента 15.6.

## 15.4 Нелинейная оптимальная фильтрация

В монографии [72] рассмотрена задача оптимальной нелинейной фильтрации частично наблюдаемых диффузионных процессов, описываемых нелинейными системами СДУ Ито. Рассмотрим ее частный случай.

Пусть двухмерный случайный процесс  $(x_t, y_t)$ ;  $t \in [0, T]$  описывается системой СДУ Ито вида:

$$dx_t = -x_t dt + \sigma_1 \sin(y_t) d\mathbf{f}_t^{(1)} + \sigma_2 \cos(y_t) d\mathbf{f}_t^{(2)}, \quad (15.35)$$

$$dy_t = x_t dt + c d\mathbf{f}_t^{(2)}, \quad (15.36)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, c$  — постоянные;  $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)}$  — независимые стандартные винеровские процессы;  $y_t$  — наблюдаемый, а  $x_t$  — ненаблюдаемый процесс, который подлежит оцениванию на основании наблюдения  $y_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ .

Для системы (15.35), (15.36) выполнены все условия теоремы ([72], С. 474). Тогда, согласно данной теореме оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка  $\hat{x}_t = M\{x_t | F_t^y\}$  процесса  $x_t$  по  $y_s$ ,  $0 \leq s \leq t$  и процесс

$$e_t = M\{(x_t - \hat{x}_t)^2 | F_t^y\}$$

являются единственным непрерывным с вероятностью 1 и  $F_t^y$ -измеримым при каждом  $t$  решением системы СДУ Ито вида:

$$d\hat{x}_t = \left( -\hat{x}_t + \frac{c\sigma_2 \cos(y_t) + e_t}{c^2} (x_t - \hat{x}_t) \right) dt + \frac{c\sigma_2 \cos(y_t) + e_t}{c} d\mathbf{f}_t^{(2)}, \quad (15.37)$$

$$de_t = \left( -2e_t + \sigma_1^2 \sin^2(y_t) + \sigma_2^2 \cos^2(y_t) - \frac{(c\sigma_2 \cos(y_t) + e_t)^2}{c^2} \right) dt \quad (15.38)$$

с начальными условиями

$$\hat{x}_0 = M\{x_0 | y_0\}, \quad e_0 = M\{(x_0 - \hat{x}_0)^2 | y_0\}.$$

Здесь  $F_t^y$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $y_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ .

Численная реализация оценки  $\hat{x}_t$  может быть осуществлена с помощью численного интегрирования системы (15.35)–(15.38) сильными численными методами для СДУ Ито.

**Численный эксперимент 15.7.** Смоделировать численно решение системы (15.35)–(15.38) при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  с помощью явного сильного численного метода Г.Н. Мильштейна по формулам:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(1)} = (1 - \Delta) \mathbf{y}_p^{(1)} + \sigma \sin(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(1)} + \sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)} -$$

$$-c\sigma \sin(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(22)} + c\sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(21)},$$

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(2)} = \mathbf{y}_p^{(2)} + \mathbf{y}_p^{(1)} \Delta + c \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)},$$

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(3)} = \mathbf{y}_p^{(3)} + \left( -\mathbf{y}_p^{(3)} + \left( \frac{\sigma}{c} \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \frac{\mathbf{y}_p^{(4)}}{c^2} \right) (\mathbf{y}_p^{(1)} - \mathbf{y}_p^{(3)}) \right) \Delta +$$

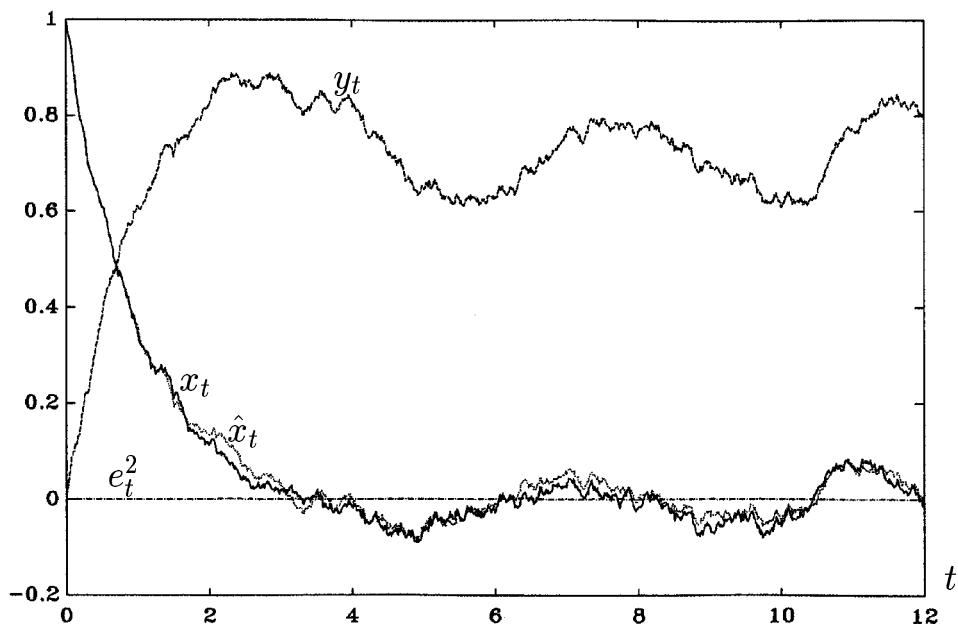


Рис. 15.14. Результат численного эксперимента 15.7.

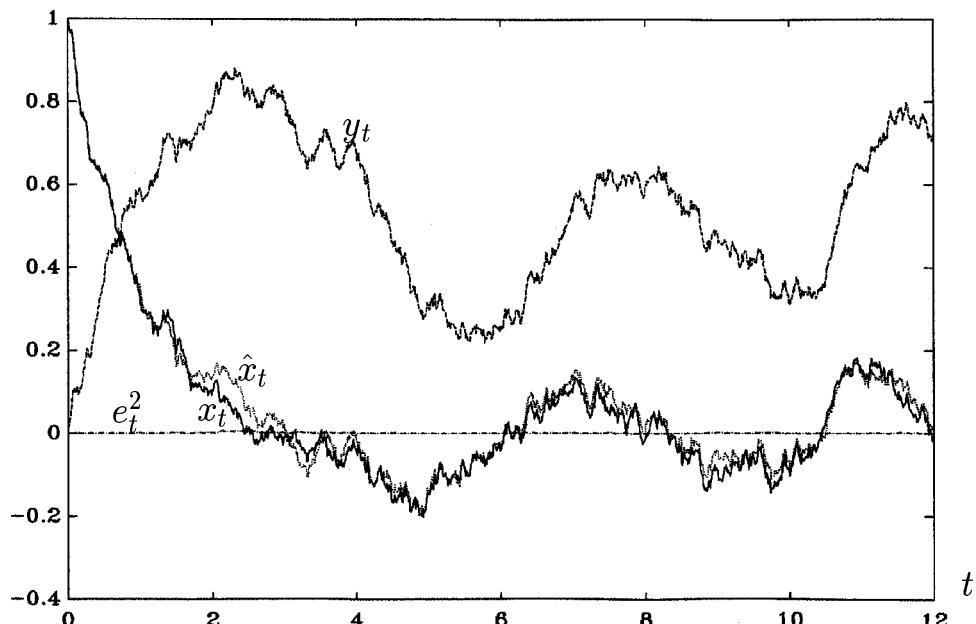


Рис. 15.15. Результат численного эксперимента 15.17.

$$+ \left( \sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \frac{\mathbf{y}_p^{(4)}}{c} \right) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)} - c \sigma \sin(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(22)},$$

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(4)} = \mathbf{y}_p^{(4)} + \left( -2\mathbf{y}_p^{(4)} + \sigma^2 - \frac{(c \sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \mathbf{y}_p^{(4)})^2}{c^2} \right) \Delta$$

*npu*  $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $p = 0, 1, \dots, 2400$ ;  $\sigma = c = 0.05$ ;  $\mathbf{y}_0^{(1)} = \mathbf{y}_0^{(3)} = 1$ ;  
 $\mathbf{y}_0^{(2)} = \mathbf{y}_0^{(4)} = 0$ . Здесь  $\mathbf{y}_p^{(1)}$ ,  $\mathbf{y}_p^{(2)}$ ,  $\mathbf{y}_p^{(3)}$ ,  $\mathbf{y}_p^{(4)}$  — приближенные значения  $x_{\tau_p}$ ,

$y_{\tau_p}$ ,  $\hat{x}_{\tau_p}$ ,  $e_{\tau_p}$  соответственно;  $\tau_p = p\Delta$ . Для моделирования стохастических интегралов Ито использовать формулы:

$$\begin{aligned}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(1)} &= \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)}, \quad \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)}, \\ \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(21)} &= \frac{\Delta}{2} \left[ \zeta_0^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \sum_{r=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{4r^2 - 1}} \left( \zeta_{r-1}^{(2)} \zeta_r^{(1)} - \zeta_r^{(2)} \zeta_{r-1}^{(1)} \right) \right], \\ \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(22)} &= \frac{\Delta}{2} \left( \left( \zeta_0^{(1)} \right)^2 - 1 \right),\end{aligned}$$

где  $\zeta_{r,p}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_r^{(i)}$ ;  $r = 0, 1, \dots, 20$ ;  $i = 1, 2$ ;  $p = 0, 1, \dots, 2399$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Изобразить результат графически (рис. 15.14). Повторить численный эксперимент при  $\sigma = c = 0.1$  (рис. 15.15).

## 15.5 Оптимальное стохастическое управление по неполным данным

Рассмотрим задачу оптимального стохастического управления частично наблюдаемым диффузионным процессом (см. разд. 2.4.2, а также [72]), описываемым линейной системой СДУ Ито. Рассмотрим частный случай данной задачи.

Пусть функционал потерь имеет вид:

$$V(\mathbf{u}, T) = M \left\{ \mathbf{x}_T^\top \bar{H} \mathbf{x}_T + \int_0^T (\mathbf{x}_t^\top Q \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^\top \bar{R} \mathbf{u}_t) dt \right\}, \quad (15.39)$$

где  $\mathbf{x}_t \in \Re^2$  — недоступный наблюдению случайный процесс, описываемый СДУ Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t) dt + B d\mathbf{w}_t; \quad (15.40)$$

$\mathbf{u}_t \in \Re^2$  — стохастическое управляющее воздействие;  $A, B, Q, \bar{H}, \bar{R}$  — числовые  $(2 \times 2)$ -матрицы;  $\mathbf{w}_t$  — двухмерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами;  $\mathbf{x}_0 \in \Re^2$  — неслучайный вектор-столбец начальных условий.

Предположим, что наблюдению доступен случайный процесс  $\mathbf{y}_t \in \Re^2$ , задаваемый в виде:

$$d\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad (15.41)$$

где  $H, \Sigma$  — числовые  $(2 \times 2)$ -матрицы,  $\mathbf{f}_t$  — двухмерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, независимый с  $\mathbf{w}_t$ . Предполагается также, что матрица  $\Sigma\Sigma^T$  невырождена, а измеримый процесс

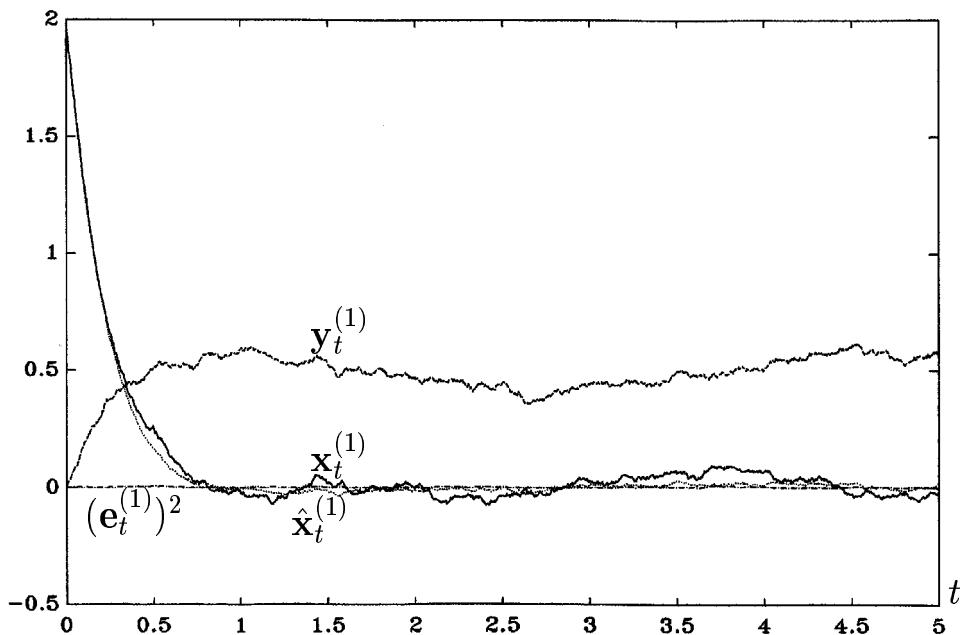


Рис. 15.16. Результат численного эксперимента 15.8

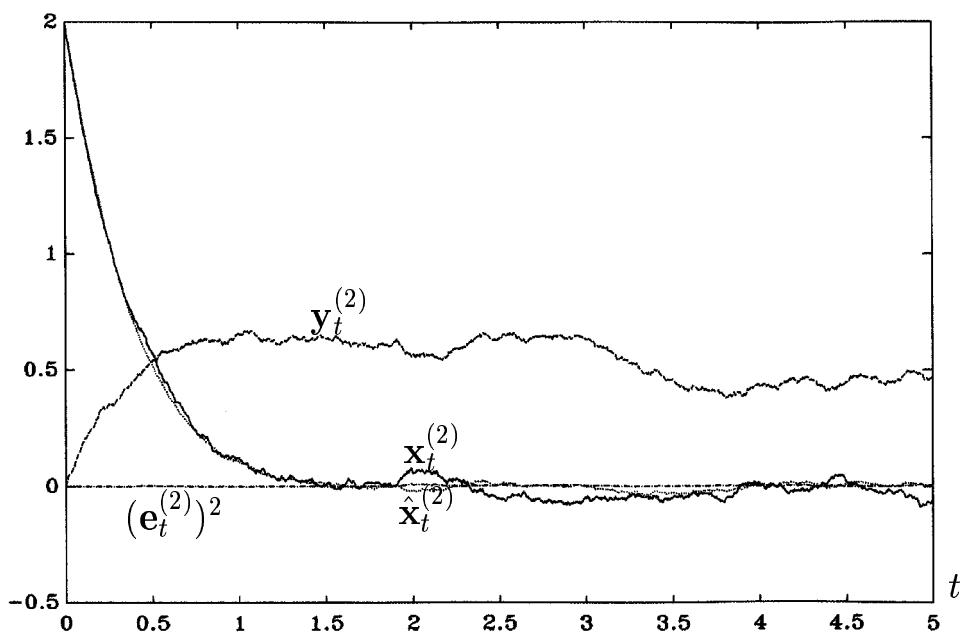


Рис. 15.17. Результат численного эксперимента 15.8

$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}(\mathbf{y}_t, t)$  —  $F_t^y$ -измерим, причем:

$$M \left\{ \int_0^T \sum_{i=1}^2 \left( \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{y}_t, t) \right)^4 dt \right\} < \infty, \quad (15.42)$$

где  $F_t^y$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $y_s$ ,  $0 \leq s \leq t$ .

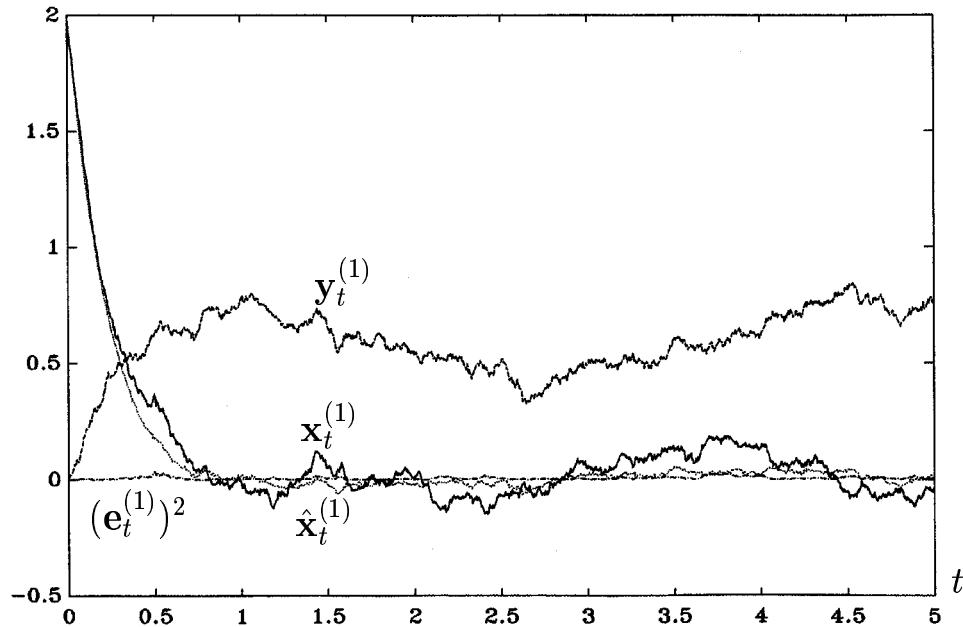


Рис. 15.18. Результат численного эксперимента 15.8.

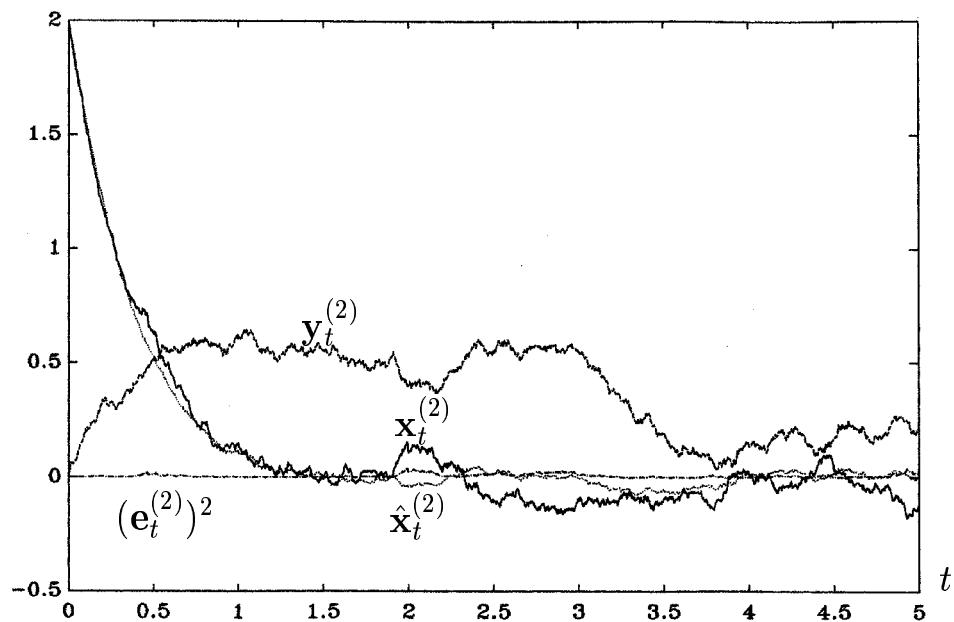


Рис. 15.19. Результат численного эксперимента 15.8.

Согласно теореме ([72], С. 609) оптимальное стохастическое управление  $\tilde{u}_t$ , доставляющее инфимум функционалу  $V(\mathbf{u}, T)$  по всем управлению, для которых система (15.40), (15.41) имеет единственное сильное решение и выполнено условие (15.42), имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = -\bar{R}^{-1}P(t)\hat{\mathbf{x}}_t, \quad (15.43)$$

причем

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = (A\hat{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{u}}_t)dt + R(t)H^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}H\mathbf{e}_t dt + R(t)H^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}\Sigma d\mathbf{f}_t, \quad (15.44)$$

$$d\mathbf{e}_t = \left( A - R(t)H^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}H \right) \mathbf{e}_t dt + B d\mathbf{w}_t - R(t)H^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}\Sigma d\mathbf{f}_t, \quad (15.45)$$

$$R'(t) = AR(t) + R(t)A^T + BB^T - R(t)H^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}HR(t), \quad (15.46)$$

$$-P'(t) = A^T P(t) + P(t)A + Q - P(t)\bar{R}^{-1}P(t), \quad (15.47)$$

$$R(0) = M\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^T\}, \quad P(T) = \bar{H},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = M\{\mathbf{x}_0\} = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{e}_t = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t,$$

где штрих ' означает производную по  $t$ .

Для численной реализации закона управления (15.43) и оценки  $\hat{\mathbf{x}}_t$  можно воспользоваться сильными численными методами для системы СДУ Ито (15.40), (15.41), (15.44), (15.45).

**Численный эксперимент 15.8.** Смоделировать численно решение системы СДУ Ито (15.40), (15.41), (15.44), (15.45) (в (15.40) положить  $\mathbf{u}_t = \tilde{\mathbf{u}}_t$ ) с помощью явного сильного численного метода Г.Н. Мильштейна на промежутке времени  $[0, 5]$  с шагом  $\Delta = 10^{-3}$  при условии (15.34) и  $\sigma = b = 0.07$ ,  $\bar{R} = I_2$ ,  $\bar{H} = 10I_2$ ,  $Q = 10I_2$ ,  $R(0) = O_2$ ,  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 = (2 \ 2)^T$ ,  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{y}_0 = (0 \ 0)^T$ . Здесь  $I_2$ ,  $O_2$  — единичная и нулевая  $(2 \times 2)$ -матрицы. Значения  $R(k\Delta)$ ,  $P(k\Delta)$ ;  $k = 0, 1, \dots, 5000$  получить с помощью решения уравнений Риккати (15.46), (15.47) явным численным методом порядка точности 2.0 (численный метод, основанный на формуле Тейлора). Для вычисления  $\tilde{\mathbf{u}}_{k\Delta}$  использовать формулу (15.43). Результат численного моделирования изобразить графически (рис. 15.16, 15.17). При этом на графики выводить каждую вторую точку. Повторить вычисления при  $\sigma = b = 0.14$  (рис. 15.18, 15.19).

Сравнивая рис. 15.10–15.13 и рис. 15.16–15.19 можно увидеть, что оптимальное стохастическое управление "прижимает" процесс  $\mathbf{x}_t$  к горизонтальной оси так, чтобы минимизировался функционал потерь (15.39) (рис. 15.16–15.19). Рис. 15.10–15.13 соответствуют случаю отсутствия управления ( $\tilde{\mathbf{u}}_t = 0$ ).

## 15.6 Стохастическое оптимальное управление механической системой

Рассмотрим механическую систему, изображенную на рис. 15.20. Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику данной меха-

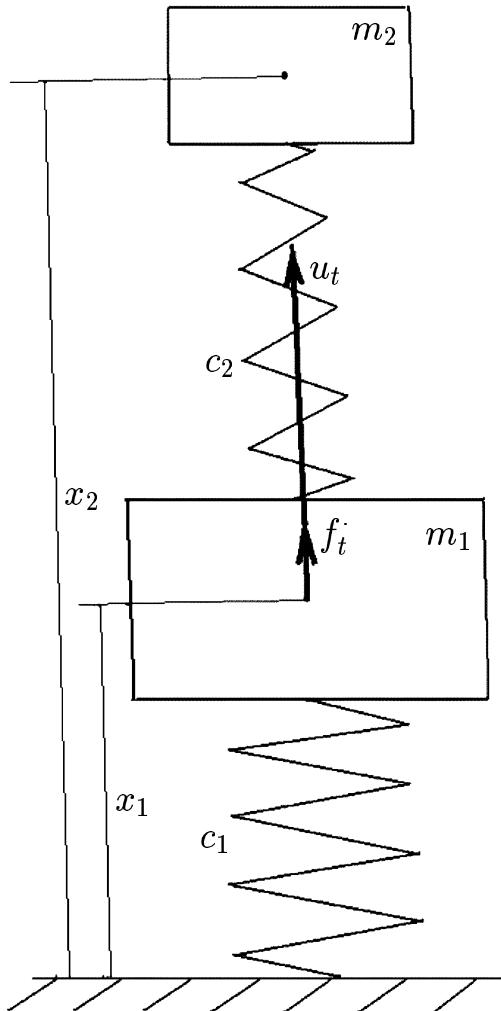


Рис. 15.20. Механическая система.

нической системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) + \ddot{f}_t + u_t, \\ \ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (15.48)$$

где \$\ddot{f}\_t\$ — силовое воздействие на массу \$m\_1\$, являющееся белым гауссовским шумом, а \$u\_t\$ — управляющее воздействие также действующее на массу \$m\_1\$; \$\ddot{x}\_1, \ddot{x}\_2\$ — ускорения масс \$m\_1\$ и \$m\_2\$ соответственно.

Запишем систему (15.48) в форме СДУ Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + Mu_t) dt + Bdf_t, \quad (15.49)$$

где  $f_t$  — стандартный винеровский процесс;  $\mathbf{x}_t^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x_1$ ,  $\mathbf{x}_t^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} x_1$ ,  $\mathbf{x}_t^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} x_2$ ,  $\mathbf{x}_t^{(4)} \stackrel{\text{def}}{=} x_2$ ; здесь  $x_1, x_2$  — скорости масс  $m_1, m_2$ ;

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(4)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(c_1 + c_2)/m_1 & 0 & c_2/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_2/m_2 & 0 & -c_2/m_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Стochasticное управление  $u_t$ , входящее в (15.49), выбирается так, чтобы доставить инфимум функционалу потерь вида:

$$V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbb{M} \left\{ \mathbf{x}_T^\top R \mathbf{x}_T + \int_0^T (\mathbf{x}_t^\top C \mathbf{x}_t + u_t^\top G u_t) dt \mid \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} \right\}, \quad (15.50)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \gamma; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^1; \quad \gamma \neq 0.$$

Нетрудно видеть, что функционал (15.50) может быть записан в виде:

$$V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbb{M} \left\{ \alpha (\mathbf{x}_T^{(1)})^2 + \int_0^T \left( \beta (\mathbf{x}_t^{(1)})^2 + \gamma u_t^2 \right) dt \mid \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} \right\}. \quad (15.51)$$

Известно [72], что оптимальное стохастическое управление  $u_t$ , доставляющее инфимум функционалу (15.51), имеет вид:

$$u_t = -\gamma^{-1} M^\top S(t) \mathbf{x}_t, \quad (15.52)$$

где  $S(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$  — матричная функция, являющаяся решением следующей задачи

$$\frac{dS}{dt}(t) = -A^\top S(t) - S(t)A + \frac{1}{\gamma} S(t) M M^\top S(t) - C, \quad S(T) = R. \quad (15.53)$$

Функционал (15.51) [72] представим в виде:

$$V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) =$$

$$= \bar{\mathbf{x}}^T S(0) \bar{\mathbf{x}} + \int_0^T \text{tr} (B B^T S(t)) dt = \bar{\mathbf{x}}^T S(0) \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{m_1^2} \int_0^T S^{(22)}(t) dt, \quad (15.54)$$

где  $\text{tr}$  — след (сумма диагональных элементов) матрицы.

Если положить  $u_t = 0$ ,  $B = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  в (15.49) (случай отсутствия шума и управления), то точное решение данной системы уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^{(1)} &= -\frac{c_2}{\sqrt{k_1}(k_1 m_1 - c_1 - c_2)} \times \\ &\times \left( (A_1 - A_2) \cos \sqrt{k_1} t + (A_1 + A_2) \sin \sqrt{k_1} t \right) - \\ &- \frac{c_2}{\sqrt{k_2}(k_2 m_1 - c_1 - c_2)} \left( (A_3 - A_4) \cos \sqrt{k_2} t + (A_3 + A_4) \sin \sqrt{k_2} t \right), \\ \mathbf{x}_t^{(2)} &= -\frac{c_2}{(k_1 m_1 - c_1 - c_2)} \left( (A_1 + A_2) \cos \sqrt{k_1} t + (A_2 - A_1) \sin \sqrt{k_1} t \right) - \\ &- \frac{c_2}{(k_2 m_1 - c_1 - c_2)} \left( (A_3 + A_4) \cos \sqrt{k_2} t + (A_4 - A_3) \sin \sqrt{k_2} t \right), \\ \mathbf{x}_t^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{k_1}} \left( (A_1 + A_2) \sin \sqrt{k_1} t + (A_1 - A_2) \cos \sqrt{k_1} t \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{k_2}} \left( (A_3 + A_4) \sin \sqrt{k_2} t + (A_3 - A_4) \cos \sqrt{k_2} t \right), \\ \mathbf{x}_t^{(4)} &= (A_1 + A_2) \cos \sqrt{k_1} t + (A_2 - A_1) \sin \sqrt{k_1} t + \\ &+ (A_3 + A_4) \cos \sqrt{k_2} t + (A_4 - A_3) \sin \sqrt{k_2} t, \end{aligned}$$

где

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \pm \sqrt{\left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{4c_1 c_2}{m_1 m_2}} \right), \quad k_1 > k_2;$$

$A_1, A_2, A_3, A_4$  — произвольные постоянные;

$$\left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 > \frac{4c_1 c_2}{m_1 m_2}.$$

Взяв  $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = a$ ,  $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(4)} = 0$ , получаем

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{a}{m_1(k_1 - k_2)} \left( -(k_2 m_1 - c_1) \cos \sqrt{k_1} t + (k_1 m_1 - c_1) \cos \sqrt{k_2} t \right). \quad (15.55)$$

Нетрудно видеть, что при  $m_1 = 4m_2$ ,  $c_2 = ((3 + \sqrt{5})c_1)/10$  выполняется соотношение  $k_1 = 4k_2$  и (15.55) запишется в виде:

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{a}{12m_2k_2} \left( -(4k_2m_2 - c_1)\cos 2\sqrt{k_2}t + (16k_2m_2 - c_1)\cos \sqrt{k_2}t \right),$$

т.е.  $\mathbf{x}_t^{(1)}$  является в данном случае  $2\pi/\sqrt{k_2}$  периодической функцией.

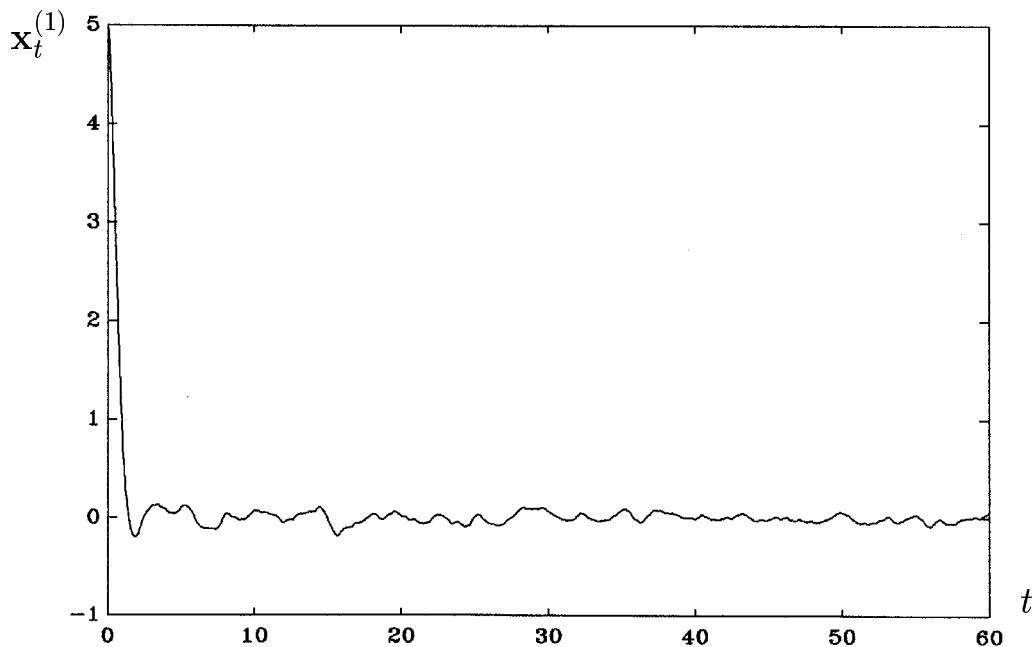


Рис. 15.21. Результат численного эксперимента 15.9.

