

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

N. 4, 2025

Электронный журнал,

рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Моделирование динамических систем

## Применение кубических сплайнов Эрмита для анализа и оптимизации систем управления спектральным методом

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет)

e-mail: rkoffice@mail.ru

**Аннотация.** В работе получены алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования относительно финитной базисной системы, которая порождается с помощью масштабирования и сдвига кубического сплайна Эрмита. Апробация проведена на задаче нахождения оптимального управления линейной детерминированной системой второго порядка с геометрическими ограничениями на управление и фазовые координаты.

**Ключевые слова:** финитная базисная система, кубический сплайн Эрмита, оптимальное управление, спектральная форма математического описания, спектральный метод.

### 1 Введение

Спектральная форма математического описания и спектральный метод применяются в различных задачах теории автоматического управления для

систем как с сосредоточенными, так и распределенными параметрами при детерминированных и случайных воздействиях: в задачах анализа, синтеза, идентификации и оценивания [1–12]. Истоки спектрального метода для расчета линейных нестационарных систем автоматического управления лежат в представлении сигналов и их временных характеристик в виде ортогональных рядов по выбранной базисной системе функций. Коэффициенты этих рядов, отделенные от самих рядов, рассматриваются как характеристики сигналов и систем управления [13, 14]. Отличительной особенностью спектральной формы математического описания и спектрального метода является то, что все операции при решении задач производятся не с ортогональным рядом, а с упорядоченным набором коэффициентов при базисных функциях, который в общем случае представляется в виде бесконечной матрицы-столбца и называется спектральной характеристикой. Спектральная форма математического описания и спектральный метод продолжают развиваться, они успешно используются в задачах представления случайных величин и случайных процессов [15–17].

Для линейных преобразований спектральных характеристик функций (сигналов) используются спектральные характеристики линейных операторов, которые представляются бесконечными матрицами. В первую очередь применяются операторы умножения, дифференцирования и интегрирования. Они соответствуют элементарным звеньям линейных систем: усилительно-му, дифференцирующему и интегрирующему. Для эффективного применения спектральной формы математического описания разработаны пакеты прикладных программ в виде расширений систем компьютерной математики (в основном для Mathcad и Matlab), а также в виде отдельных приложений, в частности Spectrum, для аналитического и численного расчета спектральных характеристик [18, 19]. При приближенном решении задач теории автоматического управления спектральным методом все спектральные характеристики «усекаются», т.е. осуществляется переход от ортогональных рядов к частичным суммам, либо изначально используются базисные системы с конечным числом функций, что определяет методическую погрешность расчетов. Численный расчет спектральных характеристик функций и линейных операторов вносит дополнительную погрешность, поэтому аналитический расчет предпочтительнее. Численный расчет спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования оправдан для некоторых базисных систем, для которых аналитический расчет невозможен, например для базисов, порожденных вейвлетами [18]. Поэтому с момента появления спектрального метода формировалось соответствующее алгоритмическое обеспе-

чение: алгоритмы расчета спектральных характеристик функций и линейных операторов для различных базисных систем [12–14, 18–20].

В этой статье рассматривается финитная базисная система, порожденная кубическим сплайном Эрмита. Для нее сформированы алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования. Их апробация проведена на задаче нахождения оптимального управления линейной детерминированной системой второго порядка с геометрическими ограничениями на управление и фазовые координаты. Отметим, что перенос ограничений на значения функций в спектральную область рассматривался в работе [2] для блочно-импульсных функций и кусочно-линейных функций (сплайнов Шёнберга первой степени). Более полно эта задача изучалась в работах [21, 22], в них рассматривались следующие базисные системы: полиномы Лежандра, тригонометрические функции, функции Уолша и Хаара. Особое внимание уделялось финитным базисным системам, которые были определены на основе сплайнов Шёнберга и Леонтьева первой и второй степеней, а также локальных полиномиальных сплайнов и произвольных финитных функций.

## 2 Базисная система на основе кубического сплайна Эрмита

Рассмотрим биортонормированную систему функций  $\{q^p(i, t), q^b(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , определенных на отрезке  $T = [0, T]$  со значениями в  $\mathbb{R}$ :

$$(q^p(i, t), q^b(j, t))_{L_2(T)} = \int_T q^p(i, t) q^b(j, t) dt = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, L - 1,$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Такие биортонормированные системы могут применяться для приближенного представления функций, а именно

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^{L-1} X_i q^b(i, t), \quad (1)$$

где

$$X_i = (q^p(i, t), x(t))_{L_2(T)} = \int_T q^p(i, t) x(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, L - 1.$$

Систему функций  $\{q^p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  будем называть базисной системой разложения, а систему функций  $\{q^b(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — базисной системой восстановления.

