Programação Linear - modelos

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

16 de setembro de 2017

Conteúdo

- Dieta
- Lotes de produção
- Transportes
- Corte de stock
- Gestão de pessoal
- Investimento
- Transformações básicas de:
  - uma inequação numa equação
  - uma equação em duas inequações
  - um problema de minimização num problema de maximização
  - variáveis sem restrição de sinal
  - variáveis com limite inferior
  - restrições do tipo módulo

Problema da dieta

Um avicultor pretende determinar a quantidade que deve utilizar de cada alimento de modo a satisfazer as necessidades nutricionais das suas aves. Os nutrientes, o custo de cada alimento e as necessidades mínimas diárias são os apresentados no seguinte quadro.

	alimentos			mínimo
nutriente	milho	trigo	ração	diário
proteínas	4	8	4	10
hidratos de carbono	2	4	4	6
vitaminas	3	2	4	4
custo (U.M.)	0.10	0.06	0.04	

Objectivo: minimizar o custo de alimentação diário das galinhas.

Problema da dieta: elementos do modelo

nutriente	milho	trigo	ração	mínimo diário
	alimentos			
proteínas	4	8	4	10
hidratos de carbono	2	4	4	6
vitaminas	3	2	4	4
custo (U.M.)	0.10	0.06	0.04	

Variáveis de decisão:

- x_1 : quantidade de milho diária.
- x_2 : quantidade de trigo diária.
- x_3 : quantidade de ração.

Dados:

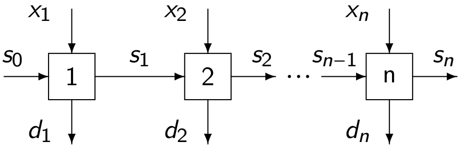
- b_i : quantidade mínima diária do nutriente i
- c_j : custo do alimento j
- a_{ij} : quantidade de nutriente i existente na unidade de peso do alimento j

Problema da dieta: modelo

$$
\begin{array}{rrrrl}
\min z = & 0.10x_1 & +0.06x_2 & +0.04x_3 & \\
& 4x_1 & +8x_2 & +4x_3 & \geq 10 \\
& 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & \geq 6 \\
& 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \geq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

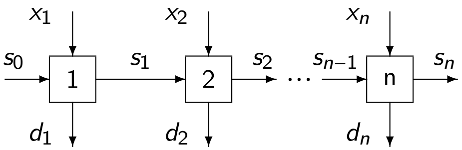
Problema de Lotes de Produção *(lotsizing)*

- Determinar a dimensão dos lotes a fabricar em cada período, dentro de um horizonte de planeamento.
- Em cada período, se o número de unidades disponíveis (*i.e.*, as unidades produzidas no período mais as existentes em stock) for superior à procura nesse período, as unidades remanescentes podem ser armazenadas em stock para venda em períodos subsequentes, segundo o seguinte esquema:



- Objectivo: minimização da soma dos custos de produção e dos custos de armazenagem, satisfazendo a procura em cada período.

Problema de Lotes de Produção: elementos do modelo



Variáveis de decisão:

- x_j : número de unidades produzidas no período j,
- s_j : stock existente após o período j.

Dados:

- d_j : procura existente no período j
- c_j : custo unitário de produção dos artigos no período j
- h_j : custo unitário de posse de inventário no período j
- x_j^{max} : número máximo de unidades produzidas no período j
- s_j^{max} : nível máximo de stock no período j

Modelo de Programação Linear

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} c_j x_j + h_j s_j \\
\text{suj.} \quad & x_j + s_{j-1} - s_j = d_j \ , \ \forall j \\
& x_j \geq 0 \ , \ \forall j \\
& x_j \leq x_j^{max} \ , \ \forall j \\
& s_j \leq s_j^{max} \ , \ \forall j
\end{aligned}
$$