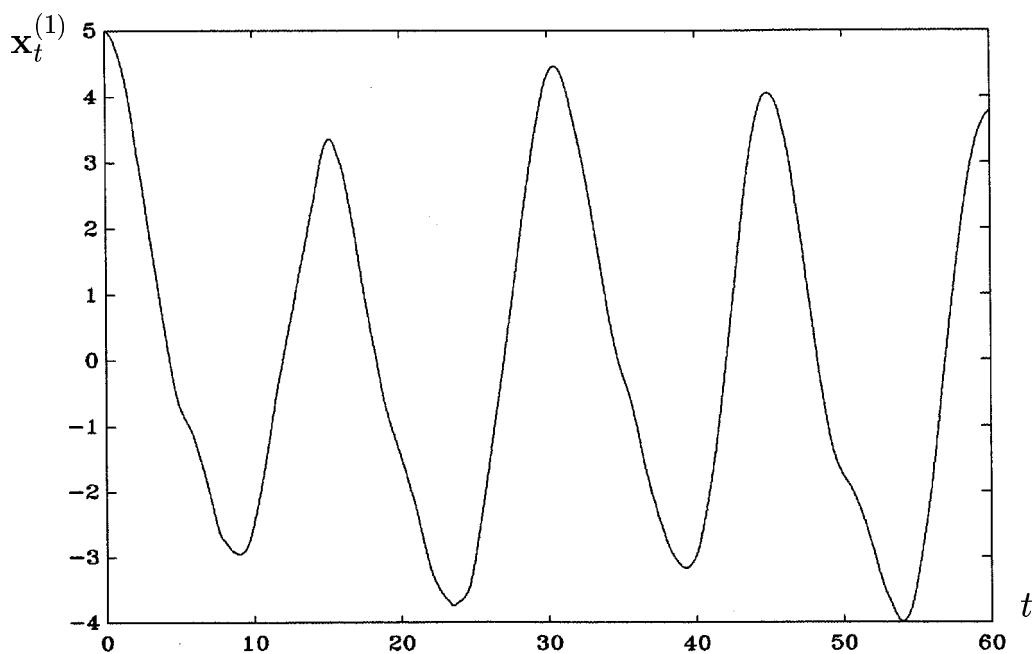


Рис. 15.22. Результат численного эксперимента 15.9.

Представим  $\mathbf{x}_t^{(1)}$  вида (15.55) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^{(1)} = & \frac{a(k_2 m_1 - c_1)}{m_1(k_1 - k_2)} \left( \left( \frac{k_1 m_1 - c_1}{k_2 m_1 - c_1} - \cos(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}) t \right) \cos \sqrt{k_2} t + \right. \\ & \left. + \sin(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}) t \sin \sqrt{k_2} t \right). \end{aligned} \quad (15.56)$$

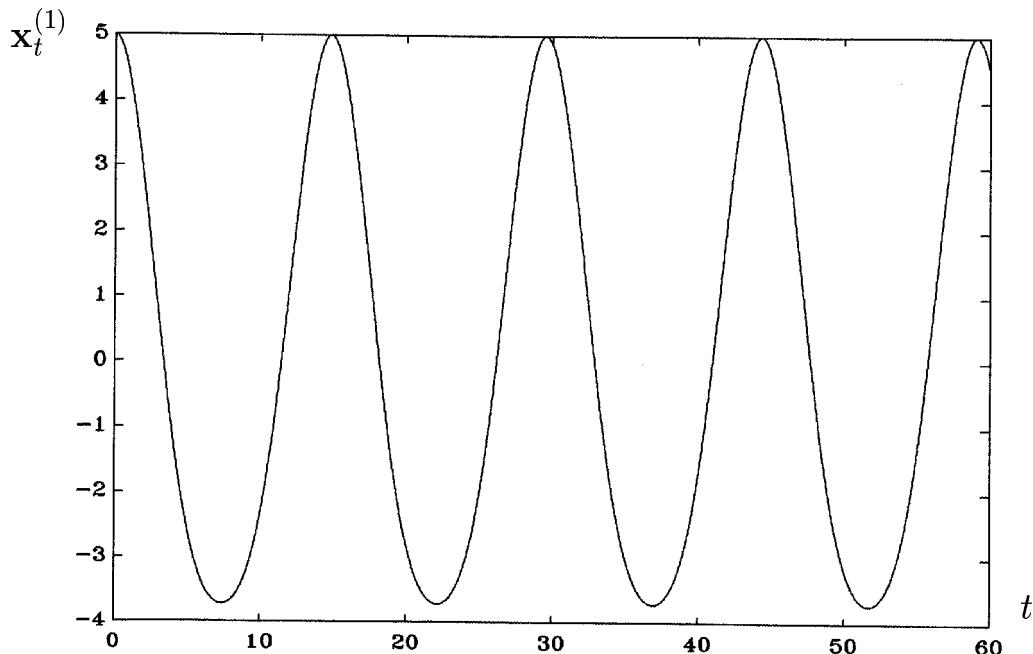


Рис. 15.23. Результат численного эксперимента 15.9.

При достаточно близких  $k_1, k_2$  правая часть равенства (15.56) определяет высокочастотные колебания с медленно меняющейся, по колебательному закону, амплитудой.

**Численный эксперимент 15.9.** Смоделировать решение системы СДУ Ито (15.49), (15.52) при  $m_1 = 4, m_2 = 1, c_2 = ((3 + \sqrt{5})c_1)/10, c_1 = 1, \mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 5, \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(4)} = 0, \gamma = 0.02, \alpha = \beta = 10$  с помощью явного сильного численного метода порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + B \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + (A - M M^\top S(\tau_p) \gamma^{-1}) \mathbf{y}_p \Delta + \\ & + \left( (A - M M^\top S(\tau_p) \gamma^{-1})^2 - M M^\top \frac{dS}{dt}(\tau_p) \gamma^{-1} \right) \mathbf{y}_p \frac{\Delta^2}{2} + \\ & + (A - M M^\top S(\tau_p) \gamma^{-1}) B \left( \Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} \right), \end{aligned} \quad (15.57)$$

$\partial e \mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p; \tau_p = p\Delta; \Delta = 0.005; p = 0, 1, \dots, 11999;$

$$\hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \zeta_{0,p} \sqrt{\Delta}, \quad \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_{0,p} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_{1,p} \right),$$

$\zeta_{0,p}, \zeta_{1,p}; p = 0, 1, \dots, 11999$  — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Значения  $S(\tau_p)$  получить путем численного решения матричного уравнения (15.53) с помощью явного численного метода второго порядка точности (численный метод, основанный на

$V(u, \theta, \bar{x})$

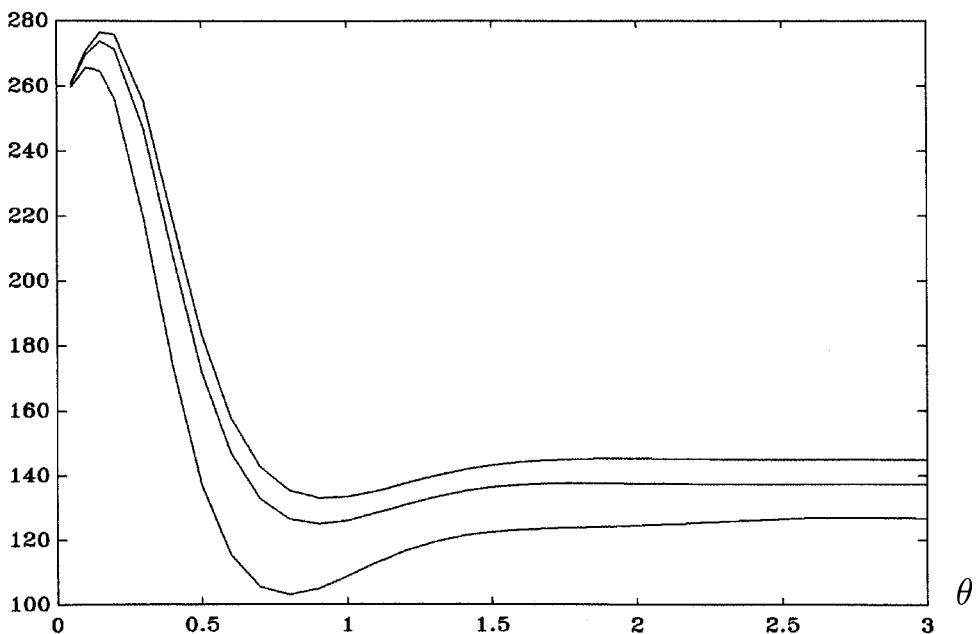


Рис. 15.24. Результат численного эксперимента 15.10.

формуле Тейлора), а значения  $dS/dt$  в моменты времени  $\tau_p$  получить из (15.53) при  $t = \tau_p$  по найденным значениям  $S(\tau_p)$ . Изобразить графически процесс  $\mathbf{x}_t^{(1)}$  (рис. 15.21), используя здесь и далее значения, полученные из (15.57). Повторить вычисления при  $M = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  (случай отсутствия управления) и при  $M = B = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  (случай отсутствия управления и шума). Изобразить графически процесс  $\mathbf{x}_t^{(1)}$  в этих случаях (рис. 15.22, 15.23).

**Численный эксперимент 15.10.** Построить графически зависимость  $V(u, \theta, \bar{x})$ ;  $\theta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.2, 0.3, \dots, 2.9, 3.0$  при  $\bar{x} = (5 \ 0 \ 5 \ 0)^T$ , используя формулу (15.54) и приближенно вычисляя интеграл в (15.54) по формуле трапеций:

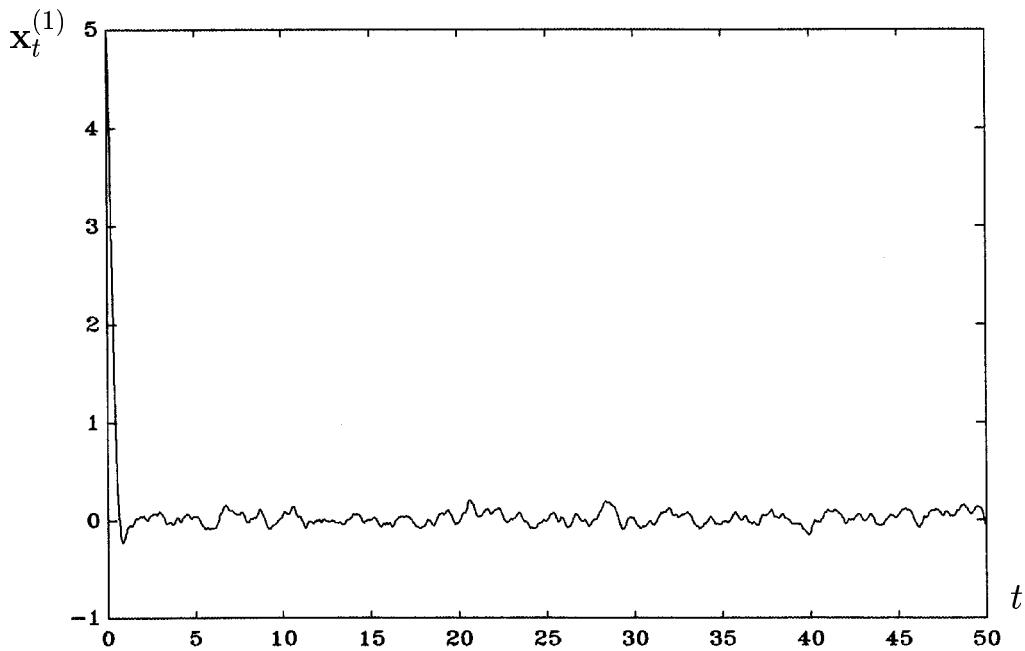


Рис. 15.25. Результат численного эксперимента 15.11.

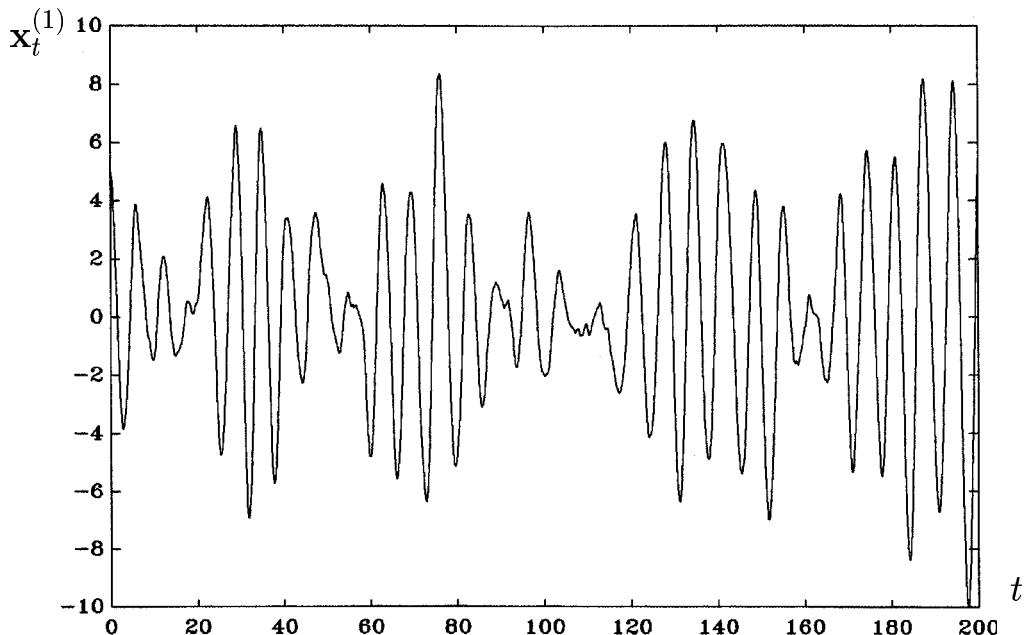


Рис. 15.26. Результат численного эксперимента 15.11.

$$V(u, \theta, \bar{x}) \approx \bar{x}^T S(0) \bar{x} + \frac{1}{2m_1^2} \sum_{i=0}^{p-1} (S^{(22)}(\tau_i) + S^{(22)}(\tau_{i+1})) \Delta,$$

где  $\tau_i = i\Delta$ ,  $\tau_p = \theta$ . Значения остальных исходных данных и способ получения  $S(0)$ ,  $S^{(22)}(\tau_i)$  такие же как в численном эксперименте 15.9 ( $M = B = (0 \ m_1^{-1} \ 0 \ 0)^T$ ). Повторить вычисления при  $c_1 = 3$  и  $c_1 = 10$ . Изобразить графические зависимости  $V(u, \theta, \bar{x})$ ;  $\theta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.2, 0.3, \dots, 2.9, 3.0$

при  $c_1 = 1, 3, 10$  (рис. 15.24;  $c_1 = 1$  соответствует верхней кривой,  $c_1 = 3$  — средней кривой, а  $c_1 = 10$  — нижней кривой).

Рассмотрим другой динамический режим в системе (15.49).

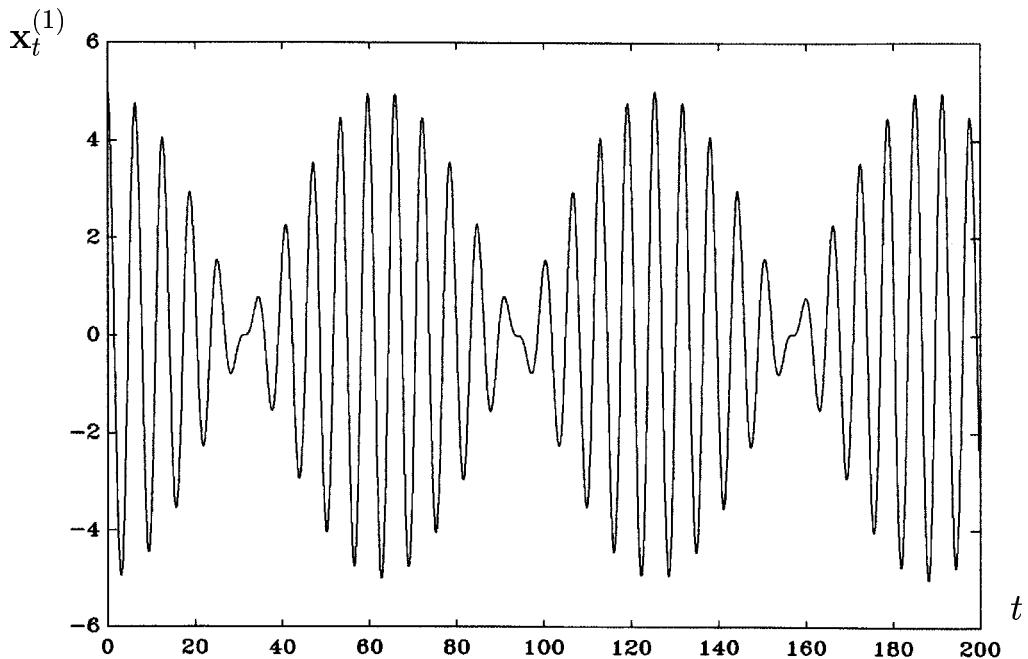


Рис. 15.27. Результат численного эксперимента 15.11.

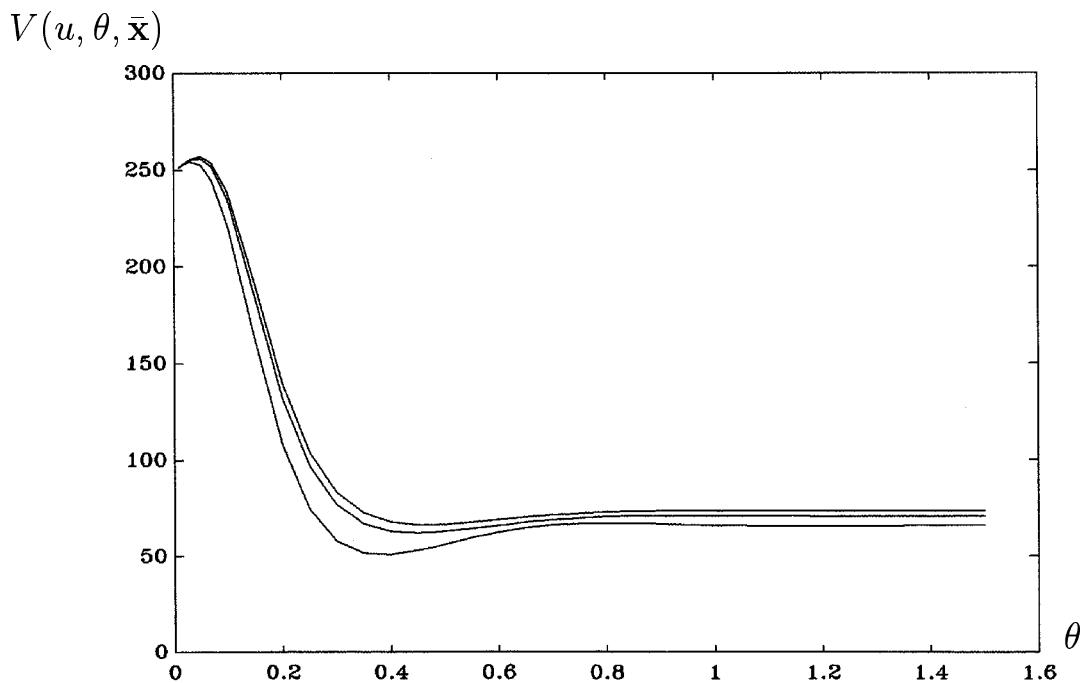


Рис. 15.28. Результат численного эксперимента 15.12.

**Численный эксперимент 15.11.** Повторить численный эксперимент 15.9 при  $c_2 = 0.01c_1$ ,  $m_1 = 100m_2$ ,  $c_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.01$ ,  $\Delta = 0.05$

(остальные исходные данные те же). Изобразить графически процесс  $\mathbf{x}_t^{(1)}$  для случаев наличия шума и управления ( $p = 0, 1, \dots, 999$ ; рис. 15.25), наличия шума и отсутствия управления ( $p = 0, 1, \dots, 3999$ ; рис. 15.26), отсутствия шума и управления ( $p = 0, 1, \dots, 3999$ ; рис. 15.27).

**Численный эксперимент 15.12.** Повторить численный эксперимент 15.10 при  $\theta = 0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.07, 0.10, 0.15, 0.20, \dots, 0.95, 1.00, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$  и  $c_1 = 1, 3, 10$ . Изобразить графически результат данного численного эксперимента (рис. 15.28;  $c_1 = 1$  соответствует верхней кривой,  $c_1 = 3$  — средней кривой, а  $c_1 = 10$  — нижней кривой).

# Глава 16

## Примеры применения слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач

### 16.1 Вычисление наибольшего стохастического ляпуновского показателя

Рассмотрим СДУ вида:

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} + 2\delta \frac{dx_t}{dt} + (\mu + cf_t)x_t = 0, \quad (16.1)$$

где  $\delta, \mu, c$  — числовые параметры;  $f_t$  — гауссовский белый шум.

Нетрудно видеть, что записи СДУ (16.1) в форме Ито и Стратоновича оказываются эквивалентными. Например, запись в форме СДУ Ито имеет вид:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} df_t, \quad (16.2)$$

где  $f_t$  — стандартный винеровский процесс.

Известно, что асимптотическая стохастическая устойчивость нулевого решения СДУ Ито (1.39), в частности, СДУ Ито (16.2), наступает тогда и только тогда, когда наибольший стохастический ляпуновский показатель  $\lambda_1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} (\ln |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, 0}| / t)$  отрицателен ( $\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, 0}$  — означает, что для процесса  $\mathbf{x}_t$  выполняется начальное условие  $\mathbf{x}_0 = 0$ ).

Для вычисления  $\lambda_1$  можно воспользоваться формулой [148]:

$$\lambda_{1,T}^{\Delta} = (N_T \Delta)^{-1} \sum_{k=1}^{N_T} \ln \left( |\mathbf{y}_k| / |\mathbf{y}_{k-1}| \right); \quad \mathbf{y}_0^{(1)} = 1, \quad \mathbf{y}_0^{(2)} = 0, \quad (16.3)$$

где  $\mathbf{y}_k$  – приближенное значение  $\mathbf{x}_{k\Delta} = (\mathbf{x}_{k\Delta}^{(1)} \quad \mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)})^T$ , полученное с помощью некоторой численной схемы для СДУ Ито (16.2) с постоянным шагом  $\Delta$ ;  $k = 0, 1, \dots, N_T$ ;  $N_T = T/\Delta$ ;  $|\mathbf{a}|$  – евклидова норма вектора  $\mathbf{a}$ .

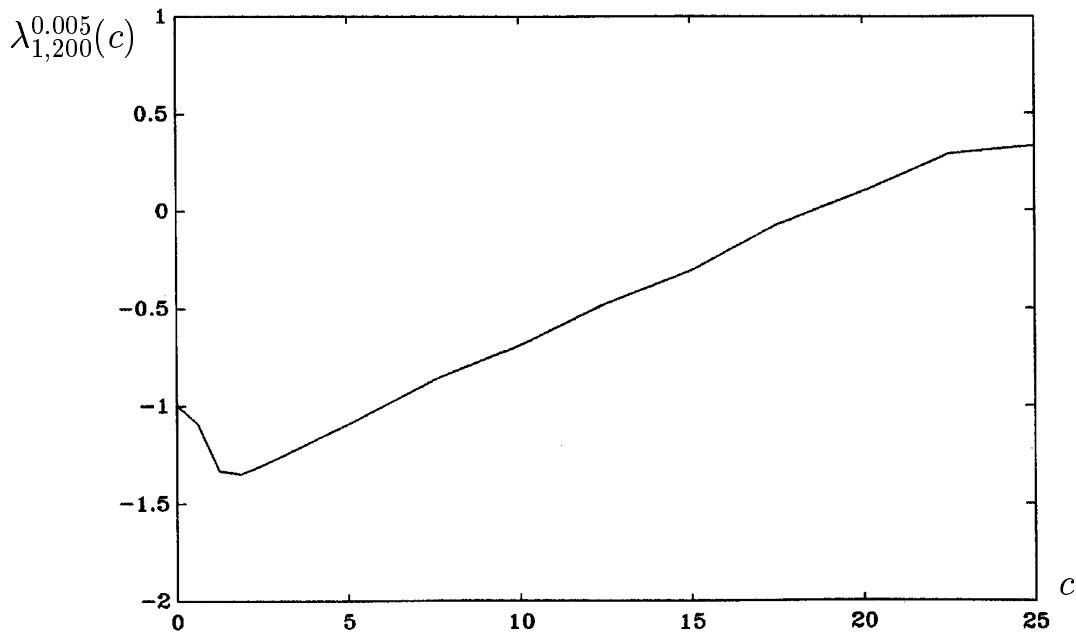


Рис. 16.1. Результат численного эксперимента 16.1.

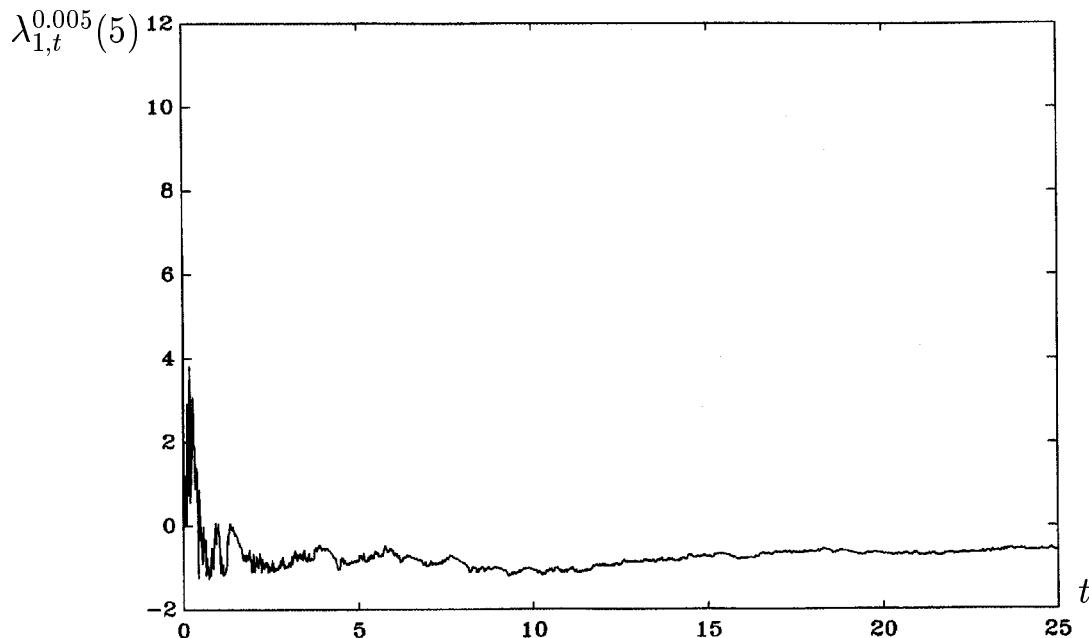


Рис. 16.2. Результат численного эксперимента 16.1.

Для вычисления  $\lambda_1$  по формуле (16.3) удобнее воспользоваться слабыми численными методами для СДУ Ито [148].

Действительно, поскольку  $\lambda_1$  неслучайна, то при достаточно большом  $N_T : \lambda_{1,T}^\Delta \approx M\{\lambda_{1,T}^\Delta\}$ , где  $\lambda_{1,T}^\Delta$  имеет вид (16.3). Если для вычисления  $\lambda_{1,T}^\Delta$  используется слабый численный метод порядка точности  $\gamma$ , то при достаточно большом  $T$ :  $|\lambda_{1,T}^{*\Delta} - \lambda_{1,T}^\Delta| \approx |M\{\lambda_{1,T}^{*\Delta}\} - M\{\lambda_{1,T}^\Delta\}| \leq C\Delta^\gamma$ , где  $C$  — постоянная, которая не зависит от  $\Delta$ , а  $\lambda_{1,T}^{*\Delta}$  отличается от  $\lambda_{1,T}^\Delta$  заменой  $\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}$  на  $\mathbf{x}_{k\Delta}, \mathbf{x}_{(k-1)\Delta}$  соответственно. Если же для вычисления  $\lambda_{1,T}^\Delta$  используется сильный численный метод порядка точности  $\gamma$ , то из выполнения неравенства  $M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_{N_T}|\} \leq C\Delta^\gamma$  не следует выполнение неравенства  $M\{|\lambda_{1,T}^\Delta - \lambda_{1,T}^{*\Delta}|\} \leq C_1\Delta^\gamma$ , где постоянные  $C, C_1$  не зависят от  $\Delta$  и  $N_T\Delta = T$ .

**Численный эксперимент 16.1.** Вычислить  $\lambda_{1,200}^{0.005}(c)$  по формуле (16.3) при  $c = 0, 0.625, 1.25, 1.875, 2.5j; j = 1, 2, \dots, 10$ , где  $\mathbf{y}_k = (\mathbf{y}_k^{(1)} \ \mathbf{y}_k^{(2)})^\top$  получается с помощью применения неявного слабого численного метода порядка точности 2.0 вида (10.42) при  $\tilde{\alpha} = 1/2$  к СДУ Ито (16.2):

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_k^{(2)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_{k+1}^{(2)},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = & \mathbf{y}_k^{(2)} + 0.5\Delta(-\mu\mathbf{y}_k^{(1)} - 2\delta\mathbf{y}_k^{(2)}) + \\ & + 0.5\Delta(-\mu\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} - 2\delta\mathbf{y}_{k+1}^{(2)}) + \\ & + 0.5\sqrt{\Delta}\zeta_{0,k}(-2c\mathbf{y}_k^{(1)} - c\Delta\mathbf{y}_k^{(2)}) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = & \mathbf{y}_k^{(1)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_k^{(2)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_{k+1}^{(2)}, \\ \mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = & \frac{1}{1 + 0.25\Delta^2\mu + \delta\Delta} \left( \mathbf{y}_k^{(2)} - 0.5\Delta(\mu\mathbf{y}_k^{(1)} + 2\delta\mathbf{y}_k^{(2)}) - \right. \\ & - 0.5\mu\Delta(\mathbf{y}_k^{(1)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_k^{(2)}) - c\mathbf{y}_k^{(1)}\sqrt{\Delta}\zeta_{0,k} - \\ & \left. - 0.5\Delta^{3/2}c\zeta_{0,k}\mathbf{y}_k^{(2)} \right), \end{aligned}$$

где  $\zeta_{0,k} (k = 0, 1, \dots, N_T - 1)$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины;  $\delta = 2$ ;  $\mu = 3$ . Построить графическую зависимость  $\lambda_{1,200}^{0.005}(c); c = 0, 0.625, 1.25, 1.875, 2.5j; j = 1, 2, \dots, 10$  (рис. 16.1) и реализацию случайногопроцесса  $\lambda_{1,t}^{0.005}(5), t \in [0, 25]$  (рис. 16.2).

Отметим, что при  $c = 0$  система (16.2) при  $\delta = 2, \mu = 3$  имеет  $\lambda_1 = -1$  ( $\lambda_{1,200}^{0.005}(0) \approx -0.9962$ ).

На рис. 16.1 видно, что нулевое решение системы (16.2) теряет асимптотическую стохастическую устойчивость при  $c \approx 18.9$ . При этом, при возрастании  $c$  от нуля стохастическое возмущение сначала стабилизирует систему (16.2), а затем при дальнейшем увеличении  $c$  снижает степень асимптотической стохастической устойчивости нулевого решения вплоть до ее потери при  $c \approx 18.9$ .

