tópicos de matemática discreta – MIEInf

carla mendes | cláudia m. araújo | suzana m. gonçalves

UM | 2015/2016

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses dois objetos estão associados de alguma forma. Uma relação binária será, então, um conjunto de pares ordenados e os seus elementos serão os pares ordenados (a, b) tais que a está associado a b.

definição 5.1

Sejam A e B dois conjuntos. Chamamos **relação binária de A em B** a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Quando $A = B$, dizemos que R é uma relação binária em A.

Se $(a, b) \in R$, então dizemos que a **está relacionado com** b **por R** e escrevemos $a\,R\,b$.

Se $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not{R}\, b$ e dizemos que a **não está relacionado com** b **por R**.

exemplo 5.2

1 | Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. São exemplos de relações binárias de A em B os conjuntos

i. $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7)\}$;

ii. $S = \{(2, 3)\}$;

iii. $\emptyset$;

iv. $A \times B$.

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 4, 8, 9\}$. Então, $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ é uma relação binária de A em B que pode ser definida por

$$a \, R \, b \quad \leftrightarrow \quad b = a^2 \quad (a \in A, b \in B).$$

3 | Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2\}$. Então,

i. $R = \{(1,1),(2,2)\}$ é uma relação binária de A em B;

ii. $S = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ não é uma relação binária de A em B, visto que $S \not\subseteq A \times B$.

4 | Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,4,6,9,10\}$.

Se R é a relação binária de A em B definida por $a\,R\,b$ se e só se $a|b$ (ou seja, a divide b), então

$$R = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,9),(1,10),(2,2),(2,4),(2,6),(2,10),(3,6),(3,9)\}$$

Facilmente verificamos que $2 \not R\, 9$, pois $2 \nmid 9$. No entanto, $(2,9) \in A \times B$.
Por outro lado, apesar de $5|10$, temos que $5 \not R\, 10$, pois $(5,10) \notin A \times B$.

Dados dois conjuntos A e B, o conjunto de todas as relações binárias de A em B é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$.

Se os conjuntos A e B forem finitos e tiverem n e m elementos, respetivamente, então $A \times B$ tem $n \times m$ elementos, pelo que $\mathcal{P}(A \times B)$ tem $2^{n \times m}$ elementos. Assim, **existem $2^{n \times m}$ relações binárias de A em B.**

Os conjuntos $\emptyset$ e $A \times B$ são relações binárias de A em B, designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

definição 5.3

Seja A um conjunto não vazio. Então,

$$\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\} \;\text{ e }\; \omega_A = A^2 = \{(x, y) : x, y \in A\}$$

são relações binárias em A. A id_A chamamos **relação identidade em A** e a ω_A chamamos **relação universal em A**.

definição 5.4

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chamamos **domínio de** R ao conjunto

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists_{b \in B}\ (a, b) \in R\};$$

Chamamos **imagem** ou **contradomínio de** R ao conjunto

$$\mathrm{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists_{a \in A}\ (a, b) \in R\}.$$

exemplo 5.5

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Então,

i. $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$;
ii. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\}$;
iii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\}$.

Duas relações binárias R e S de um conjunto A num conjunto B são iguais quando os conjuntos R e S são iguais. Em particular, $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$. Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que $R = S$ sempre que $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$.

exemplo 5.6

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Seja R a relação de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$ e seja $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$.
Então,
i. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\} = \mathrm{Dom}(S)$;
ii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\} = \mathrm{Im}(S)$;
iii. $(2, 5) \in R$ mas $(2, 5) \notin S$, pelo que $R \neq S$.

De seguida, estudamos alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Como uma relação binária é um conjunto, podemos considerar, em particular, os processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se R e S são relações binárias de A em B, o mesmo acontece com $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, pois cada um destes conjuntos é ainda um subconjunto de $A \times B$.

exemplo 5.7

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e as relações $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ e $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$. Então,

i. $R \cup S = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B;

ii. $R \cap S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B;

iii. $R \setminus S = \{(2, 5)\}$ é uma relação binária de A em B.

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações.

definição 5.8

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chama-se **relação inversa de** R, e representa-se por R^{-1}, a relação de B em A definida por

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

exemplo 5.9

Consideremos, de novo, os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Uma vez que $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ tem-se

$$R^{-1} = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}.$$

proposição 5.10

Sejam A, B conjuntos e R e S relações binárias de A em B. Então,

1 | $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ e $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.