Наибольший интерес в практических задачах представляют системы функций, которые формируются с помощью масштабирования и сдвига некоторой порождающей функции, как правило, финитной. Этот подход объединяет проекционно-сеточный и спектральный методы [8].

Оценки точности такого приближенного представления функции  $x(t)$  линейной комбинацией базисных функций в норме  $L_2(\mathbb{T})$  дает теорема Стренга – Фикса при выполнении определенных условий. В частности, таким условиям удовлетворяет кубический сплайн Эрмита [23–25]:

$$H_3^*(t) = \begin{cases} 1 - 3t^2 - 2t^3, & t \in [-1, 0), \\ 1 - 3t^2 + 2t^3, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Кубический сплайн  $H_3^*(t)$  порождает финитную базисную систему на отрезке  $\mathbb{T} = [0, T]$  с помощью масштабирования и сдвига согласно правилу

$$H_3(i, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} H_3^*\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad h = \frac{T}{L-1}, \quad t \in \mathbb{T}, \quad i = 0, 1, \dots, L-1.$$

Систему функций  $\{H_3(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  можно применять как в качестве базисной системы разложения, так и в качестве базисной системы восстановления. Если обозначить через  $\Lambda^P = (\Lambda_{ij}^P)$  и  $\Lambda^B = (\Lambda_{ij}^B)$  соответствующие матрицы Грама для базисных систем разложения и восстановления:

$$\Lambda_{ij}^P = (q^P(i, t), q^P(j, t))_{L_2(\mathbb{T})}, \quad \Lambda_{ij}^B = (q^B(i, t), q^B(j, t))_{L_2(\mathbb{T})}, \\ i, j = 0, 1, \dots, L-1,$$

то  $\Lambda^P = (\Lambda^B)^{-1}$ , причем функции  $\{q^P(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  и  $\{q^B(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  связаны формулами

$$q^B(i, t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Lambda_{ij}^B q^P(j, t), \quad q^P(i, t) = \sum_{j=0}^{L-1} \Lambda_{ij}^P q^B(j, t), \quad i = 0, 1, \dots, L-1. \quad (2)$$

Таким образом, по заданной базисной системе разложения можно построить двойственный базис – базисную систему восстановления, а для заданной базисной системы восстановления двойственным базисом является базисная система разложения.

Ортонормированные базисные системы  $\{q(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  можно рассматривать как частный случай биортонормированных базисных систем, если  $q(i, t) =$

$= q^p(i, t) = q^b(i, t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ . Для них  $\Lambda^p = \Lambda^b = E$ , где  $E$  — единичная матрица порядка  $L$ .

Упорядоченный набор  $X$  коэффициентов разложения  $X_i$  функции  $x(t)$  по базисной системе представляется в виде  $L$ -мерного вектора и называется спектральной характеристикой функции  $x(t)$ . Связь функций и их спектральных характеристик будем указывать следующим образом:  $\mathbb{S}[x(t)] = X$  и  $x(t) \approx \mathbb{S}^{-1}[X]$  (в частном случае  $x(t) = \mathbb{S}^{-1}[X]$ ), где  $\mathbb{S}$  означает спектральное преобразование, а  $\mathbb{S}^{-1}$  — обратное спектральное преобразование, т.е. представление функции в виде линейной комбинации (1).

Система функций  $\{H_3(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , если ее использовать как базисную систему восстановления, удовлетворяет еще одному свойству [22], а именно

$$\max_{t \in \mathbb{T}} \left| \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i q^b(i, t) \right| = v = \text{const}, \quad \alpha_i \in \{0, \pm C\}, \quad \sum_{i=0}^{L-1} |\alpha_i| \neq 0. \quad (3)$$

При выполнении этого свойства множество спектральных характеристик функций  $\{x(t) : |x(t)| \leq v\}$  представляет собой  $L$ -мерный куб:

$$\mathbb{X}_L = \{X : \|X\|_{\square} \leq C\}, \quad C = v\sqrt{h}, \quad (4)$$

где  $\|X\|_{\square} = \max\{|X_0|, |X_1|, \dots, |X_{L-1}|\}$  — кубическая норма вектора в  $\mathbb{R}^L$ . Это свойство можно использовать при решении задач оптимизации динамических систем с геометрическими ограничениями на управление и фазовые координаты [22].