В [148] отмечается, что стохастическая асимптотическая устойчивость невозмущенного решения нелинейного СДУ (2.50) в ряде случаев следует из стохастической асимптотической устойчивости нулевого решения соответствующего линеаризованного СДУ (2.51).

Отметим, что подход к изучению стохастической устойчивости, основанный на стохастических функциях Ляпунова, требует нахождения соответствующих функций Ляпунова, что не всегда просто, а также дает, в отличие от подхода стохастических ляпуновских показателей, только достаточные условия асимптотической стохастической устойчивости.

## 16.2 Численные методы решения задачи Коши для уравнений параболического типа, основанные на вероятностном представлении решения

Рассмотрим задачу Коши для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + g(\mathbf{x}, t, u) = 0, \quad t_0 \leq t < T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (16.4)$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (16.5)$$

где  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $B(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $g(\mathbf{x}, t, u) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;  $\varphi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  — заданные функции,  $u(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  — решение задачи (16.4), (16.5).

Г.Н. Мильштейном [194] предложено семейство детерминированных численных методов решения задачи (16.4), (16.5), основанных на вероятностном представлении решения данной задачи и слабых численных методах решения СДУ Ито. Далее коснемся некоторых из предложенных в [194] численных методов для случая  $n = 1$ .

Известно [194], что решение задачи (16.4), (16.5) допускает вероятностное представление

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbb{M} \left\{ \varphi(\mathbf{x}_T^{t, \mathbf{x}}) + z_T^{t, \mathbf{x}, 0} \right\}, \quad (16.6)$$

где  $(\mathbf{x}_s^{t, \mathbf{x}} \ z_s^{t, \mathbf{x}, 0})^\top$ ,  $s \in [t, T]$  — решение следующей системы СДУ Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \\ g(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16.7)$$

где  $\mathbf{f}_s$  —  $n$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами,  $B = \Sigma \Sigma^\top$ ,  $O_{1 \times n}$  — нулевая строка длины  $n$ .

Пусть  $n = 1$ . Рассмотрим разбиение промежутка  $[t_0, T]$  узлами  $\tau_p = t_0 + p\Delta$ ,  $\Delta = (T - t_0)/N$ ;  $p = 0, 1, \dots, N$ .

Воспользовавшись (16.6), получим

$$u(\mathbf{x}, \tau_k) = \mathbb{M} \left\{ u(\mathbf{x}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}}, \tau_{k+1}) + z_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}, 0} \right\}, \quad (16.8)$$

где  $(\mathbf{x}_s^{\tau_k, \mathbf{x}} \ z_s^{\tau_k, \mathbf{x}, 0})^\top$ ,  $s \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$  — решение системы (16.7) с начальным условием

$$(\mathbf{x}_{\tau_k} \ z_{\tau_k})^\top = (\mathbf{x} \ 0)^\top. \quad (16.9)$$

Запишем явный слабый метод Эйлера для системы (16.7), (16.9):

$$\bar{\mathbf{x}}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}\zeta_k, \quad (16.10)$$

$$\bar{z}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}, 0} = g(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta, \quad (16.11)$$

где  $\zeta_k$ ;  $k = 0, 1, \dots, N-1$  — независимые случайные величины, для которых  $\mathbb{P}\{\zeta_k = \pm 1\} = 0.5$ .

Далее, воспользовавшись (16.8), (16.10), (16.11), найдем

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, \tau_k) &\approx \mathbb{M} \left\{ u(\bar{\mathbf{x}}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}}, \tau_{k+1}) + \bar{z}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}, 0} \right\} = \\ &= 0.5u(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ &\quad + 0.5u(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ &\quad + g(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta. \end{aligned}$$

С помощью последнего равенства запишем соотношения [194]:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k) &= 0.5\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ &\quad + 0.5\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \end{aligned}$$

$$+g(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta, \quad (16.12)$$

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_N) = \varphi(\mathbf{x}); \quad k = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0, \quad (16.13)$$

где  $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k)$  — аппроксимация  $u(\mathbf{x}, \tau_k)$ .

Алгоритм (16.12), (16.13) решения задачи (16.4), (16.5) является очевидно неявным. Для нахождения величины  $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k)$  при фиксированном  $k$  необходимо решить неявное уравнение (16.12). Эта процедура может быть осуществлена, например, с помощью метода простой итерации. Однако, если в качестве начальной итерации взять  $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1})$  [194], то на основе (16.12), (16.13) получим явный алгоритм решения задачи (16.4), (16.5)

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k) = & 0.5\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1})))\Delta + \\ & + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ & + 0.5\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1})))\Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ & + g(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\Delta, \end{aligned} \quad (16.14)$$

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_N) = \varphi(\mathbf{x}); \quad k = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0. \quad (16.15)$$

В [194] приведены различные модификации алгоритма (16.14), (16.15), а также алгоритмы решения задачи (16.4), (16.5) при  $n = 1$ , основанные на более точных слабых численных методах решения СДУ Ито. Кроме того, в [194] построены алгоритмы решения задачи (16.4), (16.5) при  $n = 2$ , основанные на описанном ранее подходе.

Оценка скорости сходимости алгоритма (16.14), (16.15) дается следующей теоремой.

**Теорема 16.1.** [194]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. Для всех  $t \in [t_0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $u \in [U_1, U_2]$  ( $-\infty \leq U_1 < U_2 \leq +\infty$ ;  $U_1, U_2$  — постоянные):

$$|\mathbf{a}(x, t, u)| + |\Sigma(x, t, u)| + |g(x, t, u)| \leq K.$$

2. Для всех  $t \in [t_0, T]$ ;  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$ ;  $u_1, u_2 \in [U_1, U_2]$ :

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}(x_2, t, u_2) - \mathbf{a}(x_1, t, u_1)| + |\Sigma(x_2, t, u_2) - \Sigma(x_1, t, u_1)| + \\ & + |g(x_2, t, u_2) - g(x_1, t, u_1)| \leq K(|x_2 - x_1| + |u_2 - u_1|). \end{aligned}$$

3. Для всех  $t \in [t_0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$  существует только ограниченное решение  $u(x, t)$  ( $u(x, t) \in [u^*, u^{**}]$ ,  $U_1 < u^*$ ,  $u^{**} < U_2$ ) задачи (16.4), (16.5).

4. Для всех  $t \in [t_0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ :

$$\left| \frac{\partial^{i+l} u}{\partial t^i \partial x^l} \right| \leq K \text{ при } i = 0 \text{ и } l = 1, 2, 3, 4; \quad i = 1 \text{ и } l = 0, 1, 2; \quad i = 2 \text{ и } l = 0$$

(предполагается, что указанные частные производные существуют).

Тогда

$$|\bar{u}(x, \tau_k) - u(x, \tau_k)| \leq K_1 \Delta, \quad (16.16)$$

где постоянные  $K, K_1$  не зависят от  $\Delta, x, k$ .

Введем дискретизацию переменной  $x$  (далее скаляр  $x$  обозначаем через  $x$ ):  $x_j = x_0 + j\alpha\Delta$ ;  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}^1$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда из (16.14), (16.15), воспользовавшись линейной интерполяцией, получим следующий численный метод [194]:

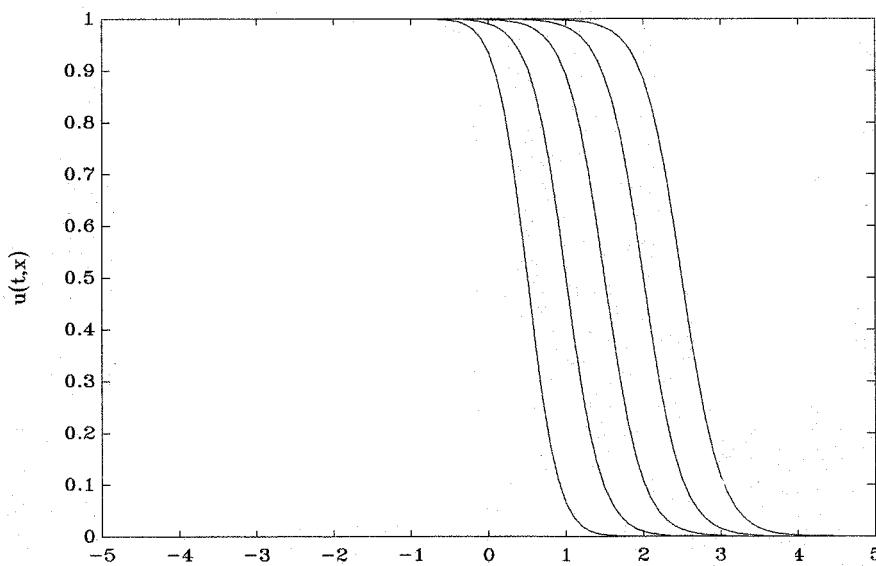


Рис. 16.3. Результат численного эксперимента 16.2.

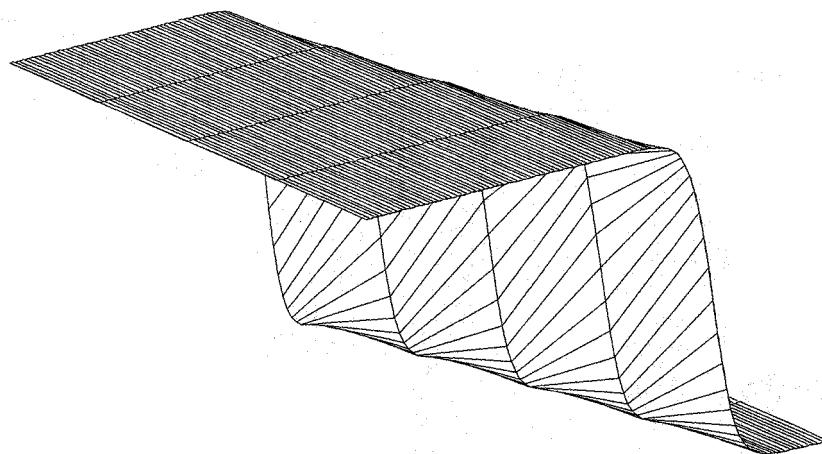


Рис. 16.4. Результат численного эксперимента 16.2.

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_j, \tau_k) = & 0.5\bar{u}(x_j + \mathbf{a}(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1})))\Delta + \Sigma(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ & + 0.5\bar{u}(x_j + \mathbf{a}(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1})))\Delta - \Sigma(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ & + g(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}))\Delta, \end{aligned} \quad (16.17)$$

$$\bar{u}(x, \tau_N) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (16.18)$$

$$\bar{u}(x, \tau_k) = (\alpha\Delta)^{-1} ((x_{j+1} - x_j)\bar{u}(x_j, \tau_k) + (x - x_j)\bar{u}(x_{j+1}, \tau_k)), \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad (16.19)$$

$$k = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В [194] показано, что в условиях теоремы 16.1 для функции  $\bar{u}(x, \tau_k)$  вида (16.19) справедлива оценка (16.16).

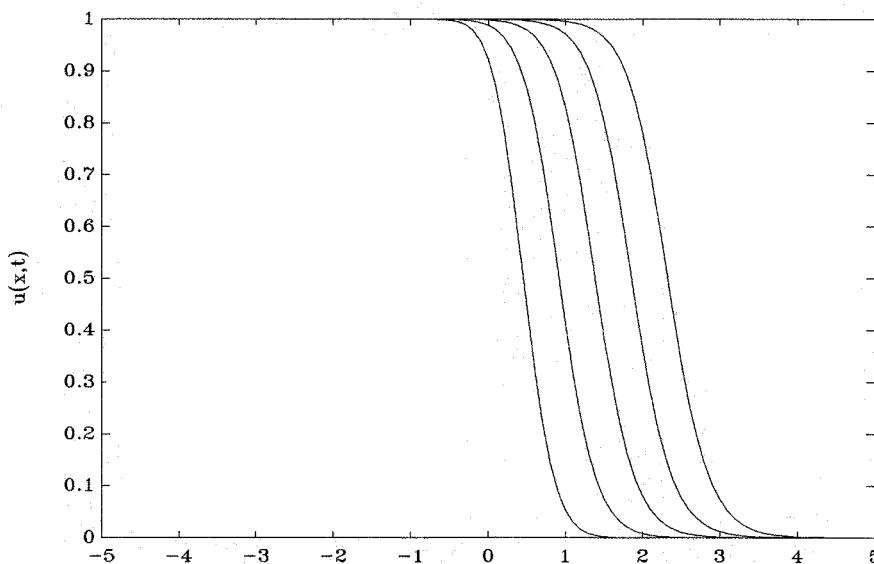


Рис. 16.5. Результат численного эксперимента 16.3.

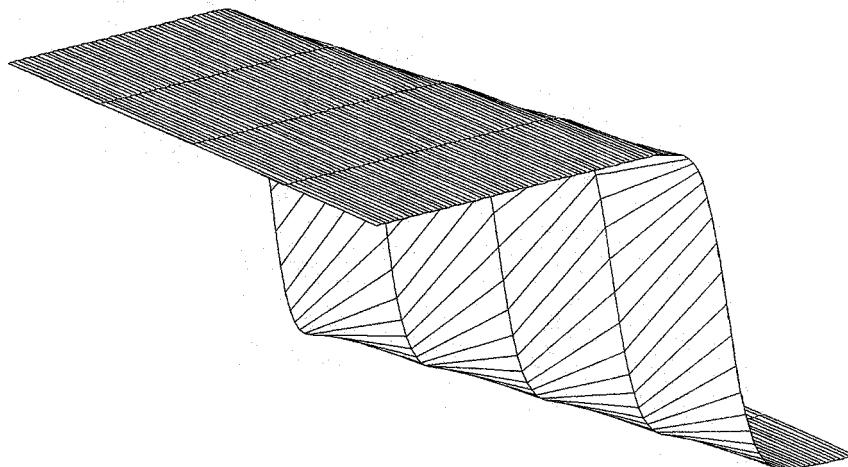


Рис. 16.6. Результат численного эксперимента 16.3.

Отметим, что в описанных численных методах вычисления проводятся для "отрицательного" направления времени, т. е. для  $k$  от  $N - 1$  до нуля. Это неудобство может быть преодолено, если коэффициенты уравнения (16.4) и функция  $g$  явно не зависят от  $t$ . В частности, в таком случае для уравнения (16.4) с начальным условием  $u(x, 0) = \varphi(x)$  при  $n = 1, t > 0$  на основе численного метода (16.17)–(16.19) нетрудно получить следующий алгоритм с "положительным" направлением времени [194]:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}) = & 0.5\bar{u}(x_j + \mathbf{a}(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\Delta + \Sigma(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_k) + \\ & + 0.5\bar{u}(x_j + \mathbf{a}(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\Delta - \Sigma(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_k) + \\ & + g(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\Delta, \end{aligned} \quad (16.20)$$

$$\bar{u}(x, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (16.21)$$

$$\bar{u}(x, \tau_k) = (\alpha\Delta)^{-1} ((x_{j+1} - x_j)\bar{u}(x_j, \tau_k) + (x - x_j)\bar{u}(x_{j+1}, \tau_k)), \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad (16.22)$$

$$\tau_k = k\Delta; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В заключение приведем численный пример [194], иллюстрирующий применение численного метода (16.20)–(16.22).

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Бюргерса [194]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^1, \quad (16.23)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}. \quad (16.24)$$

Известно [194], что точное решение задачи (16.23), (16.24) имеет вид

$$u(x, t) = 1 - \frac{G(-x/\sqrt{2\sigma^2 t})}{G(-x/\sqrt{2\sigma^2 t}) + \exp((t - 2x)/(2\sigma^2)) \left(2 - G((t - x)/\sqrt{2\sigma^2 t})\right)}, \quad (16.25)$$

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-z^2) dz. \quad (16.26)$$

**Численный эксперимент 16.2.** Смоделировать решение задачи (16.23), (16.24) по формулам (16.25), (16.26) при  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $x = j\Delta$ ;  $j = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$ ;  $\Delta = 0.1$ . Изобразить графически зависимости  $u(x, t)$ ;  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ , а также трехмерную поверхность  $v = u(x, t)$  (рис. 16.3, 16.4).

**Численный эксперимент 16.3.** Повторить численный эксперимент 16.2, используя алгоритм (16.20)–(16.22) (рис. 16.5, 16.6).

Численные эксперименты, аналогичные 16.2, 16.3, рассмотрены в [194]. Численное моделирование проводилось здесь независимо и дало хорошее совпадение с результатами работы [194] (см. рис. 16.3–16.6).

Отметим, что детерминированным численным методам интегрирования задач Коши, Дирихле и Неймана, основанным на вероятностном представлении решений этих задач посвящены несколько глав монографии [196].

### 16.3 Численное решение задачи Коши с помощью слабых численных методов и метода Монте-Карло

Рассмотрим нелинейную задачу теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (2 - \operatorname{th} x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (16.27)$$

$$u(x, 0) = 1/(1 + (x - 1)^8), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0. \quad (16.28)$$

Эта задача моделирует "растекание" начального распределения температуры (16.28) вблизи стыка двух материалов с существенно различными коэффициентами теплопроводности.

Запишем вероятностное представление решения задачи (16.27), (16.28):

$$u(x, t) = \mathbb{M}\{1/(1 + (\xi_t^{0,x} - 1)^8)\}, \quad (16.29)$$

где  $\xi_s^{0,x} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_s$ ;  $0 < s < t$ ;  $t > 0$  — решение СДУ Ито вида

$$d\xi_s = -\operatorname{ch}^{-2} \xi_s ds + \sqrt{2(2 - \operatorname{th} \xi_s)} df_s; \quad \xi_0 = x,$$

$f_s$  — скалярный стандартный винеровский процесс.

Для численного решения данной задачи применим, построенный автором слабый численный метод четвертого порядка (10.20), (6.289)–(6.297).

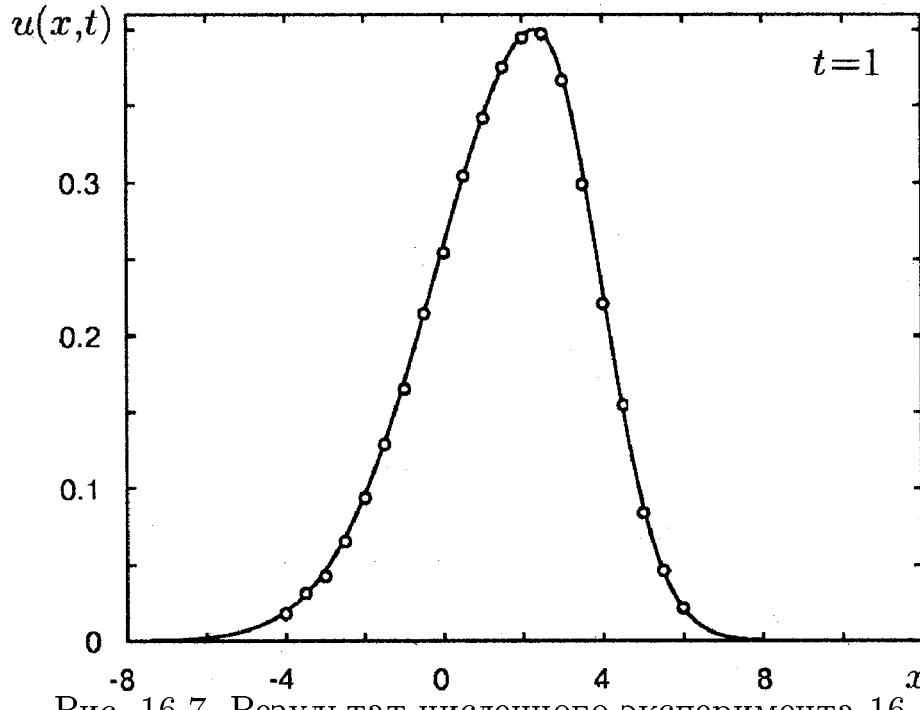


Рис. 16.7. Результат численного эксперимента 16.4.

**Численный эксперимент 16.4** (рис. 16.7). Реализовать численно соотношение (16.29) с помощью метода Монте–Карло и слабого численного метода 4 порядка (10.20), (6.289)–(6.297) по формуле:

$$u(x, t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + (y_{t,i}^{0,x} - 1)^8)^{-1}$$

при  $N = 1000$ ,  $t = 1$ ;  $y_t^{0,x}$  — приближенное значение случайной величины  $\xi_t^{0,x}$ , полученное с помощью метода (10.20), (6.289)–(6.297) при  $\Delta = 2^{-5}$ ;  $y_{t,i}^{0,x}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — независимые реализации  $y_t^{0,x}$ . Изобразить график решения  $u(x, 1)$  кружками. Повторить вычисление  $u(x, 1)$  с помощью метода конечных элементов и изобразить график  $u(x, 1)$  сплошной линией.

## 16.4 Численное интегрирование задачи Коши для уравнений параболического типа, основанное на прямом статистическом моделировании

Рассмотрим менее общую задачу Коши, чем задача (16.4), (16.5), для уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(i)}} + c(\mathbf{x}, t)u = 0, \quad (16.30)$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}, T), \quad (16.31)$$

где  $t_0 \leq t < T$ ,  $\mathbf{x} \in \Re^n$ ,  $c(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \rightarrow \Re^1$ .

Вероятностное представление решения задачи (16.30), (16.31) имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbb{M} \left\{ \varphi(\mathbf{f}_T^{t, \mathbf{x}}, T) \exp \left( \int_t^T c(\mathbf{f}_s^{t, \mathbf{x}}, s) ds \right) \right\}, \quad (16.32)$$

где  $\mathbf{f}_s^{t, \mathbf{x}}; s \geq t$  —  $n$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, стартующий из точки  $\mathbf{x} \in \Re^n$  в момент времени  $t$ .

Рассмотрим  $(n+1)$ -мерный процесс Ито, описываемый СДУ Ито вида

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n \times 1} \\ c(\mathbf{x}_s, s) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16.33)$$

где  $\mathbf{f}_s, s \geq t$  имеет тот же смысл, что и  $\mathbf{f}_s^{t, \mathbf{x}}, s \geq t$  в (16.32);  $y_s \in \Re^1$ ;  $I_{n \times n}$ ,  $O_{1 \times n}$ ,  $O_{n \times 1}$  — единичная  $(n \times n)$ -матрица, нулевая строка и нулевой столбец длины  $n$  соответственно.

Нетрудно заметить, что правая часть (16.32) может быть переписана в форме  $\mathbb{M}\{g(\mathbf{z}_T)\}$ , где

$$\mathbf{z}_s = [\mathbf{x}_s \ y_s]^\top, \quad g(\mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h}^{(1)}, \dots, \mathbf{h}^{(n)}, T) \exp(\mathbf{h}^{(n+1)}), \quad \mathbf{h} = (\mathbf{h}^{(1)}, \dots, \mathbf{h}^{(n+1)}),$$

а  $[\mathbf{x}_s \ y_s]^\top$  — решение системы (16.33).

Из сказанного следует, что для численной реализации формулы (16.32) можно воспользоваться слабыми численными методами решения СДУ Ито (16.33). Отметим, что описанный подход к численному интегрированию задачи (16.30), (16.31) представлен, в частности, в данной трактовке в [76], [148].

В [148] рассмотрено численное моделирование правой части (16.32), основанное на слабом явном методе Эйлера, слабом экстраполяционном методе порядка точности 2.0, неявном слабом конечно-разностном методе порядка точности 2.0, а также на слабых экстраполяционных численных методах порядка точности 4.0 для системы (16.33).

В [21] (см. также [148]) построен слабый численный метод порядка точности 4.0 специально для системы СДУ Ито вида

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n \times 1} \\ c(\mathbf{x}_s, s)y_s \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (16.34)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (16.33).

Нетрудно видеть, что правая часть (16.32) при  $\varphi \equiv 1$  может быть представлена в виде  $M\{y_T\}$ , где  $y_T$  определяется из системы (16.34).

Отметим, что слабый метод Эйлера записывается для системы (16.33) и постоянного шага  $\Delta$  в виде

$$\bar{\mathbf{x}}_{(p+1)\Delta}^{(l)} = \bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(l)} + \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)}; \quad l = 1, \dots, n, \quad (16.35)$$

$$\bar{y}_{(p+1)\Delta} = \bar{y}_{p\Delta} + c(\hat{\mathbf{x}}_{p\Delta}, p\Delta)\Delta, \quad (16.36)$$

где

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}; \quad \bar{y}_0 = 0; \quad \hat{\mathbf{x}}_{p\Delta} = (\bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(1)} \dots \bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(n)})^\top; \quad p = 0, 1, \dots, N_T - 1; \quad T = N_T\Delta.$$

При этом, случайные величины  $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)}$ ;  $l = 1, \dots, n$ ;  $p = 0, 1, \dots, N_T - 1$  независимы и распределены по закону  $N(0, \Delta)$  или по закону

$$P\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)} = \pm \sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}. \quad (16.37)$$

В терминах решения системы (16.33) усредняемое в правой части (16.32) выражение можно записать следующим образом:

$$F_{t,\mathbf{x}}(T) = \varphi(\mathbf{x}_T, T) \exp(y_T). \quad (16.38)$$

В [148], в частности, приведена формула для численного моделирования  $F_{t,\mathbf{x}}(T)$  вида (16.38), основанная на численной схеме (16.35), (16.36):

$$\hat{F}_{t,\mathbf{x}}^\Delta(T) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_{N_T\Delta}, N_T\Delta) \exp\left(\Delta \sum_{p=0}^{N_T-1} c(\hat{\mathbf{x}}_{p\Delta}, p\Delta)\right), \quad (16.39)$$

где  $T = N_T\Delta$ . При этом, согласно тому, что метод Эйлера имеет порядок слабой сходимости  $\gamma = 1.0$ , имеем

$$|M\{F_{t,\mathbf{x}}(T)\} - M\{\hat{F}_{t,\mathbf{x}}^\Delta(T)\}| \leq K\Delta,$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $\Delta, t, \mathbf{x}$ .

В заключение рассмотрим численный пример [148], иллюстрирующий описанный подход.

Положим

$$n = 1, \quad \varphi(x, t) \equiv 1, \quad c(x, t) = -x^2/2, \quad \mathbf{x}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x \in \Reals^1. \quad (16.40)$$

Известно [76] (см. также [148]), что функция

$$u(x, t) = \exp\left(\frac{1}{2}(T - t - x^2 \operatorname{th}(T - t))\right) \sqrt{\frac{2}{1 + \exp(2(T - t))}}, \quad (16.41)$$

где

$$\operatorname{th} y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\exp(y) - \exp(-y)}{\exp(y) + \exp(-y)};$$

$t \in [0, T]$ ;  $x \in \mathbb{R}^1$ , является решением задачи (16.30), (16.31) в условиях (16.40). Из (16.41) следует, что

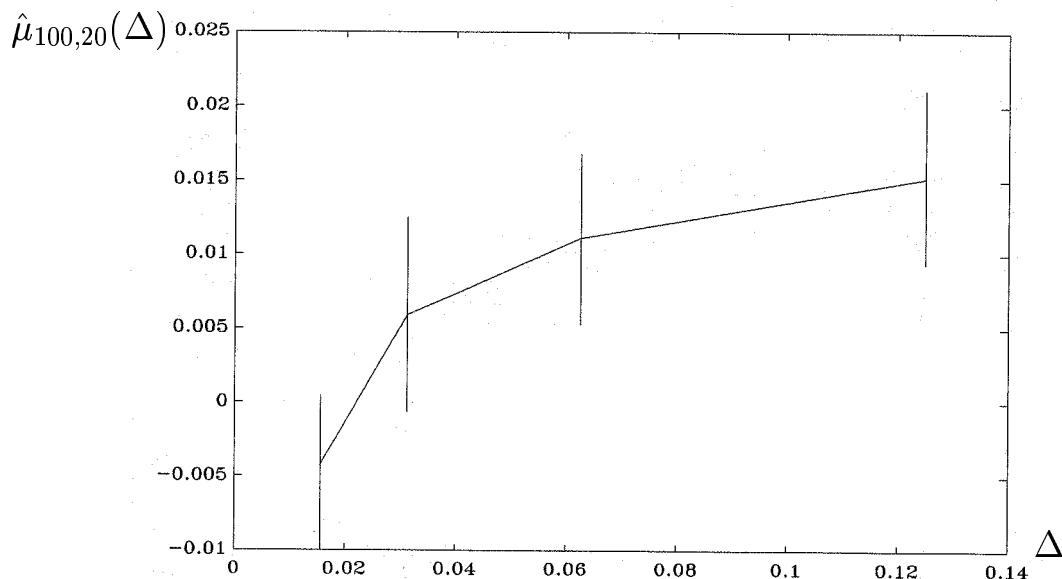


Рис. 16.8. Результат численного эксперимента 16.5.

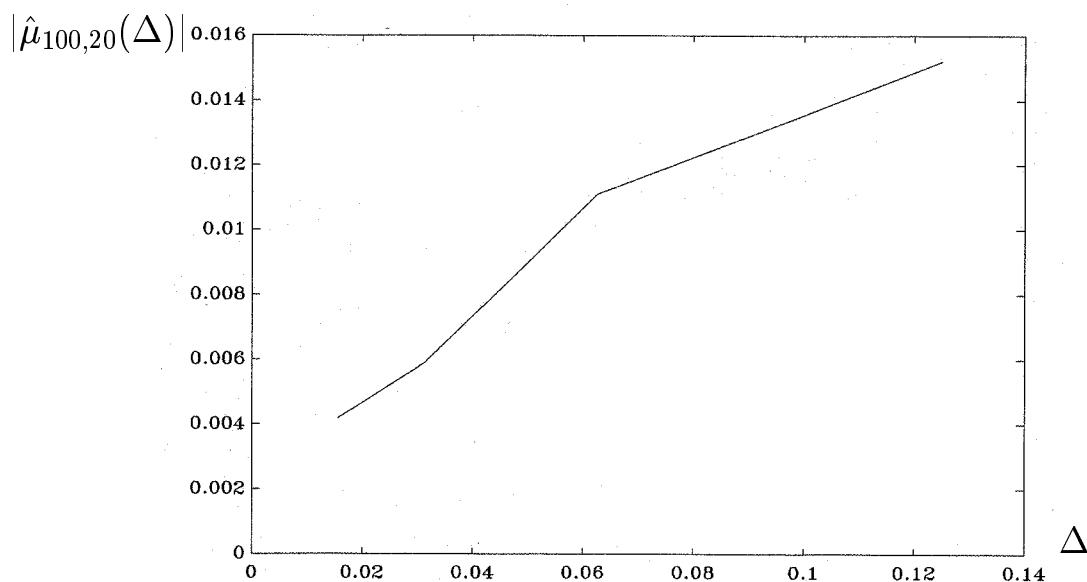


Рис. 16.9. Результат численного эксперимента 16.5.

$$u(0, 0) = \sqrt{\frac{2 \exp(T)}{1 + \exp(2T)}} \stackrel{\text{def}}{=} U.$$

**Численный эксперимент 16.5.** [148]. Смоделировать 2000 независимых реализаций ( $M = 20$  групп по  $N = 100$  реализаций) случайной величины  $\hat{F}_{t,x}^{\Delta}(T)$  вида (16.39) при  $x = t = 0$ ,  $\Delta = 2^{-3}$ ,  $T = 1$  с помощью численной схемы (16.35)–(16.37) и вычислить оценку  $\hat{\mu}_{100,20}$  ошибки

$$\mu = M\{\hat{F}_{0,0}^{\Delta}(1)\} - U$$

по формуле (10.2). Построить 90%-й доверительный интервал для  $\mu$ . Повторить вычисления для  $\Delta = 2^{-j}$ ;  $j = 4, 5, 6$ . Изобразить графически зависимость  $\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)$  с соответствующими доверительными интервалами, а также зависимость  $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$ .

Результат выполнения численного эксперимента 16.5 изображен на рис. 16.8, 16.9. Вычисления проводились здесь независимо, и результаты дали достаточно хорошее совпадение с результатами, полученными в [148].

