Cap. 2– Cálculo Integral

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

outubro de 2015

2.1 Primitivas

Até agora...

- Dada uma função derivável

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida num intervalo I, determinar uma função

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$g(x) = f'(x), \quad \forall x \in I\,.$$

Problema

- Dada uma função $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo I, determinar uma função $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável e tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I\,.$$

- Este problema diz-se problema da primitivação da função f, no intervalo I.

Definição de primitiva

- [Função primitiva] Uma função derivável $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se função primitiva de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo o $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

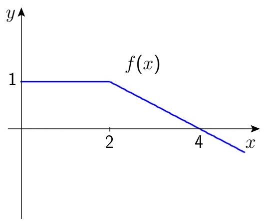
- Neste caso
  - Diz-se que f é primitivável em I.
  - F diz-se uma primitiva (ou antiderivada) de f em I;
  - F é uma primitiva de $f \iff f$ é a derivada de F.

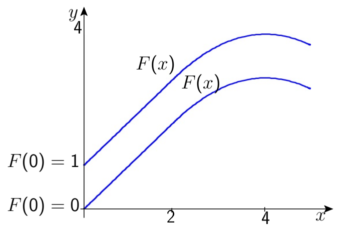
Exemplo

1. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$
é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$;
2. A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}$$
é uma primitiva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
3. Nem todas as funções admitem primitiva. Por exemplo, a função
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 2 & \text{se } 2 < x \le 4 \end{cases}$$
não admite primitiva no intervalo $[0, 4]$ (porque não é a derivada de nenhuma função).

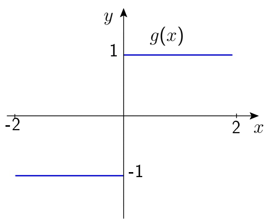
Exemplo

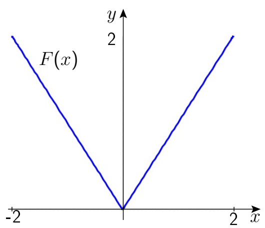
1. Gráfico de f e de duas possíveis funções primitivas F:





2. Gráfico de g e de F:





F não é uma primitiva de g porque F não é derivável em $I = [-2, 2]$.

Consequências da definição

- Se F é uma primitiva de f no intervalo I então toda a função definida por
$$F(x) + \mathcal{C}, \quad x \in I,$$
com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária, é também uma primitiva de f.

Basta notar que $[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x), \ x \in I$.

- Não existem outras primitivas de f para além das que têm a forma
$$F(x) + \mathcal{C}, \ x \in I,$$
com F uma primitiva conhecida de f em I e $\mathcal{C}$ uma constante arbitrária.

Notação

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

onde

- $\int$ é um "S" alongado;
- dx é uma partícula que, em particular, especifica a variável independente;
- $\int f(x)\,dx$ diz-se integral indefinido da função f.

Exercício

Reescreva-se a tabela de derivadas por forma a ler-se uma tabela de primitivas fundamentais ($k \in \mathbb{R}$)

Função	Derivada
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
x^k	$k\,x^{k-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}, x > 0$

Função	Primitivas
e^x	$e^x + \mathcal{C}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + \mathcal{C}$
$-\operatorname{sen} x$	$\cos x + \mathcal{C}$
x^k	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathcal{C}, k \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$

Exemplo

1. $\int 1\,dx =$
2. $\int 2x\,dx =$
3. $\int e^x\,dx =$
4. $\int \operatorname{sen} x\,dx =$
5. $\int \frac{1}{x}\,dx =$

Regras de primitivação

- [Primitivação por decomposição]

  Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Então

$$\int [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

  - Esta regra resulta da regra da derivação da soma de funções e da regra da derivada do produto de uma função por uma constante.