2 | $(R^{-1})^{-1} = R$.

3 | Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

definição 5.11

Sejam A, B, C, D conjuntos, R uma relação binária de A em B e S uma relação binária de C em D. Chama-se **relação composta de S com R**, e representa-se por $S \circ R$, a relação binária de A em D definida por

$$S \circ R = \{(x, y) \in A \times D \mid \exists_{z \in B \cap C} \ \ ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)\}.$$

É de notar que, nas condições da definição anterior, se $B \cap C = \emptyset$, então $S \circ R = \emptyset$.

exemplo 5.12

Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{0,2,3,4\}$ e $D = \{0,1,3,5\}$. Consideremos as relações binárias

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,4)\} \subseteq A \times B$$

e

$$S = \{(0,1),(3,0),(3,3),(3,5),(4,0)\} \subseteq C \times D.$$

Tem-se

$$S \circ R = \{(1,0),(1,3),(1,5),(2,0)\}$$

e

$$R \circ S = \{(0,2),(0,3)\}.$$

Do exemplo anterior, podemos concluir que a composição de relações binárias não é necessariamente comutativa.

proposição 5.13

Sejam R, S e T relações binárias. Então,

1 | $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2 | $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

3 | $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

demonstração

1 | Comecemos por mostrar que $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$.
Dado $x \in \mathrm{Dom}(S \circ R)$, existe y tal que $(x, y) \in S \circ R$. Por definição de relação composta, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in S$ para algum z.
Em particular, $(x, z) \in R$, pelo que $x \in \mathrm{Dom}(R)$.
De forma semelhante prova-se que $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2 | Seja $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$. Então, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in T \circ S$ para algum z.
De $(z, y) \in T \circ S$ segue que $(z, w) \in S$ e $(w, y) \in T$ para algum w.
Ora, como $(x, z) \in R$ e $(z, w) \in S$, temos que $(x, w) \in S \circ R$.
Assim, $(x, w) \in S \circ R$ e $(w, y) \in T$, pelo que $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$. Logo, $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$.
De modo análogo prova-se que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

3 | Para todo o objeto (x, y),

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in (S \circ R)^{-1} & \leftrightarrow & (y,x) \in S \circ R \\ & \leftrightarrow & \exists_z \ \ ((y,z) \in R \wedge (z,x) \in S) \\ & \leftrightarrow & \exists_z \ \ ((z,y) \in R^{-1} \wedge (x,z) \in S^{-1}) \\ & \leftrightarrow & \exists_z \ \ ((x,z) \in S^{-1} \wedge (z,y) \in R^{-1}) \\ & \leftrightarrow & (x,y) \in R^{-1} \circ S^{-1}. \end{array}$$

$\square$

observação 5.14

1 | Dados A, B conjuntos, uma relação binária R de A em B **total** (ou seja, $Dom(R) = A$) e **unívoca** (ou seja, para quaisquer $a \in A, b_1, b_2 \in B$, se $(a, b_1) \in R$ e $(a, b_2) \in R$, então $b_1 = b_2$) determina uma função $\mathcal{F}_R$ de A em B tal que, para todo $a \in A$, $\mathcal{F}_R(a) = b$, onde b é o único elemento de B tal que $(a, b) \in R$.

2 | Reciprocamente, dados A, B conjuntos, uma função $f : A \to B$ determina uma relação binária de A em B, designada por **gráfico de f**, notada por $\mathcal{G}_f$ e dada por $\mathcal{G}_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$, que é total e unívoca.

3 | Estes dois processos são inversos e, para R e f nas condições anteriores, tem-se

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}_R} = R \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\mathcal{G}_f} = f.$$

4 | Na verdade, no âmbito da Teoria de Conjuntos, o conceito de função não é primitivo: o conceito de função surge do conceito de relação como indicado em 1.

Em seguida, referimos certas propriedades que permitem caraterizar algumas classes especiais de relações binárias.

definição 5.15

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Dizemos que

1 | R é **reflexiva** quando $\forall_{a\in A}\,(a,a)\in R$;

2 | R é **simétrica** quando $\forall_{a,b\in A}\,((a,b)\in R \to (b,a)\in R)$;

3 | R é **antissimétrica** quando $\forall_{a,b\in A}\,(((a,b)\in R \wedge (b,a)\in R) \to a=b)$;

4 | R é **transitiva** quando $\forall_{a,b,c\in A}\,(((a,b)\in R \wedge (b,c)\in R) \to (a,c)\in R)$.

