Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear EI

MIEINF

2015/2016

Aulas teóricas

6. VALORES E VETORES PRÓPRIOS

6.1 Introdução

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se que o escalar λ é um valor próprio de A se existir um vetor não nulo $\boldsymbol{x}$ tal que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

O vetor $\boldsymbol{x}$ chama-se vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$(1, 0)$ é um vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio 2.

Cálculo de valores próprios

Teorema: *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então, λ é valor próprio de A se e só se*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Demonstração: *Por definição, λ é valor próprio de A, se e só se*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \qquad \text{para algum } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0},$$

ou seja

$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \qquad \text{para algum } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

$$\downarrow$$

sistema homogéneo com soluções além da nula.

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{car}(A - \lambda I) < n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A - \lambda I) = 0.$$

$\lambda = 0?$

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A equação

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

chama-se a equação característica de A.

Exemplo: A equação característica da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda)(1-\lambda) = 0.$$

Os valores próprios da matriz A são as raízes da sua equação característica, tendo-se neste caso

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Definição: Seja A uma matriz de ordem n. Ao polinómio em λ,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

chama-se polinómio característico de A.

Exemplo: O polinómio característico da matriz anterior é

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda)(1 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda.$$

Observação: Se A é uma matriz quadrada de ordem n, o seu polinómio característico é de grau n. Os valores próprios de A são os zeros do seu polinómio característico e consequentemente A terá n valores próprios, eventualmente complexos e não distintos.

Se nada for dito em contrário, dada uma matriz real estamos interessados em determinar apenas os seus valores próprios reais e vetores próprios em $\mathbb{R}^n$.

Se λ é um zero do polinómio característico com multiplicidade k, diz-se que o valor próprio λ tem multiplicidade algébrica k.

Exemplo: Uma matriz A cujo polinómio característico seja

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda + 2)^3(\lambda - 4)(\lambda^2 + 1),$$

tem 3 valores próprios reais distintos:

- 1, com multiplicidade algébrica (m.a.) 5;
- -2, com m.a. 3;
- 4, com m.a. 1.

A matriz A tem ordem 11 e admite ainda 2 valores próprios complexos i e $-i$.

Cálculo de vetores próprios

Os vetores próprios associados ao valor próprio λ, obtêm-se resolvendo o sistema homogéneo

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

e considerando as soluções não nulas desse sistema.

Exemplo: Calculemos os vetores próprios associados ao valor próprio 1 da matriz A do exemplo anterior.Temos de resolver o sistema homogéneo

$$(A - I)\,\boldsymbol{x} = 0,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema tem como soluções o conjunto $\{(0, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Os vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 são todos os vetores da forma $(0, 0, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Um vetor próprio está associado apenas a um valor próprio, mas, a um valor próprio estão associados uma infinidade de vetores próprios. De facto, se $\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio λ de A, então $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ e $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Mas $\alpha\,\boldsymbol{x}$ verifica

$$A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(A\boldsymbol{x}) = \alpha(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x}),$$

logo, $\alpha\,\boldsymbol{x}$ ($\alpha \neq 0$) é também vetor próprio de A associado ao valor próprio λ. O conjunto

$$V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}$$

contém, para além do vetor nulo, todos os vetores próprios da matriz A associados ao valor próprio λ. V_λ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ (prove!) e designa-se por subespaço próprio associado ao valor próprio λ.

A dimensão do subespaço vetorial V_λ designa-se por multiplicidade geométrica do valor próprio λ.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ tem como valores próprios:

- 1 com m.a. 2;
- 3 com m.a. 1;
- 4 com m.a. 1.

Subespaço próprio associado a cada valor próprio:

- $V_1 = \langle (1,0,0,0) \rangle$. Logo 1 tem multiplicidade geométrica (m.g.) 1;
- $V_3 = \langle (3,0,2,0) \rangle$. Logo 3 tem m.g. 1;
- $V_4 = \langle (10,0,6,3) \rangle$. Logo 4 tem m.g. 1.

