0. Indução e recursão nos naturais

0.1 Prove, de duas formas diferentes, que, para todo o número natural $n \geq 2$, $2n \leq n^2$.

0.2 Prove por indução que, para todo o número natural $n > 4$, $n^2 < 2^n$. Note como é útil provar simultaneamente $2n + 1 < n^2$.

0.3 Para $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: $2^n < n!$.

a) Mostre que: para $k \in \mathbb{N}$ e $k > 3$, se $P(k)$ é verdadeira, $P(k+1)$ também é verdadeira.

b) Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira.

0.4 Prove que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $1 + ... + n = n(n + 1)/2$.

0.5 Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$; **b)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (2i + 1) = (n + 1)^2$;

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$; **d)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

0.6 Seja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a função definida recursivamente por $f(0) = 1$ e $f(n+1) = 2f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Calcule $f(1)$ e $f(2)$.

b) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f(n) = 2^n$.

0.7 Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a função definida por $s(1) = 2$ e $s(n + 1) = \frac{2}{s(n)}$.

a) Determine $s(1), s(2)$ e $s(3)$.

b) Determine o contradomínio de s. Prove a sua afirmação por indução.

0.8 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 1$ e seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função definida recursivamente por $f(1) = a$ e $f(n + 1) = f(n) + ab^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

a) Verifique que $f(n) = \dfrac{a(1 - b^n)}{1 - b}$ para $n \in \{1, 2, 3\}$.

b) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \dfrac{a(1 - b^n)}{1 - b}$.

0.9 Seja A um conjunto finito.

a) Prove que, se A tem n subconjuntos e $a \notin A$, então $A \cup \{a\}$ tem $2n$ subconjuntos.

b) Prove que: $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

c) Qual é o número de subconjuntos de A^3, quando A é um conjunto com 3 elementos?

1. Indução e recursão estruturais

1.1 Seja S o subconjunto de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definido indutivamente pelas 3 regras apresentadas de seguida: (1) $1 \in S$; (2) $2 \in S$; (3) $q \in S \;\; \Rightarrow \;\; \frac{1}{q} \in S$.

a) Dê exemplos de elementos de S.

b) Mostre que o conjunto $\{\frac{1}{2}, 2\}$ é fechado para a operação $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tal que $f(q) = \frac{1}{q}$, para qualquer $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

c) Determine o conjunto S.

1.2 Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e seja $f : A \times A \to A$ a operação em A definida pela tabela que se segue.

f	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	b	c
c	a	c	b	b
d	a	c	b	a

a) Calcule os conjuntos indutivos, sobre A, de base $\{b\}$ e conjunto de operações $\{f\}$.

b) Prove que c é um dos elementos do conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$.

c) Indique qual é o conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$.

1.3 Apresente definições indutivas de cada um dos conjuntos que se seguem, explicitando a respetiva base e respetivo conjunto de operações.

a) Conjunto dos naturais múltiplos de 5.

b) Conjunto dos números inteiros.

c) Conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{0, 1\}$ cujo comprimento é ímpar.

d) Conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ que têm um número par de ocorrências do símbolo a.

1.4 Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja G o subconjunto de A^* dado pela seguinte definição indutiva determinista:

(1) $1 \in G$;
(2) se $x \in G$ então $2x \in G$, para todo $x \in A^*$;
(3) se $x, y \in G$ então $3xy \in G$, para todo $x, y \in A^*$.

Considere ainda a função $S : G \longrightarrow \mathbb{N}$ definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

- $S(1) = 1$;
- para todo $x \in G$, $S(2x) = 2 + S(x)$;
- para todo $x, y \in G$, $S(3xy) = 3 + S(x) + S(y)$.

a) Para cada letra $a \in A$, indique uma palavra $u \in G$ cuja primeira letra seja a e apresente uma sequência de formação de u.

b) Indique uma sequência de formação do elemento $v = 3213211$ de G.

c) Defina por recursão estrutural a função $C : G \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in G$, $C(x)$ é o comprimento da palavra x.

d) Calcule $S(3211)$ e $C(3211)$.

e) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para G.

f) Mostre que, para todo $x \in G$, **i.** $S(x)$ é ímpar; **ii.** $C(x) \leq S(x)$.

