Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

2. Sistemas de equações lineares

Exercício 1. Considere o sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sem resolver o sistema, mostre que:

a) $(1, 1, 1, 0)$ é solução do sistema;

b) $(1, -1, 1, 1)$ não é solução do sistema.

Exercício 2. Considere novamente a matriz A da questão anterior. Justifique que existe um sistema de equações lineares $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tal que $(1, 2, 3)$ é solução desse sistema. Indique as equações de um sistema nessas condições.

Exercício 3. Cada uma das seguintes matrizes ampliadas é uma matriz em escada. Para cada uma delas, indique se o sistema de equações lineares correspondente é ou não possível e, em caso afirmativo, determine as suas soluções.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *b)* $\left(\begin{array}{cc|r} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ *c)* $\left(\begin{array}{crc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{crr|r} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ *e)* $\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *f)* $\left(\begin{array}{crc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Exercício 4. Resolva (na forma matricial), os seguintes sistemas, quando possíveis, usando o método de eliminação de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ -4x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

Exercício 5. Indique um exemplo de, ou justifique porque não existe, um sistema que seja:

a) possível, com mais equações que incógnitas;

b) possível e determinado, com menos equações que incógnitas;

c) impossível, com tantas equações como incógnitas;

d) possível e determinado, com tantas equações como incógnitas;

e) possível e determinado, com um número de equações diferente do número de incógnitas;

f) impossível, com menos equações que incógnitas;

g) possível indeterminado, com grau de indeterminação 2.

Exercício 6. Considere um sistema cuja matriz ampliada tem a forma

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array}\right)$$

Determine os valores de a para os quais o sistema tem uma única solução.

Exercício 7. Considere um sistema cuja matriz ampliada tem a forma

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \end{array}\right)$$

a) Diga, justificando, se o sistema pode ser impossível.

b) Indique os valores de β para os quais o sistema tem uma infinidade de soluções.

Exercício 8. Considere os seguintes sistemas de equações nas incógnitas x, y e z. Classifique-os, em função dos valores dos parâmetros reais α e β, quanto à existência e unicidade de solução.

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 2z = \beta - 2 \\ 2x - y + (2+\alpha)z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -x + 4y - z = 3\alpha \\ \beta x + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + z = 2 \\ x - y + \alpha z = \beta \end{cases}$

Exercício 9. Discuta os seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x, y e z, em função dos respectivos parâmetros e resolva-os nos casos em que são possíveis.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 6y + 3z = 4, \qquad a \in \mathbb{R} \\ 3x + 8y + (a^2 - 2)z = a + 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = b \\ 2x + az = 2, \qquad a,\ b \in \mathbb{R} \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 2ky - kz = 1, \qquad k,\ t \in \mathbb{R} \\ (t+1)x + y - (t+1)z = 0 \end{cases}$

Exercício 10. Considere um sitema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, onde A é uma matriz de ordem $m \times n$ e sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ matrizes de ordem $n \times 1$.

a) Mostre que, se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são soluções do sistema, então $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ também é solução do sistema.

b) Mostre que, se $\boldsymbol{u}$ é solução do sistema, então, para todo o escalar α, $\alpha\boldsymbol{u}$ também é solução do sistema.

c) Use o resultado da alínea anterior para concluir que: *Se um sistema homogéneo tem uma solução não nula, então tem uma infinidade de soluções.*

Exercício 11. Sejam A e $\boldsymbol{b}$ matrizes de ordem $n \times n$ e $n \times 1$, respetivamente. Mostre que A é invertível se e só se o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é possível e determinado.

Exercício 12. Sejam A e X matrizes de ordem n tais que $AX = I_n$. Mostre que A é invertível e $X = A^{-1}$.

Exercício 13. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Exercício 14. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e considere a matriz B de ordem $(m+n) \times (m+n)$, definida por $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_m \end{pmatrix}$, onde 0 designa a matriz nula de ordem $n \times m$. Determine a inversa de B.