6.2 Propriedades

Teorema: *Seja λ um valor próprio de uma matriz A e seja $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a λ. Então:*

1. $\alpha\lambda$ *($\alpha \neq 0$) é valor próprio de αA associado ao vetor próprio $\boldsymbol{x}$;*
2. $\lambda - p$ *é valor próprio de $A - pI$ associado ao vetor próprio $\boldsymbol{x}$;*
3. λ^k *($k \in \mathbb{N}$) é valor próprio de A^k associado ao vetor próprio $\boldsymbol{x}$.*

Demonstração: ver folha de exercícios.

Teorema: *Seja λ um valor próprio de uma matriz A e seja $\mathbf{x}$ um vetor próprio associado a λ. Então*

1. *A é não singular se e só se $\lambda \neq 0$;*
2. *se $\lambda \neq 0$, λ^{-1} é valor próprio de A^{-1} associado ao vetor próprio $\boldsymbol{x}$.*

Demonstração:
1. Como λ é valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I) = 0$, conclui-se que $\lambda = 0$ é valor próprio de A se e só se $\det A = 0$ ou seja se e só se A é singular.

2. De $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ obtém-se (como $\lambda \neq 0$, existe A^{-1})

$$A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow I\,\boldsymbol{x} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Donde,

$$A^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Teorema: *As matrizes A e A^T têm os mesmos valores próprios.*

Demonstração: *Imediata, porque os polinómios característicos de A e A^T são iguais,*

$$\det(A-\lambda I)=\det((A-\lambda I)^T)=\det(A^T-\lambda I).$$

Teorema: *Os valores próprio de uma matriz diagonal ou triangular, são os seus elementos diagonais.*

Demonstração: *imediata.*

Teorema: *Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem n e sejam $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ os n valores próprios de A. Então:*

1. $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=\det A$;
2. $\lambda_1+\lambda_2\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr} A$.

Exemplo: Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $p_\lambda = -4 + 4\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$;
- valores próprios: 2 (duplo), -1 e 1 (simples);
- $\det A = -4$;
- $\operatorname{tr} A = 4$.

Teorema: *Se $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ são vetores próprios de uma matriz A, associados a valores próprios distintos, então, $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ são linearmente independentes.*

Demonstração: *Suponhamos*

$$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \quad \text{e} \quad A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \quad \text{com} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Consideremos a combinação linear nula

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \qquad (*)$$

(pretende-se provar que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). De (*), obtém-se

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 = -\alpha_2 \boldsymbol{x}_2, \qquad (**)$$

donde

$$A\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 = A(-\alpha_2 \boldsymbol{x}_2) \Leftrightarrow \alpha_1 (A\boldsymbol{x}_1) = -\alpha_2 (A\boldsymbol{x}_2) \Leftrightarrow \alpha_1 (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1) = -\alpha_2 (\lambda_2 \boldsymbol{x}_2)$$

ou

$$\lambda_1 \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 = -\lambda_2 \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 (-\alpha_2 \boldsymbol{x}_2) = -\lambda_2 \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 \Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Como, por hipótese, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e dado que $\boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$, conclui-se então que $\alpha_2 = 0$. Mas, sendo $\alpha_2 = 0$, de (**) resulta $\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$, isto é, $\alpha_1 = 0$.

Vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes.

Exemplo: Considerando novamente a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- $(1,0,0,0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1;
- $(3,0,2,0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 3;
- $(10,0,6,3)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 4.

Os vetores $(1,0,0,0)$, $(3,0,2,0)$ e $(10,0,6,3)$ são linearmente independentes.

6.3 Matrizes diagonalizáveis

Definição: Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. As matrizes A e B dizem-se semelhantes, se existe uma matriz P de ordem n, invertível, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Teorema: *Se A e B são matrizes semelhantes, então, têm o mesmo conjunto de valores próprios.*

Demonstração: Seja $B = P^{-1}AP$ com P não singular. Então

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que A e B têm o mesmo polinómio característico, logo os mesmos valores próprios.

Exemplo: Consideremos as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Como

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tem-se

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donde, os valores próprios de A são -2 e 4, sendo este último de multiplicidade 2.

Definição: Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diz-se diagonalizável se é semelhante a uma matriz diagonal.

Teorema: *Suponhamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios da matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A matriz A é semelhante à matriz diagonal*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e, portanto, é diagonalizável se e só se A tiver n vetores próprios linearmente independentes.

Exemplo: A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é diagonalizável, porque tem 3 valores próprios distintos (1,2 e 3), logo os vetores próprios associados são linearmente independentes.