### 3 Спектральные характеристики операторов дифференцирования и интегрирования

Спектральные характеристики линейных операторов занимают ключевое место в спектральной форме математического описания. Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор, определенный на пространстве  $L_2(\mathbb{T})$  или на некотором подпространстве, а  $\{q^p(i, t), q^b(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — биортонормированная система функций. Матрица  $A = (A_{ij})$ , элементы которой определяются формулой

$$A_{ij} = (q^p(i, t), \mathcal{A}q^b(j, t))_{L_2(\mathbb{T})}, \quad i, j = 0, 1, \dots, L - 1,$$

называется спектральной характеристикой линейного оператора  $\mathcal{A}$ , т.е. каждый столбец матрицы  $A$  — это спектральная характеристика образа соответствующей функции базисной системы восстановления при применении оператора  $\mathcal{A}$ . Такие матрицы позволяют получить разложение функции  $\mathcal{A}x(t)$

в том же базисе, что и разложение самой функции  $x(t)$ . Наибольший интерес представляют операторы дифференцирования и интегрирования, их спектральные характеристики — двумерные нестационарные передаточные функции дифференцирующего и интегрирующего звеньев [8, 13, 14, 26]. С их помощью наряду со спектральными характеристиками операторов умножения на функции можно находить приближенные решения линейных и некоторых нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. Для других задач могут найти применение спектральные характеристики операторов отражения и сдвига, операторов дифференцирования и интегрирования дробного порядка [8, 13, 14] и др.

В этой статье ограничимся только спектральными характеристиками операторов дифференцирования и интегрирования, которые обозначаются  $\mathcal{P}$  и  $P^{-1}$  соответственно, а их элементы вычисляются по формулам

$$\mathcal{P}_{ij} = \int_{\mathbb{T}} q^p(i, t) \frac{q^b(j, t)}{dt} dt, \quad P_{ij}^{-1} = \int_{\mathbb{T}} q^p(i, t) \int_0^t q^b(j, \tau) d\tau dt. \quad (5)$$

Наряду со спектральной характеристикой  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  определим спектральную характеристику  $A^{bp}$  того же оператора относительно биортонормированной базисной системы  $\{q^b(i, t), q^p(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ :

$$A^{bp} = (A_{ij}^{bp}), \quad A_{ij}^{bp} = (q^b(i, t), \mathcal{A}q^p(j, t))_{L_2(\mathbb{T})}, \quad i, j = 0, 1, \dots, L-1.$$

Кроме того, можно определить спектральные характеристики  $A^p$  и  $A^b$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  относительно базисных систем разложения и восстановления соответственно:

$$\begin{aligned} A^p &= (A_{ij}^p), \quad A_{ij}^p = (q^p(i, t), \mathcal{A}q^p(j, t))_{L_2(\mathbb{T})}, \\ A^b &= (A_{ij}^b), \quad A_{ij}^b = (q^b(i, t), \mathcal{A}q^b(j, t))_{L_2(\mathbb{T})}, \\ &\quad i, j = 0, 1, \dots, L-1. \end{aligned}$$

Отметим свойства этих спектральных характеристик, основанные на соотношениях (2). Некоторые из этих свойств будут использованы при дальнейшем изложении:

$$\begin{aligned} A &= \Lambda^p \cdot A^{bp} \cdot \Lambda^b = \Lambda^p \cdot A^b = A^p \cdot \Lambda^b, \\ A^{bp} &= \Lambda^b \cdot A \cdot \Lambda^p = \Lambda^b \cdot A^p = A^b \cdot \Lambda^p. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее будем полагать, что система функций  $\{H_3(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  — это базисная система восстановления  $\{q^b(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , и найдем для нее матрицу Грама  $\Lambda^b$ .

Для нахождения спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования будем использовать базисную систему восстановления.

Заметим, что носители функций  $\{H_3(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$ , номера которых отличаются более чем на единицу, не пересекаются (если формулировать более строго, то множество, образованное как пересечение носителей указанных функций, имеет нулевую меру), следовательно, матрица  $\Lambda^B$  является трехдиагональной. Для вычисления элементов ее главной диагонали необходимы следующие интегралы:

$$\int_{-1}^1 (H_3^*(t))^2 dt = \frac{26}{35}, \quad \int_{-1}^0 (H_3^*(t))^2 dt = \int_0^1 (H_3^*(t))^2 dt = \frac{13}{35},$$

