UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Movimiento Browniano

Grupo Estudiantil de Matemática (gem@uni.edu.pe)

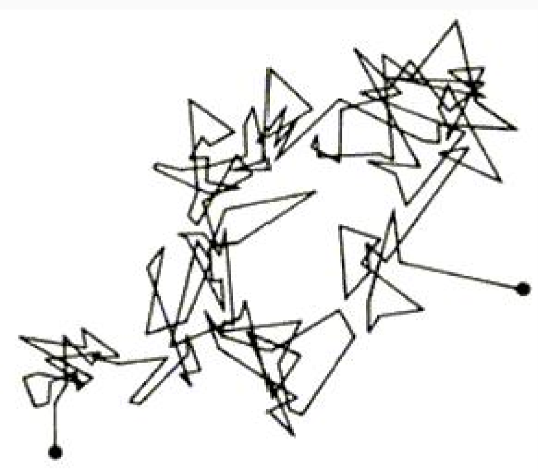
EXPOCIENCIA 2018
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

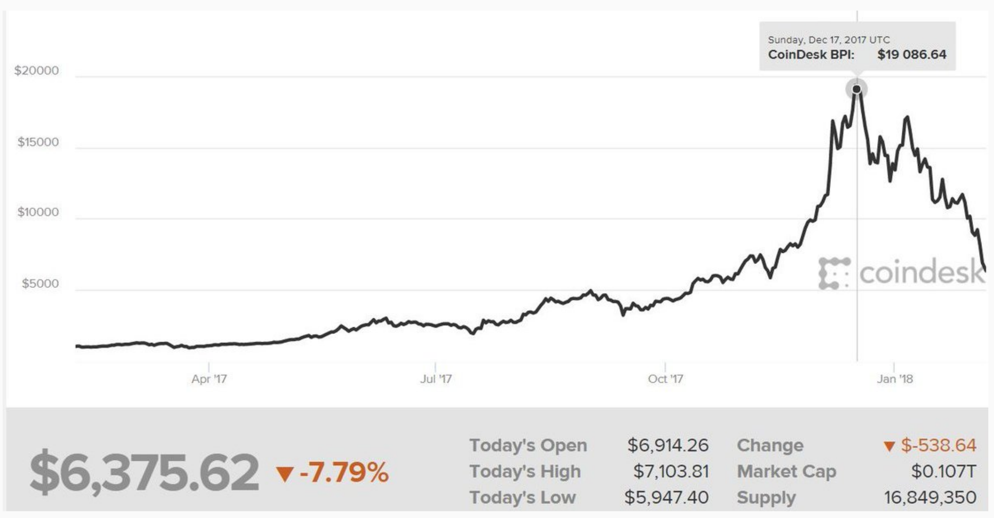
Resumen

El movimiento browniano es un movimiento aleatorio continuo que ha permitido modelar muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza. En la presente vamos a estudiar el movimiento browniano partiendo de un paseo aleatorio y llevándolo al límite en probabilidad para luego aplicarlo en un paper sobre contaminación ambiental.

Introducción

En 1827, el biólogo y botánico escocés Robert Brown vio como una partícula de polen *Clarkia pulchella* se movía sin orden o patrón alguno en el agua, de manera aleatoria. Sin embargo, ese fenómeno recién sería comprendido años después, cuando los científicos Thorvald y Einstein describieron matemáticamente este fenómeno (en 1880 y 1900 respectivamente). Con el paso del tiempo, se obtuvieron más resultados y se hallaron múltiples aplicaciones en diferentes áreas académicas como finanzas, física, biología, etc; modelando diversos fenómenos.





Paseos aleatorios

Imaginemos que tengo un moneda normal y la lanzo muchas veces, si obtengo cara gano un sol, si obtengo sello, pierdo un sol. Así muchas veces, ¿qué se obtiene?

Formulación matemática

La variable aleatoria X_1 va a describir el movimiento hacia algún punto (en $\mathbb{Z}$ sería $+1$ o -1),

$$X_1 : \omega \mapsto +1 \text{ ó } -1$$

describe esto. Los siguientes pasos serán X_2, X_3 y así en adelante. Denotaremos S_n la posición del paseo en el tiempo n, podemos escribir:

$$S_n = x + X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

donde x es el punto de inicio del paseo aleatorio.

Los $\{X_k\}_{k\geq 0}$ son independientes e identicamente distribuidas (i.i.d.) con distribución

$$\mathbb{P}\{X_k = +1\} = \mathbb{P}\{X_k = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Límite de los paseos aleatorios

Ahora nos podemos hacer la siguiente pregunta, ¿qué ocurre si doy más pasos en menos tiempo? Es decir, vamos a estudiar el comportamiento global de la función $\phi : k \mapsto S_k$ que se define en $\mathbb{Z}$. Para $n \in \mathbb{Z}_+$ y para todo real $t \geq 0$ definimos

$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

donde $[x]$ denota la parte entera del número real x.

Proposición: Para toda elección del entero $p \geq 1$ y números reales $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, se obtiene:

$$(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \ldots, S_{t_p}^{(n)}) \xrightarrow{(ley)} (U_1, U_2, \ldots, U_p).$$

Cuando $n \to \infty$, la ley límite es caracterizada como sigue:

- Las v.a.'s U_1, $U_2 - U_1, \ldots, U_p - U_{p-1}$ son independientes;
- para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$, $U_j - U_{j-1}$ es una v.a. con distribución normal de media cero y varianza $t_j - t_{j-1}$.

Definición del movimiento browniano

Llamamos movimiento browniano a la familia $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de v.a.'s con valores en $\mathbb{R}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tales que:

- *Independencia de incrementos* $B(t) - B(s)$, para $t > s$, es independiente del pasado, esto es, de B_u, $0 \leq u \leq s$.
- *(Incrementos normales)* $B(t) - B(s)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t - s$.
- *(Continuidad de caminos)* $B(t)$, $t \geq 0$ son funciones continuas de t.

Contaminación ambiental

El movimiento browniano también ha sido una herramienta útil en algunos trabajos contra la contaminación ambiental. En el artículo *'Texture characterization of atmospheric fine particles by fractional Brownian motion analysis'* investigadores asiáticos utilizan el movimiento browniano para crear una nueva caracterización de las partículas de la capa atmosférica, para así reconocer y estudiar a las partículas más toxicas.

Referencias

- Fima C Klevaner, *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press, 2012.
- Gregory F. Lawler, *Random Walk and the Heat Equation*, American Matehmatical Society, 2010.
- Chin-Hsiang Lou, Che-Yen Wen, Jiun-Jian Liaw, Shih-Hsuan Chiu, Whei-May Grace Lee, *Texture characterization of atmospheric fine particles by fractional Brownian motion analysis*. En *ELSEVIER*. Atmospheric Environment 38:935-940. 2004.

EXPOCIENCIA
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería
http://stem.uni.edu.pe/expociencia