Cap. 3– Séries

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

dezembro de 2015

3.1– Conceitos gerais

Recordar as sucessões
- Definição
- Sucessão monótona e sucessão limitada
- Limite de uma sucessão
- Propriedades

Séries de números reais
- Motivação
- Definição
- Consequências da definição
- Condição necessária de convergência

Sucessão de números reais

- [Sucessão de números reais] Uma sucessão de números reais é uma correspondência definida de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

  - A imagem de $n \in \mathbb{N}$ por u representa-se por u_n e designa-se termo de ordem n ou termo geral da sucessão.
  - Os números reais $u_1, u_2, u_3, \ldots$ designam-se, respetivamente, primeiro termo da sucessão, segundo termo, terceiro termo, etc.

Exemplo

1. Seja u a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

   O primeiro termo é $u_1 = 1$, o segundo é $u_2 = \dfrac{1}{2}$, o terceiro é $u_3 = \dfrac{1}{3}$, ...

2. [Progressão geométrica] Uma progressão geométrica de razão r e primeiro termo $a \neq 0$ é a sucessão de números reais definida por

$$u_n = a\,r^{n-1}, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}$$

   O primeiro termo é $u_1 = a$, o segundo é $u_2 = a\,r$, o terceiro é $u_3 = a\,r^2$, ...

- [Sucessão monótona e sucessão limitada] Seja u uma sucessão de números reais. Diz-se que u é
  - crescente quando
  $$u_n \leq u_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$
  - decrescente quando
  $$u_{n+1} \leq u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$
  - monótona se for decrescente ou crescente;
  - limitada quando existir um número positivo M tal que
  $$|u_n| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo

1. A sucessão definida por $u_n = 2n$ é crescente e não é limitada.
2. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$ é decrescente e é limitada.
3. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ é crescente e é limitada.
4. A sucessão definida por $u_n = (-1)^n$ não é crescente nem decrescente e é limitada.

- [Limite de uma sucessão] Diz-se que o limite da sucessão de números reais u é o número real a quando para qualquer $\delta > 0$ existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem à vizinhança de raio δ de a. Escreve-se
$$\lim_n u_n = a \quad \text{ou} \qquad u_n \longrightarrow a.$$
  - Neste caso, diz-se que a sucessão u é uma sucessão convergente.
  - Uma sucessão que não é convergente diz-se divergente.

Exemplo

1. A sucessão definida por $u_n = \dfrac{1}{n}$ é convergente para zero.
2. A sucessão definida por $u_n = \sqrt{n}$ é divergente.
3. A sucessão definida por $u_n = n$ é divergente.

- [Propriedades das sucessões convergentes]

  1. O limite de uma sucessão quando existe é único.
  2. Qualquer sucessão constante é convergente: tem por limite a própria constante, isto é
  $$\lim_n k = k, \qquad \forall k \in \mathbb{R}.$$
  3. Qualquer a sucessão monótona e limitada é convergente.

Séries de números reais:: motivação

- [Paradoxo de Zenão]

  No séc. V a.c., o filósofo grego Zenão propôs um problema hoje designado Paradoxo de Zenão ou Paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

  Aquiles, o herói mais veloz da mitologia grega, aposta uma corrida contra uma lenta tartaruga. Como a velocidade de Aquiles é maior que a da tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando a corrida dez metros à sua frente.
  Em pouco tempo, Aquiles atinge a marca dos 10m, mas neste intervalo de tempo a tartaruga caminhou 1m. Em seguida, Aquiles percorre esse metro adicional, mas a tartaruga não está mais lá, pois percorreu mais 1/10 de metro. Quando Aquiles cobre este 1/10 de metro adicional, a tartaruga está 1/100 de metro à frente. E depois, 1/1000 à frente, e depois 1/10.000, etc.

  Pode Aquiles vencer a tartaruga?

