

## Otimização não linear

Isabel Espírito Santo

Departamento de Produção e Sistemas

Escola de Engenharia

Universidade do Minho

iapinho@dps.uminho.pt

<http://www.norg.uminho.pt/iapinho/>

## Otimização

Otimização:

- surge no processo de tomada de decisões para se atingir o melhor resultado possível;
- é um dos objetivos dos profissionais das áreas das **Ciências de Gestão e Engenharia**;
- está relacionada com a **maximização** ou **minimização** de modelos matemáticos - **função objetivo**;
- em certos casos, as **variáveis de decisão** estão sujeitas a condições, designadas **restrições**,
- também surge noutras áreas: ciências aplicadas, economia, finanças, medicina e estatística.

## Classificação de problemas

Os problemas de otimização são divididos em Problemas de Otimização Linear e **Problemas de Otimização Não Linear** - de acordo com as características das funções objetivo e de restrição:

- Otimização Linear: se a função objetivo e as restrições são lineares;
- **Otimização Não Linear (ONL): se o objetivo e as restrições contêm funções não lineares nas variáveis;**
  - casos particulares:
    - problemas quadráticos
    - problemas convexos (funções convexas)
    - problemas sem restrições.

## Classificação de problemas - exemplos

**ONL:**

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + 3x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1 + 5x_2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

Problema quadrático  
rest. de desigualdade  
funções diferenciáveis

**ONL:**

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a} & (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{array}$$

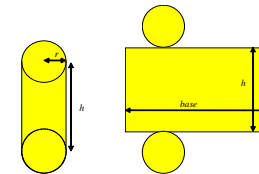
rest. de igualdade  
funções diferenciáveis

## Classificação de problemas - exemplos

<b>ONL:</b>	<b>ONL:</b>
$\min -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$	$\min (x_1 - 1)^2 + x_2^3 - x_1 x_2$
<b>s.a</b>	
$x_1 + x_2 = -1$ $x_1^2 + x_2^2 = 0.5$	
rest. de igualdade	sem restrições
funções diferenciáveis	função diferenciável
<b>ONL:</b>	<b>ONL:</b>
$\max 2(-x_1^2 - x_2^2 + 1) + x_1$	$\min \max\{x_1, x_2\} + ( x_1  +  x_2 )$
sem restrições	sem restrições
função diferenciável	função não diferenciável

## Exemplo 1

Tendo como objetivo fabricar latas cilíndricas com um volume de 1000 cm<sup>3</sup> e tapá-las em ambas as extremidades, qual deverá ser o raio da base e a altura da lata de modo a minimizar a quantidade de placa metálica, em termos de área superficial?



## Exemplo 1 (cont.)

$$\begin{aligned} \text{Área Total} &= \text{Área}_{\text{retângulo}} + 2 \times \text{Área}_{\text{círculo}} \\ &= \text{base} \times h + 2(\pi r^2) \\ &= \text{Perímetro}_{\text{círculo}} \times h + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \pi r^2 \times h \\ 1000 &= \pi r^2 \times h \end{aligned}$$

Formulação do problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & A(r, h) \equiv 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \pi r^2 h = 1000 \end{aligned}$$

Problema com 2 variáveis e 1 restrição

## Exemplo 1 (cont.)

Este problema pode ser transformado num problema sem restrições e uma variável:  $1000 = \pi r^2 \times h \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$   
Substituindo em  $A(r, h)$  vem

$$A(r) = 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2, r \neq 0$$

Problema unidimensional sem restrições

$$\min_{r \in \mathbb{R}} A(r) \equiv \frac{2000}{r} + 2\pi r^2, \quad r \neq 0$$

## Exemplo 2

O produto de três números positivos é igual a  $A$  (dado).  
Determine esses números por forma que a sua soma seja máxima.

Problema com 3 variáveis e com 1 restrição

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 x_2 x_3 = A \end{array}$$

Sendo  $x_3 = \frac{A}{x_1 x_2}$  e substituindo  $\Rightarrow$

Problema com 2 variáveis sem restrições

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + x_2 + \frac{A}{x_1 x_2}, \quad x_1, x_2 \neq 0$$

## Formulação de um problema sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1)$$

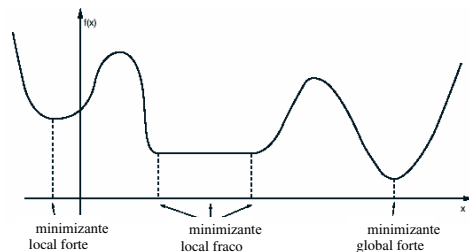
- Se  $n = 1 \Rightarrow$   $\left[ \begin{array}{l} \text{problema unidimensional} \\ x \text{ é escalar} \end{array} \right.$
- Se  $n > 1 \Rightarrow$   $\left[ \begin{array}{l} \text{problema multidimensional} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ é vetor de dimensão } n \end{array} \right.$

## Classificação de mínimos (e máximos)

Seja  $V(x, \delta)$  uma vizinhança (bola aberta) de  $x^*$  de raio  $\delta$  ( $\delta > 0$ ).