Problema de Lotes de Produção: Exemplo I

- Horizonte de planeamento (T): 4 períodos
- Procura em cada período de 2, 3, 4 e 2, respectivamente.
- Capacidade máxima de produção, x_j^{max} : 4 unidades em cada período.
- Nível máximo de stock, s_{max} : 2 unidades.
- Custos unitários de armazenagem, h_j : 1 U.M./ artigo x período.
- Custos de produção: custo variável proporcional ao número de artigos, p_j.
- Valores dos coeficientes de custo de produção:

j	1	2	3	4
p_j	12	10	14	10

Problema de Lotes de Produção: Exemplo II (com custos fixos de preparação)

Para construir um modelo para o seguinte caso, é necessário considerar variáveis binárias para incluir o custo de preparação só nos casos devidos.

- Custos de produção incluem um custo de preparação das máquinas, k_j, e um custo variável proporcional ao número de artigos, p_j :

$$c_j(x_j) = \begin{cases} k_j + p_j x_j & , \text{se } x_j > 0 \\ 0 & , \text{se } x_j = 0, \end{cases}$$

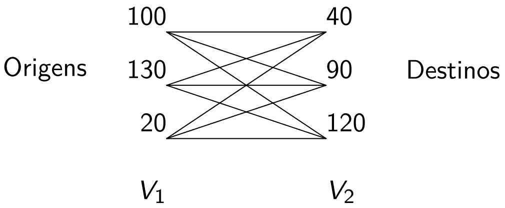
  para qualquer período $j = 1, 2, \ldots, T$.

- Valores dos coeficientes de custo de produção:

j	1	2	3	4
p_j	12	10	14	10
k_j	2	2	1	1

Problema de Transportes

- Conjunto de pontos de produção
- Conjunto de pontos de consumo
- Um único tipo de entidades a transportar



Objectivo: minimizar os custos de transporte entre os pontos de produção (origens) e os pontos de consumo (destinos).

Problema de Transportes: elementos do modelo

Variáveis de decisão:

- x_{ij} : quantidade a transportar da origem i para o destino $j, i \in V_1, j \in V_2$.

Dados:

- V_1 : conjunto de pontos de produção
- V_2 : conjunto de pontos de consumo
- a_i : quantidade oferecida no ponto de produção $i, i \in V_1$
- b_j : quantidade requerida no ponto de consumo $j, j \in V_2$
- c_{ij} : custo unitário de transporte entre a origem i e o destino $j, i \in V_1, j \in V_2$.

Problema de Transportes: modelo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\
\textit{suj.} \quad & \sum_{j \in V_2} x_{ij} = a_i \ , \ \forall i \in V_1 \\
& \sum_{i \in V_1} x_{ij} = b_j \ , \ \forall j \in V_2 \\
& x_{ij} \geq 0, i \in V_1, j \in V_2
\end{aligned}
$$

Problema de Transportes: exemplo

Matriz de custos unitários de transporte:

		destinos 1	2	3
origens	1	7	5	9
	2	2	1	5
	3	6	3	8

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
origem 1	1	1	1							= 100
origem 2				1	1	1				= 130
origem 3							1	1	1	= 20
destino 1	1			1			1			= 40
destino 2		1			1			1		= 90
destino 3			1			1			1	= 120
min	7	5	9	2	1	5	6	3	8	

Problema de transportes: estrutura em rede

- As restrições deste problema têm uma estrutura especial, em rede, correspondendo cada variável de decisão a um arco.

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
origem 1	-1	-1	-1							= -100
origem 2				-1	-1	-1				= -130
origem 3							-1	-1	-1	= -20
destino 1	1			1			1			= 40
destino 2		1			1			1		= 90
destino 3			1			1			1	= 120
min	7	5	9	2	1	5	6	3	8	

- Uma coluna apenas com duas entradas diferentes de zero, com valores -1 e +1, representa um arco.
- A origem e o destino do arco correspondem aos vértices que têm os valores -1 e +1, respectivamente.

