

## О глобальной устойчивости и условиях наличия предельных циклов в одной системе с гистерезисом.

Е.В. Васильева, Т.Е. Звягинцева, Н.Р. Рогатых

Санкт-Петербургский государственный университет

[e.v.vasilieva@spbu.ru](mailto:e.v.vasilieva@spbu.ru), [t.zvyagintceva@spbu.ru](mailto:t.zvyagintceva@spbu.ru), [rogatyh.nady123@gmail.com](mailto:rogatyh.nady123@gmail.com).

**Аннотация.** В статье рассматривается двумерная система автоматического управления, содержащая один нелинейный гистерезисный элемент достаточно общего вида. При некоторых предположениях на правые части системы, которые не изучались ранее, получены условия глобальной устойчивости и условия существования в системе по крайней мере двух предельных циклов. Система рассматривается на фазовом пространстве, которое представляет собой многообразие с краем. Для доказательства результатов применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений и, в частности, метод функций Ляпунова. Линии уровня функций Ляпунова «сшиваются» из кусков линий уровня различных функций, лежащих на разных листах многообразия. Показано, что при достаточно малой площади петли гистерезиса система является глобально устойчивой, а при достаточно большой площади петли в системе могут появиться предельные циклы.

**Ключевые слова:** гистерезис, фазовое пространство, глобальная устойчивость, предельный цикл, метод функций Ляпунова.

### 1. Введение

Первые исследования систем с гистерезисными нелинейностями были проведены в середине прошлого столетия в работах А.А. Андропова, Н.Н. Баутина и А.А. Фельдбаума [1, 2]. В последующие годы изучению таких

систем было посвящено большое количество работ как теоретического, так и прикладного характера, в том числе классические работы В.А. Якубовича, А.Х. Гелига, Г.А. Леонова, Р.А. Нелепина, М.А. Красносельского и А.В. Покровского [3-6].

Интерес к таким системам не ослабевает и в нынешнем столетии, поскольку они играют важную роль при решении актуальных прикладных проблем в теории автоматического регулирования и управления, в задачах механики, физики и техники. С помощью частотных методов теории автоматического управления и методов качественной теории дифференциальных уравнений и динамических систем в современных работах по данной тематике исследуются вопросы глобальной и абсолютной устойчивости гистерезисных систем, а также вопросы существования предельных циклов в таких системах (например, [7-14]). Обзор результатов, полученных частотными методами, и обширную библиографию по данной теме можно найти в книге Г.А. Леонова, М.М. Шумафова и В.А. Тешева [10].

В работах [12-14] двумерная гистерезисная система рассматривается как автономная, заданная на сложном фазовом пространстве, которое представляет собой многообразие с краем, склеенное из двух листов. В этой работе мы используем аналогичный подход для изучения поведения решений системы с гистерезисной нелинейностью.

В этой работе рассматриваем двумерную систему автоматического управления (1), содержащую нелинейный гистерезисный элемент:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - F(\sigma), \\ \dot{u} = -G(\sigma), \end{cases} \quad (1)$$

где  $F(\sigma)$  и  $G(\sigma)$  — непрерывные, кусочно-дифференцируемые функции гистерезисного вида, состоящие из двух ветвей однозначных функций:

$$F(\sigma) = \begin{cases} F_1(\sigma), & \text{если } \sigma \geq -\delta, \\ F_2(\sigma), & \text{если } \sigma \leq \delta, \end{cases} \quad G(\sigma) = \begin{cases} G_1(\sigma), & \text{если } \sigma \geq -\delta, \\ G_2(\sigma), & \text{если } \sigma \leq \delta. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что  $F_1(\sigma) = -F_2(-\sigma)$  и  $G_1(\sigma) = -G_2(-\sigma)$  для всех  $\sigma \geq -\delta$ ,  $F_1(\pm\delta) = F_2(\pm\delta)$ ,  $G_1(\pm\delta) = G_2(\pm\delta)$  (рис. 1). К такому виду приводится система, содержащая один нелинейный гистерезисный элемент [12].

В статьях [12-14] исследовалась система вида (1) при некоторых заданных условиях на поведение функций  $F(\sigma)$  и  $G(\sigma)$ . В частности, во всех трех

