

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
и  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
N. 1, 2025  
Электронный журнал,  
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172  
<http://diffjournal.spbu.ru/>  
e-mail: jodiff@mail.ru

## Управление в нелинейных системах

**Точная формула для полосы захвата системы фазовой автоподстройки частоты с пропорционально-интегрирующим фильтром и кусочно-линейной характеристикой фазового детектора.**

Кузнецов Н.В.<sup>1,2</sup>, Лобачев М.Ю.<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН

**Аннотация.** В работе разрабатывается наглядный подход для точного определения полосы захвата системы фазовой автоподстройки с пропорционально-интегрирующим фильтром и непрерывной кусочно-линейной характеристикой фазового детектора. Этот подход позволяет эффективно провести вывод аналитической формулы для определения полосы захвата, а также получить удобные явные консервативные оценки и асимптотические значения полосы захвата. В рамках теории скрытых колебаний представлено полное решение задачи определения границы глобальной устойчивости и выявления на ней скрытых участков, соответствующих нелокальному рождению скрытых колебаний.

**Ключевые слова:** фазовая автоподстройка частоты, гипотеза Капранова, сценарий Губарь-Кана, полоса захвата, граница глобальной устойчивости, нелокальное рождение скрытых колебаний

## Содержание

1 Математическая модель и постановка задачи	187
2 Точная формула для полосы захвата	190

<b>3 Доказательство основных результатов</b>	<b>197</b>
3.1 Поглощающее множество и замена переменных . . . . .	198
3.2 Линейный анализ . . . . .	199
3.3 Аналитическое интегрирование . . . . .	202
3.3.1 Интегрирование системы в полосе $A$ . . . . .	202
3.3.2 Интегрирование в полосе $B_+$ . . . . .	204
3.4 Критерий существования циклов и полициклов второго рода . . . . .	205
3.5 Анализ точечного отображения кусочно-линейной системы . . . . .	211
3.6 Вычисление полосы захвата . . . . .	219
<b>4 Заключение</b>	<b>221</b>
<b>5 Благодарности</b>	<b>221</b>

## Введение

Схемы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ, phase-locked loops, PLL) являются нелинейными системами управления и широко применяются в системах беспроводной связи, компьютерных архитектурах, системах навигации (GPS, ГЛОНАСС), энергосистемах [1–3]. Одной из ключевых инженерных задач нелинейного анализа систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) является задача определения *полосы захвата* для значений параметра частоты входного сигнала в зависимости от параметров физической реализации системы [4, 5]. При заданных параметрах физической реализации и частоты входного сигнала, соответствующих полосе захвата, система ФАПЧ входит в синхронизм, а соответствующую математическую модель называют глобально устойчивой<sup>1</sup>.

Пионерской работой, в которой были продемонстрированы возможности строгого математического анализа в теории фазовой автоподстройки, была статья итальянского математика Ф. Дж. Трикоми [8], в которой ему, используя метод анализа фазовой плоскости, удалось провести качественный глобальный анализ системы с интегрирующим фильтром и синусоидальной характеристикой фазового детектора. Трикоми показал, что потеря глобальной устойчивости системы может происходить либо через исчезновение состояний

<sup>1</sup> В зависимости от характера притяжения и вида стационарного множества для систем с неединственным состоянием равновесия могут определяться различные виды устойчивости; в работах [5, 6] в этом случае для систем фазовой автоподстройки также используются термины *глобальная асимптотическая устойчивость системы* и *система градиентного типа* [7].

равновесия в результате их слияния, либо через возникновение гетероклинической траектории, соединяющей неустойчивые седловые состояния равновесия.

Для более общей системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром М.В. Капранов, следуя качественным результатам Трикоми [8], выдвинул гипотезу, согласно которой полоса захвата определяется либо исчезновением состояний равновесия, либо самовозбуждением колебаний при бифуркации рождения гетероклинической траектории из седла в седло (*гипотеза Капранова*) [9, 1956г.]. Однако в 1961 году Н.А. Губарь [10, 18 мая 1961] и Ч. Кан [11, 28 августа 1961] независимо друг от друга представили статьи, которые опровергали гипотезу Капранова. Из результатов этих работ следовало, что нарушение глобальной устойчивости в рассматриваемой системе может происходить также через бифуркацию рождения полуустойчивого цикла второго рода — скрытого колебания, возникающего в системе ФАПЧ из уплощения траекторий (*сценарий Губарь-Кана*).

В случае треугольной характеристики фазового детектора, которая рассматривалась в работах [9–11], система ФАПЧ является кусочно-линейной, что позволяет аналитически проинтегрировать систему и, как следствие, построить бифуркационные границы рождения самовозбуждающегося и скрытого колебаний. В статье Губарь [10] для анализа системы использовался метод точечных отображений А.А. Андронова (со ссылками на формулы для функций соответствия из второго издания монографии “Теории колебаний” [12]<sup>2</sup>) и были получены общие неявные трансцендентные уравнения для определения полосы захвата. Однако уравнения были приведены с опечатками<sup>3</sup>, отмеченными позднее в работах [14, 15, 1969–1970 гг.]. В статье Кана [11] был предложен другой подход для вывода трансцендентных уравнений, но окончательные формулы и их анализ не были приведены. Вместо этого в работе Каном была приведена приближённая нестрогая оценка полосы захвата системы ФАПЧ с треугольной характеристикой фазового детектора и пропорционально-интегрирующим фильтром, которая впоследствии получила широкое распространение в монографиях по ФАПЧ (см., например, [16, с.

<sup>2</sup>На момент публикации статьи Капранова существовало только первое издание “Теории колебаний” [13], в котором отсутствовала глава “Метод точечных преобразований”, написанная Н.А. Железовым для второго издания [12]. Также на момент написания статьи Каном в 1961 году на английском был доступен только укороченный перевод первого издания [13], опубликованный в 1949. Перевод второго издания был опубликован только в 1966 году.

<sup>3</sup>Так, например, подстановка параметров  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = -18.5$  в финальное уравнение (2.6) для полосы захвата [10] приводит к комплексным числам:  $b = k_1\tau_0 - \frac{1}{2}\ln\varphi_2(\tau_0)$  с  $\ln\varphi_2(\tau_0) = -2.5836 + 3.1416i$  (в обозначениях настоящей работы  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{(\tau_1+\tau_2)K_{vco}}}$ ,  $\beta = -\tau_2K_{vco}$ ).

265], [17, с. 168, с. 68]). В работах [18, 19] было показано, что оценка Кана может приводить к нарушению глобальной устойчивости и возникновению устойчивых периодических колебаний.

В 1963 году С.В. Первачев [20], отмечая *неполноту и противоречивость* существующих исследований по анализу полосы захвата, провел численное интегрирование системы и анализ фазовых портретов, не прибегая к аналитическому анализу, и опубликовал бифуркационные диаграммы для определения полосы захвата. Аналитические подходы для анализа глобальной устойчивости и полосы захвата кусочно-линейных систем ФАПЧ развивались затем Б.И. Шахтиным, В.М. Сафоновым и Э.Н. Протонотариосом в работах 1969 года [14, 21, 22]. В этих работах была рассмотрена кусочно-линейная характеристика с произвольным наклоном линейных функций, что обобщало рассмотрение симметричной треугольной характеристики. Протонотариос [21] рассматривал произвольный наклон и обобщил результат Ка-пранова для интегрирующего фильтра, отмечая его ошибку в более общем случае пропорционально-интегрирующего фильтра. Шахтин [14] и Сафонов [22] для общего случая пропорционально-интегрирующего фильтра и произвольного наклона, следуя работе Губарь, применяли метод точечных отображений Андронова для определения условий рождения полуустойчивого цикла второго рода. Однако в работе Сафонова приводилась только асимптотическая неявная формула для полосы захвата, а финальные формулы в статье Шахтина содержали опечатки<sup>4</sup>. В более поздних книгах Шахтина [23, 24] опечатки из статьи были исправлены, однако появились некоторые другие. Кроме того, в работах Шахтина [14, 23, 24] отсутствуют формулы для полосы захвата в области параметров, где потеря глобальной устойчивости происходит вследствие исчезновения состояний равновесия<sup>5</sup>.

В 1970 году Л.Н. Белюстина, В.В. Быков, К.Г. Кивелева и В.Д. Шалфев построили [15, 1970 г.] серию бифуркационных диаграмм для различных характеристик фазового детектора (синусоидальной, треугольной и пилообразной), используя качественные результаты и численный анализ фазовых

<sup>4</sup>Так, например, рассмотрение параметров  $\alpha_0 = 0.1257$ ,  $\lambda_0 = 18.5$ ,  $c = \frac{\pi}{2}$  приводит к значениям  $\alpha = \alpha_0\sqrt{c} = 0.1575$ ,  $\lambda = \frac{\lambda_0}{c} = 11.7775$ ,  $\nu = (\frac{\pi}{c} - 1)^{-1} = 1$ ,  $\xi = \frac{\alpha(1+\lambda)}{2} = 1.0065$ ,  $h = \frac{\alpha(1-\lambda\nu)}{2} = -0.8489$  (см. [14, с. 1416])  $\omega_1 = \sqrt{|1 - \xi^2|} = 0.1141$ ,  $\omega_2 = \sqrt{h^2 + \nu} = 1.31180$ ,  $k_1 = \frac{\xi}{\omega_1} = 8.8192$ ,  $k_2 = \frac{h}{\omega_2} = -0.6472$  (см. [14, с. 1417]),  $C = \frac{2\omega_1\omega_2}{2\xi h + \nu - 1} = -0.1752$ , и финальное неявное уравнение (29) [14] относительно  $\tau > 0$ :  $\tanh(-\frac{k_1}{k_2}\tau) = A \tanh \frac{\tau}{2}$ , используемое для определения полосы захвата, становится комплексным, так как  $A = -C + \sqrt{C^2 - 1} = 0.1752 + 0.9845i$  (в обозначениях настоящей работы  $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{vco}}}$ ,  $\lambda_0 = \tau_2 K_{vco}$ ,  $k = \frac{1}{c}$ , а значения параметров соответствуют  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ,  $k = \frac{2}{\pi}$  и  $K_{vco} = 1000$ ).

<sup>5</sup>В [14], например, такая область задаётся неравенствами  $\xi > 1$  и  $2\xi h \geq 1 - \nu$  (область  $K_{vco} < K_{vco}^{ht}$  в обозначениях настоящей работы).

портретов [25]. Вместе с тем они отмечали, что для быстрого расчета полосы захвата в литературе нет достаточно полных и подробных формул. Подробно алгоритмы построения бифуркационных диаграмм на основе численного интегрирования и анализа фазовых портретов описаны в [26].

Развитие качественных аналитических результатов было продолжено в работе [27, 1973 г.], где был проведен анализ системы с произвольной непрерывной кусочно-гладкой характеристикой фазового детектора и показано, что в этом случае разбиение пространства параметров остаётся аналогичным (обоснование сценария Губарь-Кана в общем случае). При этом в этой работе было замечено, что в более ранней работе Н.Н. Баутина [28, 1970 г.] о качественном исследовании системы ФАПЧ содержится неточность в оценке области существования полуустойчивого цикла второго рода.

Зарубежные публикации в основном были посвящены приближенным методам оценки полосы захвата (см. [29–32] и другие). В работах Дж. Стенсбая [33–35] описан сценарий Губарь-Кана и вводится характеристика “half-plane pull-in range”, определяемая рождением сепаратрисного цикла и не требующая анализа рождения скрытого колебания, а также приводится точная формула, повторяющая результаты Капранова [9] и Протонотариоса [21] (без ссылок на работы Капранова, Протонотариоса, Губарь и Кана). Можно отметить работу М. Брунка и В. Розенкранца [36, 1979 г.], в которой авторы, продолжая работу Кана и численное интегрирование для сценария Губарь-Кана, предложили эмпирическую аналитическую оценку полосы захвата, которая является достаточно точной нижней оценкой в случае треугольной характеристики, но может приводить к потере глобальной устойчивости для общего случая кусочно-линейной характеристики.

В итоге из-за громоздкости получаемых формул, краткости и неполноты изложения, а также допущенных неточностей, имеющиеся аналитические подходы и результаты работ [10, 14, 22] не были отражены в последующих классических монографиях и учебниках [4, 26, 34, 37–40] по нелинейному анализу ФАПЧ. Ряд монографий для полосы захвата системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром содержит численные бифуркационные диаграммы (см., например, [4, с. 134], [37, с. 28], [41, с. 92], [39, с. 110] [40, с. 35], [5, с. 81]), приближенные оценки (см., например, [16, 17, 29, 32]), а также замечания об отсутствии удовлетворительного решения задачи (см., например, [42, с. 123]). При этом в последние годы продолжают появляться журнальные публикации, в которых, следуя гипотезе Капранова, полоса захвата определяется только рождением сепаратрисного цикла (см., напри-

мер, [43, 44]).

В данной работе для решения описанной выше задачи в рамках теории скрытых колебаний [45–49] мы развиваем эффективный подход [50–52] определения точной границы глобальной устойчивости и выявления на ней скрытых участков, основанный на специальной замене переменных и последующих интегрировании и сшивки траекторий в терминах фазовых переменных. В отличие от работ [9, 10, 14, 22], предлагаемый метод не требует вычисления интервалов времени прохождения траекториями участков линейности системы, что упрощает анализ и делает его более наглядным. Это позволяет провести наглядный замкнутый вывод аналитических формул [52, 2023 г.] для расчета полосы захвата.

## 1 Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим модель ФАПЧ в пространстве фаз сигналов на рис. 1 (см. [32, 53, 54]). Здесь входом системы является фаза эталонного генератора  $\theta_{\text{ref}}(t) =$

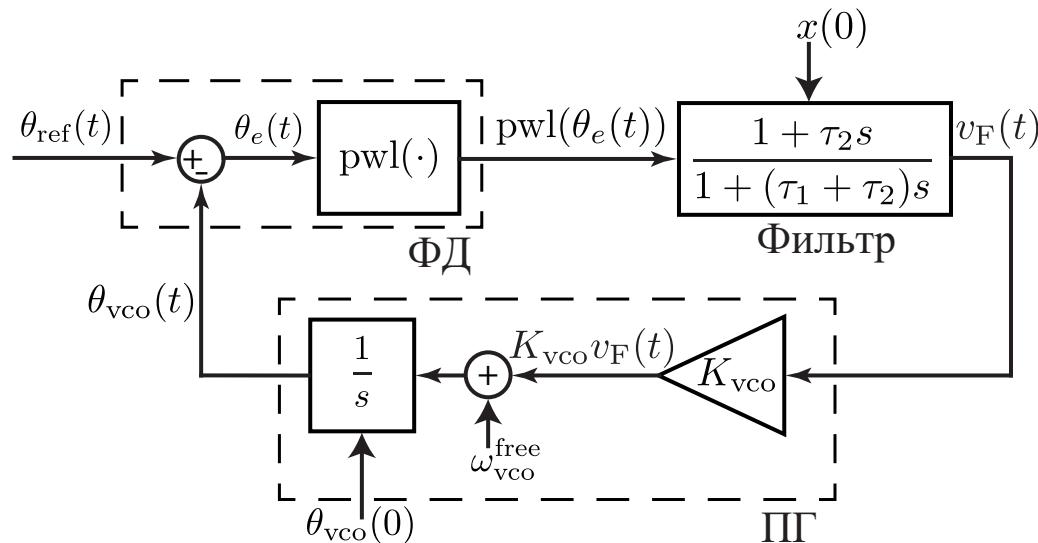


Рис. 1: Классическая модель ФАПЧ с кусочно-линейной характеристикой фазового детектора  $v_e(\theta_e) = \text{pw1}(\theta_e)$  и передаточной функцией линейного фильтра  $F(s) = \frac{1+\tau_2 s}{1+(\tau_1+\tau_2)s}$  в пространстве фаз сигналов.

$\omega_{\text{ref}} t$  с частотой  $\omega_{\text{ref}} > 0$ , где  $t \geq 0$  — время;  $\theta_{\text{vco}}(t)$  — фаза подстраиваемого генератора (ПГ, voltage-controlled oscillator, VCO) и  $\theta_e(t) = \theta_{\text{ref}}(t) - \theta_{\text{vco}}(t)$  — разность фаз сигналов. Фазовый детектор ( $\Phi\Delta$ ) генерирует сигнал  $\text{pw1}(\theta_e(t))$ , где  $\text{pw1}(\theta_e) = \text{pw1}(\theta_e, k)$  — непрерывная кусочно-линейная характеристика

фазового детектора:

$$\text{pwl}(\theta_e, k) = \begin{cases} k\theta_e - 2\pi km, & \text{если } -\frac{1}{k} + 2\pi m \leq \theta_e < \frac{1}{k} + 2\pi m, \\ -\frac{1}{\pi - \frac{1}{k}}\theta_e + \frac{1}{\pi - \frac{1}{k}}(\pi + 2\pi m), & \text{если } \frac{1}{k} + 2\pi m \leq \theta_e < -\frac{1}{k} + 2\pi(m+1), \end{cases}$$

$$k > \frac{1}{\pi}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

см. рис. 2 и работы [11, 14, 17, 29, 30, 32].

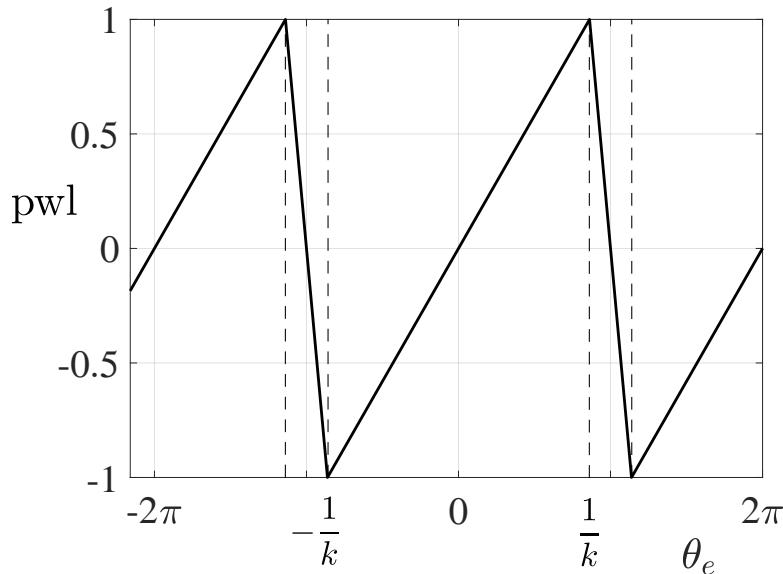


Рис. 2: Кусочно-линейная характеристика  $\text{pwl}(\theta_e, k)$  (1) с  $k = \frac{1}{\pi} + 0.05$ .