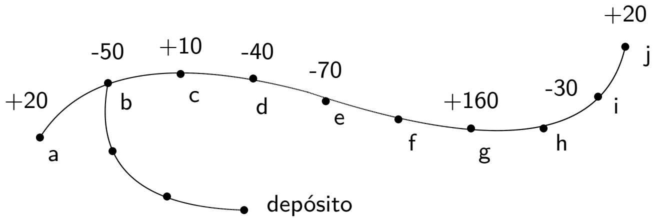
Problema de transportes: exemplo

Transporte de terras:

- As obras de terraplanagem representam uma parte significativa dos custos de construção de vias de comunicação.
- Grandes volumes de terra devem ser deslocados de zonas de empréstimo para zonas de depósito para obter os nivelamentos desejados.
- Os custos de transporte de terra são aproximadamente proporcionais à distância percorrida.

Transporte de terras (exemplo)

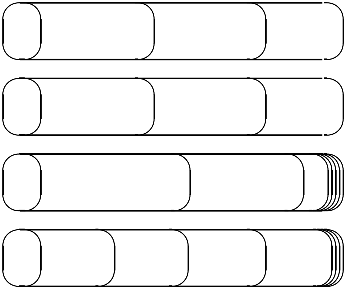
- Os pontos referidos por $a, b, \ldots, j$ encontram-se distanciados entre si de 10 Km.
- As quantidades associadas a estes pontos indicam os volumes de terra a deslocar (em milhares de m^3), sendo as zonas de empréstimo e de depósito assinaladas pelos sinais $+$ e $-$, respectivamente.
- Em caso de necessidade, pode ainda recorrer-se a uma zona de depósito, situada fora do traçado da via, a uma distância de 30 Km do ponto b.



Objectivo: minimizar custos de terraplanagem.

Problema de Corte (*cutting stock*)

Determinar o modo como um stock de matérias primas deve ser cortado em partes menores de maneira a satisfazer pedidos colocados por clientes.



Objectivo: determinar os padrões de corte de modo a minimizar o número de rolos utilizados.

Problema de Corte: definição de padrões de corte

Dados:

- W : largura dos rolos em stock (em quantidade ilimitada)
- m : número de clientes
- w_i : largura dos rolos pedidos pelo cliente i $\quad (0 < w_i \leq W), i = 1, \ldots, m$
- b_i : número de dos rolos pedidos pelo cliente $i, i = 1, \ldots, m$

Padrão de corte: possível arranjo de pedidos na largura do rolo:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \leq W$$
$$a_{ij} \geq 0 \;\text{ e inteiro },\; \forall j \in J.$$

sendo:

- a_{ij} : número de rolos de largura w_i obtidos a partir do padrão de corte j,
- J : o conjunto de padrões de corte possíveis.

Problema de Corte: modelo

Variáveis de decisão:

- x_j : número de rolos a cortar segundo o padrão de corte j.

Cada coluna $A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj})^T$ define um padrão de corte, com elementos a_{ij} conforme foram definidos acima.
A formulação de programação matemática é a seguinte:

$$\begin{aligned} min\ z &= \sum_{j \in J} x_j \\ suj.\ a & \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m \\ & \quad x_j \geq 0,\ \ \forall j \in J \end{aligned}$$

Pode haver um número exponencial de padrões de corte, mas há técnicas especializadas para ultrapassar essa dificuldade.

Para o padrão de corte j, a perda T_j associada é:

$$T_j = W - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i .$$

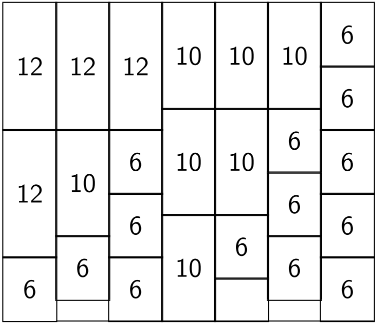
A formulação de programação matemática de minimização de perdas é a seguinte:

$$\begin{aligned} min\ z &= \sum_{j \in J} T_j x_j \\ suj.\ a & \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m \\ & \quad x_j \geq 0,\ \ \forall j \in J \end{aligned}$$

Pode haver diferenças na solução óptima dos 2 modelos.

