Cálculo

folha 11 — 2015'16

Ainda séries numéricas.

1. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) se $(u_n)_n$ é convergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente;

(b) se $(u_n)_n$ é divergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente;

(c) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $(u_n)_n$ é convergente;

(d) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente então $(u_n)_n$ é divergente;

(e) se $\lim_n u_n = 0$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente;

(f) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente então $\lim_n u_n \neq 0$;

(g) se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim_n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 0$;

(h) se $\lim_n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 0$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente;

(i) se $\lim_n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 1$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

2. Em cada uma das seguintes alíneas, apresente um exemplo nas condições indicadas, ou justifique porque não existe:

(a) uma série convergente;

(b) uma série divergente;

(c) uma série alternada divergente;

(d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n\geq 1} u_n$ seja divergente e $\sum_{n\geq 1} u_n^2$ seja convergente;

(e) uma série divergente, $\sum_{n\geq 1} u_n$, tal que $\lim_n u_n = 0$;

(f) uma série convergente, $\sum_{n\geq 1} u_n$, tal que $\lim_n u_n = 1$;

(g) duas séries divergentes, $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$, tais que $\lim_n(u_n + v_n)$ seja convergente.

Séries de potências.

3. Determine o raio e o domínio de convergência das séries de potências

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1}x^n$ $(R=1)$;

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^5}{(n+1)!}x^n$ $(R=\infty)$;

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(x-2)^n}{n}$ $(R=1)$;

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ $(R=\infty)$;

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n!(x-3)^n$ $(R=0)$;

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2+\frac{1}{n+1}}x^n$ $(R=1)$;

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^n}x^n$ $(R=\infty)$;

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}x^n$ $(R=\frac{1}{3})$;

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{5^{n+1}}(x+1)^n$ $(R=5)$.

4. Recorde a série geométrica de razão $|r| < 1$

$$\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Usando a série geométrica escreva as seguintes funções como séries de potências indicando o seu intervalo de convergência.

(a) $\dfrac{1}{1+x}$

(b) $\dfrac{1}{2+x}$

(c) $\dfrac{x^3}{2+x}$

(d) $\dfrac{1}{1+x^7}$

(e) $\dfrac{2}{3-x}$

(f) $\dfrac{1}{8+x^3}$.

5. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(a) Escreva a função f como uma série de potências indicando o seu domínio de convergência.

(b) Recorrendo à a alínea anterior, escreva nas forma de série de potências as funções

i. $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ ii. $\dfrac{x}{1+x^2}$ iii. $\ln(1+x^2)$

Séries de Taylor e MacLaurin.

6. Mostre que

(a) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad |x| < 1;$

(b) $\operatorname{sen} x = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R};$

(c) $\cos x = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R};$

(d) $e^x = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$

(e) $\ln x = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n, \quad |x-1| < 1;$

(f) $\ln(x+1) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad |x| < 1.$

7. Mostre que

$$1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{3!2^3} + \frac{\pi^5}{5!2^5} - \frac{\pi^7}{7!2^7} + \ldots$$

(Sug: recorde o exercício 6b.)

8. Seja $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

(a) Determine a série de Taylor de f em torno de $a = 0$.

(b) Determine a série de Taylor de f em torno de $a = 1/2$.

9. * Considere a série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$.

No exercício 3d mostrou-se que esta série converge para todo o $x \in \mathbb{R}$. Designe-se por $f(x)$ a soma da série.

(a) Mostre que $f(x) = f'(x)$.

(b) Mostre que a função e^x é a única função que verifica as condições

$$f(x) = f'(x), \qquad f(0) = 1.$$

Conclua que $e^x = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$.