Фильтр — линейный фильтр с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}$  и передаточной функцией

$$F(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + (\tau_1 + \tau_2)s},$$

$$\tau_1 > 0, \quad \tau_2 \geq 0.$$

Выход линейного фильтра  $v_F(t)$  поступает на вход подстраиваемого генератора, где  $K_{\text{vco}} > 0$  — коэффициент усиления ПГ,  $\omega_{\text{vco}}^{\text{free}} > 0$  — собственная частота подстраиваемого генератора и блок  $\frac{1}{s}$  — интегратор с начальным состоянием  $\theta_{\text{vco}}(0)$ . Разность частоты эталонного генератора и собственной частоты подстраиваемого генератора обозначим

$$\omega_e^{\text{free}} = \omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{vco}}^{\text{free}}.$$

Классическая модель ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром и кусочно-линейной характеристикой фазового детектора может быть

записана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{\tau_1 + \tau_2}x + \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}\text{pwl}(\theta_e), \\ \dot{\theta}_e &= \omega_e^{\text{free}} - K_{\text{vco}} \left( \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}x + \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\text{pwl}(\theta_e) \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Заметим, что система (2) инвариантна относительно преобразования

$$(\omega_e^{\text{free}}, x(t), \theta_e(t)) \rightarrow (-\omega_e^{\text{free}}, -x(t), -\theta_e(t)).$$

Данное свойство позволяет проводить анализ системы (2) только для  $\omega_e^{\text{free}} \geq 0$  и ввести в рассмотрение понятие *отклонения частоты*:

$$|\omega_e^{\text{free}}| = |\omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{vco}}^{\text{free}}|.$$

**Определение 1** ([55–57]). *Полосой удержания* называется максимальный симметричный интервал разностей частот:  $|\omega_e^{\text{free}}| \in [0, \omega_h]$ , что в системе (2) существует асимптотически устойчивое состояние равновесия, которое непрерывно меняется в фазовом пространстве при непрерывном изменении параметра  $\omega_e^{\text{free}}$  внутри интервала;  $\omega_h$  называется частотой удержания.

**Определение 2** ([55–57]). *Полосой захвата* называется максимальный симметричный интервал разностей частот:  $|\omega_e^{\text{free}}| \in [0, \omega_p]$ , из полосы удержания, что любая траектория системы (2) стремится к некоторому состоянию равновесия (система глобально устойчива);  $\omega_p$  называется частотой захвата.

Заметим, при нахождении внутри полосы захвата в математической модели допускаются неустойчивые переходные процессы из множества точек фазового пространства меры нуль к неустойчивым состояниям равновесия, которые не наблюдаются при физической реализации из-за шумов. Далее в этой секции определим полосу удержания, для чего достаточно применения линейных методов анализа, а остальная часть работы будет посвящена одной из основных задач нелинейного анализа систем ФАПЧ — нахождению полосы захвата.

Состояния равновесия системы (2) описываются уравнениями

$$x^{\text{eq}} = \frac{\tau_1 \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}, \quad \text{pwl}(\theta_e) = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}.$$

Из вида функции  $\text{pw1}(\cdot)$  следует, что при  $|\omega_e^{\text{free}}| > K_{\text{vco}}$  в системе (2) нет состояний равновесия. В этом случае, как показано, например, в [6, с. 21], в системе существует единственный цикл второго рода, к которому притягиваются все остальные траектории системы. Однако данный случай соответствует режиму вне полосы удержания и не рассматривается в рамках настоящей работы.

Поскольку полоса удержания — открытый интервал, то для её определения достаточно рассмотреть значения  $|\omega_e^{\text{free}}| < K_{\text{vco}}$ . Тогда<sup>6</sup> система (2) имеет счётное число состояний равновесия вида

$$\left( \frac{\tau_1 \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} + 2\pi m \right), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

$$\left( \frac{\tau_1 \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}, \pi - \frac{(\pi k - 1) \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} + 2\pi m \right), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Соответствующие характеристические полиномы имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_1(\lambda) &= \lambda^2 + \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} (1 + k K_{\text{vco}} \tau_2) \lambda + \frac{k K_{\text{vco}}}{\tau_1 + \tau_2}, \\ \chi_2(\lambda) &= \lambda^2 + \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \left( 1 - \frac{k}{\pi k - 1} K_{\text{vco}} \tau_2 \right) \lambda - \frac{k K_{\text{vco}}}{(\pi k - 1)(\tau_1 + \tau_2)}. \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты полинома  $\chi_2(\lambda)$  имеют разные знаки, то полином и состояния равновесия (4) неустойчивы. Напротив, все коэффициенты полинома  $\chi_1(\lambda)$  больше нуля и полином устойчив, состояния равновесия (3) асимптотически устойчивы при любом  $m \in \mathbb{Z}$ .

Таким образом, при  $|\omega_e^{\text{free}}| \in [0, K_{\text{vco}}]$ , что в системе (2) существуют асимптотически устойчивые состояния равновесия (3), которые непрерывно меняются в фазовом пространстве при непрерывном изменении параметра  $\omega_e^{\text{free}}$  внутри интервала. Полоса удержания равна  $[0, \omega_h] = [0, K_{\text{vco}}]$ .

## 2 Точная формула для полосы захвата

Для анализа полосы захвата и глобальной устойчивости системы (2) обозначим

$$\begin{aligned} K_{\text{vco}}^{\text{ht}} &= \frac{1}{k(2\tau_1 + \tau_2 + 2\sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}, \quad \tau_2 \geq 0, \\ K_{\text{vco}}^{\text{fn}} &= \frac{1}{k(2\tau_1 + \tau_2 - 2\sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}, \quad \tau_2 > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>6</sup>При  $|\omega_e^{\text{free}}| = K_{\text{vco}}$  устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сливаются, образуя неустойчивые состояния равновесия  $(\tau_1, \frac{1}{k} + 2\pi m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  (подробно этот случай разобран в [58]).

Определим тип асимптотически устойчивых состояний равновесия (3) (более подробно см. в секции 3.2):

- если  $\tau_2 = 0$ , то состояние равновесия (3)
  - является устойчивым узлом при  $K_{\text{vco}} < K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ ,
  - является устойчивым вырожденным узлом при  $K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ ,
  - является устойчивым фокусом при  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ ,
- если  $\tau_2 > 0$ , то состояние равновесия (3)
  - является устойчивым узлом при  $K_{\text{vco}} \in ((0, K_{\text{vco}}^{\text{ht}}) \cup (K_{\text{vco}}^{\text{fn}}, +\infty))$ ,
  - является устойчивым вырожденным узлом при  $K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  и  $K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{fn}}$ ,
  - является устойчивым фокусом при  $K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{fn}})$ .

Заметим, что при  $\tau_2 \neq 0$  справедливо

$$K_{\text{vco}}^{\text{ht}} < K_{\text{vco}}^{\text{fn}}.$$

Здесь верхний индекс 'fn' в параметре  $K_{\text{vco}}^{\text{fn}}$  соответствует смене типа устойчивого состояния равновесия с фокуса (focus) на узел (node) при увеличении параметра  $K_{\text{vco}}$ . Верхний индекс 'ht' в параметре  $K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  означает "гетероклиническая траектория" (heteroclinic trajectory): траектория, стремящаяся при  $t \rightarrow \pm\infty$  к различным состояниям равновесия. Далее будет показано (см. теорему 1 и следствие 1), что при фиксированных параметрах  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ ,  $k > \frac{1}{\pi}$  для любого  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  существует единственное значение  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{ht}}(K_{\text{vco}}) > 0$ , для которого в системе (2) существует гетероклиническая траектория, соединяющая седловые состояния равновесия. Такую траекторию также называют сепаратрисным циклом (см., например, [14, 34]).

Введём также

$$K_{\text{vco}}^{\text{pt}} = \max \left( \frac{\pi k - 1}{k \tau_2}, K_{\text{vco}}^{\text{ht}} \right), \quad \tau_2 > 0, \quad (6)$$

где верхний индекс 'pt' означает "периодическая траектория" (periodic trajectory). Далее будет показано (см. следствие 1), что при фиксированных параметрах  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ ,  $k > \frac{1}{\pi}$  для любого  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$  существует единственное значение  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}}(K_{\text{vco}}) > 0$ , для которого в системе (2) существует полуустойчивый цикл второго рода.

Траектория  $(x(t), \theta_e(t))$  называется *циклом первого рода*, если она является периодической в  $\mathbb{R}^2$  (существует период  $T > 0$  такой, что  $x(t+T) = x(t)$ ,  $\theta_e(t+T) = \theta_e(t)$ ), и *циклом второго рода*, если она является периодической в цилиндрическом фазовом пространстве (существует период  $T > 0$  и число  $\varepsilon = \pm 1$  такие, что  $x(t+T) = x(t)$ ,  $\theta_e(t+T) = \theta_e(t) + 2\pi\varepsilon$ ,  $\forall t > 0$ ) [6]. Гетероклиническая траектория, соединяющая седловые состояния равновесия, образует *полицикл второго рода*.

В зависимости от величины наклона  $k$  кусочно-линейной характеристики  $\text{pwl}(\theta_e, k)$  значение  $K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$  может быть равным  $K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ , быть больше, чем  $K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ , а также величина  $(K_{\text{vco}}^{\text{pt}} - K_{\text{vco}}^{\text{fn}})$  может быть разных знаков. Для  $\tau_2 > 0$  определим

$$\begin{aligned} k^{\text{ht}} &= \frac{2(\tau_1 + \tau_2 + \sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}{\pi(2\tau_1 + \tau_2 + 2\sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}, \quad \tau_2 > 0, \\ k^{\text{fn}} &= \frac{2(\tau_1 + \tau_2 - \sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}{\pi(2\tau_1 + \tau_2 - 2\sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}, \quad \tau_2 > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и заметим, что  $\frac{1}{\pi} < k^{\text{ht}} < \frac{2}{\pi} < k^{\text{fn}}$ . Рассматривая величины  $K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ ,  $K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$  и  $K_{\text{vco}}^{\text{fn}}$  как функции от  $k$ , получим

$$\begin{aligned} K_{\text{vco}}^{\text{ht}} &= K_{\text{vco}}^{\text{pt}} < K_{\text{vco}}^{\text{fn}} && \text{при } \frac{1}{\pi} < k \leq k^{\text{ht}}, \\ K_{\text{vco}}^{\text{ht}} &< K_{\text{vco}}^{\text{pt}} < K_{\text{vco}}^{\text{fn}} && \text{при } k^{\text{ht}} < k < k^{\text{fn}}, \\ K_{\text{vco}}^{\text{ht}} &< K_{\text{vco}}^{\text{pt}} = K_{\text{vco}}^{\text{fn}} && \text{при } k = k^{\text{fn}}, \\ K_{\text{vco}}^{\text{ht}} &< K_{\text{vco}}^{\text{fn}} < K_{\text{vco}}^{\text{pt}} && \text{при } k > k^{\text{fn}}, \end{aligned}$$

см. рис. 3.

Разобьём пространство параметров

$$D = \left\{ (k, \tau_1, \tau_2, K_{\text{vco}}) \mid k > \frac{1}{\pi}, \tau_1 > 0, \tau_2 \geq 0, K_{\text{vco}} > 0 \right\}$$

на подпространства

$$\begin{aligned} D^{\text{lin}} &= \{(k, K_{\text{vco}}, \tau_{1,2}) \in D \mid K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}\}, \\ D^{\text{ht}} &= \{(k, K_{\text{vco}}, \tau_{1,2}) \in D \mid K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, \tau_2 = 0\} \cup \\ &\cup \{(k, K_{\text{vco}}, \tau_{1,2}) \in D \mid k > k^{\text{ht}}, K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{pt}}), \tau_2 > 0\}, \\ D^{\text{pt}} &= \{(k, K_{\text{vco}}, \tau_{1,2}) \in D \mid K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}, \tau_2 > 0\}. \end{aligned}$$

В секции 3 будет показано, что при фиксированных параметрах  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ ,  $k > \frac{1}{\pi}$ ,  $K_{\text{vco}} > 0$  при увеличении  $|\omega_e^{\text{free}}| \geq 0$  потеря глобальной устойчивости происходит вследствие:

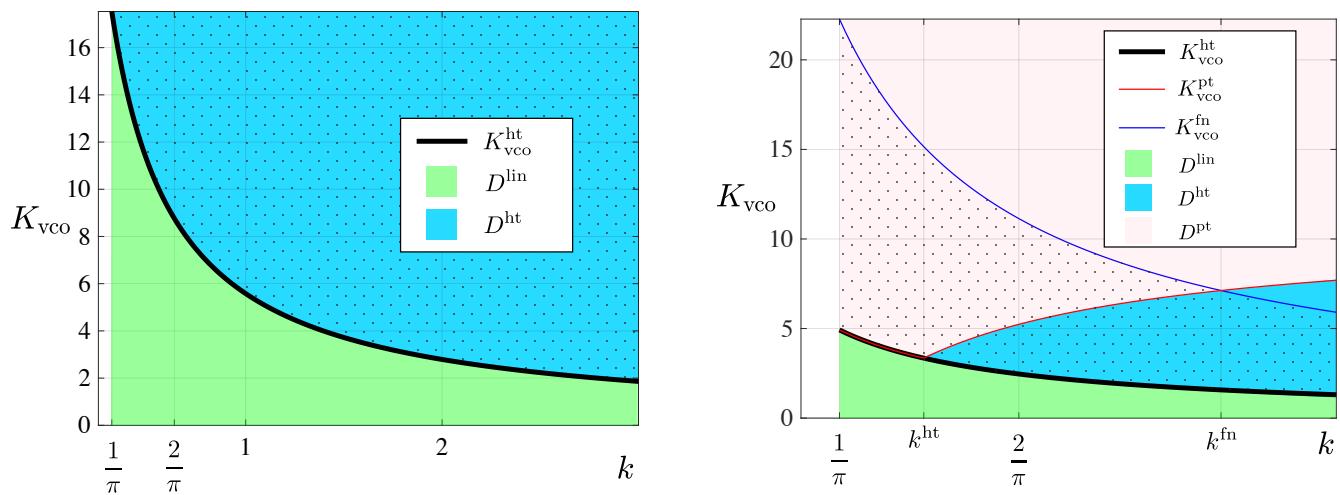


Рис. 3: Графики  $K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ ,  $K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$  и  $K_{\text{vco}}^{\text{fn}}$  как функций от  $k$  при  $\tau_2 = 0$  (левый рисунок) и  $\tau_2 > 0$  (правый рисунок). При  $K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{fn}})$  в случае  $\tau_2 \neq 0$  и при  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  в случае  $\tau_2 = 0$  устойчивое состояние равновесия (3) является фокусом (соответствующая область отмечена точками). Заливками обозначены проекции областей  $D^{\text{lin}}$ ,  $D^{\text{ht}}$  и  $D^{\text{pt}}$  при параметрах  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0$  (левый рисунок) и  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.3$  (правый рисунок).

- исчезновения состояний равновесия (параметры из множества  $D^{\text{lin}}$ ),
- рождения гетероклинической траектории, соединяющей седловые состояния равновесия (параметры из множества  $D^{\text{ht}}$ ),
- рождения полуустойчивого цикла второго рода (параметры из множества  $D^{\text{pt}}$ ).

На рис. 4–6 приведены бифуркационные диаграммы для определения полосы захвата системы (2), построенные по аналитическим формулам из теоремы 1, сформулированной ниже, для

1. случая интегрирующего фильтра  $F(s) = \frac{1}{1+\tau_1 s}$  и треугольной характеристики фазового детектора (параметры  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0$ ,  $k = \frac{2}{\pi}$ ),
2. случая наклона кусочно-линейной характеристики  $k = \frac{1}{3}$  (параметры  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ),
3. стандартных инженерных параметров  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$  [53] и треугольной характеристики фазового детектора ( $k = \frac{2}{\pi}$ ).

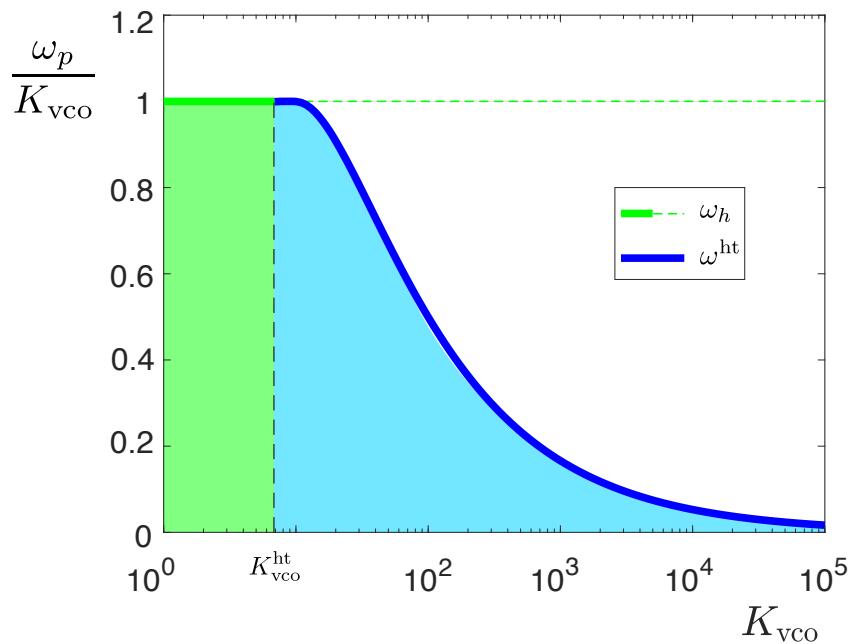


Рис. 4: Бифуркационная диаграмма для определения полосы захвата системы (2), построенная согласно теореме 1. При  $K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  полоса захвата совпадает с полосой удержания:  $[0, \omega_p] = [0, \omega_h] = [0, K_{\text{vco}}]$ , при  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  полоса захвата определяется рождением гетероклинической траектории, соединяющей седловые состояния равновесия, при  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{ht}}$ :  $[0, \omega_p] = [0, \omega^{\text{ht}}]$ , и определяется по формулам (10), (11). Параметры:  $k = \frac{2}{\pi}$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0$ ;  $K_{\text{vco}}^{\text{ht}} = 6.82$ .

