

Programação Linear - definição matricial

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

18 de setembro de 2017

Programação Linear - definição matricial

antes

- O algoritmo Simplex determina como seleccionar o elemento pivô para passar de uma base para uma base adjacente melhor.

Guião

- Vamos definir a operação matricial que permite passar de um quadro (base) inicial para qualquer outro quadro (base) final,
- o que é equivalente a efectuar o conjunto dos pivôs que conduzem ao quadro final,
- correspondente a dada escolha prévia de variáveis básicas (base).

depois

- Em análise de sensibilidade, usaremos a definição matricial para analisar os efeitos que a variação de dados no quadro inicial têm sobre o quadro óptimo.

- Sistema de equações e soluções básicas (revisão)
- Definição matricial do problema de programação linear
- Resolução matricial
- Apêndice
 - Significado dos vectores $B^{-1}b$ e $B^{-1}A_j$
 - Implementação computacional do método simplex
 - Operações com matrizes: exemplos

Sistema de equações e soluções básicas (revisão)

- O problema $\max z = cx$, suj. a $Ax = b, x \geq 0$, para uma qualquer escolha de um conjunto de variáveis básicas, é equivalente a:

$$\begin{aligned} \max z &= c_B x_B + c_N x_N \\ \text{suj. a} \quad & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

- em que o conjunto de variáveis x é partido em dois subconjuntos:

$$\begin{aligned} x_B &\in \mathbb{R}_+^{m \times 1} : \text{variáveis básicas,} \\ x_N &\in \mathbb{R}_+^{(n-m) \times 1} : \text{variáveis não-básicas,} \end{aligned}$$

- o vector de custos c é partido em dois subvectores:

$$\begin{aligned} c_B &\in \mathbb{R}^{1 \times m} : \text{subvector de } c \text{ com os custos das variáveis básicas,} \\ c_N &\in \mathbb{R}^{1 \times (n-m)} : \text{subvector de } c \text{ com os custos das variáveis não-básicas, e} \end{aligned}$$

- a matriz A é partida em duas submatrizes:

$$\begin{aligned} B &\in \mathbb{R}^{m \times m} : \text{submatriz de } A \text{ das variáveis básicas (não-singular),} \\ N &\in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} : \text{submatriz de } A \text{ das variáveis não-básicas.} \end{aligned}$$

Resolve-se o sistema de equações em ordem a x_B

- pré-multiplicando o sistema de equações por B^{-1} :

$$B^{-1}(Bx_B + Nx_N) = B^{-1}b$$

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

- Substituindo o valor de x_B na função objectivo, o valor da função objectivo da solução x_B é:

$$z = c_B x_B + c_N x_N =$$

$$= c_B (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N =$$

$$= c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$$

Quando $\tilde{x}_N = 0$, a solução do sistema de equações \tilde{x} é uma *solução básica*:

- $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

- e tem um valor de função objectivo $\tilde{z} = c_B B^{-1}b$

Se $\tilde{x}_B \geq 0$ então \tilde{x} é uma *solução básica admissível*.

Problema de PL e representação matricial

| Geral | Exemplo | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---|-------|-------|-------|-------------|-------|---|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|-------|---|---|---|---|---|---|---|-----|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|---|-----|-----|-----|---|---|---|---|
| $\begin{array}{ll} \max & cx \\ & Ax + Is = b \\ & x \geq 0 \end{array}$ | $\begin{array}{ll} \max & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \quad \quad + s_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table><tr><td>A</td><td>I</td><td>b</td></tr><tr><td>$-c$</td><td>$\tilde{0}$</td><td>0</td></tr></table> | A | I | b | $-c$ | $\tilde{0}$ | 0 | <table><tr><td></td><td>z</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>s_1</td><td>s_2</td><td>s_3</td><td></td></tr><tr><td>s_1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>40</td></tr><tr><td>s_2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>150</td></tr><tr><td>s_3</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>20</td></tr><tr><td>z</td><td>1</td><td>-30</td><td>-20</td><td>-10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> | | z | x_1 | x_2 | x_3 | s_1 | s_2 | s_3 | | s_1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 40 | s_2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 150 | s_3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 | z | 1 | -30 | -20 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A | I | b | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $-c$ | $\tilde{0}$ | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | z | x_1 | x_2 | x_3 | s_1 | s_2 | s_3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| s_1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 40 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| s_2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 150 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| s_3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| z | 1 | -30 | -20 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

A resolução mostrada no diapositivo anterior pode ser representada em quadros, como se segue.

Resolução do sist. de equações: representação matricial - i

- Para resolver o sistema de equações $[A \mid I] * [x \mid s]^t = b$, do quadro simplex, em ordem às variáveis básicas do conjunto x_B , a que correspondem:
 - a matriz B , que é a submatriz de $[A \mid I]$ com as colunas das variáveis básicas; e
 - o vector c_B , com os coeficientes do vector c das mesmas variáveis,
- é necessário obter:
 - a matriz identidade I nas posições da matriz B ,
 - o vector nulo na linha da função objectivo.
- Pré-multiplicar pela matriz da esquerda ($\in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$) faz isso.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline -c_B \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline \tilde{0} \\ \hline \end{array}$$

- A regra de multiplicação de matrizes partidas (em submatrizes) é semelhante à da multiplicação de matrizes.

Resolução do sist. de equações: representação matricial - ii

- Pré-multiplicando o Quadro Inicial, obtém-se o Quadro Final.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \\ \hline \end{array}$$

- Nota: tal como vimos no diapositivo anterior, nas posições que a matriz B ocupa no Quadro Inicial, aparecem as colunas da matriz identidade no Quadro Final.

