

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 1, 2020

Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru>
e-mail: jodiff@mail.ru

Приложения в электротехнике

Анализ сложных нелинейных электрических цепей в частотной области методом баланса производных

С.Г. Тихомиров

АНО ВО "Смольный институт Российской академии образования"
tory133@mail.ru

Аннотация. Анализ нелинейных цепей в частотной области методом баланса производных (МБП) позволяет исследовать установившиеся процессы в высокочастотных цепях с большим количеством нелинейностей. МБП предназначен для моделирования и промышленного проектирования мощных аналоговых устройств. МБП совместим с существующими программами моделирования, такими как MicroCap, AutoCAD, Microwave Office и может быть встроен в них в качестве программного модуля. Приведены примеры использования.

Ключевые слова. анализ нелинейных цепей, частотная область, метод баланса производных

1. Введение

Численные методы анализа многокомпонентных нелинейных электрических цепей (НЭЦ), например, мощных высокочастотных усилителей, позволяют значительно сократить сроки проектирования и повысить эффективность и рентабельность процесса разработки новой техники. Современные программные среды моделирования электрических цепей дают разработчикам мощные инструменты исследования и анализа НЭЦ во временной области. Эти инструменты численного анализа обладают достаточной степенью точности даже при решении задач оценки интермодуляционных искажений в глубоко нелинейных режимах работы активных приборов (классы В, С, D). Фактически можно утверждать, что современные процедуры цифрового макетирования электрических цепей, использующие методы численного

анализа переходных процессов (режим transient analysis), в высокой степени адекватны процедурам прямого натурного макетирования и могут заменять их.

Разработка цифрового макета энергоблока или усилителя (многокомпонентной НЭЦ) является в настоящее время обязательным этапом промышленного проектирования любой мощной радиосистемы. Но использование методов численного анализа НЭЦ во временной области для решения любой практической задачи промышленного проектирования требует неприемлемо больших затрат машинного времени [1,2].

Например, цифровой макет усилителя КВ диапазона (1.5 МГц – 30 МГц), содержащего 10 MOSFET транзисторов, позволяет с достаточной степенью точности рассчитать амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) усилителя в режиме большого сигнала на уровне выходной мощности 1 КВт. Но для этого требуется не менее одного часа машинного времени современного ПК с ОП 8 Гб, и скоростью внутреннего обмена 100Мб/сек)

Построение семейства таких характеристик даже без вариации параметров усилителя занимает практически весь рабочий день. Для сравнения – получение аналогичной информации на натурном макете занимает секунды. А численный анализ аналогичной по сложности линейной цепи в частотной области занимает доли секунды.

Выход видится в разработке алгоритмов и методов анализа НЭЦ в частотной области, то есть алгоритмов прямого расчета комплексных амплитуд гармоник сигналов в НЭЦ при одночастотном или многочастотном возбуждении.

Существующие подходы к анализу НЭЦ в частотной области были разработаны еще в середине прошлого века. Это подходы используют метод гармонического баланса и родственные ему (предложены в 1934 году). Несколько позже (в 1951г.) был предложен метод, использующий интегро-степенные полиномы (метод рядов Вольтерра). Именно эти подходы исследовались и углублялись в последние десятилетия [2, 3, 5]. Несмотря на существенный прогресс в достижении более высокой точности анализа, эти подходы по-прежнему практически применимы только для исследования относительно простых НЭЦ, содержащих единицы нелинейных элементов. Но для промышленного проектирования необходимы методы анализа НЭЦ с десятками и сотнями нелинейных элементов.

В статье предлагается метод анализа сложных многокомпонентных НЭЦ, содержащих десятки и сотни нелинейностей, в частотной области (метод баланса производных – МБП), основанный на предложенном автором уравнении баланса производных [4].

Уравнение баланса производных связывает малые приращения (производные) комплексных амплитуд сигналов НЭЦ в систему линейных алгебраических уравнений. К решению этой системы линейных уравнений и сводится по существу математический аспект анализа нелинейной цепи. Значительные вычислительные мощности современного ПК в

сочетании с высокой степенью разреженности матриц моделей НЭЦ, позволяют осуществлять в частотной области гармонический анализ НЭЦ высокой сложности в режиме реального времени. Это в свою очередь позволит создавать цифровые макеты реальных радиосистем, необходимые в цикле промышленного проектирования.

2. Основные определения

Электрическая цепь — это физическое устройство, в котором протекают электрические процессы. Мы регистрируем эти процессы (описываем состояние цепи) в виде некоторой совокупности измеримых величин, называемых сигналами. Сигналы в электрической цепи меняются со временем и взаимосвязаны между собой двумя типами соотношений (связей).

Это, во-первых, соотношения, связывающие между собой изменяющиеся во времени сигнал через линейные (в общепринятом смысле аддитивности) интегро-дифференциальные операторы, (интегрирование и дифференцирование по времени). Эти связи выражают выходной сигналы не только через мгновенное значение входного сигнала, но и через значение входного сигнала за весь прошедший промежуток времени. То есть они обладают свойством инерционности (памяти). В статье они обозначаются идентификаторами: $\hat{M}, \hat{P}, \hat{L}, \hat{Q}$. Для случая простой цепи это однозначные операторы связи, содержащие интегралы и производные по времени, для случая сложной цепи это матрицы-операторы.

Во-вторых, это соотношения (связи), однозначно связывающие мгновенные значения сигналов на входе и выходе. В этом случае выходной сигнал зависит от значения входного сигнала только в данный момент времени, а связи являются нелинейными и безынерционными. В статье такая связь обозначается идентификатором E .

Для простой НЭЦ связь описывается нелинейной функцией типа $Y=E(X)$, где X – входной сигнал связи, Y – выходной сигнал связи. Для сложной цепи E представляет собой матрицу-функцию. Радиотехника оперирует с высокочастотными когерентными сигналами. В этом случае одночастотный сигнал, зависящий от времени описывается соотношением $Y(t)=|Y|\cos(\omega t+\varphi)$, где $|Y|$ – амплитуда сигнала, ω – угловая частота сигнала, φ – фаза сигнала относительно какого-то момента времени.

Во многих случаях удобно представлять гармонический сигнал в виде комплексного числа $P(t)=Ae^{i(\omega t+\varphi)}=Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}$. При таком представлении число $Ae^{i\varphi}$ называется комплексной амплитудой сигнала, а сам исходный сигнал является вещественной частью рассматриваемого представления.

Таким образом, любой сигнал в НЭЦ может быть описан своей комплексной амплитудой, а интегро-дифференциальные операторы преобразуются в комплексные полиномы от угловой частоты с положительными и отрицательными степенями. Это позволяет при

математическом описании электрической цепи в частотной области перейти к алгебраическим системам уравнений с коэффициентами передачи в виде комплексных степенных полиномов.