Для приведения аналитических формул для полосы захвата определим

$$\begin{aligned} \mu &= \pi k - 1, \\ \xi &= \frac{k\tau_2 K_{\text{vco}} + 1}{2\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}}}, \\ \eta &= \frac{k\tau_2 K_{\text{vco}} - \mu}{2\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}}}, \\ \rho &= \sqrt{|\xi^2 - k|}, \\ \kappa &= \sqrt{\eta^2 + k\mu} \end{aligned} \tag{8}$$

и заметим, что

$$\xi > 0, \quad \rho < \xi, \quad \kappa > |\eta|.$$

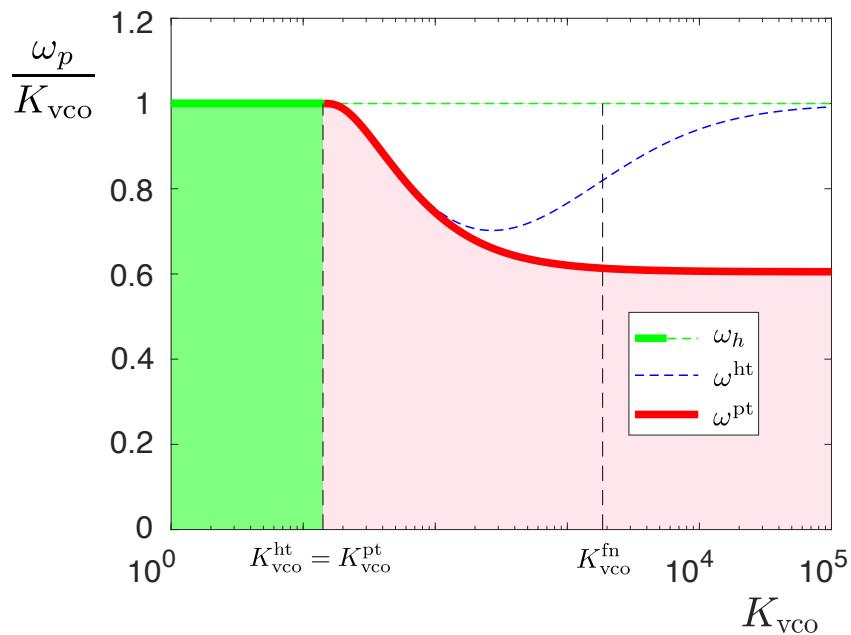


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма для определения полосы захвата системы (2), построенная согласно теореме 1. При  $K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  полоса захвата совпадает с полосой удержания:  $[0, \omega_p) = [0, K_{\text{vco}})$ , при  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  полоса захвата определяется рождением полуустойчивого цикла второго рода при  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}}$ :  $[0, \omega_p) = [0, \omega^{\text{pt}})$ , и определяется по формулам (10), (12). Параметры:  $k = 0.33$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ;  $K_{\text{vco}}^{\text{ht}} = K_{\text{vco}}^{\text{pt}} \approx 14.12$ ,  $K_{\text{vco}}^{\text{fm}} \approx 1900$ ,  $k^{\text{ht}} \approx 0.35 > k$ ,  $k^{\text{fm}} \approx 4.01$ .

**Теорема 1.** Полоса захвата имеет вид  $[0, \omega_p) \subset [0, \omega_h) = [0, K_{\text{vco}})$ , где

$$\begin{aligned} \text{при } \tau_2 = 0 : \quad \omega_p &= \begin{cases} K_{\text{vco}}, & \text{если } K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, \\ \omega^{\text{ht}}, & \text{если } K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, \end{cases} \\ \text{при } \tau_2 > 0 \text{ и } k \leq k^{\text{ht}} : \quad \omega_p &= \begin{cases} K_{\text{vco}}, & \text{если } K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{pt}}, \\ \omega^{\text{pt}}, & \text{если } K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}, \end{cases} \\ \text{при } \tau_2 > 0 \text{ и } k > k^{\text{ht}} : \quad \omega_p &= \begin{cases} K_{\text{vco}}, & \text{если } K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, \\ \omega^{\text{ht}}, & \text{если } K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{pt}}], \\ \omega^{\text{pt}}, & \text{если } K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}. \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\omega^{\text{ht,pt}} = \omega^{\text{ht,pt}}(k, K_{\text{vco}}, \tau_1, \tau_2) = \frac{\sqrt{s^{\text{ht,pt}}} - 1}{\sqrt{s^{\text{ht,pt}}} + 1} K_{\text{vco}}, \tag{10}$$

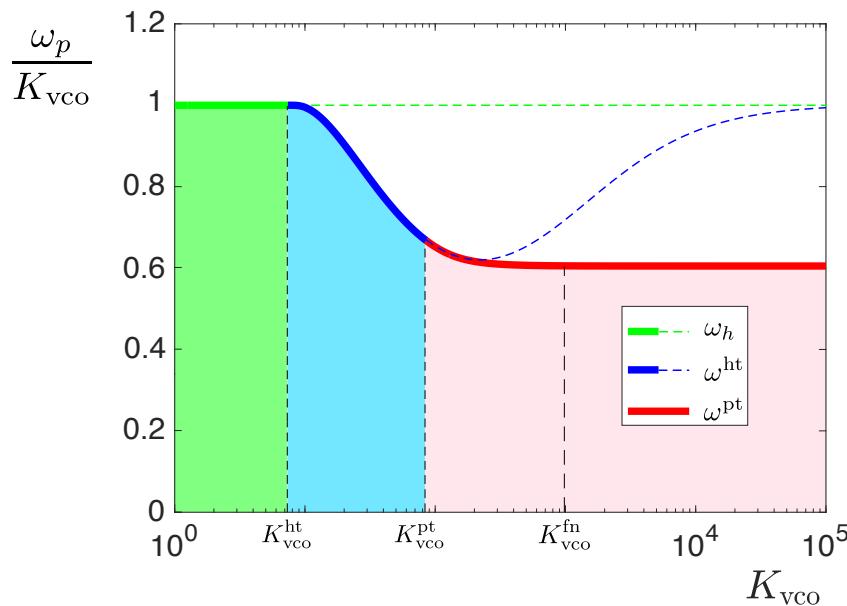


Рис. 6: Бифуркационная диаграмма для определения полосы захвата системы (2), построенная согласно теореме 1. При  $K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  полоса захвата совпадает с полосой удержания:  $[0, \omega_p) = [0, \omega_h) = [0, K_{\text{vco}})$ , при  $K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{pt}}]$  полоса захвата определяется рождением гетероклинической траектории, соединяющей седловые состояния равновесия, при  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{ht}}$ :  $[0, \omega_p) = [0, \omega^{\text{ht}})$ , и определяется по формуле (10), при  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$  полоса захвата определяется рождением полуустойчивого цикла второго рода при  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}}$ :  $[0, \omega_p) = [0, \omega^{\text{pt}})$ , и определяется по формуле (10). Параметры:  $k = \frac{2}{\pi}$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ;  $K_{\text{vco}}^{\text{ht}} \approx 7.32$ ,  $K_{\text{vco}}^{\text{pt}} \approx 84.91$ ,  $K_{\text{vco}}^{\text{fn}} \approx 985$ ,  $k > k^{\text{ht}} \approx 0.35$ ,  $k^{\text{fn}} \approx 4.01$ .

$$s^{\text{ht}} = \begin{cases} \frac{(\kappa-\eta)^2+2\xi(\kappa-\eta)+k}{(\kappa+\eta)^2-2\xi(\kappa+\eta)+k} \exp\left(\frac{2\xi}{\rho}\left(\arctan\frac{(\xi-\eta)^2+\rho^2-\kappa^2}{2\rho\kappa} + \frac{\pi}{2}\right)\right), \\ \text{если } \tau_2 = 0 \text{ и } K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, \text{ или если } \tau_2 > 0 \text{ и } K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{fn}}); \\ \left(\frac{\kappa-\eta+\sqrt{k}}{\kappa+\eta-\sqrt{k}} \exp\left(\frac{2\sqrt{k}\kappa}{\kappa^2-(\eta-\sqrt{k})^2}\right)\right)^2, \text{ если } \tau_2 > 0 \text{ и } K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{fn}}; \\ \frac{(\kappa-\eta+\xi)^2-\rho^2}{(\kappa+\eta-\xi)^2-\rho^2} \left(\frac{(\kappa+\rho)^2-(\xi-\eta)^2}{(\kappa-\rho)^2-(\xi-\eta)^2}\right)^{\frac{\xi}{\rho}}, \text{ если } \tau_2 > 0 \text{ и } K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{fn}}, \end{cases} \quad (11)$$

$$s^{\text{pt}} = \frac{(z_0(z_1^{\text{pt}}) + \eta)^2 - \kappa^2}{(z_1^{\text{pt}} - \eta)^2 - \kappa^2} \left( \frac{(z_0(z_1^{\text{pt}}) + \kappa + \eta)(z_1^{\text{pt}} + \kappa - \eta)}{(z_0(z_1^{\text{pt}}) + \eta - \kappa)(z_1^{\text{pt}} - \eta - \kappa)} \right)^{\frac{\eta}{\kappa}}, \quad (12)$$

если  $\tau_2 > 0$  и  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$ ,

где функция  $z_0(z_1)$  имеет вид

$$z_0(z_1) = \frac{(1 + \mu)kz_1 - 2(\mu\xi + \eta)k}{(1 + \mu)k - 2(\xi - \eta)z_1}, \quad (13)$$

а  $z_1^{\text{pt}} \in (\eta + \kappa, k\sqrt{\tau_2 K_{\text{vco}}})$  определяется единственным образом из неявного

уравнения относительно  $z_1$ :

$$\begin{aligned} & \frac{(z_0(z_1) + \eta)^2 - \kappa^2}{(z_1 - \eta)^2 - \kappa^2} \left( \frac{(z_0(z_1) + \eta + \kappa)(z_1 + \kappa - \eta)}{(z_0(z_1) + \eta - \kappa)(z_1 - \eta - \kappa)} \right)^{\frac{\eta}{\kappa}} = \\ & \quad \frac{(z_0(z_1))^2 + 2\xi z_0(z_1) + k}{z_1^2 - 2\xi z_1 + k} \exp \left( \frac{2\xi}{\rho} \left( \arctan \frac{\rho}{z_0(z_1) + \xi} - \arctan \frac{z_1 - \xi}{\rho} + \frac{\pi}{2} \right) \right), \\ & \quad \text{если } k < k^{\text{fn}} \text{ и } K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{pt}}, K_{\text{vco}}^{\text{fn}}); \\ & = \begin{cases} \left( \frac{z_0(z_1) + \sqrt{k}}{z_1 - \sqrt{k}} \exp \left( \frac{\sqrt{k}}{z_0(z_1) + \sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{z_1 - \sqrt{k}} \right) \right)^2, & \text{если } k < k^{\text{fn}} \text{ и } K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{fn}}, \\ \frac{(z_0(z_1) + \xi)^2 - \rho^2}{(z_1 - \xi)^2 - \rho^2} \left( \frac{(z_0(z_1) + \rho + \xi)(z_1 + \rho - \xi)}{(z_0(z_1) + \xi - \rho)(z_1 - \xi - \rho)} \right)^{\frac{\xi}{\rho}}, & \text{если } k < k^{\text{fn}} \text{ и } K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{fn}}, \text{ или если } k \geq k^{\text{fn}} \text{ и } K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

**Следствие 1.** При заданных фиксированных параметрах  $k > \frac{1}{\pi}$ ,  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$  для любого  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  существует единственное значение  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{ht}}(K_{\text{vco}})$ , для которого в системе (2) существует гетероклиническая траектория, соединяющая седловые состояния равновесия, а для любого  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$  существует единственное значение  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}}(K_{\text{vco}})$ , для которого в системе (2) существует полуустойчивый цикл второго рода.

*Замечание 1.* Из формул для  $s^{\text{ht}}$  и  $s^{\text{pt}}$  получаем непрерывность функций  $\omega^{\text{ht,pt}}(K_{\text{vco}})$  в точке  $K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{fn}}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{K_{\text{vco}} \rightarrow K_{\text{vco}}^{\text{fn}} - 0} \omega^{\text{ht}}(K_{\text{vco}}) &= \lim_{K_{\text{vco}} \rightarrow K_{\text{vco}}^{\text{fn}} + 0} \omega^{\text{ht}}(K_{\text{vco}}) = \omega^{\text{ht}}(K_{\text{vco}}^{\text{fn}}), \\ \lim_{K_{\text{vco}} \rightarrow K_{\text{vco}}^{\text{fn}} - 0} \omega^{\text{pt}}(K_{\text{vco}}) &= \lim_{K_{\text{vco}} \rightarrow K_{\text{vco}}^{\text{fn}} + 0} \omega^{\text{pt}}(K_{\text{vco}}) = \omega^{\text{pt}}(K_{\text{vco}}^{\text{fn}}) \quad \text{при } k < k^{\text{fn}}, \end{aligned}$$

а также непрерывность частоты захвата  $\omega_p(K_{\text{vco}})$ , следующую из формул

$$\begin{aligned} \lim_{K_{\text{vco}} \rightarrow K_{\text{vco}}^{\text{ht}} + 0} \omega^{\text{ht}}(K_{\text{vco}}) &= K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, \\ \lim_{K_{\text{vco}} \rightarrow K_{\text{vco}}^{\text{ht}} + 0} \omega^{\text{pt}}(K_{\text{vco}}) &= K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, \quad \text{при } k \leq k^{\text{ht}}, \\ \lim_{K_{\text{vco}} \rightarrow K_{\text{vco}}^{\text{pt}} + 0} \omega^{\text{pt}}(K_{\text{vco}}) &= \omega^{\text{ht}}(K_{\text{vco}}^{\text{pt}}), \quad \text{при } k > k^{\text{ht}}. \end{aligned}$$

### 3 Доказательство основных результатов

Для удобства восприятия и большей наглядности по ходу доказательства мы в сносках ссылаемся на анимации, созданные с использованием графического калькулятора Desmos.

### 3.1 Поглощающее множество и замена переменных

Используя для непрерывной кусочно-линейной системы (2) качественные методы анализа динамических систем, можно показать, что потеря глобальной устойчивости определяется бифуркациями исчезновения состояний равновесия, рождения полуустойчивого цикла второго рода или соединяющей неустойчивые седловые состояния равновесия гетероклинической траектории и не связана с рождением цикла первого рода или гомоклинической траектории [5, 6, 10, 27, 59]:

**Лемма 1** ([59]). *Траектории системы (2) при  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}})$  стремятся либо к состоянию равновесию, либо к циклу второго рода, либо к полициклу второго рода, состоящего из гетероклинических траекторий, которые соединяют седловые состояния равновесия. При этом для любой траектории существует момент времени  $t^*$ , такой что  $-\tau_1 \leq x(t) \leq \tau_1$  для всех  $t > t^*$ , то есть в системе есть поглощающее множество*

$$\{(x, \theta_e) \mid -\tau_1 \leq x \leq \tau_1\}. \quad (15)$$

*Циклы и полициклы второго рода, если существуют, лежат в полосе*

$$\left\{ (x, \theta_e) \mid -\tau_1 \leq x \leq \frac{\tau_1 \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} \right\}. \quad (16)$$

Введём следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{\tau_1 + \tau_2}{K_{\text{vco}}}} \omega_e^{\text{free}} - \sqrt{\frac{K_{\text{vco}}}{\tau_1 + \tau_2}} (x + \tau_2 \text{pwl}(\theta_e)), \\ \tau &= \sqrt{\frac{K_{\text{vco}}}{\tau_1 + \tau_2}} t. \end{aligned} \quad (17)$$

Траектории системы (2) являются непрерывными и после непрерывной замены переменных (17) переходят в непрерывные траектории. Эти траектории описываются системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\frac{1 + \tau_2 K_{\text{vco}} (\text{pwl}(\theta_e))'}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2) K_{\text{vco}}}} y + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} - \text{pwl}(\theta_e), \\ \dot{\theta}_e &= y \end{aligned} \quad (18)$$

во всех точках, лежащих вне линий разрыва

$$S_m^\pm = \{(y, \theta_e) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_e = \pm \frac{1}{k} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}\}$$

нулевой меры Лебега. Поскольку траектории могут только прошивать линии разрыва  $S_m$  (линии разрыва не содержат целые траектории, в том числе, состояния равновесия, и куски траекторий), то точка траектории, лежащая на  $S_m$ , однозначно определяется по непрерывности. Далее под решениями системы (18) будем понимать получившиеся после замены (17) непрерывные траектории. Определённые по непрерывности решения совпадают с решениями системы (18) по Филиппову [60, 61].

*Замечание 2.* Траектории системы (18) являются графиками в полуплоскостях  $y > 0$  и  $y < 0$ , то есть каждому значению  $\theta_e$  соответствует единственное значение  $y$ . Отметим, что для любой траектории справедливо  $\dot{\theta}_e(t)y(t) = y^2(t) \geq 0$ . Таким образом, циклы и полицикли второго рода не могут пересекать прямую  $y = 0$ . Также независимость от  $\omega_e^{\text{free}}$  абсцисс состояний равновесия  $(y, \theta_e) = (0, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})$  системы (18) упрощает анализ.