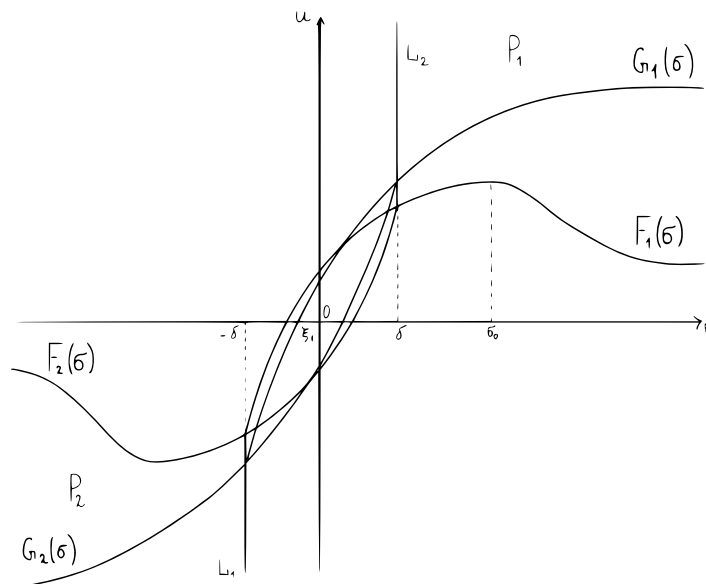


Рис. 1

статьях предполагалось, что функция  $F_1(\sigma)$  монотонно возрастает на луче от некоторого  $\sigma_0$  до  $+\infty$ .

В этой работе изучается случай, который не рассматривался ранее, когда функция  $F_1(\sigma)$  сначала возрастает, а потом убывает. В теореме 1 доказано, что при убывании  $F_1(\sigma)$  до некоторой определенной величины система является глобально устойчивой. Теорема 2 показывает, что при убывании  $F_1(\sigma)$  до достаточно малых значений в системе появляются по крайней мере два предельных цикла. Доказательство полученных результатов проводится с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений и метода функций Ляпунова.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим (1) с одним нелинейным гистерезисным элементом.

Фазовая поверхность системы (1) – многообразие с краем, которое состоит из двух листов  $P_1$  и  $P_2$  [12]:

$$P_1 = \{(\sigma, u) : \sigma \geq -\delta, \text{ и } \dot{\sigma} = (u - F_1(\sigma)) \leq 0 \text{ при } \sigma \in [-\delta, \delta]\},$$

$$P_2 = \{(\sigma, u) : \sigma \leq \delta, \text{ и } \dot{\sigma} = (u - F_2(\sigma)) \geq 0 \text{ при } \sigma \in [-\delta, \delta]\}.$$

На листе  $P_1$  система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - F_1(\sigma), \\ \dot{u} = -G_1(\sigma), \end{cases} \quad (2)$$

а на листе  $P_2$  —

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - F_2(\sigma), \\ \dot{u} = -G_2(\sigma). \end{cases} \quad (3)$$

По лучу  $L_1 = \{(\sigma, u) : \sigma = -\delta, u \leq F_1(-\delta)\}$  фазовая точка  $(\sigma, u)$  переходит с листа  $P_1$  на лист  $P_2$ , а по лучу  $L_2 = \{(\sigma, u) : \sigma = \delta, u \geq F_2(\delta)\}$  — с листа  $P_2$  на лист  $P_1$ .

Обозначим через  $\Gamma$  край многообразия  $P$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где  $\Gamma_j = \{(\sigma, u) : \sigma \in (-\delta, \delta), (u - F_j(\sigma)) = 0\}$ ,  $j = 1, 2$ .

Считаем, что существует единственное  $\xi_1 \in (-\delta, \delta)$  такое, что

$$G_1(\xi_1) = 0, \quad G_1(\sigma) < 0 \text{ при } -\delta \leq \sigma < \xi_1, \quad G_1(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma > \xi_1. \quad (4)$$

Из условия (4) следует, что на каждом из листов фазовой поверхности  $P_j$  система (1) имеет по одному положению равновесия  $O_j$  с координатами  $(\xi_j, \eta_j)$ , где  $\eta_j = F_j(\xi_j)$ .

Будем считать далее, что существует значение  $\sigma_0$  такое, что  $\sigma_0 > \delta$ ,

$$F'_1(\sigma_0) = 0, \quad F'_1(\sigma) > 0 \text{ при } -\delta \leq \sigma < \sigma_0 \text{ и } F'_1(\sigma) < 0 \text{ при } \sigma > \sigma_0. \quad (5)$$

Таким образом, мы исследуем случай, когда функция  $F_1(\sigma)$  сначала возрастает, а потом убывает.

Решением системы (1) с начальными данными  $t = \tau_0, (\sigma_0, u_0) \in P_1$  является решение системы (2) с этими же начальными данными. Траектория этого решения при  $t > \tau_0$  либо стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к положению равновесия  $O_1$  системы (2), либо достигает в конечный момент времени множества  $\Gamma_1 \setminus O_1$ , либо при некотором  $t = \tau_1 > \tau_0$  выходит на луч  $L_1$  в точке  $(\sigma_1, u_1)$ . В последнем случае решение (1) продолжается при  $t > \tau_1$  на лист  $P_2$  и является решением системы (3) с начальными данными  $(\tau_1, \sigma_1, u_1)$ . Аналогично определяется решение системы (1) с начальными данными  $t = \tau_0, (\sigma_0, u_0) \in P_2$ .