Note-se que uma relação binária R em A é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a,b\in A}\,(((a,b)\in R \wedge a\neq b) \to (b,a)\notin R).$$

exemplo 5.16

Seja A um conjunto.

1 | A relação id_A é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica em A.

2 | A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva em A. Esta relação é antissimétrica se e só se A tem no máximo um elemento.

3 | A relação $\emptyset$ é simétrica, transitiva e antissimétrica em A. Esta relação é reflexiva se e só se $A = \emptyset$.

4 | Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$, então:

i. uma vez que $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$, a relação R é reflexiva;

ii. o par $(1,2)$ é elemento de R, mas $(2,1) \notin R$, pelo que R não é simétrica;

iii. como não existem elementos distintos $a, b \in A$ tais que $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, podemos afirmar que a relação R é antissimétrica;

iv. R é transitiva, visto que

$$
\begin{gathered}
((1,1) \in R \wedge (1,1) \in R) \rightarrow (1,1) \in R \\
((1,1) \in R \wedge (1,2) \in R) \rightarrow (1,2) \in R \\
((1,1) \in R \wedge (1,3) \in R) \rightarrow (1,3) \in R \\
((1,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \rightarrow (1,2) \in R \\
((1,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \rightarrow (1,3) \in R \\
((1,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \rightarrow (1,3) \in R \\
((2,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \rightarrow (2,2) \in R \\
((2,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \rightarrow (2,3) \in R \\
((2,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \rightarrow (2,3) \in R \\
((3,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \rightarrow (3,3) \in R \\
((4,4) \in R \wedge (4,4) \in R) \rightarrow (4,4) \in R
\end{gathered}
$$

e o antecedente da implicação $((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$ é falso para as restantes combinações de valores para a, b e c.

proposição 5.17

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então

1 | R é reflexiva se e só se $id_A \subseteq R$;

2 | R é simétrica se e só se $R^{-1} = R$;

3 | R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$;

4 | R é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$.

demonstração | exercício.

definição 5.18

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de equivalência em** A quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

exemplo 5.19

1 | Dado um conjunto A não vazio, as relações id_A e ω_A são relações de equivalência em A.

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Então,
i. R é reflexiva uma vez que

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subseteq R;$$

ii. R é simétrica pois

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} = R;$$

iii. R é transitiva porque

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} \subseteq R.$$

Por i.-iii., R é uma relação de equivalência em A.

3 | Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. A relação binária definida em A por

$$x\, R_f\, y \quad \leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A. De facto,

i. R_f é reflexiva: $\forall_{x \in A}\ f(x) = f(x)$;

ii. R_f é simétrica: $\forall_{x,y \in A}\ (f(x) = f(y) \to f(y) = f(x))$;

iii. R_f é transitiva: $\forall_{x,y,z \in A}\ ((f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \to f(x) = f(z))$.

4 | Seja R a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por

$$a\,R\,b \quad \leftrightarrow \quad a-b \text{ é divisível por 3.}$$

Facilmente verificamos que R é uma relação de equivalência. Com efeito,

i. para todo o $a \in \mathbb{Z}$, $a-a=0$ é divisível por 3, pelo que $a\,R\,a$. Portanto, R é reflexiva;

ii. para todos os $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$, então $a-b=3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, pelo que $b-a=-(a-b)=-(3k)=3(-k)$, com $-k \in \mathbb{Z}$. Logo, $b\,R\,a$ e, assim, R é simétrica;

iii. para todos os $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$, então $a-b=3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $b-c=3k'$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo, $a-c=(a-b)+(b-c)=3(k+k')$, com $k+k' \in \mathbb{Z}$, pelo que $a\,R\,c$. Logo, R é transitiva.

