



Universidade do Minho

Escola de Ciências

Departamento de Matemática
e Aplicações

Álgebra Linear EI

MIEINF

2015/2016

Aulas teóricas

5. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

5.1 Introdução

Definição: Sejam E e F dois espaços vetoriais reais e seja $f : E \rightarrow F$ uma aplicação de E em F . Diz-se que f é uma **transformação linear** ou **aplicação linear** se satisfaz as duas condições seguintes:

- ① $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v});$
- ② $\forall \mathbf{u} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}).$

Exemplos de transformações lineares

- $f : E \rightarrow F$ definida por $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F$ aplicação nula
- $f : E \rightarrow E$ definida por $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ aplicação identidade

Exemplos de transformações lineares (continuação)

► $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + z, -4y)$

► $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$,

A matriz real de ordem $m \times n$

Exemplos de aplicações que não são lineares

► $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$

► $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, x + y + 1)$

► $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(A) = \det A$

Teorema: *Sejam E e F espaços vetoriais e $f : E \rightarrow F$ uma transformação linear. Então:*

1. $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$
2. $\forall \mathbf{u} \in E, f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$
3. $\forall \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in E, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, f(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(\mathbf{u}_i)$

Demonstração:

1. $f(\mathbf{0}_E) = f(0 \cdot \mathbf{0}_E) = 0 \cdot f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F.$
2. $f(-\mathbf{u}) = f((-1)\mathbf{u}) = (-1)f(\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}).$
3. Indução sobre k .

5.2 Imagem e núcleo

Definição: Sejam E e F dois espaços vetoriais reais e seja $f : E \rightarrow F$ uma transformação linear.

Chama-se **núcleo** de f , e representa-se por $\text{Nuc } f$, ao conjunto

$$\text{Nuc } f = \{\mathbf{u} \in E : f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F\}.$$

Chama-se **imagem** de f (ou contradomínio de f), e representa-se por $\text{Im } f$, ao conjunto

$$\text{Im } f = \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in E\}.$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$f(x, y, z, w) = (x + y, y - z, x + w)$$

- ▶ f é uma transformação linear (Prove!)
- ▶ $\text{Nuc } f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : f(x, y, z, w) = (0, 0, 0)\}$
 $= \cdots = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle$
- ▶ $\text{Im } f = \{(x + y, y - z, x + w) : x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$
 $= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$

base=?

Teorema: *Sejam E e F espaços vetoriais e $f : E \rightarrow F$ uma transformação linear. Então:*

1. $\text{Nuc } f$ é um subespaço vetorial de E ;
2. $\text{Im } f$ é um subespaço vetorial de F .

Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

5.3 Representação matricial de transformações lineares

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a transformação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ é uma transformação linear. (exemplo pg. 146)

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, então

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 8x_3 \\ 2x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

A transformação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + 8x_3, 2x_1 + 5x_3)$$

é uma transformação linear.

Teorema: *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então existe uma matriz $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que*

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_f \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ a base canónica de \mathbb{R}^n . Dado

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ em \mathbb{R}^n , sabemos que $\mathbf{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Sejam $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$

as imagens por f dos vetores de \mathcal{B} , i.e. $\mathbf{a}_1 = f(e_1), \dots, \mathbf{a}_n = f(e_n)$.

Consideremos a matriz cujas colunas são $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ i.e.

$$\mathcal{M}_f = (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n).$$

Então, $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f \mathbf{x} &= (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n \\ &= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Acabamos de construir uma matriz \mathcal{M}_f cujas colunas são as imagens por f dos vetores da base canónica de \mathbb{R}^n e que satisfaz $\mathcal{M}_f \mathbf{x} = f(\mathbf{x})$. Esta matriz chama-se **a matriz da transformação f ou a representação matricial de f** .

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y + 5z, x + y + z, 9x + 2y + 5z, 4y).$$

$$\begin{array}{lcl} f(1, 0, 0) & = & (3, 1, 9, 0) \\ f(0, 1, 0) & = & (2, 1, 2, 4) \\ f(0, 0, 1) & = & (5, 1, 5, 0) \end{array} \longrightarrow \mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Obter $f(1, 1, 1)$ a partir de \mathcal{M}_f

Teorema: *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ uma base de \mathbb{R}^n . Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ são as coordenadas de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nessa base, i.e., se $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$, então*

$$f(\mathbf{x}) = \alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_n f(\mathbf{u}_n).$$

Demonstração: *imediatamente.*

⇒ Uma transformação linear está totalmente definida se soubermos as imagens dos vetores de uma base.