Exercício 15. Determine a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 83 & -47 & 1 & 0 & 0 \\ -55 & 94 & 0 & 1 & 0 \\ 62 & -71 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 16. Considere o seguinte sistema de equações nas incógnitas $x_1, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} (n-1)x_1 = x_2 + x_3 + \cdots + x_n \\ (n-1)x_2 = x_1 + x_3 + \cdots + x_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ (n-1)x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \end{cases}$$

Justifique que o sistema é possível indeterminado e que, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, o n-uplo $(\alpha, \dots, \alpha)$ é solução do sistema.

Sistemas - Exercícios suplementares

Exercício 17. Apresente, casa exista, um exemplo de:

a) matrizes A, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ tais que o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é possível determinado e $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ é possível indeterminado;

b) matrizes A, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ tais que o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é possível determinado e $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ é impossível;

c) matrizes A, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ tais que o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é possível indeterminado e $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ é impossível;

d) matrizes A e $\boldsymbol{b}$ tais que o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é possível determinado e $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é possível indeterminado;

e) matrizes A e $\boldsymbol{b}$ tais que o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é possível determinado e $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é impossível;

f) matrizes A e $\boldsymbol{b}$ tais que o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é possível indeterminado e $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é possível determinado;

g) matrizes A e $\boldsymbol{b}$ tais que o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é possível indeterminado com grau de indeterminação 2 e $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

Exercício 18. Discuta, em função dos parâmetros reais a e b, os seguintes sistemas de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, t .

a) $\left\{\begin{array}{l} ax+y-z+at=0 \\ (a+1)y+z+t=1 \\ -x+y+(a+1)t=b \end{array}\right.$ *b)* $\left\{\begin{array}{l} 2x+y+t=2 \\ 3x+3y+az+5t=3 \\ 3x-3z-2t=b \end{array}\right.$ *c)* $\left\{\begin{array}{l} x+ay+bz-t=a \\ x-bz-2t=a \\ 2x+ay+bz-4t=3a \\ x+2ay+2t=0 \end{array}\right.$

Exercício 19. Considere um sistema $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, com A uma matriz $m\times n$ e $\boldsymbol{b}$ uma matriz $m\times 1$ e sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ matrizes de ordem $n\times 1$.

a) Mostre que, se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são soluções do sistema, então $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ é solução do sistema homogéneo associado, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

b) Mostre que, se $\boldsymbol{u}$ é solução do sistema e $\boldsymbol{v}$ é solução do sistema homogéneo associado $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, então $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ é solução do sistema.

c) Prove que: *Um sistema possível ou tem apenas uma solução ou tem uma infinidade delas.*

Exercício 20. Considere as matrizes

$$A_\alpha=\begin{pmatrix}-1 & -1 & \alpha \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -3\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

a) Indique para que valores de α o sistema $A_\alpha\boldsymbol{x}=(1\ 1\ -2)^T$ é possível.

b) Resolva o sistema homogéneo $A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

c) Use o resultado obtido em *b)* para justificar que A_1 é invertível e calcule A_1^{-1}.

Exercício 21. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{lcr} 3x-y+2z & = & \beta \\ 2x+2y+\alpha z & = & 2 \\ x+y+z & = & -1 \end{array}\right.,$$

nas incógnitas x, y, z.

a) Discuta este sistema, em função dos parâmetros α e β e resolva-o nos casos em que for possível.

b) Seja A a matriz dos coeficientes do sistema que se obtém fazendo $\alpha=1$. Justifique que A é invertível e calcule A^{-1}.

Exercício 22. Considere a matriz de ordem n, $A=(a_{ij})$, definida por:

$$a_{ij}=\left\{\begin{array}{ll} 1+x, & \text{se } i=j \\ 1, & \text{se } i\neq j \end{array}\right.$$

Determine os valores de x para os quais a matriz A é invertível.

Exercício 3. *a)* Sem solução; *b)* $(4,-1)$; *c)* $(-11+2\alpha,\alpha,3),\alpha\in\mathbb{R}$; *d)* $(4,5,2)$; *e)* Sem solução; *f)* $(5,3,2)$.