Problema de Corte: exemplo (pequeno)

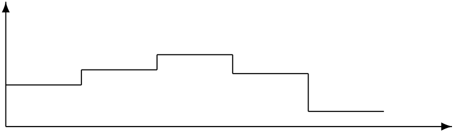
Rolos de largura 30, e 3 pedidos de larguras de 12, 10 e 6, nas quantidades de 200, 300 e 100, respectivamente.



larguras	padrões de corte							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
12	2	1	1					$\geq$ 200
10		1		3	2	1		$\geq$ 300
6	1	1	3		1	3	5	$\geq$ 100
min	1	1	1	1	1	1	1	

Problema de Gestão de Pessoal

- horizonte de planeamento com um conjunto de períodos.
- necessidades de pessoal que variam ao longo do tempo.
- contratos são permitidos por durações pré-determinadas.
- custo de contratação, treino e despedimento de pessoal com contratos a termo certo.



Objectivo

Estabelecimento de uma política de contratações.

Problema de Gestão de Pessoal: elementos do modelo

Discretizar o tempo: Cada variável de decisão (coluna) corresponde a uma acção de contratação permitida que cobre um conjunto de períodos.

x_{ij} : Número de trabalhadores contratados desde o início do período i até ao fim do período j.

c_{ij} : custo de contratação, treino e despedimento de um trabalhador com contrato desde o início do período i até ao fim do período j, e ordenados pagos durante esse período.

	x_{15}	x_{13}	x_{24}	x_{35}	x_{12}	x_{23}	x_{34}	x_{22}		
1	1	1			1				$\geq$	6
2	1	1	1		1	1		1		10
3	1	1	1	1		1	1			14
4	1		1	1			1			9
5	1			1						8

Problema de Gestão de Pessoal: modelo

c_{ij} : ordenado é 1 U.M./mês e custo de contratação, treino e despedimento é 1 U.M.

	x_{15}	x_{13}	x_{24}	x_{35}	x_{12}	x_{23}	x_{34}	x_{22}		
1	1	1			1				$\geq$	6
2	1	1	1		1	1		1		10
3	1	1	1	1		1	1			14
4	1		1	1			1			9
5	1			1						8
c_{ij}	6	4	4	4	3	3	3	2		

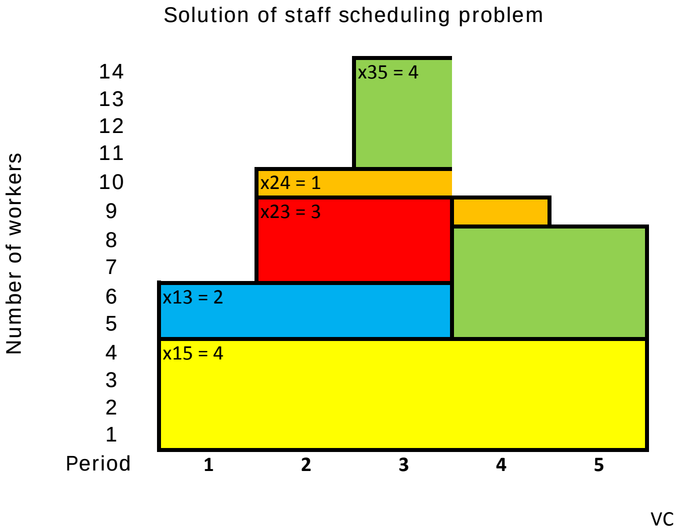
x^*	4	2	1	4	0	3	0	0

Usando um LP solver, pode-se obter a solução óptima $x^{*.}$ o seu custo é 61 unidades. O número de trabalhadores e cada período é igual ao requerido.

Problema de Gestão de Pessoal: solução - I

Variables	result
	61
x15	4
x13	2
x24	1
x35	4
x12	0
x23	3
x34	0
x22	0

Problema de Gestão de Pessoal: solução - II



Problema de Gestão de Pessoal: notas

Nota:

Se os custos de contratação forem elevados, pode haver períodos em que o número de trabalhadores seja maior do que o requerido (incorrendo um custo de não-utilização, mas economizando custos de contratação).

