

Tópicos de Matemática Discreta

folha 10

4. Funções

4.1. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

- (a) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.
- (b) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A ?

4.2. Considere as funções:

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(x) = 2x - 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Determine:

- (a) $g(\{-1, 0, 1\})$;
- (b) $g([-\infty, 0])$;
- (c) $g(\mathbb{R})$;
- (d) $g^{\leftarrow}(\{0\})$;
- (e) $g^{\leftarrow}([-\infty, 0])$;
- (f) $f(\{4, 6, 9\})$;
- (g) $f(\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ x = 3y\})$;
- (h) $f^{\leftarrow}(\{2\})$;
- (i) $f^{\leftarrow}(\{3, 4, 5\})$.

4.3. Sejam f, g e h as funções de \mathbb{N}_0 para \mathbb{N}_0 definidas por:

$$f(n) = n + 1; \quad g(n) = 2n; \quad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Determine:

- (a) $f \circ f$;
- (b) $f \circ g$;
- (c) $g \circ f$;
- (d) $g \circ h$;
- (e) $f \circ g \circ h$;
- (f) $h \circ f$;
- (g) $h \circ g$;
- (h) $h \circ f \circ g$.

4.4. Dê exemplos de:

- (a) duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.
- (b) uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

4.5. Sejam A, B conjuntos e $f : A \rightarrow B$ uma função. Mostre que $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

4.6. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja: (a) não injetiva; (b) injetiva; (c) sobrejetiva; (d) não sobrejetiva.

4.7. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_1(x) = 2x; \quad f_2 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x};$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, \quad f_3(x) = x^2; \quad f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_4(x) = |x| + 2.$$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 11

4.8. Considere as seguintes funções

$$\begin{array}{lll} f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto x^3, & x \longmapsto 2x - 3, & x \longmapsto \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Verifique que f , g e h são funções bijetivas e determine as respetivas funções inversas.

4.9. Sejam A e B conjuntos não vazios. Considere a função $f : A \times B \rightarrow B \times A$ definida por $f(a, b) = (b, a)$, para todo $(a, b) \in A \times B$.

(a) Mostre que f é bijetiva.

(b) Determine f^{-1} .

4.10. Considere as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| + 2$, para todo o real x , e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x + 2 & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

(a) Determine $f(\{-2, 2\})$ e $f([-2, 4])$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{-2, 0, 1, 2\})$.

(c) Diga se $g \circ f$ é injetiva e se é sobrejetiva.

4.11. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \{3, 10\}$ definida da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in]-\infty, 4[\cup]20, 30] \\ 10 & \text{se } x \in [4, 20] \cup]30, +\infty[\end{cases}.$$

e a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(n) = 2 - \frac{1}{n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Determine $g(\{1, 2, 3, 4\})$ e $g^{\leftarrow}(\{1, 5\})$.

(b) Determine $f(\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16 = 0\})$ e $f^{\leftarrow}(\{10\})$.

(c) Mostre que $f \circ g$ é uma função constante.

(d) Indique se alguma das funções f ou g é injetiva.