Exercício 4. *a)* Impossível; *b)* $(0,0)$; *c)* $(8-2\alpha,-5+\alpha,\alpha),\alpha\in\mathbb{R}$; *d)* Impossível; *e)* $(0,3/2,1)$; *f)* $(7+2\alpha,3\alpha,7\alpha),\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercício 6. $a\neq-2$. Exercício 7. a) Não. Trata-se de um sistema homogéneo. *b)* $\beta=2$.

Exercício 8. (**SI** $\rightarrow$ sistema impossível; **SPD** $\rightarrow$ sistema possível e determinado; **SPI** $\rightarrow$ sistema possível e indeterminado)

a) $\alpha=2$ e $\beta=1$, **SPI**; $\alpha=2$ e $\beta\neq1$, **SI**; $\alpha\neq2$, **SPD**. *b)* $\beta=1$ e $\alpha=7$, **SPI**; $\beta=1$ e $\alpha\neq7$, **SI**; $\beta\neq1$, **SPD**.

c) $\alpha=1$ e $\beta=-1$, **SPI**; $\alpha=1$ e $\beta\neq-1$, **SI**; $\alpha\neq1$, **SPD**.

Exercício 9. *a)* $a=2$, **SI**; $a=-2$, **SPI**. Solução: $x=2+6\alpha,\ y=-\dfrac{5}{2}\alpha,\ z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

$a\neq2$ e $a\neq-2$, **SPD**. Solução: $x=\dfrac{2a+2}{a-2},\ y=\dfrac{-5}{2a-4},\ z=\dfrac{1}{a-2}$.

b) $a=3$ e $b\neq1$, **SI**; $a=3$ e $b=1$, **SPI**. Solução: $x=1-3\alpha,\ y=\alpha,\ z=2\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

$a\neq3$, **SPD**. Solução: $x=\dfrac{-ab-a+6}{6-2a},\ y=\dfrac{(2-a)(1-b)}{6-2a},\ z=\dfrac{b-1}{3-a}$.

c) $k=0$ ou $t=-1/2$, **SI**; $k\neq0$ e $t\neq-1/2$,**SPD**.

Solução: $x=\dfrac{-2-t}{2k(1+2t)},\ y=\dfrac{1+t}{k(1+2t)},\ z=\dfrac{-t}{2k(1+2t)}$.

Exercício 13. *a)* $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\-1&0&1\\\frac{7}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$; *c)* Não invertível; *d)* $\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

Exercício 14. $B^{-1}=\begin{pmatrix}I_n&0\\-A&I_m\end{pmatrix}$.

Exercício 15. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-83&47&1&0&0\\55&-94&0&1&0\\-62&71&0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercício 17. *b)* $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\2&2\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $c=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. *c)* $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$; $b=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $c=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Exercício 18.

a) $a\neq-1$, **SPI** (grau de indet. 1); $a=-1$ e $b=1$, **SPI** (grau de indet. 2); $a=-1$ e $b\neq1$, **SI**.
b) $a\neq3$, **SPI** (grau de indet. 1); $a=3$ e $b=3$, **SPI** (grau de indet. 2); $a=3$ e $b\neq3$, **SI**.
c) $a\neq0$ e $b\neq0$, **SPD**; $a\neq0$ e $b=0$, **SI**; $a=0$ e $b\neq0$, **SPD** (grau de indet. 1); $a=0$ e $b=0$, **SPD** (grau de indet. 2).

Exercício 20. *a)* $\alpha \neq 2$; *b)* $x = 0$; *c)* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{6} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercício 21. *a)* $\alpha = 2$, **SI**; $\alpha \neq 2$, **SPD**.

Solução: $x = \dfrac{\alpha\beta - \alpha - 2\beta - 10}{4(\alpha - 2)}$, $y = \dfrac{2(1+\beta) - \alpha(3+\ \beta)}{4(\alpha-2)}$, $z = \dfrac{4}{\alpha - 2}$.

b) A matriz é invertível, porque para $\alpha = 1$, $\operatorname{car} A = 3$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 22. $x \neq 0$ e $x \neq -n$, onde n é a ordem da matriz.