Если цепь линейна, то системы уравнений линейны по отношению к амплитудам сигналов. И ее анализ (расчет комплексных амплитуд сигналов) математически сводится к решению систем линейных уравнений с комплексными коэффициентами, зависящими от частоты. Если электрическая цепь содержит нелинейные элементы, то рассматривают линейную часть, в которой коэффициенты передачи зависят от степеней комплексной частоты и не зависят от амплитуды сигналов, и нелинейную безынерционную часть, как описано выше.

В линейной части электрической цепи сигналы передаются связями в соответствии с их частотой. И сигналы разных частот при этом не взаимодействуют друг с другом (аддитивно складываются). В нелинейной части сигналы разных частот взаимодействуют друг с другом сложным образом, в зависимости от функции передачи, что порождает сигналы с частотами кратными основной частоте (гармоники) и комбинационными частотами.

Если цепь нелинейная, то анализ ее линейной части проводится обычными методами. А соотношения сигналов на входах и выходах ее нелинейной безынерционной части итерационными методами подбираются так, чтобы имел место баланс с сигналами линейной части – в этом сущность метода гармонического баланса. Итерации при этом плохо формализуются, и для нелинейной части, содержащей более двух нелинейных преобразований часто просто невыполнимы.

В рамках развития полиномиальной теории НЭЦ В. Снурницын [3] в 1973 году ввел понятие вектора состояния. Это совокупность сигналов в НЭЦ, которая однозначно определяет состояние НЭЦ, и таким образом позволяет однозначно рассчитать значение комплексных амплитуд любого сигнала в НЭЦ. Формальных методов определения вектора состояния НЭЦ в [3] и в других известных автору публикациях предложено не было.

В статье при выводе уравнения баланса производных показано, что в качестве вектора состояния НЭЦ можно рассматривать вектор-сигнал на выходе преобразователя $\{Y'_n\}$, производного к данному. Предлагаемое уравнение баланса производных связывает линейным уравнением малые приращения комплексных амплитуд сигналов НЭЦ $\{dY_n\}$ с малым приращением некоторого параметра. При этом коэффициенты этого уравнения зависят от вектора состояния НЭЦ $\{Y'_n\}$, и линейных связей $\{L_n\}$ и $\{R_n\}$.

Например, если для цепи с одной нелинейностью, параметром является амплитуда входного сигнала S , мы получаем систему линейных уравнений

$$dY_n = \sum_{m=-M}^M Y'_{n-m} (L_m dY_m + R_m dS), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N,$$

где M номер максимальной гармоники, учитываемой при анализе НЭЦ.

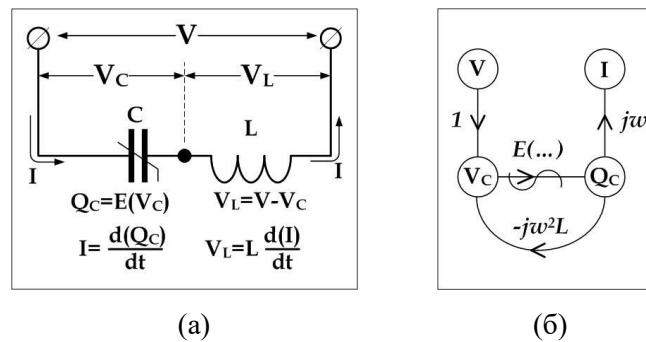


Рис.2. Последовательный колебательный контур с нелинейной емкостью (а).
Сигнальный граф системы уравнений контура в частотной области (б)

Наличие линейной обратной связи, замыкающей нелинейное безинерционное преобразование, является неустранимым и принципиальным свойством реальных НЭЦ. Такая обратная связь затрудняет или вовсе исключает возможность исследования НЭЦ с помощью аппарата интегро-степенных полиномов и методом гармонического баланса, так как при наличии обратной связи входной сигнал нелинейного преобразования представляет собой интегро-степенной полином, зависящий от интегро-степенного полинома входного сигнала нелинейного преобразования. При решении задач практического проектирования модель НЭЦ в виде ТРТЗ нельзя считать удовлетворительной

3.1 Обобщенная модель НЭЦ

В данной работе мы рассматриваем НЭЦ, в описании которых можно выделить одномерные однозначные кусочно дифференцируемые нелинейные безинерционные преобразователи (НБП) с тем, чтобы остальные соотношения, описывающие НЭЦ, были линейны. Система уравнений, описывающих НЭЦ этого типа, имеет вид

$$\begin{aligned} Y^g &= E^g(X^g), \\ X^g &= \sum_{f=1}^{G1} \hat{R}^{gf}(S^f) + \sum_{f=1}^{G2} \hat{L}^{gf}(Y^f), \\ Z^h &= \sum_{f=1}^{G1} \hat{P}^{hf}(S^f) + \sum_{f=1}^{G2} \hat{Q}^{hf}(Y^f). \end{aligned} \quad (2)$$

Верхние индексы идентификаторов указывают их номер в данной совокупности сигналов или связей, так что E^g обозначает g -ую нелинейную безинерционную связь, $f=1 \div G1$ есть номер независимого источника возбуждения, $G1$ — количество независимых источников в НЭЦ, $g=1 \div G2$ — номер НБП в описании НЭЦ, $G2$ — количество НБП в НЭЦ, $h=1 \div G3$ — номер выходного сигнала в НЭЦ, подлежащего расчету, $G3$ — количество выходных сигналов.

Здесь S, X, Y, Z являются соответственно идентификаторами следующих сигналов:

S — независимых источников возбуждения,

X — входных сигналов НБП,

Y – выходных сигналов НБП ,

Z – некоторой совокупности интересующих нас сигналов НЭЦ, не совпадающих с вышеперечисленными.

В системе (2) $\hat{M}, \hat{P}, \hat{L}, \hat{Q}$ являются идентификаторами линейных интегро-дифференциальных операторов. В верхних индексах первый индекс указывает, куда передается сигнал посредством данного оператора, второй – откуда.

Если в НЭЦ реализуется периодический режим, то каждому из сигналов можно сопоставить спектр комплексных амплитуд гармоник, а каждому из операторов – совокупность комплексных коэффициентов передачи этих гармоник. Индексы, определяющие номер гармоники, будем писать внизу справа от соответствующего идентификатора. Системе уравнений (2), описывающих обобщенную НЭЦ, можно сопоставить сигнальный граф, все нелинейные ветви которого безинерционные (Рис.3).

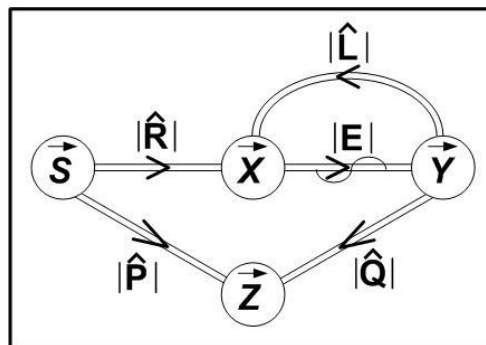


Рис.3. Обобщенный ориентированный граф НЭЦ.