Exemplo: *Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $f(1, 2, 1) = (5, -1)$, $f(-1, 5, 1) = (0, 4)$ e $f(3, 1, 4) = (2, 3)$. Calcular $f(8, -3, 5)$.*

- ▶ $((1, 2, 1), (-1, 5, 1), (3, 1, 4))$ é uma base de \mathbb{R}^3 (verifique!)
- ▶ $(8, -3, 5) = 3(1, 2, 1) - 2(-1, 5, 1) + (3, 1, 4)$ (verifique!)
- ▶ $f(8, -3, 5) = 3f(1, 2, 1) - 2f(-1, 5, 1) + f(3, 1, 4) = (17, -8)$

Teorema: *Seja $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de uma dada transformação linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então*

- ① *O núcleo de f é igual ao espaço nulo de \mathcal{M}_f , i.e.*

$$\text{Nuc } f = \mathcal{N}(\mathcal{M}_f)$$

- ② *O espaço imagem de f coincide com o espaço das colunas de \mathcal{M}_f , i.e.*

$$\text{Im } f = \mathcal{C}(\mathcal{M}_f)$$

Demonstração: ao cuidado dos alunos.

Corolário:

1. $\dim \text{Im } f = \text{car}(\mathcal{M}_f)$
2. $\dim \text{Nuc } f = n - \text{car}(\mathcal{M}_f)$
3. $\dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f = n$

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de uma aplicação linear f .

$$A \xrightarrow{\text{linhas}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacktriangleright \text{Nuc } f = \mathcal{N}(A) = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{Im } f = \mathcal{C}(A) &= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle \\ &= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle \end{aligned}$$

$$\dim \text{Nuc } f = 1 \quad \dim \text{Im } f = 3 \quad n = 4 = 1 + 3$$

5.4 Aplicações injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição: Seja $f : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Diz-se que

- ① f é uma aplicação **injetiva** se e só se

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

- ② f é uma aplicação **sobrejetiva** se e só se

$$\forall \mathbf{v} \in F \exists \mathbf{u} \in E, f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$$

- ③ f é uma aplicação **bijetiva** se e só se f é injetiva e sobrejetiva.

Teorema: *Seja $f : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Então:*

- 1. f é injetiva se e só se $\text{Nuc } f = \{0_E\}$;*
- 2. f é sobrejetiva se e só se $\text{Im } f = F$.*

Demonstração:

1. (\Rightarrow) Seja f injetiva e seja $u \in \text{Nuc } f$. Então $f(u) = 0_F = f(0_E)$. Como f é injetiva, conclui-se que $u = 0_E$.

(\Leftarrow) Suponhamos agora que $\text{Nuc } f = \{0_E\}$ e que $f(x) = f(y)$, i.e. $f(x) - f(y) = 0_F$. Então, $f(x - y) = 0_F$, o que significa que $x - y \in \text{Nuc } f$, donde se conclui que $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$. A aplicação f é, por isso injetiva.

2. imediata

Exemplo: Relativamente à aplicação $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ do exemplo anterior

$$\text{Nuc } f = \mathcal{N}(A) = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle$$

e

$$\text{Im } f = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

Conclui-se que f não é injetiva, mas é sobrejetiva.

Em termos de matrizes, podemos concluir que, se $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz da aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, então

1. f é injetiva se e só se $\text{car } \mathcal{M}_f = n$;
2. f é sobrejetiva se e só se $\text{car } \mathcal{M}_f = m$.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Recordando que:

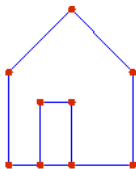
- ▶ $\dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f = n$
- ▶ f injetiva $\Leftrightarrow \dim \text{Nuc } f = 0$
- ▶ f sobrejetiva $\Leftrightarrow \dim \text{Im } f = m$

conclui-se que:

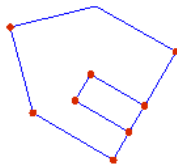
- ① se $n < m$, f não é sobrejetiva;
- ② se $n > m$, f não é injetiva;
- ③ se $n = m$ são equivalentes as afirmações
 - ▶ f é injetiva;
 - ▶ f é sobrejetiva;
 - ▶ f é bijetiva;
 - ▶ a matriz de f é invertível.

Aplicações (G. Strang)

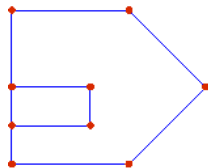
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



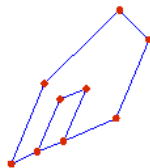
$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$



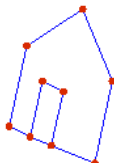
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

