Universidade do Minho | MIEInf

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

folha 2 — 2015'16

Generalidades sobre funções reais de variável real.

1. O número de estrídulos por minuto é, no caso dos grilos, uma função da temperatura ambiente, a saber

$$c(T) = 4T - 160,$$

com T expresso em graus Fahrenheit.

(a) Esboce graficamente esta função, real de uma variável real, c.

(b) Defina o domínio e o contradomínio da função c.

2. As alturas (em "polegadas") atingidas, na modalidade de salto à vara, nos Jogos Olímpicos de 1900, 1904, de 1908 e de 1912 tabelam-se a seguir:

t	1900	1904	1908	1912
a	130	138	146	154

(a) Esboce graficamente a função a, real de uma variável real t.

(b) Defina o domínio e o contradomínio da função a.

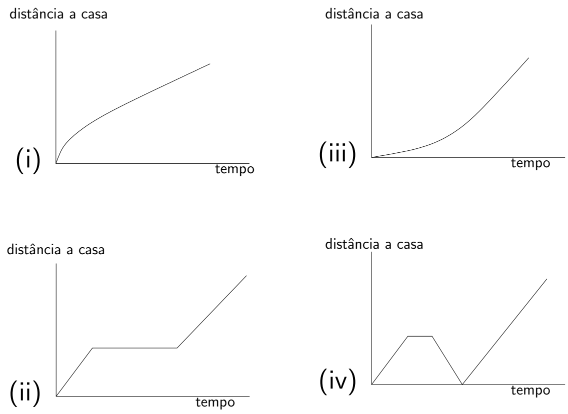
(c) Se a característica linear da função a se tivesse mantido após 1912 qual teria sido o recorde de salto com vara (masculino) atingido nos últimos Jogos Olímpicos?

3. Faça corresponder a cada uma das situações descritas uma representação gráfica. Descreva uma situação adequada à representação gráfica restante.

(a) Tinha acabado de sair de casa quando me apercebi que tinha esquecido uns livros e por isso tive de voltar.

(b) A viagem estava a correr bem até que tive um furo.

(c) Seguia calmamente quando me apercebi que estava a ficar atrasado.



4. Em 1999 a população mundial atingiu os 6 000 milhões de pessoas e crescia a uma taxa de 1.3% por ano.

(a) Mostre que a população mundial P, depois de 1999, se representa por uma função exponencial do tipo $P(t) = P_0 a^t$, com P_0 uma constante inicial (quando $t = 0$) e a o factor segundo o qual P se altera, quando t aumenta 1 unidade.

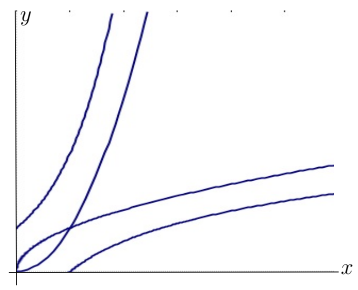
(b) Identifique os valores de a, na equação da alínea anterior, que caracterizam um crescimento exponencial.

(c) Assumindo que no caso concreto do crescimento da população mundial o crescimento se manteve, depois de 1999, constante encontre uma fórmula que defina a função P.

(d) Use a fórmula encontrada na alínea anterior para estimar a população do mundo, em 2020.

(e) Esboce graficamente a função P definida nas alíneas anteriores e, a partir desse esboço, estime o ano de duplicação (em relação a 1999) da população mundial.

5. Sem recurso a uma calculadora gráfica, nem a um computador, faça corresponder cada uma das fórmulas $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ a cada uma das curvas esboçadas.



6. Determine o maior domínio onde é válida cada uma das seguintes regras:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(b) $f(x) = \sqrt{2 - 3x} + \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{1 - \cos(3x^3 + x)}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x - 3}}{x^2 - 4}$

7. Determine o domínio das funções $f + g, f - g, fg, f/g$ quando

(a) $f(x) = \sqrt{x + 5}, \quad g(x) = \sqrt{x + 5}$

(b) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}, \quad g(x) = \sqrt{x + 4}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x}{x - 4}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x + 5}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}, \quad g(x) = \dfrac{3x}{x + 4}$

8. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$ e, em cada caso, o respetivo domínio, quando

(a) $f(x) = x^2 - 3x, \quad g(x) = \sqrt{x + 2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x + 15}, \quad g(x) = x^2 + 2x$

(c) $f(x) = \sqrt{x - 2}, \quad g(x) = \sqrt{x + 5}$

(d) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$

9. Para cada uma das funções h dadas indique duas funções f e g (diferentes da identidade) tais que $h = g \circ f$:

(a) $h(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x^2 - 3}\right)$

(b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \dfrac{2}{x^2 + 1}$

(c) $h(x) = \sqrt{2x - 2} - 4x + 4$

10. Se f e g são funções pares, o que se pode dizer de $f \circ g$? E se forem ímpares? E se uma função for par e a outra ímpar?

11. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Esboce o gráfico de g quando:

(a) $g(x) = f(x) - 1$

(b) $g(x) = f(x + 2)$

(c) $g(x) = \max\{f(x), 1\}$

(d) $g(x) = \min\{f(x), 2\}$

12. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

(a) Defina uma restrição de f que admita inversa.

(b) Defina a função inversa da função da alínea (a).

(c) Esboce graficamente a função f e a sua função inversa.

13. Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas

(a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua

(b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua

(c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta?

14. Considere a função contínua definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(a) A função f é bijectiva. Justifique.

(b) Determine a função inversa de f.

(c) f^{-1} é contínua?

(d) O teorema da continuidade da função inversa foi posto em causa?