Доопределим константой все решения системы (1), достигающие края многообразия при конечном значении  $t$ , то есть будем считать, что решения (1) с начальными данными  $t = \tau_0, (\sigma_0, u_0) \in P$ , достигающие края  $\Gamma$  многообразия  $P$  при некотором конечном  $t = \tilde{\tau} \geq \tau_0$  в точке  $(\tilde{\sigma}, \tilde{u}) \in (\Gamma_1 \setminus L_1) \cup (\Gamma_2 \setminus L_2)$ , продолжают вправо на бесконечный промежуток времени:  $\sigma(t) \equiv \tilde{\sigma}, u(t) \equiv \tilde{u}$  для всех  $t \in [\tilde{\tau}, +\infty)$ . Множество таких точек  $(\tilde{\sigma}, \tilde{u})$ , объединённое с множеством  $O_1 \cup O_2$ , обозначим через  $\Gamma^+$ .

Таким образом, все решения системы (1) определены при сколь угодно больших  $t$ .

Множество  $\Gamma^+$  называется глобально притягивающим множеством для системы (1), если для любого решения системы (1)  $\sigma = \sigma(t), u = u(t)$  с начальными данными  $t = \tau_0, (\sigma_0, u_0) \in P$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho((\sigma(t), u(t)), \Gamma^+) = 0,$$

где  $\rho((\sigma(t), u(t)), \Gamma^+)$  – расстояние от точки  $(\sigma(t), u(t))$  до множества  $\Gamma^+$ .

Будем говорить, что система (1) является глобально устойчивой, если множество  $\Gamma^+$  является глобально притягивающим множеством.

Далее приведём некоторые условия глобальной устойчивости системы (1) и условия существования в системе предельных циклов в зависимости от поведения функций  $F(\sigma)$  и  $G(\sigma)$ .

### 3. Условия глобальной устойчивости системы

Введём обозначение  $S = 2 \int_{-\delta}^{\delta} G_1(s) ds$ .

**Теорема 1** При сделанных выше предположениях (4), (5), если выполнены следующие условия:

$$F_1(\sigma) \geq F_1(\sigma_0) - \frac{1}{2}(F_1(\xi_1) + F_1(\delta)) \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \quad (6)$$

$$S \leq (F_1(\xi_1) + F_1(\delta)) \cdot \min \left( F_1(\xi_1) + F_1(\delta), 2 \sqrt{2 \int_{\delta}^{\sigma_0} G_1(s) ds} \right), \quad (7)$$

то система (1) глобально устойчива.

### Доказательство теоремы 1.

Построим на фазовой поверхности семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, которые траектории системы (1) пересекают "снаружи внутрь". Существование такого семейства контуров означает, что каждая

точка фазового пространства по траекториям системы при  $t \rightarrow +\infty$  достигает края многообразия  $\Gamma^+$ , то есть система (1) глобально устойчива.

Обозначим

$$\frac{1}{2}(F_1(\xi_1) + F_1(\delta)) = \Delta$$

$$\text{и } F_1(\sigma_0) - \Delta = \tilde{u}.$$

Рассмотрим на множестве  $\Omega_{10} = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \xi_1 \leq \sigma \leq \sigma_0\}$  линии уровня функции

$$V_1(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - F_1(\sigma))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(s)ds.$$

Производная функции  $V_1$  в силу системы (1)

$$\dot{V}_1(\sigma, u) = -F'_1(\sigma)(u - F_1(\sigma))^2$$

меньше либо равна 0 на  $\Omega_{10}$ .

Определим  $u_{10}$  так, чтобы линия уровня функции  $V_1$ , проходящая через точку  $A_0(\delta, u_{10})$ , пересекала луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \sigma_0\}$  в точке  $B_0(\sigma_0, F_1(\sigma_0))$  (рис. 2). Значение  $u_{10}$  найдём из условия  $V_1(\delta, u_{10}) = V_1(\sigma_0, F_1(\sigma_0))$ .

Рассмотрим два случая:

I. Точка  $A(\delta, u_1)$  лежит на луче  $L_2$  между точками  $(\delta, F_1(\delta))$  и  $(\delta, u_{10})$ .

II. Точка  $A_1(\delta, v_1)$  лежит на луче  $L_2$  выше точки  $A_0(\delta, u_{10})$ .

В первом случае рассмотрим на множестве  $\Omega_1 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \sigma \geq \xi_1\}$  линии уровня функции  $V_1$ , производная которой меньше либо равна 0 на  $\Omega_1$ .

Линия уровня функции  $V_1$ , проходящая через точку  $A(\delta, u_1)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \xi_1, u \leq \eta_1\}$  в некоторой точке  $B(\xi_1, u_2)$ .