Notemos que, dado $a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 1\,R\,a &\leftrightarrow 1 - a = 3k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\leftrightarrow a = 3k + 1, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\leftrightarrow a \text{ tem resto 1 na divisão inteira por 3.} \end{aligned}$$

De modo análogo se prova que $2\,R\,a$ se e só se a tem resto 2 na divisão inteira por 3 e $0\,R\,a$ se e só se a tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, uma vez que 0, 1, 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e R é uma relação de equivalência, os elementos de $\mathbb{Z}$ podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 0\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 1\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 2\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

definição 5.20

Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $x \in A$. Chama-se **classe de equivalência de** x **módulo** R ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de** x, ao conjunto

$$[x]_R = \{y \in A \mid x \, R \, y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de** A **módulo** R e representamo-lo por A/R, ou seja,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

exemplo 5.21

1 | Consideremos a relação de equivalência R definida no exemplo anterior. Então,

$$\begin{aligned}
[0]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 \, R \, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} \; a = 3k\} \\
[1]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \, R \, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} \; a = 3k + 1\} \\
[2]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 2 \, R \, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}} \; a = 3k + 2\}
\end{aligned}$$

e $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$.

2 | Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência id_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\mathrm{id}_A} = \{y \in A \mid y\,\mathrm{id}_A\,x\} = \{y \in A \mid y = x\} = \{x\}$$

e, portanto,

$$A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}.$$

3 | Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência ω_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\omega_A} = \{y \in A \mid y\,\omega_A\,x\} = A,$$

pelo que

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

4 | Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos a relação de equivalência $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$. Então,

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \quad [3]_R = \{3\}, \quad [4]_R = \{4\}.$$

Assim, $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

Em todos os casos do exemplo anterior, as classes de equivalência são não vazias, são disjuntas duas a duas e a sua união é o conjunto A.

definição 5.22

Sejam A um conjunto e $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$. Diz-se que Π é uma **partição do conjunto** A se:

1 | para todo $X \in \Pi$, $X \neq \emptyset$;

2 | para todos $X, Y \in \Pi$, $(X \neq Y \to X \cap Y = \emptyset)$;

3 | para todo $a \in A$, existe $X \in \Pi$ tal que $a \in X$.

exemplo 5.23

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$\Pi_1 = \{\{1, 2\}, \{\}, \{3, 4, 5\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\},$$
$$\Pi_3 = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}\}, \quad \Pi_4 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}.$$

Nenhum dos conjuntos Π_1, Π_2, Π_3 é uma partição de A. Com efeito,
[Π_1] $\emptyset \in \Pi_1$ e, portanto, o conjunto Π_1 não verifica a condição 1 | da definição anterior.
[Π_2] o conjunto Π_2 não satisfaz a condição 2 |: $X = \{1, 2\} \in \Pi_2$, $Y = \{2, 3\} \in \Pi_2$, $X \neq Y$ e $X \cap Y \neq \emptyset$.
[Π_3] no caso do conjunto Π_3 falha a condição 3 |: $3 \in A$ e não existe $X \in \Pi_3$ tal que $3 \in X$.
No que diz respeito ao conjunto Π_4, é simples verificar que qualquer uma das condições 1 |-3 | da definição anterior é satisfeita e, portanto, Π_4 é uma partição de A.

exemplo 5.24

Consideremos de novo as relações referidas no exemplo 5.20 e os respetivos conjuntos quociente.

1 | O conjunto quociente $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$, onde R é a relação de equivalência definida por $a\,R\,b \ \leftrightarrow\ a - b$ é divisível por 3, é uma partição de $\mathbb{Z}$.

2 | Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$. É claro que A/id_A é uma partição de A.

3 | Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\omega_A = \{A\}$ e $\{A\}$ é uma partição de A.

4 | Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$, então $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Facilmente se verifica que A/R é uma partição de $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Tal como se estabelece no resultado seguinte, a cada relação de equivalência definida num conjunto A está associada uma partição de A.

proposição 5.25

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então, A/R é uma partição de A.

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

proposição 5.26

Sejam A um conjunto, Π uma partição de A e $\mathcal{R}_\Pi$ a relação binária em A definida por

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \text{se e só se} \quad \text{existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

Então, $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A.

exemplo 5.27

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ uma partição de A. Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\Pi = \quad & \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),\\ & (4,4),(6,6),(4,6),(6,4),(5,5)\}.\end{aligned}$$

2 | Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$, onde

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_1 = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_2 = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Então,

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \leftrightarrow \quad x - y \text{ é divisível por } 3.$$

observação 5.28

Sejam A um conjunto, R uma relação binária em A e Π uma partição de A. Então,

1 | A/R é uma partição de A e
$$\mathcal{R}_{A/R} = R.$$

2 | $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A e
$$A/(\mathcal{R}_\Pi) = \Pi.$$

definição 5.29

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de ordem parcial em A** quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, ao par (A, R) dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

exemplo 5.30

São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:

1 | (A, id_A), onde A é um conjunto e $\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

2 | $(\mathbb{N}, \leq)$, onde $\leq$ é a relação "menor ou igual" usual em $\mathbb{N}$ (para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$, logo $\leq$ é reflexiva; para todos $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ e, portanto, $\leq$ é antissimétrica; para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$, pelo que $\leq$ é transitiva).