Здесь все идентификаторы сигналов сгруппированы в соответствующие вектор-сигналы $\vec{S}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$. Все идентификаторы линейных интегро-дифференциальных операторов сгруппированы в соответствующие матрицы связей. На Рис.3 и далее матрицы связей между вектор-сигналами в сигнальном графе обозначаются двойными линиями, а безынерционные нелинейные ветви волнистым штрихом, чтобы отличать их от линейных. Назовем ориентированный граф, изображенный на Рис.3, приведенным графом НЭЦ, поскольку к такому графу можно свести граф любой НЭЦ исследуемого типа.

Простейший вариант НЭЦ, сохраняющий принципиальное свойство всех реальных НЭЦ, содержит линейную обратную связь, замыкающую нелинейное преобразование, содержит только один НБП и может быть описан ориентированным графом, изображенным на Рис.4. Назовем электрическую нелинейную цепь, описываемую графом, показанным на Рис.4 и сам этот граф элементарным нелинейным звеном (ЭНЗ).

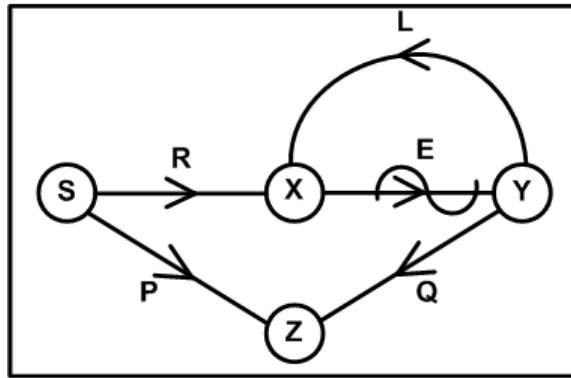


Рис. 4. Граф ЭНЗ

Очевидно, что приведенный граф НЭЦ (Рис.3) может быть представлен в виде последовательно-параллельного соединения нескольких ЭНЗ (Рис.4). Выделение ЭНЗ является удобным методическим приемом, позволяющим на наиболее элементарных типах НЭЦ исследовать общие свойства НЭЦ любого уровня сложности.

3.2 Матричная модель нелинейного активного элемента и нелинейной цепи

Во всякой нелинейной цепи с сосредоточенными нелинейностями можно выделить конструктивно законченные элементы, в которых эти нелинейности содержатся (диоды, транзисторы, лампы и т.д.). Конструктивная законченность фактически означает, что у этих элементов имеется совокупность внешних выводов, взаимосвязь токов и напряжений которых полностью описывает данный элемент. Описание любого активного элемента электрической цепи можно представить в виде информационного (сигнального) графа. Для единообразия описания примем, что входными сигналами являются напряжения, а выходными – токи внешних выводов элемента. Напряжение измеряется относительно некоторой внешней точки – «земли», не совпадающей в общем случае ни с одним из выводов моделируемого элемента.

Обобщенный граф нелинейного элемента электрической цепи представлен на Рис.5а. Далее будем использовать понятие векторов входного сигнала элемента \vec{U} (напряжений) и векторов выходного сигнала \vec{I} (токов), а также векторов входных \vec{X} и выходных \vec{Y} сигналов НБП, входящих в описание элемента. Тогда в самой общей форме модель нелинейного активного элемента может быть компактно представлена в виде матричного графа Рис.5б.

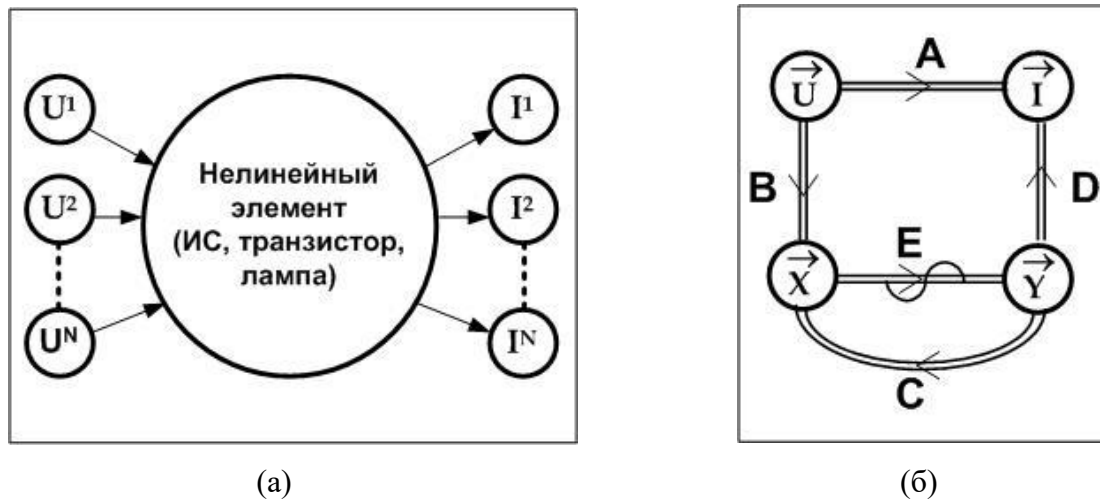


Рис. 5. Модель нелинейного элемента.

(а) Внешняя структура графа модели. (б) Приведенный матричный граф модели

На этом рисунке A, B, C, D – линейные матрицы-операторы (во временной области), которые при периодическом воздействии заменяются коэффициентами передачи отдельных гармоник (в частотной области). E – диагональная матрица-функция, связывающая мгновенные значения входных \vec{X} и выходных \vec{Y} сигналов НБП. Но активные элементы входят в конкретное устройство и являются частью НЭЦ. Введем обобщенный вектор сигналов воздействия \vec{S} и обобщенный вектор сигналов отклика \vec{Z} . Тогда обобщенный матричный граф НЭЦ может быть представлен в виде Рис.6(а).

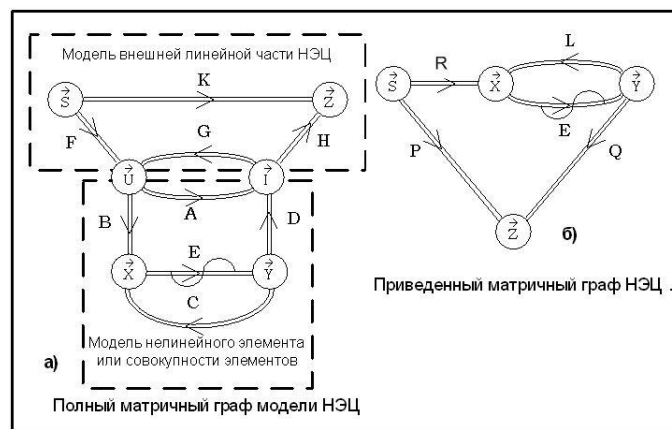


Рис.6. Построение графа матричной модели НЭЦ.

