Cálculo

folha 1 -

2015'16 -

Revisões.

1. Sejam $x \in y$ dois números reais tais que x < y. Diga se cada uma das seguintes relações é verdadeira ou falsa:

(a)
$$x^2 < y^2$$

(c)
$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$
 $(x, y \neq 0)$

(b)
$$x^3 < y^3$$

(d)
$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{y^3}$$
 $(x, y \neq 0)$

2. Represente em extensão os seguintes conjuntos:

(a)
$$\{x \in \mathbb{R} : |x+4| = 3\}$$

(d)
$$\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 7)^2 = 0\}$$

(b)
$$\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$$

(e)
$$\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x+1} = 2x\}$$

(c)
$$\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x+2|\}$$

(f)
$$\{x \in \mathbb{R} : |x||x+3|=4\}$$

3. Em cada uma das alíneas seguintes encontre números reais a e ε de modo a que a solução da inequação $|x-a|<\varepsilon$ seja o intervalo dado.

(a)
$$]-2,2[$$

(b)
$$]-4,0[$$

(d)
$$]-3,7[$$

4. Exprima cada um dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

(a)
$$\{x \in \mathbb{R} : 1 - x < 2\}$$

(I)
$$\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < |x-2|\}$$

(b)
$$\{x \in \mathbb{R} : 0 \le 1 - 2x \le 1\}$$

(m)
$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0 \right\}$$

(c)
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$$

(n)
$$\{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-2| < 10\}$$

(d)
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2 - 1) \ge 0\}$$

(o)
$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \le 1\}$$

(e)
$$\{x \in \mathbb{R} : |5 - \frac{1}{x}| < 1\}$$

(p)
$$\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \le 4\}$$

(f)
$$\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \ge 2\}$$

(q)
$$\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$$

(g)
$$\{x \in \mathbb{R} : |5x + 2| \le 1\}$$

(h) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \ge 4x\}$

(i)
$$\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \le -1\}$$

$$(r) \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \le 0 \right\}$$

(j)
$$\{x \in \mathbb{R} : |3x - 2| \le 1\}$$

(s)
$$\{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2|x|\}$$

(k)
$$\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$$

(t)
$$\{x \in \mathbb{R} : |x+1| > |x-3|\}$$

5. Indique o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

(a)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x > 7 \Longrightarrow |x| > 7$$

(b)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |1 + 4x| < 1 \Longrightarrow x \ge -\frac{1}{2}$$

(c)
$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \ge 1 \Longrightarrow x \ge 1$$

(d)
$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-5| < 2 \Longrightarrow 3 < x < 7$$

6. Indique o que está errado no texto seguinte.

Sejam a e b números reais tais que a=b. Então

$$a^{2} = ab \implies a^{2} - b^{2} = ab - b^{2}$$

$$\implies (a - b)(a + b) = b(a - b)$$

$$\implies a + b = b$$

$$\implies 2b = b$$

$$\implies 2 = 1.$$

7. Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Apresente um contra-exemplo quando a relação for falsa

(a)
$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

(c)
$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

(b)
$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$$

(d)
$$(xy)^n = x^n y^n$$