Cap. 2– Cálculo Integral

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

novembro de 2015

2.3 – Aplicações do integral de Riemann

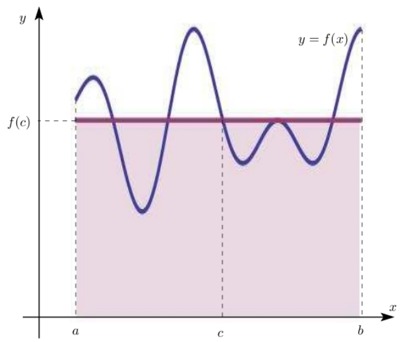
Valor médio de uma função

Recorde-se (Cap. 2.2)

- [Teorema do valor médio do cálculo integral]

  Seja f contínua em $[a, b]$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(c)(b-a).$$



Exemplo

- Sabe-se que o número de habitantes de um dado país (população) é modelado por

$$P = f(t) = 2.020 \times 1.036^t,$$

  onde P está em milhões e t é o número de anos após o ano 2000 ($t = 0$). Usando esta função preveja a população média do país entre os anos 2000 e 2020.

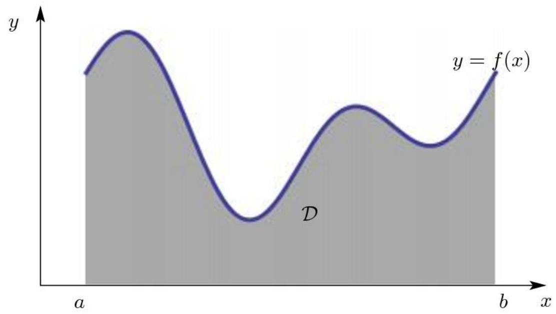
  - Note-se que $P_{2000} = f(0) = 2.02$ milhões de habitantes.
  - Temos

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{20-0}\int_0^{20} f(t)\,dt = \frac{1}{20-0}\int_0^{20} [2.020 \times 1.036^t]\,dt \\ &= \frac{2.020}{20} \times \frac{1.036^t}{\ln 1.036}\Big|_{t=0}^{20} \approx 2.94\end{aligned}$$

  Assim, a população média do país, entre 200 e 2020, deve ser aproximadamente 2.94 milhões de habitantes.

Cálculo de áreas

- Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$ então a medida da área da região sob o gráfico de f entre $x = a$ e $x = b$ (a acima do eixo das ordenadas) é determinada por
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

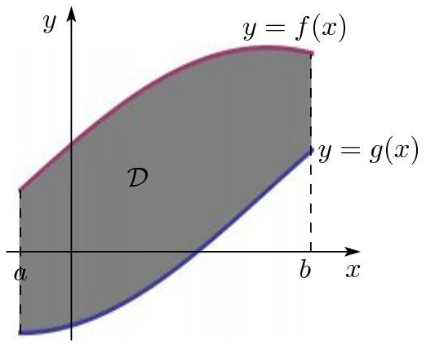


Em particular, como calcular a área entre duas curvas?

- [Problema] Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$ e
$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$
(i. é., a curva definida por $y = f(x)$ não está abaixo da curva definida por $y = g(x)$ no intervalo $[a, b]$). Então se
$$f(x) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad g(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$
a medida da área, A, da região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$ e lateralmente por entre $x = a$ e $x = b$ é
$$\begin{aligned} A &= \text{área abaixo de } f - \text{área abaixo de } g \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^b [\,f(x) - g(x)\,]\,dx. \end{aligned}$$

Observação

1. A fórmula anterior estende-se aos casos em que f e g não são necessariamente positivas desde que
$$f(x) \geq g(x), \qquad \forall x \in [a, b]$$



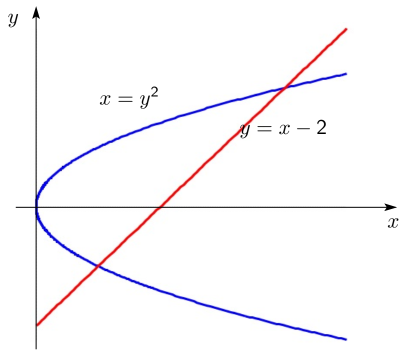
Exemplo

- Calcular a medida da área da região limitada pelos gráficos das funções seno e cosseno quando x está entre 0 e $\frac{\pi}{4}$.

Observação

1. Quando a região é menos simples, é possível encontrar alguns entraves.

   - Qual a medida da área limitada na figura?



2. E se a região for limitada por curvas definidas por

$$x = w(y), \qquad x = v(y), \qquad y = c \qquad \text{e} \qquad y = d\,?$$

   - Neste caso, procede-se de modo idêntico mas trocando os papéis de x e y.
   - Qual a medida da área limitada pelas curvas definidas por $y^2 = x$ e $y = x - 2$?

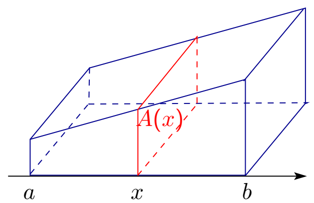
3. A escolha entre usar um integral em ordem a x ou um integral em ordem a y é ditada pela forma da região de integração. Deve-se optar pelo integral que requer menos seccionamentos, desde que a correspondente função integranda não ofereça dificuldades adicionais.