а для элементов наддиагонали и поддиагонали — интегралы

$$\int_0^1 H_3^*(t) H_3^*(t-1) dt = \int_{-1}^0 H_3^*(t+1) H_3^*(t) dt = \frac{9}{70},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \Lambda_{00}^B &= \Lambda_{L-1,L-1}^B = \frac{13}{35}; & \Lambda_{11}^B = \dots = \Lambda_{L-2,L-2}^B &= \frac{26}{35} \quad (L > 2); \\ \Lambda_{01}^B &= \dots = \Lambda_{L-2,L-1}^B = \frac{9}{70}, & \Lambda_{10}^B = \dots = \Lambda_{L-1,L-2}^B &= \frac{9}{70}; \\ \Lambda_{i-k,i}^B &= \Lambda_{i,i-k}^B = 0, & i &= 2, 3, \dots, L-1, \quad k = 2, 3, \dots, i \quad (L > 2), \end{aligned}$$

и

$$\Lambda^B = \begin{pmatrix} \frac{13}{35} & \frac{9}{70} & & & & & & \\ & \frac{9}{70} & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} & & & & \\ & & 0 & \frac{9}{70} & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} & & \\ & & & 0 & 0 & \frac{9}{70} & & \\ & & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \frac{9}{70} & 0 \\ & & & & & & & 0 & \frac{26}{35} \\ & & & & & & & & \frac{9}{70} \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (L = 2),$$

$$\Lambda^B = \begin{pmatrix} \frac{13}{35} & \frac{9}{70} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{9}{70} & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{9}{70} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{9}{70} & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{35} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления элементов спектральной характеристики оператора дифференцирования запишем производную функции  $H_3^*(t)$ :

$$H_3^{*\prime}(t) = \begin{cases} -6t - 6t^2, & t \in [-1, 0), \\ -6t + 6t^2, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin (-1, 1), \end{cases}$$

и соотношения, необходимые для расчета спектральной характеристики оператора дифференцирования (здесь и далее интегрирование по отрезку  $[0, 1]$  используется для учета функции финитной базисной системы с номером  $i = 0$ , по отрезку  $[-1, 1]$  — с номерами  $i = 1, 2, \dots, L - 2$  и по отрезку  $[-1, 0]$  — с номером  $i = L - 1$ ), а именно

— для элементов главной диагонали:

$$\int_{-1}^1 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t) dt = 0, \quad \int_0^1 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t) dt = - \int_{-1}^0 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t) dt = -\frac{1}{2};$$

— для элементов наддиагонали и поддиагонали:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t-1) dt &= \int_0^1 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t-1) dt = \frac{1}{2}, \\ \int_{-1}^1 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t+1) dt &= \int_{-1}^0 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t+1) dt = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

— для остальных элементов ( $k > 1$ ):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t-k) dt &= \int_0^1 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t-k) dt = 0, \\ \int_{-1}^1 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t+k) dt &= \int_{-1}^0 H_3^*(t) H_3^{*\prime}(t+k) dt = 0, \end{aligned}$$

поскольку функции  $H_3^*(t)$  и  $H_3^{*\prime}(t \pm k)$  имеют непересекающиеся носители.

Так так

$$H'_3(i, t) = \frac{1}{h\sqrt{h}} H_3^{*\prime}\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad i = 0, 1, \dots, L - 1,$$

получаем  $\mathcal{P}_{ij}^B = (1/h)c_{ij}$ , где

$$c_{00} = -\frac{1}{2}, \quad c_{L-1,L-1} = \frac{1}{2}; \quad c_{11} = \dots = c_{L-2,L-2} = 0 \quad (L > 2);$$

$$c_{01} = \dots = c_{L-2,L-1} = \frac{1}{2}, \quad c_{10} = \dots = c_{L-1,L-2} = -\frac{1}{2};$$

$$c_{i-k,i} = c_{i,i-k} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, L - 1, \quad k = 2, 3, \dots, i \quad (L > 2),$$

следовательно,

$$\mathcal{P}^B = \frac{1}{h} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (L = 2),$$

$$\mathcal{P}^B = \frac{1}{h} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Вместе со спектральной характеристикой  $\mathcal{P}$  оператора дифференцирования в спектральной форме математического описания важное значение имеет спектральная характеристика  $P$  оператора дифференцирования с учетом начального значения функции [8, 13, 14]. Она определяется следующим образом:

$$P = \mathcal{P} + q^p(0) \cdot [q^B(0)]^T,$$

где  $q^p(0)$  и  $q^B(0)$  —  $L$ -мерные векторы значений функций базисных систем разложения и восстановления соответственно в точке  $t = 0$ , т.е.  $P$  — квадратная матрица порядка  $L$  с элементами

$$P_{ij} = \int_{\mathbb{T}} q^p(i, t) \frac{q^B(j, t)}{dt} dt + q^p(i, 0)q^B(j, 0) = \mathcal{P}_{ij} + q^p(i, 0)q^B(j, 0),$$

$$i, j = 0, 1, \dots, L - 1.$$

Эту спектральную характеристику, как и  $\mathcal{P}$ , удобно найти относительно базисной системы восстановления.