Далее на множестве  $\Omega_2 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : -\delta \leq \sigma \leq \xi_1\}$  рассмотрим линии уровня функции

$$V_2(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - F_1(\xi_1))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(s)ds,$$

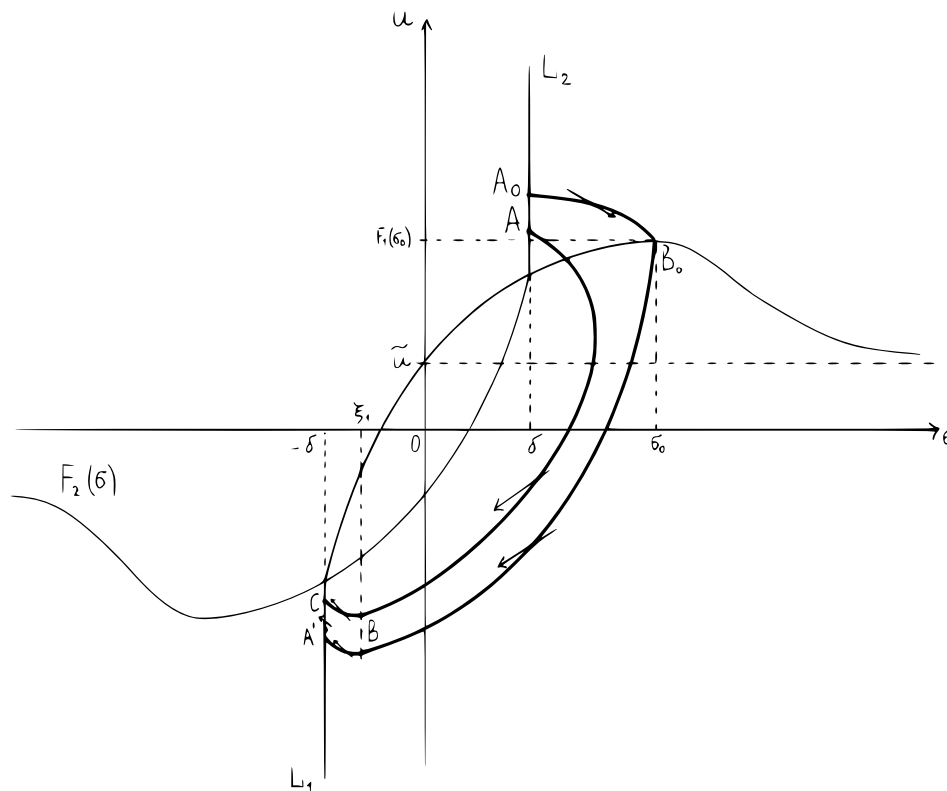


Рис. 2

производная которой в силу системы (1) меньше либо равна 0 на  $\Omega_2$ .

Линия уровня функции  $V_2$ , проходящая через точку  $B(\xi_1, u_2)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = -\delta\}$  в некоторой точке  $C(-\delta, u_3)$ .

Покажем, что  $u_3 \geq -u_1$  для всех  $u_1 \geq F_1(\delta)$ . Для этого рассмотрим функцию

$$R(u_1) = u_1 + u_3 = u_1 + F_1(\xi_1) - \sqrt{(u_1 - F_1(\delta))^2 + S}.$$

Нетрудно показать, что  $R(u_1)$  возрастает и  $R(F_1(\delta)) \geq 0$  при выполнении условия (7). Следовательно,  $u_3 \geq -u_1$  для всех  $u_1 \geq F_1(\delta)$ , то есть точка  $C(-\delta, u_3)$  лежит выше точки  $A'(-\delta, -u_1)$  (рис. 2).

Кривые  $ABC$  и  $A'B'C'$ , а также отрезки  $AC'$ ,  $A'C$  образуют замкнутый контур, который траектории системы (1) пересекают "снаружи внутрь".

Во втором случае рассмотрим на множестве  $\Omega_3 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \delta \leq \sigma \leq \sigma_0\}$  линии уровня функции  $V_1$ , производная которой в силу системы (1) меньше либо равна 0 на  $\Omega_3$ .

Линия уровня функции  $V_1$ , проходящая через точку  $A_1(\delta, v_1)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \sigma_0\}$  в некоторой точке  $B_1(\sigma_0, v_2)$  (рис. 3).

Далее на множестве  $\Omega_4 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \sigma \geq \sigma_0\}$  рассмотрим линии уровня функции

$$V_3(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - \tilde{u})^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(s) ds,$$

производная которой в силу системы (1) неположительна на  $\Omega_4$  в силу неравенства (6).

Линия уровня функции  $V_3$ , проходящая через точку  $B_1(\sigma_0, v_2)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \sigma_0\}$  в некоторой точке  $C_1(\sigma_0, v_3)$ .

Далее рассмотрим на множестве  $\Omega_5 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \xi_1 \leq \sigma \leq \sigma_0\}$  снова линии уровня функции  $V_1$ , производная которой в силу системы (1) меньше либо равна 0 на  $\Omega_5$  (рис. 3).

Линия уровня функции  $V_1$ , проходящая через точку  $C_1(\sigma_0, v_3)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \xi_1, u \leq \eta_1\}$  в некоторой точке  $D_1(\xi_1, v_4)$ .

Построим на множестве  $\Omega_2$  линии уровня функции  $V_2$ , производная которой в силу системы (1) меньше либо равна 0 на  $\Omega_2$ .