Exemplo

1. $\int \text{sen}\, x + 2 \cos x \, dx;$

2. $\int (3x^2 - 2x^5)\, dx;$

3. $\int (\sqrt{x} + 2)^2 \, dx.$

- [Primitivação imediata]

  Sejam funções $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que a função composta está bem definida. Então

$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int [g(f(x))]'\, dx = g(f(x)) + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

  - Esta regra resulta da regra da derivada da função composta.

Exemplo

1. $\int \cos x\, (\text{sen}\, x)^3 \, dx$ é uma primitiva imediata.

De facto,

$$[g \circ f]'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

pelo que

$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = (g \circ f)(x)$$

Neste caso, $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = x^4$, então

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\text{sen}\, x) = (\text{sen}\, x)^4$$

e

$$[(\text{sen}\, x)^4]' = 4\, (\text{sen}\, x)^3 \cos x$$

donde

$$\int \cos x\, (\text{sen}\, x)^3 \, dx = \frac{1}{4} \int 4 \cos x\, (\text{sen}\, x)^3 \, dx = (\text{sen}\, x)^4 + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$

2. $\int (2x + 10)^{20} \, dx$

3. $\int x^4 (x^5 + 10)^9 \, dx$

4. $\int x^2 e^{x^3} \, dx$

5. $\int \text{sen}(2x)\, dx$

- [Primitivação por partes]

Sejam funções $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis. Então

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx.$$

- Esta regra resulta da regra da derivada do produto de duas funções.
- Como o produto é comutativo, na primitivação por partes
  - escolhe-se para f' a função da qual se conhece a primitiva;
  - escolhe-se para g a função que, por derivação, simplifica a expressão.

Exemplo

1. $\int x \cos x\, dx;$
2. $\int e^x \cos x\, dx;$
3. $\int \ln x\, dx.$

- [Primitivação por substituição]

Seja $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $f : J \longrightarrow I$ uma função bijectiva e derivável cuja derivada nunca se anula. Então

$$\int g(x)\, dx = \int g(f(t))\, f'(t)\, dt$$

quando $x = f(t)$, isto é $t = f^{-1}(x)$.

- Esta regra também resulta da regra de derivação de uma função composta.
- Procedimento
  1. fazer a substituição $x = f(t)$;
  2. calcular a primitiva $\int g(f(t))\, f'(t)\, dt$;
  3. voltar à variável x fazendo $t = f^{-1}(x)$.

Exemplo

- Calcular $\int x\sqrt{x-1}\, dx$ tomando $x = t^2 + 1$.

1. Aqui $g(x) = x\sqrt{x-1}$ e $x = t^2 + 1 = f(t)$.
   Como f tem de ser uma função bijetiva cuja derivada não se anula tome-se
   $$f :]0, +\infty[\longrightarrow]1, +\infty[, \qquad f(t) = t^2 + 1.$$
   Então
   $$g(f(t)) = (t^2+1)\sqrt{t^2+1-1} = (t^2+1)\, t \qquad \text{e} \qquad f'(t) = 2t.$$
2. Assim
   $$\begin{aligned} \int g(f(t))\, f'(t)\, dt &= \int 2t^2(t^2+1)\, dt \\ &= 2\int (t^4+t^2)\, dt = 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) + \mathcal{C}, \\ &= 2t^3\left(\frac{t^2}{5} + \frac{1}{3}\right) + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Temos, f bijetiva e $x = f(t) = t^2 + 1$ então

$$t = \sqrt{x-1}$$

pelo que

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left[\int g(f(t))\,f'(t)\,dt\right]_{t=f^{-1}(x)}$$

$$= \left[2t^3\left(\frac{t^2}{5}+\frac{1}{3}\right)+\mathcal{C}\right]_{t=f^{-1}(x)}$$

$$= 2(\sqrt{x-1})^3\left(\frac{x-1}{5}+\frac{1}{3}\right)+\mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$$

Primitivação de funções racionais (próprias), através da decomposição em fracções parciais