Все функции финитной базисной системы  $\{H_3(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  принимают нулевое значение при  $t = 0$ , за исключением  $H_3(0, t)$ . Значение последней определяется величиной  $H_3^*(0) = 1$  и нормировочным коэффициентом  $1/\sqrt{h}$ . Таким образом, в матрице  $q^p(0) \cdot [q^B(0)]^T$  первый элемент первой строки равен  $1/h$ , остальные элементы — нулевые, следовательно,

$$P^B = \frac{1}{h} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (L = 2);$$

$$P^B = \frac{1}{h} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти элементы спектральной характеристики оператора интегрирования, запишем две первообразных функции  $H_3^*(t)$ :

$$\int_0^t H_3^*(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{t^4 - 2t^3 + 2t}{2}, & t \in [0, 1), \\ \frac{1}{2}, & t \geq 1; \end{cases}$$

$$\int_{-1}^t H_3^*(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{(1-t)(t+1)^3}{2}, & t \in [-1, 0), \\ \frac{t^4 - 2t^3 + 2t + 1}{2}, & t \in [0, 1), \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$

с учетом того, что верхний предел интегрирования не меньше нижнего предела.

В итоге получим соотношения, необходимые для расчета спектральной характеристики оператора интегрирования, а именно

— для элементов главной диагонали:

$$\int_{-1}^1 H_3^*(t) \int_{-1}^t H_3^*(\tau) d\tau dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 H_3^*(t) \int_0^t H_3^*(\tau) d\tau dt = \int_{-1}^0 H_3^*(t) \int_{-1}^t H_3^*(\tau) d\tau dt = \frac{1}{8};$$

— для элементов наддиагонали и поддиагонали за исключением первого столбца и последней строки:

$$\int_{-1}^1 H_3^*(t) \int_{-1}^{t-1} H_3^*(\tau) d\tau dt = \int_0^1 H_3^*(t) \int_{-1}^{t-1} H_3^*(\tau) d\tau dt = \frac{1}{40},$$

$$\int_{-1}^1 H_3^*(t) \int_{-1}^{t+1} H_3^*(\tau) d\tau dt = 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40};$$

— для остальных элементов за исключением первого столбца и последней строки (здесь и далее  $k > 1$ ):

$$\int_{-1}^1 H_3^*(t) \int_{-1}^{t-k} H_3^*(\tau) d\tau dt = 0, \quad \int_{-1}^1 H_3^*(t) \int_{-1}^{t+k} H_3^*(\tau) d\tau dt = 1;$$

— для оставшихся элементов первого столбца:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 H_3^*(t) \int_0^{t+1} H_3^*(\tau) d\tau dt &= \frac{1}{2} - \frac{1}{40} = \frac{19}{40}, & \int_{-1}^1 H_3^*(t) \int_0^{t+k} H_3^*(\tau) d\tau dt &= \frac{1}{2}, \\ \int_{-1}^0 H_3^*(t) \int_0^{t+1} H_3^*(\tau) d\tau dt &= \frac{1}{4} - \frac{1}{40} = \frac{9}{40}, & \int_{-1}^0 H_3^*(t) \int_0^{t+k} H_3^*(\tau) d\tau dt &= \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

— для оставшихся элементов последней строки:

$$\int_{-1}^0 H_3^*(t) \int_{-1}^{t+k} H_3^*(\tau) d\tau dt = \frac{1}{2}, \quad \int_{-1}^0 H_3^*(t) \int_{-1}^{t+1} H_3^*(\tau) d\tau dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{40} = \frac{19}{40}.$$

Так так

$$\int_0^t H_3(i, \tau) d\tau = \frac{h}{\sqrt{h}} \int_0^t H_3^*\left(\frac{\tau}{h} - i\right) d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, L-1,$$

находим  $P_{ij}^{-1B} = hc_{ij}$ , где

$$c_{00} = c_{L-1, L-1} = \frac{1}{8}; \quad c_{11} = \dots = c_{L-2, L-2} = \frac{1}{2} \quad (L > 2);$$

$$c_{01} = \dots = c_{L-2, L-1} = \frac{1}{40};$$

$$c_{i-k, i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, L-1, \quad k = 2, 3, \dots, i \quad (L > 2);$$

$$c_{10} = c_{L-1, L-2} = \frac{19}{40} \quad (L > 2); \quad c_{21} = \dots = c_{L-2, L-3} = \frac{39}{40} \quad (L > 3);$$

$$c_{i, i-k} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, L-2, \quad k = 1, 2, \dots, i-1 \quad (L > 3);$$

$$c_{20} = \dots = c_{L-2, 0} = \frac{1}{2} \quad (L > 3), \quad c_{L-1, 0} = \frac{9}{40} \quad (L = 2),$$

$$c_{L-1, 0} = \frac{1}{4} \quad (L > 2), \quad c_{L-1, 1} = \dots = c_{L-1, L-3} = \frac{1}{2} \quad (L > 3),$$