Для анализа НЭЦ нам необходимо перейти от полного матричного графа НЭЦ Рис.6(а) к приведенному графу НЭЦ Рис.6(б). Очевидно, что диагональная матрица-функция E в этих графах одинакова. Соотношения, определяющие матрицы M, L, P, Q через матрицы A, B, C, D, F, G, H, K выводятся известным образом, используя стандартные приемы расчета передачи сигнальных графов и алгебры матриц, а именно

$$\begin{aligned} R &= B(1 - GA)^{-1}F \\ L &= B(1 - GA)^{-1}GD + C \\ P &= H(1 - GA)^{-1}AF + K \\ Q &= H(1 - GA)^{-1}D \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, процедура формирования модели НЭЦ четко формализована и практически полностью совпадает с таковой в современных программах анализа электрических цепей (например, программная среда MicroCap). Она включает в себя три шага:

1. Описание моделей нелинейных активных элементов, то есть, задание матриц **A**, **B**, **C**, **D**, **E**.
2. Описание внешних связей в схеме, то есть задание матриц **F**, **G**, **H**, **K**.
3. Переход от полного графа НЭЦ Рис. 6(а) к приведенному графу НЭЦ Рис.6(б), то есть расчет матриц **R**, **L**, **P**, **Q** по формулам (3).

4. Уравнение баланса производных

Впервые обобщенная модель НЭЦ в виде соотношений (2) или ориентированного графа Рис.3 (и ее элементарный вариант в виде ЭНЗ на Рис.4) была приведена и исследована в [4]. Однако в тот период она не привлекла внимания по объективным причинам, в частности, из-за недостатка доступных для инженера-разработчика вычислительных ресурсов. В настоящее время доступные вычислительные ресурсы, алгоритмическая и программная база, вполне достаточны для реализации метода. В данном разделе приводится вывод основного соотношения, которое мы называем уравнением баланса производных (далее УБП). УБП позволяет сформировать существенно более эффективные алгоритмы анализа НЭЦ в частотной области, чем известные и используемые (например, метод рядов интегро-степенных Вольтера или метод гармонического баланса).

Рассмотрим ЭНЗ, представленное на Рис.4, в состав которого входит некоторый НБП, проходная характеристика которого удовлетворяет условиям, введенным ранее, то есть, однозначна и не имеет разрывов:

$$Y = E(X) \quad (4)$$

Здесь, как и ранее X – входной сигнал НБП, Y – выходной сигнал НБП.

Введем также «производный преобразователь», проходная характеристика которого $E'(X)$ является производной к характеристике исходного преобразователя $E(X)$. Сигнал на выходе этого преобразователя обозначим, как Y' :

$$Y' = E'(X) = \frac{dE(X)}{dX} \quad (5)$$

Пусть на вход НБП (4) действует периодический сигнал, запишем сигналы входа и выхода НБП в виде ряда Фурье

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{i\omega m t}, Y(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m e^{-i\omega m t}. \quad (6)$$

Очевидно, что

$$Y_n = \frac{1}{T} \int_0^T E \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{i\omega m t} \right) e^{-i\omega n t} dt \quad (7)$$

Эта формула позволяет нам связать комплексные амплитуды входного и выходного сигналов через преобразование Фурье от действительной функции. Эта же формула позволяет вычислить производные амплитуд спектра выходного сигнала по некоторому действительному параметру "а", не совпадающему со временем:

$$\frac{d}{da} Y_n = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE(X)}{dX} \frac{dX(t)}{da} e^{-i\omega n t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T E'(X(t)) \frac{dX(t)}{da} e^{-i\omega n t} dt \quad (8)$$

Условие допустимости дифференцирования состоит в том, чтобы НБП $E(X)$ не имел разрывов и был однозначен, а спектр входного сигнала был стационарен и дифференцируем по параметру "а".

Учитывая, что $\frac{d}{da} X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega m t} \frac{d}{da} X_m$, получим

$$\frac{d}{da} Y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y'_{n-m} \frac{d}{da} X_m. \quad (9)$$

Здесь Y'_{n-m} — комплексная амплитуда $(n-m)$ -ой гармоники сигнала на выходе производного преобразователя (5) при условии, что на его вход воздействует сигнал $X(t)$

$$Y'_n = \frac{1}{T} \int_0^T E'(X(t)) e^{-i\omega n t} dt \quad (10)$$

Данное соотношение элементарно обобщается на случаи многочастотного воздействия и воздействия с непрерывным спектром, если нелинейная цепь устойчива. Уравнение (9), полученное дифференцированием по параметру интеграла Фурье (7), является основным дифференциальным соотношением, на котором строится дальнейшее рассмотрение. Как видно из графа ЭНЗ на Рис.4, сигнал $X(t)$ на входе НБП является линейной суперпозицией сигнала независимого источника $S(t)$ и сигнала на выходе НБП $Y(t)$). В частности, для случая одночастотного воздействия имеем:

$$X_n = R_n S_n + L_n Y_n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty \quad (11)$$

Подставляя это соотношение в (9), получим выражение для производных комплексных амплитуд гармоник сигналов в ЭНЗ на выходе НБП через спектр сигнала на входе производного преобразователя (6)

$$\frac{dY_n}{da} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y'_{n-m} \left(L_m \frac{dY_m}{da} + R_m \frac{dS_m}{da} + Y_m \frac{dL_m}{da} + S_m \frac{dR_m}{da} \right) \quad (12)$$

Формула (12) для ЭНЗ очевидным образом обобщается на НЭЦ с произвольным количеством нелинейностей G2 и независимых источников G1 (Рис.3 или Рис.6(б)). Для этих цепей справедливо равенство

$$X_n^g = \sum_{f=1}^{G1} R_n^{g,f} S_n^f + \sum_{f=1}^{G2} L_n^{g,f} Y_n^f. \quad (13)$$

Подставляя это соотношение в (9), получим для НЭЦ с произвольным количеством нелинейностей:

$$\frac{dY_n^g}{da} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_{n-m}'^g \left(\sum_{f=1}^{G2} \left(L_m^{g,f} \frac{dY_m^f}{da} + Y_m^f \frac{dL_m^{g,f}}{da} \right) + \sum_{f=1}^{G1} \left(R_m^{g,f} \frac{dS_m^f}{da} + S_m^f \frac{dR_m^{g,f}}{da} \right) \right) \quad (14)$$

Полученные нами уравнения (12) и (14) и им аналогичные устанавливают баланс между приращениями различных сигналов в НЭЦ при малых изменениях параметров НЭЦ. Назовем их **Уравнениями баланса производных (УБП)**. Параметром дифференцирования в УБП может быть любой действительный параметр, определяющий состояние НЭЦ. В частности, амплитуда или частота сигнала возбуждения, номинал элемента схемы и т.д., кроме параметров, от которых зависят характеристики НБП. Как следует из УБП, реакция НЭЦ на изменение параметров определяется (помимо известных значений линейных связей) комплексными амплитудами на выходах производных преобразователей. Именно эти величины характеризуют состояние НЭЦ. Поэтому следуя терминологии [3], будем называть совокупность сигналов на выходе производных преобразователей **вектором состояния НЭЦ**. В соответствии с общепринятой терминологией, [1,2,3] назовем совокупность сигналов, в виде линейной комбинации которых можно определить любой другой сигнал в НЭЦ, **совокупностью определяющих сигналов**. Очевидно, что такую совокупность можно определить по-разному. В рамках данного подхода совокупностью определяющих сигналов будем называть сигналы независимых источников и сигналы на выходе всех НБП в описании НЭЦ.