Exemplo

- Calcular a medida da área da região limitada curvas definidas por $y^2 = x$ e $y = x - 2$.

Volumes (por secções)

- Pretende-se calcular o volume, V, do sólido S



   - Considere-se uma subdivisão de $[a, b]$ em n sub-intervalos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

   - A esta subdivisão de $[a, b]$ está associada uma subdivisão de S em paralelepípedos P_k cujo volume é

$$V_k = A(\tilde{x}_k)\,(x_{k+1} - x_k)$$

- A soma dos volumes dos paralelepípedos P_k é uma aproximação para o volume de S:

$$V \approx \sum_{k=0}^{n-1} A(\tilde{x}_k)\, \Delta_{k+1}$$

- Assim,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A(\tilde{x}_k)\, \Delta_{k+1} \\ &= \int_a^b A(x)\, dx \end{aligned}$$

  - O volume é uma soma de áreas, admitindo que A é uma função integrável.

Exemplo

- Deduza a fórmula do volume de uma pirâmide quadrada rectilinea de altura h e lado da base a.

Observação

1. Quando f é uma função contínua em $[a, b]$ é possível gerar um sólido de revolução (em torno do eixo das abcissas ou em torno do eixo das ordenadas).

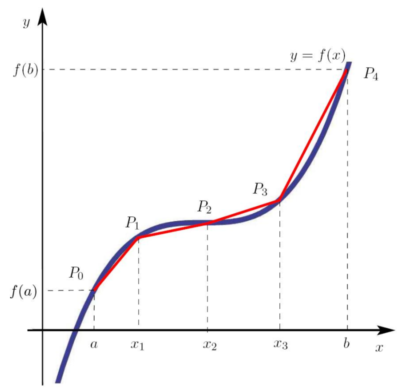
   - Qual o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva definida por $y = \sqrt{x}$ entre $x = 1$ e $x = 4$ em torno do eixo das abcissas?

Comprimentos de curvas planas

- Seja f uma função definida e derivável no intervalo $[a, b]$.
  - Qual o comprimento da curva definida por

$$y = f(x)$$

  entre $x = a$ e $x = b$.



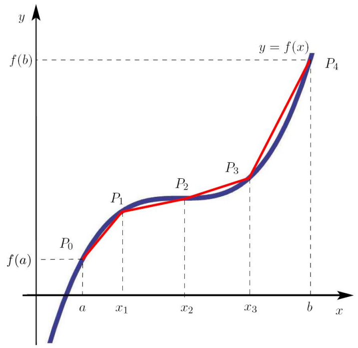
Sejam

- f de classe $\mathcal{C}^1$ em $[a,b]$;
- $\mathcal{P}$ uma partição de $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- P_k o ponto de coordenadas

$$(x_k, f(x_k)).$$



- A medida do comprimento da linha poligonal definida pelos pontos P_k é a soma da medida dos comprimentos dos segmentos de reta $\overline{P_kP_{k+1}}$, isto é

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_kP_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x_{k+1}-x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

- Pelo teorema do valor médio de Lagrange (Cap. 1.5), existe $\widetilde{x_k} \in]x_k, x_{k+1}[$ tal que

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)$$

pelo que

$$\begin{aligned}[x_{k+1}-x_k]^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2 &= [x_{k+1}-x_k]^2 + [f'(\widetilde{x_k})(x_{k+1} - x_k)]^2 \\ &= (x_{k+1}-x_k)^2\,(1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2).\end{aligned}$$

- Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_kP_{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2(1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\widetilde{x_k})]^2}\,(x_{k+1}-x_k)\end{aligned}$$

- Mas

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\widetilde{x_k}))^2}\,(x_{k+1}-x_k)$$

é a soma de Riemann para a função

$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

- A função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ é contínua logo integrável.

- Fazendo $n \to \infty$, a medida do comprimento da linha poligonal (soma de Riemann) tende para a medida do comprimento da curva (integral).

- [Comprimento de uma curva]

Seja f de classe $\mathcal{C}^1$ em $[a,b]$. A medida do comprimento L da curva definida pelo gráfico de f do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Exemplo

- Calcular a medida do comprimento do gráfico da função

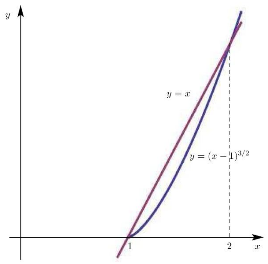
$$f(x) = (x-1)^{3/2} \qquad \text{quando} \quad x \in [1,2]$$

Tem-se

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}.$$

Com $x - 1 > 0$ **para** $x \in [1,2]$ **vem**

$$\begin{aligned}\sqrt{1+[f'(x)]^2} &= \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}\sqrt{x-1}\right]^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{9x-5}\end{aligned}$$



Assim,

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, d = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{9x-5}\, dx = \frac{1}{18}\,\frac{2}{3}(9x-5)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$