# Глава 17

## MATLAB 7.0-программы для некоторых численных экспериментов по тексту книги

### 17.1 Введение

Данная глава, также как и глава 13, будет в первую очередь интересна лицам, интересующимся вычислительной математикой и компьютерными методами, но не являющимися специалистами в области численного интегрирования СДУ Ито. Она позволит им освоить азы новой для себя области посредством практики на РС, а также получить представление о данной научной проблеме.

Указанный материал представит также интерес для специалистов в области программирования, создающих пакеты компьютерных программ, поскольку алгоритмы и программы из данной монографии могут быть отправной точкой для создания программного обеспечения для численного решения систем линейных и нелинейных СДУ Ито, а также для численного решения математических задач, связанных с СДУ Ито.

Несомненно, что СДУ Ито в сравнении с обычновенными дифференциальными уравнениями являются гораздо более новыми и сложными для исследования математическими объектами. Необходимость их изучения, в том числе с помощью компьютерных методов, вызвана большим числом и важностью их приложений (см. главу 2 данной книги, а также [148], [151], [196]).

Прежде чем перейти непосредственно к текстам программ, напомним, что в системе MATLAB 7.0 генерирование случайной величины с распре-

делением  $N(0, 1)$  осуществляется [23] с помощью функции `randn`.

Если требуется сгенерировать матрицу  $A$  размера  $m \times n$ , элементы которой независимы и имеют распределение  $N(0, 1)$ , то это делается следующим образом [23]: `A=randn(m, n)`.

Команды `randn('state', 0)`, `randn('state', j)` сбрасывают генератор в начальное состояние и в  $j$ -е состояние соответственно (для целых  $j$ ) [23].

В дальнейшем, в приводимых текстах программ в системе MATLAB 7.0, указанные команды будут встречаться довольно часто.

## 17.2 MATLAB 7.0-программы к главе 6

### 17.2.1 Программа для моделирования стохастического интеграла (6.87) при $i_1 \neq i_2$ с выбором числа $q$ из условия (6.105)

```
clear;
dt=0.1;          %LENGTH OF INTERVAL OF INTEGRATION
eps=0.00001;      %MEAN-SQUARE ACCURACY
ee=(dt^2)/4;      %SECONDARY VARIABLE
pause;
s=0; i=1;
while ee >= eps, %CHOOSING OF MIN q
    s=s+1/(4*i*i-1);
    ee=((dt^2)/2)*(1/2-s)
    i=i+1
    pause;
end;
q=i;
u=randn(1,q+1);      %MODELING OF
v=randn(1,q+1);      %MULTIPLE STOCHASTIC
s=u(1,1)*v(1,1);    %INTEGRAL
for i=1:q,
    d(i)=1/(sqrt(4*i*i-1));
s=s+d(i)*(v(1,i)*u(1,i+1)-v(1,i+1)*u(1,i));
end;
ui00=s*dt*0.5    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRAL
pause;
```

### 17.2.2 Программа для моделирования стохастического интеграла (6.88) при $i_1 \neq i_2$ с выбором числа $q$ из условия (6.106)

```
clear;
dt=0.1;          %LENGTH OF INTERVAL OF INTEGRATION
eps=0.0000001   %MEAN-SQUARE ACCURACY
ee=(dt^2)/4;
pause;
s1=0; s2=0; i=1;
while ee >= eps, %CHOOSING OF MIN q
    s1=s1+1/((2*i-1)^2)*((2*i+3)^2)+...
        2/(4*i*i-1);
    s2=s2+((i+2)^2+(i+1)^2)/((2*i+1)*...
        (2*i+5)*((2*i+3)^2));
    ee=((dt^4)/16)*(10/9-s1-s2)
    i=i+1
    pause;
end;
q=i;
u=rand(1,q+3); %MODELING OF MULTIPLE
v=rand(1,q+3); %STOCHASTIC INTEGRAL
s=u(1,1)*v(1,1)+(1/(sqrt(3)))*v(1,1)*u(1,2);
for i=1:q,
    d(i)=1/(sqrt(4*i*i-1));
    f(i)=1/((2*i-1)*(2*i+3));
    h(i)=(2*i+3)*sqrt((2*i+1)*(2*i+5));
    q(i)=(i+2)/h(i);
    r(i)=(i+1)/h(i);
s=s+d(i)*(v(1,i)*u(1,i+1)-v(1,i+1)*u(1,i))+...
    q(i)*v(1,i+1)*u(1,i+3)-r(i)*u(1,i+1)*v(1,i+3)-...
    f(i)*v(1,i+1)*u(1,i+1);
end;
ui01=-s*(dt^2)*0.25 %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRAL
pause;
```

### 17.2.3 Программа для проверки условия (6.106)

```
clear;
s1=0; s2=0; s3=0;
jj=10000;
for i=1:jj,
    s1=s1+2/(4*(i^2)-1);
    s2=s2+1/(((2*i-1)^2)*((2*i+3)^2));
    s3=s3+((i+2)^2+(i+1)^2)/((2*i+1)*...
        (2*i+5)*((2*i+3)^2));
```

```
end;
s=10/9-s1-s2-s3
pause;
```

#### 17.2.4 Программа для проверки формулы (6.147)

```
clear;
s1=0; s2=0; s3=0;
jj=10000;
for i=1:jj,
    s1=s1+1/(i^2);
    s2=s2+1/(i^4);
end;
for i=1:jj,
    for j=1:jj,
        if j-i<0,
            s3=s3+(5*(i^4)+...
                4*(j^4)-3*(i^2)*(j^2))/(((j*i)^2)*((i^2-j^2)^2));
        elseif j-i>0,
            s3=s3+(5*(i^4)+...
                4*(j^4)-3*(i^2)*(j^2))/(((j*i)^2)*((i^2-j^2)^2));
        else
            k=10;
        end;
    end;
end;
s=4/45-(1/(4*pi*pi))*s1-...
    (55/(32*(pi^4)))*s2-(1/(4*(pi^4)))*s3
pause;
```

#### 17.2.5 Программа для совместного численного моделирования стохастических интегралов $I_{0_{T,t}}^{(1)}$ , $I_{1_{T,t}}^{(1)}$ , $I_{00_{T,t}}^{(21)}$ , $I_{000_{T,t}}^{(321)}$ по формулам (6.84), (6.85), (6.87), (6.103)

Числа  $q, q_1$  выбираются из условий (6.231), (6.232) при  $T - t = 0.05020$  и равны соответственно 51 и 2.

```
clear;
dt=0.05020; %LENGTH OF INTERVAL OF INTEGRATION
              %OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
randn('state', 0);
u=randn(1,52); %STANDARD GAUSSIAN
v=randn(1,52); %RANDOM VARIABLES
w=randn(1,3);
              %STOCHASTIC INTEGRALS OF 1-ST MULTIPLICITY
```

```
ui0=sqrt(dt)*u(1,1)
ui1=(dt^(3/2))*(u(1,1)+(1/sqrt(3))*u(1,2))
    %STOCHASTIC INTEGRAL OF 2-ND MULTIPLICITY
s=u(1,1)*v(1,1);
for i=1:51,
    d(i)=1/(sqrt(4*i*i-1));
    s=s+d(i)*(v(1,i)*u(1,i+1)-v(1,i+1)*u(1,i));
end;
ui00=s*dt*0.5
    %STOCHASTIC INTEGRAL OF 3-RD MULTIPLICITY
c000=1/6; c100=-(1/(4*sqrt(3)));
c200=1/(12*sqrt(5)); c110=1/20;
c210=-(1/(4*sqrt(15))); c020=-(1/(6*sqrt(5)));
c120=(1/(4*sqrt(15))); c220=1/84;
c001=1/(4*sqrt(3)); c101=-1/10;
c011=1/20; c211=-(1/(14*sqrt(5)));
c021=-(1/(4*sqrt(15))); c121=(1/(7*sqrt(5)));
c002=(1/(12*sqrt(5))); c202=-(1/42);
c012=(1/(4*sqrt(15))); c112=-(1/(14*sqrt(5))); c022=1/84;
t1=(c000*u(1,1)+c100*u(1,2)+c200*u(1,3))*v(1,1);
t2=(c110*u(1,2)+c210*u(1,3))*v(1,2);
t3=(c020*u(1,1)+c120*u(1,2)+c220*u(1,3))*v(1,3);
tt1=(t1+t2+t3)*w(1,1);
t4=(c001*u(1,1)+c101*u(1,2))*v(1,1);
t5=(c011*u(1,1)+c211*u(1,3))*v(1,2);
t6=(c021*u(1,1)+c121*u(1,2))*v(1,3);
tt2=(t4+t5+t6)*w(1,2);
t7=(c002*u(1,1)+c202*u(1,3))*v(1,1);
t8=(c012*u(1,1)+c112*u(1,2))*v(1,2);
t9=(c022*u(1,1))*v(1,3);
tt3=(t7+t8+t9)*w(1,3);
ui000=(dt^(3/2))*(tt1+tt2+tt3)
pause;
```

## 17.3 MATLAB 7.0-программы к главе 7

### 17.3.1 Программа для численного эксперимента 7.1

```
clear;
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5; %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;        %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
for jj=3:7,
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    randn('state', 0);
    t=t0:dt:tk;
```

```

l=max(size(t))-1;
he=0;
for i=1:20*100,
    x(1)=1; y(1)=1; sw=0;
    for p=1:l,
        u=randn; sw=sw+u;
        %EXACT SOLUTION AND STRONG EULER METHOD
        x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
        y(p+1)=(1+a*dt+b*sqrt(dt)*u)*y(p);
    end; % for p
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL ON jj-TH ITERATION
    e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
    he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
    ee=0;
    for k=(j-1)*100+1:j*100,
        ee=ee+e(k);
    end; % for k
    hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19; hee(jj-2)=he;
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;

```

### 17.3.2 Программа для численного эксперимента 7.2

```

clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;    %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;         %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL

```

```

for jj=3:7,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
    for i=1:20*100,
        x(1)=1; y(1)=1;
        sw=0;
        for p=1:l,
            u=randn;
            sw=sw+u;
        %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRAL
        v=0.5*dt*(u^2-1);
        %EXACT SOLUTION AND STRONG MILSTEIN METHOD
        x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
        y(p+1)=(1+a*dt+b*sqrt(dt)*u+(b^2)*v)*y(p);
        end; %for p
    %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL ON jj-TH ITERATION
    e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
    he=he+e(i);
    end; % for i
    he=he/(20*100);
    for j=1:20,
        ee=0;
        for k=(j-1)*100+1:j*100,
            ee=ee+e(k);
        end; %for k
        hh(j)=ee/100;
    end; % for j
    s=0;
    for j=1:20,
        s=s+(hh(j)-he)^2;
    end; % for j
    s=s/19;
    hee(jj-2)=he;
    he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
    he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj);
    end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;

```

### 17.3.3 Программа для численного эксперимента 7.9

```

clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;    %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;         %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
for jj=4:8,
  dt=1/(2^jj);
  t=t0:dt:tk;
  l=max(size(t))-1;
  he=0;
  for i=1:20*100,
    x(1)=1; y(1)=1;
    sw=0;
    for p=1:l,
      u=randn;
      sw=sw+u;
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
    v1=0.5*dt*(u^2-1);
    v2=(dt^(3/2))*(1/6)*(u^3-3*u);
    v3=(dt^2)*(1/24)*(u^4-6*u^2+3);
    v4=(dt^(5/2))*(1/120)*(u^5-10*(u^3)+15*u);
    v5=(dt^3)*(1/720)*(u^6-15*(u^4)+45*(u^2)-15);
    %EXACT SOLUTION
    x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
    %EXPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 3.0
    y(p+1)=(1+a*dt+b*sqrt(dt)*(1+a*dt+0.5*(a*dt)^2)*u+b^2*...
    (1+a*dt)*v1+(b^3)*(1+a*dt)*v2+0.5*(a*dt)^2+...
    (b^4)*v3+(b^5)*v4+(1/6)*((a*dt)^3)+((a*b)^2)*...
    0.5*(dt^2)*v1+(b^4)*a*dt*v3+(b^6)*v5)*y(p);
    end; % for p
    %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
    e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
    he=he+e(i);
  end; % for i
  he=he/(20*100);
  for j=1:20,
    ee=0;
    for k=(j-1)*100+1:j*100,
      ee=ee+e(k);
    end; % for k
    hh(j)=ee/100;
  end; % for j
  s=0;
  for j=1:20,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
  end; % for j

```

```

s=s/19;
hee(jj-3)=he;
he1(jj-3)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-3)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-3)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt2=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt3=[1/(2^6) 1/(2^6)]; tt4=[1/(2^7) 1/(2^7)];
tt5=[1/(2^8) 1/(2^8)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;

```

### 17.3.4 Программа для численного эксперимента 7.13

```

clear;
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5; %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73; %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
nn=1;
for jj=3:7,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
    for for=1:20*100,
        x(1)=1; y(1)=1; sw=0;
        for p=1:l,
            ksi=randn(1,nn+2); sw=sw+ksi(1,1);
            %EXACT SOLUTION
        x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
            %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
        ui0=sqrt(dt)*ksi(1,1);
        ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
        ui00=0.5*dt*((ksi(1,1))^2-1);
        ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((ksi(1,1))^3-3*ksi(1,1));
        ui0000=(1/24)*(dt^2)*((ksi(1,1))^4-6*((ksi(1,1))^2)+3);
        bbb=(2/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)-...
        (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1)-1;
            %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
        for ij=1:nn,
        bbb=bbb+((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))-(ksi(1,ij)*...
        ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
        end;
    end;

```

```

ui10=-(1/4)*(dt^2)*bbb; ui01=0.5*(dt^2)+ui1*ui0-ui10;
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z=y(p)+sqrt(dt)*b*y(p); u=y(p)-sqrt(dt)*b*y(p);
v=y(p)-3*sqrt(dt)*b*y(p); w=y(p)+3*sqrt(dt)*b*y(p);
r=y(p)+dt*a*y(p); f=y(p)+2*dt*b*y(p);
g=y(p)+0.5*dt*a*y(p); q=y(p)-0.5*dt*a*y(p);
zz=0.5*dt*(0.5*(a*z+a*u-2*a*y(p))+a*y(p)+a*r);
uu=b*y(p)*ui0+(1/sqrt(dt))*((1/48)*b*v-(1/48)*b*w+...
(27/48)*b*z-(27/48)*b*u)*ui00;
vv=(1/dt)*((0.5*a*f-0.5*a*y(p))*(dt*ui0+ui1)-...
(0.5*(b*z+b*u-2*b*y(p))+b*g-b*q)*ui1);
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z11=b*(v+0.5*sqrt(dt)*b*v)-b*(v-0.5*sqrt(dt)*b*v);
z12=b*(w+0.5*sqrt(dt)*b*w)-b*(w-0.5*sqrt(dt)*b*w);
z21=b*(z+0.5*sqrt(dt)*b*z)-b*(z-0.5*sqrt(dt)*b*z);
z22=b*(u+0.5*sqrt(dt)*b*u)-b*(u-0.5*sqrt(dt)*b*u);
zzz=(1/dt)*((1/48)*z11-(1/48)*z12+(27/48)*z21-(27/48)*...
z22)*ui000;
u11=0.5*(b*v+b*(v+2*sqrt(dt)*b*v)-2*b*(v+sqrt(dt)*b*v))+...
b*(v+0.5*dt*a*v)-b*(v-0.5*dt*a*v);
u12=0.5*(b*w+b*(w+2*sqrt(dt)*b*w)-2*b*(w+sqrt(dt)*b*w))+...
b*(w+0.5*dt*a*w)-b*(w-0.5*dt*a*w);
u21=0.5*(b*z+b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-2*b*(z+sqrt(dt)*b*z))+...
b*(z+0.5*dt*a*z)-b*(z-0.5*dt*a*z);
u22=0.5*(b*u+b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-2*b*(u+sqrt(dt)*b*u))+...
b*(u+0.5*dt*a*u)-b*(u-0.5*dt*a*u);
uuu=((1/48)*u11-(1/48)*u12+(27/48)*u21-(27/48)*u22)*...
(ui10-ui01);
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
h11=0.5*a*(v+2*dt*b*v)-0.5*a*v;
h12=0.5*a*(w+2*dt*b*w)-0.5*a*w;
h21=0.5*a*(z+2*dt*b*z)-0.5*a*z;
h22=0.5*a*(u+2*dt*b*u)-0.5*a*u;
www=((1/48)*h11-(1/48)*h12+(27/48)*h21-(27/48)*h22)*...
(ui01+dt*ui00);
uk11=0.5*b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-0.5*b*z;
uk12=0.5*b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-0.5*b*u;
uk21=0.5*b*(y(p)+2*sqrt(dt)*b*y(p))-0.5*b*y(p);
uk22=0.5*b*(g+2*sqrt(dt)*b*g)-0.5*b*g;
uk23=0.5*b*(q+2*sqrt(dt)*b*q)-0.5*b*q;
sss=-(0.5*(uk11+uk12-2*uk21)+uk22-uk23)*ui10;
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
r11=v+0.5*sqrt(dt)*b*v; r12=v-0.5*sqrt(dt)*b*v;
f11=w+0.5*sqrt(dt)*b*w; f12=w-0.5*sqrt(dt)*b*w;
g11=z+0.5*sqrt(dt)*b*z; g12=z-0.5*sqrt(dt)*b*z;
q11=u+0.5*sqrt(dt)*b*u; q12=u-0.5*sqrt(dt)*b*u;
c11=0.5*b*(r11+2*sqrt(dt)*b*r11)-0.5*b*r11-...

```

```
0.5*b*(r12+2*sqrt(dt)*b*r12)+0.5*b*r12;
c12=0.5*b*(f11+2*sqrt(dt)*b*f11)-0.5*b*f11-...
0.5*b*(f12+2*sqrt(dt)*b*f12)+0.5*b*f12;
c21=0.5*b*(g11+2*sqrt(dt)*b*g11)-0.5*b*g11-...
0.5*b*(g12+2*sqrt(dt)*b*g12)+0.5*b*g12;
c22=0.5*b*(q11+2*sqrt(dt)*b*q11)-0.5*b*q11-...
0.5*b*(q12+2*sqrt(dt)*b*q12)+0.5*b*q12;
ccc=((1/48)*c11-(1/48)*c12+(27/48)*c21-(27/48)*c22)*ui0000;
%EXPLICIT 1 STEP FINITE-DIFFERENCE STRONG METHOD OF ORDER 2.0
y(p+1)=y(p)+zz+uu+vv+zzz+(uuu+www+sss+ccc)*...
(1/(dt^(3/2)));
end; % for p
    %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
ee=0;
for k=(j-1)*100+1:j*100,
ee=ee+e(k);
end; % for k
hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19; hee(jj-2)=he;
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;
```

## 17.4 MATLAB 7.0-программы к главе 8

### 17.4.1 Программа для численного эксперимента 8.1 при $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$

```
clear;
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5; %COEFFICIENTS OF SDE
alpha=0.5; %COEFFICIENT OF IMPLICIT STRONG EULER METHOD
for jj=3:7,
randn('state', 0);
dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
st=1.73; %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
he=0;
for i=1:20*100,
x(1)=1; y(1)=1;
sw=0;
for p=1:l,
u=randn;
sw=sw+u;
%EXACT SOLUTION
x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
%IMPLICIT STRONG EULER METHOD
y(p+1)=(1/(1-alpha*a*dt))*(1+(1-alpha)*a*dt+b*...
sqrt(dt)*u)*y(p);
end; % for p
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
ee=0;
for k=(j-1)*100+1:j*100,
ee=ee+e(k);
end; % for k
hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19;
hee(jj-2)=he; he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20); ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)];
```

```

tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;

```

### 17.4.2 Программа для численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$

```

clear;
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION
a=5; b=0.01; %COEFFICIENTS OF SYSTEM OF SDE
st=1.73; %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
for jj=2:6,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
    al1=1; al2=1; %COEFFICIENTS OF IMPLICIT STRONG EULER METHOD
    for i=1:20*100,
        %START DATA
        x1(1)=1; x2(1)=0; H0=[x1(1); x2(1)];
        y1(1)=1; y2(1)=0;
        a1=1/(1+al1*a*dt); a2=1/(1+al2*a*dt);
        a3=al1*al2*(a*dt)^2; a4=(1/(1-a3*a1*a2))*a1;
        sw=0;
        for p=1:l,
            u=randn; sw=sw+u;
            %EXACT SOLUTION
            xx1=expm((-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
            xx2=expm((-2*a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
            F=[xx1 0; 0 xx2]; D=[1 1; 1 -1]; H=0.5*D*F*D*H0;
            x1(p+1)=H(1,1); x2(p+1)=H(2,1);
            %IMPLICIT STRONG EULER METHOD
            y1(p+1)=a4*(y1(p)+((al1*a*a2)*(y2(p)+(1-al2)*...
                a*(y1(p)-y2(p))*dt+b*y2(p)*sqrt(dt)*u)+...
                (1-al1)*a*(y2(p)-y1(p)))*dt+b*y1(p)*sqrt(dt)*u);
            y2(p+1)=a2*(y2(p)+(al2*a*y1(p+1)+(1-al2)*...
                a*(y1(p)-y2(p))*dt+b*y2(p)*sqrt(dt)*u));
            end; % for p
            %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
            e(i)=sqrt((x1(l+1)-y1(l+1))^2+(x2(l+1)-y2(l+1))^2);
            he=he+e(i);
            end; % for i

```

```
he=he/(20*100);
for j=1:20,
    ee=0;
    for k=(j-1)*100+1:j*100,
        ee=ee+e(k);
    end; % for k
    hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19; hee(jj-1)=log(he);
he1(jj-1)=log(he)-st*sqrt(s/20);
he2(jj-1)=log(he)+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-1)=log(1/(2^jj));
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[log(1/(2^2)) log(1/(2^2))];
tt2=[log(1/(2^3)) log(1/(2^3))];
tt3=[log(1/(2^4)) log(1/(2^4))];
tt4=[log(1/(2^5)) log(1/(2^5))];
tt5=[log(1/(2^6)) log(1/(2^6))];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;
```

#### 17.4.3 Программа для численного эксперимента 8.9

```
clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;         %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
for jj=4:8,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
    for i=1:20*100,
        x(1)=1; y(1)=1;
        sw=0;
        for p=1:l,
            %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
        u=randn;
        ui0=sqrt(dt)*u;
```

```

ui00=0.5*dt*(u^2-1);
ui000=(dt^(3/2))*(1/6)*(u^3-3*u);
ui0000=(dt^2)*(1/24)*(u^4-6*(u^2)+3);
ui00000=(dt^(5/2))*(1/120)*(u^5-10*(u^3)+15*u);
ui000000=(dt^3)*(1/720)*(u^6-15*(u^4)+45*(u^2)-15);
sw=sw+u;
    %IMPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 3.0
y(p+1)=(1/(1-0.5*a*dt))*(y(p)+0.5*a*dt*y(p)+b*ui0*y(p)+...
(b^2)*y(p)*ui00+0.5*a*b*y(p)*dt*ui0+(b^3)*y(p)*...
ui000+0.5*a*(b^2)*y(p)*dt*ui00+(b^4)*y(p)*ui0000+...
0.5*(b^3)*a*y(p)*dt*ui000+(b^5)*y(p)*ui0000-...
(1/12)*((dt*a)^3)*y(p)+(b^4)*a*0.5*dt*ui0000*y(p)+...
(b^6)*y(p)*ui000000);
    end; % for p
    %EXACT SOLUTION
x(l+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
    %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
    ee=0;
    for k=(j-1)*100+1:j*100,
        ee=ee+e(k);
    end; % for k
    hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19;
hee(jj-3)=he;
he1(jj-3)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-3)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-3)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt2=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt3=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt4=[1/(2^7) 1/(2^7)];
tt5=[1/(2^8) 1/(2^8)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);

```

```
pause;
```

#### 17.4.4 Программа для численного эксперимента 8.14

```
clear;
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5; %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73; %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
nn=1;
for jj=3:7,
randn('state', 0);
dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
t=t0:dt:tk;
randn('state', 0);
l=max(size(t))-1;
he=0;
for i=1:20*100,
x(1)=1; y(1)=1;
sw=0;
for p=1:l,
ksi=randn(1,nn+2);
sw=sw+ksi(1,1);
%EXACT SOLUTION
x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
%MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
ui0=sqrt(dt)*ksi(1,1);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
ui00=0.5*dt*((ksi(1,1))^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((ksi(1,1))^3-3*ksi(1,1));
ui0000=(1/24)*(dt^2)*((ksi(1,1))^4-6*((ksi(1,1))^2)+3);
bbb=(2/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)-...
(1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1)-1;
%MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
for ij=1:nn,
bbb=bbb+((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))-(ksi(1,ij)*...
ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
end; % for ij
ui10=-(1/4)*(dt^2)*bbb;
ui01=0.5*(dt^2)+ui1*ui0-ui10;
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z=y(p)+sqrt(dt)*b*y(p); u=y(p)-sqrt(dt)*b*y(p);
v=y(p)-3*sqrt(dt)*b*y(p); w=y(p)+3*sqrt(dt)*b*y(p);
r=y(p)+dt*a*y(p); f=y(p)+2*dt*b*y(p);
g=y(p)+0.5*dt*a*y(p); q=y(p)-0.5*dt*a*y(p);
uu=b*y(p)*ui0+(1/sqrt(dt))*((1/48)*b*v-(1/48)*b*w+...
(27/48)*b*z-(27/48)*b*u)*ui00;
```

```

vv=(1/dt)*((0.5*a*f-0.5*a*y(p))*(0.5*dt*ui0+ui1)-...
(0.5*(b*z+b*u-2*b*y(p))+b*g-b*q)*ui1);
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z11=b*(v+0.5*sqrt(dt)*b*v)-b*(v-0.5*sqrt(dt)*b*v);
z12=b*(w+0.5*sqrt(dt)*b*w)-b*(w-0.5*sqrt(dt)*b*w);
z21=b*(z+0.5*sqrt(dt)*b*z)-b*(z-0.5*sqrt(dt)*b*z);
z22=b*(u+0.5*sqrt(dt)*b*u)-b*(u-0.5*sqrt(dt)*b*u);
zzz=(1/dt)*((1/48)*z11-(1/48)*z12+(27/48)*z21-...
(27/48)*z22)*ui000;
u11=0.5*(b*v+b*(v+2*sqrt(dt)*b*v)-2*b*(v+sqrt(dt)*b*v))+...
b*(v+0.5*dt*a*v)-b*(v-0.5*dt*a*v);
u12=0.5*(b*w+b*(w+2*sqrt(dt)*b*w)-2*b*(w+sqrt(dt)*b*w))+...
b*(w+0.5*dt*a*w)-b*(w-0.5*dt*a*w);
u21=0.5*(b*z+b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-2*b*(z+sqrt(dt)*b*z))+...
b*(z+0.5*dt*a*z)-b*(z-0.5*dt*a*z);
u22=0.5*(b*u+b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-2*b*(u+sqrt(dt)*b*u))+...
b*(u+0.5*dt*a*u)-b*(u-0.5*dt*a*u);
uuu=((1/48)*u11-(1/48)*u12+(27/48)*u21-(27/48)*u22)*...
(ui10-ui01);
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
h11=0.5*a*(v+2*dt*b*v)-0.5*a*v;
h12=0.5*a*(w+2*dt*b*w)-0.5*a*w;
h21=0.5*a*(z+2*dt*b*z)-0.5*a*z;
h22=0.5*a*(u+2*dt*b*u)-0.5*a*u;
www=((1/48)*h11-(1/48)*h12+(27/48)*h21-(27/48)*h22)*...
(ui01+0.5*dt*ui00);
uk11=0.5*b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-0.5*b*z;
uk12=0.5*b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-0.5*b*u;
uk21=0.5*b*(y(p)+2*sqrt(dt)*b*y(p))-0.5*b*y(p);
uk22=0.5*b*(g+2*sqrt(dt)*b*g)-0.5*b*g;
uk23=0.5*b*(q+2*sqrt(dt)*b*q)-0.5*b*q;
sss=-(0.5*(uk11+uk12-2*uk21)+uk22-uk23)*ui10;
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
r11=v+0.5*sqrt(dt)*b*v; r12=v-0.5*sqrt(dt)*b*v;
f11=w+0.5*sqrt(dt)*b*w; f12=w-0.5*sqrt(dt)*b*w;
g11=z+0.5*sqrt(dt)*b*z; g12=z-0.5*sqrt(dt)*b*z;
q11=u+0.5*sqrt(dt)*b*u; q12=u-0.5*sqrt(dt)*b*u;
c11=0.5*b*(r11+2*sqrt(dt)*b*r11)-0.5*b*r11-...
0.5*b*(r12+2*sqrt(dt)*b*r12)+0.5*b*r12;
c12=0.5*b*(f11+2*sqrt(dt)*b*f11)-0.5*b*f11-...
0.5*b*(f12+2*sqrt(dt)*b*f12)+0.5*b*f12;
c21=0.5*b*(g11+2*sqrt(dt)*b*g11)-0.5*b*g11-...
0.5*b*(g12+2*sqrt(dt)*b*g12)+0.5*b*g12;
c22=0.5*b*(q11+2*sqrt(dt)*b*q11)-0.5*b*q11-...
0.5*b*(q12+2*sqrt(dt)*b*q12)+0.5*b*q12;
ccc=((1/48)*c11-(1/48)*c12+(27/48)*c21-(27/48)*c22)*ui0000;
%IMPLISIT 1 STEP FINITE-DIFFERENCE

```

```
%STRONG NUMERICAL METHOD OF ORDER 2.0
y(p+1)=(1/(1-0.5*a*dt))*(y(p)+0.5*a*y(p)*dt+uu+vv+zzz+...
(uuu+www+sss+ccc)*(1/(dt^(3/2)))) ;
end; % for p
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=abs(x(1+1)-y(1+1));
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
ee=0;
for k=(j-1)*100+1:j*100,
ee=ee+e(k);
end; % for k
hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19;
hee(jj-2)=he;
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-2)=dt;
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4, ...
tt5,e5,ttt,hee);
pause;
```

## 17.5 MATLAB 7.0-программы к главе 9

### 17.5.1 Программа для численного эксперимента 9.3

```
clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;    %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;         %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
for jj=3:7,
randn('state', 0);
```

```
dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
he=0;
for i=1:20*100,
    x(1)=1; y(1)=1;
%1-ST STEP OF EXPLICIT 2 STEP STRONG METHOD OF ORDER 2.0
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
    w=randn;
    ui0=sqrt(dt)*w;
    ui00=0.5*dt*(w^2-1);
    ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(w^3-3*w);
    vv1(1)=a*b*ui0;
    v1(1)=b*ui0+(b^2)*ui00+a*b*dt*ui0+(b^3)*ui000;
    y(2)=y(1)+a*y(1)*dt+0.5*(a^2)*(dt^2)*y(1)+v1(1)*y(1);
    sw=w;
    for p=2:l,
        %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON p-TH STEP
        w1=randn;
        ui0=sqrt(dt)*w1;
        ui00=0.5*dt*(w1^2-1);
        ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(w1^3-3*w1);
        ui0000=(1/24)*(dt^2)*(w1^4-6*(w1^2)+3);
        v1(p)=b*ui0+(b^2)*ui00+a*b*dt*ui0+(b^3)*ui000+...
            a*(b^2)*dt*ui00+(b^4)*ui000;
        vv1(p)=a*b*ui0+a*b*b*ui00;
        sw=sw+w1;
    end; % for p
    for p=2:l,
        %p-TH STEP OF EXPLICIT 2 STEP STRONG METHOD OF ORDER 2.0
        y(p+1)=y(p-1)+2*dt*a*y(p)-dt*vv1(p-1)*y(p-1)+...
            v1(p)*y(p)+v1(p-1)*y(p-1);
    end; % for p
    %EXACT SOLUTION
    x(l+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
    %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
    e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
    he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
    ee=0;
    for k=(j-1)*100+1:j*100,
        ee=ee+e(k);
    end; % for k
    hh(j)=ee/100;
end; % for j
```

```

s=0;
for j=1:20,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19;
hee(jj-2)=he;
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;

```

### 17.5.2 Программа для численного эксперимента 9.11

```

clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;    %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;         %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
nn=1;
for jj=3:7,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
    for i=1:20*100,
        x(1)=1; y(1)=1; yy0=y(1);
        %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON 1-ST STEP
        ksi=randn(1,nn+2);
        sw=ksi(1,1);
        ui0=sqrt(dt)*ksi(1,1);
        ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
        ui00=0.5*dt*((ksi(1,1))^2-1);
        ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((ksi(1,1))^3-3*ksi(1,1));
        ui0000=(1/24)*(dt^2)*((ksi(1,1))^4-6*((ksi(1,1))^2)+3);
        bbb=(2/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)-...
            (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1)-1;
        %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON 1-ST STEP
        for ij=1:nn,
            bbb=bbb+((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))-(ksi(1,ij)*...