- A primitivação das funções racionais – definidas por

$$f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}\,, \quad x\in\{x\in\mathbb{R} :\ D(x)\neq 0\}\,,$$

onde $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ e $D(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$, com a_i, $(i = 0, \ldots, n)$ e b_j, $(j = 1, \ldots, m)$ – reduz-se à primitivação de uma soma de frações parciais (simples), isto é, frações do tipo

$$\frac{\alpha}{(x-x_1)^k} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^k}.$$

Exemplos

1. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

2. $g(s) = \dfrac{21}{s^3-4s^2+3s-8}$

3. $h(t) = \dfrac{t^6+4t^2-3}{7t^5+3t}$

Observação

- O Teorema Fundamental da Álgebra garante que qualquer polinómio, degrau n, tal como

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

pode ser decomposto num produto de factores lineares:

$$P(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

onde

- a_i são constantes reais e $a_0 \neq 0$
- x_i são as n raízes, reais ou complexas, iguais ou distintas, da equação $P(x) = 0$

Frações simples

- Como decompor uma função racional (própria) em frações parciais/simples?
  - A forma das frações parciais é determinada pelas raízes do polinómio do denominador.
  - Seja f uma função racional definida por $f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}$, com P um polinómio de grau n e D um polinómio definido por $D(x) = x^m + b_1 x^+ \ldots + b_{m-1}x + b_m$.
  - Seja $n < m$. Consideram-se 4 casos:
    1. $D(x)$ tem raízes reais diferentes
    2. $D(x)$ tem raízes reais, repetidas (porventura com diferentes multiplicidades)
    3. $D(x)$ tem pares de raízes complexas (conjugadas) diferentes
    4. $D(x)$ tem pares de raízes complexas (conjugados) repetidas.

Exemplo:: Caso 1

- Calcular $\displaystyle\int \frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx$.

Nesta forma, a primitiva não se calcula facilmente.

Sejam

$$P(x) = 7x-1, \quad D(x) = (x+1)(x+2)(x-3) \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}.$$

1. Como grau$P <$ grau$D$ não é necessário fazer a divisão de polinómios.
2. Os zeros de $D(x) = (x+1)(x+2)(x-3)$ são

   $x = -1$, real de multiplicidade 1;
   $x = -2$, real de multiplicidade 1;
   $x = 3$, real de multiplicidade 1;

3. A fração f decompõe-se numa soma de três frações simples, cada uma delas associada a cada um dos zeros:

$$\frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

onde A, B, C são constantes reais a determinar.
Encontremos essas constantes pelo "Método dos coeficientes indeterminados", isto é, da equação anterior, reduzindo ao mesmo denominador, sai que

$$\begin{aligned} 7x-1 &= A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-A2B+3C)x + (-6A-3B+2C) \end{aligned}$$

donde, pela igualdade de polinómios,

$$A+B+C = 0, \quad -A2B+3C = 7, \quad -6A-3B+2C = -1$$

e, resolvendo o sistema anterior,

$$A = 2, \qquad B = -3, \qquad C = 1.$$

Pode-se, agora, escrever

$$\frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-3}{x+2} + \frac{1}{x-3}.$$

4. Primitivando cada uma das frações simples anteriores

$$\int \frac{2}{x+1}\,dx = 2\ln|x+1| + \mathcal{C}_1$$
$$\int \frac{-3}{x+2}\,dx = -3\ln|x+2| + \mathcal{C}_2$$
$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3| + \mathcal{C}_3$$

onde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3 \in \mathbb{R}$.

5. Assim, a primitiva pedida é

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx &= \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{-3}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx \\ &= 2\ln|x+1| + \mathcal{C}_1 - 3\ln|x+2| + \mathcal{C}_2 + \ln|x-3| + \mathcal{C}_3 \\ &= 2\ln|x+1| - 3\ln|x+2| + \ln|x-3| + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Observação

- Porquê o sinal de módulo nas primitivas anteriores?
  - Temos

$$\frac{2}{x+1}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$
$$\frac{-3}{x+2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$
$$\frac{1}{x-3}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

  - Por exemplo, na primeira função se $x < -1$, $(x+1) < 0$ logo $\ln(x+1)$ não está definido!
  - Assim, usando o módulo há a certeza de o argumento de ln ser positivo.