Exemplo

- Dado o Quadro Inicial:

| | z | x_1 | x_2 | x_3 | s_1 | s_2 | s_3 | |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| s_1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 40 |
| s_2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 150 |
| s_3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| z | 1 | -30 | -20 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

- para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas $x_B = \{x_3, s_2, x_2\}$, i.e., obter um Quadro Final em que essas variáveis são básicas,
- a matriz B e o vector c_B são os abaixo apresentados, e permitem calcular a matriz B^{-1} e o vector $c_B B^{-1}$:

$$B = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline & 2 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad B^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1/2 & 0 & -1/2 \\ & -1/2 & 1 & -3/2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{c|ccc} & 10 & 0 & 20 \end{array} \quad c_B B^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 5 & 0 & 15 \end{array}$$

Exemplo

| | | | |
|------|---|------|---|
| 1/2 | 0 | -1/2 | 0 |
| -1/2 | 1 | -3/2 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 15 | 1 |

*

| | z | x ₁ | x ₂ | x ₃ | s ₁ | s ₂ | s ₃ | | |
|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|---|
| s ₁ | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 40 | = |
| s ₂ | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 150 | |
| s ₃ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 | |
| z | 1 | -30 | -20 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

=

| | z | x ₁ | x ₂ | x ₃ | s ₁ | s ₂ | s ₃ | |
|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| x ₃ | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| s ₂ | 0 | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| x ₂ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| z | 1 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

*

| | |
|--------------|-------------|
| B^{-1} | $\tilde{0}$ |
| $c_B B^{-1}$ | 1 |

=

| | | |
|-------------------|--------------|---------------|
| A | I | b |
| $-c$ | $\tilde{0}$ | 0 |
| $B^{-1}A$ | B^{-1} | $B^{-1}b$ |
| $c_B B^{-1}A - c$ | $c_B B^{-1}$ | $c_B B^{-1}b$ |

- Quando escolhemos um conjunto qualquer de variáveis básicas, não há garantia de os elementos de $B^{-1}b$, de $c_B B^{-1}$ e de $c_B B^{-1}A - c$ serem todos não-negativos.
- Se algum elemento do vector $B^{-1}b$ for negativo, a resolução dá um vértice não-admissível.
- Se algum elemento dos vectores $c_B B^{-1}$ ou $c_B B^{-1}A - c$ for negativo, a resolução dá um vértice que não é óptimo.

No exemplo anterior, o Quadro Final é a solução óptima, porque se sabia de antemão quais eram as variáveis básicas da solução óptima.

O que significa o vector $B^{-1}b$?

- Qualquer vector de um espaço vectorial pode ser representado como uma combinação linear dos vectores da base.
- Os elementos de $B^{-1}b$ são as coordenadas do vector b em relação à base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$.
- Exemplo:

$$b = B (B^{-1}b)$$

| | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-----|
| | x_3 | s_2 | x_2 | |
| 40 | 2 | 0 | 1 | 10 |
| 150 | 1 | 1 | 2 | 100 |
| 20 | 0 | 0 | 1 | 20 |

$$\begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = 10 \vec{v}_1 + 100 \vec{v}_2 + 20 \vec{v}_3$$

- ou seja, é a solução $x_B = B^{-1}b = (x_3, s_2, x_2)^t = (10, 100, 20)^t$.

O que significa $B^{-1}A_j$?

- Seja A_j uma coluna da matriz $[A \mid I] = [A_1, \dots, A_j, \dots, A_n \mid I]$.
- Os elementos de $B^{-1}A_j$ são as coordenadas do vector A_j em relação à base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$.
- Exemplo:

$$A_1 = B (B^{-1}A_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -1/2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3/2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = -1/2 \vec{v}_1 - 3/2 \vec{v}_2 + 2 \vec{v}_3$$

Implementação computacional do método simplex

- Os *solvers* de programação linear usam a representação matricial.
- A matriz B^{-1} e as matrizes do quadro inicial (A, b, c) são suficientes para calcular todos os elementos de qualquer quadro simplex.
- A matriz B^{-1} é actualizada em cada iteração, e
- guardada na forma de uma factorização, por exemplo, LU.

Algoritmo simplex primal (maximização)

- 1 (Calcular custos reduzidos das variáveis não-básicas)
Calcular $c_B B^{-1} A_j - c_j, \forall j \in N$.
- 2 (Testar optimalidade)
Se $c_B B^{-1} A_j - c_j \geq 0, \forall j \in N$, a solução é ótima. Senão,
- 3 (Seleccionar coluna pivot)
coluna pivot $k : c_B B^{-1} A_k - c_k = \min_{j \in N} \{c_B B^{-1} A_j - c_j\}$
- 4 Calcular lado direito $B^{-1} b$ e coluna pivot $B^{-1} A_k$.
- 5 (Verificar se solução ótima é ilimitada)
Se todos os elementos de $B^{-1} A_k \leq 0$, a solução é ilimitada. Senão,
- 6 (Seleccionar linha pivot)
linha pivot $l : (B^{-1} b)_l / (B^{-1} A_k)_l = \min_i \{(B^{-1} b)_i / (B^{-1} A_k)_i\}$.
- 7 Actualizar a matriz B^{-1} , e voltar ao passo 1.

Economia de espaço:

- A matriz A é tipicamente uma matriz dispersa. A percentagem de elementos não-zero de A pode ser 5% ou 10%.
- Há estruturas de dados para representar matrizes dispersas que permitem grandes economias de espaço.

Eficiência computacional:

- A multiplicação de matrizes dispersas só envolve os cálculos com os elementos diferentes de 0.
- A única coluna que é calculada numa iteração é a coluna da variável que sai da base; as outras são ignoradas.
- A coluna de uma variável pode nunca ser calculada durante a resolução; basta que a variável nunca se torne básica.

Operações com matrizes: exemplos

- Soma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+10 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Fim