$x^*$  é **minimizante local forte (fraco)** se  $\exists \delta > 0$ :

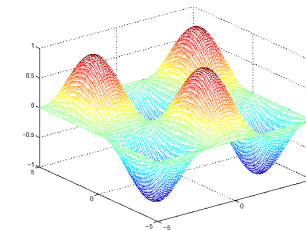
- $f(x)$  é definida em  $V(x^*, \delta)$
- $f(x^*) < (\leq) f(x), \forall x \in V(x^*, \delta); x \neq x^*$



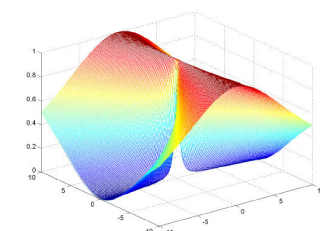
## Classificação de mínimos (e máximos)

$x^*$  é **maximizante local forte (fraco)** se  $\exists \delta > 0$ :

- $f(x)$  é definida em  $V(x^*, \delta)$
- $f(x^*) > (\geq) f(x) \forall x \in V(x^*, \delta); x \neq x^*$



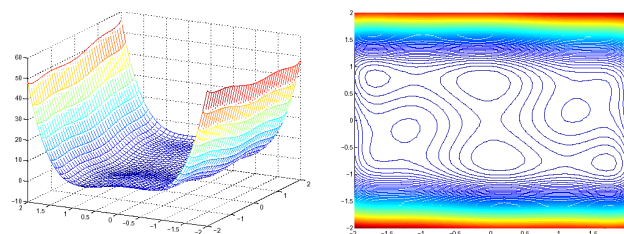
(máximos e mínimos fortes)



(máximos e mínimos fracos)

## Classificação de mínimos (e máximos)

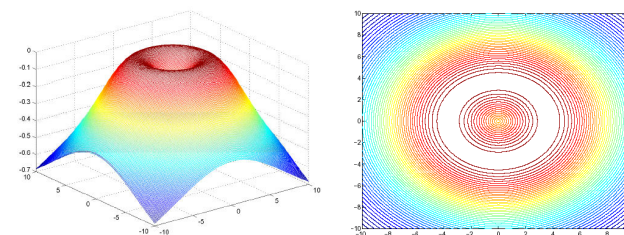
$x^*$  é **minimizante global forte (fraco)** se  $f(x^*) < (\leq) f(x)$ , para todo o  $x$  que pertence ao domínio de  $f(x)$  (onde a função é definida);



(2 mínimos globais e 4 mínimos locais)

## Classificação de mínimos (e máximos)

$x^*$  é **maximizante global forte (fraco)** se  $f(x^*) > (\geq) f(x)$  para todo o  $x$  que pertence ao domínio de  $f(x)$  (onde a função é definida);



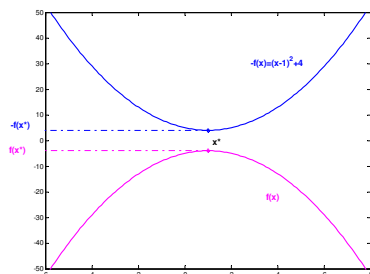
(máximos globais fracos)

Nota: Todo o ótimo global é local; no entanto, um ótimo local pode não ser global.