Технически не сложно распространить УБП на случаи многочастотного воздействия или воздействия с непрерывным спектром [5]. Аналитический аппарат УБП может быть обобщен и на случай, когда выходной сигнал каждого из нелинейных преобразователей Y^g безынерционно зависит от нескольких (в общем случае – от всех сигналов X^g , где $g=1,2,\dots,G2$). В этом случае матрица-функция E на графах Рис.5б и Рис.6 перестает быть диагональной.

5. Решение уравнения баланса производных.

Соотношения (12) и (14) являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Для решения этих систем дифференциальных уравнений преобразуем их в системы линейных алгебраических уравнений, выражающих приращения сигналов на выходе НБП $\{\Delta Y_n\}$ через связи \mathbf{R} и \mathbf{L} , вектор состояния $\{Y_n'\}$ и приращение некоторого параметра. Для простоты описаний рассмотрим уравнение (12) для ЭНЗ и положим, что изменяемым параметром является амплитуда сигнала возбуждения. В этом случае (12) преобразуется (с заменой производных на дифференциалы) к виду

$$\Delta Y_n = \sum_{m=-M1}^{M1} Y_{n-m}' (L_m \Delta Y_m + R_m \Delta S_m). \quad (15)$$

Здесь $M1$ – максимальный номер гармоники сигнала на выходе НБП, учет которой существенен при образовании сигналов на входе НБП. В свою очередь (15) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=-M1}^{M1} \Delta Y_m (\delta_{n-m} - Y'_{n-m} L_m) = \sum_{m=-M1}^{M1} Y'_{n-m} R_m \Delta S_m, \quad (16)$$

$n = \pm M1, \pm(M1 - 1), \dots, \pm 2, \pm 1$, $\delta_{n,m}$ – дельта-символ Кронекера, равный единице при совпадении коэффициентов n и m , и равный нулю во всех остальных случаях.

Систему линейных алгебраических уравнений порядка $(2M1+1)$ можно переписать в общепринятом виде

$$\sum_{m=-M1}^{M1} \Delta Y_m A_{n,m} = B_n \quad n = \pm M1, \pm(M1 - 1), \dots, \pm 2, \pm 1, 0, \quad (17)$$

где $B_n = \sum_{m=-M1}^{M1} Y'_{n-m} R_m \Delta S_m$, $A_{n,m} = \delta_{n-m} - Y'_{n-m} L_m$. Система уравнений (17) решается относительно $\{\Delta Y_m\}$ обычными методами, если известны $A_{n,m}$ и B_n . Значения связей R и L задается при описании НЭЦ. А приращения сигнала возбуждения $\{\Delta S_m\}$ задается режимом интегрирования. Единственно неопределенным в выражениях для $A_{n,m}$ и B_n оказывается вектор состояния $\{Y'_n\}$. Именно в этом и состоит проблема анализа НЭЦ в частотной области – в определения вектора состояния $\{Y'_n\}$.

Для того чтобы упростить определение вектора состояния без существенной потери общности, предположим, что НБП, входящие в описание НЭЦ экспоненциальные, или могут быть представлены в виде экспоненциальных полиномов. Требование экспоненциальности НБП не является принципиально необходимым для построения алгоритмов анализа НЭЦ на основе УБП. С помощью УБП в [4] исследовались НЭЦ с нелинейностями в виде степенных полиномов. Но экспоненциальный характер НБП, во-первых, существенно упрощает все формулы анализа (следовательно, и алгоритмы), Во-вторых, с математической точки зрения экспонента описывает очень широкий диапазон зависимостей – от самых мягких квадратичных (типа зависимости барьерной емкости p - n перехода от напряжения), до самых жестких ключевых. В виде экспоненциальных полиномов можно представить достаточно широкий класс однозначных зависимостей весьма сложной формы. В-третьих, экспонента как одна из фундаментальных физических зависимостей часто встречается при описании нелинейных соотношений физики твердого тела.

Итак, положим, что НБП в исследуемом ЭНЗ является экспоненциальным

$$Y = \exp(\alpha X + \beta). \quad (18)$$

Тогда преобразователь (5) $E'(X)$ производный к данному отличается от исходного только постоянным множителем « α », вектор состояния совпадает с вектором сигналов на выходе нелинейностей

$$Y'(X) = \alpha e^{\alpha X + \beta} = \alpha Y, \quad \{Y'_n\} = \{\alpha Y_n\}, \quad (19)$$

а УБП для ЭНЗ (12) принимает вид

$$\frac{dY_n}{da} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha Y_{n-m} \left(L_m \frac{dY_m}{da} + R_m \frac{dS_m}{da} + Y_m \frac{dL_m}{da} + S_m \frac{dR_m}{da} \right) \quad (20)$$

Аналогичным образом преобразуется УБП (13) для полной НЭЦ. Производный преобразователь при этом определяется соотношениями

$$Y^g(X^g) = \exp(\alpha^g * X^g + \beta^g),$$

$$Y'^g(X^g) = \alpha^g \exp(\alpha^g X^g + \beta^g) = \alpha^g Y^g \quad (21)$$

$$\frac{dY_n^g}{da} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^g Y_{n-m}^g \left(\sum_{f=1}^{G2} \left(L_m^{g,f} \frac{dY_m^f}{da} + Y_m^f \frac{dL_m^{g,f}}{da} \right) + \sum_{f=1}^{G1} \left(R_m^{g,f} \frac{dS_m^f}{da} + S_m^f \frac{dR_m^{g,f}}{da} \right) \right) \quad (22)$$

5.1. Расчет зависимости комплексных амплитуд определяющих сигналов в НЭЦ от амплитуды сигнала возбуждения методом пошагового интегрирования

Наиболее очевидным алгоритмом численного анализа НЭЦ в частотной области является прямое пошаговое интегрирование УБП. Рассмотрим в качестве примера процедуру пошагового интегрирования УБП на примере уравнений (15-17), описывающих ЭНЗ. Эти уравнения позволяют выразить приращение амплитуд гармоник сигнала на выходе НБП $\Delta Y_{n,j}$ на j -ом шаге интегрирования через амплитуды сигналов $Y_{n,j-1}$ на предыдущем $(j-1)$ -ом шаге интегрирования

$$\Delta Y_{n,j} = \sum_{m=-M1}^{M1} \alpha Y_{n-m,j-1} (L_m \Delta Y_{m,j} + R_m \Delta S_m), \quad (23)$$

а начальный вектор состояния ЭНЗ (при $S=0$) задается числом

$$Y'_0 = \alpha \exp(\beta) = \alpha Y_0, Y_n = 0 \text{ при } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (24)$$

Преобразуем уравнение (23) к виду

$$\sum_{m=-M1}^{M1} \Delta Y_{m,j} A_{n,m} = B_n, \quad n = \pm M1, \pm(M1 - 1), \dots, \pm 2, \pm 1, 0, \quad (25)$$

где $B_n = \sum_{m=-M1}^{M1} Y_{n-m,j-1} R_m \Delta S_m$, $A_{n,m} = \frac{\delta_{n-m}}{\alpha} - Y_{n-m,j-1} L_m$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta Y_{n,j}$. Отметим, что в выражениях для коэффициентов этой системы значения вектора состояния НЭЦ вполне определены. Это гармоники сигналов на выходе НБП на предыдущем шаге интегрирования. Решение системы обычными методами позволяет найти $\Delta Y_{n,j}$ и осуществить следующий шаг интегрирования $Y_{n,j} = Y_{n,j-1} + \Delta Y_{n,j}$.