Casos Particulares

- Planeamento de pessoal em serviços de funcionamento diário permanente (*e.g.*, hospitais). Pode haver blocos de 1's consecutivos que são partidos a meio à meia-noite (entre a última e a primeira linha da matriz).
- Se houver mais de um bloco de 1's consecutivos (*e.g.*, caso de haver intervalo para almoço), o modelo já não tem estrutura em rede.

Problema de Gestão de Pessoal: estrutura com 1's consecutivos

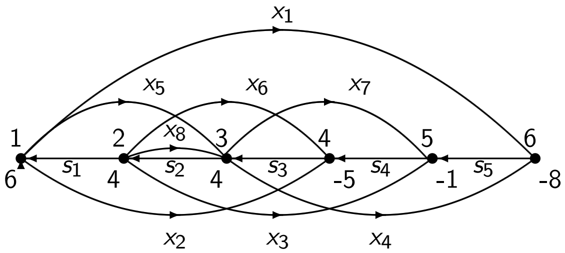
$$
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & & & 1 & & & & -1 & & & & \\
1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & & -1 & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & & & & -1 & & \\
1 & & 1 & 1 & & & 1 & & & & & -1 & \\
1 & & & 1 & & & & & & & & & -1 \\
 & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c} \\ x \\ \\ \\ y \\ \\ \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{r}6\\10\\14\\9\\8\\0\end{array}\right]
$$

Subtraindo a cada linha a linha que lhe fica por cima, obtém-se:

$$
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & & & 1 & & & & -1 & & & & \\
 & & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & -1 & & & \\
 & & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & \\
 & -1 & & & & -1 & & & & & 1 & -1 & \\
 & & -1 & & & & -1 & & & & & 1 & -1 \\
-1 & & & -1 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c} \\ x \\ \\ \\ y \\ \\ \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{r}6\\4\\4\\-5\\-1\\-8\end{array}\right]
$$

Problema de Gestão de Pessoal: estrutura em rede

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & & & 1 & & & & -1 & & & & \\
 & & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & -1 & & & \\
 & & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & \\
 & -1 & & & & -1 & & & & & 1 & -1 & \\
 & & -1 & & & & -1 & & & & & 1 & -1 \\
-1 & & & -1 & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix} x \\ \\ y \\ \\ \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ -5 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$



Problemas de Investimento: enunciado

- Um investidor dispõe actualmente de 10000 U.M. para investir num período de 5 anos, pretendendo reaver o capital e os lucros obtidos no fim desse período.
- O banco paga um juro de 5% ao ano, ou, em alternativa, 12% ao fim de 2 anos para aplicações a 2 anos.
- Além disso, daqui a 1 ano, irão ser oferecidas obrigações que pagarão 19% no fim do quarto ano.
- Objectivo: determinar o plano de aplicação do capital, de modo a maximizar o montante disponível ao fim de 5 anos.

Transformações básicas

Transformação de uma inequação do tipo $\leq$ numa equação

- Qualquer inequação do tipo de menor ou igual pode ser transformada numa equação, introduzindo uma variável adicional de folga com valor não-negativo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, s_i \geq 0.$$

Exemplo

	Antes:	Depois:
•	$2x_1 - 3x_2 + 4x_4 \leq 8$	$2x_1 - 3x_2 + 4x_4 + s_1 = 8$ $s_1 \geq 0$

- A quantidade de recurso disponível é 8.
- A função linear $2x_1 - 3x_2 + 4x_4$ indica a quantidade de recurso usada.
- A variável de folga s_1 indica a quantidade de recurso não usada.
- $s_1 = 8 - 2x_1 + 3x_2 - 4x_4$

Transformação de uma inequação do tipo ≥ numa equação

- Qualquer inequação do tipo de maior ou igual pode ser transformada numa equação, introduzindo uma variável adicional de excesso com valor não-negativo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i, s_i \geq 0.$$

