Cap. 3– Séries

M. Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

dezembro de 2015

3.5 Exemplos de aplicação

Motivação

Aplicação à matemática

Aplicação à física

Aplicação à economia

Motivação

- [Paradoxo de Zenão]

  No séc. V a.c., o filósofo grego Zenão propôs um problema hoje designado Paradoxo de Zenão ou Paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

  Aquiles, o herói mais veloz da mitologia grega, aposta uma corrida contra uma lenta tartaruga. Como a velocidade de Aquiles é maior que a da tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando a corrida dez metros à sua frente.
  Em pouco tempo, Aquiles atinge a marca dos 10m, mas neste intervalo de tempo a tartaruga caminhou 1m. Em seguida, Aquiles percorre esse metro adicional, mas a tartaruga não está mais lá, pois percorreu mais 1/10 de metro. Quando Aquiles cobre este 1/10 de metro adicional, a tartaruga está 1/100 de metro à frente. E depois, 1/1000 à frente, e depois 1/10.000, etc.

  Pode Aquiles vencer a tartaruga?

- O espaço percorrido pela tartaruga é

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^n}$$

- O espaço percorrido por Aquiles é

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} = 11 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^n}$$

- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{9}$ pois é uma série geométrica de razão $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$, logo convergente.

- O espaço percorrido pela tartaruga é $1 + \frac{10}{9} = \frac{19}{9}$ m e o espaço percorrido por Aquiles é $11 + \frac{10}{9} = \frac{109}{9}$ m. Logo, Aquiles vence a tartaruga.

Aplicação à matemática

- [Aplicação ao cálculo]

  Escrever o número $2,3(17)$ (dízima infinita e periódica) como o quociente de dois números inteiros.

  - Temos

$$\begin{aligned} 2,3(17) = 2,3171717\ldots &= 2,3 + 0,017 + 0,00017 + \ldots \\ &= 2,3 + \frac{17}{1000} + \frac{17}{10000} + \ldots \end{aligned}$$

  - A soma

$$\frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots = \frac{17}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right)$$

  é uma série geométrica de 1.º termo $\frac{17}{10^3}$ e razão $\frac{1}{10^2}$

- Logo

$$\frac{17}{10^3}+\frac{17}{10^5}+\frac{17}{10^7}+\ldots=\sum_{n\geq 1}\frac{17}{10^3}\frac{1}{10^{2n}}$$
$$=\frac{17}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{17}{10^3}\frac{100}{99}$$
$$=\frac{17}{990}$$

- Assim

$$2,3(17)=2,3+\frac{17}{990}$$
$$=\frac{23}{10}+\frac{17}{990}=\frac{1147}{495}.$$

Aplicação à física

- [Aplicação à física]

  Uma bola saltitona perde metade da sua energia a cada salto e a altura atingida a cada salto é proporcional à energia da bola. Suponhamos que a bola é deixada cair a uma altura de 1m do solo.

  Qual é o espaço total percorrido pela bola?

- A cada salto, a bola, atinge metade da altura do salto anterior e, em cada salto, percorre duas vezes a altura do salto (uma quando sobe e outra quando cai):

$$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \ldots = \left[(1+1) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \ldots\right] - 1$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1.$$

- Esta é uma série geométrica onde $a = 1$ e $r = \frac{1}{2} < 1$, logo é uma série convergente e

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \left[2 \times \frac{1}{1 - 1/2}\right] - 1 = 3.$$

- O espaço percorrido pela bola é 3m.

Aplicação à economia

- [Cálculo de juros]

  Suponha que investe 1.000 euros no primeiro dia de cada ano e que o juro é pago, todos os anos, a 5%.

  Quanto tem ao fim de 25 anos?

Analisemos o caso geral.

- Se, no início do ano k tiver D_k dinheiro, no final desse ano terá $D_k \times 1,05$.

- Seja I o montante investido no início de cada ano (1.000 euros) e r a taxa de juro $(1,05)$.

Ano	Dinheiro inicial
1	$I = D_1$
2	$D_1\, r + I = (r+1)\, I = D_2$
3	$D_2\, r + I = (r^2 + r + 1)\, I = D_3$
4	$D_3\, r + I = (r^3 + r^2 + r + 1)\, I = D_4$
$\vdots$	$\dots$

- Ao fim de 25 anos ter-se-à $D_{25} = \sum_{n=1}^{25} I\, r^{n-1}$.

- Para o nosso exemplo,

$$1.000 \sum_{n=1}^{25} 1,05^n = 1.000 \times \frac{1 - 1,05^{24}}{1 - 1,05} = 1.000 \times 44,5019988 \approx 44.502 \,\text{euros}.$$

Observação

- Suponha, agora, que investe 1.000 euros no primeiro dia do próximo ano e que o juro é pago, todos os anos, a 5%.

  Quanto tem ao fim de 25 anos?

  Qual é a diferença relativamente ao exemplo anterior?