т.е.

$$P^{-1B} = h \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{40} \\ \frac{9}{40} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (L = 2),$$

$$P^{-1B} = h \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{19}{40} & \frac{1}{2} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{4} & \frac{19}{40} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (L = 3),$$

$$P^{-1B} = h \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{40} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{19}{40} & \frac{1}{2} & \frac{1}{40} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{39}{40} & \frac{1}{2} & \frac{1}{40} & \ddots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{39}{40} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{40} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \ddots & \frac{39}{40} & \frac{1}{2} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{19}{40} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, сформированы алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования относительно базисной системы восстановления:  $\mathcal{P}^B$ ,  $P^B$  и  $P^{-1B}$ . Используя свойство (6), получаем спектральные характеристики этих же операторов относительно биортонормированной базисной системы:  $\mathcal{P} = \Lambda^p \cdot \mathcal{P}^B$ ,  $P = \Lambda^p \cdot P^B$ ,  $P^{-1} = \Lambda^p \cdot P^{-1B}$ , где матрицу  $\Lambda^p = (\Lambda^B)^{-1}$  можно найти, например, применяя метод прогонки.

#### 4 Пример нахождения оптимального управления линейной детерминированной системой второго порядка

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального управления [26]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t), \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0, \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned} \tag{7}$$

где  $|u(t)| \leq 1$ . Функционал качества (решается задача Майера):

$$I = x_2(2\pi) \rightarrow \min_{x_1(\cdot), x_2(\cdot); u(\cdot): |u(t)| \leq 1}.$$

Требуется найти оптимальное программное управление  $u^*(t)$  и соответствующие ему оптимальные траектории  $x_1^*(t)$  и  $x_2^*(t)$ .

Эту задачу можно решить, применяя принцип максимума:

$$u^*(t) = -\operatorname{sign}(\cos t),$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} \cos t - 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos t - 2 \sin t + 1, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ \cos t - 4 \sin t - 1, & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} -\sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ -\sin t - 2 \cos t, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ -\sin t - 4 \cos t, & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

В работах [21, 22] приведены соотношения для нахождения оптимального управления в спектральной форме математического описания:

$$X_1 = P^{-1} \cdot X_2, \quad X_2 = P^{-1} \cdot (-X_1 + U), \quad (8)$$

$$\hat{I} = [q^B(2\pi)]^T \cdot X_2 \rightarrow \min_{X_1, X_2; U \in \mathbb{U}_L}, \quad (9)$$

где  $X_1 = \mathbb{S}[x_1(t)]$ ,  $X_2 = \mathbb{S}[x_2(t)]$  — спектральные характеристики функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  соответственно,  $U = \mathbb{S}[u(t)]$  — спектральная характеристика управления  $u(t)$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  и  $U$  —  $L$ -мерные векторы;  $P^{-1}$  — спектральная характеристика оператора интегрирования — квадратная матрица порядка  $L$ ;  $q^B(2\pi)$  —  $L$ -мерный вектор значений функций базисной системы восстановления при  $t = 2\pi$ . Таким образом, задача оптимального управления сводится к конечномерной задаче минимизации (8) и (9).

Ограничения  $\mathbb{U}_L$  на спектральную характеристику управления  $U$  при выборе системы функций  $\{H_3(i, t)\}_{i=0}^{L-1}$  в качестве базисной системы восстановления задаются в виде  $\mathbb{U}_L = \{U : \|U\|_\square \leq \sqrt{h} = \sqrt{2\pi/(L-1)}\}$  (см. формулы (3) и (4)). Задачу минимизации (8) и (9) будем решать, как и в [22], методом конфигураций при  $L = 128$ , нулевом начальном приближении и учете ограничения на управление с помощью добавления к целевой функции  $\hat{I}$  штрафного слагаемого с весом  $10^3$ . Для метода конфигураций выбрана минимальная величина шага  $\varepsilon = 10^{-9}$  и стандартные параметры метода [27].