Учитывая замену переменных (17), поглощающие множества (15), (16), а также расположение  $\omega$ -сепаратрис в системе (2) и системе (18), переформулируем лемму 1 для системы (18):

**Лемма 2** (локализация циклов и полициклов в системе (18)). *Траектории системы (18) при  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}}]$  стремятся либо к состоянию равновесию, либо к циклу второго рода, либо к полициклу второго рода, состоящего из гетероклинических траекторий, которые соединяют седловые состояния равновесия. При этом для любой траектории существует момент времени  $t^*$ , такой что*

$$-\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}} \left(1 - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}\right) \leq y(t) \leq y^{\text{abs}}, \quad \forall t > t^*,$$

то есть в системе есть поглощающее множество

$$\left\{ (y, \theta_e) \mid -\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}} \left(1 - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}\right) \leq y \leq y^{\text{abs}} \right\}, \quad (19)$$

а циклы и полицикли второго рода, если существуют, лежат в полосе

$$\begin{aligned} D^{\text{cyc}} &= \left\{ (y, \theta_e) \mid 0 \leq y \leq y^{\text{abs}} \right\}, \\ y^{\text{abs}} &= k\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}} \left(\frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

### 3.2 Линейный анализ

Система (18) на периоде может быть записана в виде двух линейных систем:

- в полосе  $A = \{(y, \theta_e) \mid \frac{1}{k} - 2\pi \leq \theta_e \leq -\frac{1}{k}, y \in \mathbb{R}\}$  система (18) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 2\mu^{-1}\eta y + k\mu^{-1}(\theta_e + \pi) + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}, \\ \dot{\theta}_e &= y,\end{aligned}\tag{21}$$

- в полосе  $B = \{(y, \theta_e) \mid -\frac{1}{k} \leq \theta_e \leq \frac{1}{k}, y \in \mathbb{R}\}$  система (18) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -2\xi y - k\theta_e + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}, \\ \dot{\theta}_e &= y,\end{aligned}\tag{22}$$

где  $\xi, \eta$  и  $\mu$  определены в (8).

При  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}})$  в каждой из областей находится по одному состоянию равновесия. В области  $A$  состояние равновесия  $(y, \theta_e) = \left(0, -\frac{\mu\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} - \pi\right)$  является седлом, так как корни характеристического полинома<sup>7</sup>

$$\chi^A(\lambda) = \lambda^2 - 2\mu^{-1}\eta\lambda - k\mu^{-1}$$

вещественны и имеют разные знаки:

$$\lambda_{\pm}^A = \mu^{-1}(\eta \pm \sqrt{\eta^2 + k\mu}).$$

В области  $B$  состояние равновесия  $(y, \theta_e) = \left(0, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}\right)$  асимптотически устойчиво, так как корни характеристического полинома

$$\chi^B(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi\lambda + k$$

имеют отрицательные вещественные части:

$$\lambda_{\pm}^B = \begin{cases} -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - k}, & \text{если } \xi^2 \geq k, \\ -\xi \pm i\sqrt{k - \xi^2}, & \text{если } \xi^2 < k. \end{cases}$$

При  $\xi^2 > k$  состояние равновесия является узлом, при  $\xi^2 = k$  — вырожденным узлом, а при  $\xi^2 < k$  — фокусом. Используя формулы (8) и (5), получим, что если  $\tau_2 = 0$ , то устойчивое состояние равновесия является узлом при  $\xi^2 > k \iff K_{\text{vco}} < K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ , вырожденным узлом при  $\xi^2 = k \iff K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  и фокусом при  $\xi^2 < k \iff K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ , а если  $\tau_2 > 0$ , то устойчивое состояние равновесия является узлом при  $\xi^2 > k \iff K_{\text{vco}} \in$

<sup>7</sup>Здесь анализ характеристических полиномов  $\chi^A(\lambda)$  и  $\chi^B(\lambda)$  приводит к тем же результатам, что и анализ характеристических полиномов  $\chi_1(\lambda)$  и  $\chi_2(\lambda)$  до замены переменных (17) (см. секцию 1).

$((0, K_{\text{vco}}^{\text{ht}}) \cup (K_{\text{vco}}^{\text{fn}}, +\infty))$ , вырожденным узлом при  $\xi^2 = k \iff K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ ,  $K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{fn}}$  и фокусом при  $\xi^2 < k \iff K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{fn}})$  (см. рис. 3, где точками обозначены области, в которых устойчивое состояние равновесия является фокусом).

Для дальнейшего анализа глобальной устойчивости важно рассмотреть траектории системы (18), соответствующие собственным векторам узла (в случае  $\xi^2 \geq k$ ) и седла. В силу линейности системы (21) траектории двух  $\omega$ -сепаратрис и двух  $\alpha$ -сепаратрис линейны и описываются уравнениями

$$y = y_{\pm}^A(\theta_e) \text{ при } \theta_e \in \left[ \frac{1}{k} - 2\pi, -\frac{\mu\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} - \pi \right) \cup \left( -\frac{\mu\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} - \pi, -\frac{1}{k} \right),$$

где

$$y_{\pm}^A(\theta_e) = \mu^{-1}(\eta \pm \kappa) \left( \theta_e + \pi + \frac{\mu\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} \right),$$

а  $\kappa = \sqrt{\eta^2 + k\mu}$  определено в (8). При  $\xi^2 \geq k$  траектории системы (22), соответствующие собственным векторам узла, линейны и описываются уравнениями

$$y = y_{\pm}^B(\theta_e) \text{ при } \theta_e \in \left[ -\frac{1}{k}, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} \right) \cup \left( \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}, \frac{1}{k} \right), \quad \xi^2 \geq k,$$

где

$$y_{\pm}^B(\theta_e) = -(\xi \pm \rho) \left( \theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} \right), \quad (23)$$

а  $\rho = \sqrt{|\xi^2 - k|}$  определено в (8). При  $\xi^2 = k$  имеем  $\rho = 0$  и  $y_+^B(\theta_e) = y_-^B(\theta_e)$ ,  $\forall \theta_e \in \mathbb{R}$ .

Из леммы 2 следует, что для анализа глобальной устойчивости (полосы захвата) достаточно в полосе  $D^{\text{cyc}}$  (20) исследовать циклы второго рода и гетероклиническую траекторию, соединяющую седловые состояния равновесия. Обозначим через  $A_+$  и  $B_+$  области фазового пространства

$$\begin{aligned} A_+ &= A \cap \{(y, \theta_e) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}, \\ B_+ &= B \cap \{(y, \theta_e) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}. \end{aligned}$$

Пусть произвольная траектория  $(y(t), \theta_e(t))$  из верхней полуплоскости пересекает границы полос  $A_+$  и  $B_+$  в точках  $(y, \theta_e) = (y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$ ,  $(y, \theta_e) = (y_1, -\frac{1}{k})$  и  $(y, \theta_e) = (y_2, \frac{1}{k})$  (см. рис. 7). Если  $y_0 = y_2$ , то такая траектория является циклом второго рода, а для анализа гетероклинической траектории,

соединяющей седловые состояния равновесия, введём ординаты пересечения сепаратрисами границы полосы  $A_+$  через

$$y_0^{\text{sep}} = y_-^A \left( \frac{1}{k} - 2\pi \right) = (\kappa - \eta) \left( \frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} \right) > 0,$$

$$y_1^{\text{sep}} = y_+^A \left( -\frac{1}{k} \right) = (\kappa + \eta) \left( \frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} \right) > 0.$$

По аналогии с ординатой  $y_0^{\text{sep}}$  точки из полосы  $A$ , введём  $y_2^{\text{sep}} = y_0^{\text{sep}}$  — ординату пересечения  $\omega$ -сепаратрисой границы линейности  $\theta_e = \frac{1}{k}$ . Если точки  $(y, \theta_e) = (y_1^{\text{sep}}, -\frac{1}{k})$  и  $(y, \theta_e) = (y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$  принадлежат одной траектории, то такая траектория является гетероклинической (см. рис. 7).

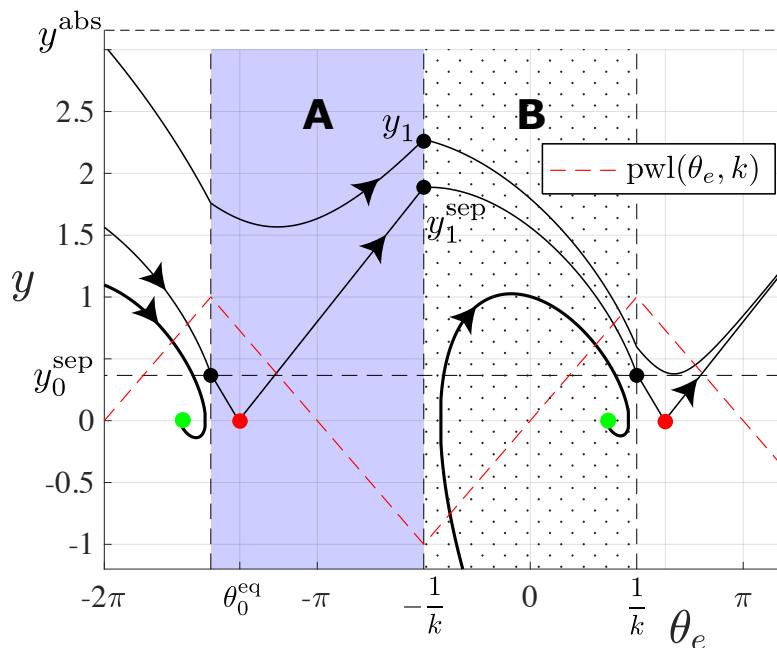


Рис. 7: Фазовый портрет системы (18) и кусочно-линейная характеристика  $\text{pw1}(\theta_e, k)$  (1). Параметры:  $k = \frac{2}{\pi}$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ,  $K_{\text{vco}} = 50$ ,  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{ht}} \approx 36.93$ .

### 3.3 Аналитическое интегрирование

#### 3.3.1 Интегрирование системы в полосе $A$

**Утверждение 1** (описание траекторий в области  $A$ ). *Куски любых траекторий  $(y(t), \theta_e(t))$  системы (18) в полосе  $A$  удовлетворяют равенству*

$$f^A(y, \theta_e) = C_A, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} f^A(y, \theta_e) &= |y - y_-^A(\theta_e)|^{\frac{\kappa-\eta}{\kappa}} |y - y_+^A(\theta_e)|^{\frac{\kappa+\eta}{\kappa}}, \\ y_\pm^A(\theta_e) &= \mu^{-1}(\eta \pm \kappa) \left( \theta_e + \pi + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

а  $C_A \geq 0$  — некоторая константа.

*Доказательство.* В полосе  $A$  система (18) имеет вид (21). При  $y \neq 0$  переменная  $\theta_e(t)$  меняется монотонно и поведение системы (21) описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dy}{d\theta_e} = 2\mu^{-1}\eta + \frac{k(\theta_e + \pi) + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}}{\mu y}. \quad (26)$$

При  $\theta_e \in A \setminus \{-\pi - \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}\}$  замена переменных

$$z = \frac{\mu y}{\theta_e + \pi + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}}$$

позволяет записать уравнение (26) в виде уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{d\theta_e} = -\frac{z^2 - 2\eta z - \mu k}{z(\theta_e + \pi + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}})}. \quad (27)$$

Аналитическое интегрирование позволяет выписать равенство, которому удовлетворяют решения (27):

$$f_1^A(z) + f_2^A(\theta_e) = \frac{1}{2} \ln C_A,$$

где

$$\begin{aligned} f_1^A(z) &= \frac{1}{2} \ln \left( |z - (\eta - \kappa)|^{\frac{\kappa-\eta}{\kappa}} |z - (\eta + \kappa)|^{\frac{\kappa+\eta}{\kappa}} \right), \\ f_2^A(\theta_e) &= \ln(\mu^{-1}) + \ln \left| \theta_e + \pi + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} \right|, \quad C_A > 0. \end{aligned}$$

Обратные замены переменных, применение свойств логарифмической и экспоненциальной функций и анализ непрерывности получаемых функций при  $y = 0$  и  $\theta_e = -\pi - \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}$  позволяют построить линии уровня, описывающие решения системы (18) в полосе  $A$  (системы (21)).



### 3.3.2 Интегрирование в полосе $B_+$

**Утверждение 2** (описание траекторий в области  $B_+$ ). Куски любых траекторий  $(y(t), \theta_e(t))$  системы (18) в полосе  $B_+$  удовлетворяют равенству

$$f^B(y, \theta_e) = C_B, \quad (28)$$

где

$$f^B(y, \theta_e) = \begin{cases} \frac{|y - y_+^B(\theta_e)|^{\frac{\xi+\rho}{\rho}}}{|y - y_-^B(\theta_e)|^{\frac{\xi-\rho}{\rho}}} & \text{npu } \xi^2 > k \text{ и } y \neq y_-^B(\theta_e), \\ (y - y_-^B(\theta_e))^2 \exp\left(\frac{-2y_-^B(\theta_e)}{y - y_-^B(\theta_e)}\right) & \text{npu } \xi^2 = k \text{ и } y \neq y_-^B(\theta_e), \\ 0 & \text{npu } \xi^2 \geq k \text{ и } y = y_-^B(\theta_e), \\ \left(y^2 + 2\xi y (\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}) + k(\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})^2\right) \exp\left(-\frac{2\xi}{\rho} \arctan\left(\frac{y + \xi(\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})}{(\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})\rho}\right)\right) \\ & \text{npu } \xi^2 < k, -\frac{1}{k} \leq \theta_e < \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}, \\ y^2 \exp\left(\frac{\pi\xi}{\rho}\right) & \text{npu } \xi^2 < k, \theta_e = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}, \\ \left(y^2 + 2\xi y (\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}) + k(\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})^2\right) \exp\left(\frac{2\pi\xi}{\rho} - \frac{2\xi}{\rho} \arctan\left(\frac{y + \xi(\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})}{(\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})\rho}\right)\right) \\ & \text{npu } \xi^2 < k, \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} < \theta_e \leq \frac{1}{k}, \\ y_\pm^B(\theta_e) = -(\xi \pm \rho) \left(\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}\right), & \end{cases} \quad (29)$$

а  $C_B \geq 0$  — некоторая константа.

*Доказательство.* В полосе  $B$  система (18) имеет вид (22). При  $y > 0$  переменная  $\theta_e(t)$  меняется монотонно и поведение системы системы (22) описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dy}{d\theta_e} = -2\xi - \frac{k\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}}{y}. \quad (30)$$

При  $\theta_e \in B \setminus \left\{ \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} \right\}$  замена переменных

$$z = \frac{y}{\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}}$$

позволяет записать уравнение (30) в виде уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{d\theta_e} = -\frac{z^2 + 2\xi z + k}{z(\theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})}. \quad (31)$$

Аналитическое интегрирование позволяет выписать равенство, которому удовлетворяют решения (31):

$$f_1^B(z) + f_2^B(\theta_e) = \frac{1}{2} \ln C_B,$$

где

$$f_1^B(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|z+\xi+\rho|^{\frac{\xi+\rho}{\rho}}}{|z+\xi-\rho|^{\frac{\xi-\rho}{\rho}}} \right), & \xi^2 > k, \\ \ln |z + \xi| + \frac{\xi}{z + \xi}, & \xi^2 = k, \\ \frac{1}{2} \ln(z^2 + 2\xi z + k) - \frac{\xi}{\rho} \arctan \left( \frac{z+\xi}{\rho} \right), & \xi^2 < k, \end{cases}$$

$$f_2^B(\theta_e) = \ln \left| \theta_e - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} \right|, \quad C_B > 0.$$

Обратные замены переменных, применение свойств логарифмической и экспоненциальной функций, анализ непрерывности получаемых функций при  $y = 0$  и  $\theta_e = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}$  и сшивка решений при  $\xi^2 < k$  и  $\theta_e = \frac{\omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}$  позволяют построить линии уровня, описывающие решения системы (18) в полосе  $B_+$  (системы (22)). ■

### 3.4 Критерий существования циклов и полациклов второго рода

Куски траекторий системы (18) в полосах  $A$  и  $B_+$  удовлетворяют равенствам  $f^A(y, \theta_e) = C_A$  (24) и  $f^B(y, \theta_e) = C_B$  (28), соответственно (см. утверждение 1 и утверждение 2). Следовательно, если траектория системы (18) проходит через некоторую точку  $(y_1, -\frac{1}{k})$ , где  $y_1 > 0$ , то она удовлетворяет равенствам

$$f^A(y, \theta_e) = f^A \left( y_1, -\frac{1}{k} \right), \quad (32)$$

$$f^B(y, \theta_e) = f^B \left( y_1, -\frac{1}{k} \right) \quad (33)$$

в полосах  $A_+$  и  $B_+$ , соответственно. Равенства  $f^A(y, \theta_e) = C_A$  (32) и  $f^B(y, \theta_e) = C_B$  (33) могут задавать несколько кривых на фазовой плоскости (при фиксированных константах  $C_{A,B}$ ). Для создания соответствия между функциями  $f^{A,B}(y, \theta_e)$  и кривыми, соединяющими точку  $(y_1, -\frac{1}{k})$  с некоторыми точками  $(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$  и  $(y_2, \frac{1}{k})$  на левой границе полосы  $A_+$  и правой границе полосы  $B_+$ , соответственно, сформулируем лемму 3, которая следует из утверждения 1 и утверждения 2:

**Лемма 3** (о свойствах функций  $f^A(y, \frac{1}{k} - 2\pi)$ ,  $f^{A,B}(y, -\frac{1}{k})$ ,  $f^B(y, \frac{1}{k})$ ). Функции  $f^A(y, \frac{1}{k} - 2\pi)$ ,  $f^{A,B}(y, -\frac{1}{k})$ ,  $f^B(y, \frac{1}{k})$  на интервалах

$$\begin{aligned} f^A\left(y, \frac{1}{k} - 2\pi\right) &: [y_0^{\text{sep}}, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \\ f^A\left(y, -\frac{1}{k}\right) &: [y_1^{\text{sep}}, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \\ f^B\left(y, -\frac{1}{k}\right) &: [y_+^B(-\frac{1}{k}), +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad \text{при } \xi^2 \geq k, \\ f^B\left(y, -\frac{1}{k}\right) &: [0, +\infty) \rightarrow [f^B(0, -\frac{1}{k}), +\infty), \quad \text{при } \xi^2 < k, \\ f^B\left(y, \frac{1}{k}\right) &: [0, +\infty) \rightarrow [f^B(0, \frac{1}{k}), +\infty) \end{aligned}$$

являются строго возрастающими, непрерывными и задают биективные отображения<sup>8</sup>.

