Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear EI

MIEINF

2015/2016

Aulas teóricas

2. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.1 Introdução

Sistema de m equações lineares:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. .$$

x_j - incógnita

a_{ij} - coeficientes da incógnitas x_j

b_i - termo independente

- Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, o sistema diz-se homogéneo.
- Uma solução do sistema é um n-uplo ordenado de números que é solução das m equações do sistema.
- Um sistema diz-se
  1. impossível se não tem solução.
  2. possível e determinado se tem uma única solução.
  3. possível e indeterminado se tem mais do que uma solução.[4]

Obs: Um sistema homogéneo é sempre possível. (Porquê?)

[4] Pode mostrar-se que, se um sistema de equações lineares tem mais do que uma solução, então tem uma infinidade de soluções.

Exemplos

① $(1,1)$ é a única solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

② O sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

tem uma infinidade de soluções.

① O sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

é impossível.

2.2 Método de Eliminação de Gauss

Definição: Dois sistemas de equações lineares dizem-se **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto de soluções.

Exemplos

① Os sistemas

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{r} 4x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right.$$

são equivalentes.

② Os sistemas

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right.$$

não são equivalentes.

Operações elementares sobre as equações de um sistema

OE1: Troca da ordem de duas equações.

OE2: Multiplicação de uma equação por um número diferente de zero.

OE3: Soma de uma equação com um múltiplo de outra equação.

Teorema: *Se, sobre as equações de um sistema, efetuarmos um número finito de operações elementares, obtemos um sistema equivalente ao inicial.*

Sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Notação abreviada: $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,

$A = (a_{ij})$ matriz simples do sistema,

$\boldsymbol{x} = (x_i)$ matriz das incógnitas,

$\boldsymbol{b} = (b_i)$ matriz dos termos independentes.

Matriz ampliada do sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$(A \;\; \boldsymbol{b}) \qquad\qquad (A \mid \boldsymbol{b})$$

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

matriz simples — matriz ampliada

Teorema: *O n-uplo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sse a matriz coluna* $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ *satisfaz $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$.*

Demonstração: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sse

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array} \right. .$$

o que equivale a dizer

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{ou } A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}.$$

Neste contexto, faz sentido considerar a solução do sistema, não como o n-uplo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, mas sim como a matriz coluna
$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ tal que $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$.

Neste curso, referir-nos-emos às soluções de sistemas, quer na forma de n-uplos ordenados, quer na forma de matrizes coluna, conforme seja mais conveniente.

Exemplo: Considere novamente o sistema cuja matriz ampliada é

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

▶ $(-1,0,0,3)$ e $(1,1,0,0)$ são duas das soluções do sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

▶ $(1,1,1,1)$ e $(0,0,0,0)$ não são soluções do sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{X} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{X}$$

Teorema: *Se* $(A \mid \boldsymbol{b}) \xrightarrow[linhas]{} (A' \mid \boldsymbol{b}')$ *então os sistemas*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{e} \qquad A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

são equivalentes.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, os seguintes sistemas são equivalentes

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -3x_3 &= -6 \end{aligned} \right.$$

Resolução de sistemas pelo Método de Eliminação de Gauss

▷ Transformar $(A \mid \boldsymbol{b})$ numa matriz equivalente em forma de escada.

Exemplo: $\begin{cases} y-4z=2 \\ x-y=-1 \\ -x+2y-3z=4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2+L_1]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3-L_2]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Termina assim o processo de eliminação.

A solução do sistema pode agora obter-se, resolvendo, da última equação para a primeira, e substituindo os valores entretanto determinados em cada uma das equações a resolver - método de substituição.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} -x+2y-3z=4 \\ y-3z=3 \\ -z=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+2y\mathbf{-3}=4 \\ y\mathbf{-3}=3 \\ \boldsymbol{z}=\mathbf{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+\mathbf{12}\mathbf{-3}=4 \\ \boldsymbol{y}=\mathbf{6} \\ \boldsymbol{z}=\mathbf{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}=5 \\ \boldsymbol{y}=\mathbf{6} \\ \boldsymbol{z}=\mathbf{1} \end{cases}$$

Exemplo: $\left\{\begin{array}{l} y-3z=3 \\ x-y=-1 \\ -x+2y-3z=4 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2+L_1]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3-L_2]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+2y-3z=4 \\ y-3z=3 \end{array}\right.$$

Exemplo: (cont.)

$$\begin{cases} -x+2y-3z=4 \\ y-3z=3 \end{cases}$$

z pode ter um valor arbitrário – diz-se por isso variável livre.

$$\begin{cases} -x+2y-3z=4 \\ y-3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2(3+3z)-3z=4 \\ y=3+3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+3z \\ y=3+3z \end{cases}$$

O sistema tem uma **infinidade** de soluções:

$$x=2+3\alpha; y=3+3\alpha; z=\alpha; \alpha\in\mathbb{R}$$

– **sistema possível, indeterminado** com grau de indeterminação 1 (número de variáveis livres).