Линия уровня функции  $V_2$ , проходящая через точку  $D_1(\xi_1, v_4)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = -\delta\}$  в некоторой точке  $E_1(-\delta, v_5)$ .

Нетрудно показать, что неравенство  $v_5 + v_1 \geq 0$  выполнено для всех  $v_1 > u_{10}$ , если

$$S \leq 2(F_1(\xi_1) + F_1(\delta)) \left( v_1 - F_1(\delta) - \sqrt{(v_1 - F_1(\delta))^2 - 2 \int_{\delta}^{\sigma_0} G_1(s) ds} \right). \quad (8)$$

Достаточно легко показать, что функция

$$Q(v_1) = v_1 - F_1(\delta) - \sqrt{(v_1 - F_1(\delta))^2 - 2 \int_{\delta}^{\sigma_0} G_1(s) ds}$$

убывает с ростом  $v_1$ , то есть  $Q(v_1) \leq Q(u_{10})$  при  $v_1 > u_{10}$ . И неравенство (8) верно, если выполнено условие (7).

Значит, точка  $E_1(-\delta, v_5)$  лежит на луче  $L_1$  выше точки  $A'_1(-\delta, -v_1)$ .



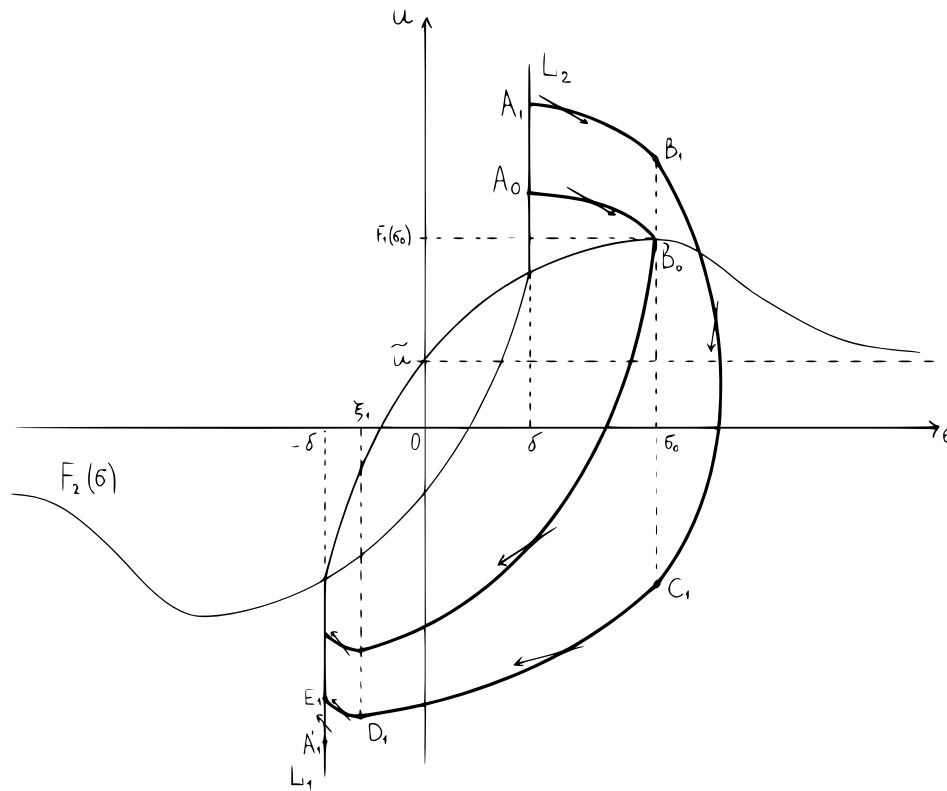


Рис. 3

Кривые  $A_1B_1C_1D_1E_1$  и  $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$ , а также отрезки  $A_1E'_1$ ,  $A'_1E_1$  образуют замкнутый контур, который траектории системы (1) пересекают "снаружи внутрь" (рис. 3).

Теорема доказана.

Таким образом, если величина  $S$  достаточно мала и функция  $F_1(\sigma)$  убывает при  $\sigma > \sigma_0$ , оставаясь больше величины  $\tilde{u} = F_1(\sigma_0) - \frac{1}{2}(F_1(\xi_1) + F_1(\delta))$ , то система глобально устойчива.

Теперь рассмотрим случай, когда функция  $F_1(\sigma)$  убывает до достаточно малых значений. Покажем, что при достаточно большой величине  $S$  в системе (1) существует по крайней мере два предельных цикла.

#### 4. Условия существования в системе двух предельных циклов

**Теорема 2** При сделанных выше предположениях (4), (5), если выполнены следующие условия:

$$F_1(\xi_1) < 0, \quad (9)$$

$$S \geq 4F_1(\delta) \left( \sqrt{2 \int_{\xi_1}^{\delta} G_1(s) ds} - F_1(\delta) \right), \quad (10)$$

верно неравенство

$$F_1(\delta) > -F_1(\xi_1) + \sqrt{2 \int_{\xi_1}^{\sigma_0} G_1(s) ds} - \sqrt{2 \int_{\delta}^{\sigma_0} G_1(s) ds} \quad (11)$$

и существует значение  $\sigma^* > \sigma_0$  такое, что

$$F_1(\sigma^*) < -F(\sigma_0), \quad (12)$$

то в системе (1) существует по крайней мере два предельных цикла.

