Cap. 2– Cálculo Integral

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

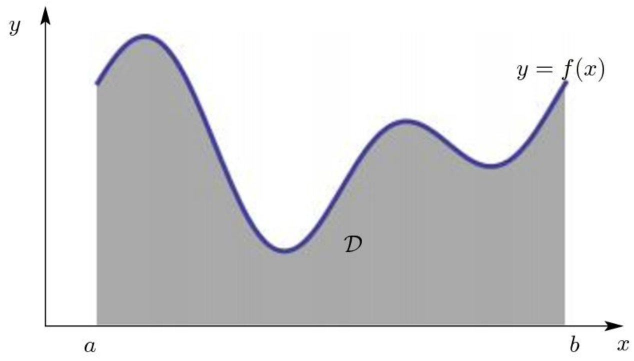
M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

novembro de 2015

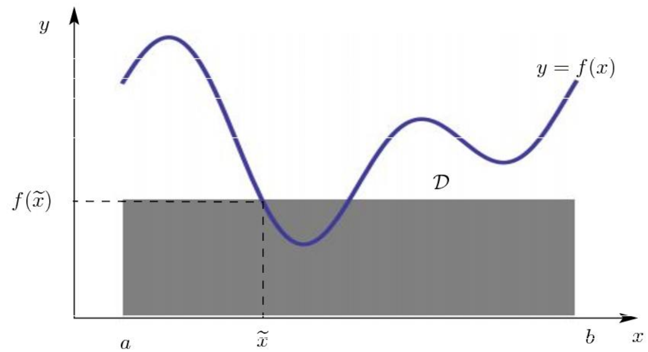
2.2 Integral de Riemann

Motivação

Calcular a área sob o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entre $[a, b]$



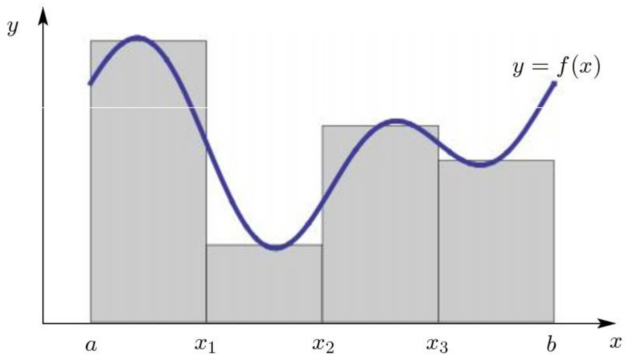
Uma aproximação para a área de $\mathcal{D}$ é, por exemplo, a área do retângulo cuja base mede $b - a$ e cuja altura mede $f(\widetilde{x})$, sendo $\widetilde{x}$ um qualquer ponto de $[a, b]$



Neste caso

$$\text{área do retângulo} = f(\widetilde{x})(b - a)$$

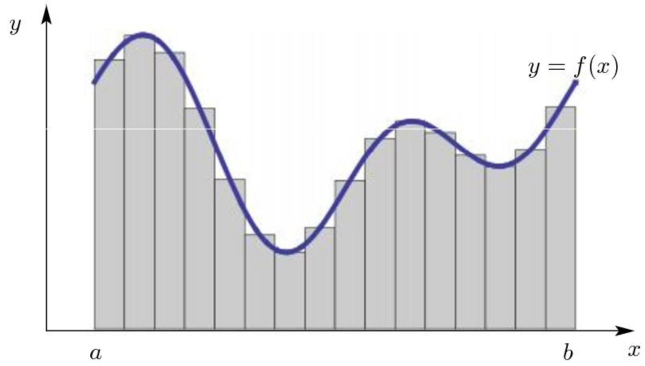
A aproximação anterior pode ser significativamente melhorada, por exemplo



A área a sombreado é,

$$f(\widetilde{x_1})(x_1 - a) + f(\widetilde{x_2})(x_2 - x_1) + f(\widetilde{x_3})(x_3 - x_2) + f(\widetilde{x_4})(b - x_3)$$