Итак, пусть траектория системы (18) проходит через некоторую точку  $(y_1, -\frac{1}{k})$ , где  $y_1 > 0$ , и тогда в полосах  $A_+$  и  $B_+$  выполнены равенства (32) и (33), соответственно. Для анализа глобальной устойчивости необходимо исследовать траектории, которые образуют цикл или полицикл второго рода, а соответствующие кривые, задаваемые равенствами (32) и (33), полностью пересекают полосы  $A_+$  и  $B_+$ , проходя через некоторые точки  $(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$  и  $(y_2, \frac{1}{k})$ , где  $y_{0,2} > 0$ .

Определим такие  $y_1^A$  и  $y_1^B$ , что при  $y_1 \geq y_1^A$  равенство (32) задаёт кривую, полностью пересекающую полосу  $A_+$  и доходящую до точки  $(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$ , а при  $y_1 \geq y_1^B$  равенство (33) задаёт кривую, полностью пересекающую полосу  $B_+$  и доходящую до точки  $(y_2, \frac{1}{k})$ .

Так, для кривых в полосе  $A_+$  положим

$$y_1^A = y_1^{\text{sep}},$$

а для кривых в полосе  $B_+$  положим

$$\begin{aligned} y_1^B = 0, \quad &\text{если } f^B\left(0, -\frac{1}{k}\right) \geq f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k}) \text{ и } \xi^2 < k, \\ y_1^B > 0 : \quad &f^B\left(y_1^B, -\frac{1}{k}\right) = f^B\left(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k}\right), \quad \text{иначе,} \end{aligned} \tag{34}$$

<sup>8</sup>Ссылка на анимацию в Desmos: <https://www.desmos.com/calculator/ctezjtu7xg>.

причём из леммы 3 следует, что  $y_1^B > 0$  находится из неявного уравнения единственным образом. Действительно, так как  $y_2^{\text{sep}} > 0$ , то  $f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$  принадлежит области значений строго возрастающей функции  $f^B(y, \frac{1}{k}): [0, +\infty) \rightarrow [f^B(0, \frac{1}{k}), +\infty)$ . Поскольку  $f^B(y, \theta_e) \geq 0, \forall y \geq 0, \theta_e \in \mathbb{R}$  (см. вид функции  $f^B(y, \theta_e)$  в (29)), то корректность определения  $y_1^B > 0$  следует из попадания значения  $f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$  в область значений строго возрастающей функции

$$\begin{aligned} f^B\left(y, -\frac{1}{k}\right) : [y_+^B(-\frac{1}{k}), +\infty) &\rightarrow [0, +\infty), \quad \text{при } \xi^2 \geq k, \\ f^B\left(y, -\frac{1}{k}\right) : [0, +\infty) &\rightarrow [f^B(0, -\frac{1}{k}), +\infty), \quad \text{при } \xi^2 < k, \end{aligned}$$

причём  $y_1^B > y_+^B(-\frac{1}{k})$  при  $\xi^2 \geq k$ .

Далее в леммах 4 и 5 докажем, что введённые  $y_1^A$  и  $y_1^B$  удовлетворяют определениям, предварительно введя на левых и правых границах областей  $A_+$  и  $B_+$  функции

$$\begin{aligned} f_{\text{left}}^A(y) &= f^A(y, \frac{1}{k} - 2\pi): [y_0^{\text{sep}}, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \\ f_{\text{right}}^A(y) &= f^A(y, -\frac{1}{k}): [y_1^A, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \\ f_{\text{left}}^B(y) &= f^B(y, -\frac{1}{k}): [y_1^B, +\infty) \rightarrow \left[ f^B(0, -\frac{1}{k}), +\infty \right), \\ f_{\text{right}}^B(y) &= f^B(y, \frac{1}{k}): [y_2^{\text{sep}}, +\infty) \rightarrow \left[ f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k}), +\infty \right). \end{aligned}$$

**Лемма 4** (о задании функции  $y_0 = y_0(y_1)$ ). *При  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}}]$  для любого  $y_1 \geq y_1^A$  равенство  $f^A(y, \theta_e) = f^A(y_1, -\frac{1}{k})$  (32) задает в полосе  $A_+$  кривую, соединяющую точку  $(y_1, -\frac{1}{k})$  с некоторой точкой  $(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$  на левой границе полосы  $A_+$ , причём  $y_0 \geq y_0^{\text{sep}}$ . В этой точке равенство (32) принимает вид*

$$f_{\text{left}}^A(y_0) = f_{\text{right}}^A(y_1) \tag{35}$$

*и неявно задаёт строго возрастающую функцию*

$$y_0 = y_0(y_1) = (f_{\text{left}}^A)^{-1}(f_{\text{right}}^A(y_1)): [y_1^A, +\infty) \rightarrow [y_0^{\text{sep}}, +\infty). \tag{36}$$

*При этом равенство (35) имеет вид*

$$\begin{aligned} (y_0 - y_0^{\text{sep}})^{\frac{\kappa-\eta}{\kappa}} \left( y_0 - y_+^A \left( \frac{1}{k} - 2\pi \right) \right)^{\frac{\kappa+\eta}{\kappa}} &= (y_1 - y_1^{\text{sep}})^{\frac{\kappa+\eta}{\kappa}} \left( y_1 - y_-^A \left( -\frac{1}{k} \right) \right)^{\frac{\kappa-\eta}{\kappa}}, \quad (37) \\ y_0 \geq y_0^{\text{sep}}, \quad y_1 \geq y_1^A. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Подставив точку  $(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$ , где  $y_0 \geq y_0^{\text{sep}}$ , в (32), получим  $f^A(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi) = f^A(y_1, -\frac{1}{k})$ . Так как  $y_0 \geq y_0^{\text{sep}}$ ,  $y_1 \geq y_1^A$ , то последнее равенство равносильно (35). Функция  $f_{\text{left}}^A(y)$  задаёт биективное отображение из  $[y_0^{\text{sep}}, +\infty)$  в  $[0, +\infty)$  (см. лемму 3), то существует обратная  $(f_{\text{left}}^A)^{-1}(y)$  на  $[0, +\infty)$ . Так как множество значений функции  $f_{\text{right}}^A(y)$  совпадает с  $[0, +\infty)$ , то можем применить обратную  $(f_{\text{left}}^A)^{-1}(y)$  и получить строго возрастающую функцию (36). Формула (37) получается из равенства (35) с использованием формулы (25) для  $y_{0,1} \geq y_{0,1}^{\text{sep}}$ .

Кривая, соединяющая точки  $(y_0^{\text{sep}}, \frac{1}{k} - 2\pi)$  и  $(y_1^{\text{sep}}, -\frac{1}{k})$ , состоит из двух отрезков,  $y = y_-^A(\theta_e)$ ,  $\theta_e \in [\frac{1}{k} - 2\pi, -\frac{\mu\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} - \pi]$  и  $y = y_+^A(\theta_e)$ ,  $[-\frac{\mu\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} - \pi, -\frac{1}{k}]$ , соответствующих седловому состоянию равновесия и его  $\omega$ - и  $\alpha$ -сепаратрисам в полосе  $A$ . Эта кривая лежит на линии уровня  $f^A(y, \theta_e) = f_{\text{right}}^A(y_1^{\text{sep}}) = 0$ . Так как функции  $f_{\text{left}}^A(y_0)$  и  $f_{\text{right}}^A(y_1)$  — строго возрастающие (при  $y_0 \geq y_0^{\text{sep}}$  и  $y_1 \geq y_1^A$ ) и функция  $f^A(y, \theta_e)$  непрерывна, то точки  $(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$  и  $(y_1, -\frac{1}{k})$ , где  $y_0 \geq y_0^{\text{sep}}$  и  $y_1 \geq y_1^A$ , лежат на одной линии уровня  $f^A(y, \theta_e) = f_{\text{right}}^A(y_1)$  при выполнении (35).

■

**Лемма 5** (о задании функции  $y_2 = y_2(y_1)$ ). *При  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}})$  для любого  $y_1 \geq y_1^B$  равенство  $f^B(y, \theta_e) = f^B(y_1, -\frac{1}{k})$  (33) задает в полосе  $B_+$  кривую, соединяющую точку  $(y_1, -\frac{1}{k})$  с некоторой точкой  $(y_2, \frac{1}{k})$  на правой границе полосы  $B_+$ , причём  $y_2 \geq y_2^{\text{sep}}$ . В этой точке равенство (33) принимает вид*

$$f_{\text{left}}^B(y_1) = f_{\text{right}}^B(y_2) \quad (38)$$

*и неявно задаёт строго возрастающую функцию*

$$y_2 = y_2(y_1) = (f_{\text{right}}^B)^{-1}(f_{\text{left}}^B(y_1)) : [y_1^B, +\infty) \rightarrow [y_2^{\text{sep}}, +\infty). \quad (39)$$

При этом равенство (38) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{(y_1 - y_+^B(-\frac{1}{k}))^{\frac{\xi+\rho}{\rho}}}{(y_1 - y_-^B(-\frac{1}{k}))^{\frac{\xi-\rho}{\rho}}} = \frac{(y_2 - y_+^B(\frac{1}{k}))^{\frac{\xi+\rho}{\rho}}}{(y_2 - y_-^B(\frac{1}{k}))^{\frac{\xi-\rho}{\rho}}} \quad \text{при } \xi^2 > k, \\
 & (y_1 - y_-^B(-\frac{1}{k})) \exp\left(\frac{-y_-^B(-\frac{1}{k})}{y_1 - y_-^B(-\frac{1}{k})}\right) = (y_2 - y_-^B(\frac{1}{k})) \exp\left(\frac{-y_-^B(\frac{1}{k})}{y_2 - y_-^B(\frac{1}{k})}\right) \quad \text{при } \xi^2 = k, \\
 & \exp\left(\frac{2\xi}{\rho} \left( \pi - \arctan\left(\frac{y_1 - \xi(\frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})}{(\frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})\rho}\right) - \arctan\left(\frac{y_2 + \xi(\frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})}{(\frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})\rho}\right) \right)\right) = \\
 & = \frac{y_1^2 - 2\xi(\frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})y_1 + k(\frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})^2}{y_2^2 + 2\xi(\frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})y_2 + k(\frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}})^2} \quad \text{при } \xi^2 < k, \\
 & y_1 \geq y_1^B, \quad y_2 \geq y_2^{\text{sep}}. \tag{40}
 \end{aligned}$$

*Доказательство.* Подставив точку  $(y_2, \frac{1}{k})$ , где  $y_2 \geq y_2^{\text{sep}}$ , в (33), получим  $f^B(y_1, -\frac{1}{k}) = f^B(y_2, \frac{1}{k})$ . Так как  $y_2 \geq y_2^{\text{sep}}$ ,  $y_1 \geq y_1^B$ , то последнее равенство равносильно (38). Функция  $f_{\text{right}}^B(y)$  задаёт биективное отображение из  $[y_2^{\text{sep}}, +\infty)$  в  $[f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k}), +\infty)$  (см. лемму 3), тогда существует обратная  $(f_{\text{right}}^B)^{-1}(y)$  на  $[f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k}), +\infty)$ . Так как множество значений функции  $f_{\text{left}}^B(y)$  содержит  $[f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k}), +\infty)$ , то есть  $[f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k}), +\infty) \subset [f^B(0, -\frac{1}{k}), +\infty)$ , то можем применить обратную  $(f_{\text{right}}^B)^{-1}(y)$  и получить строго возрастающую функцию (39). Заметим, что при  $\xi^2 \geq k$  область  $B$  пересекают собственные векторы узла, лежащие на прямых  $y_{\pm}^B(\theta_e)$  (23), причём  $y_{\pm}^B(\frac{1}{k}) < 0$ . Следовательно,  $y_1^B > y_{\pm}^B(-\frac{1}{k})$ . Формула (40) получается из равенства (38) с использованием формулы (29) для  $y_1 \geq y_+^B(-\frac{1}{k})$ ,  $y_2 \geq 0$ .

Если  $\xi^2 \geq k$ , то так как  $y_2^{\text{sep}} > 0 > y_{\pm}^B(\frac{1}{k})$ , то траектория, проходящая через точку  $(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$  лежит над собственными векторами узла в полосе  $B$  и, следовательно, достигает (в обратном времени) левой границы полосы  $B_+$  в точке  $(y, \theta_e) = (y_1^B, -\frac{1}{k})$  (см. рис. 7). Эта траектория лежит на линии уровня  $f^B(y, \theta_e) = f_{\text{left}}^B(y_1^B)$ . Так как функции  $f_{\text{left}}^B(y_1)$  и  $f_{\text{right}}^B(y_2)$  — строго возрастающие (при  $y_1 \geq y_1^B$  и  $y_2 \geq y_2^{\text{sep}}$ ) и функция  $f^B(y, \theta_e)$  непрерывна в области, находящейся выше собственных векторов узла, то точки  $(y_1, -\frac{1}{k})$  и  $(y_2, \frac{1}{k})$ , где  $y_1 \geq y_1^B$  и  $y_2 \geq y_2^{\text{sep}}$ , лежат на одной линии уровня  $f^B(y, \theta_e) = f_{\text{left}}^B(y_1)$  при выполнении (38).

Если  $\xi^2 < k$ , то траектория, проходящая через точку  $(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$  может не достигнуть (в обратном времени) левой границы полосы  $B_+$  (см. рис. 8). В

этом случае в силу линейности системы в полосе  $B$  траектория с началом в точке  $(0, -\frac{1}{k})$  достигнет правой границы полосы  $B_+$  и пройдёт через некоторую точку  $(y_2^B, \frac{1}{k})$ , где  $y_2^B > y_2^{\text{sep}}$  и  $f_{\text{left}}^B(0) = f_{\text{right}}^B(y_2^B)$ . При этом имеем  $f_{\text{right}}^B(y_2^B) > f_{\text{right}}^B(y_2^{\text{sep}})$ , что равносильно  $f^B(0, -\frac{1}{k}) > f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$ , и  $y_1^B = 0$ . Если же траектория, проходящая через точку  $(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$  достигает (в обратном времени) левой границы полосы  $B_+$  (см. рис. 9), то она проходит через точку  $(y_1^B, -\frac{1}{k})$ , где  $y_1^B \geq 0$ , и  $f^B(0, -\frac{1}{k}) \leq f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$ . Так как функции  $f_{\text{left}}^B(y_1)$  и  $f_{\text{right}}^B(y_2)$  — строго возрастающие (при  $y_1 \geq y_1^B$  и  $y_2 \geq y_2^{\text{sep}}$ ) и функция  $f^B(y, \theta_e)$  непрерывна, то точки  $(y_1, -\frac{1}{k})$  и  $(y_2, \frac{1}{k})$ , где  $y_1 \geq y_1^B$  и  $y_2 \geq y_2^{\text{sep}}$ , лежат на одной линии уровня  $f^B(y, \theta_e) = f_{\text{left}}^B(y_1)$  при выполнении (38).

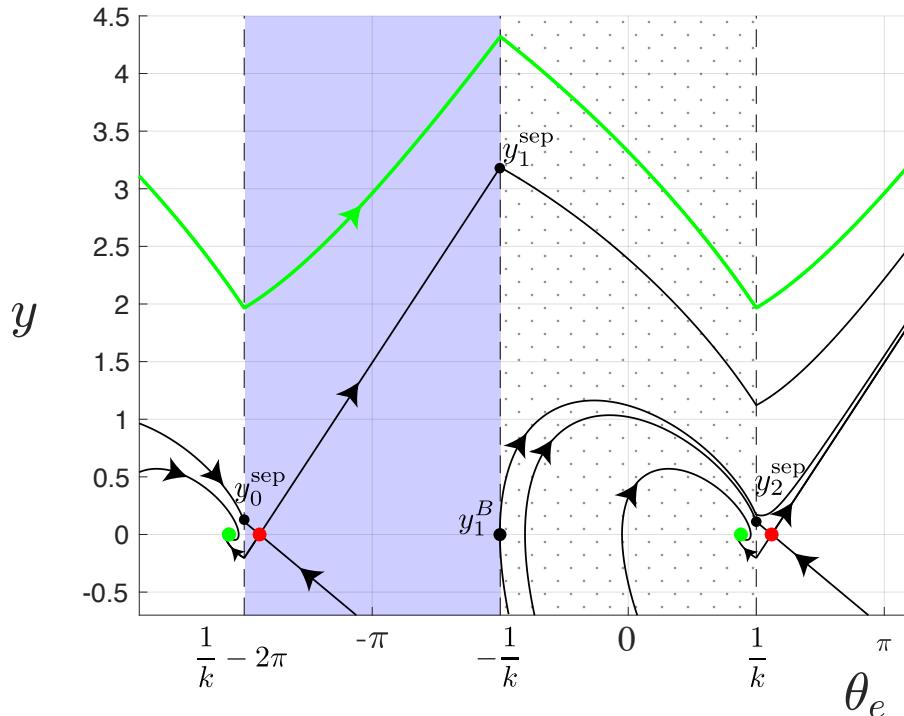


Рис. 8: Фазовый портрет системы (18). Параметры:  $k = \frac{2}{\pi}$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ,  $K_{\text{vco}} = 250$ ,  $\omega_e^{\text{free}} = 220$ .