Приращение амплитуд гармоник сигнала возбуждения $S(t)$ задается режимом интегрирования и не зависит от номера шага интегрирования. Если сигнал возбуждения чисто синусоидальный $S(t) = |S| \cos(\omega t)$, то отличны от нуля только две составляющие этого приращения $\Delta S_1 = \Delta S_{-1} = 0.5 \Delta |S|$. Значение амплитуды возбуждения (входного сигнал ЭНЗ) на j -шаге интегрирования определяется очевидным соотношением $S_j = S_{j-1} + \Delta S = j \Delta S$. В соответствии с графом ЭНЗ (Рис.4) комплексная амплитуда гармоники любого сигнала ЭНЗ на j -шаге интегрирования может быть определена через известные величины

$$Z_{n,j} = Q_n Y_{n,j} + P_n S_{n,j}. \quad (26)$$

Мы завершили полный анализ ЭНЗ в частотной области методом пошагового интегрирования УБП. Для этого на каждом шаге интегрирования нам было необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений порядка $(2M1+1)$.

Анализ НЭЦ с произвольным $(G2)$ числом НБП в частотной области методом пошагового интегрирования осуществляется по аналогичной процедуре. При этом на каждом шаге интегрирования также необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений, но порядка $G2$ раз более высокого порядка, чем для ЭНЗ.

5.2 Расчет амплитуд гармоник НЭЦ в виде рядов Тейлора

В тех случаях, когда решение УБП следует получить в функциональной форме, представляется рациональным использовать иной подход – разложение искомого решения в ряд Тейлора по параметру дифференцирования вокруг точки, представляющей собой начальное условие, предполагая, что такое разложение возможно.

Рассмотрим вначале алгоритм расчета применительно к ЭНЗ. Положим, что параметр «а» определяет амплитуду возбуждения. В общем случае комплексная амплитуда сигнала S на входе ЭНЗ задана в виде степенного ряда параметра «а»:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_n^k a^k, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (27)$$

В частности, если на входе действует просто синусоидальный сигнал и параметром является его амплитуда, то мы получаем $S_1^1 = S_{-1}^1 = 0.5$; $S_n^k = 0$ при $|n| \neq 1, k \neq 1$.

Полагаем далее, что любая гармоника сигнала на выходе НБП также может быть представлена в виде степенного ряда по параметру «а»:

$$Y_n(a) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_n^k a^k, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (28)$$

Здесь Y_n^0 комплексная амплитуда n -ой гармоники в отсутствие изменения параметра (начальное значение, Y_n^k – подлежащие определению коэффициенты разложения гармоник в ряд по степеням параметра «а». Верхний индекс идентификатора соответствует степени параметра «а» в разложениях. Подставляя (27) и (28) в (20) и учитывая, что линейные связи не зависят от уровня возбуждения, приравняем коэффициенты при одних и тех же степенях параметра «а» слева и справа от знака равенства. В результате получим системы уравнений для определения искомых коэффициентов

$$Y_n^k = \alpha \sum_{m=-M1}^{M1} \sum_{l=0}^k Y_{n-m}^{k-l} (L_m Y_m^l + R_m S_m^l), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (29)$$

Здесь $M1$ – максимальный номер гармоники сигнала на выходе НБП, учет которой существенен при образовании сигналов на входе НБП.

Преобразуя систему уравнений (22), получим систему линейных уравнений порядка $2M1+1$

$$\sum_{m=-M_1}^{M_1} Y_m^k \left(\frac{\delta_{n,m}}{\alpha} - L_m Y_{n-m}^0 \right) = \sum_{m=-M_1}^{M_1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} l Y_{n-m}^{k-l} L_m Y_m^l + \sum_{l=0}^k l Y_{n-m}^{k-l} R_m S_m^l \right). \quad (30)$$

Матрица системы уравнений (30) выражается через начальные условия и линейные обратные связи $\{L\}$. Вектор свободных членов выражается также через начальные условия, связи и через ранее найденные коэффициенты разложения Y_n^l , для которых $l < k$. Коэффициенты разложения в ряд Тейлора определяются через ранее найденные коэффициенты при более низких степенях разложения. Этой формулой разрешается задача расчета в виде ряда Тейлора амплитудной характеристики ЭНЗ, находящейся под одночастотным воздействием, при этом разложение в ряд Тейлора производится в окрестности точки, в которой гармоники вектора состояния $\{Y_n^0\} \neq 0$. При разложении в ряд Тейлора в окрестности точки покоя (состоянии цепи при нулевом воздействии) вектор состояния ЭНЗ задается только одним числом $Y_0^0 \neq 0$, $Y_n^0 = 0$ для всех $n \neq 0$.

Система линейных алгебраических уравнений (30) порядка $(2M_1+1)$ вырождается в равенство, что резко упрощает анализ ЭНЗ в частотной области:

$$Y_n^k (1 - \alpha L_n Y_0^0) = \alpha \sum_{m=-M_1}^{M_1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} l Y_{n-m}^{k-l} L_m Y_m^l + \sum_{l=0}^k l Y_{n-m}^{k-l} R_m S_m^l \right) \quad (31)$$

Обобщение формулы (30) на случай НЭЦ, содержащих G2 НБП, требует введения адресного индекса, учитывающего номер НБП (первый верхний индекс у идентификаторов), и суммирования по этому индексу.

$$\sum_{f=1}^{G_2} \sum_{m=-M_1}^{M_1} Y_m^{f,k} \left(\frac{\delta_{n,m} \delta_{g,f}}{\alpha_g} - Y_{n-m}^{g,0} L_m^{g,f} \right) = \sum_{m=-M_1}^{M_1} \left(\sum_{l=1}^{k-1} l \sum_{f=1}^{G_2} Y_{n-m}^{g,k-l} L_m^{g,f} Y_m^{f,l} + \sum_{l=1}^k l \sum_{f=1}^{G_1} Y_{n-m}^{g,k-l} R_m^{g,f} S_m^{f,l} \right) \quad (32)$$

В результате мы получаем систему линейных уравнений полностью аналогичную (30), но имеющую порядок в G2 раз больший $G_2(2M_1+1)$.