Uma outra (ainda melhor) aproximação à área de $\mathcal{D}$ é



A área a sombreado é, agora,

$$f(\widetilde{x_1})(x_1 - a) + f(\widetilde{x_2})(x_2 - x_1) + \cdots + f(\widetilde{x_{15}})(x_{15} - x_{14}) + f(\widetilde{x_{16}})(b - x_{15})$$

Integral de Riemann: definição

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

- Subdividimos o intervalo $[a, b]$ num número arbitrário de subintervalos, sejam n, de extremos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Chamamos soma de Riemann de f no intervalo $[a, b]$ para a subdivisão anterior à soma

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,(x_{k+1} - x_k) \qquad \text{onde} \quad \widetilde{x_k} \in [x_k, x_{k+1}]$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,\Delta\, x_{k+1}, \qquad \text{onde} \quad \Delta\, x_{k+1} = x_{k+1} - x_k.$$

- [Integral definido] O integral definido de f em $[a, b]$ é o limite da soma de Riemann de f, quando $n \longrightarrow \infty$, isto é

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{x_k})\,\Delta\, x_{k+1}.$$

- O integral definido de f em $[a, b]$ representa-se por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- A função f diz integrável no intervalo $[a, b]$ (no sentido de Riemann).
- $n \longrightarrow \infty$ equivale a $\Delta\, x_{k+1} \longrightarrow 0$

Terminologia

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- $[a, b]$ é o intervalo de integração;
- a e b são, respetivamente, o limite inferior e o limite superior de integração;
- f é a função integranda;
- x é a variável de integração;
- é a medida da área da região do plano limitada pelo eixo dos x, as retas verticais $x = a$ e $x = b$ e o gráfico da função f quando $f \geq 0$.

Propriedades do integral

- Sejam f limitada em $[a, b]$ e $c \in]a, b[$.

  Então f é integrável em $[a, b]$ se e só se f integrável separadamente em $[a, c]$ e $[c, b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Por convenção
  - $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$;
  - $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

- Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

- Se f é integrável em $[a, b]$ então a função $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

- Se f é limitada em $[a, b]$, anulando-se em todos os pontos de $[a, b]$ exceto, eventualmente, num número finito de pontos de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0;$$

- Se f é integrável em $[a, b]$ e g é uma função que difere de f apenas num número finito de pontos $[a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

- [Caracterização das funções integráveis]

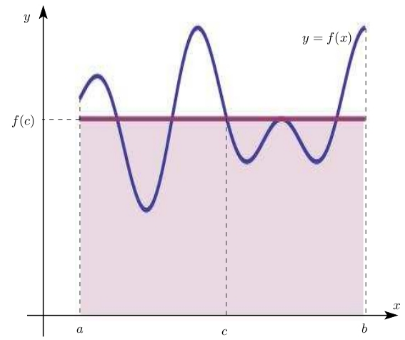
  Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f é

  - contínua então f é integrável em $[a,b]$;
  - é monótona então f é integrável em $[a,b]$;
  - é limitada possuindo apenas um número finito de pontos de descontinuidade então f é integrável em $[a,b]$.

- [Teorema do valor médio do cálculo integral]

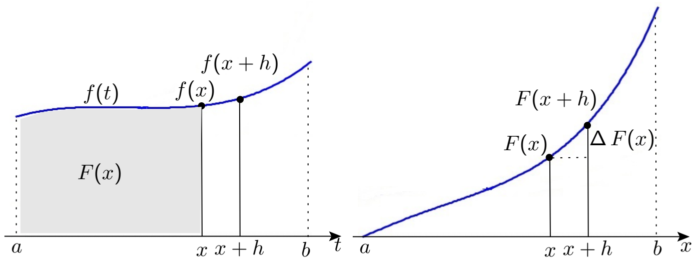
  Seja f contínua em $[a,b]$. Então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(c)(b-a).$$



