



**Universidade do Minho**

Escola de Ciências

Departamento de Matemática  
e Aplicações

# Álgebra Linear EI

**MIEINF**

2015/2016

Aulas teóricas

## 4. ESPAÇOS VETORIAIS

### 4.1 O espaço $\mathbb{R}^n$

Seja  $n \in \mathbb{N}$ . O conjunto dos  $n$ -uplos ordenados de números reais, isto é, o conjunto dos elementos da forma

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}$$

é designado por  $\mathbb{R}^n$ .

Dois elementos  $\mathbf{x} = (x_i)$  e  $\mathbf{y} = (y_i)$  de  $\mathbb{R}^n$  dizem-se iguais se e só se as componentes homólogas são iguais, isto é,

$$x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## Notação:

- ▶ o elemento de  $\mathbb{R}^n$  cujas componentes são todas iguais a zero representa-se por **0**.
- ▶ Se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  **$-x$**  representa o elemento de  $\mathbb{R}^n$  cujas componentes são os simétricos das componentes homólogas de  $x$ , isto é,  $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ .

Em  $\mathbb{R}^n$  definimos duas operações:

### ① Adição

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

### ② Multiplicação por um número real

$$\alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

**Teorema:** *Sejam  $x, y, z$  elementos de  $\mathbb{R}^n$  e sejam  $\alpha, \beta$  números reais. Então*

1.  $x + y = y + x.$
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z.$
3.  $x + \mathbf{0} = x.$
4.  $x + (-x) = \mathbf{0}.$
5.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$
6.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$
7.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$
8.  $1x = x.$

Porque o conjunto  $\mathbb{R}^n$  algebrizado com as operações de adição e multiplicação por um número real satisfaz as propriedades listadas no teorema anterior diz-se que  $\mathbb{R}^n$  é um **espaço vetorial real**.

Os elementos de  $\mathbb{R}^n$  são chamados **vetores** do espaço  $\mathbb{R}^n$ .

0 é designado por **vetor nulo** de  $\mathbb{R}^n$ .

Os espaços  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  adquirem um significado geométrico quando “identificados” respetivamente, com o conjunto dos vetores de um plano, e com o conjunto dos vetores do espaço ordinário.

## 4.2 Espaço vetorial - definição

Seja  $V$  um conjunto no qual estão definidas duas operações:

① uma que designamos por **adição** e que associa a cada par  $(u, v)$  de elementos de  $V$ , um e um só elemento de  $V$ , representado por

$$u + v$$

② outra operação, que designamos por **multiplicação escalar** e que associa a cada número real  $\alpha$  e cada elemento  $u$  de  $V$ , um e um só elemento de  $V$ , representado por

$$\alpha \cdot u \quad \text{ou} \quad \alpha u$$

**Definição:** Diz-se que  $V$  é um espaço vetorial real se estas operações satisfazem as seguintes propriedades:

1.  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$  comutatividade da adição
2.  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.$  associatividade da adição
3.  $\exists \mathbf{0}_V \in V \forall \mathbf{u} \in V: \mathbf{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \mathbf{u} = \mathbf{u}.$   
existência de elemento neutro da adição
4.  $\forall \mathbf{u} \in V \exists \mathbf{u}' \in V: \mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{0}_V = \mathbf{u}' + \mathbf{u}.$   
existência de elemento simétrico da adição
5.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V, (\alpha + \beta) \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}.$   
distributividade da multiplicação escalar relativamente à adição em  $\mathbb{R}$
6.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}.$   
distributividade da multiplicação escalar relativamente à adição em  $V$
7.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V, (\alpha \beta) \mathbf{u} = \alpha(\beta \mathbf{u}).$   
associatividade mista da multiplicação escalar
8.  $\forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{1} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.$

## Exemplos

1. O conjunto  $\mathbb{R}^{m \times n}$  das matrizes reais de ordem  $m \times n$ , com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação por um número, é um espaço vetorial real.
2. O conjunto  $\mathcal{P}_n(x)$  dos polinómios, na variável  $x$ , com coeficientes reais, de grau inferior ou igual a  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}_0$ , isto é,

$$\mathcal{P}_n(x) = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

é um espaço vetorial real para a adição usual de polinómios e multiplicação de um polinómio por um número real.