## Доказательство теоремы 2.

Для доказательства теоремы построим на многообразии  $P$  три вложенных друг в друга замкнутых контура: внутренний и внешний контур, который траектории системы (1) пересекают «изнутри наружу» и средний контур, который траектории пересекают «снаружи внутрь». Существование таких контуров доказывает наличие по крайней мере двух предельных циклов в системе.

Сначала построим внутренний контур, который траектории системы (1) пересекают «изнутри наружу».

Рассмотрим на множестве  $\Omega_1 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \xi_1 \leq \sigma \leq \delta\}$  линии уровня функции

$$V_1(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - F_1(\delta))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(s) ds,$$

Нетрудно показать, что производная функции  $V_1$  в силу системы (1) больше либо равна 0 на  $\Omega_1$ .

Линия уровня функции  $V_1$ , проходящая через точку  $A_1(\delta, F_1(\delta))$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \xi_1, u \leq \eta_1\}$  в некоторой точке  $B_1(\xi_1, u_1)$ . Значение  $u_1$  найдём из условия  $V_1(\delta, F_1(\delta)) = V_1(\xi_1, u_1)$ .

Далее на множестве  $\Omega_2 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : -\delta \leq \sigma \leq \xi_1\}$  рассмотрим линии уровня функции

$$V_2(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u + F_1(\delta))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(s)ds,$$

производная которой в силу системы (1) больше либо равна 0 на  $\Omega_2$ .

Линия уровня функции  $V_2$ , проходящая через точку  $B_1(\xi_1, u_1)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = -\delta\}$  в некоторой точке  $C_1(-\delta, u_2)$ . Такое значение  $u_2$  существует в силу условия (10).

Таким образом, на листе  $P_1$  построена кривая  $A_1B_1C_1$ . Симметричную ей кривую, лежащую на листе  $P_2$ , обозначим через  $A_1^*B_1^*C_1^*$ .

Заметим, что точка  $A_1^*(-\delta, F_1(-\delta))$  лежит на луче  $L_1$  выше точки  $C_1(-\delta, u_2)$ .

Кривые  $A_1B_1C_1$  и  $A_1^*B_1^*C_1^*$ , а также отрезки  $C_1A_1^*$  и  $C_1^*A_1$  составляют замкнутый контур, который траектории системы (1) пересекают "изнутри наружу" (рис. 4).

Далее построим средний контур, который траектории системы (1) пересекают «снаружи внутрь».

Возьмём на луче  $L_2$  точку  $A_2(\delta, v_1)$ , где  $v_1$  определим следующим равенством:

$$v_1 = F_1(\delta) + \sqrt{2 \int_{\delta}^{\sigma_0} G_1(s) ds}.$$

Построим на множестве  $\Omega_3 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \delta \leq \sigma \leq \sigma_0\}$  линии уровня функции

$$V_3(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - F_1(\sigma))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(s)ds.$$

Нетрудно показать, что производная функции  $V_3$  в силу системы (1) неположительна на  $\Omega_3$ .