Teorema fundamental do cálculo

- Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e, por simplicidade, assuma-se $f \geq 0$.
- Considere-se a área limitada pelo gráfico de f e o eixo horizontal entre $t = a$ e $t = x$ $(x \leq b)$: para cada x o valor da área será dado por uma “função área” F



- Tem-se

$$f(x)\,h \leq \Delta F(x) \leq f(x+h)\,h$$

- Ou, dividindo a expressão anterior por h,

$$f(x) \leq \frac{\Delta F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

- Tomando o limite quando $h \longrightarrow 0$ nas desigualdades anteriores tem-se

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$$

  e

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

- Então

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$$

  isto é, a “função área” é uma primitiva da função f:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

- [Teorema fundamental do cálculo]

Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

1) A função $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável em $[a,b]$, tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

2) (Fórmula de Barrow) Se F é uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b \stackrel{def}{=} F(b) - F(a).$$

Exemplo

Calcular

1. $F'(x)$ quando $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$;

2. $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$.

- [Consequências do TFC: derivação sob o sinal de integral]

Sejam $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ derivável.

- Então f é integrável, em particular, entre a e $\varphi(x)$, tendo-se

$$\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = F(\varphi(x)).$$

- Pelo teorema da derivação da função composta vem

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)' = [F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

- Por 1) do teorema fundamental do cálculo $F' = f$, pelo que se conclui que

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

- [Caso geral]

Sendo $\varphi, \psi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ funções deriváveis, tem-se

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)' = f(\psi(x))\,\psi'(x) - f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Basta notar que

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \int_a^{\psi(x)} f(t)\,dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

e conjugar o teorema fundamental do cálculo com o teorema da derivação de funções compostas.

Exemplo

1. Calcular $G'(x)$ quando $G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t}\,dt$.

Métodos de integração

- Integração por decomposição
- Integração imediata
- Integração por partes
- Integração por substituição

- [Integração por decomposição]

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e $\alpha\,,\beta\, \in \mathbb{R}$ constantes. Então

$$\int_a^b [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

- [cf. ALGA] O integral definido é um operador linear

Exemplo

1. $\int_0^{\pi} \left[\sqrt{2}\,x^2 + 2\ \text{sen}\,x\right] dx$

- [Integração imediata]

Sejam funções $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que a função composta está bem definida. Então

$$\int_a^b g'(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int_a^b [g(f(x))]'\, dx = g(f(b)) - g(f(a)).$$

Exemplo

1. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi} \cos x\,(\text{sen}\, x)^3\, dx.$

Já vimos que (*c.f.* Primitivação Imediata) que

$$\int \cos x\,(\text{sen}\, x)^3\, dx = \frac{1}{4}\int 4\cos x\,(\text{sen}\, x)^3\, dx = (\text{sen}\, x)^4 + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

Então, pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \cos x\,(\text{sen}\, x)^3\, dx = (\text{sen}\, x)^4\Big|_{\pi/4}^{\pi} = (\text{sen}\, \pi)^4 - \left(\text{sen}\, \frac{\pi}{4}\right)^4 = -\frac{1}{16}$$

- [Integração por partes]

Sejam funções $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$.

Então

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Exemplo

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\, \cos x\, dx$

- [Integração por substituição]

Sejam $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, I um intervalo, $f : I \longrightarrow [a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $\alpha, \beta \in I$ tais que

$$f(\alpha) = a \qquad \text{e} \qquad f(\beta) = b.$$

Então
$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(f(t))\,f'(t)\,dt.$$

- O método de integração por substituição também é referido como método de integração por mudança de variáveis.

Exemplo

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{arcsen} x\,dx$

Considere-se
$$g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1] \qquad \text{dada por} \qquad g(t) = \operatorname{sen} t.$$
A função $g \in \mathcal{C}^1$ e
$$g(-\frac{\pi}{2}) = -1 \qquad \text{e} \qquad g(\frac{\pi}{2}) = 1.$$