1.5 Seja V o conjunto numerável formado pelos símbolos $v_0, v_1, v_2, ...$ (designados por variáveis) e seja A o alfabeto $V \cup \{c, f, g, (,), ,\}$. Considere que E é a linguagem em A definida indutivamente do seguinte modo:

(1) $c \in E$;
(2) $v_n \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$;
(3) se $t \in E$, então $f(t) \in E$, para todo $t \in A^*$;
(4) se $t_1 \in E$ e $t_2 \in E$, então $g(t_1, t_2) \in E$, para todo $t_1, t_2 \in A^*$.

a) Dê exemplos de palavras sobre A que pertençam à linguagem E e de palavras sobre A que não pertençam a E.

b) Investigue se a linguagem E é fechada para cada uma das operações que se seguem.

i) $\begin{array}{rccc} s_1: & A^* \times A^* & \longrightarrow & A^* \\ & (t_1, t_2) & \mapsto & f(t_1, t_2) \end{array}$ **ii)** $\begin{array}{rccc} s_2: & A^* & \longrightarrow & A^* \\ & t & \mapsto & g(t, c) \end{array}$

c) Para cada um das seguintes palavras pertencentes a E, indique 2 sequências de formação cujos comprimentos sejam diferentes.

i) c **ii)** $f(v_2)$ **iii)** $g\big(g(v_0, c), c\big)$ **iv)** $f\Big(g\big(f(v_1), f(v_1)\big)\Big)$

d) Defina funções $n_a, n_g : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$, por recursão estrutural, que a cada palavra $e \in E$ façam corresponder, o número de ocorrências de *átomos* (i.e. variáveis ou a letra c) em e e o número de ocorrências da letra g em e, respetivamente,.

e) Enuncie o teorema de indução estrutural para a linguagem E.

f) Mostre que, para todo $e \in E$, $n_g(e) = n_a(e) - 1$.

1.6 Seja $A = \{0, 1\}$ e seja G o subconjunto de A^* dado pela seguinte definição indutiva determinista:

1. $1 \in G$;
2. se $x \in G$, então $x0 \in G$ e $x1 \in G$, para todo $x \in A^*$;

Considere ainda a função $i : G \longrightarrow \mathbb{N}$ definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

- $i(1) = 1$;
- para todo o $x \in G$, $i(x0) = 2i(x)$;
- para todo o $x \in G$, $i(x1) = 2i(x) + 1$.

a) Indique os elementos de G que admitem sequências de formação de comprimento inferior a 3.

b) Defina por recursão estrutural a função $h : G \longrightarrow G$ tal que, para cada $x \in G$, $h(x) = 1x$.

c) Determine $i(11)$ e $i(101)$.

d) Enuncie o teorema de indução estrutural para G.

e) Mostre que, para todo o $x \in G$, $i\big(h(x)\big) = 2^n + i(x)$, em que n é o comprimento da palavra x.

2. Sintaxe do Cálculo Proposicional

2.1 Represente as seguintes frases através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar *frases atómicas*:

a) Se o Sr. João é feliz, a sua mulher é infeliz e se o Sr. João é infeliz, a sua mulher também o é.

b) Vou de comboio e perco o avião ou vou de camioneta e não perco o avião.

c) Se ganho sempre que jogo bem e não ganhei, então não joguei bem.

d) Não se pode ter sol na eira e chuva no nabal.

e) Sou preso por ter cão, mas também sou preso por o não ter.

f) Uma condição necessária para aprovação a Lógica por avaliação periódica é ter pelo menos 7 valores no primeiro teste.

g) Uma condição suficiente para aprovação a Lógica é ter 14 valores no primeiro teste e 7 valores no segundo teste.

2.2 Encontre exemplos de *frases verdadeiras* que possam ser representadas através das seguintes fórmulas:

a) $(p_1 \to ((\neg p_2) \lor p_3))$. **b)** $((p_4 \land (\neg p_0)) \lor p_6)$.

c) $(p_{13} \leftrightarrow (\neg p_8))$. **d)** $((p_{98} \land (p_{98} \to p_{99})) \to p_{99})$.