Exemplo

	Antes:	Depois:
•	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \ \geq \ 4$	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 - s_1 = 4$ $s_1 \geq 0$

- A quantidade requerida é 4.
- A função linear $1x_1 - 2x_2 + 3x_4$ indica a quantidade produzida.
- A variável de excesso s_1 indica o excesso em relação à quantidade requerida.
- $s_1 = 1x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 4$

Transformação de uma equação em duas inequações

- Qualquer restrição de igualdade pode ser expressa como uma par de inequações do tipo de menor ou igual:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & -b_i \end{array} \right.$$

Exemplo

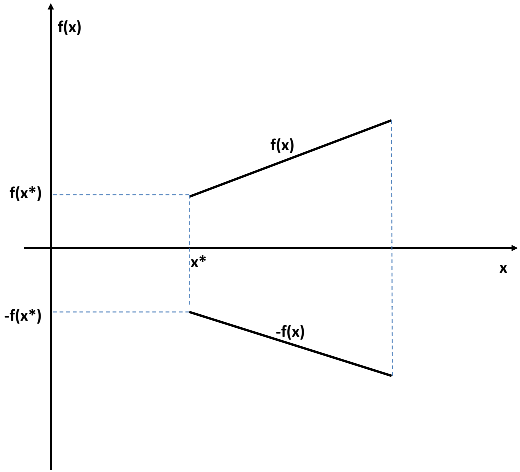
Antes:	Depois:
$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 4$	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \leq 4$ $1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \geq 4$

Transformação de um problema de minimização num problema de maximização - I

- Qualquer problema de minimização pode ser reduzido a um problema de maximização, em que se optimiza a função objectivo simétrica da original:

$$\min z = cx \Leftrightarrow \max z' = -cx.$$

- Solução óptima x^* é a mesma,
- mas o valor da função objectivo da solução óptima é o simétrico $f(x^*) = \min f(x) = -\max -f(x)$



Transformação de variáveis sem restrição de sinal

- Qualquer variável sem restrição de sinal pode ser expressa como a diferença de duas variáveis não-negativas:

$$x_j \text{ sem restrição} \Leftrightarrow x_j = x_j^+ - x_j^-, x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0.$$

Exemplo

- Antes: $2x_1 + 3x_2 \leq 20, x_1$ sem restrição, $x_2 \geq 0$
- Fazendo $x_1 = x_1^+ - x_1^-$
- Depois: $2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 \leq 20,\ x_1^+, x_1^-, x_2 \geq 0$

Transformação de variáveis com limite inferior

- Uma variável com limite inferior pode ser substituída por uma variável com limite inferior igual a 0, por mudança de variável:

Exemplo

- Antes: $2x_1 + 3x_2 \leq 20,\ \ x_1 \geq 8, x_2 \geq 0$
- Fazendo $x_1' = x_1 - 8 \rightarrow x_1 = x_1' + 8$
- $2(x_1' + 8) + 3x_2 \leq 20, x_1' \geq 0, x_2 \geq 0$
- Depois: $2x_1' + 3x_2 \leq 4, x_1' \geq 0, x_2 \geq 0$

Restrições do tipo módulo (caso $\leq$)

- $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & -b_i \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \end{array} \right.$$

Exemplo

- Antes: $|2x_1 + 3x_2| \leq 20$
- Depois: $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq & -20 \end{array} \right.$
- Trata-se de uma conjunção de restrições.

Restrições do tipo módulo (caso 2)

- $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \geq b_i \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & -b_i \end{array} \right.$$

- A disjunção de condições não pode ser representada por uma conjunção de restrições lineares, porque
- uma conjunção de restrições lineares define sempre um domínio convexo (ver slides sobre solução gráfica).

Exemplo

- $|x_1| \geq 2$
- equivale a: $\left| \begin{array}{lcr} x_1 & \leq & -2 \\ x_1 & \geq & 2 \end{array} \right.$
- Trata-se de um domínio não-convexo.

Fim