Exemplo: $\begin{cases} y - 3z = 2 \\ x - y = -1 \\ -x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$0x + 0y + 0z = -1$ $\rightarrow$ Sistema impossível

Exemplo:
$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ 5z+6w=0 \\ az+6w=b \\ y+7z+8w=1 \end{cases} \qquad a,\ b \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & a & 6 & b \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & a & 6 & b \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & a & 6 & b \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a}{5} L_3]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6a}{5}+6 & b \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow 5L_4]{\mathbf{OL_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6a+30 & 5b \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ y+7z+8w=1 \\ 5z+6w=0 \\ (-6a+30)w=5b \end{cases}$$

a≠5 o sistema tem solução **única** - **sistema possível e determinado**;

$$w = \frac{5b}{-6a+30};\; z = \frac{-b}{-a+5};\; y = \cdots;\; x = \cdots.$$

a=5 dois casos se podem dar:

- b=0

w pode ter um valor arbitrário; o sistema tem uma **infinidade** de soluções - **sistema possível, indeterminado** com grau de indeterminação 1 (número de variáveis livres).

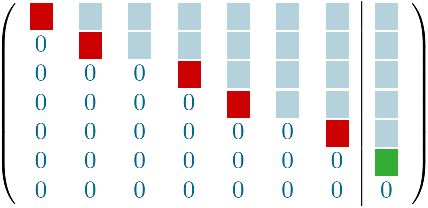
$$z = -\frac{6}{5}w;\; y = 1 + \frac{2}{5}w;\; x = -2 - \frac{6}{5}w;\; w \in \mathbb{R}$$

- b ≠0

o sistema **não tem** solução - **sistema impossível**.

Teorema: $\operatorname{car}(A \mid b) = \operatorname{car} A$ *ou* $\operatorname{car}(A \mid b) = \operatorname{car} A + 1$.

Demonstração:



Notemos que, se $(A' \mid b')$ é uma matriz em forma de escada, equivalente por linhas a $(A \mid b)$, então A' também está em forma de escada. Seja r o número de linhas não nulas de A', i.e.

$$\operatorname{car} A' = r = \operatorname{car} A.$$

Como a matriz $(A' \mid b')$ tem mais uma coluna que a matriz A', no máximo terá mais um pivô (na última coluna). Logo

$$\operatorname{car}(A \mid b) = \operatorname{car} A \quad \textit{ou} \quad \operatorname{car}(A \mid b) = \operatorname{car} A + 1.$$

Discussão de um sistema

Consideremos um sistema de m equações lineares em n incógnitas da forma $Ax = b$. Se

$$r = \operatorname{car} A \qquad \text{e} \quad r' = \operatorname{car}(A \mid b),$$

então:

- se $r < r'$ - sistema impossível [SI]
- se $r = r'$ - sistema possível
  - se $r = n$ - sistema possível e determinado [SPD].
  - se $r < n$ - sistema possível e indeterminado [SPI] , com grau de indeterminação $n - r$.

Exemplo: A matriz ampliada do sistema do exemplo anterior, é equivalente à matriz em escada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6a+30 & 5b \end{array}\right)$$

Discussão do sistema:

$$\begin{cases} a \neq 5 \Rightarrow r = r' = n = 4 \Rightarrow \text{possível e determinado} \\ a = 5 \begin{cases} b \neq 0 \Rightarrow r' = 4, r = 3 \Rightarrow \text{impossível} \\ b = 0 \rightarrow r' = r = 3 < n \Rightarrow \text{possível e indeterminado} \\ \qquad \text{grau indeterminação} = n - r = 1 \end{cases} \end{cases}$$

2.3 Método de Gauss-Jordan

▷ Transformar $(A \mid b)$ numa matriz equivalente em forma de escada reduzida.

Exemplo: Retomando o exemplo $\begin{cases} y - 4z = 2 \\ x - y = -1 \\ -x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

Forma em escada da matriz ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Forma em escada reduzida: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Solução do sistema: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 1 \end{cases}$

Teorema: *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *A é invertível.*
2. $\operatorname{car} A = n$.
3. *I_n é a matriz em escada reduzida equivalente a A.*

Aplicação ao cálculo da inversa de uma matriz

A quadrada de ordem n invertível $\Rightarrow \operatorname{car}(A) = n \Rightarrow$ os sistemas $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2$, ..., $A\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{e}_n$ ($\boldsymbol{e}_j$ coluna j da matriz I_n) têm solução única. Seja $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n)$ a matriz cujas colunas são as soluções desses sistemas (i.e. $A\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{e}_j$).

$$AC = A\,(\boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2 \cdots\ \boldsymbol{c}_n) = (A\boldsymbol{c}_1\ A\boldsymbol{c}_2 \cdots\ A\boldsymbol{c}_n) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2 \cdots\ \boldsymbol{e}_n) = I_n.$$

Mas, $AC = I_n \Rightarrow CA = I_n \Rightarrow C = A^{-1}$ (ver folha de exercícios).

A coluna j de A^{-1} é a (única) solução $\boldsymbol{c}_j$ do sistema $A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$.
Todos os sistemas têm a mema matriz simples. Podemos resolvê-los em simultâneo pelo **método de Gauss-Jordan**:

$$(A \mid \boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n) \xrightarrow[linhas]{} (I_n \mid \boldsymbol{c}_1\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n)$$

$$\boxed{(A \mid I_n) \xrightarrow[linhas]{} \left(I_n | A^{-1}\right)}$$

Exemplo: Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$