3 | $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "divide" em $\mathbb{N}$.

4 | $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto qualquer e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

Se não houver ambiguidade, representamos uma ordem parcial num conjunto A por $\leq$ e o respetivo c.p.o. por $(A, \leq)$.

notação

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, escrevemos
$a \leq b$ e lemos "a é menor ou igual a b" ou "a precede b" para representar $(a, b) \in \leq$;

$a \not\leq b$ e lemos "a não é menor ou igual a b" se $(a, b) \notin \leq$;

$a < b$ e lemos "a é menor do que b" ou "a precede propriamente b" se $a \leq b$ e $a \neq b$;

$a << b$ e lemos "b é sucessor de a" ou "a é sucedido por b" ou "b cobre a" ou "a é coberto por b" se $a < b$ e $\neg(\exists_{c \in A}\ (a < c \wedge c < b))$.

definição 5.31

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, dizemos que a, b são **comparáveis** quando $a \leq b$ ou $b \leq a$. Por outro lado, quando $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, dizemos que a e b são **incomparáveis** e escrevemos $a||b$.

Um c.p.o. $(A, \leq)$, em que A é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse**, como se descreve em seguida.

1 | cada elemento $a \in A$ é representado por um ponto do plano:

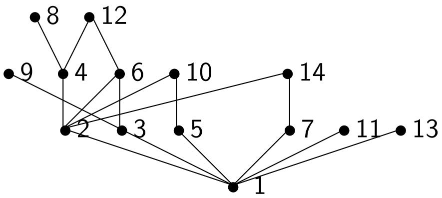
2 | se a e b são dois elementos de A tais que $a \leq b$, representa-se b acima de a; além disso, se $a << b$ unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

exemplo 5.32

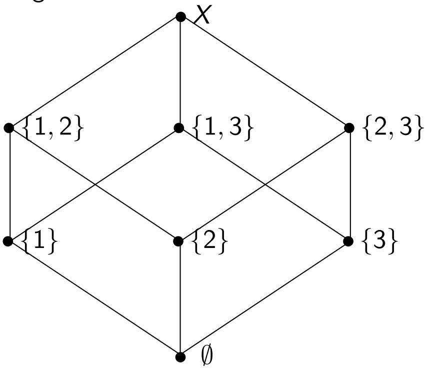
1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ e $|$ a ordem parcial definida por

$$x|y \quad \leftrightarrow \quad \exists_{k \in \mathbb{N}}\ y = kx.$$

O c.p.o. $(A, |)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



2 | Seja $X = \{1,2,3\}$. O c.p.o. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue.



Dados um c.p.o. $(A, \leq)$ e X um suconjunto de A, podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a X.

definição 5.33

Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., X um subconjunto de A e $m \in A$. Dizemos que m é:

1 | um **elemento maximal de** X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ m < x)$;

2 | um **elemento minimal de** X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ x < m)$;

3 | **majorante de** X quando $\forall_{x \in X}\ x \leq m$;

4 | **minorante de** X quando $\forall_{x \in X}\ m \leq x$;

5 | **supremo de** X quando m é majorante de X e $m \leq m'$, para qualquer m' majorante de X;

6 | **ínfimo de** X quando m é minorante de X e $m' \leq m$, para qualquer m' minorante de X;

7 | **máximo de** X quando m é majorante de X e $m \in X$;

8 | **mínimo de** X quando m é minorante de X e $m \in X$.

O conjunto dos majorantes de X e o conjunto dos minorantes de X são representados por $\mathrm{Maj}(X)$ e $\mathrm{Min}(X)$, respetivamente.

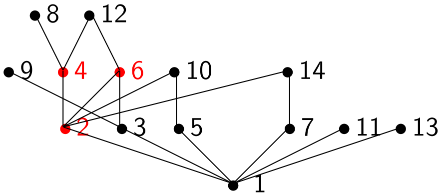
Caso exista, o supremo (resp.: ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto X de A é único e representa-se por $\sup(X)$ (resp.: $\inf(X)$, $\max(X)$, $\min(X)$).