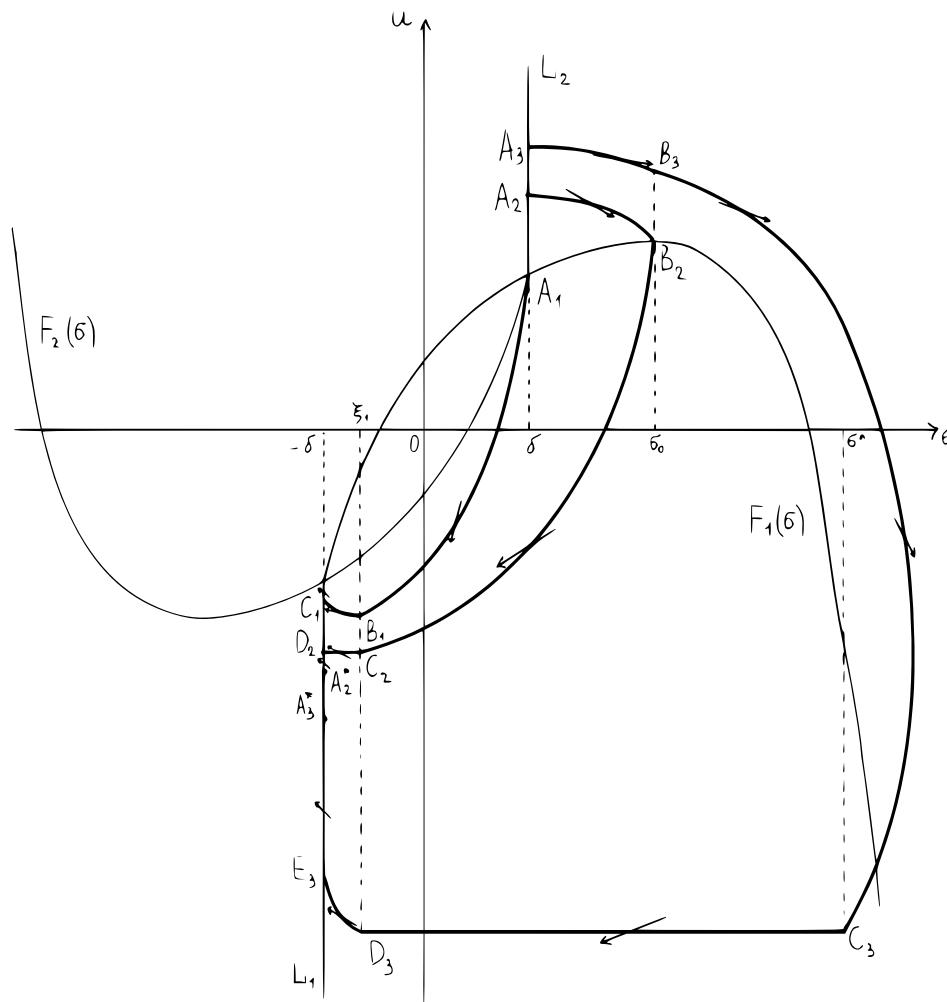


Рис. 4

Линия уровня функции  $V_3$ , проходящая через точку  $A_2(\delta, v_1)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \sigma_0\}$  в точке  $B_2(\sigma_0, F_1(\sigma_0))$ .

Рассмотрим на множестве  $\Omega_4 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \xi_1 \leq \sigma \leq \sigma_0\}$  линии уровня функции  $V_3$ , производная которой меньше либо равна 0 на  $\Omega_4$ .

Линия уровня функции  $V_3$ , проходящая через точку  $B_2(\sigma_0, F_1(\sigma_0))$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \xi_1, u \leq \eta_1\}$  в некоторой точке  $C_2(\xi_1, v_2)$ .

Заметим, что горизонтальный отрезок, соединяющий точки  $C_2(\xi_1, v_2)$  и  $D_2(-\delta, v_2)$ , траектории системы (1) пересекают "снизу вверх".

Нетрудно показать, что точка  $D_2(-\delta, v_2)$  лежит на луче  $\{(\sigma, u) : \sigma = -\delta\}$  выше точки  $A_2^*(-\delta, -v_1)$  и точка  $B_1(\xi_1, u_1)$  лежит на луче  $\{(\sigma, u) : \sigma = \xi_1\}$  выше точки  $C_2(\xi_1, v_2)$  при выполнении условий (9) и (11).

Таким образом, кривая  $A_2B_2C_2D_2$  и симметричная ей кривая  $A_2^*B_2^*C_2^*D_2^*$  вместе с отрезками  $A_2D_2^*$ ,  $A_2^*D_2$  образуют замкнутый контур, который траектории системы (1) пересекают "снаружи внутрь" (рис. 4).

Далее построим внешний контур, который траектории системы (1) пересекают «изнутри наружу».

Возьмём на луче  $L_2$  точку  $A_3(\delta, w_1)$ , где  $w_1$  достаточно велико:

$$w_1 > v_1, w_1 > F_1(\sigma_0) + \sqrt{2 \int_{\delta}^{\sigma^*} G_1(s) ds}.$$

Рассмотрим на множестве  $\Omega_3$  линии уровня функции

$$V_4(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - F_1(\sigma_0))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} G_1(s) ds,$$

производная которой в силу системы (1) неотрицательна на  $\Omega_3$ .

Линия уровня функции  $V_4$ , проходящая через точку  $A_3(\delta, w_1)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \sigma_0\}$  в некоторой точке  $B_3(\sigma_0, w_2)$ . Если  $w_1$  достаточно велико, то такая точка  $w_2$  существует.

Далее на множестве  $\Omega_5 = P_1 \cap \{(\sigma, u) : \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma^*\}$  рассмотрим линии уровня функции  $V_3$ , производная которой в силу системы (1) больше или равна 0 на  $\Omega_5$ .

Линия уровня функции  $V_3$ , проходящая через точку  $B_3(\sigma_0, w_2)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = \sigma^*\}$  в некоторой точке  $C_3(\sigma^*, w_3)$ .

Заметим, что горизонтальный отрезок, соединяющий точки  $C_3(\sigma^*, w_3)$  и  $D_3(\xi_1, w_3)$ , траектории системы (1) пересекают "сверху вниз".

Далее на множестве  $\Omega_2$  рассмотрим линии уровня функции  $V_2$ , производная которой в силу системы (1) больше или равна 0 на  $\Omega_2$ .