■

*Замечание 3.* Из леммы 5 и определения  $y_1^B$  (34) следует, что если  $\xi^2 < k$  и  $f^B(0, -\frac{1}{k}) < f^B(y_2^{\text{sep}}, \frac{1}{k})$  или если  $\xi^2 \geq k$ , то для  $y_1^B > 0$  справедлива формула

$$y_1^B = (f_{\text{left}}^B)^{-1}(f_{\text{right}}^B(y_2^{\text{sep}})).$$

Если траектория, проходящая через точку  $(y_1, -\frac{1}{k})$ , является циклом или частью полилицикла второго рода, то ординаты  $y_0 = y_0(y_1) \geq 0$  и  $y_2 = y_2(y_1) \geq 0$  точек пересечения соответствующих кривых, задаваемых строго

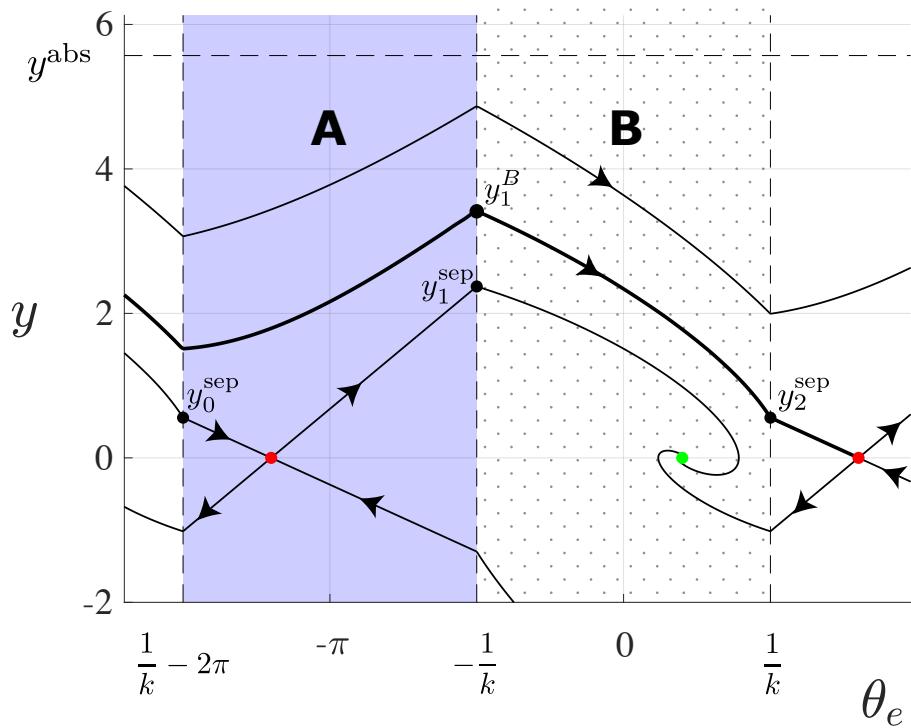


Рис. 9: Фазовый портрет системы (18). Параметры:  $K_{\text{vco}} = 250$ ,  $k = \frac{2}{\pi}$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ,  $\omega_e^{\text{free}} = 100$ .

возрастающими функциями (36) и (39), совпадают:  $y_0 = y_2$ . Таким образом, из лемм 2–5 следует утверждение:

**Утверждение 3** (критерий существования циклов и полициклов). *В системе (18) при  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}}]$  через точки  $(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$ ,  $(y_1, -\frac{1}{k})$  и  $(y_0, \frac{1}{k})$  проходит цикл или полицикл второго рода тогда и только тогда, когда*

$$y_0(y_1) = y_2(y_1) \quad (41)$$

*при  $y_1 \geq \max\{y_1^A, y_1^B\}$ . При этом  $y_1 \leq y^{\text{abs}}$ .*

Из утверждения 3 и леммы 2 следует, что если кривые, задаваемые функциями  $y_0(y_1)$  и  $y_2(y_1)$ , не пересекаются, то система глобально устойчива (см. рис. 11). В противном случае необходимо проводить анализ функций для определения первого пересечения соответствующих кривых.

### 3.5 Анализ точечного отображения кусочно-линейной системы

Для анализа функций  $y_0 = y_0(y_1)$  (36) и  $y_2 = y_2(y_1)$  (39) введём на плоскости  $\{(y_1, y_0) \mid y_{1,0} \in \mathbb{R}\}$  прямую

$$L(y_1) = \frac{K_{\text{vco}} - \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}} + \omega_e^{\text{free}}} y_1 \quad (42)$$

и сформулируем утверждение 4, которое является продолжением леммы 4 и леммы 5.

**Утверждение 4** (о выпуклости/вогнутости кривых  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$ ). При  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}}]$  строго возрастающие функции  $y_0 = y_0(y_1)$  (36) и  $y_2 = y_2(y_1)$  (39), заданные при  $y_1 \geq y_1^A$  и  $y_1 \geq y_1^B$ , соответственно, имеют не более одной точки перегиба, определяемой пересечением кривых с прямой  $L(y_1)$  (42) при  $y_1 > y_1^A$  и  $y_1 > y_1^B$ ; выше прямой  $L(y_1)$  функция  $y_0 = y_0(y_1)$  вогнута и функция  $y_2 = y_2(y_1)$  выпукла, ниже прямой  $L(y_1)$  функция  $y_0 = y_0(y_1)$  выпукла и функция  $y_2 = y_2(y_1)$  вогнута. При этом кривые, задаваемые функциями  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$ , имеют не более двух общих точек.

*Доказательство.* Для анализа выпуклости функции  $y_0 = y_0(y_1)$ , неявно задаваемой равенством (35) при  $y_1 \geq y_1^A$ , возьмём производные по  $y_1$  в обеих частях (35) при  $y_1 > y_1^A$ :

$$(f_{\text{left}}^A)'(y_0) \frac{dy_0}{dy_1} = (f_{\text{right}}^A)'(y_1). \quad (43)$$

Далее, используя равенство  $f^A(y, \theta_e) = \exp(2f_1^A(z(y, \theta_e)) + 2f_2^A(\theta_e))$  из утверждения 1, где  $z = z(y, \theta_e) = \frac{\mu y}{\theta_e + \pi + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}}$ , найдём частную производную функции  $f^A(y, \theta_e)$  по  $y$ :

$$\frac{\partial f^A}{\partial y}(y, \theta_e) = f^A(y, \theta_e) \frac{2\mu}{\theta_e + \pi + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}} \frac{df_1^A}{dz}(z(y, \theta_e)). \quad (44)$$

Далее обозначим  $z_1 = z_1(y_1) = z(y_1, -\frac{1}{k}) = \frac{k K_{\text{vco}}}{K_{\text{vco}} + \omega_e^{\text{free}}} y_1 > 0$ ,  $z_0 = z_0(y_0) = z(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi) = -\frac{k K_{\text{vco}}}{K_{\text{vco}} - \omega_e^{\text{free}}} y_0 < 0$  и подставим в (44) точки  $(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi)$  и  $(y_1, -\frac{1}{k})$ :

$$(f_{\text{left}}^A)'(y_0) = f_{\text{left}}^A(y) \frac{2\mu}{\frac{1}{k} - \pi + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}} \frac{df_1^A}{dz}(z_0),$$

$$(f_{\text{right}}^A)'(y_1) = f_{\text{right}}^A(y) \frac{2\mu}{-\frac{1}{k} + \pi + \frac{\mu \omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}}} \frac{df_1^A}{dz}(z_1).$$

Учитывая равенство  $f_{\text{left}}^A(y_0) = f_{\text{right}}^A(y_1)$  (35), задающее функцию  $y_0 = y_0(y_1)$  (36), а также используя (44), выразим  $\frac{dy_0}{dy_1}$  из (43):

$$\frac{dy_0}{dy_1} = -\frac{K_{\text{vco}} - \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}} + \omega_e^{\text{free}}} \frac{\frac{df_1^A}{dz}(z(y_1, -\frac{1}{k}))}{\frac{df_1^A}{dz}(z(y_0, \frac{1}{k} - 2\pi))}. \quad (45)$$

Возьмём вторую производную по  $y_1$ :

$$\frac{d^2y_0}{dy_1^2} = \frac{\frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}}{\left(\frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}\right)^2} \frac{\left(\frac{df_1^A}{dz}(z_1)\right)^2}{\frac{df_1^A}{dz}(z_0)} \left( \frac{\frac{d^2f_1^A}{dz^2}(z_0)}{\left(\frac{df_1^A}{dz}(z_0)\right)^2} - \frac{\frac{d^2f_1^A}{dz^2}(z_1)}{\left(\frac{df_1^A}{dz}(z_1)\right)^2} \right).$$

Поскольку функция  $f_1^A(z)$  является первообразной для  $\frac{z}{z^2 - 2\eta z - \mu k}$  при  $z \neq \eta \pm \kappa$  (см. интегрирование в секции 3.3.1), то

$$\frac{df_1^A}{dz}(z) = \frac{z}{z^2 - 2\eta z - \mu k}.$$

Учитывая, что  $\frac{d^2f_1^A}{dz^2}(z) = -\frac{z^2 + \mu k}{(z^2 - 2\eta z - \mu k)^2}$  и  $\frac{d^2f_1^A}{dz^2}(z)(\frac{df_1^A}{dz}(z))^{-2} = -\frac{z^2 + \mu k}{z^2}$ , получим

$$\frac{d^2y_0}{dy_1^2} = \frac{\frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}}{\left(\frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}}\right)^2} \frac{\mu k(z_0^2 - z_1^2)}{z_0^2 z_1^2} \frac{\left(\frac{df_1^A}{dz}(z_1)\right)^2}{\frac{df_1^A}{dz}(z_0)}.$$

Тогда  $\frac{d^2y_0}{dy_1^2} = 0$  только при  $z_1 = -z_0 > 0$ :

$$y_0 = \frac{K_{\text{vco}} - \omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}} + \omega_e^{\text{free}}} y_1.$$

Таким образом, кривая  $y_0 = y_0(y_1)$  имеет не более одной точки перегиба ( $\frac{d^2y_0}{dy_1^2} = 0$ ). Выше прямой  $L(y_1)$  (при больших  $y_0$ ) функция  $y_0 = y_0(y_1)$  вогнута ( $\frac{d^2y_0}{dy_1^2} < 0$ ), ниже — выпукла ( $\frac{d^2y_0}{dy_1^2} > 0$ ), см. рис. 10.

Аналогично можно показать, что кривая  $y_2 = y_2(y_1)$  имеет не более одной точки перегиба ( $\frac{d^2y_2}{dy_1^2} = 0$ ), причём выше прямой  $L(y_1)$  (при больших  $y_2$ ) функция  $y_2 = y_2(y_1)$  выпукла ( $\frac{d^2y_2}{dy_1^2} > 0$ ), ниже — вогнута ( $\frac{d^2y_2}{dy_1^2} < 0$ ), см. рис. 10.

Таким образом, более трёх пересечений кривых быть не может. Покажем, что пересечений не более двух. Из леммы 2 следует, что при достаточно больших  $y_1$  имеем  $y_0(y_1) > y_2(y_1)$ , то есть вогнутая кривая  $y_0 = y_0(y_1)$  (36) лежит выше кривой выпуклой  $y_2 = y_2(y_1)$  (39) при достаточно больших  $y_1$ . Следовательно, над прямой  $L(y_1)$  происходит не более одного пересечения кривых. Если пересечение происходит над прямой (или на прямой), то  $y_0 = y_0(y_1)$  пересекает прямую  $L(y_1)$  выше, чем  $y_2 = y_2(y_1)$  (или пересекаются на прямой в одной точке). В этом случае под прямой происходит не более одного пересечения (см. рис. 10 слева). Если пересечения над прямой  $L(y_1)$  не было,

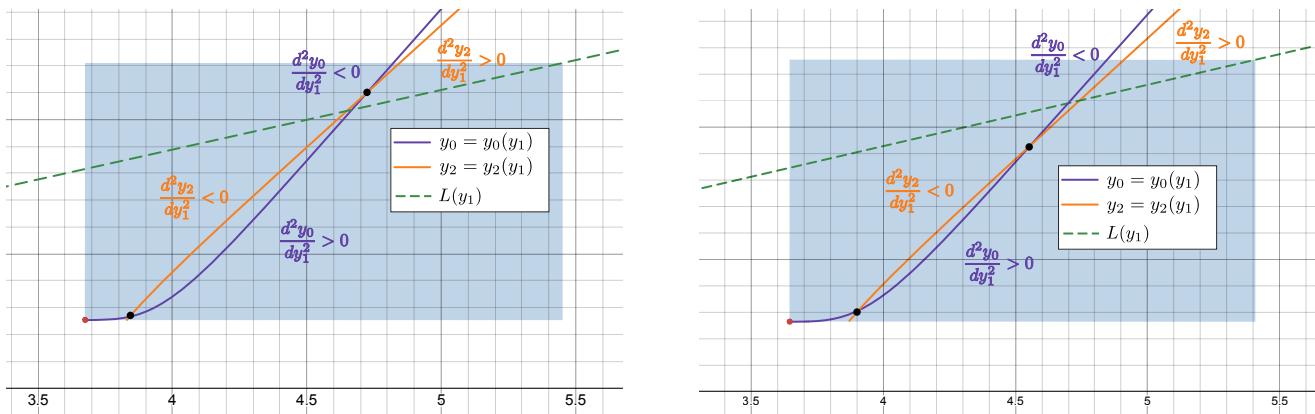


Рис. 10: Возможное взаиморасположение кривых  $y_0 = y_0(y_1)$  (36) и  $y_2 = y_2(y_1)$  (39). Параметры:  $k = \frac{2}{\pi}$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ,  $K_{\text{vco}} = 600$ ,  $\omega_e^{\text{free}} = 382$  (слева) и  $\omega_e^{\text{free}} = 374$  (справа).

то  $y_0 = y_0(y_1)$  пересекает прямую  $L(y_1)$  ниже, чем  $y_2 = y_2(y_1)$ . В этом случае под прямой  $L(y_1)$  может быть два пересечения кривых (см. рис. 10 справа). ■

**Утверждение 5** ([19]). *Если  $K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ , то кривые, задаваемые функциями  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$  не имеют пересечений при  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}}]$ .*

*Доказательство (от противного).* Предположим, что кривые пересекаются при некотором  $y_1 = y_1^*$ . Из леммы 2 и утверждения 3 следует, что  $\max\{y_1^A, y_1^B\} \leq y_1^* \leq y^{\text{abs}}$ . Далее покажем, что  $y_1^B > y^{\text{abs}}$  и получим противоречие с существованием  $y_1^*$ .

При  $K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  устойчивое состояние равновесия является узлом или вырожденным узлом ( $\xi^2 \geq k$ ) и, следовательно,  $y_1^B > y_+^B(-\frac{1}{k})$  (из определения  $y_1^B$ ). Более того, при  $K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  имеем

$$\begin{aligned} y_+^B \left( -\frac{1}{k} \right) - y^{\text{abs}} &= \left( \frac{\xi + \rho}{k} - \sqrt{K_{\text{vco}}(\tau_1 + \tau_2)} \right) \left( 1 + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}} \right) \geq \\ &\geq \frac{\tau_2 K_{\text{vco}} + \frac{1}{k}}{2\sqrt{K_{\text{vco}}(\tau_1 + \tau_2)}} - \sqrt{K_{\text{vco}}(\tau_1 + \tau_2)} = \\ &= \frac{1 - k K_{\text{vco}}(2\tau_1 + \tau_2)}{2k\sqrt{K_{\text{vco}}(\tau_1 + \tau_2)}} \geq \frac{1 - \frac{2\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1 + \tau_2 + 2\sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)}}}{2k\sqrt{K_{\text{vco}}(\tau_1 + \tau_2)}} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $y_1^B > y^{\text{abs}}$  и кривые не пересекаются (см. рис. 11). ■

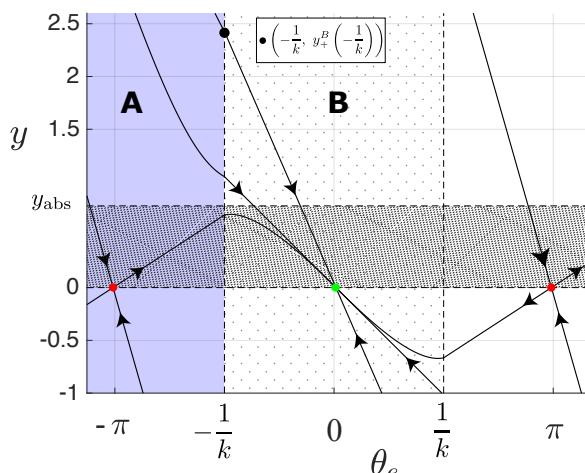
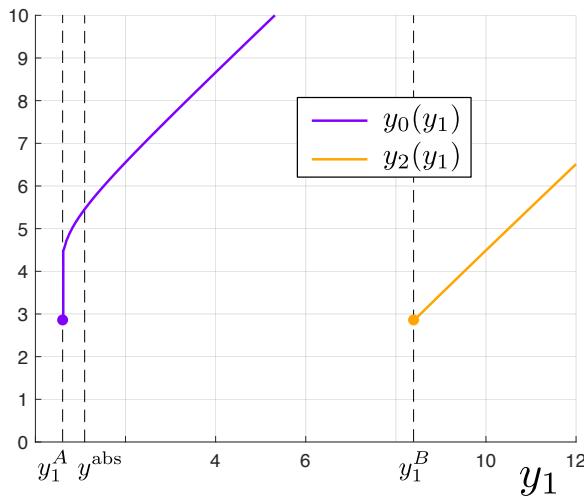


Рис. 11: Глобальная устойчивость системы (18) при отсутствии общих точек у кривых \$y\_0 = y\_0(y\_1)\$ (36) и \$y\_2 = y\_2(y\_1)\$ (39) (см. утверждение 5). Параметры: \$k = \frac{2}{\pi}\$, \$\tau\_1 = 0.0448\$, \$\tau\_2 = 0.0185\$, \$K\_{\text{vco}} = 6 < K\_{\text{vco}}^{\text{ht}} \approx 7.3195\$, \$\omega\_e^{\text{free}} = 0.1\$.

Для нахождения полосы захвата при \$K\_{\text{vco}} > K\_{\text{vco}}^{\text{ht}}\$ необходимо определить первое соприкосновение кривых \$y\_0 = y\_0(y\_1)\$ и \$y\_2 = y\_2(y\_1)\$. Для этого введём гиперболу

$$H(y_1) = H(y_1, \omega_e^{\text{free}}) = \left(1 - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}\right) \frac{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)K_{\text{vco}}}y_1 - \tau_2 K_{\text{vco}}\left(1 + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{K_{\text{vco}}}\right)}{y^{\text{abs}} - y_1}, \quad y_1 < y^{\text{abs}}, \quad (46)$$

которая при \$\omega\_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}}\$ проходит через точку касания кривых \$y\_0 = y\_0(y\_1)\$ и \$y\_2 = y\_2(y\_1)\$ (см. лемму 6).

*Замечание 4.* При \$y\_1 < y^{\text{abs}}\$ гипербола \$H(y\_1)\$ является выпуклой и строго возрастающей. Заметим, что точка \$(y\_1^{\text{sep}}, y\_0^{\text{sep}})\$ кривой \$y\_0 = y\_0(y\_1)\$ (36) удовлетворяет \$y\_0^{\text{sep}} = H(y\_1^{\text{sep}})\$, а прямая \$y\_1 = y^{\text{abs}}\$ является асимптотой для гиперболы.