E o conjunto  $\{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0\}$ ?

Os elementos de um espaço vetorial chamam-se **vetores** e os elementos de  $\mathbb{R}$  são chamados **escalares**.



**Nota:** Os espaços vetoriais que definimos são espaços vetoriais **reais** porque os escalares usados na multiplicação escalar são números reais; existem também espaços vetoriais **complexos**, quando os escalares forem números complexos (e até espaços em que os escalares pertencem a outros conjuntos que não  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

Como, neste curso, consideramos apenas espaços vetoriais reais, quando falarmos em espaço vetorial, tal deverá ser entendido com o significado de espaço vetorial real.

- Os espaços vetoriais  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $\mathbb{R}^{1 \times n}$

$\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

$\mathbb{R}^{n \times 1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Os espaços vetoriais  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $\mathbb{R}^{1 \times n}$  são “o mesmo”, pelo que não os distinguiremos e falaremos sempre em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema:** *Seja  $V$  um espaço vetorial.*

1. *O elemento neutro para a adição é único (representamo-lo por  $0_V$  ou apenas  $0$ ).*
2. *Para cada  $v \in V$ , o simétrico de  $v$  é único (representamo-lo por  $-v$ ).*
3. *Para quaisquer vetores  $u, v, w \in V$  e quaisquer escalares  $\alpha, \beta$ , tem-se*

- ▶  $u + v = u + w \Rightarrow v = w$
- ▶  $v + u = w + u \Rightarrow v = w$
- ▶  $\alpha 0 = 0$
- ▶  $0v = 0$
- ▶  $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$ ; *em particular*,  $(-1)v = -v$
- ▶  $\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$  ou  $v = 0$
- ▶  $\alpha u = \alpha v, \alpha \neq 0 \Rightarrow u = v$
- ▶  $\alpha v = \beta v, v \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

**Definição:** Um subconjunto não vazio  $U$  de um espaço vetorial  $V$  é chamado um **subespaço vetorial** (ou apenas **subespaço**) de  $V$  se

1.  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in U, \alpha \mathbf{u} \in U$ .

## Exemplos

- ▶ O conjunto  $\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$ .
- ▶ O conjunto  $\mathcal{S}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$  não é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$ .

**Observação:** Um subespaço de  $V$  é, ele próprio, um espaço vetorial (para as operações nele naturalmente definidas por ser um subconjunto de  $V$ ).

**Definição:** Sejam  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  vetores de um espaço vetorial  $V$ . Diz-se que  $\mathbf{v} \in V$  é **combinação linear** dos vetores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  se

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n,$$

com  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ .

Os escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  dizem-se **coeficientes da combinação linear**.

## Exemplos

1. O vetor  $\mathbf{v} = (3, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$  é combinação linear dos vetores  $\mathbf{u}_1 = (5, -2)$  e  $\mathbf{u}_2 = (1, -1)$ , uma vez que

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - 2 \mathbf{u}_2.$$

2. O vetor  $\mathbf{v} = (3, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$  não é combinação linear dos vetores  $\mathbf{u}_1 = (-2, 2)$  e  $\mathbf{u}_2 = (1, -1)$ . (Porquê?)

**Teorema:** Se  $u_1, u_2, \dots, u_n$  são vetores de um espaço vetorial  $V$ , então o conjunto  $U$  formado por todas as combinações lineares destes vetores é um subespaço vetorial de  $V$ .