Note-se que, em particular, A tem um máximo se existir $m \in A$ tal que $x \leq m$, para todo $x \in A$; A tem elemento mínimo se existir $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$.

exemplo 5.34

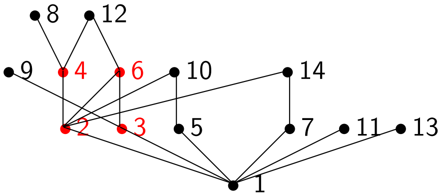
Consideremos, de novo, o c.p.o. $(A, |)$ do exemplo 5.30.
Os elementos maximais de A são o 8, o 9, o 10, o 11, o 12, o 13 e o 14; 1 é o único elemento minimal de A. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(A)= \{1\}, & \mathrm{Maj}(A)= \emptyset, & \inf(A)= 1, \\ \min(A)= 1, & \sup(A) \text{ não existe}, & \max(A) \text{ não existe}. \end{array}$$



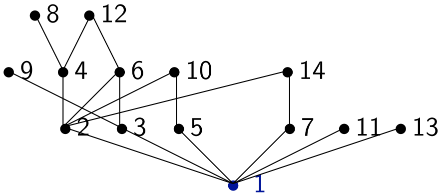
Se $X = \{2, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 é o único elemento minimal de X. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(X) = \{1, 2\}, & \mathrm{Maj}(X) = \{12\}, & \inf(X) = 2, \\ \min(X) = 2, & \sup(X) = 12, & \max(X) \text{ não existe.} \end{array}$$



Se $X = \{2, 3, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 e 3 são os elementos minimais de X. Além disso,

$\text{Min}(X) = \{1\}$,	$\text{Maj}(X) = \{12\}$,	$\inf(X) = 1$,
$\min(X)$ não existe,	$\sup(X) = 12$,	$\max(X)$ não existe.



Se $X = A \setminus \{1\}$, então os elementos maximais de X são: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14; os elementos minimais de X são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Além disso,

$\mathrm{Min}(X) = \{1\}$,	$\mathrm{Maj}(X) = \emptyset$,	$\inf(X) = 1$,
$\min(X)$ não existe,	$\sup(X)$ não existe,	$\max(X)$ não existe.

proposição 5.35

Num c.p.o. $(A, \leq)$, são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$:

1 | $a \leq b$;

2 | $\sup\{a, b\} = b$;

3 | $\inf\{a, b\} = a$.

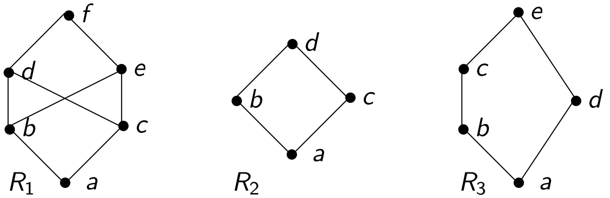
Em seguida, consideramos algumas classes especiais de c.p.o.'s.

definição 5.36

Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se um **reticulado** quando, para quaisquer $x, y \in A$, existem o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$.

exemplo 5.37

Consideremos os c.p.o.'s representados pelos seguintes diagramas:



Os c.p.o.'s R_2 e R_3 são reticulados.
R_1 não é reticulado pois, por exemplo, não existe supremo de $\{b, c\}$.

definição 5.38

Uma ordem parcial $\leq$ num conjunto A diz-se uma **ordem total** ou **ordem linear** quando quaisquer elementos a e b de A são comparáveis. Neste caso, $(A, \leq)$ diz-se uma **cadeia** ou um **conjunto totalmente ordenado**.

Um subconjunto X de A diz-se uma **cadeia em** $(A, \leq)$ ou um **subconjunto totalmente ordenado de** $(A, \leq)$ quando, para quaisquer $x, y \in X$, x e y são comparáveis.

exemplo 5.39

1 | $\{3, 6, 12\}$ e $\{2, 4\}$ são cadeias em $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$, mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois 4 e 10 são incomparáveis.

2 | $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ são cadeias.

observação 5.40

Toda a cadeia é um reticulado, mas o recíproco não se verifica.