**Лемма 6** (про касание кривых). *Касание кривых \$y\_0 = y\_0(y\_1)\$ и \$y\_2 = y\_2(y\_1)\$, заданных при \$y\_1 \geq \max\{y\_1^A, y\_1^B\}\$, происходит при некотором \$\omega\_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}} \in [0, K\_{\text{vco}})\$ тогда и только тогда, когда у трёх кривых \$y\_0 = y\_0(y\_1)\$, \$y\_2 = y\_2(y\_1)\$ и \$H(y\_1) = H(y\_1)\$ имеется общая точка \$(y\_1^{\text{pt}}, y\_0^{\text{pt}})\$, где \$y\_1^{\text{pt}} \in (\max\{y\_1^A, y\_1^B\}, y^{\text{abs}})\$.*

*Доказательство.* 1) Предположим, что кривые касаются и обозначим точку касания за \$(y\_1^{\text{pt}}, y\_0^{\text{pt}})\$. Из леммы 2 следует, что \$0 \leq y\_{0,1}^{\text{pt}} \leq y^{\text{abs}}\$, но так как кривые заданы при \$y\_1 \geq \max\{y\_1^A, y\_1^B\} > 0\$, то \$y\_1^{\text{pt}} > \max\{y\_1^A, y\_1^B\} > 0\$. Используя равенство наклонов кривых в точке касания: \$\frac{dy\_0}{dy\_1}(y\_1^{\text{pt}}) = \frac{dy\_2}{dy\_1}(y\_1^{\text{pt}})\$,

и формулы (45), (38), получим

$$\frac{\frac{df_1^A}{dz} \left( \frac{kK_{\text{vco}}}{K_{\text{vco}} + \omega^{\text{pt}}} y_1^{\text{pt}} \right)}{\frac{df_1^A}{dz} \left( -\frac{kK_{\text{vco}}}{K_{\text{vco}} - \omega^{\text{pt}}} y_0^{\text{pt}} \right)} = \frac{\frac{df_1^B}{dz} \left( -\frac{kK_{\text{vco}}}{K_{\text{vco}} + \omega^{\text{pt}}} y_1^{\text{pt}} \right)}{\frac{df_1^B}{dz} \left( \frac{kK_{\text{vco}}}{K_{\text{vco}} - \omega^{\text{pt}}} y_0^{\text{pt}} \right)}.$$

Отсюда, используя определение функций  $f_1^{A,B}(z)$  как первообразных в уравнениях (27) и (31), получим

$$\frac{(y_0^{\text{pt}})^2 + 2\eta(\frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})y_0^{\text{pt}} - \mu k(\frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})^2}{(y_1^{\text{pt}})^2 - 2\eta(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})y_1^{\text{pt}} - \mu k(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})^2} = \frac{(y_0^{\text{pt}})^2 + 2\xi(\frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})y_0^{\text{pt}} + k(\frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})^2}{(y_1^{\text{pt}})^2 - 2\xi(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})y_1^{\text{pt}} + k(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})^2}.$$

Перепишем выражение в виде уравнения второго порядка относительно  $y_0^{\text{pt}}$ :

$$\begin{aligned} & \left( 2(\xi - \eta)(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})y_1^{\text{pt}} - (k + \mu k)(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})^2 \right) (y_0^{\text{pt}})^2 + \\ & + \left( 2(\xi - \eta)(\frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})(y_1^{\text{pt}})^2 - 2(\mu k \xi + k \eta)(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})^2 (\frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}}) \right) y_0^{\text{pt}} + \\ & + (k + \mu k)(\frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})^2 (y_1^{\text{pt}})^2 - 2(\mu k \xi + k \eta)(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})(\frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})^2 y_1^{\text{pt}} = 0. \end{aligned}$$

Заметим,  $y_0^{\text{pt}} = -\frac{K_{\text{vco}} - \omega^{\text{pt}}}{K_{\text{vco}} + \omega^{\text{pt}}} y_1^{\text{pt}} < 0$  является корнем этого квадратного уравнения. Но поскольку  $y_0^{\text{pt}} \geq 0$ , то нас интересует другой (положительный) корень:

$$y_0^{\text{pt}} = \left( \frac{1}{k} - \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}} \right) \frac{(1 + \mu)ky_1^{\text{pt}} - 2(\mu \xi + \eta)k(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}})}{(1 + \mu)k(\frac{1}{k} + \frac{\omega^{\text{pt}}}{kK_{\text{vco}}}) - 2(\xi - \eta)y_1^{\text{pt}}}.$$

Используя равенства  $\xi - \eta = \frac{(1+\mu)k}{2k\sqrt{(\tau_1+\tau_2)K_{\text{vco}}}}$ ,  $\mu k \xi + k \eta = \frac{(1+\mu)k}{2\sqrt{(\tau_1+\tau_2)K_{\text{vco}}}} k \tau_2 K_{\text{vco}}$  (см. (8)), получим выражение для гиперболы  $H(y_1)$  (46), которой принадлежит точка  $(y_1^{\text{pt}}, y_0^{\text{pt}})$  касания кривых  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$ , т.е.  $y_0^{\text{pt}} = H(y_1^{\text{pt}})$ .

2) Предположим, что три кривые  $y_0 = y_0(y_1)$ ,  $y_2 = y_2(y_1)$  и  $H(y_1)$  имеют общую точку  $(y_1^{\text{pt}}, y_0^{\text{pt}})$ , где  $y_1^{\text{pt}} \in (\max\{y_1^A, y_1^B\}, y^{\text{abs}})$ . Тогда наклоны кривых  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$  в этой точке совпадают (по построению  $H(y_1)$ ) и, следовательно, она является точкой касания.

■

Используя формулы (42) и (46), получим при  $\tau_2 \neq 0$  две точки пересечения гиперболы  $H(y_1)$  и прямой  $L(y_1)$ :

$$(y_1, y_0) = \left( \pm k \sqrt{\tau_2 K_{\text{vco}}} \left( \frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} \right), \pm k \sqrt{\tau_2 K_{\text{vco}}} \left( \frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{kK_{\text{vco}}} \right) \right).$$

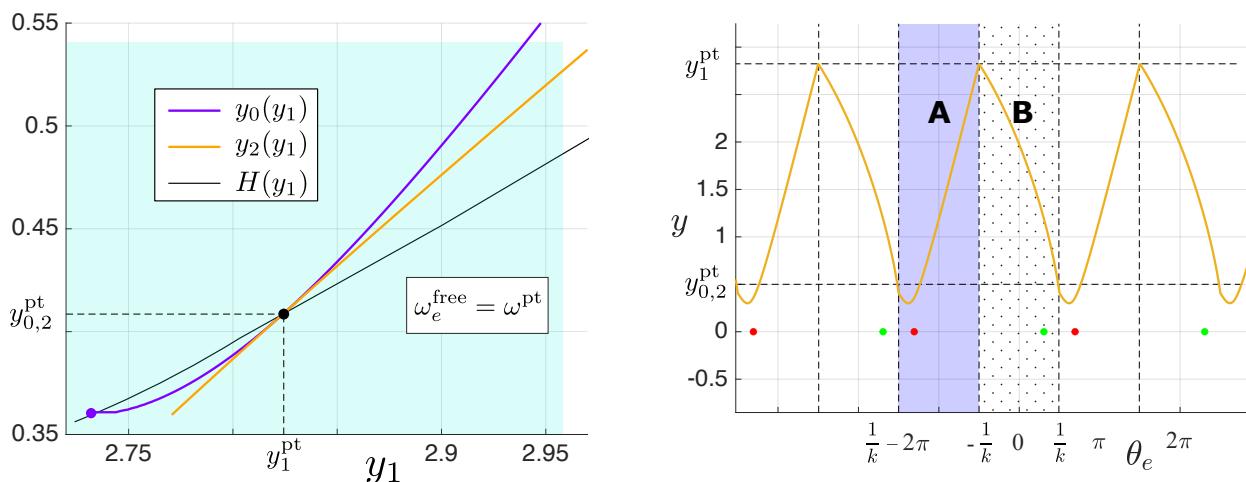


Рис. 12: Касание кривых  $y_0 = y_0(y_1)$  (36) и  $y_2 = y_2(y_1)$  (39) в точке  $(y_1, y_0) = (y_1^{\text{pt}}, y_0^{\text{pt}}) \approx (2.823, 0.408)$  соответствует полуустойчивому циклу в системе (2) с начальными данными  $(y(0), \theta_e(0)) = (y_0^{\text{pt}}, \frac{1}{k} - 2\pi) = (0.408, \frac{1}{k} - 2\pi)$  (или, что равносильно,  $(y(0), \theta_e(0)) = (y_1^{\text{pt}}, -\frac{1}{k}) = (2.823, -\frac{1}{k})$  и  $(y(0), \theta_e(0)) = (y_2^{\text{pt}}, \frac{1}{k}) = (0.408, \frac{1}{k})$ ). Параметры:  $k = \frac{2}{\pi}$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ,  $K_{\text{vco}} = 250$ ,  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}} \approx 153.02$ .

Обозначим точку пересечения в положительной четверти  $y_{0,1} > 0$  (при  $\tau_2 \neq 0$ ) за

$$(y_1^{\text{LH}}, y_0^{\text{LH}}) = \left( k\sqrt{\tau_2 K_{\text{vco}}} \left( \frac{1}{k} + \frac{\omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} \right), k\sqrt{\tau_2 K_{\text{vco}}} \left( \frac{1}{k} - \frac{\omega_e^{\text{free}}}{k K_{\text{vco}}} \right) \right).$$

*Замечание 5.* Заметим, что  $H(y_1) > L(y_1)$  при  $y_1 \in (y_1^{\text{LH}}, y^{\text{abs}})$ .

**Лемма 7** (о первом соприкосновении кривых). *Пусть  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$ . Если  $\tau_2 = 0$  или если  $\tau_2 > 0$ ,  $k > k^{\text{ht}}$  и  $K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{pt}}]$ , то первое соприкосновение кривых  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$  при возрастании  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}})$  происходит при совпадении начальных точек кривых,  $(y_1^A, y_0^{\text{sep}})$  и  $(y_1^B, y_2^{\text{sep}})$ , при некотором  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{ht}} > 0$  (см. рис. 13). В противном случае ( $\tau_2 > 0$  и  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$ ) первое соприкосновение при возрастании  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}})$  происходит при касании кривых  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$  при некотором  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}} > 0$  в точке  $(y_1^{\text{pt}}, y_0^{\text{pt}})$ , где  $y_1^{\text{pt}} \in (\max\{y_1^A, y_1^B\}, y^{\text{LH}})$  (см. рис. 12).*

*Доказательство.* 1) Из формул леммы 4 и леммы 5 следует что кривые  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$  непрерывно зависят от  $\omega_e^{\text{free}}$ . Заметим, что  $y_1^B = y_1^B(\omega_e^{\text{free}})$  (левая граница области определения функции  $y_2 = y_2(y_1)$ ) убывает (до  $y_1^B = 0$ ) при возрастании  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, K_{\text{vco}})$  (см. лемму 3 и замечание 3). Определим  $\omega_e^{\min} > 0$  как значение, при котором  $y_1^B(\omega_e^{\min}) = y^{\text{abs}}(\omega_e^{\min})$ , если при  $\omega_e^{\text{free}} = 0$  имеем  $y_1^B(0) > y^{\text{abs}}(0)$ , и  $\omega_e^{\min} = 0$  в противном случае. Тогда при  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, \omega_e^{\min})$  имеем  $y_1^B > y^{\text{abs}}$ , а при  $\omega_e^{\text{free}} \in [\omega_e^{\min}, K_{\text{vco}})$  имеем  $y_1^B \leq y^{\text{abs}}$ .

Если  $\omega_e^{\text{free}} \in [0, \omega_e^{\min})$ , область определения функции  $y_2 = y_2(y_1)$ , равная  $[y_1^B, +\infty)$  не пересекается с интервалом  $[y_1^A, y^{\text{abs}}]$  (кривые  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$  не пересекаются<sup>9</sup> и, следовательно, система (18) глобально устойчива). При увеличении  $\omega_e^{\text{free}} \in [\omega_e^{\min}, K_{\text{vco}})$  возрастает  $y_1^B$  и при  $y_1^B = y_1^A = y_1^{\text{sep}} > 0$  происходит соприкосновение кривых в точке  $(y_1, y_0) = (y_1^{\text{sep}}, y_0^{\text{sep}})$ , что следует из определения  $y_1^B$ . Таким образом реализуется первый случай утверждения при  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  и произвольных  $k > \frac{1}{\pi}$ ,  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ .

2) Предположим, что кривые касаются и обозначим точку касания за  $(y_1^{\text{pt}}, y_0^{\text{pt}})$ , тогда выполнено  $y_1^{\text{pt}} \in (\max\{y_1^A, y_1^B\}, y^{\text{abs}})$  (см. лемму 6). Более того, так как над прямой  $L(y_1)$  вогнутая кривая  $y_0 = y_0(y_1)$  находится выше выпуклой кривой  $y_2 = y_2(y_1)$  (см. утверждение 4), то над прямой  $L(y_1)$  касания произойти не может. Так как  $H(y_1) > L(y_1)$  при  $y_1 \in (y_1^{\text{LH}}, y^{\text{abs}})$  (см. замечание 5), то выполнено  $y_1^{\text{pt}} \in (\max\{y_1^A, y_1^B\}, y_1^{\text{LH}})$ .

Далее рассмотрим случаи:

- (a) Если  $K_{\text{vco}} \leq \frac{\mu}{k\tau_2}$  (при  $\tau_2 \neq 0$ ) или  $\tau_2 = 0$ , то  $\eta \leq 0$ , а следовательно  $y_1^A \geq y_1^{\text{LH}}$  и, следовательно,  $y_1^{\text{pt}} \in (\max\{y_1^A, y_1^B\}, y_1^{\text{LH}}) = \emptyset$ . Таким образом, предположение не выполняется и касания кривых не происходит.
- (b) Если  $K_{\text{vco}} > \frac{\mu}{k\tau_2}$  (при  $\tau_2 \neq 0$ ), то  $\eta > 0$ , а следовательно  $y_1^A < y_1^{\text{LH}}$ . Покажем, что при возрастании  $\omega_e^{\text{free}} \in [\omega_e^{\min}, K_{\text{vco}})$  касание кривых  $y_{0,2} = y_{0,2}(y_1)$  происходит раньше их соприкосновения в точке  $(y_1, y_0) = (y_1^{\text{sep}}, y_0^{\text{sep}})$  при  $y_1^B = y_1^A = y_1^{\text{sep}}$  (см. первый пункт доказательства). Действительно, при соприкосновении прямая  $L(y_1)$  лежит выше кривых внутри некоторой полосы  $[y_1^{\text{sep}}, y_1^{\text{sep}} + \delta]$  (так как  $y_0^{\text{sep}} < L(y_1^{\text{sep}})$  при  $\eta > 0$ , а точка  $(y_1^{\text{sep}}, y_0^{\text{sep}}) = (y_1^A, y_0^{\text{sep}}) = (y_1^B, y_0^{\text{sep}})$  принадлежит кривым), значит в этой же окрестности выпуклая кривая  $y_0 = y_0(y_1)$  лежит ниже вогнутой кривой  $y_2 = y_2(y_1)$ . А при меньшем  $\omega_e^{\text{free}} = \omega_e^{\min}$  было наоборот, значит при некотором  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}}$  произошло касание в точке  $(y_1^{\text{pt}}, y_0^{\text{pt}})$ , где  $y_1^{\text{pt}} \in (y_1^B, y_1^{\text{LH}})$ .

Наконец, так как при рассматриваемых  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  условия  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}} = \max\{\frac{\mu}{k\tau_2}, K_{\text{vco}}^{\text{ht}}\}$  и  $K_{\text{vco}} > \frac{\mu}{k\tau_2}$  равносильны, то получаем утверждение леммы. ■

Первый пункт леммы 7 соответствует бифуркации рождения гетероклинической траектории из седла в седло (сепаратрисного цикла), см. рис. 13.

<sup>9</sup>Ссылка на анимацию в Desmos: <https://www.desmos.com/calculator/ogy3dgayw5?lang=en>.

Если же кривые касаются (второй пункт леммы 7), то происходит бифуркация рождения полуустойчивого цикла второго рода, см. рис. 12.

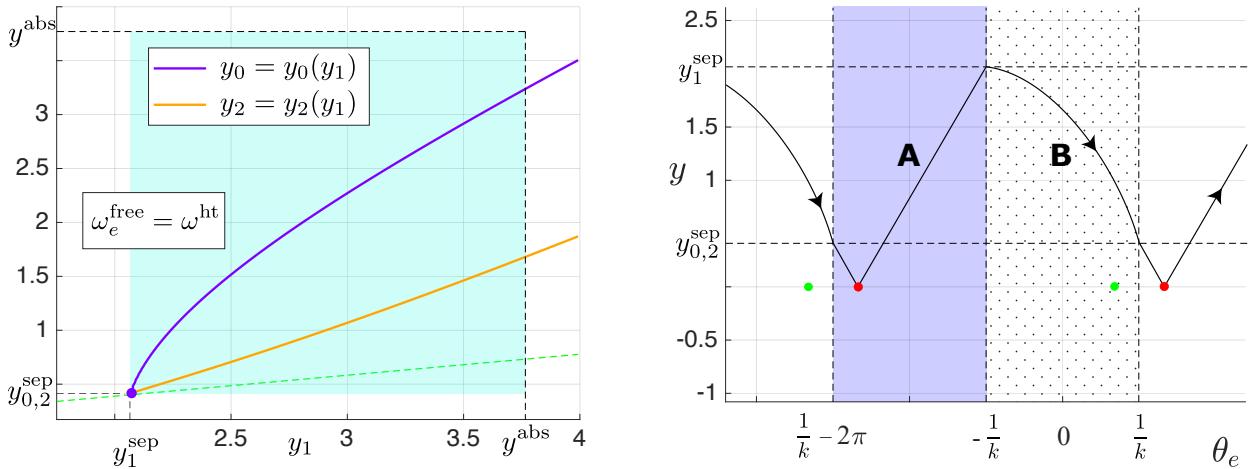


Рис. 13: Попадание точки  $(y_1, y_0) = (y_1^{\text{sep}}, y_0^{\text{sep}}) \approx (2.0652, 0.4145)$  кривой  $y_0 = y_0(y_1)$  на кривую  $y_2 = y_2(y_1)$  соответствует гетероклинической траектории в системе (2) с начальными данными  $(y(0), \theta_e(0)) = (y_0^{\text{sep}}, \frac{1}{k}) = (0.353, \frac{1}{k})$  (или, что равносильно,  $(y(0), \theta_e(0)) = (y_1^{\text{sep}}, 2\pi - \frac{1}{k}) = (2.744, 2\pi - \frac{1}{k})$ ). Параметры:  $k = \frac{2}{\pi}$ ,  $\tau_1 = 0.0448$ ,  $\tau_2 = 0.0185$ ,  $K_{\text{vco}} = 80$ ,  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{ht}} \approx 53.96$ .