Если решение в виде ряда Тейлора для произвольной НЭЦ ищется в окрестности точки покоя $Y_0^{g,0} \neq 0$, $Y_n^{g,0} = 0$ для всех $n \neq 0$, то система линейных алгебраических уравнений (25) порядка $G_2(2M_1+1)$ упрощается и вырождается в систему уравнений порядка G2

$$\sum_{f=1}^{G_2} \left(\frac{\delta_{g,f}}{\alpha_g} - Y_0^{g,0} L_m^{g,f} \right) = \sum_{m=-M_1}^{M_1} \left(\sum_{l=1}^{k-1} l \sum_{f=1}^{G_2} Y_{n-m}^{g,k-l} L_m^{g,f} Y_m^{f,l} + \sum_{l=1}^k l \sum_{f=1}^{G_1} Y_{n-m}^{g,k-l} R_m^{g,f} S_m^{f,l} \right) \quad (33)$$

Аналогичным образом рассчитываются амплитудные характеристики для других видов возбуждений – многочастотного возбуждения или возбуждения с непрерывным спектром.

5.3. Расчет частотных и параметрических характеристик НЭЦ

Выделенные нами в НЭЦ нелинейные преобразователи являются безынерционными. Следовательно, мы можем рассматривать частоту возбуждения просто как параметр,

определяющий величины линейных связей и полностью равноправный в этом смысле с другими параметрами, например, величиной емкости конденсатора или индуктивности дросселя в электрической цепи. Поэтому будем говорить о расчете параметрических характеристик НЭЦ, рассматривая частотные характеристики, как их частный случай.

Сама задача расчета параметрических характеристик требует предварительного определения вектора состояния НЭЦ. Поэтому упрощение алгоритма численного анализа по типу перехода от уравнения (30) к уравнению (31) или от (32) к (33) при параметрическом анализе невозможно.

Задача расчета линейных связей в зависимости от частоты или иного параметра «а» представляется тривиальной, поэтому будем полагать известными зависимости связей от параметра дифференцирования. В частности

$$L_m(a) = \sum_{k=0}^{\infty} L_m^k a^k, R_m(a) = \sum_{k=0}^{\infty} R_m^k a^k, \quad (34)$$

где L_m^0 и R_m^0 – величина связей в отсутствии вариации параметра.

Подставляя эти значения в уравнение баланса производных для ЭНЗ (15) и учитывая, что уровень возбуждения не зависит от параметра дифференцирования, получим выражения, связывающие между собой коэффициенты разложения комплексных амплитуд гармоник определяющих сигналов в ряд по степеням параметра:

$$\sum_{m=-M1}^{M1} Y_m^k \left(\frac{\delta_{n,m}}{\alpha} - L_m^0 Y_{n-m}^0 \right) = \sum_{m=-M1}^{M1} \left(\sum_{l=1}^{k-1} l \sum_{g=0}^{k-l} Y_{n-m}^{k-l-g} (L_m^g Y_m^l + L_m^l Y_m^g) + \sum_{l=1}^k l Y_{n-m}^{k-l} R_m^l S_m^0 \right) \quad (35)$$

Для расчета коэффициентов параметрического разложения нам нужно решить систему линейных алгебраических уравнений с той же матрицей, что и для расчета амплитудных характеристик. Условием существования решения систем уравнений (30) и (35) является отличие от нуля определителя матрицы. Отметим, что матрица системы уравнений одна и та же для всех коэффициентов разложения $\{Y_n^k\}$, независимо от номера «n» показателя степени «k». Это значит, что неравенство нулю определителя этой матрицы является условием разложимости в ряд Тейлора амплитуд гармоник определяющих сигналов. При этом, естественно, необходимо, чтобы в виде степенного ряда были представлены и все зависимости, предполагаемые известными.

Проблема численной устойчивости решений УБП представляется принципиально важной. Эта проблема частично рассмотрена в [4], но в достаточном объеме не изучалась и требует отдельного рассмотрения. Здесь мы отметим, что неустойчивость решения УБП предопределяет не только неустойчивость численного анализа, но также и технологическую неустойчивость (большие значения коэффициентов чувствительности) и энергетическую неустойчивость исследуемой цепи.

Пример 1.

Рассмотрим простейшую безынерционную нелинейную цепь, содержащую последовательно соединенный резистор и кремниевый диод при температуре 273 °С. (при этом нелинейная вольтамперная характеристика диода представляет собой экспоненту с показателем $\alpha=40$). На Рис. 7 представлена эта цепь и её сигнальный граф,

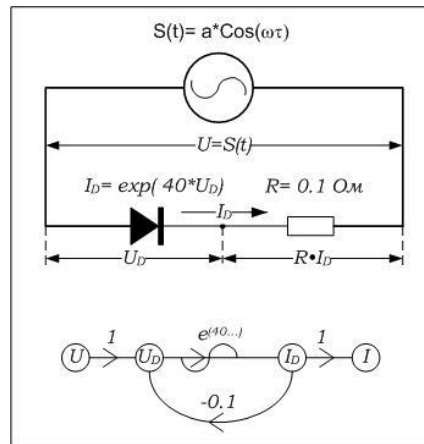


Рис. 7. Сигнальный граф цепи

Нелинейная цепь находится под воздействием внешнего моногармонического источника $S(t) = a \cos(\omega t)$. Задача состоит в том, чтобы рассчитать гармоники тока I в цепи, как функцию амплитуды сигнала возбуждения «а». Расчет амплитуд начинается с точки покоя, при которой ток через диод $I_D=1$.

Сигнальный граф цепи (Рис. 7) соответствует сигнальному графу ЭНЗ Рис.4. Для использования МБП определим идентификаторы сигналов, как : $S=U$, $X=U_D$, $Y=I_D$, $Z=I$. А идентификаторы связей: $R=1$, $P=0$, $L=-0.1$, $Q=1$, $E=\exp(40 \cdot X)$. В данном примере все связи частотно независимые, что упрощает задачу. Интегрирование по параметру амплитуды сигнала возбуждения осуществляется по формулам (23) - (25). В соответствии с (24) начальный вектор состояния цепи (при $a=0$) определим соотношением

$$Y'_0 = \alpha = 40, \quad Y_n = 0 \text{ при } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Результаты анализа НЭЦ Рис. 7 путем пошагового интегрирования УБП представлены на Рис.8. Рассчитывались амплитуды первых пяти гармоник (I_0, I_1, I_2, I_3, I_4) как функции амплитуды возбуждения «а» в диапазоне $0 < a < 1$.