## Mínimos vs máximos

$$\max f(x) = -\min(-f(x))$$

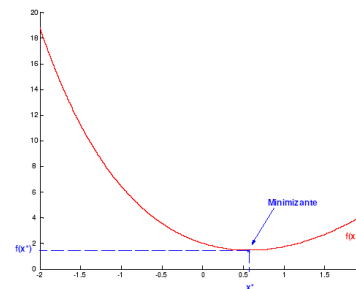
$$x^* = \underbrace{\arg \max (f(x))}_{\text{maximizante}} = \underbrace{\arg \min (-f(x))}_{\text{minimizante}}$$



## Problema unidimensional ( $n = 1$ )

Exemplo 3

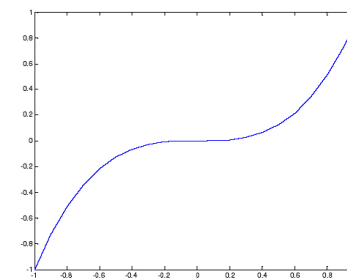
$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \equiv x^2 + 2e^{-x}$$



(tem 1 mínimo)

Exemplo 4

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \equiv x^3$$



(não tem mínimos)

## Condições de otimalidade

Assume-se  $f(x)$  continuamente diferenciável até à 2ª ordem.

### Condição necessária (e suficiente) de 1ª ordem:

Se  $x^*$  é uma solução do problema (1) ( $n = 1$ ) então

- $f'(x^*) = 0$ .

**Nota:** A equação  $f'(x) = 0$  define os pontos estacionários da função objetivo  $f(x)$ :

- minimizante (exemplo 3)
- maximizante
- ponto de inflexão (exemplo 4).

**Exemplo:**  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \equiv x^2 + 2e^{-x}$

Pontos estacionários:  $f'(x) \equiv 2x - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2(x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow$  as soluções **desta equação não linear** em  $x$  - resolução pelo método iterativo da secante ou Newton - são: (única) 0.567143

## Condições de otimalidade

Condição necessária de 2ª ordem:

Se  $x^*$  é uma solução do problema (1) ( $n = 1$ ) que satisfaz a condição de 1ª ordem, então

- $f''(x^*) \geq 0$ .

### Condição suficiente de 2ª ordem:

- Se  $x^*$  é tal que  $f'(x^*) = 0$  e se

$$f''(x^*) > 0$$

então  $x^*$  é um minimizante local forte de (1).

- Se  $x^*$  é tal que  $f'(x^*) = 0$  e se

$$f''(x^*) < 0$$

então  $x^*$  é um maximizante local forte de (1).

## Métodos de resolução ( $n = 1$ )

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

- Métodos de procura (ou pesquisa) direta
- Métodos de aproximação
- Métodos mistos

O método de Davies, Swann e Campey (DSC)

- é um método iterativo que só usa informação da função objetivo,  $f$
- é um método misto constituído por uma fase de procura e uma fase de aproximação
- a fase de aproximação é baseada numa interpolação quadrática
- destina-se a problemas de otimização unidimensionais

## Método misto de DSC

### 1. Fase de procura

constrói, em cada iteração, 3 pontos igualmente distanciados que definem um intervalo que contém o minimizante da função, comparando apenas os valores da função em diversos pontos.

### 2. Fase de aproximação

aproxima a função no intervalo por uma quadrática e usa o seu minimizante como aproximação ao minimizante da função.

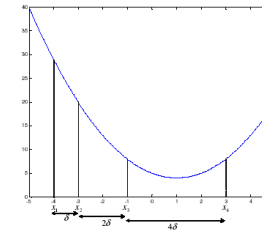
## Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

- A procura começa com 1 aproximação inicial  $x_1$  e uma perturbação  $\delta > 0$ .
- A partir do  $x_1$  e no sentido positivo, calcula-se uma sequência de pontos  $x_2, x_3, x_4, \dots$  distanciados uns dos outros de, respectivamente,  $\delta, 2\delta, 4\delta, 8\delta, \dots$

$$\begin{aligned} x_1 & \\ x_2 &= x_1 + \delta \\ x_3 &= x_2 + 2\delta \\ &\dots \\ x_k &= x_{k-1} + 2^{k-2}\delta \end{aligned}$$

até que no ponto  $x_k$  se tenha  $f(x_k) > f(x_{k-1})$ .

## Método de Davies, Swann e Campey (DSC)



Nesta altura, tem-se

$$\dots < x_{k-2} < x_{k-1} < x_k$$

em que  $f(x_{k-2}) \geq f(x_{k-1})$  e  $f(x_{k-1}) < f(x_k)$  e a distância entre  $x_k$  e  $x_{k-1}$  é duas vezes a distância entre  $x_{k-1}$  e  $x_{k-2}$ .

## Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

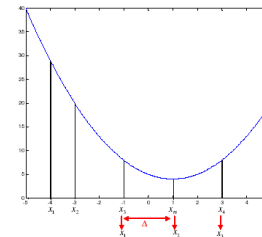
- Calcula-se o ponto médio do último intervalo:

$$x_m = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

e fica-se com 4 pontos igualmente espaçados

$$x_{k-2} < x_{k-1} < x_m < x_k$$

## Método de Davies, Swann e Campey (DSC)



- Para a aproximação quadrática, é necessário seleccionar três dos quatro pontos. Para isso, comparam-se os valores de  $f(x)$  nos dois pontos interiores do intervalo:  
Se  $f(x_{k-1}) \leq f(x_m)$  então escolhem-se os pontos  $x_{k-2}, x_{k-1}$  e  $x_m$   
senão ( $f(x_{k-1}) > f(x_m)$ ) escolhem-se os pontos  $x_{k-1}, x_m$  e  $x_k$

## Fase de aproximação do método DSC

**MIN q** O minimizante da quadrática,  $x^*(q)$ , que passa por estes três pontos (nesta fase, redefinidos por  $x_1 < x_2 < x_3$ ) determina-se por

$$x^*(q) = x_2 + \Delta \frac{f(x_1) - f(x_3)}{2(f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1))}$$

com  $\Delta = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2)$ .

- De seguida, verifica-se o critério de paragem, que consiste em verificar se a distância entre os pontos que foram usados para construir a quadrática não excede uma certa quantidade:

$$(x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \Delta \leq \varepsilon$$

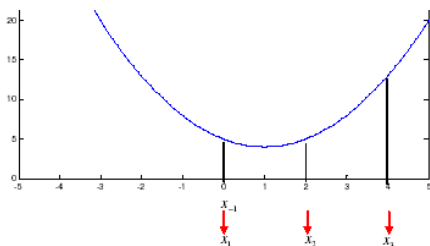
em que  $\varepsilon > 0$  ( $\approx 0$ ).

## Paragem do método DSC

- Se o critério de paragem for verificado, o processo iterativo termina, sendo  $x^*(q)$  a melhor aproximação calculada à solução;
  - Se o critério de paragem não se verificar, o processo repete-se e o minimizante da quadrática,  $x^*(q)$ , passa a ser o  $x_1$  da nova iteração. A perturbação  $\delta$  também deve ser reduzida através de:  $\delta = M\delta$ , com  $M < 1$ .
- Quando, a partir de  $x_1$ , o valor de  $f(x_2) > f(x_1)$  (para  $x_2 = x_1 + \delta$ ) a procura deve voltar-se para o sentido negativo, a começar novamente por  $x_1$ . Neste caso, o próximo ponto, na procura, é  $x_{-1} = x_1 - \delta$ , e

## Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

- Se  $f(x_{-1}) > f(x_1)$ , significa que o intervalo definido por  $[x_{-1}, x_2]$ , com  $x_1$  como ponto médio, contém o minimizante desejado. Nesta altura, determina-se o minimizante da quadrática (que passa pelos três pontos agora calculados),  $x^*(q)$ , tal como está descrito no ponto **MIN q**.



## Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

- No entanto, se  $f(x_{-1}) < f(x_1)$ , significa que a procura deve continuar no sentido negativo até que  $f(x_{-k}) > f(x_{-(k-1)})$ , isto é, procede-se da seguinte forma: Nesta altura, tem-se

$$x_{-k} < x_{-(k-1)} < x_{-(k-2)} < \dots$$

em que  $f(x_{-(k-2)}) \geq f(x_{-(k-1)})$  e  $f(x_{-(k-1)}) < f(x_{-k})$

## Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

e a distância entre  $x_{-k}$  e  $x_{-(k-1)}$  é duas vezes a distância entre  $x_{-(k-1)}$  e  $x_{-(k-2)}$ .

Calcula-se o ponto médio do último intervalo:

$$x_m = \frac{x_{-k} + x_{-(k-1)}}{2}$$

e fica-se com 4 pontos igualmente espaçados

$$x_{-k}, x_m, x_{-(k-1)}, x_{-(k-2)}$$

Se  $f(x_m) < f(x_{-(k-1)})$  então escolhem-se os pontos  $x_{-k}, x_m$  e  $x_{-(k-1)}$  senão ( $f(x_m) \geq f(x_{-(k-1)})$ ) escolhem-se os pontos  $x_m, x_{-(k-1)}$  e  $x_{-(k-2)}$

## Método de Davies, Swann e Campey (DSC)

O processo entra na fase de aproximação - ponto **MIN q** - calcula-se o minimizante da quadrática que passa pelos 3 pontos agora seleccionados - tal como foi descrito na procura no sentido positivo:

