3.4 Séries de termos com sinal arbitrário

Séries de termos com sinal arbitrário

- Uma série de termos com sinal arbitrário é uma série cujos termos não têm sinal fixo. Seja

$$\sum_{n\geq 1} u_n$$

  - Á série

$$\sum_{n\geq 1} |u_n|$$

chama-se série dos módulos associada à série dada.

- [Convergência]
  - Se a série $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n|$ é convergente então a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ também é convergente.
  - Se $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n|$
    - converge diz-se que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é absolutamente convergente;
    - diverge mas $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge diz-se que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é simplesmente convergente.

Exemplo

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\text{sen}\, n}{n^7}$.

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Séries alternadas

- Uma série alternada é a uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\, a_n, \qquad a_n > 0 \text{ para todo o } n\in\mathbb{N}.$$

  - A sucessão geradora, u , é definida por

$$u_n = (-1)^n\, a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

  - A sucessão das somas parciais, s, é definida por

$$s_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

  - Uma série alternada pode apresentar-se também da forma

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\, a_n, \qquad a_n > 0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

O seguinte critério permite analisar a convergência de uma série alternada.

- [Critério de Leibnitz]

  Seja a uma sucessão decrescente tal que

$$\lim_n a_n = 0.$$

  Então a série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ é convergente.

Exemplo

1. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ é convergente.

Observação

- Uma vez que

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

  é a série harmónica (é divergente), concluímos que a série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$$

  não é absolutamente convergente, mas é simplesmente convergente.

- As séries alternadas são casos particulares das séries de termos com sinal arbitrário.