```

```

ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
end; % for ij
ui10=-(1/4)*(dt^2)*bbb;
ui01=0.5*(dt^2)+ui1*ui0-ui10;
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON 1-ST STEP
z=yy0+sqrt(dt)*b*yy0; u=yy0-sqrt(dt)*b*yy0;
v=yy0-3*sqrt(dt)*b*yy0; w=yy0+3*sqrt(dt)*b*yy0;
r=yy0+dt*a*yy0; f=yy0+2*dt*b*yy0;
g=yy0+0.5*dt*a*yy0; q=yy0-0.5*dt*a*yy0;
uu=b*yy0*ui0+(1/sqrt(dt))*((1/48)*b*v-(1/48)*b*w+...
(27/48)*b*z-(27/48)*b*u)*ui00;
vv=(1/dt)*((0.5*a*f-0.5*a*yy0)*(0.5*dt*ui0+ui1)-...
(0.5*(b*z+b*u-2*b*yy0)+b*g-b*q)*ui1);
z11=b*(v+0.5*sqrt(dt)*b*v)-b*(v-0.5*sqrt(dt)*b*v);
z12=b*(w+0.5*sqrt(dt)*b*w)-b*(w-0.5*sqrt(dt)*b*w);
z21=b*(z+0.5*sqrt(dt)*b*z)-b*(z-0.5*sqrt(dt)*b*z);
z22=b*(u+0.5*sqrt(dt)*b*u)-b*(u-0.5*sqrt(dt)*b*u);
zzz=(1/dt)*((1/48)*z11-(1/48)*z12+(27/48)*z21-(27/48)*...
z22)*ui000;
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON 1-ST STEP
u11=0.5*(b*v+b*(v+2*sqrt(dt)*b*v)-2*b*(v+sqrt(dt)*b*v))+...
b*(v+0.5*dt*a*v)-b*(v-0.5*dt*a*v);
u12=0.5*(b*w+b*(w+2*sqrt(dt)*b*w)-2*b*(w+sqrt(dt)*b*w))+...
b*(w+0.5*dt*a*w)-b*(w-0.5*dt*a*w);
u21=0.5*(b*z+b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-2*b*(z+sqrt(dt)*b*z))+...
b*(z+0.5*dt*a*z)-b*(z-0.5*dt*a*z);
u22=0.5*(b*u+b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-2*b*(u+sqrt(dt)*b*u))+...
b*(u+0.5*dt*a*u)-b*(u-0.5*dt*a*u);
uuu=((1/48)*u11-(1/48)*u12+(27/48)*u21-(27/48)*u22)*...
(ui10-ui01);
h11=0.5*a*(v+2*dt*b*v)-0.5*a*v;
h12=0.5*a*(w+2*dt*b*w)-0.5*a*w;
h21=0.5*a*(z+2*dt*b*z)-0.5*a*z;
h22=0.5*a*(u+2*dt*b*u)-0.5*a*u;
www=((1/48)*h11-(1/48)*h12+(27/48)*h21-(27/48)*h22)*...
(ui01+0.5*dt*ui00);
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON 1-ST STEP
uk11=0.5*b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-0.5*b*z;
uk12=0.5*b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-0.5*b*u;
uk21=0.5*b*(yy0+2*sqrt(dt)*b*yy0)-0.5*b*yy0;
uk22=0.5*b*(g+2*sqrt(dt)*b*g)-0.5*b*g;
uk23=0.5*b*(q+2*sqrt(dt)*b*q)-0.5*b*q;
sss=-(0.5*(uk11+uk12-2*uk21)+uk22-uk23)*ui10;
r11=v+0.5*sqrt(dt)*b*v; r12=v-0.5*sqrt(dt)*b*v;
f11=w+0.5*sqrt(dt)*b*w; f12=w-0.5*sqrt(dt)*b*w;
g11=z+0.5*sqrt(dt)*b*z; g12=z-0.5*sqrt(dt)*b*z;
q11=u+0.5*sqrt(dt)*b*u; q12=u-0.5*sqrt(dt)*b*u;

```

```

c11=0.5*b*(r11+2*sqrt(dt)*b*r11)-0.5*b*r11-...
    0.5*b*(r12+2*sqrt(dt)*b*r12)+0.5*b*r12;
c12=0.5*b*(f11+2*sqrt(dt)*b*f11)-0.5*b*f11-...
    0.5*b*(f12+2*sqrt(dt)*b*f12)+0.5*b*f12;
c21=0.5*b*(g11+2*sqrt(dt)*b*g11)-0.5*b*g11-...
    0.5*b*(g12+2*sqrt(dt)*b*g12)+0.5*b*g12;
c22=0.5*b*(q11+2*sqrt(dt)*b*q11)-0.5*b*q11-...
    0.5*b*(q12+2*sqrt(dt)*b*q12)+0.5*b*q12;
ccc=((1/48)*c11-(1/48)*c12+(27/48)*c21-(27/48)*...
    c22)*ui0000;
vvv0=uu+vv+zzz+(uuu+www+sss+ccc)*(1/(dt^(3/2)));
    %1-ST STEP OF IMPLICIT 2 STEP FINITE-
    %DIFFERENCE STRONG METHOD OF ORDER 2.0
yy1=(1/(1-0.5*a*dt))*(yy0+0.5*a*yy0*dt+vvv0);
for p=2:1,
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON p-TH STEP
ksi=randn(1,nn+2);
sw=sw+ksi(1,1);
ui0=sqrt(dt)*ksi(1,1);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
ui00=0.5*dt*((ksi(1,1))^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((ksi(1,1))^3-3*ksi(1,1));
ui0000=(1/24)*(dt^2)*((ksi(1,1))^4-6*((ksi(1,1))^2)+3);
bbb=(2/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)-...
    (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1)-1;
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON p-TH STEP
for ij=1:nn,
    bbb=bbb+((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))-(ksi(1,ij)*...
        ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
end; % for ij
ui10=-(1/4)*(dt^2)*bbb;
ui01=0.5*(dt^2)+ui1*ui0-ui10;
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON p-TH STEP
z=yy1+sqrt(dt)*b*yy1;      u=yy1-sqrt(dt)*b*yy1;
v=yy1-3*sqrt(dt)*b*yy1;    w=yy1+3*sqrt(dt)*b*yy1;
r=yy1+dt*a*yy1;           f=yy1+2*dt*b*yy1;
g=yy1+0.5*dt*a*yy1;       q=yy1-0.5*dt*a*yy1;
uu=b*yy1*ui0+(1/sqrt(dt))*((1/48)*b*v-(1/48)*b*w+...
    (27/48)*b*z-(27/48)*b*u)*ui00;
vv=(1/dt)*((0.5*a*f-0.5*a*yy1)*(0.5*dt*ui0+ui1)-...
    (0.5*(b*z+b*u-2*b*yy1)+b*g-b*q)*ui1);
z11=b*(v+0.5*sqrt(dt)*b*v)-b*(v-0.5*sqrt(dt)*b*v);
z12=b*(w+0.5*sqrt(dt)*b*w)-b*(w-0.5*sqrt(dt)*b*w);
z21=b*(z+0.5*sqrt(dt)*b*z)-b*(z-0.5*sqrt(dt)*b*z);
z22=b*(u+0.5*sqrt(dt)*b*u)-b*(u-0.5*sqrt(dt)*b*u);
zzz=(1/dt)*((1/48)*z11-(1/48)*z12+(27/48)*z21-...
    (27/48)*z22)*ui000;

```

```
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON p-TH STEP
u11=0.5*(b*v+b*(v+2*sqrt(dt)*b*v)-2*b*(v+sqrt(dt)*b*v))+...
    b*(v+0.5*dt*a*v)-b*(v-0.5*dt*a*v);
u12=0.5*(b*w+b*(w+2*sqrt(dt)*b*w)-2*b*(w+sqrt(dt)*b*w))+...
    b*(w+0.5*dt*a*w)-b*(w-0.5*dt*a*w);
u21=0.5*(b*z+b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-2*b*(z+sqrt(dt)*b*z))+...
    b*(z+0.5*dt*a*z)-b*(z-0.5*dt*a*z);
u22=0.5*(b*u+b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-2*b*(u+sqrt(dt)*b*u))+...
    b*(u+0.5*dt*a*u)-b*(u-0.5*dt*a*u);
uuu=((1/48)*u11-(1/48)*u12+(27/48)*u21-(27/48)*u22)*...
    (ui10-ui01);
h11=0.5*a*(v+2*dt*b*v)-0.5*a*v;
h12=0.5*a*(w+2*dt*b*w)-0.5*a*w;
h21=0.5*a*(z+2*dt*b*z)-0.5*a*z;
h22=0.5*a*(u+2*dt*b*u)-0.5*a*u;
www=((1/48)*h11-(1/48)*h12+(27/48)*h21-(27/48)*h22)*...
    (ui01+0.5*dt*ui00);

%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON p-TH STEP
uk11=0.5*b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-0.5*b*z;
uk12=0.5*b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-0.5*b*u;
uk21=0.5*b*(yy1+2*sqrt(dt)*b*yy1)-0.5*b*yy1;
uk22=0.5*b*(g+2*sqrt(dt)*b*g)-0.5*b*g;
uk23=0.5*b*(q+2*sqrt(dt)*b*q)-0.5*b*q;
sss=-(0.5*(uk11+uk12-2*uk21)+uk22-uk23)*ui10;
r11=v+0.5*sqrt(dt)*b*v; r12=v-0.5*sqrt(dt)*b*v;
f11=w+0.5*sqrt(dt)*b*w; f12=w-0.5*sqrt(dt)*b*w;
g11=z+0.5*sqrt(dt)*b*z; g12=z-0.5*sqrt(dt)*b*z;
q11=u+0.5*sqrt(dt)*b*u; q12=u-0.5*sqrt(dt)*b*u;
c11=0.5*b*(r11+2*sqrt(dt)*b*r11)-0.5*b*r11-0.5*b*...
    (r12+2*sqrt(dt)*b*r12)+0.5*b*r12;
c12=0.5*b*(f11+2*sqrt(dt)*b*f11)-0.5*b*f11-0.5*b*...
    (f12+2*sqrt(dt)*b*f12)+0.5*b*f12;
c21=0.5*b*(g11+2*sqrt(dt)*b*g11)-0.5*b*g11-0.5*b*...
    (g12+2*sqrt(dt)*b*g12)+0.5*b*g12;
c22=0.5*b*(q11+2*sqrt(dt)*b*q11)-0.5*b*q11-0.5*b*...
    (q12+2*sqrt(dt)*b*q12)+0.5*b*q12;
ccc=((1/48)*c11-(1/48)*c12+(27/48)*c21-(27/48)*c22)*...
    ui0000;
vvv1=uu+vv+zzz+(uuu+www+sss+ccc)*(1/(dt^(3/2)));
    %p-TH STEP OF IMPLICIT 2 STEP FINITE-
    %DIFFERENCE STRONG METHOD OF ORDER 2.0
yy2=(1/(1-0.5*a*dt))*(yy0+0.5*dt*(2*a*yy1+a*yy0)+...
    vvv0+vvv1);
    yy0=yy1; vvv0=vvv1; yy1=yy2;
end; % for p
y(l+1)=yy2;
    %EXACT SOLUTION
```

```
x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw;
    %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
    ee=0;
    for k=(j-1)*100+1:j*100,
        ee=ee+e(k);
    end; % for k
    hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19;
hee(jj-2)=he;
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;
```

### 17.5.3 Программа для численного эксперимента 9.12 (кривая 3)

```
clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;    %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;         %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
for jj=3:7,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
    for i=1:20*100,
        x(1)=1; y(1)=1;
        %1-ST STEP OF 3 STEP STRONG METHOD
```

```
%MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
w=randn;
ui0=sqrt(dt)*w;
ui00=0.5*dt*(w^2-1);
v1(1)=b*ui0+(b^2)*ui00;
y(2)=y(1)+a*y(1)*dt+v1(1)*y(1);
    %2-ND STEP OF 3 STEP STRONG METHOD
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
w22=randn;
ui0=sqrt(dt)*w22;
ui00=0.5*dt*((w22)^2-1);
v1(2)=b*ui0+(b^2)*ui00;
y(3)=y(2)+a*y(2)*dt+v1(2)*y(2);

sw=w+w22;
for p=3:1,
    %SECONDARY CALCULATING
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
    w1=randn;
    ui0=sqrt(dt)*w1;
    ui00=0.5*dt*(w1^2-1);
    v1(p)=b*ui0+(b^2)*ui00;
    sw=sw+w1;
end; % for p
for p=3:1,
    %p-TH STEP OF 3 STEP STRONG METHOD
y(p+1)=(1/(1-(3/4)*dt*a))*(y(p-2)+dt*a*(3/4)*(y(p)+...
    y(p-1)+y(p-2))+v1(p-1)*y(p-1)+v1(p-2)*y(p-2)...
    +v1(p)*y(p));
end; % for p
    %EXACT SOLUTION
x(1+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
    %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=abs(x(1+1)-y(1+1));
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
    ee=0;
    for k=(j-1)*100+1:j*100,
        ee=ee+e(k);
    end; % for k
    hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
```

```

    end; % for j
s=s/19;
hee(jj-2)=he;
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; %for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;

```

#### 17.5.4 Программа для построения кривой 1 на рис. 9.14

```

clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;    %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;         %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
for jj=3:7,
    randn('state',0);
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z1=1+0.5*sqrt(dt)*b;      z2=1-0.5*sqrt(dt)*b;
z3=1+2*sqrt(dt)*b;      z4=1+sqrt(dt)*b;
z5=1+0.5*dt*a;          z6=1-0.5*dt*a;      z7=1+2*dt*b;
he=0;
for i=1:20*100,
    x(1)=1; y(1)=1;
    %1-ST STEP OF 3 STEP METHOD
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
w=randn;
w10=randn;
ui0=sqrt(dt)*w;
ui00=0.5*dt*(w^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(w^3-3*w);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(w+(1/sqrt(3))*w10);
vv1(1)=(1/dt)*(0.5*a*z7-0.5*a)*ui0;
v1(1)=b*ui0+(dt^(-0.5))*(b*z1-b*z2)*ui00+(1/dt)*...
((0.5*a*z7-0.5*a)*(dt*ui0+ui1)-(0.5*(b+b*z3-...
2*b*z4)+b*z5-b*z6)*ui1)+(1/dt)*(0.5*b*(z1+2*...
sqrt(dt)*b*z1)-0.5*b*z1-0.5*b*(z2+2*sqrt(dt)*...

```

```

b*z2)+0.5*b*z2)*ui000;
y(2)=y(1)+a*y(1)*dt+0.5*(0.5*a+0.5*a*z3-a*z4+...
a*z5-a*z6)*(dt)*y(1)+v1(1)*y(1);
%2-ND STEP OF 3 STEP METHOD
%MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
w22=randn;
w2210=randn;
ui0=sqrt(dt)*w22;
ui00=0.5*dt*((w22)^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((w22)^3-3*w22);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(w22+(1/sqrt(3))*w2210);
vv1(2)=(1/dt)*(0.5*a*z7-0.5*a)*ui0;
v1(2)=b*ui0+(dt^(-0.5))*(b*z1-b*z2)*ui00+(1/dt)*...
((0.5*a*z7-0.5*a)*(dt*ui0+ui1)-(0.5*(b+b*z3-...
2*b*z4)+b*z5-b*z6)*ui1)+(1/dt)*(0.5*b*(z1+2*...
sqrt(dt)*b*z1)-0.5*b*z1-0.5*b*(z2+2*sqrt(dt)*...
b*z2)+0.5*b*z2)*ui00;
y(3)=y(2)+a*y(2)*dt+0.5*(0.5*a+0.5*a*z3-a*z4+a*...
z5-a*z6)*(dt)*y(2)+v1(2)*y(2);
sw=w+w22;
for p=3:1,
%SECONDARY CALCULATIONS FOR p-TH STEP OF 3 STEP STRONG METHOD
%MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
w1=randn;
w2=randn;
ui0=sqrt(dt)*w1;
ui00=0.5*dt*(w1^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(w1^3-3*w1);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(w1+(1/sqrt(3))*w2);
vv1(p)=(1/dt)*(0.5*a*z7-0.5*a)*ui0;
v1(p)=b*ui0+(dt^(-0.5))*(b*z1-b*z2)*ui00+(1/dt)*...
((0.5*a*z7-0.5*a)*(dt*ui0+ui1)-(0.5*(b+b*z3-...
2*b*z4)+b*z5-b*z6)*ui1)+(1/dt)*(0.5*b*(z1+2*...
sqrt(dt)*b*z1)-0.5*b*z1-0.5*b*(z2+2*sqrt(dt)*...
b*z2)+0.5*b*z2)*ui00;
sw=sw+w1;
end; % for p
for p=3:1,
%p-TH STEP OF 3 STEP STRONG METHOD
y(p+1)=(1/(1-dt*a))*(y(p-2)+dt*a*(0.5*y(p)+0.5*y(p-1)+...
y(p-2))+v1(p-2)*y(p-2)+v1(p-1)*y(p-1)+v1(p)*...
y(p)-dt*(vv1(p)*y(p)+(1/2)*vv1(p-1)*y(p-1)));
end; % for p
%EXACT SOLUTION
x(l+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));

```

```
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(20*100);
for j=1:20,
ee=0;
for k=(j-1)*100+1:j*100,
ee=ee+e(k);
end; % for k
hh(j)=ee/100;
end; % for j
s=0;
for j=1:20,
s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/19;
hee(jj-2)=he;
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;
```

## 17.6 MATLAB 7.0-программы к главе 10

### 17.6.1 Программа для численного эксперимента 10.1 при $N = 500$ , $M = 100$

```
clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.05;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
for jj=2:6,
randn('state', 0);
dt=1/(2^jj);    %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
x(1)=1;
%EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
xxx=x(1)*expm(a*tk);
```

```

he=0;
for i=1:100*500,
y(1)=1;
for p=1:l,
u=randn;
%WEAK EULER METHOD
y(p+1)=(1+a*dt+b*sqrt(dt)*u)*y(p);
end; % for p
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=y(l+1);
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(100*500)-xxx;
for j=1:100,
ee=0;
for k=(j-1)*500+1:j*500,
ee=ee+e(k);
end;
hh(j)=ee/500-xxx;
end; % for j
s=0;
for j=1:100,
s=s+(hh(j)-he)^2;
end; %for j
s=s/99;
hee(jj-1)=he;
heee(jj-1)=abs(he);
he1(jj-1)=he-st*sqrt(s/100);
he2(jj-1)=he+st*sqrt(s/100);
ttt(jj-1)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^2) 1/(2^2)]; tt2=[1/(2^3) 1/(2^3)];
tt3=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt4=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt5=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,heee,ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5);
pause;

```

### 17.6.2 Программа для численного эксперимента 10.2 при $N = 500$ , $M = 200$

```

clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.05;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;

```

```
for jj=3:6,
randn('state', 0);
dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
x(1)=1;
xxx=x(1)*expm(a*tk); %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
he=0;
for i=1:200*500,
y(1)=1;
for p=1:l,
u=randn;
%EXPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 2.0
y(p+1)=(1+a*dt+0.5*((a*dt)^2)+b*sqrt(dt)*u+0.5*(b^2)*...
dt*(u^2-1)+a*b*(dt^(3/2))*u)*y(p);
end;
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=y(l+1); he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(200*500)-xxx;
for j=1:200,
ee=0;
for k=(j-1)*500+1:j*500,
ee=ee+e(k);
end; % for k
hh(j)=ee/500-xxx;
end; % for j
s=0;
for j=1:200,
s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/199; hee(jj-2)=he;
heee(jj-2)=abs(he);
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/200);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/200);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)];
e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)];
e4=[he1(4) he2(4)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)];
tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,heee,ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4);
pause;
```

### 17.6.3 Программа для численного эксперимента 10.4 при $N = 500$ , $M = 100$ , $b = 0.01$

```

clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.01;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
for jj=1:7,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^(jj-1)); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    x(1)=1;
        %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
    xxx=x(1)*expm(a*tk);
    he=0;
    for i=1:100*500,
        y(1)=1;
        for p=1:l,
            %MODELING OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
            u=randn;
            ui0=sqrt(dt)*u;
            ui00=0.5*dt*(u^2-1);
            ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(u^3-3*u);
            ui0000=(1/24)*(dt^2)*(u^4-6*(u^2)+3);
            %EXPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 4.0
            zz1=1+a*dt+0.5*((a*dt)^2)+(1/6)*((a*dt)^3)+...
                b*ui0+(b^2)*ui00+a*b*dt*ui0+(b^3)*ui000+...
                0.5*(a^2)*b*(dt^2)*ui0+(b^2)*a*dt*ui00;
            zz2=(1/24)*((a*dt)^4)+(1/6)*(dt^3)*(a^3)*b*...
                ui0+0.5*((dt*b*a)^2)*ui00+dt*(b^3)*a*...
                ui000+(b^4)*ui0000;
            y(p+1)=(zz1+zz2)*y(p);
        end;
        %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
        e(i)=y(l+1);
        he=he+e(i);
    end;
    he=he/(100*500)-xxx;
    for j=1:100,
        ee=0;
        for k=(j-1)*500+1:j*500,
            ee=ee+e(k);
        end;
        hh(j)=ee/500-xxx;
    end;
    s=0;

```

```
for j=1:100,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end;
s=s/99;
hee(jj)=abs(he);
heee(jj)=he;
he1(jj)=he-st*sqrt(s/100);
he2(jj)=he+st*sqrt(s/100);
ttt(jj)=1/(2^(jj-1));
end;
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)]; e6=[he1(6) he2(6)];
e7=[he1(7) he2(7)];
tt1=[1/(2^0) 1/(2^0)]; tt2=[1/(2^1) 1/(2^1)];
tt3=[1/(2^2) 1/(2^2)]; tt4=[1/(2^3) 1/(2^3)];
tt5=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt6=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt7=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,hee,ttt,heee,tt1,e1,tt2,e2,tt3, ...
      e3,tt4,e4,tt5,e5,tt6,e6,tt7,e7);
pause;
```

#### 17.6.4 Программа для численного эксперимента 10.7 при $N = 500$ , $M = 200$

```
clear;
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.05; %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
for jj=3:6,
randn('state', 0);
dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
x(1)=1;
%EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
xxx=x(1)*expm(a*tk);
he=0;
for i=1:200*500,
y(1)=1;
for p=1:l,
u=randn;
%CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
yy=y(p)+a*y(p)*dt;
yy1=y(p)+b*y(p)*sqrt(dt); yy2=y(p)-b*y(p)*sqrt(dt);
%EXPLICIT WEAK FINITE-DIFFERENCE METHOD OF ORDER 2.0
```

```

y(p+1)=y(p)+0.5*(a*y(p)+a*yy)*dt+0.25*dt*u*...
    (a*yy1-a*yy2)+0.25*(b*yy1+b*yy2+2*b*...
    yy)*sqrt(dt)*u+0.25*dt*(a*yy1+a*yy2-...
    2*a*y(p))+(1/(4*sqrt(dt)))*(b*yy1-b*...
    yy2)*dt*(u^2-1);
end; % for p
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=y(l+1);
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(200*500)-xxx;
for j=1:200,
ee=0;
for k=(j-1)*500+1:j*500,
ee=ee+e(k);
end; % for k
hh(j)=ee/500-xxx;
end; % for j
s=0;
for j=1:200,
s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/199;
hee(jj-2)=he;
heee(jj-2)=abs(he);
he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/200);
he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/200);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,heee,ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4);
pause;

```

### 17.6.5 Программа для численного эксперимента 10.9 при $N = 500$ , $M = 200$

```

clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=5; b=0.01;     %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
for jj=3:6,
randn('state', 0);
dt=1/(2^jj);   %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION

```

```
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
he1=0; he2=0;
%EXPECTATIONS OF COMPONENTS OF EXACT SOLUTION OF SDE
xxx1=0.5*(1+expm(-2*a)); xxx2=0.5*(1-expm(-2*a));
y1(1)=1; y2(1)=0;
for i=1:200*500,
    for p=1:l,
        u=randn;      %DISCRETE
        if u>0,       %RANDOM
            ksi=1;     %VARIABLE
        elseif u<0,   %WITH
            ksi=-1;    %DISTRIBUTION:
        else          %P(ksi=-1)=0.5,
            ksi=0;    %P(ksi=1)=0.5
        end;
        a1=1/(1+(a+b^2)*dt-b*ksi*sqrt(dt));
            %IMPLICIT WEAK EULER METHOD
        y2(p+1)=(1/(1-(a*dt*a1)^2))*a1*(y2(p)+a*dt*a1*y1(p));
        y1(p+1)=a1*(y1(p)+a*dt*y2(p+1));
        end;
            %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
        e1(i)=y1(l+1); e2(i)=y2(l+1);
        he1=he1+e1(i); he2=he2+e2(i);
    end;
    he1=he1/(200*500)-xxx1; he2=he2/(200*500)-xxx2;
    hhh=sqrt(he1^2+he2^2);
    for j=1:200,
        ee11=0; ee22=0;
        for k=(j-1)*500+1:j*500,
            ee11=ee11+e1(k); ee22=ee22+e2(k);
        end;
        hh1(j)=ee11/500-xxx1; hh2(j)=ee22/500-xxx2;
    end;
    s1=0; s2=0;
    for j=1:200,
        s1=s1+(hh1(j)-he1)^2; s2=s2+(hh2(j)-he2)^2;
    end;
    s1=s1/199; s2=s2/199;
    hee1(jj-2)=he1;
    he100(jj-2)=he1-st*sqrt(s1/200);
    he101(jj-2)=he1+st*sqrt(s1/200);
    hee2(jj-2)=he2;
    he200(jj-2)=he2-st*sqrt(s2/200);
    he201(jj-2)=he2+st*sqrt(s2/200);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj); hhh1(jj-2)=hhh;
end;
```

```
e1=[he100(1) he101(1)]; e2=[he100(2) he101(2)];
e3=[he100(3) he101(3)]; e4=[he100(4) he101(4)];
v1=[he200(1) he201(1)]; v2=[he200(2) he201(2)];
v3=[he200(3) he201(3)]; v4=[he200(4) he201(4)];
t1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; t2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
t3=[1/(2^5) 1/(2^5)];
t4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,hhh1,ttt,hee1,ttt,hee2);
    pause;
plot(ttt,hee1,t1,e1,t2,e2,t3,e3,t4,e4);
    pause;
plot(ttt,hee2,t1,v1,t2,v2,t3,v3,t4,v4);
    pause;
```

### 17.6.6 Программа для численного эксперимента 10.11 при $N = 500$ , $M = 200$

```
clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.05;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
for jj=2:6,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj);    %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    x(1)=1;
        %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
    xxx=x(1)*expm(a*tk);
    he=0;
    for i=1:200*500,
        y(1)=1;
        for p=1:l,
            u=randn;
            %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
            yy=y(p)+a*y(p)*dt;
            yy1=y(p)+b*y(p)*sqrt(dt);
            yy2=y(p)-b*y(p)*sqrt(dt);
        %IMPLICIT WEAR FINITE-DIFFERENCE METHOD OF ORDER 2.0
            y(p+1)=(1/(1-0.5*a*dt))*(y(p)+0.5*a*y(p)*dt+...
                0.25*(b*yy1+b*yy2+2*b*yy)*sqrt(dt)*u+...
                (1/(4*sqrt(dt)))*(b*yy1-b*yy2)*dt*...
                (u^2-1));
        end; % for p
        %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
        e(i)=y(l+1);
```

```
he=he+e(i);
end; % for i
he=he/(200*500)-xxx;
for j=1:200,
    ee=0;
    for k=(j-1)*500+1:j*500,
        ee=ee+e(k);
    end; % for k
    hh(j)=ee/500-xxx;
end; % for j
s=0;
for j=1:200,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end; % for j
s=s/199;
hee(jj-1)=he;
he1(jj-1)=he-st*sqrt(s/200);
he2(jj-1)=he+st*sqrt(s/200);
ttt(jj-1)=1/(2^jj);
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^2) 1/(2^2)]; tt2=[1/(2^3) 1/(2^3)];
tt3=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt4=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt5=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5);
pause;
```

### 17.6.7 Программа для численного эксперимента 10.12 при $N = 500$ , $M = 200$

```
clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1; b=0.01;     %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
for jj=3:6,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    x(1)=1;
    %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
    xxx=x(1)*expm(a*tk);
    he=0;
    for i=1:200*500,
        y(1)=1;
```

```
for p=1:1,
    u=randn;          %DISCRETE
    if u>0,           %RANDOM
        ksi=1;         %VARIABLE
    elseif u<0,       %WITH
        ksi=-1;        %DISTRIBUTION:
    else              %P(ksi=-1)=0.5,
        ksi=0;         %P(ksi=1)=0.5
    end;
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
yy1=y(p)+sqrt(dt)*b*y(p);
yy2=y(p)-sqrt(dt)*b*y(p);
zz=y(p)+a*y(p)*dt;
    %FINITE-DIFFERENCE WEAK PREDICTOR-
    %CORRECTOR METHOD OF ORDER 2.0
uu=0.5*(b*zz+b*y(p)+0.5*(b*yy1+b*yy2-2*b*y(p)))*sqrt(dt)*...
    ksi+(1/(4*sqrt(dt)))*(b*yy1-b*yy2)*dt*(ksi^2-1);
yyy=y(p)+0.5*(a*y(p)+a*zz)*dt+uu+(sqrt(dt)/4)*(a*yy1-a*...
    yy2)*sqrt(dt)*ksi+(dt/4)*(a*yy1+a*yy2-2*a*y(p));
y(p+1)=y(p)+0.5*(a*y(p)+a*yyy)*dt+uu;
end;
    %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=y(1+1);
he=he+e(i);
end;
he=he/(200*500)-xxx;
for j=1:200,
    ee=0;
    for k=(j-1)*500+1:j*500,
        ee=ee+e(k);
    end;
    hh(j)=ee/500-xxx;
end;
s=0;
for j=1:200,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end;
s=s/99;
hee(jj-2)=abs(he);
he1(jj-2)=abs(he)-st*sqrt(s/200);
he2(jj-2)=abs(he)+st*sqrt(s/200);
ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end;
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
```

```
plot(ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4);
    pause;
```

## 17.7 MATLAB 7.0-программы к главе 14

### 17.7.1 Программа для численного эксперимента 14.1

```
clear;
t0=0; tk=1.2; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=1/(2^10); %STEP OF INTEGRATION
S(1)=10; umu=0.5; ula=0.2; %START DATA
randn('state',0); %SET OF START POINT OF GAUSSIAN
                           %RANDOM NUMBER GENERATOR
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
r(1)=0; sw=0;
for j=1:l,
    w=randn; sw=sw+w;
    %MODELING OF STOCHASTIC PROCESS ON j+1-TH STEP
S(j+1)=S(1)*exp((umu-0.5*(ula^2))*dt*j+ula*(dt^(0.5))*sw);
    r(j+1)=j*dt;
end; % for
plot(r,S);
xlabel('t')
ylabel('S(t)')
pause;
```