Линия уровня функции  $V_2$ , проходящая через точку  $D_3(\xi_1, w_3)$ , пересекает луч  $\{(\sigma, u) : \sigma = -\delta\}$  в некоторой точке  $E_3(-\delta, w_4)$ . Нетрудно показать, что  $w_4 < -w_1$  при достаточно большом  $w_1$ . Для доказательства

последнего неравенства достаточно рассмотреть функцию

$$U(w_1) = w_1 + w_4 = w_1 - F_1(\delta) - \sqrt{\left(F_1(\sigma^*) + F_1(\delta) - \sqrt{(w_1 - F_1(\sigma_0))^2 - 2 \int_{\delta}^{\sigma^*} G_1(s) ds}\right)^2 + 2 \int_{-\delta}^{\xi_1} G_1(s) ds},$$

которая стремится при  $w_1 \rightarrow +\infty$  к  $F_1(\sigma^*) + F_1(\sigma_0) < 0$  в силу неравенства (12). Следовательно, при достаточно большом  $w_1$  точка  $A_3^*(-\delta, -w_1)$  лежит на луче  $\{(\sigma, u) : \sigma = -\delta\}$  выше точки  $E_3(-\delta, w_4)$ .

Таким образом, построенная на листе  $P_1$  кривая  $A_3B_3C_3D_3E_3$  вместе с симметричной ей кривой, лежащей на листе  $P_2$ , и отрезками  $A_3^*E_3$  и  $A_3E_3^*$  образуют искомый замкнутый контур, который траектории системы (1) пересекают "изнутри наружу".

Теорема доказана.

**Замечание.** Условие (9) в теореме 2 можно заменить на условие

$$F_1(\delta) > F_1(\xi_1) + \sqrt{2 \int_{\xi_1}^{\delta} G_1(s) ds} - \sqrt{2 \int_{\xi_1}^{\sigma_0} G_1(s) ds},$$

при этом доказательство теоремы существенно не изменится.

### Литература

1. Андронов А. А., Баутин Н. Н. Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования. *Доклады АН СССР*. 1945. Т. 46. № 7. С. 304-306.
2. Фельдбаум А. А. Простейшие релейные системы автоматического регулирования. *Автоматика и телемеханика*. 1949. № 10. С. 249-260.
3. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. *Доклады АН СССР*. 1963. Т. 149. № 2. С. 288-291.

4. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия* М., Наука, 1978. 400 с.
5. *Методы исследования нелинейных систем автоматического управления.* Под редакцией Нелепина Р. А. М., Наука, 1975. 447 с.
6. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* М.: Наука, 1983. 271 с.
7. Леонов Г. А., Смирнова В.Б. *Математические проблемы теории фазовой синхронизации.* М., Наука. 2000. 400 с.
8. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. *Отыскание периодических решений в нелинейных динамических системах.* СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета. 2002. 86 с.
9. Шумафов М.М. Устойчивость систем дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями. *Вестник Адыгейского гос. университета.* Сер. 4. №3 (106). 2012. С.1-12.
10. Леонов Г.А., Шумафов М.М., Тешев В.А. *Устойчивость систем с гистерезисом.* Майкоп. Издательство Адыгейского государственного университета. 2012. 178 с.
11. Leonov G. A., Shumafov M. M. *Stabilization of linear system.* Cambridge Scientific Publishers, 2012, 430 p.
12. Звягинцева Т.Е, Плисс В.А. Условия глобальной устойчивости одной системы с гистерезисной нелинейностью. *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.* 2017. Том 4 (62). Выпуск 2. С. 227-235.
13. Звягинцева Т.Е. Условия наличия предельного цикла в одной системе с гистерезисом. *Дифференциальные уравнения и процессы управления. Эл. журнал.* 2017. № 1. С.78-92.
14. Звягинцева Т.Е, Плисс В.А. Условия существования двух предельных циклов в системе с гистерезисной нелинейностью. *Вестник С.-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия.* 2018. Том 5 (63). Выпуск 3. С. 402-410.

## **On global stability and conditions for the existence of limit cycles in one system with hysteresis.**

E.V. Vasil'eva, T.E. Zviagintceva, N.R. Rogatykh

St. Petersburg State University

e.v.vasilieva@spbu.ru, t.zvyagintceva@spbu.ru, rogatyh.nady123@gmail.com.

**Abstract.** In this paper, a two-dimensional automatic control system containing a single nonlinear hysteresis element of the general form is considered. With certain assumptions about the right sides of the system which have not been researched previously the conditions of global stability and the existence of at least two limit cycles are derived. The system is considered on the phase space which is a manifold with a boundary. To prove the results, methods of the qualitative theory of differential equations, and in particular, the method of Lyapunov functions are used. The level curves of Lyapunov functions are composed from pieces of level curves of various functions that lie on different sheets of the manifold. It is shown that the system is globally stable if the hysteresis loop area is small enough. It is also demonstrated that for sufficiently large hysteresis loop area limit cycles may appear.

**Keywords:** hysteresis, phase space, global stability, limit cycle, Lyapunov second method.