В результате расчетов с использованием программного обеспечения Spectrum [19] за 12 итераций было получено значение функционала качества

управления  $-3.996810$  при точном минимальном значении  $-4$ . Максимум отклонения приближенного решения от точного для функции  $x_1(t)$ :  $0.034375$ , для второй функции  $x_2(t)$ :  $0.037193$ . Полученные данные хорошо согласуются с результатами из [22] по количеству итераций и точности. Графики точного и приближенного решений для оптимального программного управления  $u^*(t)$  и функций  $x_1^*(t)$ ,  $x_2^*(t)$  представлены на рис. 1. Приближенные решения показаны сплошными линиями, а точные обозначены знаком  $\circ$  для управления  $u^*(t)$ , знаками  $\Delta$  и  $\square$  для функций  $x_1^*(t)$  и  $x_2^*(t)$  соответственно.

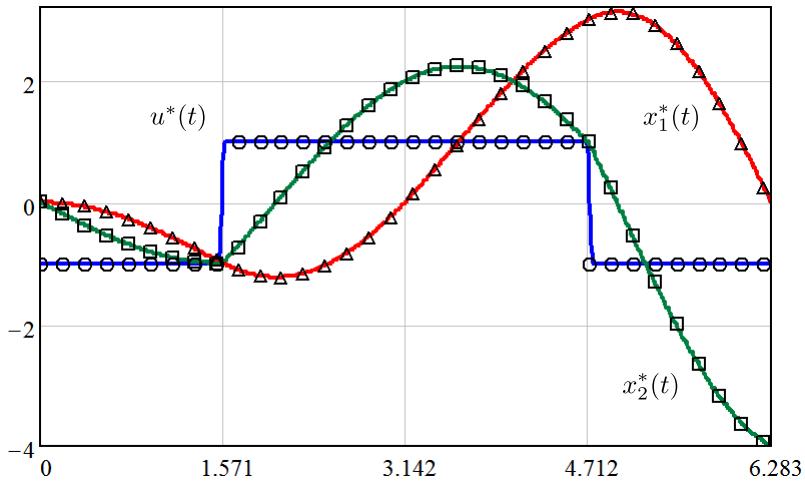


Рис. 1: Графики оптимального управления  $u^*(t)$  и функций  $x_1^*(t)$ ,  $x_2^*(t)$ .

Далее усложним задачу, добавив ограничения на первую фазовую координату:  $|x_1(t)| \leq 2$ , т.е.

$$I = x_2(2\pi) \rightarrow \min_{x_1(\cdot): |x_1(t)| \leq 2; x_2(\cdot); u(\cdot): |u(t)| \leq 1} .$$

Соотношение (9) здесь следует изменить:

$$\hat{I} = [q^B(2\pi)]^T \cdot X_2 \rightarrow \min_{X_1 \in \mathbb{X}_{1L}; X_2; U \in \mathbb{U}_L}, \quad (10)$$

где ограничения  $\mathbb{X}_{1L}$  на спектральную характеристику  $X_1$  задаются в виде  $\mathbb{X}_{1L} = \{X_1: \|X_1\|_\square \leq 2\sqrt{h} = 2\sqrt{2\pi/(L-1)}\}$  (см. формулы (3) и (4)).

Заметим, что решение такой задачи в области времени существенно сложнее, чем при отсутствии фазовых ограничений, однако в спектральной области нужно только дополнительно учесть ограничение с помощью добавления к целевой функции  $\hat{I}$  еще одного штрафного слагаемого, например с тем же весом  $10^3$ . Метод решения задачи минимизации (8) и (10) и его параметры остаются неизменными, в результате за 30 итераций было получено значение функционала качества управления  $-2.964397$ . Графики приближенного решения для оптимального программного управления  $u^*(t)$  и функций  $x_1^*(t)$ ,

$x_2^*(t)$  показаны на рис. 2. Нетрудно видеть, что выполняются заданные ограничения на управление и первую фазовую координату.

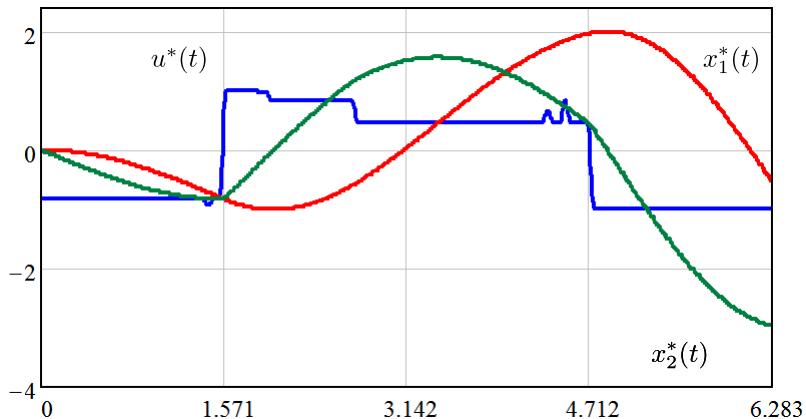


Рис. 2: Графики оптимального управления  $u^*(t)$  и функций  $x_1^*(t)$ ,  $x_2^*(t)$ .