2.3 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

a) $(\neg\, (p_1 \lor p_2))$. **b)** $((p_0 \land \neg p_0) \to\!\perp)$.

c) $((\neg p_5) \to (\neg p_6))$. **d)** $(\perp)$.

e) $((p_3 \land p_1) \lor ($. **f)** $(((p_9 \to ((p_3 \lor (\neg p_8)) \land p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \to (p_7 \lor \perp)))$.

2.4 Para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

i) p_{2015}. **ii)** $\neg \perp \lor \perp$. **iii)** $p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1)$.

a) construa sequências de formação;

b) indique o número mínimo de elementos numa sua sequência de formação e diga quantas destas sequências de formação de comprimento mínimo existem.

2.5 Para cada fórmula φ do exercício anterior, calcule $\varphi[p_2/p_0]$, $\varphi[p_0 \land p_1/p_1]$ e $\varphi[p_{2016}/p_{2015}]$.

2.6 Defina por recursão estrutural as seguintes funções

a) $p : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi)$ = número de ocorrências de parêntesis em φ.

b) $v : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi)$ = número de ocorrências de vars. proposicionais em φ.

c) $c : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{P}(BIN)$ tal que $c(\varphi) = \{\square \in BIN : \square \text{ ocorre em } \varphi\}$, onde $BIN = \{\land, \lor, \to, \leftrightarrow\}$.

d) $n : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}$ tal que $n(\varphi)$ = o número de nodos na árvore sintática de φ.

e) $\_[\perp /p_7] : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi[\perp /p_7]$ = resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por $\perp$.

2.7 Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\varphi) \geq \#var(\varphi)$. **b)** $p(\varphi) \geq \#c(\varphi)$.

c) $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp/p_7])$. **d)** $c(\varphi) = c(\varphi[\perp/p_7])$.

e) se $c(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$. **f)** se $p_7 \notin var(\varphi)$ então $\varphi[\perp/p_7] = \varphi$.

2.8 Para cada fórmula φ do exercício 2.4, indique o conjunto das suas subfórmulas.

2.9 Considere a função n do exercício 2.6.

a) Dê exemplo de fórmulas φ e ψ, com 3 subfórmulas, tais que $n(\varphi) = 3$ e $n(\psi) > 3$

b) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $n(\varphi) \geq \#subf(\varphi)$.

2.10 Mostre que:

a) se S é uma sequência de formação de ψ e φ é uma subfórmula de ψ, então φ é um dos elementos de S;

b) toda a fórmula ψ admite uma sequência de formação que contém apenas subfórmulas de ψ;

c) uma fórmula ψ tem n subfórmulas se e só se as sequências de formação de ψ mais curtas têm n elementos.

2.11 Considere que $\mathcal{F}^{CP}_X$ denota o subconjunto de $\mathcal{F}^{CP}$ cujos conetivos pertencem ao conjunto X.

a) Dê uma definição indutiva determinista do conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$.

b) Enuncie o Teorema da Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$.

c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}} \to \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}})$ tal que $f(\varphi)$ é o conjunto das subfórmulas de φ.

d) Prove que: para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$, se $\vee$ não ocorre em φ, então $\#f(\varphi) - 1$ é o número de ocorrências de $\neg$ em φ.

2.12 Seja Γ o subconjunto de $\mathcal{F}^{CP}$dado pela seguinte definição indutiva determinista:

(i) Para cada variável proposicional p, $p \in \Gamma$.

(ii) Para cada variável proposicional p, $\neg p \in \Gamma$.

(iii) Se $\varphi, \psi \in \Gamma$ então $\varphi \vee \psi \in \Gamma$.

a) Indique, justificando, fórmulas em Γ.

b) Enuncie o Teorema da Indução Estrutural para Γ.

c) Prove que: para todo $\varphi \in \Gamma$, $\perp$ não ocorre em φ.

d) Defina por recursão estrutural a função $f : \Gamma \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(\varphi)$ é o número de ocorrências de $\neg$ em φ.

e) Diga se $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$ e se $\mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}} \subseteq \Gamma$.