- O espaço percorrido pela tartaruga é
$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^n}$$

- O espaço percorrido por Aquiles é
$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} = 11 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^n}$$

Série de números reais

- A partir de uma sucessão u de números reais, é possível formar uma nova sucessão s do seguinte modo:

$$s_1 = u_1 = \sum_{k=1}^{1} u_k$$
$$s_2 = u_1 + u_2 = \sum_{k=1}^{2} u_k$$
$$\vdots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$
$$\vdots$$

- A nova sucessão, s, designa-se sucessão das somas parciais de u.
- O termo geral da sucessão das somas parciais, s, é

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

- [Série numérica] Á sucessão das somas parciais, s, chama-se série numérica e representa-se por

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Observação

1. A série de números reais s representa-se por uma qualquer das expressões

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \qquad \sum_{n\geq 1} u_n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n, \qquad \sum_{n} u_n.$$

2. A sucessão u diz-se a sucessão geradora da série e s diz-se a correspondente sucessão das somas parciais.
3. Frequentemente, por conveniência, consideram-se séries cuja sucessão geradora tem domínio $\mathbb{N}_0$ ou domínio $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, sendo $n_0 \in \mathbb{N}$. Neste caso representar-se-à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 0} u_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq n_0} u_n.$$

Exemplo

1. Relativamente à série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$:
   - termo geral da sucessão geradora $u_n = \dfrac{1}{n}$;
   - sucessão das somas parciais

$$s_1 = u_1 = 1;$$
$$s_2 = u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2};$$
$$\vdots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

- [Série convergente] Diz-se que a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente quando a correspondente sucessão das somas parciais é convergente, ou seja, quando

$$\exists S \in \mathbb{R} \, : \, S = \lim_{n} s_n$$

  - Escreve-se
$$S = \sum_{n\geq 1} u_n$$
    e diz-se que S é a soma da série $\sum_{n\geq 1} u_n$.
  - Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ não é convergente, diz-se que ela é divergente.
  - Duas séries dizem-se da mesma natureza se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.

Exemplo

1. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

- O termo geral da sucessão geradora é $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- O termo geral da sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- Tem-se

$$s_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ parcelas}} = n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$$

- Logo a série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

2. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}}$ é convergente.

- O termo geral da sucessão geradora é $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
- O termo geral da sucessão das somas parciais é

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

- Tem-se soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

$$s_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \longrightarrow 2.$$

- Logo a série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge e tem por soma 2.

Das definições anteriores extraem-se as seguintes consequências

[Consequência 1] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ tem por soma S e $\sum_{n\geq 1} v_n$ tem por soma T então

- $\sum_{n\geq 1} (u_n + v_n)$ converge e tem por soma $S + T$;
- $\sum_{n\geq 1} \alpha\, u_n$ converge e tem por soma $\alpha\, S$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

[Consequência 2] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge então, dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a série $\sum_{n\geq 1} \alpha\, u_n$ também diverge.

[Consequência 3] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge e a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge então a série $\sum_{n\geq 1} (u_n + v_n)$ diverge.

[Consequência 4] Se as sucessões u e v diferem, quando muito, num número finito de termos então têm a mesma natureza.

Exemplo

1. Averiguar a natureza da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{6^{n-1}}.$$

- Note-se que

$$\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{6^{n-1}} = \frac{3^{n-1}}{6^{n-1}} - \frac{2^{n-1}}{6^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Observação

1. Se as séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ forem divergentes nada se pode concluir quanto à convergência da série

$$\sum_{n\geq 1}(u_n+v_n).$$

- As séries

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n\geq 1}\frac{-1}{n+1} \quad \text{divergem} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \text{converge.}$$

- As séries

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+2} \quad \text{divergem} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right) \text{diverge.}$$

Condição necessária de convergência

- [Condição necessária de convergência] Se a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então

$$\lim_n u_n = 0.$$

  - [Condição suficiente de divergência] Se a sucessão u não tem limite ou se $\lim_n u_n = \ell$, com $\ell \neq 0$, então a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

Exemplo

1. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$ é divergente.

   Basta notar que

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

2. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente no entanto $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.