## 5 Заключение

В статье рассмотрена финитная базисная система, порожденная кубическим сплайном Эрмита, в приложении к решению задач теории автоматического управления с применением спектральной формы математического описания. Сформированы алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования. Их апробация проведена на задаче нахождения оптимального управления линейной детерминированной системой второго порядка с геометрическими ограничениями на управление и фазовые координаты.

## Список литературы

- [1] Семенов, В.В., Рыбин, В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. — М.: МАИ, 1984.
- [2] Лапин, С.В., Егупов, Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
- [3] Коваль, В.А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем управления. — Саратов: СГТУ, 1997.

- [4] Пупков, К.А., Егупов, Н.Д., Трофимов, А.И. Статистические методы анализа, синтеза и идентификации нелинейных систем автоматического управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.
- [5] Rybakov, K.A., Sotskova, I.L. Spectral method for analysis of switching diffusions // IEEE Trans. Autom. Control. — 2007. Vol. 52. No. 7. — P. 1320–1325.
- [6] Васильев, В.В., Симак, Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: НАН Украины, 2008.
- [7] Пантелеев, А.В., Рыбаков, К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // Автоматика и телемеханика. — 2011. № 2. — С. 183–194.
- [8] Рыбин, В.В. Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ, 2013.
- [9] Егупов, Н.Д., Колесников, Л.В., Пупков, К.А., Трофимов, А.И. Алгоритмическая теория систем управления, основанная на спектральных методах. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
- [10] Клевцов, Ю.А. Моделирование объектов с распределенными параметрами: Спектральный метод. — Lambert Academic Publ., 2018.
- [11] Пантелеев, А.В., Рыбаков, К.А. Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью // Автоматика и телемеханика. — 2018. № 1. — С. 130–146.
- [12] Рыбин, В.В. Описание и анализ линейных нестационарных непрерывных систем управления в спектральной области в неортогональных базисах. Орторекурсивный подход // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2018. № 4. — С. 18–40.
- [13] Солодовников, В.В., Семенов, В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.
- [14] Солодовников, В.В., Семенов, В.В., Пешель, М., Недо, Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. — М.: Машиностроение, 1979.

- [15] Rybakov, K.A. Using spectral form of mathematical description to represent Itô iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies, vol. 274. Springer, 2022. — P. 331–344.
- [16] Rybakov, K. Spectral representation and simulation of fractional Brownian motion // Computation. — 2025. Vol. 13. No. 1. — Article 19.
- [17] Rybakov, K.A. On approximate representation of fractional Brownian motion // Methodol. Comput. Appl. Probab. — 2025. Vol. 27. No. 4. — Article 88.
- [18] Рыбин, В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах. — М.: Изд-во МАИ, 2003.
- [19] Рыбаков, К.А. Развитие и перспективы программного обеспечения спектрального метода Spectrum // Информационные и телекоммуникационные технологии. — 2019. № 43. — С. 57–63.
- [20] Таблицы и математическое обеспечение спектрального метода теории автоматического управления / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1973.
- [21] Рыбаков, К.А. Построение множества допустимых управлений в спектральной форме математического описания // Вычислительные технологии. — 2015. Т. 20. № 3. — С. 58–74.
- [22] Рыбаков, К.А. Спектральные аналоги множества допустимых управлений для финитных базисных систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2016. № 2. — С. 40–71.
- [23] Марчук, Г.И., Агошков, В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
- [24] Стренг, Г., Фикс, Дж. Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977.
- [25] Завьялов, Ю.С., Квасов, Б.И., Мирошниченко, В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
- [26] Пантелейев, А.В., Бортаковский, А.С. Теория управления в примерах и задачах. — М.: Инфра-М, 2016.
- [27] Пантелейев, А.В., Летова, Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. — СПб.: Лань, 2022.

## **Application of cubic Hermite splines for control systems analysis and optimization by spectral method**

K. A. Rybakov

Moscow Aviation Institute  
(National Research University)

e-mail: rkoffice@mail.ru

**Abstract.** This paper presents algorithms for calculating the spectral characteristics of differentiation and integration operators relative to the finite basis system, which is generated by scaling and shifting the cubic Hermite spline. The validation is conducted on the optimal control problem for a second-order linear deterministic system that has geometric constraints imposed on both the control and phase coordinates.

**Key words:** finite basis system, cubic Hermite spline, optimal control, spectral form of mathematical description, spectral method.