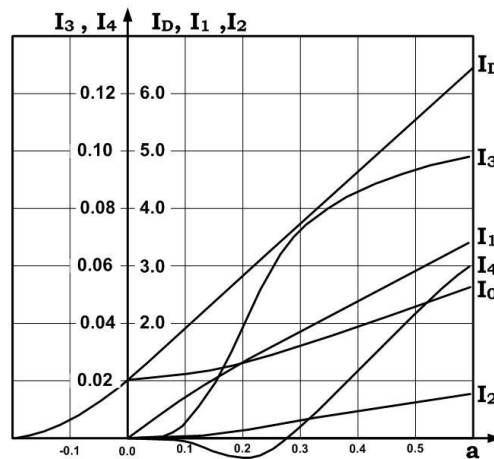


Рис.8. Анализ НЭЦ на Рис. 7 путем пошагового интегрирования УБП

Для демонстрации МБП выбран был именно этот пример, потому что при высокой насыщенности гармоникам выходного сигнала, этот случай легко проверяется по известным формулам Бесселя. Отметим, что расхождение с результатами расчета по Бесселю оказывается графически не различимым.

Пример 2.

Этот пример иллюстрирует возможность использования МБП для решения проектных задач - численного исследования цифрового макета однокаскадного транзисторного усилителя высокой частоты (Рис.9).

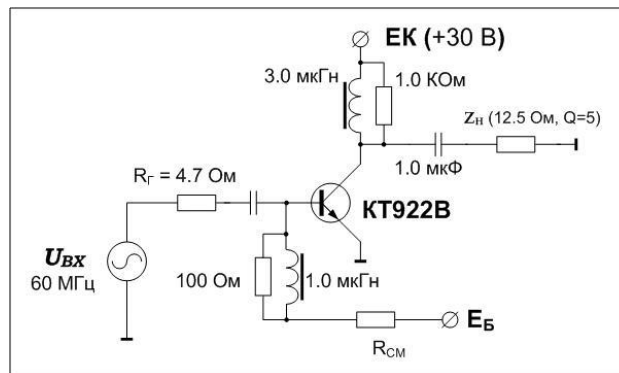


Рис.9. Макет однокаскадного транзисторного усилителя высокой частоты.

Формально для этого потребовалось провести анализ сложной НЭЦ с помощью МБП в частотной области. В частности, прямым интегрированием УБП были рассчитаны параметрические зависимости амплитуды основной гармоники сигнала в нагрузке усилителя (настроечные характеристики, Рис.10).

С помощью цифрового макета исследовалась также линейность усилителя. Для этого методом МБП были рассчитаны в виде степенных полиномов амплитудные характеристики

усилителя при различных напряжениях смещения E_B . По методике, изложенной в [4], были рассчитаны уровни комбинационных сигналов 3-го и 5-го порядков для двух тонового метода оценки нелинейных искажений. Зависимость уровней этих сигналов от напряжения смещения, представленная на Рис.11, позволила оценить реальную линейность усилителя и определить рабочую точку (напряжение смещения, при котором линейность наилучшая). Прямая экспериментальная проверка этих расчетов на натурном макете усилителя подтвердила высокую степень адекватности цифрового макета и использованного для его анализа в частотной области метода баланса производных – МБП.

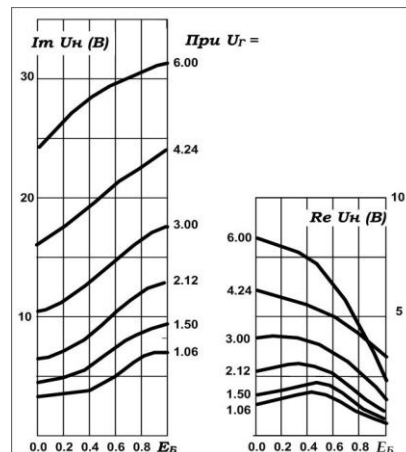


Рис.10 Настроечные характеристики для схемы на Рис.9

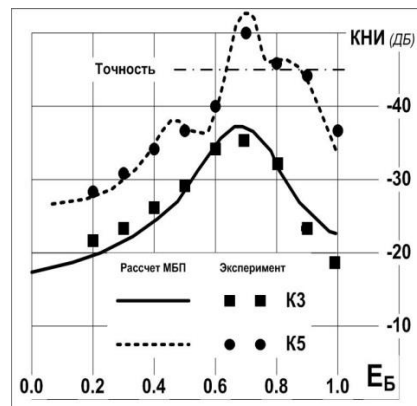


Рис.11 Настроечные характеристики для схемы на Рис.9

6. Заключение.

В заключение отметим преимущества анализа НЭЦ методом баланса производных (МБП) в сравнении с другими методами анализа НЭЦ в частотной области.

- МБП использует модель НЭЦ, более адекватную реальным НЭЦ. Эта модель не требует упрощений (не сводится к ТРТЗ), неизбежных при использовании метода интегральных рядов Вольтерра и метода гармонического баланса.

- Основной вычислительной операцией в МБП является решение систем линейных уравнений высокого порядка с разреженными матрицами. Малые затраты машинного времени на подобные операции позволяют проводить анализ в частотной области для НЭЦ с произвольно большим количеством нелинейностей (десятки, сотни и более).

- МБП позволяет решать задачи промышленного проектирования высокочастотных узлов радиотехнических устройств с большим количеством нелинейностей, в частности создавать цифровой макет этих устройств для их корректного численного моделирования в тех случаях, когда натурное макетирование нерентабельно или небезопасно.

- МБП алгоритмически совместим по процедурам моделирования электрических цепей с существующими средами сквозного проектирования (MicroCap, AutoCAD, Microwave Office, OrCAD и др.) и может быть включен в них как программный модуль.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М. Иностранная литература. 1961, 124 с.
2. Нечес И. О. Метод анализа нелинейных радиотехнических цепей при сложных воздействиях, основанный на аппарате функциональных рядов Вольтера : Дис. ... канд. техн. наук : 05.12.04 Ростов н/Д, 2005 197 с. РГБ ОД, 61:06-5/1486.
<http://www.dslib.net/tele-sistemy/metod-analiza-nelinejnyh-radiotekhnicheskikh-cepej-pri-slozhnyh-vozdeystvijah.html>
3. Снурницын В.Р. Вопросы полиномиальной теории нелинейных систем передачи. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук.- Новосибирск, 1973.
4. Тихомиров С.Г. Повышение эффективности методов автоматизированного проектирования усилителей мощности высокой частоты. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Ленинград. 1984.
5. Jose Flores, Almudena Suarez. Nonlinear Circuit Analysis in Time and Frequency-domain Technical Report (PDF Available) · April 2014
<https://www.researchgate.net/publication/281060492>

Analysis of large nonlinear electrical circuits in the frequency domain by the method of balance of derivatives

S.G. Tikhomirov

Smolny institute of Russian Academy of Education
tory133@mail.ru

Abstract. Analysis of nonlinear electrical circuits in the frequency domain by the method of balance of derivatives (MBD) allows investigating steady-state processes in high –frequency circuits having a large numbers of nonlinear elements. MBD is designed for simulation and industrial development of powerful analog devices. It is compatible with modeling programs such as MicroCap, AutoCAD, Microwave Office, and may be built in as a program module. Examples of the method application are given.

Keywords: nonlinear circuit analysis, frequency-domain, balance of derivatives method