### 3.6 Вычисление полосы захвата

**Утверждение 6.** При  $K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}} = \frac{1}{k(2\tau_1 + \tau_2 + 2\sqrt{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)})}$  полоса захвата системы (2) совпадает с полосой удержания:

$$[0, \omega_p) = [0, \omega_h) = [0, K_{\text{vco}}).$$

*Доказательство.* Так как при  $K_{\text{vco}} \leq K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  кривые  $y_0 = y_0(y_1)$  и  $y_2 = y_2(y_1)$  не пересекаются (утверждение 5), то согласно утверждению 3 в системе (18) отсутствуют циклы и полициклы второго рода. Тогда по лемме 2 все траектории стремятся к состояниям равновесия (система глобально устойчива) при всех  $0 \leq \omega_e^{\text{free}} < K_{\text{vco}}$  и полоса захвата равна  $[0, \omega_p) = [0, K_{\text{vco}})$ . ■

Следующие две леммы следуют из результатов секций 3.2,3.4:

**Лемма 8.** При заданных  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ ,  $k > \frac{1}{\pi}$  для любого  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{ht}}$  существует единственное значение<sup>10</sup>  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{ht}} \in [0, K_{\text{vco}})$ , для которого

<sup>10</sup>Ссылка на анимацию в Desmos: <https://www.desmos.com/calculator/y7ixuwrh38>.

в системе (2) существует гетероклиническая траектория, соединяющая седловые состояния равновесия, где

$$\omega^{\text{ht}} = \frac{\sqrt{s^{\text{ht}}} - 1}{\sqrt{s^{\text{ht}}} + 1} K_{\text{vco}},$$

$$s^{\text{ht}} = \begin{cases} \frac{(\kappa-\eta)^2+2\xi(\kappa-\eta)+k}{(\kappa+\eta)^2-2\xi(\kappa+\eta)+k} \exp\left(\frac{2\xi}{\rho}\left(\arctan\frac{(\xi-\eta)^2+\rho^2-\kappa^2}{2\rho\kappa} + \frac{\pi}{2}\right)\right), \\ \text{если } K_{\text{vco}} \in (K_{\text{vco}}^{\text{ht}}, K_{\text{vco}}^{\text{fn}}) \text{ или } \tau_2 = 0, \\ \left(\frac{\kappa-\eta+\sqrt{k}}{\kappa+\eta-\sqrt{k}} \exp\left(\frac{2\sqrt{k}\kappa}{\kappa^2-(\eta-\sqrt{k})^2}\right)\right)^2, \quad \text{если } K_{\text{vco}} = K_{\text{vco}}^{\text{fn}} \text{ и } \tau_2 \neq 0, \\ \frac{(\kappa-\eta+\xi)^2-\rho^2}{(\kappa+\eta-\xi)^2-\rho^2} \left(\frac{(\kappa+\rho)^2-(\xi-\eta)^2}{(\kappa-\rho)^2-(\xi-\eta)^2}\right)^{\frac{\xi}{\rho}}, \quad \text{если } K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{fn}} \text{ и } \tau_2 \neq 0. \end{cases}$$

**Лемма 9.** При заданных  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $k > \frac{1}{\pi}$  для любого  $K_{\text{vco}} > K_{\text{vco}}^{\text{pt}}$  существует единственное значение  $\omega_e^{\text{free}} = \omega^{\text{pt}} \in [0, K_{\text{vco}})$ , для которого в системе (2) существует полуустойчивый цикл второго рода, где

$$\omega^{\text{pt}} = \frac{\sqrt{s^{\text{pt}}} - 1}{\sqrt{s^{\text{pt}}} + 1} K_{\text{vco}}.$$

Здесь  $s^{\text{pt}}$  определяется из (12):

$$s^{\text{pt}} = \frac{(z_0^{\text{pt}} + \eta)^2 - \kappa^2}{(z_1^{\text{pt}} - \eta)^2 - \kappa^2} \left( \frac{(z_0^{\text{pt}} + \kappa + \eta)(z_1^{\text{pt}} + \kappa - \eta)}{(z_0^{\text{pt}} + \eta - \kappa)(z_1^{\text{pt}} - \eta - \kappa)} \right)^{\frac{\eta}{\kappa}},$$

функция  $z_0(z_1)$  имеет вид

$$z_0(z_1) = \frac{(1 + \mu)kz_1 - 2(\mu\xi + \eta)k}{(1 + \mu)k - 2(\xi - \eta)z_1},$$

а  $z_1^{\text{pt}} \in (\eta + \kappa, k\sqrt{\tau_2 K_{\text{vco}}})$  и определяется единственным образом из неявного уравнения (14) относительно  $z_1$ .

*Доказательство теоремы 1.* Утверждение теоремы 1 следует из формул леммы 8 и леммы 9, соответствующим первым соприкосновениям кривых, леммы 7 про первое соприкосновение кривых, утверждения 3 про соответствие пересечений кривых циклам и полициклам второго рода и леммы 2, определяющей  $\omega$ -предельные множества траекторий. ■

*Доказательство следствия 1.* Утверждения леммы 8 и леммы 9 составляют следствие 1. ■

## 4 Заключение

В данной работе исследована полоса захвата системы фазовой автоподстройки частоты второго порядка с кусочно-линейной характеристикой фазового детектора и пропорционально-интегрирующим фильтром. Наглядный метод интегрирования и сшивки траекторий кусочно-линейной системы и анализ полученных уравнений позволил вывести точную формулу для полосы захвата.

## 5 Благодарности

Авторы благодарят заведующего отделом нелинейной динамики ИПФ РАН, члена-корреспондента РАН Владимира Исааковича Некоркина и профессора Московского государственного технического университета Бориса Ильича Шахтарина за ценные комментарии об истории исследований систем фазовой автоподстройки частоты в Горьком (Нижнем Новгороде) и Москве.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 25-21-00307.

## Список литературы

- [1] Karimi-Ghartemani M. Enhanced Phase-Locked Loop Structures for Power and Energy Applications. John Wiley & Sons, 2014.
- [2] Kaplan E., Hegarty C. Understanding GPS/GNSS: Principles and Applications. 3rd edition. Artech House, 2017.
- [3] Middlestead R. Digital Communications with Emphasis on Data Modems: Theory, Analysis, Design, Simulation, Testing, and Applications. Wiley, 2017.
- [4] Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. Москва: Связь, 1972.
- [5] Leonov G., Kuznetsov N. Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops. Stability and Oscillations. Cambridge Scientific Publishers, 2014.
- [6] Leonov G., Reitmann V., Smirnova V. Nonlocal Methods for Pendulum-like Feedback Systems. Stuttgart-Leipzig: Teubner, 1992.

- [7] Леонов Г. А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 47–85. [English transl.: Automation and Remote Control, vol. 67, no. 10, pp. 1573–1609, 2006].
- [8] Tricomi F. Integrazione di un'equazione differenziale presentata in eletrotecnica // Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa (in Italian). 1933. Vol. 2, no. 2. P. 1–20.
- [9] Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты // Радиотехника. 1956. Т. 11, № 12. С. 37–52.
- [10] Губарь Н. А. Исследование одной кусочно-линейной динамической системы с тремя параметрами // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25, № 6. С. 1011–1023. [English transl.: Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 25, no. 6, pp. 1519–1535, 1961].
- [11] Cahn C. Piecewise linear analysis of phase-lock loops // IRE Transactions on Space Electronics and Telemetry. 1962. no. 1. P. 8–13.
- [12] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. 2-е издание. М.: Физ. Мат. Лит., 1959. [English transl.: Andronov A.A., Vitt E.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillators. Pergamon Press. 1966].
- [13] Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.-Л.: ОНТИ, 1937. [English transl.: Andronov A.A., Chaikin S.E. Theory of Oscillations. Princeton University Press. 1949].
- [14] Шахтарин Б. И. Исследование кусочно-линейной системы ФАП // Радиотехника и электроника. 1969. № 8. С. 1415–1424. [English transl.: Radio Engineering and Electronic Physics, no. 8, pp. 1224–1230, 1969].
- [15] Белютина Л. Н., Быков В. В., Кивелева К. Г., Шалфеев В. Д. О величине полосы захвата системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 4. С. 561–567. [English transl.: Radiophysics and Quantum Electronics, vol. 13, no. 4, pp. 437–440, 1970].
- [16] Blanchard A. Phase-Locked Loops. Wiley, 1976.
- [17] Egan W. Phase-Lock Basics. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons, 2007.

- [18] Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M. et al. Piecewise-linear analysis of the pull-in range for second-order PLLs // 2023 European Control Conference Proceedings. 2023. P. 2083–2088. <https://doi.org/10.23919/ECC57647.2023.10178196>.
- [19] Kuznetsov N., Lobachev M., Kudryashova E. et al. The Viterbi problem on coincidence of phase-locked loop lock-in, pull-in, and hold-in ranges // Nonlinear Dynamics. 2025. <https://doi.org/10.1007/s11071-025-11040-3>.
- [20] Первачев С. В. О полосе захвата системы фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8, № 2. С. 334–337. [English transl.: Radio Engineering and Electronic Physics, vol. 8, no. 2, pp. 287–290, 1963].
- [21] Protonotarios E. Pull-in performance of a piecewise linear phase-locked loop // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1969. Vol. AES-5, no. 3. P. 376–386.
- [22] Сафонов В. М. О влиянии формы пилообразной характеристики фазового детектора на полосу захвата ФАП // Радиотехника. 1969. Т. 24, № 6. С. 76–80.
- [23] Шахтарин Б. И. Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. Москва: Машиностроение, 1991.
- [24] Шахтарин Б. И. Анализ систем синхронизации методом усреднения. Москва: Радио и связь, 1999.
- [25] Белюстина Л. Н., Кивелева К. Г., Шалфеев В. Д. Применение ЭВМ к расчету полосы захвата нелинейных систем фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника. 1972. Т. 27, № 7. С. 36–39. [Дано на II Всесоюзном научно-техническом семинаре “Исследование нелинейных радиотехнических систем с помощью ЭВМ”, октябрь 1969 г., Ереван, English transl.: Radio Engineering, vol. 27, no. 7, pp. 86–89, 1972].
- [26] Матросов В. В. Моделирование систем: анализ динамики и расчет динамических характеристик системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского Государственного университета, 2012. [http://old.rf.unn.ru/rus/ktk/sites/default/files/manual\\_matrosov\\_modelling\\_fap.pdf](http://old.rf.unn.ru/rus/ktk/sites/default/files/manual_matrosov_modelling_fap.pdf).

- [27] Белюстина Л. Н., Белых В. Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 3. С. 403–415. [English transl.: Differential Equations, vol. 9, pp. 309–321, 1973].
- [28] Баутин Н. Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34, № 5. С. 850–860. [English transl.: Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 34, no. 5, pp. 812–821, 1970].
- [29] Lindsey W. Synchronization systems in communication and control. New Jersey: Prentice-Hall, 1972.
- [30] Mengali U. Acquisition behavior of generalized tracking systems in the absence of noise // IEEE Transactions on Communications. 1973. Vol. 21, no. 7. P. 820–826.
- [31] Endo T. A review of chaos and nonlinear dynamics in phase-locked loops // Journal of the Franklin Institute. 1994. Vol. 331, no. 6. P. 859–902.
- [32] Best R. Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Application. 6th edition. McGraw-Hill, 2007. P. 490.
- [33] Stensby J. The separatrix cycle for a class of phase-locked loops // Proceedings of the Twenty-Seventh Southeastern Symposium on System Theory / IEEE. 1995. P. 154–158.
- [34] Stensby J. Phase-Locked Loops: Theory and Applications. Taylor & Francis, 1997. P. 382.
- [35] Stensby J. An exact formula for the half-plane pull-in range of a PLL // Journal of the Franklin Institute. 2011. Vol. 348, no. 4. P. 671–684.
- [36] Brunk M., Rosenkranz W. The pull-in range of imperfect second-order phase-locked loops with piecewise linear phase-detector characteristics // AEÜ. 1979. Vol. 33. P. 484–490.
- [37] Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдян, Л. Н. Белюстина. Радио и связь, 1982.
- [38] Баутин Н. Н., Леонович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1990.
- [39] Капранов М. В. Элементы теории систем фазовой синхронизации. Издательство МЭИ, 2006.

- [40] Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород, 2013.
- [41] Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. СПб.: Невский диалект, 2002.
- [42] Margaris N. Theory of the Non-Linear Analog Phase Locked Loop. New Jersey: Springer Verlag, 2004. P. 287.
- [43] Harb B., Al-Ajlouni A., Eyadeh A. A Collocation-Based Algorithm for Analyzing Bifurcations in Phase Locked Loops with Tanlock and Sawtooth Phase Detectors // Mathematical Problems in Engineering. 2018. Vol. 2018. P. 1–7.
- [44] Harb B., Jaradat E. Computing the Pull-in Range of Phase Locked Loop Using Particle Swarm Optimization // 2023 International Conference on Intelligent Computing, Communication, Networking and Services (ICCNS) / IEEE. 2023. P. 267–271.
- [45] Leonov G., Kuznetsov N. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2013. Vol. 23, no. 1. art. num. 1330002. <https://doi.org/10.1142/S0218127413300024>.
- [46] Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T. et al. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. P. 1–50.
- [47] Kuznetsov N., Leonov G., Yuldashev M., Yuldashev R. Hidden attractors in dynamical models of phase-locked loop circuits: limitations of simulation in MATLAB and SPICE // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 51. P. 39–49. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.03.010>.
- [48] Kuznetsov N., Yuldashev M., Yuldashev R. et al. Comments on van Paemel's mathematical model of charge-pump phase-locked loop // Diferencialnie Uravneniya i Protsesy Upravlenia (Differential Equations and Control Processes). 2019. no. 1. P. 109–120. <https://diffjournal.spbu.ru/pdf/19107-jdecp-kuznetsov.pdf>.
- [49] Кузнецов Н. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 5–27.

- [50] Благов М.В., Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Шахтарин Б.И., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. Нелинейный анализ и синтез системы фазовой автоподстройки частоты: гипотеза Капранова и скрытые колебания // Материалы 15-й мультиконференции по проблемам управления. 2022. С. 212–213.
- [51] Kuznetsov N., Arseniev D., Blagov M. et al. The Gardner problem and cycle slipping bifurcation for type-2 phase-locked loops // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2022. Vol. 32, no. 9. art. num. 2250138. <https://doi.org/10.1142/S0218127422501383>.
- [52] Кузнецов Н. В., Лобачев М. Ю., Мокаев Т. Н. Скрытая граница глобальной устойчивости в контрпримере к гипотезе Капранова о полосе захвата // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 512. С. 69–77. [English transl.: Doklady Mathematics, vol. 108, no. 4, pp. 300–308, 2023].
- [53] Gardner F. Phaselock Techniques. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, 2005. P. 550.
- [54] Kolumbán G. Phase-locked loops // Encyclopedia of RF and Microwave Engineering (Ed. Rodenbeck., C.T.). New York, NY, USA: Wiley, 2024.
- [55] Leonov G., Kuznetsov N., Yuldashev M., Yuldashev R. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory // IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers. 2015. Vol. 62, no. 10. P. 2454–2464.
- [56] Best R., Kuznetsov N., Leonov G. et al. Tutorial on dynamic analysis of the Costas loop // IFAC Annual Reviews in Control. 2016. Vol. 42. P. 27–49. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2016.08.003>.
- [57] Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M. et al. The Gardner problem on the lock-in range of second-order type 2 phase-locked loops // IEEE Transactions on Automatic Control. 2023. Vol. 68, no. 12. P. 7436–7450. <https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3277896>.
- [58] Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., Yuldashev R. Bifurcation analysis of the boundary of global stability of type 1 PLL // 2023 European Control Conference Proceedings. 2023. P. 1107–1112. <https://doi.org/10.23919/ECC57647.2023.10178377>.

- [59] Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., Yuldashev R. On the pull-in and hold-in ranges of type 1 PLL with piecewise-linear phase detector characteristic // IFAC-PapersOnLine (22th IFAC World Congress). 2023. Vol. 56, no. 2. P. 6411–6416. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.843>.
- [60] Leonov G., Kuznetsov N., Kiseleva M., Mokaev R. Global problems for differential inclusions. Kalman and Vyshnegradskii problems and Chua circuits // Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia (Differential Equations and Control Processes). 2017. no. 4. P. 1–52.
- [61] Кузнецов Н. В., Лобачев М. Ю. Анализ разрывных моделей фазовой автоподстройки // XIV Всероссийское Совещание по Проблемам Управления ВСПУ-2024: Труды. 2024. С. 797–801.

**Exact formula for pull-in range of phase-locked loop with proportional-integrating filter and piecewise-linear phase detector characteristic.**

Kuznetsov N.V.<sup>1,2</sup>, Lobachev M.Y..<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Saint Petersburg State University

<sup>2</sup> Institute for Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences

**Abstract.** The paper develops an efficient approach for accurately determining the pull-in range of a phase-locked loop with a proportional-integrating filter and a continuous piecewise linear phase detector characteristic. This approach makes it possible to derive an analytical formula for determining the pull-in range and obtain explicit conservative estimates and asymptotic values of the pull-in range. Within the framework of the theory of hidden oscillations, this approach provides a complete solution to the problem of determining the boundary of global stability and revealing its hidden parts corresponding to the nonlocal birth of hidden oscillations.

**Keywords:** phase-locked loop, Kapranov conjecture, Gubar-Cahn scenario, pull-in range, global stability boundary, nonlocal birth of hidden oscillations