- [Regra] Sendo grau$P <$ grau$D$
  - Se as raízes do polinómio do denominador forem todas reais e distintas, a saber, x_1, x_2, ..., x_m escreve-se

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \ldots + \frac{K}{x-x_m}$$

Exemplo:: Caso 2

- Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-3x^2+4}$.

Sejam

$$P(x) = 1, \qquad D(x) = (x+1)(x-2)^2 \qquad \text{e} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}.$$

1. Como grau$P <$ grau$D$ não é necessário fazer a divisão de polinómios.
2. Os zeros de $D(x) = (x+1)(x-2)^2$ são
   $x = -1$, real de multiplicidade 1;
   $x = 2$, real de multiplicidade 2.

3. A fração f decompõe-se numa soma de duas frações parciais, cada uma delas associada a cada um dos zeros:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$$

onde A, B_1, B_2 são constantes reais a determinar. Encontremos essas constantes pelo "Método dos coeficientes indeterminados", isto é, da equação anterior, reduzindo ao mesmo denominador, temos

$$\begin{aligned} 1 &= A(x-2)^2 + B_1(x+1)(x-2) + B_2(x+1) \\ &= (A+B_1)x^2 + (-4A - B_1 + B_2)x + (4A - 2B_1 + B_2) \end{aligned}$$

donde, pela igualdade de polinómios,

$$A - B_1 = 0, \qquad -4A - B_1 + B_2 = 0, \qquad 4A - 2B_1 + B_2 = 1$$

e, resolvendo o sistema anterior,

$$A = \frac{1}{9}, \qquad B_1 = -\frac{1}{9}, \qquad B_2 = \frac{1}{3}.$$

Podemos, agora, escrever

$$\frac{1}{x^3-3x^2+4} = \frac{1}{9}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{9}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x-2)^2}.$$

4. Primitivando cada uma das frações simples anteriores

$$\int \frac{1}{9}\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{9}\ln|x+1| + \mathcal{C}_1$$

$$\int -\frac{1}{9}\frac{1}{x-2}\,dx = -\frac{1}{9}\ln|x-2| + \mathcal{C}_2$$

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{3(x-2)} + \mathcal{C}_3$$

onde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3 \in \mathbb{R}$.

5. Assim, a primitiva pedida é

$$\int \frac{dx}{x^3-3x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{9}\frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{9}\frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{9}\ln|x-2| - \frac{1}{3(x-2)} + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

- [Regra] Sendo grau$P <$ grau$D$
  - Se polinómio do denominador tem uma raiz real, x_0, r vezes repetida (e algumas outras raízes reais, mas distintas) escrevemos

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_0)^r} + \frac{B_1}{x-x_1} + \frac{B_2}{x-x_2} + \ldots$$

Exemplo::3

- Calcular $\displaystyle\int \frac{2x^2-13x+20}{x^3-4x^2+5x}\,dx$.
  - [Regra] Sendo grau$P <$ grau$D$
    - Se polinómio do denominador tem um par de raízes complexas conjugadas, $x_0 = a \pm i\,b$, (e algumas outras raízes reais, mas distintas) escrevemos

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{C_1}{x-x_1} + \frac{C_2}{x-x_2} + \ldots$$

Exemplo::4

- Calcular $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$.
  - [Regra] Sendo grau$P <$ grau$D$
    - Se polinómio do denominador tem um par de raízes reais, $x_0 = a \pm i\,b$, r vezes repetido (e algumas outras raízes reais, mas distintas) escrevemos

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{A_2x+B_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \ldots + \frac{A_rx+B_r}{[(x-a)^2+b^2]^r} + \frac{C_1}{x-x_1} + \frac{C_2}{x-x_2} + \ldots$$