Cálculo

1. Estude os seguintes integrais impróprios

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(\pi x)\,dx$

(g) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

2. Mostre que o integral abaixo é convergente se $r < -1$ e divergente se $r \geq -1$

$$\int_1^{+\infty} x^r\,dx$$

(Sug.: comece por estudar o caso $r = -1$.)

3. Considere o integral divergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx.$$

Qual será o volume do sólido de revolução gerado pela região definida por $y = \dfrac{1}{x}$ com $x \geq 1$ e o eixo das abcissas em torno deste eixo? Comente.

4. Mostre que o integral abaixo é convergente se $r > 0$ e divergente se $r \leq 0$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\,x}\,dx$$

(Sug.: comece por estudar o caso $r = 0$.)

5. Seja $\mathcal{R}$ a região definida por $y = e^{-x}$ com $x \geq 0$ e o eixo das abcissas.

(a) Esboce $\mathcal{R}$.

(b) Calcule, se possível, a área de $\mathcal{R}$.

(c) Encontre, se possível, volume do sólido de revolução gerado por $\mathcal{R}$

i. em torno de xx

ii. em torno de yy

(d) Determine, se possível, o comprimento da curva que limita $\mathcal{R}$ superiormente.

6. Indique, justificando, se cada um dos seguintes integrais é convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$.

(Sug.: escreva o integral como soma de dois integrais.)

7. Seja f uma função tal que

$$\lim_{c\longrightarrow+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0.$$

O que se pode, nestas condições, dizer sobre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,?$$

8. Estude a natureza dos seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

9. Considere a função $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

(a) Indique o domínio de f.

(b) Estude a natureza do integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$