### 17.7.2 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.2

```
clear;
t0=0; tk=100; %INTERVAL OF INTEGRATION
s=10.0; r=24.30; %PARAMETERS OF SYSTEM
b=8/3; %OF LORENZ EQUATIONS
dt=0.005; %STEP OF INTEGRATION
sf=2; %STOCHASTIC INTENSITY
t=t0:dt:tk;
x(1)=0.25; y(1)=0.25; z(1)=0.25; %START DATA
l=max(size(t))-1;
for j=1:l,
    %SECONDARY VARIABLES e, g, f
    e=-s*x(j)+s*y(j);
    g=r*x(j)-y(j)-x(j)*z(j);
    f=-b*z(j)+x(j)*y(j);
    %SECONDARY VARIABLES e1, g1, f1
```

```

e1=e*(s^2+s*(r-z(j)))-(s^2+s)*g-s*x(j)*f;
g1=e*((-s-1)*(r-z(j))+b*z(j)-2*x(j)*y(j))+g*...
((r-z(j))*s+1-x(j)^2)+f*(-e+x(j)*(b+1));
f1=e*(2*x(j)*(r-z(j))-(b+1+s)*y(j))+g*(-x(j)*...
(b+1+s)+2*s*y(j))+f*(b^2-x(j)^2);
w1=randn; w2=randn; w3=randn;
%MODELING OF STOCHASTIC INTEGRALS
v1=(1/6)*w1-(1/(4*sqrt(3)))*w2+(1/(6*sqrt(20)))*w3;
v2=-(1/2)*w1+(1/(2*sqrt(3)))*w2;
v3=-(1/6)*w1+(1/(3*sqrt(20)))*w3;
%MODELING OF SOLUTION OF SYSTEM OF
%LORENZ EQUATIONS WITH STOCHASTICS
x(j+1)=x(j)+dt*e+((dt^2)/2)*(-s*e+s*g)+((dt^3)/6)*...
e1-(dt^(5/2))*s*x(j)*sf*v1;
y(j+1)=y(j)+dt*g+((dt^2)/2)*((r-z(j))*e-g-x(j)*f)+...
((dt^3)/6)*g1-(dt^(3/2))*sf*x(j)*v2+(dt^(5/2))*...
(-e+(1+b)*x(j))*sf*v1+(dt^(5/2))*e*sf*v3;
z(j+1)=z(j)+dt*f+((dt^2)/2)*(e*y(j)+g*x(j)-b*f)+...
((dt^3)/6)*f1+(dt^(1/2))*sf*w1-(dt^(3/2))*b*...
sf*v2+(dt^(5/2))*sf*(b^2-x(j)^2)*v1;
end; %for
plot(x,y); %PHASE PORTRAIT
xlabel('x1(t)')
ylabel('x2(t)')
pause;

```

### 17.7.3 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.3

```

clear;
t0=0; tk=0.8; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.005; %STEP OF INTEGRATION
x(1)=5; y(1)=5; %START DATA
s1=0.1; s2=0.1;
uk1=2.0; uk2=2.3;
a1=-0.2; a2=-0.3;
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
r(1)=0;
randn('state', 0);
for j=1:l,
    w1=randn; w2=randn; %STANDARD GAUSSIAN
    v1=randn; v2=randn; %RANDOM VARIABLES
    %MODELING OF STOCHASTIC INTEGRALS
    wi1=-(dt^(1.5))/(sqrt(3))*w1;
    wi2=0.5*(dt^(1.5))*(w1-(1/(3^(0.5)))*w2);

```

```

wi3=(dt^(0.5))*w1;
wi4=(dt/2)*(w1^2-1);
wi5=((dt^(1.5))/6)*(w1^3-3*w1);
vi1=-((dt^(1.5))/(sqrt(3)))*v1;
vi2=0.5*(dt^(1.5))*(v1-(1/(sqrt(3)))*v2);
vi3=(dt^(0.5))*v1;
vi4=(dt/2)*(v1^2-1);
vi5=((dt^(1.5))/6)*(v1^3-3*v1);
%EXPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 1.0 FOR
%SYSTEM OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
x(j+1)=x(j)*(1+(uk1+a1*y(j))*dt+s1*(uk1+a1*y(j))*wi1+...
    a1*s2*y(j)*vi2+s1*wi3+(s1^2)*wi4+(s1^3)*wi5);
y(j+1)=y(j)*(1+(uk2+a2*x(j))*dt-s2*vi1*(uk2+a2*x(j))+...
    a2*s1*x(j)*wi2+s2*vi3+(s2^2)*vi4+(s2^3)*vi5);
r(j+1)=j*dt;
end; % for
plot(r,x,r,y);
xlabel('t')
ylabel('x1(t), x2(t)')
pause;

```

#### 17.7.4 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.4

```

clear;
n=100;           %NUMBER OF ITERATIONS
dt=2^(-10);      %STEP OF INTEGRATION
x1(1)=3; x2(1)=5; %START DATA
tk(1)=0;
q=10;
b11=0.5; b12=0; b21=0; b22=1.2;
um1=-1; um2=-15; gam=0.3;
%SECONDARY VARIABLES
b1=b11*(b11+b21); r1=b11*(b12+b22);
g1=b12*(b11+b21); a1=b12*(b12+b22);
b2=b21*(b11+b21); r2=b21*(b12+b22);
g2=b22*(b11+b21); a2=b22*(b12+b22);
%MODELING OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
randn('state',0);
for i=1:n,
    w=randn(1,q+1); v=randn(1,q+1);
    s=w(1,1)*v(1,1); s1=w(1,1)*v(1,1);
    for j=1:q,
        s=s+(1/(sqrt(4*j*j-1)))*(w(1,j)*v(1,j+1)-w(1,j+1)*v(1,j));
        s1=s1+(1/(sqrt(4*j*j-1)))*(v(1,j)*w(1,j+1)-v(1,j+1)*w(1,j));
    end; % for

```

```
%MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
uj0021=0.5*dt*s; uj0012=0.5*dt*s1;
uj01=(sqrt(dt))*v(1,1); uj02=(sqrt(dt))*w(1,1);
uj0011=0.5*(uj01^2-dt); uj0022=0.5*(uj02^2-dt);
f1=exp(gam*(x1(i)+x2(i)));
f=exp(0.5*gam*(x1(i)+x2(i)));
EXPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 1.0
x1(i+1)=x1(i)+um1*dt+f*(b11*uj01+b12*uj02)+...
0.5*gam*f1*(b1*uj0011+r1*uj0021+g1*...
uj0012+a1*uj0022);
x2(i+1)=x2(i)+um2*dt+f*(b21*uj01+b22*uj02)+...
0.5*gam*f1*(b2*uj0011+r2*uj0021+g2*...
uj0012+a2*uj0022);
tk(i+1)=tk(i)+dt;
end; % for
plot(tk,x1,tk,x2)
xlabel('t')
ylabel('x1(t),x2(t)')
pause;
```

### 17.7.5 Программа, реализующая численный метод из раздела 14.5

```
clear;
t0=0; tk=300; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.03; %STEP OF INTEGRATION
c=2.0; e=0.19; f=0.4; um=8.5; %START DATA
x1(1)=0.1; x2(1)=0.1; x3(1)=0.1;
randn('state', 0);
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
for i=1:l,
z0=randn; z1=randn;
z2=randn; z3=randn; z4=randn;
%MODELING OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
%(q=2 FOR STOCHASTIC INTEGRALS w01 AND w10)
w01=-((dt^2)/4)*((4/3)*(z0^2)+(1/(sqrt(3)))*z0*z1+...
(1/(3*sqrt(5)))*z0*z2+(1/(5*sqrt(21)))*z1*z3-...
(1/5)*z1*z1+(1/(7*sqrt(45)))*z2*z4-(1/21)*z2*z2-2);
w0=(sqrt(dt))*z0;
w00=0.5*dt*(z0*z0-1);
w1=-0.5*(dt^(3/2))*(z0+(1/(sqrt(3)))*z1);
w000=(1/6)*(dt^(3/2))*(z0^3-3*z0);
w0000=(1/24)*(dt^2)*(z0^4-6*z0*z0+3);
w10=w1*w0+(dt^2)/2-w01;
%MODELING OF SOLUTION OF SDE
```

```
g01=f+x1(i)*x3(i)-um*x3(i);
      %1-ST AND 2-ND COMPONENTS OF SOLUTION
x1(i+1)=x1(i)+dt*(-x2(i)-x3(i))+0.5*...
      (dt^2)*(-x1(i)-e*x2(i)-g01)+c*x3(i)*...
      (dt*w0+w1)-(c^2)*x3(i)*(w01+dt*w00);
x2(i+1)=x2(i)+dt*(x1(i)+e*x2(i))+0.5*...
      (dt^2)*(-x2(i)-x3(i)+e*(x1(i)+e*x2(i)));
      %SECONDARY VARIABLES
g10=dt*g01+0.5*(dt^2)*((-x2(i)-x3(i))*x3(i)+g01*...
      (x1(i)-um));
g11=-c*x3(i)*w0+c*c*x3(i)*w00+c*x3(i)*(um-x1(i))*...
      (dt*w0+w1)+c*g01*w1-(c^3)*x3(i)*w000;
g12=c*c*x3(i)*(x1(i)-um)*(w10-w01)-c*c*g01*w10-c*c*...
      x3(i)*(um-x1(i))*(w01+dt*w00)+(c^4)*x3(i)*w0000;
      %3-RD COMPONENT OF SOLUTION
x3(i+1)=x3(i)+g10+g11+g12;
      end; % for
plot(x1,x2);
xlabel('x1(t)')
ylabel('x2(t)')
pause;
```

## 17.8 MATLAB 7.0-программы к главе 15

### 17.8.1 Программа для численного эксперимента 15.1

```
clear;
t0=0; tk=80; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.004; %STEP OF INTEGRATION
sig=5.08; %START DATA
x1(1)=7; x2(1)=-0.25;
theta1=0.14; theta2=(0.5661)^2;
t=t0:dt:tk;
nn=max(size(t))-1;
randn('state', 0); %START POINT OF GAUSSIAN
%RANDOM NUMBER GENERATOR
for k=1:nn,
    www=randn;
    %STRONG EULER METHOD
    x1(k+1)=x1(k)+x2(k)*dt;
    x2(k+1)=x2(k)+(-theta2*x1(k)-theta1*x2(k))*dt+...
        sig*sqrt(dt)*www;
    end; % for
ss1=0; ss2=0; the1(1)=0; the2(1)=0;
t(1)=t0;
for i=2:nn+1,
```

```
%CALCULATING OF ESTIMATES
ss1=ss1+0.5*dt*((x1(i-1))^2+(x1(i))^2);
ss2=ss2+0.5*dt*((x2(i-1))^2+(x2(i))^2);
uu3=0.5*((x2(i))^2-(x2(1))^2-(sig^2)*(t0+(i-1)*dt-t0));
t(i)=t0+(i-1)*dt;
the1(i)=-uu3/ss2; the2(i)=ss2/ss1;
end; % for
for i=700:tk/dt,
tthe1(i-699)=the1(i); tthe2(i-699)=the2(i);
tt(i-699)=t(i);
end; % for
plot(tt,tthe1);
pause;
plot(tt,tthe2);
pause;
```

### 17.8.2 Программа для численного эксперимента 15.2 при $T = 800$

```
clear;
t0=0; tk=800; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.02; %STEP OF INTEGRATION
sig=0.5; %START DATA
x(1)=0.5; theta1=2; theta2=-2;
t=t0:dt:tk;
nn=max(size(t))-1;
t(1)=t0; ss1=0; ss2=0; ss3=0; the1(1)=0; the2(1)=0;
randn('state', 0); %START POINT OF GAUSSIAN
%RANDOM NUMBER GENERATOR
for k=1:nn,
ww=randn;
%EXPLICIT 1 STEP STRONG RUNGE-KUTTA METHOD OF ORDER 1.0
x(k+1)=x(k)+(theta1*x(k)+theta2*((x(k))^2))*dt+sqrt(dt)*...
ww*sig*real(sqrt(x(k)))+0.25*sig*sqrt(dt)*...
(ww^2-1)*(real(sqrt(x(k))+2*sqrt(dt)*sig*...
real(sqrt(x(k)))))-real(sqrt(x(k))));

%CALCULATING OF ESTIMATES ON k-TH STEP
ss1=ss1+dt*(x(k)+x(k+1)); ss2=ss2+dt*((x(k))^2+(x(k+1))^2);
ss3=ss3+dt*((x(k))^3+(x(k+1))^3);
gg1=(x(k+1)-x(1))*ss3-0.5*((x(k+1))^2-(x(1))^2-...
0.5*(sig^2)*ss1)*ss2;
gg2=0.5*((x(k+1))^2-(x(1))^2-0.5*(sig^2)*ss1)*ss1-...
(x(k+1)-x(1))*ss2;
uu1=0.25*ss1*ss3-(0.5*ss2)^2;
t(k+1)=t0+k*dt;
the1(k+1)=gg1/(2*uu1); %ESTIMATE PROCESSES
the2(k+1)=gg2/(2*uu1); %ON k-TH STEP
```

```
end; % for
for i=1:2620,
    tthe1(i)=the1(15*(i-1)+700);
    tthe2(i)=the2(15*(i-1)+700);
    tt(i)=t(15*(i-1)+700);
end; %for
plot(tt,tthe1);
pause;
plot(tt,tthe2);
pause;
```

### 17.8.3 Программа для численного эксперимента 15.5

```
clear;
t0=0; tk=2; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.001; %STEP OF INTEGRATION
%START DATA
A=[-0.5 0.5; 0.5 -0.5];
AA=[-2.5 0.5; 0.5 -50.5];
H=[2 0; 0 10]; G=[1 0; 0 1];
nn=60;
%START POINT OF GAUSSIAN RANDOM NUMBER GENERATOR
randn('state', 0);
%PROCESS FOR FILTERING
for p=1:1000,
    sig(p)=1;
    sig(p+1000)=-1;
end; % for
for p=1:2000,
    ttt(p)=(p-1)*dt;
end; % for
plot(ttt,sig);
pause;
%FILTER ON 1-ST STEP
z(1)=0.2; v(1)=0.8;
yy(1)=(v(1)-z(1))/(z(1)+v(1));
tt(1)=0;
for i=1:1999,
    if sig(i)==1,
        hh(i)=10;
    else
        hh(i)=2;
    end; % for
    %MODELING OF MULTILPE
    %STOCHASTIC INTEGRALS
ksi=randn(1,nn+2);
```

```

ui1f=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
ui2f=(1/3)*(dt^(5/2))*(ksi(1,1)+((sqrt(3))/2)*ksi(1,2)+...
    (1/(2*sqrt(5)))*ksi(1,3));
ui0f=sqrt(dt)*ksi(1,1);
ui0=hh(i)*dt+ui0f;
ui1=-0.5*(dt^2)*hh(i)+ui1f;
ui00=0.5*(ui0^2);
bbb=(4/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)+...
    (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1);
    for ij=1:nn,
bbb=bbb-((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))+ksi(1,ij)*...
    ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
    end; % for
ui01f=-(1/4)*(dt^2)*bbb;
ui01=ui01f-hh(i)*(0.5*(dt^2)*ui0f+0.5*ui2f)-...
    ((hh(i))^2)*(1/3)*(dt^3);
ui10=ui1*ui0-ui01;
                                %FILTER OF ORDER 2.0
S=(G+AA*dt*(G+0.5*AA*dt)+(-H*AA+AA*H)*...
    (dt*ui0+ui1)+H*ui0*(G+AA*dt+0.5*H*ui0*...
    (G+(1/3)*H*ui0*(G+0.25*H*ui0)))+AA*H*H*...
    (dt*ui00+ui01)+H*AA*H*(ui10-ui01)-H*H*AA*ui10);
z(i+1)=S(1,1)*z(i)+S(1,2)*v(i);
v(i+1)=S(2,1)*z(i)+S(2,2)*v(i);
yy(i+1)=(v(i+1)-z(i+1))/(z(i+1)+v(i+1));
tt(i+1)=t0+i*dt;
end; % for
plot(tt,yy);
pause;

```

#### 17.8.4 Программа для построения рис. 15.10, 15.11

```

clear;
t0=0; tk=5; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.001; %STEP OF INTEGRATION
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
randn('state', 0); %START POINT OF GAUSSIAN
%RANDOM NUMBER GENERATOR
x1(1)=2; x2(1)=2; xx1(1)=2; xx2(1)=2; %START DATA
e1(1)=0; e2(1)=0; y1(1)=0; y2(1)=0;
ee1(1)=(e1(1))^2; ee2(1)=(e2(1))^2;
tt(1)=t0; sig=0.07; b=0.07;
A=[-1 -1; 1 -1]; B=[b 0; 0 b];
H=[1 0; 0 1]; S=[sig 0; 0 sig];
R=zeros(2,2); O=zeros(2,2);

```

```
%DERIVATIVE OF MATRIX R ON 1-ST STEP
R1=A*R+R*(A')+B*(B')-R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R;
%VECTOR Z OF OBJECT OF FILTERING, ESTIMATE OF FILTERING,
%OBSERVING AND MEAN-SQUARE ERROR OF FILTERING ON 1-ST STEP
Z=[e1(1);e2(1);xx1(1);xx2(1);x1(1);x2(1);y1(1);y2(1)];
tt(1)=t0;
for k=1:1,
W=randn(4,1); V=randn(4,1);
A1=[A-R*(H')*(inv(S*(S')))*H 0 0 0;
     R*(H')*(inv(S*(S')))*H  A 0 0;
     0 0 A 0;
     0 0 0 H 0];
B1=[B -R*(H')*(inv(S*(S')))*S;
     0 R*(H')*(inv(S*(S')))*S;
     B 0;
     0 S];
A2=[-R1*(H')*(inv(S*(S')))*H 0 0 0;
     R1*(H')*(inv(S*(S')))*H  0 0 0;
     0 0 0;
     0 0 0];
B2=[0 -R1*(H')*(inv(S*(S')))*S;
     0 R1*(H')*(inv(S*(S')))*S;
     0 0;
     0];
%EXPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 1.5 FOR
%SYSTEM OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
%(VECTOR Z ON k-TH STEP)
Z=Z+B1*sqrt(dt)*W+dt*A1*Z+A1*B1*(dt^(3/2))*...
0.5*(W-(1/sqrt(3))*V)+B2*0.5*(dt^(3/2))*...
(W+(1/sqrt(3))*V)+0.5*(dt^2)*(A2*Z+A1*A1*Z);
%DERRIVATIVES OF 1-ST AND 2-ND ORDER
%OF MATRIX R ON k-TH STEP
R1=A*R+R*(A')+B*(B')-R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R;
R2=A*R1+R1*(A')-R1*(H')*(inv(S*(S')))*H*R-...
R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R1;
%EXPLICIT 1 STEP METHOD OF ORDER 2.0
%FOR SOLVING OF RICCATI EQUATION
R=R+dt*R1+0.5*(dt^2)*R2;
tt(k+1)=t0+k*dt;
e1(k+1)=Z(1,1);
e2(k+1)=Z(2,1);
xx1(k+1)=Z(3,1);
xx2(k+1)=Z(4,1);
x1(k+1)=Z(5,1);
x2(k+1)=Z(6,1);
y1(k+1)=Z(7,1);
y2(k+1)=Z(8,1);
```

```

ee1(k+1)=(e1(k+1))^2;
ee2(k+1)=(e2(k+1))^2;
end; % for
plot(tt,x1,tt,y1,tt,xx1,tt,ee1);
pause;
plot(tt,x2,tt,y2,tt,xx2,tt,ee2);
pause;

```

### 17.8.5 Программа для численного эксперимента 15.7 при $\sigma = c = 0.05$

```

clear;
t0=0; tk=12; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.005; %STEP OF INTEGRATION
q=20; %NUMBER FOR APPROXIMATION
%OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRAL
%START DATA
x1(1)=1; x2(1)=0; x3(1)=1; x4(1)=0; x5(1)=0;
c=0.05; sig=0.05; tt(1)=t0;
randn('state',0);
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
%MODELING OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
for p=1:l,
    zeta1=randn(1,q+1); zeta2=randn(1,q+1);
    s2=zeta1(1,1)*zeta2(1,1);
    for j=1:q,
        s2=s2+(1/(sqrt(4*j*j-1)))*(zeta2(1,j+1)*...
            zeta1(1,j)-zeta2(1,j)*zeta1(1,j+1));
    end; % for
    ui21=(dt/2)*s2;
    ui22=(dt/2)*((zeta2(1,1))^2-1);
    ui1=sqrt(dt)*zeta1(1,1);
    ui2=sqrt(dt)*zeta2(1,1);
    %MILSTEIN SCHEME
    x1(p+1)=x1(p)-x1(p)*dt+sig*sin(x2(p))*ui1+sig*cos(x2(p))*...
        ui2-c*sig*sin(x2(p))*ui22+c*sig*cos(x2(p))*ui21;
    x2(p+1)=x2(p)+x1(p)*dt+c*ui2;
    x3(p+1)=x3(p)+(-x3(p)+((sig/c)*cos(x2(p))+(x4(p))/(c^2))*...
        (x1(p)-x3(p)))*dt+(sig*cos(x2(p))+(x4(p))/c)*ui2-...
        c*sig*sin(x2(p))*ui22;
    x4(p+1)=x4(p)+(-2*x4(p)+sig^2-(c*sig*cos(x2(p))+x4(p))^2)*...
        /(c^2)*dt;
    x5(p+1)=(x1(p+1)-x3(p+1))^2;
    tt(p+1)=t0+p*dt;
end; % for

```

```
plot(tt,x1,tt,x2,tt,x3,tt,x5);
pause;
```

### 17.8.6 Программа для численного эксперимента 15.8 при $\sigma = b = 0.07$

```
clear;
t0=0; tk=5; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.001; %STEP OF INTEGRATION
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
%START DATA
x1(1)=2; x2(1)=2;
xx1(1)=2; xx2(1)=2;
e1(1)=0; e2(1)=0;
y1(1)=0; y2(1)=0;
ee1(1)=(e1(1))^2;
ee2(1)=(e2(1))^2;
b=0.07; sig=0.07; h=10; q=10; r=1;
tt(1)=t0;
A=[-1 -1; 1 -1]; B=[b 0; 0 b];
H=[1 0; 0 1]; S=[sig 0; 0 sig];
Q=zeros(2,2); Q1=[q 0; 0 q];
R=zeros(2,2); UP=[h 0; 0 h];
Z=[e1(1);e2(1);xx1(1);xx2(1);x1(1);x2(1);y1(1);y2(1)];
tt(1)=t0;
R1=A*R+R*(A')+B*(B')-R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R;
UP1=-(A')*UP-UP*A-Q1+UP*UP;
for k=1:l-1,
    %SAVING OF MATRIXES UP AND R (SOLUTIONS
    %OF RICCATI EQUATIONS) AND ITS
    %DERIVATIVES UP1 AND R1 ON 1-k+1-TH STEP
    up11(1-k+1)=UP(1,1); up12(1-k+1)=UP(1,2);
    up22(1-k+1)=UP(2,2);
    uup11(1-k+1)=UP1(1,1); uup12(1-k+1)=UP1(1,2);
    uup22(1-k+1)=UP1(2,2);
    r11(k)=R(1,1); r12(k)=R(1,2); r22(k)=R(2,2);
    rr11(k)=R1(1,1); rr12(k)=R1(1,2); rr22(k)=R1(2,2);
    R1=A*R+R*(A')+B*(B')-R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R;
    R2=A*R1+R1*(A')-R1*(H')*(inv(S*(S')))*H*R+...
        R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R1;
    UP1=-(A')*UP-UP*A-Q1+UP*UP;
    UP2=-(A')*UP1-UP1*A+UP1*UP+UP*UP1;
    %EXPLICIT ONE STEP METHOD OF ORDER 2.0
    %FOR SOLVING OF RICCATI EQUATIONS
    R=R+dt*R1+0.5*(dt^2)*R2;
```

```

UP=UP-dt*UP1+0.5*(dt^2)*UP2;
tt(k+1)=t0+k*dt;
end; % for
    %STOCHASTIC CONTROL ON 1-ST STEP
u1(1)=-(1/r)*(up11(1)*xx1(1)+up12(1)*xx2(1));
u2(1)=-(1/r)*(up12(1)*xx1(1)+up22(1)*xx2(1));
randn('state', 0);
for k=1:l-1,
%PROCEDURE OF STOCHASTIC CONTROL WITH KALMAN FILTERING
R=[r11(k) r12(k); r12(k) r22(k)];
W=randn(4,1);
UU=[0; 0; u1(k); u2(k); u1(k); u2(k); 0; 0];
A1=[A-R*(H')*(inv(S*(S')))*H 0 0 0;
    R*(H')*(inv(S*(S')))*H  A 0 0;
    0 0 A 0;
    0 0 H 0];
B1=[B -R*(H')*(inv(S*(S')))*S;
    0 R*(H')*(inv(S*(S')))*S;
    B 0;
    0 S];
%STRONG MILSTEIN METHOD FOR SYSTEM OF
%STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
Z=Z+B1*sqrt(dt)*W+dt*(A1*Z+UU);
%SAVING OF COMPONENTS OF VECTOR Z ON k+1-TH STEP
e1(k+1)=Z(1,1); e2(k+1)=Z(2,1);
xx1(k+1)=Z(3,1); xx2(k+1)=Z(4,1);
x1(k+1)=Z(5,1); x2(k+1)=Z(6,1);
y1(k+1)=Z(7,1); y2(k+1)=Z(8,1);
ee1(k+1)=(e1(k+1))^2; ee2(k+1)=(e2(k+1))^2;
%STOCHASTIC CONTROL ON k+1-TH STEP
u1(k+1)=-(1/r)*(up11(k+1)*xx1(k+1)+up12(k+1)*xx2(k+1));
u2(k+1)=-(1/r)*(up12(k+1)*xx1(k+1)+up22(k+1)*xx2(k+1));
end; % for
plot(tt, x1, tt, y1, tt, xx1, tt, ee1);
pause;
plot(tt, x2, tt, y2, tt, xx2, tt, ee2);
pause;

```

### 17.8.7 Программа для численных экспериментов 15.9 и 15.11

```

clear;
t0=0; tk=60;      %START DATA FOR
dt=0.005;         %NUMERICAL EXPERIMENT 15.9
um1=4; um2=1;
c1=1; c2=((3+sqrt(5))/10)*c1;
%t0=0; tk=200;    %START DATA FOR

```

```
%dt=0.05; %NUMERICAL EXPERIMENT 15.11
%um2=0.01;
%um1=100*um2;
%c1=1; c2=0.01*c1;
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
%GENERAL START DATA FOR NUMERICAL EXPERIMENTS 15.9 AND 15.11
x1(1)=5; x2(1)=0;
x3(1)=5; x4(1)=0;
gam=0.02;
alfa=10; beta=10;
A=[ 0 1 0 0;
  -(c1+c2)/um1 0 c2/um1 0;
  0 0 0 1;
  c2/um2 0 -(c2/um2) 0];
%UM=[0; 1/um1; 0; 0]; %CASE WITH CONTROL
UM=[0; 0; 0; 0]; %CASE WITHOUT CONTROL
%B=[0; 1/um1; 0; 0]; %CASE WITH STOCHASTICS
B=[0; 0; 0; 0]; %CASE WITHOUT STOCHASTICS
%SECONDARY START
UC=[beta 0 0 0]; %CALCULATION
  0 0 0 0;
  0 0 0 0;
  0 0 0 0];
Z=[x1(1); x2(1); x3(1); x4(1)];
tt(1)=t0;
US=[alfa 0 0 0;
  0 0 0 0;
  0 0 0 0;
  0 0 0 0];
US1=-(A')*US-US*A-UC+(1/gam)*US*UM*(UM')*US;
for k=1:l-1,
  %SAVING OF SOLUTION OF RICCATI EQUATION AND
  %ITS 1-ST DERIVATIVE ON k-l+1-TH STEP
uu11(l-k+1)=US(1,1); uu12(l-k+1)=US(1,2);
uu13(l-k+1)=US(1,3); uu14(l-k+1)=US(1,4);
uu22(l-k+1)=US(2,2); uu23(l-k+1)=US(2,3);
uu24(l-k+1)=US(2,4); uu33(l-k+1)=US(3,3);
uu34(l-k+1)=US(3,4); uu44(l-k+1)=US(4,4);
uuu11(l-k+1)=US1(1,1); uuu12(l-k+1)=US1(1,2);
uuu13(l-k+1)=US1(1,3); uuu14(l-k+1)=US1(1,4);
uuu22(l-k+1)=US1(2,2); uuu23(l-k+1)=US1(2,3);
uuu24(l-k+1)=US1(2,4); uuu33(l-k+1)=US1(3,3);
uuu34(l-k+1)=US1(3,4); uuu44(l-k+1)=US1(4,4);
  %CALCULATING OF 1-ST AND 2-ND DERIVATIVES
  %OF SOLUTION OF RICCATI EQUATION
US1=-(A')*US-US*A-UC+(1/gam)*US*UM*(UM')*US;
```

```

US2=-(A')*US1-US1*A+(1/gam)*(US1*UM*(UM'))*...
    US+US*UM*(UM')*US1;
    %EXPLICIT 1 STEP METHOD OF ORDER 2.0
    %FOR SOLVING OF RICCATI EQUATION
US=US-dt*US1+0.5*(dt^2)*US2;
tt(k+1)=t0+k*dt;
end; % for
for k=1:l-1,
    %SOLUTION OF RICCATI EQUATION AND
    %ITS 1-ST DERIVATIVE ON k-TH STEP
US=[uu11(k) uu12(k) uu13(k) uu14(k);
    uu12(k) uu22(k) uu23(k) uu24(k);
    uu13(k) uu23(k) uu33(k) uu34(k);
    uu14(k) uu24(k) uu34(k) uu44(k)];
US1=[uuu11(k) uuu12(k) uuu13(k) uuu14(k);
    uuu12(k) uuu22(k) uuu23(k) uuu24(k);
    uuu13(k) uuu23(k) uuu33(k) uuu34(k);
    uuu14(k) uuu24(k) uuu34(k) uuu44(k)];
W=randn(1,2); %MODELING OF MULTIPLE
ui0=sqrt(dt)*W(1,1); %STOCHASTIC INTEGRALS
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(W(1,1)+(1/sqrt(3))*W(1,2));
AA=A-UM*(UM')*US*(1/gam);
    %EXPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 1.5
    %FOR SOLVING OF SYSTEM OF STOCHASTIC
    %DIFFERENTIAL EQUATIONS
Z=Z+B*ui0+AA*Z*dt+(AA^2-UM*(UM'))*US1*...
    (1/gam))*Z*0.5*(dt^2)+AA*B*(ui0*dt+ui1);
x1(k+1)=Z(1,1);
end; % for
plot(tt, x1);
pause;

```

## 17.9 MATLAB 7.0-программы к главе 16

### 17.9.1 Программа, строящая реализацию процесса $\lambda_{1,25}^{0.005}(t)$ ( $t \in [0, 25]$ ) из численного эксперимента 16.1

```

clear;
t0=0; tk=25; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.005; %STEP OF INTEGRATION
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
y1(1)=1; y2(1)=0; %START DATA
c=5; uu(1)=1;
del=2; umu=3;

```

```

randn('state', 0);
w=randn; ui0=sqrt(dt)*w;
%1-ST STEP OF IMPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 2.0
y2(2)=(1/(1+0.25*umu*(dt^2)+del*dt))*(y2(1)-
0.5*dt*(umu*y1(1)+2*del*y2(1))-0.5*dt*...
umu*(y1(1)+0.5*dt*y2(1))-c*y1(1)*ui0-...
0.5*c*y2(1)*dt*ui0);
y1(2)=y1(1)+0.5*dt*y2(1)+0.5*dt*y2(2);
uu(2)=sqrt((y1(2))^2+(y2(2))^2);
ss=log(uu(2)/uu(1));
ss1(1)=(1/dt)*ss;
tt(1)=t0;
for i=2:1,
w=randn; ui0=sqrt(dt)*w;
%i-TH STEP OF IMPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 2.0
y2(i+1)=(1/(1+0.25*umu*(dt^2)+del*dt))*(y2(i)-
0.5*dt*(umu*y1(i)+2*del*y2(i))-0.5*dt*...
umu*(y1(i)+0.5*dt*y2(i))-c*y1(i)*ui0-...
0.5*c*y2(i)*dt*ui0);
y1(i+1)=y1(i)+0.5*dt*y2(i)+0.5*dt*y2(i+1);
uu(i+1)=sqrt((y1(i+1))^2+(y2(i+1))^2);
ss=ss+log(uu(i+1)/uu(i));
ss1(i)=(1/(i*dt))*ss;
tt(i)=t0+(i-1)*dt;
end;
plot(tt, ss1);
pause;

```

### 17.9.2 Программа для численного эксперимента 16.2

```

clear;
dx=0.1; sig=0.5; %START DATA
dt=1;
[x]=setka1(50,50,dx); %NET FOR VARIABLE x
for i=1:5,
for j=1:101,
%SECONDARY VARIABLES
e1=-(x(j))/(sqrt(2*(sig^2)*i*dt));
e2=(i*dt-2*x(j))/(2*(sig^2));
e3=(i*dt-x(j))/(sqrt(2*(sig^2)*i*dt));
%EXACT SOLUTION OF BURGERS EQUATION
u(i,j)=1-(erfc(e1))/(erfc(e1)+...
(exp(e2))*(2-erfc(e3)));
end; % for
end; % for
t=1:5; x=-5:0.1:5;

```

```
mesh(x,t,u); %3-D SURFACE u(x,t)
pause;
plot(x,u); %2-D DEPENDENCES u(x,t) FOR t=1, 2, 3, 4, 5
xlabel('x')
ylabel('u(x,t)')
pause;
```

Приведенная MATLAB 7.0-программа использует следующую функцию построения "сетки" по переменной  $x$ :

```
function [x]=setka1(a1,a2,dx);
for j=1:a1,
    x(j)=(-1)*(a1-j+1)*dx;
end; % for
for j=a1+2:a1+a2+1,
    x(j)=(j-a1-1)*dx;
end; % for
x(a1+1)=0;
```

### 17.9.3 Программа для численного эксперимента 16.3

```
clear;
mm=5;
for jj=1:mm,
    t0=0; tk=jj; dt=0.1; %START DATA
    d1=3; d2=2; n=50; xmin=(-dt)*n; xmax=dt*n;
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    dx=0.1; sig=0.5;
    a1=(l-1)*d1+n; a2=(l-1)*d2+n;
    [x]=setka1(a1,a2,dx); %NET FOR VARIABLE x
    [u]=nach1(x,a1,a2); %START FUNCTION u(x,0)
    %METHOD (16.22) - (16.24)
    [y1,y2,y3]=vectors1(x,1,a1+a2+1,u,dt,sig);
    [u]=step1(x,y1,y2,y3,a1+a2+1);
    for ii=1:l-1,
        c1=ii*d1+1; c2=a1+a2+1-ii*d2;
        [y1,y2,y3]=vectors1(x,c1,c2,u,dt,sig);
        [u]=convert1(x,c1-d1,c2+d2,y1,y2,y3,u,c1,c2,dx);
        for j=a1-n+1:a1+1+n,
            y(j-a1+n)=x(j);
            v(ii+2,j-a1+n)=u(j);
        end; % for
    end; % for
    for i=a1-n+1:a1+1+n,
        y(i-a1+n)=x(i);
```

```
w(jj,i-a1+n)=v(l+1,i-a1+n);
end; % for
end; % for
t=1:mm; x=xmin:dt:xmax; %3-D SURFACE u(x,t)
mesh(x,t,w);
pause;
plot(y,w); %2-D DEPENDENCES u(x,t) FOR t=1, 2, 3, 4, 5
xlabel('x')
ylabel('u(x,t)')
pause;
```

Приведенная MATLAB 7.0-программа использует несколько функций: **setka1** (построение "сетки" по переменной  $x$ ); **nach1** (построение начального условия  $u(x, 0)$ ); **vectors1**, **step1**, **convert1** (функции реализации алгоритма (16.20) – (16.22)).

Приведем текст MATLAB 7.0-программ указанных функций.

```
function [u]=nach1(x,m1,m2);
for j=1:m1,
    u(j)=1;
end; % for
for j=m1+1:m1+m2+1,
    u(j)=0;
end; % for

function [y1,y2,y3]=vectors1(x,m1,m2,z,dt,sig);
for i=m1:m2,
    y1(i)=x(i)-z(i)*dt+sig*sqrt(dt);
    y2(i)=x(i)-z(i)*dt-sig*sqrt(dt);
    y3(i)=0;
end; % for

function [u]=step1(x,y1,y2,y3,m);
for j=1:m,
    if y1(j)<0,
        z1(j)=1;
    else
        z1(j)=0;
    end; % if
    if y2(j)<0,
        z2(j)=1;
    else
        z2(j)=0;
    end; % if
end; % for
for j=1:m,
```

```
u(j)=0.5*(z1(j)+z2(j))+y3(j);  
end; % for  
  
function [v]=convert1(x,m1,m2,g1,g2,g3,u,n1,n2,dx);  
for p=n1:n2,  
    l1=m1-1;  
    for i=m1:m2-1,  
        if x(i)<g1(p),  
            l1=l1+1;  
        else  
            l1=l1;  
        end; % if  
    end; % for  
    l3=m1-1;  
    for i=m1:m2-1,  
        if x(i)<g2(p),  
            l3=l3+1;  
        else  
            l3=l3;  
        end; % if  
    end; % for  
    zz1(p)=((x(l1+1)-g1(p))/dx)*u(l1)+((g1(p)-x(l1))/dx)*u(l1+1);  
    zz2(p)=((x(l3+1)-g2(p))/dx)*u(l3)+((g2(p)-x(l3))/dx)*u(l3+1);  
end; % for  
for i=n1:n2,  
    v(i)=0.5*(zz1(i)+zz2(i))+g3(i);  
end; % for
```

#### 17.9.4 Упрощенная программа для численного эксперимента 16.4

Ограничимся здесь текстом MATLAB 7.0-программы, которая строит кривую  $u(x, 1)$  с использованием явного слабого численного метода (10.13) порядка точности 2.0.

```
clear;  
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION  
dt=1/(2^5); %STEP OF INTEGRATION  
t=t0:dt:tk;  
l=max(size(t))-1;  
x=-8:0.5:8;  
for ll=1:33,  
    randn('state', 0);  
    ss=0;  
    %CALCULATING OF INDEPENDENT REALIZATIONS  
    for i=1:1000,
```

```
%CALCULATING OF p-TH REALIZATION
for p=1:1,
    y(1)=x(1);
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
u=randn; v=randn;
u0=sqrt(dt)*u;
u00=0.5*dt*(u^2-1);
u01=0.5*(dt^(3/2))*(u+(1/sqrt(3))*v);
uu1=0.5*(dt^(3/2))*(u-(1/sqrt(3))*v);
    %CALCULATING OF DERIVATIVES
chy=0.5*(exp(y(p))+exp(-y(p)));
shy=0.5*(exp(y(p))-exp(-y(p)));
thy=shy/chy; a=-chy^(-2);
s=sqrt(2)*(2-thy)^(1/2);
g0s=a; g0a=2*s*shy*(chy^(-3));
ula=-2*shy*chy*(a^2)-(s^2)*(a+3*(shy^2)*(a^2));
uls=0.5*((a^2)/s)-a*s*thy;
    %EXPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 2.0
y(p+1)=y(p)+s*u0+a*dt+g0s*u00+0.5*(dt^2)*ula+...
    g0a*uu1+uls*u01;
    end;
ss=ss+1/(1+(y(1+1)-1)^8);
end;
    %APPROXIMATION OF EXPECTATION
uu(11)=ss/1000;
end;
plot(x,uu);
pause;
```

### 17.9.5 Программа для построения зависимостей $\log_2(\mu)$ от $\log_2(\Delta)$ и $|\mu|$ от $\Delta$ при $N = 500$ , $M = 100$ в численном эксперименте 16.5

```
clear;
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION
for jj=3:6,
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION
    st=1.73; %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL FOR mu
    t=t0:dt:tk;
    randn('state', 0);
    l=max(size(t))-1;
        %EXACT VALUE OF mu
    xxx=sqrt((2*exp(1))/(1+exp(1)*exp(1)));
    he=0;
    for i=1:100*500,
        y(1)=0; ss1=0;
```

```
for p=1:l,
    u=randn;      %DISCRETE
    if u>0,       %RANDOM
        ksi=1;     %VARIABLE
    elseif u<0,   %WITH
        ksi=-1;    %DISTRIBUTION:
    else          %P(ksi=-1)=0.5,
        ksi=0;     %P(ksi=1)=0.5
    end;
    y(p+1)=y(p)+sqrt(dt)*ksi;
    ss1=ss1+(y(p))^2;
end;
e(i)=exp(-0.5*dt*ss1);
he=he+e(i);
end;
%APPROXIMATE VALUE OF mu
he=he/(100*500)-xxx;
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL FOR mu
for j=1:100,
    ee=0;
    for k=(j-1)*500+1:j*500,
        ee=ee+e(k);
    end;
    hh(j)=ee/500-xxx;
end;
s=0;
for j=1:100,
    s=s+(hh(j)-he)^2;
end;
s=s/99;
%90% CONFIDENCE INTERVAL FOR mu
he1=he-st*sqrt(s/100); he2=he+st*sqrt(s/100);
zz(jj-2)=log2(abs(he)); zzz(jj-2)=abs(he);
tt(jj-2)=-jj; ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end;
plot(tt,zz);
pause;
plot(ttt,zzz);
pause;
```

# Библиография

- [1] Аверина Т.А., Артемьев С.С. Новое семейство численных методов для решения стохастических дифференциальных уравнений. *Докл. АН СССР.* 288: 4 (1986), 777-780.
- [2] Аверина Т.А., Артемьев С.С. Численное решение стохастических дифференциальных уравнений с растущей дисперсией. *Сибирский журнал вычисл. матем.* 8: 1 (2005), 1-10.
- [3] Аверина Т.А., Карабанская Е.В., Рыбаков К.А. Моделирование и анализ линейных инвариантных стохастических систем. Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления". 2018, no. 1, 54-76. Доступно по ссылке: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/rybakov7.pdf>
- [4] Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. Об оценках параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса. *Докл. АН СССР.* 146: 4 (1962), 747-750.
- [5] Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. Москва, Наука, 1974. 431 с.
- [6] Арсеньев Д.Г., Кульчицкий О.Ю. Оптимизация алгоритмов численного интегрирования жестких линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. *ВИНИТИ,* 732-В86 (1986), 32 с.
- [7] Артемьев С.С. Устойчивость в среднем квадратичном численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. *Докл. АН СССР.* 333: 4 (1993), 421-424.
- [8] Артемьев С.С., Шкурко И.О. Численное решение линейных систем стохастических дифференциальных уравнений. Тезисы докладов VII Всесоюз. совещания "Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике", 1985, Новосибирск, с. 144-146.
- [9] Артемьев С.С., Якунин М.А. Математическое и статистическое моделирование в финансах. Новосибирск, Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2008. 174 с.
- [10] Атала М.А. Конечно-разностные аппроксимации для стохастических дифференциальных уравнений. *Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы.* Сб. научн. трудов. Киев, Институт математики АН УССР (1986), 11-16.

- [11] Ауслендер Э.И., Мильштейн Г.Н. Асимптотические разложения показателя Ляпунова для линейных стохастических систем с малыми шумами. *Прикл. матем. и мех.* 46: 3 (1982), 358-365.
- [12] Баркин А.И., Зеленцовский А.Л., Пакшин П.В. Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. Москва, Изд-во МАИ, 1992. 303 с.
- [13] Бахвалов Н.С. Численные методы. Москва, Физматгиз, 1973. 631 с.
- [14] Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм. *Сб. рефератов по радиационной медицине*. Москва, Медгиз, 1959, 145-148.
- [15] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва, Наука, 1976. 286 с.
- [16] Гирсанов И.В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры. *Теория вероятн. и ее прим.* 5: 3 (1960), 314-330.
- [17] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, Наукова думка, 1968. 354 с.
- [18] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т.3. Москва, Наука, 1975. 469 с.
- [19] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва, Наука, 1977. 660 с.
- [20] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев, Наукова думка, 1982. 612 с.
- [21] Гладышев С.А., Мильштейн Г.Н. Метод Рунге-Кутта для вычисления винеровских интегралов экспоненциального типа. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*. 24 (1985), 1136-1149.
- [22] Дьяконов В.П. Справочник по применению системы PC MatLab. Москва, Наука, 1993. 111 с.
- [23] Дьяконов В.П. MATLAB 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6. Основы применения. Москва, СОЛООН-пресс, 2005. 800 с.
- [24] Дзагнидзе З.А., Читашвили Р.Я. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. *Труды IV. Тбил. гос. ун-т. Ин-т прикл. мат.* (1975), 267-279.
- [25] Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Москва, Наука, 1963. 860 с.
- [26] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. Москва, Наука, 1976. 320 с.
- [27] Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. Москва, Наука, 1974. 178 с.

- [28] Жижиашвили Л.В. Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Тбилиси, Изд-во Тбил. ун-та, 1969. 271 с.
- [29] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. Москва, Наука, 1973. 448 с.
- [30] Ито К. Вероятностные процессы. Вып.2. Москва, ИЛ, 1963. 135 с.
- [31] Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Т.1. Москва, Наука, 1971. 576 р.
- [32] Козин Ф. Введение в устойчивость стохастических систем. *Автоматика*. 5 (1969), 95-112.
- [33] Кореневский М.Л. Об оптимизации одного метода приближенного вычисления матричной экспоненты. *Труды междунар. конф. "Средства математического моделирования"*. С.-Петербург, 1997, с. 125-134.
- [34] Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Москва, Наука, 1985. 640 с.
- [35] Кузнецов Д.Ф. Конечно-разностная аппроксимация разложения Тейлора-Ито и конечно-разностные методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито. *ВИНИТИ*, 3509-В96 (1996), 24 с.
- [36] Кузнецов Д.Ф. Конечно-разностный метод численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито с локальной среднеквадратической погрешностью третьего порядка малости. *ВИНИТИ*, 3510-В96 (1996), 27 с.
- [37] Кузнецов Д.Ф. Теоретическое обоснование метода разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанного на кратных рядах Фурье по тригонометрическим и сферическим функциям. *ВИНИТИ*, 3608-В97 (1997), 27 с.
- [38] Кузнецов Д.Ф. Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах. *ВИНИТИ*, 3607-В97 (1997), 31 с.
- [39] Кузнецов Д.Ф. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций. *Электронный журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления"*. 1997, no. 1, 18-77. Доступно по ссылке:  
<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j002.pdf>
- [40] Кузнецов Д.Ф. Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. *Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления"*. 1998, no. 1, 66-367. DOI: 10.18720/SPBPU/2/z17-6. Доступно по ссылке:  
<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j011.pdf>

- [41] Кузнецов Д.Ф. Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов. Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления". 1998, но. 4, 18-28. Доступно по ссылке:  
<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j025.pdf>
- [42] Кузнецов Д.Ф. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций и его применение к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито. Труды межд. конф. "Средства математического моделирования" (С.-Петербург, 3-6 декабря 1997). Изд. СПбГТУ, 1998, 135-160.
- [43] Кузнецов Д.Ф. Использование различных полных ортонормированных систем функций для численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Тезисы докладов второй междунар. конф. "Дифференц. уравнения и их прим." (С.-Петербург, 5-20 июня 1998). Изд. СПбГТУ, 1998, 128-129.
- [44] Кузнецов Д.Ф. Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем. Проблемы управления и информатики. 4 (1999), 91-108.
- [45] Кузнецов Д.Ф. Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на кратных рядах Фурье. Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 260 (1999), 164-185.
- [46] Кузнецов Д.Ф. К проблеме численного моделирования стохастических систем. Вестн. молодых ученых. Сер. прикл. мат. и мех. 1 (1999), 20-32.
- [47] Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. С.-Петербург, Наука, 1999. 460 с.
- [48] Кузнецов Д.Ф. Применение полиномов Лежандра к среднеквадратической аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений. Проблемы управления и информатики. 5 (2000), 84-104.
- [49] Кузнецов Д.Ф. Слабый численный метод четвертого порядка для стохастических дифференциальных уравнений Ито. Вестн. молодых ученых. Сер. прикл. мат. и мех. 4 (2000), 47-52.
- [50] Кузнецов Д.Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. С.-Петербург, Изд-во СПбГУ, 2001. 712 с.
- [51] Кузнецов Д.Ф. Новые представления явных одношаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой. Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 41: 6 (2001), 922-937.
- [52] Кузнецов Д.Ф. Новые представления разложения Тейлора-Стратоновича. Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 278 (2001), 141-158.
- [53] Кузнецов Д.Ф. Конечно-разностные сильные численные методы порядков точности 1.5 и 2.0 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с неаддитивным многомерным шумом. Проблемы управления и информатики. 4 (2001), 59-73.

- [54] Кузнецов Д.Ф. Комбинированный метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов. *Проблемы управления и информатики*. 4 (2002), 141-147.
- [55] Кузнецов Д.Ф. Трехшаговые сильные численные методы для стохастических дифференциальных уравнений Ито. *Проблемы управления и информатики*. 6 (2002), 104-119.
- [56] Кузнецов Д.Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2. С.-Петербург, Изд-во Политехнического университета, 2006. 764 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-227.
- [57] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программой в системе MATLAB 7.0. С.-Петербург, Изд-во Политехнического университета, 2007, 778 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-228.
- [58] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. Изд. 2-е. С программами для РС в системе MATLAB 7.0. С.-Петербург, Изд-во Политехнического университета, 2007, xxxii+770 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-229.
- [59] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. Изд. 3-е. С программами для РС в системе MATLAB 7.0. С.-Петербург, Изд-во Политехнического университета, 2009, xxxiv+768 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-230.
- [60] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. Изд. 4-е. С программами для РС в системе MATLAB 7.0. С.-Петербург, Изд-во Политехнического университета, 2010, xxx+786 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-231.
- [61] Кузнецов Д.Ф. Повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича и кратные ряды Фурье. Электронный журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления". 2010, no. 3, 257 с. (A.1–A.257). DOI: 10.18720/SPBPU/2/z17-7. Доступно по ссылке: [http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov\\_book.pdf](http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov_book.pdf)
- [62] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MatLab. Изд. 5-е. Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления", 2017, no. 2, 1000 с. (A.1–A.1000). DOI: 10.18720/SPBPU/2/z17-4. Доступно по ссылке: [http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov\\_book3.pdf](http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov_book3.pdf)
- [63] Кузнецов Д.Ф. Разложение повторных стохастических интегралов стратоновича второй кратности, основанное на двойных рядах Фурье-Лежандра, суммируемых по Принсхейму. Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления". 2018, no. 1, 1-34. Доступно по ссылке: [http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov\\_4.pdf](http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov_4.pdf)
- [64] Кузнецов Д.Ф. К Численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1.5 и 2.0. Автомат. и телемех. 7 (2018), 80-98.

- [65] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Разложение процессов Ито в ряд Тейлора-Ито в окрестности фиксированного момента времени. *ВИНИТИ*, 2637-В93 (1993), 26 с.
- [66] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито. *ВИНИТИ*, 1678-В94 (1994), 42 с.
- [67] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора-Ито, Электронный Журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления". 1997, no. 1, 1-17. Доступно по ссылке:  
<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j001.pdf>
- [68] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора-Ито. Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 244 (1997), 186-204.
- [69] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование решений стохастических систем линейных стационарных дифференциальных уравнений. Электронный журнал "Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления". 1998, no. 1, 41-65. Доступно по ссылке: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j010.pdf>
- [70] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Численные методы моделирования систем управления, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями. *Проблемы управления и информатики*. 2 (1998), 57-72.
- [71] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва, Наука, 1967. 736 с.
- [72] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. Москва, Наука, 1974. 696 с.
- [73] Мильштейн Г.Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. *Теория вероятн. и ее прим.* 19 (1974), 557–562.
- [74] Мильштейн Г.Н. Метод второго порядка точности интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. *Теория вероятн. и ее прим.* 23 (1978), 396-401.
- [75] Мильштейн Г.Н. Слабая аппроксимация решений систем стохастических дифференциальных уравнений. *Теория вероятн. и ее прим.* 30 (1985), 750-766.
- [76] Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск, Изд-во Уральск. ун-та, 1988. 225 с.
- [77] Мильштейн Г.Н. Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. *Теория вероятн. и ее прим.* 40 (1995), 657-665.
- [78] Насыров Ф.С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. Москва, Физматлит, 2011. 212 с.
- [79] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. Москва, Наука, 1987. 424 с.

- [80] Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики.* 18: 1 (1978), 106-117.
- [81] Орлов А. Служба Широты. Москва, Изд-во АН СССР, 1958. 126 с.
- [82] Первозванский А.А. Рынок: Расчет и риск. Москва, ИНФРА, 1994. 210 с.
- [83] Понtryагин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 5-е. Москва, Наука, 1982. 331 с.
- [84] Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация. Москва, Наука, 1985. 559 с.
- [85] Разевиг В.Д. Цифровое моделирование многомерных динамических систем при случайных воздействиях. *Автоматика и телемеханика.* 4 (1980), 177-186.
- [86] Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. Москва, Физматгиз, 1963. 284 с.
- [87] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. Москва, Наука, 1984. 304 с.
- [88] Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 3-е. Москва-Ленинград, Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951. 464 с.
- [89] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва, Наука, 1987. 476 с.
- [90] Самарский А.А. Теория разностных схем. Изд. 3-е. Москва, Наука, 1989. 614 с.
- [91] Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. Москва, Наука, 1964. 280 с.
- [92] Слуцкий Е.Е. О 11-летней периодичности солнечных пятен. *Докл. АН СССР.* 4: 9, 1-2 (1935), 35-38.
- [93] Старченко Т.К. Об условиях сходимости двойных рядов Фурье-Лежандра. *Труды института математики НАН Беларуси. Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений.* Минск. 5 (2000), 124-126.
- [94] Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Москва, Советское радио, 1961. 556 с.
- [95] Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Москва, Изд-во МГУ, 1966. 320 с.
- [96] Стратонович Р.Л., Полякова М.С. Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики. Москва, Изд-во МГУ, 1981. 176 с.
- [97] Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. Изд. 3-е (перераб. и дополн.). М.: Физматлит, 2005. 480 с.

- [98] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е. Москва, Наука, 1977. 735 с.
- [99] Толстов Г.П. Ряды Фурье. Москва-Ленинград, Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951. 396 с.
- [100] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва, Наука, 1969. 365 с.
- [101] Ширяев А.Н. Вероятность. Москва, Наука, 1989. 640 с.
- [102] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Москва, Фазис, 1998. 544 с.
- [103] Allen E. Modeling with Ito stochastic differential equations. Dordrecht, Springer Publ., 2007. 240 p.
- [104] Allen E. Approximation of triple stochastic integrals through region subdivision. *Communications in Applied Analysis* (Special Tribute Issue to Professor V. Lakshmikantham), 17 (2013), 355-366.
- [105] Arato M. Linear stochastic systems with constant coefficients. a statistical approach. Berlin, Heidelberg, N.Y., Springer-Verlag Publ., 1982. 289 p.
- [106] Arnold L. Stochastic differential equations: Theory and applications. N.Y., Wiley Publ., 1974. 228 p.
- [107] Arnold L., Kloeden P.E. Explicit formulae for the Lyapunov exponents and rotation number of two-dimensional systems with telegraphic noise. *SIAM J. Appl. Math.* 49 (1989), 1242-1274.
- [108] Bachelier L. Theorie de la speculation. *Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. Ser.3.* 17 (1900), 21-86.
- [109] Bally V., Talay D. The Euler scheme for stochastic differential equations: Error analysis with Malliavin calculus. *Math. Comput. Simulation.* 38 (1995), 35-41.
- [110] Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations I. Convergence rate of the distribution function. *Probab. Theory Related Fields.* 104: 1 (1996), 43-60.
- [111] Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations II. Convergence rate of the density. *Monte Carlo Methods Appl.* 2: 2 (1996) 93-128.
- [112] Bjork T., Kabanov Yu., Runggaldier W. Bond market structure in the presence of marked point processes. *Math. Finance.* 7: 2 (1997), 211-239.
- [113] Blumenthal R.M., Getoor R.K., McKean H.P. Markov processes with identical hitting distributions. *Illinois J. Math.* 6 (1962), 402-421.
- [114] Boyce W. E. Approximate solution of random ordinary differential equations. *Adv. in Appl. Probab.* 10 (1978), 172-184.

- [115] Burrage K., Platen E. Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. *Ann. Numer. Math.* 1: 1-4 (1994), 63-78.
- [116] Chang C.C. Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients. *Math. Comput.* 49 (1987), 523-542.
- [117] Chung K.L., Williams R.J. Introduction to stochastic integration. Progress in Probability and Stochastics. Vol.4, Ed. Huber P., Rosenblatt M. Boston, Basel, Stuttgart, Birkhauser Publ., 1983. 152 p.
- [118] Claudine L, Rosler A. Iterated stochastic integrals in infinite dimensions – approximation and error estimates. arXiv:1709.06961 [math.PR], 2017, 22 pp.
- [119] Clements D.J., Anderson B.D.O. Well behaved Ito equations with simulations that always misbehave. *IEEE Trans. Automat. Control.* AC-18 (1973), 676-677.
- [120] Doob J.L. Semimartingales and subharmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 77 (1954), 86-121.
- [121] Einstein A. Investigations on the theory of the Brownien movement. N.Y., Dover, 1956. 122 p.
- [122] Feng J.F. Numerical solution of stochastic differential equations. *Chinese J. Numer. Math. Appl.* 12 (1990), 28-41.
- [123] Feng J.F., Lei G.Y., Qian M.P. Second order methods for solving stochastic differential equations. *J. Comput. Math.* 10: 4 (1992), 376-387.
- [124] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs, Prentice-Hall Publ., 1964. 347 p.
- [125] Gantmacher F.R. The theory of matrices. New York, Chelsea Publ., 1959. Vol.1: 374 p., Vol.2: 277 p.
- [126] Gard T.C. Introduction to stochastic differential equations. N.Y., Marcel Dekker Publ., 1988. 324 p.
- [127] Gilsing H, Shardlow T. SDELab: A package for solving stochastic differential equations in MATLAB. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 205: 2 (2007), 1002-1018.
- [128] Greenside H.S., Helfand E. Numerical integration of stochastic differential equations. II. *Bell System Tech. J.* 60 (1981), 1927-1940.
- [129] Han X, Kloeden P.E. Random ordinary differential equations and their numerical solution. Singapore: Springer. 2017, 250 pp.
- [130] Hardy G.H., Rogosinski W.W. Fourier series. N.Y., Dover Publ., 1999. 112 p.
- [131] Haworth D.C., Pope S.B. A second-order Monte-Carlo method for the solution of the Ito stochastic differential equation. *Stoch. Anal. Appl.* 4 (1986), 151-186.
- [132] Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. N.Y., Wiley Publ., 1962. 407 p.

- [133] Hernandez D.B., Spigler R. Convergence and stability of implicit Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise. *BIT*. 33 (1993), 654-669.
- [134] Higham D.J., Mao X., Stuart A.M. Strong convergence of Euler-type methods for non-linear stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 40 (2002), 1041-1063.
- [135] Hobson E.W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931. 502 p.
- [136] Hofmann N., Platen E. Stability of weak numerical schemes for stochastic differential equations. *Comput. Math. Appl.* 28: 10-12 (1994), 45-57.
- [137] Hofmann N., Platen E. Stability of superimplisit numerical methods for stochastic differential equations. *Fields Inst. Communications*. 9 (1996), 93-104.
- [138] Hull J., White A. The pricing of options as assets with stochastic volatilities. *J. Finance*. 42 (1987), 281-300.
- [139] Hull J. Options, futures and other derivatives securities. N.Y., J.Wiley and Sons Publ., 1993. 368 p.
- [140] Ikeda N., Watanabe S,. Stochastic differential equations and diffusion processes. Amsterdam, Oxford, N.Y., North Holland Publ. Co., 1981. 480 p.
- [141] Janssen R. Difference-methods for stochastic differential equations with discontinuous coefficients. *Stochastics*. 13 (1984), 199-212.
- [142] Janssen R. Discretization of the Wiener process in difference methods for stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.* 18 (1984), 361-369.
- [143] Kac M. On distribution of certain Wiener functionals. *Trans. Amer. Math. Soc.* 65 (1949), 1-13.
- [144] Kac M. On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab.* 1 (1951), 189-215.
- [145] Kamrani M., Jamshidi N. Implicit Milstein method for stochastic differential equations via the Wong-Zakai approximation. *Numerical Algorithms*. (2017), 1-18.
- [146] Klauder J.R., Petersen W.P. Numerical integration of multiplicative-noise stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 22 (1985), 1153-1166.
- [147] Kloeden P.E., Platen E. The Stratonovich and Ito-Taylor expansions. *Math. Nachr.* 151 (1991), 33-50.
- [148] Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin, Springer-Verlag Publ., 1992. 632 p.
- [149] Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. The approximation of multiple stochastic integrals. *Stoch. Anal. Appl.* 10: 4 (1992), 431-441.
- [150] Kloeden P.E., Platen E. Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations. *J. Statist. Physics*. 66 (1992), 283-314.

- [151] Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin, Springer-Verlag Publ., 1994. 292 p.
- [152] Kloeden P.E., Platen E., Hofmann N. Extrapolation methods for the weak approximation of Ito diffusions. *SIAM J. Numer. Anal.* 32 (1995), 1519-1534.
- [153] Kloeden P.E., Platen E., Schurz H., Sorensen M. On effects of discretization on estimators of drift parameters for diffusion processes. *J. Appl. Probab.* 33 (1996), 1061-1076.
- [154] Kushner H.J. Stochastic stability and control. N.Y., London, Academic Press, 1967. 162 p.
- [155] Kushner H.J. Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations. N.Y., San Francisco, London, Academic Press, 1977. 242 p.
- [156] Kuznetsov D.F. Strong approximation of multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals: multiple Fourier series approach. (In English). St.-Petersburg, Polytechnical University Publishing House, 2011, 250 pp. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-232.
- [157] Kuznetsov D.F. Strong approximation of multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals: multiple Fourier series approach. 2nd Ed. (In English). St.-Petersburg, Polytechnical University Publishing House, 2011, 284 pp. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-233.
- [158] Kuznetsov D.F. Multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals: approximations, properties, formulas. (In English). St.-Petersburg, Polytechnical University Publishing House, 2013, 382 pp. DOI: 10.18720/SPBPU/2/s17-234.
- [159] Kuznetsov D.F. Multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals: Fourier-Legendre and trigonometric expansions, approximations, formulas. (In English). *Electronic Journal "Differential Equations and Control Processes"*. 2017, no. 1, 385 pp. (A.1-A.385). DOI: 10.18720/SPBPU/2/z17-3. Available at:  
[http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov\\_book2.pdf](http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/kuznetsov_book2.pdf)
- [160] Kuznetsov D.F. Strong approximation of multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals. *Intern. Conf. on Mathematical Modeling in Applied Sciences. Abstracts Book* (S.-Petersburg, July 24-28), S.-Petersburg, Polytechnic University Publishing House, 2017, 141-142.
- [161] Kuznetsov D.F. Application of the Fourier method to the mean-square approximation of multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals. (In English). arXiv:1712.08991 [math.PR]. 2017, 15 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1712.08991>
- [162] Kuznetsov D.F. Expansions of multiple Stratonovich stochastic integrals, based on generalized multiple Fourier series. (In English). arXiv:1712.09516 [math.PR]. 2017, 25 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1712.09516>
- [163] Kuznetsov D.F. Expansion of multiple Ito stochastic integrals of arbitrary multiplicity, based on generalized multiple Fourier series, converging in the mean. (In English). arXiv:1712.09746 [math.PR]. 2017, 22 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1712.09746>

- [164] Kuznetsov D.F. Mean-square approximation of multiple Ito and Stratonovich stochastic integrals from the Taylor-Ito and Taylor-Stratonovich expansions, using Legendre polynomials. (In English). arXiv:1801.00231 [math.PR]. 2017, 29 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.00231>
- [165] Kuznetsov D.F. Expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals of arbitrary multiplicity, based on generalized repeated Fourier series, converging pointwise. (In English). arXiv:1801.00784 [math.PR]. 2018, 23 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.00784>
- [166] Kuznetsov D.F. Exact calculation of mean-square error of approximation of multiple Ito stochastic integrals for the method, based on the multiple Fourier series. (In English). arXiv:1801.01079 [math.PR]. 2018, 19 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.01079>
- [167] Kuznetsov D.F. Expansion of triple Stratonovich stochastic integrals, based on generalized multiple Fourier series, converging in the mean: general case of series summation. (In English). arXiv:1801.01564 [math.PR]. 2018, 26 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.01564>
- [168] Kuznetsov D.F. Expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals of multiplicity 2, based on double Fourier-Legendre series, summarized by Prinsheim method. (In Russian). arXiv:1801.01962 [math.PR]. 2018, 21 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.01962>
- [169] Kuznetsov D.F. The hypothesis about expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals of arbitrary multiplicity. (In English). arXiv:1801.03195 [math.PR]. 2018, 14 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.03195>
- [170] Kuznetsov D.F. Direct combined approach for expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals of multiplicities 2 - 4, based on generalized multiple Fourier series. (In English). arXiv:1801.05654 [math.PR]. 2018, 22 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.05654>
- [171] Kuznetsov D.F. Application of the direct combined approach to expansion of double Stratonovich stochastic integrals. (In English). arXiv:1801.07248 [math.PR]. 2018, 9 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.07248>
- [172] Kuznetsov D.F. Theorems about integration order replacement in multiple Ito stochastic integrals. (In English). arXiv:1801.04634 [math.PR]. 2018, 21 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.04634>
- [173] Kuznetsov D.F. Expansion of multiple stochastic integrals according to martingale Poisson measures and according to martingales, based on generalized multiple Fourier series. (In English). arXiv:1801.06501 [math.PR]. 2018, 20 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.06501>
- [174] Kuznetsov D.F. Expansions of multiple Stratonovich stochastic integrals from the Taylor-Stratonovich expansion, based on multiple trigonometric Fourier series. Comparison With the Milstein Expansion. (In English). arXiv:1801.08862 [math.PR]. 2018, 18 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1801.08862>

- [175] Kuznetsov D.F. Expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals of fifth multiplicity, based on generalized multiple Fourier series. (In English). arXiv:1802.00643 [math.PR]. 2018, 21 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1802.00643>
- [176] Kuznetsov D.F. To numerical modeling with strong orders 1.5 and 2.0 of convergence for multidimensional dynamical systems with random disturbances. (In English). arXiv:1802.00888 [math.PR]. 2018, 15 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1802.00888>
- [177] Kuznetsov D.F. Explicit one-step strong numerical methods of order 2.5 for Ito stochastic differential equations, based on the unified Taylor-Ito and Taylor-Stratonovich expansions. (In English). arXiv:1802.04844 [math.PR]. 2018, 23 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1802.04844>
- [178] Kuznetsov D.F. Numerical simulation of 2.5-set of multiple Ito stochastic integrals of multiplicities 1 to 5. (In English). arXiv:1805.12527 [math.PR]. 2018, 16 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1805.12527>
- [179] Kuznetsov D.F. Numerical simulation of 2.5-set of multiple Stratonovich stochastic integrals of multiplicities 1 to 5. (In Russian). arXiv:1806.10705 [math.PR]. 2018, 16 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1806.10705>
- [180] Kuznetsov D.F. New representation of Levy stochastic area, based on Legendre polynomials. (In English). arXiv:1807.00409 [math.PR]. 2018, 16 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1807.00409>
- [181] Kuznetsov D.F. Strong numerical methods of order 3.0 for Ito stochastic differential equations, based on the unified stochastic Taylor expansions and multiple Fourier-Legendre series, (In English). arXiv: 1807.02190 [math.PR]. 2018, 30 pp. Available at: <https://arxiv.org/abs/1807.02190>
- [182] Kuznetsov D.F. Development and application of the Fourier method for the numerical solution of Ito stochastic differential equations, *Comput. Math. Math. Phys.* 58: 7 (2018), 1058-1070.
- [183] Lotka A.J. Undamped oscillations derived from the law of mass action. *J. Amer. Chem. Soc.* 42: 8 (1920), 1595-1599.
- [184] Maghsoodi Y., Harris C.J. In-probability approximation and simulation of nonlinear jump-diffusion SDE. *IMA J. Math. Control Inform.* 4 (1987), 65-92.
- [185] Maghsoodi Y. Mean-square efficient numerical solution of jump-diffusion SDE. 1994. Preprint OR72. Univ. of Southampton. 26 p.
- [186] Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations. *Rend. Circ. Math. Palermo.* 4 (1955), 48-90.
- [187] McKenna J., Morrison J.A. Moments and correlation functions of a stochastic differential equation. *J. Math. Phys.* 11 (1970), 2348-2360.
- [188] McKenna J., Morrison J.A. Moments of solutions of a class of stochastic differential equations. *J. Math. Phys.* 12 (1971), 2126-2136.

- [189] Merton R.C. Option pricing when underlying stock returns and discontinuous. *J. Financial Economics.* 3 (1976), 125-144.
- [190] Merton R.C. Continuous-time finance. Oxford; N.Y., Blackwell Publ., 1990. 453 p.
- [191] Mikulevicius R. On some properties of solutions of stochastic differential equations. *Lietuvos Mat. Rink.* 4 (1983), 18-31.
- [192] Mikulevicius R., Platen E. Time discrete Taylor approximations for Ito processes with jump component. *Math. Nachr.* 138 (1988), 93-104.
- [193] Mikulevicius R., Platen E. Rate of convergence of the Euler approximation for diffusion processes. *Math. Nachr.* 151 (1991), 233-239.
- [194] Milstein G.N. The probability approach to numerical solution of nonlinear parabolic equations. 1997. Preprint No. 380, WIAS. 29 p.
- [195] Milstein G.N., Platen E., Schurz H. Balanced implicit methods for stiff stochastic systems. *SIAM J. Numer. Anal.* 35: 3 (1998), 1010-1019.
- [196] Milstein G.N., Tretyakov M.V. Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin, Springer-Verlag Publ., 2004. 596 p.
- [197] Milstein G.N., Tretyakov M.V. Numerical integration of stochastic differential equations with nonglobally lipschitz coefficients. *SIAM J. Numer. Anal.* 43: 3 (2005), 1139-1154
- [198] Milstein G.N., Tretyakov M.V. Numerical algorithms for forward-backward stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 28: 2 (2006), 561-582
- [199] Milstein G.N., Tretyakov M.V. Practical variance reduction via regression for simulating diffusions. *Reseach Reports in Mathematics.* Report No. MA-06-019, University of Leicester, 2006. 24 p.
- [200] Milstein G.N., Tretyakov M.V. Solving linear parabolic stochastic partial differential equations via averaging over characteristics. *Reseach Reports in Mathematics.* Report No. MA-07-009, University of Leicester, 2007. 26 p.
- [201] Newton N.J. An asymptotically efficient difference formula for solving stochastic differential equations. *Stochastics.* 19 (1986), 175-206.
- [202] Newton N.J. Asymptotically optimal discrete approximations for stochastic differential equations. In theory and applications of nonlinear control systems. Ed. C. Byrnes, A. Lindquist. Amsterdan, 1986, p. 555-567.
- [203] Newton N.J. Asymptotically efficient Runge-Kutta methods for a class of Ito and Stratonovich equations. *SIAM J. Appl. Math.* 51 (1991), 542-567.
- [204] Nyquist H. Thermal agittation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.* 32 (1928), 110-113.
- [205] Obuhov A.M. Description of turbulence in Lagrangian variables. *Adv. Geophys.* 3 (1959), 113-115.

- [206] Petrovski I.G. Über das Irrfahrtproblem. *Math. Ann.* 109 (1934), 425-444.
- [207] Pettersson R. The Stratonovich-Taylor expansion and numerical methods. *Stoch. Anal. Appl.* 10: 5 (1992), 603-612.
- [208] Philips H.B., Wiener N. Nets and Dirichlet problem. *J. Math. Phys.* 2 (1923), 105-124.
- [209] Platen E. A Taylor-Ito formula for semimartingales solving a stochastic differential equation. *Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sci.* 36 (1981), 157-164.
- [210] Platen E. A generalized Taylor formula for solutions of stochastic differential equations. *Sankhya.* 44A (1982), 163-172.
- [211] Platen E. An approximation method for a class of Ito processes with jump component. *Lietuvos Mat. Rink.* 22 (1982), 124-136.
- [212] Platen E., Wagner W. On a Taylor formula for a class of Ito processes. *Probab. Math. Statist.* 3 (1982), 37-51.
- [213] Platen E. Zur zeitdiskreten Approximation von Itoprozessen. Diss. B., IMath. Akad. der Wiss. der DDR, 1984. Berlin.
- [214] Platen E. Higher-order weak approximation of Ito diffusions by Markov chains. *Probab. Eng. Inform. Sci.* 6 (1992), 391-408.
- [215] Platen E. On weak implicit and predictor-corrector methods. *Math. Comput. Simulation.* 38 (1995), 69-76.
- [216] Platen E. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations. *Acta Numerica.* 8 (1999), 197-246.
- [217] Platen E., Bruti-Liberati N. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 2010. 868 p.
- [218] Pontrjagin L.S., Andronov A.A., Witt A.A. Statistische auffassung dynamischer systeme. *Phys. Zeit.* 6: (1934), 1-24.
- [219] Reshniak V., Khaliq A.Q.M, Voss D.A., Zhang G. Split-step Milstein methods for multi-channel stiff stochastic differential systems. *Applied Numerical Mathematics.* 89 (2015), 1-23.
- [220] Richardson J.M. The application of truncated hierarchy techniques in the solution of a stochastic linear differential equation. In Stochastic Processes in Mathematical Phisics and Engineering. *Proc. Symp. Appl. Math.* Ed. R. Bellman. Amer. Math. Soc. Providence RI. 16 (1964), 290-302.
- [221] Rossler O.E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett.* 57A (1976), 397-398.
- [222] Rumelin W. Numerical treatment of stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 19 (1982), 604-613.
- [223] Ryden T., Wiktorsson M. On the simulation of iterated Ito integrals. *Stoch. Processes and their Appl.* 91 (2001) 151-168.

- [224] Schurz H. Asymptotical mean square stability of an equilibrium point of some linear numerical solutions with multiplicative noise. *Stoch. Anal. Appl.* 14 (1996), 313-354.
- [225] Schurz, H. Numerical regularization for SDEs: construction of nonnegative solutions. *Dynam. Systems Appl.* 5: 3, (1996), 323-351.
- [226] Shkurko I.O. Numerical solution of linear systems of stochastic differential equations. *Numer. Methods Statist. Modeling. Collected Scientific Works.* Novosibirsk, 1987. p. 101-109.
- [227] Smoluhovski M.V. Drei Vortrage über Diffusion Brownsche Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Zeit..* 17 (1916), 557-585.
- [228] Strook D.W., Varadhan S.R.S. Multidimensional diffusion processes. Berlin, Springer Publ., 1979. 338 p.
- [229] Talay D. Convergence pour chaque trajectoire d'un schéma d'approximation des EDS. *Computes Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math.* 295 (1982), 249-252.
- [230] Talay D. Efficient numerical schemes for the approximation of expectations of functionals of the solution of an SDE and applications. *Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sci.* 61 (1984), 294-313.
- [231] Talay D., Tubaro L. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stoch. Anal. Appl.* 8: 4 (1990), 483-509.
- [232] Ueno T. The diffusion satisfying Wentzell's boundary conditions and the Markov processes on the boundary. *Proc. Japan Akad.* 36 (1960), 533-538.
- [233] Van der Ziel A. Fluctuation phenomena in semi-conductors. London, Butterworths Scientific Publ., 1959, 168 p.
- [234] Wagner W., Platen E. Approximation of Ito integral equations. Preprint ZIMM Akad. Wiss. DDR. Berlin. 1978. 27 p.
- [235] Wagner W. Unbiased Monte-Carlo evaluation of certain functional integrals. *J. Comput. Phys.* 71 (1987), 21-33.
- [236] Wagner W. Monte-Carlo evaluation of functionals of solutions of stochastic differential equations. Variance reduction and numerical examples. *Stoch. Anal. Appl.* 6 (1988), 447-468.
- [237] Wolf J.R. Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung. *Mit. Naturforsch. Ges. Bern.* 255, (1852), 249-270.
- [238] Wright D.J. The digital simulation of stochastic differential equations. *IEEE Trans. Automat. Control.* AC-19 (1974), 75-76.
- [239] Wright D.J. Digital simulation of Poisson stochastic differential equations. *Internat. J. Systems Sci.* 6 (1980), 781-785.
- [240] Zahri M. Multidimensional Milstein scheme for solving a stochastic model for prebiotic evolution. *Journal of Taibah University for Science.* 8: 2 (2014), 186-198.

# Обозначения

$\in, \cup, \cap, \setminus, \times$  — принадлежность множеству, а также объединение, пересечение, разность и декартово произведение множеств соответственно

$\equiv, \ll, :=, \stackrel{\text{def}}{=}, \approx$  — тождественное равенство, "много меньше", "присвоить", равно по определению и приближенно равно соответственно

$\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство

$n!, n!!$  — факториал и двойной факториал натурального  $n$  соответственно

$C_n^m$  — биномиальный коэффициент

$(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение

$N, Z, \emptyset$  — множества натуральных и целых чисел, а также пустое множество соответственно

$\infty$  — бесконечность

$[x], |x|$  — целая часть и модуль числа  $x$  соответственно

$\forall x$  — "для всех  $x$ "

$\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_A(x)$  — индикатор и индикаторная функция множества  $A$  соответственно

$F : X \rightarrow Y$  — функция (отображение)  $F$  из  $X$  в  $Y$

$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})^\top$  — столбец  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  с компонентами  $\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, n$

$|\mathbf{x}|, \|\cdot\|$  — евклидова норма вектора  $\mathbf{x}$  и норма вектора или матрицы соответственно

$\partial F / \partial \mathbf{x}^{(i)}, \partial^2 F / \partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}$  — частная производная функции  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  по переменной  $\mathbf{x}^{(i)}$  и ее смешанная частная производная по переменным  $\mathbf{x}^{(j)}$  и  $\mathbf{x}^{(i)}$

$A = \|A^{(ij)}\|_{i,j=1}^{n,m}$  — матрица  $A$  размера  $n \times m$  с элементами  $A^{(ij)}$

$|A|, \det(A)$  — определитель матрицы  $A$

$\{a_n\}_{n=0}^N$  — последовательность  $a_n, n = 1, 2, \dots, N; N \leq \infty$

$\sup X, \inf X, \max X, \min X$  — точные верхняя и нижняя грани множества  $X$ , а также наибольший и наименьший элементы этого множества соответственно

$N(m, \sigma)$  — нормальное (гауссовское) распределение с параметрами  $m$  и  $\sigma$

$A > 0, A^\top$  — положительно определенная и транспонированная матрица  $A$  соответственно

$\sum_{i=1}^n x_i, \prod_{i=1}^n x_i$  — сумма  $x_1 + \dots + x_n$  и произведение  $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  соответственно

$\sum_{x \in X}, \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n, \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}$  — сумма по всем  $x$  из множества  $X$ , повторная сумма  $\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n$

и сумма по всем возможным перестановкам  $(\lambda_k, \dots, \lambda_1)$  соответственно

$\overset{k}{\cdot}$  — свертка матриц

$\omega$ ,  $M$ ,  $D$ ,  $P$ ,  $M\{\cdot|\cdot\}$  — элементарное событие, математическое ожидание, дисперсия, вероятность и условное математическое ожидание соответственно

l.i.m. — предел в среднем квадратическом

$x_t$  — случайный процесс  $x(t, \omega)$

$O(x^p)$  — величина, предел отношения которой к  $x^p$  конечен и отличен от нуля

$f_t$ ,  $f(t, \omega)$  — скалярный винеровский процесс

$\int \dots df_t$ ,  $\int^* \dots df_t$  — стохастические интегралы Ито и Стратоновича соответственно

$w_t$  —  $f_t$  или  $t$  в компактных обозначениях

$\mathbf{f}_t$  — векторный винеровский процесс с компонентами  $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$

$\mathbf{w}_t$  — столбец длины  $m + 1$  с компонентами  $\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $\mathbf{w}_t^{(0)} = t$

$L$ ,  $G_0^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — операторы сноса и диффузии в формуле Ито

$\zeta_{(j)T,t}^{(i)}$ ,  $\zeta_j^{(i)}$  — независимые стандартные гауссовские случайные величины

$J_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{(i_1 \dots i_k)}$ ,  $I_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{(i_1 \dots i_k)}$ ,  $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{(i_k \dots i_1)}$ ,  $J[\psi^{(k)}]_{T, t}$ ,  $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)}$ ,  $J^*[\psi^{(k)}]_{T, t}$ ,  $J_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)}$ ,  $I_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)}$  — повторные стохастические интегралы

$\hat{J}_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{(i_1 \dots i_k)}$ ,  $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{(i_k \dots i_1)}$ ,  $I_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{(i_1 \dots i_k)q}$ ,  $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{(i_k \dots i_1)q}$ ,  $J[\psi^{(k)}]_{T, t}^{q_1, \dots, q_k}$ ,  $J[\psi^{(k)}]_{T, t}^q$ ,  $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)}$ ,  $I_{l_1 \dots l_{k_s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)q}$  — аппроксимации повторных стохастических интегралов

# Индекс

- Абсолютная устойчивость, 787  
Аддитивное разделение переменных, 175  
Аддитивный шум, 721, 739, 801  
Алгоритм, 59, 853, 858, 861 – 863, 866, 867  
Аппроксимация
  - кусочно-постоянная, 855
  - тейлоровская, 81, 701, 855, 870
  - повторных стохастических интегралов
    - Ито, 542 – 569, 573 – 582
  - повторных стохастических интегралов
    - Стратоновича, 542, 573 – 582
- Аттрактор
  - Лоренца, 931
  - Ресслера, 945
- А-устойчивость, 126, 783, 830
- Базис, 47, 50
  - стохастический, 243, 244
- Броуновское движение, 101, 102, 110
- Броуновский мост, 54, 598
- Вектор
  - сноса, 49, 68
  - состояния, 101, 122
- Винеровский процесс, 53
- Вероятность перехода, 43
- Гиперкуб, 251
- Дифференцируемость
  - по Ито, 185
    - многократная, 189
  - по Стратоновичу, 212
    - многократная, 215
- D*-martингал, 42, 164, 484, 492, 660, 661
- Доверительный интервал, 647 – 649, 794
- Задача
  - Дирихле, 133 – 136
  - Коши, 136 – 140, 982, 983, 988 – 990
  - краевая, 491
  - о колебаниях круглой мембранны
    - общий случай, 491
    - радиальных, 492
  - оценки параметров, 131, 132, 947 – 952
  - стохастической устойчивости, 126 – 131, 979 – 982
- стохастического оптимального управления, 123 – 125, 966, 970
  - по неполным данным, 866
- тестирования процедур оценивания параметров, 947 – 952
- фильтрации
  - Калмана-Бьюси, 122 – 123, 961
    - нелинейной оптимальной, 963
    - марковской цепи, 952
- Закон
  - повторного логарифма, 54
  - распределения вероятностей
    - гауссовский, 40
    - пуассоновский, 57 – 59
    - Стьюдента, 647, 794
- Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах
  - Ито, 146 – 163
  - по *D*-martингалу, 164 – 168
- Интеграл
  - Римана, 147
  - стохастический
    - Ито, 61, 64, 66
    - по *D*-martингалу, 86, 88, 89
    - по пуассоновской мартингальной случайной мере, 80 – 92
    - смешанный, 149
    - Стратоновича, 78
  - повторный стохастический
    - Ито, 4, 149, 166, 167, 191, 194, 195, 251
    - по *D*-martингалу, 484
    - по пуассоновской мартингальной случайной мере, 478
    - Стратоновича, 4, 169, 171, 172, 218, 222, 226, 251
- Интерполяция
  - линейная, 855
  - квадратичная, 855
  - кубическая, 856
- Класс Гельдера, 298
- Коэффициент

- биномиальный, 208, 225, 245, 246
- диффузии, 67, 68
- сноса, 48, 67, 68, 75
- Фурье, 252, 284, 329, 389, 410, 569
- Фурье–Лежандра, 297, 569
- Критерий
  - Коши, 35
  - сходимости сильный, 646
  - сходимости слабый, 793
- Мартингал, 42
  - дискретный, 42, 660 – 662
- Матрица
  - гурвицева, 105
  - диффузии, 48, 75
  - $k$ -го ранга, 187
  - невырожденная, 133
  - неотрицательно определенная, 48
- Матричная экспонента, 621, 845
- Математическая модель
  - Башелье, 117
  - Блэка–Шоулза, 117, 921
  - лагранжевой динамики частицы жидкости, 118, 121, 919
  - Лотки–Вольтерра, 116, 117, 923
  - солнечной активности, 118, 916
  - трехмерная конвективной турбулентности Лоренца, 828, 929, 931
  - чандлеровских колебаний, 115, 913
- Метод
  - Г.Н. Мильштейна, 597, 663, 726, 749, 785, 923, 925
  - комбинированный, 622
  - Монте–Карло, 835, 988
  - неявный двухшаговый сильный
    - порядка 1.0, 753
    - порядка 1.5, 754
    - порядка 2.0, 755
    - порядка 2.5, 755, 756
  - неявный двухшаговый сильный конечно-разностный
    - порядка 1.0, 762
    - порядка 1.5, 763
    - порядка 2.0, 764, 765
  - неявный одношаговый сильный
    - порядка 1.0, 726
    - порядка 1.5, 728, 729
    - порядка 2.0, 729, 730
    - порядка 2.5, 730 – 732
    - порядка 3.0, 732, 733
- конечно-разностный порядка 1.0, 734
- конечно-разностный порядка 1.5, 735, 736
- конечно-разностный порядка 2.0, 737, 738
- конечно-разностный порядка 2.5, 739, 740
- неявный слабый порядка 2.0, 821, 822
- неявный слабый конечно-разностный порядка 2.0, 823
- неявный трехшаговый сильный
  - порядка 1.0, 770, 771
  - порядка 1.5, 778
- неявный трехшаговый конечно-разностный сильный
  - порядка 1.0, 777
  - порядка 1.5, 781
- основанный на кратных рядах Фурье, 250 – 253
- полностью неявный сильный, 744 – 747
- сбалансированный, 743, 744
- типа "предсказатель–корректор", 825, 826
- Эйлера
  - неявный сильный, 721, 722
  - неявный слабый, 818, 819
  - полностью неявный, 818
  - полунеявный, 818
  - симметричный, 818, 819
  - супернеявный, 819
  - явный сильный, 650
  - явный слабый, 794
- экстраполяционный, 811 – 815
- явный двухшаговый сильный
  - порядка 1.0, 749
  - порядка 1.5, 751
  - порядка 2.0, 752, 753
- явный двухшаговый сильный конечно-разностный
  - порядка 1.0, 761
  - порядка 1.5, 778 + 781
- явный одношаговый сильный
  - порядка 1.0, 663, 690
  - порядка 1.5, 666, 691
  - порядка 2.0, 669, 670, 693
  - порядка 2.5, 672, 673, 694, 695
  - порядка 3.0, 677, 678, 696 – 698,
  - порядка  $r/2$ , 657, 686, 689, 715
  - конечно-разностный порядка 1.0,

- 703, 704
  - – конечно-разностный порядка 1.5, 705
  - – конечно-разностный порядка 2.0, 708, 709
  - – конечно-разностный порядка 2.5, 713 – 715
- явный слабый
  - – порядка 2.0, 798 – 800
  - – порядка 3.0, 802, 803
  - – порядка 4.0, 804 – 806
  - – конечно-разностный порядка 2.0, 815 – 817
- явный трехшаговый сильный
  - – порядка 1.0, 770, 771
  - – порядка 1.5, 778
- явный трехшаговый конечно-разностный сильный
  - – порядка 1.0, 777
  - – порядка 1.5, 781
- Множество**
  - замкнутое ограниченное, 157, 281
  - пустое, 283, 448
  - элементарных событий  $\Omega$ , 34
- Модуль непрерывности**, 298
- Момент**
  - марковский, 45, 46
  - остановки, 46
  - первого выхода, 46
- Мультиплективное разделение переменных**, 180
- Неравенство**
  - Гельдера, 37
  - Громуолла, 38
  - Дуба, 42
  - Иенсена, 38
  - Коши-Буняковского, 37
  - Ляпунова, 37
  - Минковского, 38
  - Чебышева, 37
- Непрерывность**
  - в среднем квадратическом, 41, 42
  - в среднем степени  $p$ , 41, 42
  - по вероятности, 41, 42
  - по распределению, 41, 42
  - равномерная, 151 – 153, 279, 281
  - с вероятностью единица, 41, 42
  - справа, 278, 282
- Норма**
  - вектора, 854, 865
- евклидова, 865
- матрицы, 850, 868
- функции, 46
- в пространстве  $L_2([t, T]^k)$ , 251
- на классе, 61, 62, 88
- Область**
  - замкнутая, 254
  - открытая, 257
- Ограниченнность**
  - равномерная, 78
- Оператор**
  - дифференциальный, 49, 77, 186
    - – матричный, 189, 196, 216, 217, 223
    - характеристический, 47
- Оценка**
  - максимального правдоподобия, 132
  - моментов стохастических интегралов, 79, 96
  - параметров, 131
- Предел**
  - в среднем квадратическом, 35
  - в среднем степени  $p$ , 34, 35
  - по вероятности, 34, 35
  - по распределению, 34, 35
  - с вероятностью единица, 34, 35
- Погрешность среднеквадратической аппроксимации**, 497, 508, 517
- Полином**
  - Лежандра, 283, 306 – 308, 542, 543, 570
  - производящий, 604
  - Эрмита, 604
- Полная ортонормированная в пространстве  $L_2([t, T])$  система**
  - полиномов Лежандра, 283
  - тригонометрических функций, 283
  - функций Радемахера-Уолша, 282
  - функций Хаара, 282
- Полная ортонормированная с весом в пространстве  $L_2([t, T])$  система**
  - функций, 488
  - собственных функций, 491
  - функций Бесселя, 492, 494
- Преобразование Гирсанова**, 69, 953
- Пространство**
  - банахово, 46
  - вероятностное, 34
  - $L_2([t, T])$ , 251
  - $L_2([t, T]^k)$ , 251
- Разложение**
  - винеровского процесса, 54

- повторных стохастических интегралов
  - Ито, 252, 262 – 273, 543 – 581
  - по мартингалам, 483 – 494
  - по мартингальным пуассоновским мерам, 478 – 483
  - Стратоновича, 284 – 478, 543 – 581
- Тейлора, 81, 701, 870
- Тейлора-Ито
  - 1 унифицированное, 197, 198, 241
  - 2 унифицированное, 208, 209, 241
  - в форме Вагнера и Платена, 191 – 193
- Тейлора-Стратоновича
  - 1 унифицированное, 220, 223, 224, 241
  - 2 унифицированное, 226, 227, 242
  - в форме Клоедена и Платена, 217 – 220
- Ранг стохастического базиса, 244
- Ряд
  - числовой, 585, 586 – 588, 590
  - Дирихле, 586
  - Фурье-Лежандра, 296, 297
    - кратный, 251
- Система уравнений
  - алгебраическая, 702, 846
  - Лоренца, 237, 929, 931
  - Лотки-Вольтерра, 116, 117, 240, 923
  - Ресслера, 239, 940
  - стохастических дифференциальных Ито, 72
    - линейных, 841, 842
    - линейных стационарных, 845
- Случайные величины
  - стандартные гауссовские, 54
    - независимые стандартные гауссовые, 252
- Случайный процесс
  - броуновского моста, 54, 598
  - винеровский, 53
  - гауссовский, 40
  - дифференцируемый, 42
  - диффузионный, 47
  - Ито, 67, 68
  - марковский, 44, 45
    - однородный, 45
    - строго, 46
  - наблюдаемый, 122, 964
  - непрерывный, 41, 42
  - Орнштейна-Уленбека, 103, 104
- с независимыми приращениями, 53
- стационарный, 40
- Пуассона, 57 – 59
- эргодический, 77, 78, 131
- Спектральная плотность, 41
- Субмартингал, 42
- Суммируемость рядов по Принсгейму, 296
- Супермартингал, 42
- Сходимость
  - в среднем квадратическом, 34, 35
  - в среднем степени  $p$ , 34, 35
  - по вероятности, 34, 35
  - по распределению, 34, 35
  - рядов Фурье равномерная, 284
  - рядов Фурье среднеквадратическая, 251
  - с вероятностью единица, 34, 35
  - сильная численной схемы, 646
  - слабая численной схемы, 793
- Теорема
  - Ито, 72, 73
  - о разложении повторных стохастических интегралов
    - Ито, 252
    - по мартингалам, 485, 490
    - по мартингальным пуассоновским мерам, 479
    - Стратоновича, 294, 300, 364, 365, 371, 382, 388, 410, 426, 441, 453, 454, 457, 463
  - о сходимости
    - сильных численных методов, 651, 658, 688, 690, 716
    - слабых численных методов, 797, 809, 810
    - трехшаговых численных методов, 771, 772
  - центральная предельная, 60, 132, 648
- Уравнение
  - алгебраическое матричное, 846
  - Бюргерса, 987
  - в частных производных 2 порядка, 134 – 139, 982, 987, 988
  - Гамильтона-Якоби-Беллмана, 124, 125
  - Колмогорова-Фоккера-Планка, 51
  - обыкновенное дифференциальное, 116
  - Риккати, 122, 125
  - стохастическое дифференциальное
    - линейное, 841, 842
    - линейное стационарное, 845

- Ито, 71 – 74
- со скачкообразной компонентой, 97, 879
- Стратоновича, 84 – 86
- Чепмена-Колмогорова, 43, 44
- Закаи, 953
- Устойчивость**
  - стохастическая, 126
    - асимптотическая, 126
    - асимптотическая в среднем степени  $p$ , 127
    - асимптотическая в целом, 126
    - в среднем степени  $p$ , 126, 127
    - экспоненциальная, 127
  - численной схемы, 783, 784, 830
- Формула**
  - замены порядка интегрирования, 148, 150, 158, 160 – 163, 165, 167
  - Ито, 69 – 71
  - Коши, 849, 866
  - Каллианпурा-Стрибела, 953
- Условие**
  - Гельдера, 48
  - Липшица
    - глобальное, 73
    - локальное, 73, 74, 718
    - одностороннее, 718
- Функция**
  - абсолютно интегрируемая, 41
  - Бесселя 1 рода, 492
  - Дирака, 56, 102, 105, 106
  - корреляционная, 40
  - Ляпунова стохастическая, 128
  - непрерывная, 150, 251, 252, 479, 485, 490
    - равномерно, 152, 279, 281, 431
  - ограниченная, 281
  - полиномиальная, 177, 283, 570
  - Радемахера-Уолша, 282
  - собственная, 491, 597
  - спектральная, 40, 41
  - тригонометрическая, 55, 283, 598
  - Хаара, 282
- Цепь Маркова**, 51, 52
- Число собственное**
  - матрицы, 846, 868
  - ковариации случайного процесса, 597
- Шум**
  - аддитивный, 710, 739, 787, 801, 802
  - белый, 56, 102, 107
  - векторный, 108
- мультиплективный, 649, 831
- скалярный, 649, 710, 739, 745
- цветной, 103, 104
- Экспонента**
  - матричная, 621, 845
  - ляпуновская стохастическая, 130, 979, 980
- Элементарное событие  $\omega$** , 34