*Demonstração:*

①  $U$  é não vazio, pois  $\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$ , i. e.  $\mathbf{0} \in U$

② Se  $u, v \in U$ , isto é, se  $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$  e  $v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$ , então

$$\begin{aligned}u + v &= (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n) \\&= (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)u_n.\end{aligned}$$

Logo  $u + v \in U$ , porque é combinação linear de  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

③ Também

$$\alpha u = \alpha(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = (\alpha \alpha_1) u_1 + \dots + (\alpha \alpha_n) u_n$$

pertence a  $U$ .

O subespaço formado por todas as combinações lineares dos vetores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  chama-se **subespaço gerado** pelos vetores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  e denota-se por  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ , i.e.

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \{ \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n : \alpha_i \in \mathbb{R} \}$$

Se  $U = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ , diz-se que  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  **geram**  $U$  ou são **geradores** de  $U$ .

## Exemplos

1.  $\langle (1, 0) \rangle = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0 \}$
2.  $\langle (1, 1), (2, 3) \rangle = \mathbb{R}^2$
3.  $\langle (1, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c \}$

O conjunto

$$S = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b + c \}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ . Indique um conjunto de geradores deste subespaço.

**Teorema:** *Sejam  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  e  $\mathbf{v}$  vetores de um espaço vetorial  $V$ . Então, o vetor  $\mathbf{v}$  é combinação linear de  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  se e só se*

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \rangle.$$

**Demonstração:**

► Suponhamos que  $\mathbf{v}$  é combinação linear de  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  e mostremos que

$$\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \rangle.$$

Sejam

$$U = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle \quad \text{e} \quad U' = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \rangle$$

Se  $\mathbf{x} \in U$  então

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n + 0 \mathbf{v},$$

logo  $\mathbf{x} \in U'$ , i.e.  $U \subset U'$ .

Se  $y \in U'$  então

$$y = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} v$$

onde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ . Como  $v$  é combinação linear de  $u_1, \dots, u_n$  então

$$v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n,$$

com  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ . Donde, substituindo,

$$y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_{n+1} \beta_1) u_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1} \beta_2) u_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1} \beta_n) u_n$$

ou seja  $y \in U$ , i.e.  $U' \subset U$ .

Como  $U' \subset U$  e  $U \subset U'$ , conclui-se que  $U = U'$ .

► Para mostrar que, se  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_n, v \rangle$ , então  $v$  é combinação linear de  $u_1, \dots, u_n$  basta notar que  $v \in \langle u_1, \dots, u_n, v \rangle$  (porquê?), donde  $v \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ , ou seja,  $v$  é combinação linear de  $u_1, \dots, u_n$ .



## Teorema:

*Sejam  $u_1, \dots, u_n$  vetores de um espaço vetorial  $V$  e sejam  $v_1, \dots, v_n$  vetores obtidos de  $u_1, \dots, u_n$  por uma das seguintes operações:*

- 1. troca da ordem de dois vetores;*
- 2. multiplicação de um dos vetores por um escalar não nulo;*
- 3. substituição de um vetor pela sua soma com um múltiplo de outro.*

*Tem-se então*

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle .$$

**Demonstração:** ver folha de exercícios.

## 4.3 Bases e dimensão

**Definição:** Os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de um espaço vetorial  $V$  dizem-se **linearmente independentes** se só for possível escrever o vetor nulo como combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  considerando todos os coeficientes iguais a zero, i.e. se tivermos

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_m$  dizem-se **linearmente dependentes** se não são linearmente independentes.

### Exemplos

1. Os vetores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u = (1, 2)$  e  $v = (2, 4)$  são linearmente dependentes.
2. Os vetores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $u = (1, 2, 0)$  e  $v = (1, 2, 4)$  são linearmente independentes.
3. Os vetores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $u = (1, 2, 0)$ ,  $v = (1, 2, 4)$  e  $w = (1, 0, 0)$  são linearmente independentes.

**Teorema:** *Os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ( $n \geq 2$ ) de um espaço vetorial  $V$  são linearmente dependentes se e só se (pelo menos) um dos vetores puder ser escrito combinação linear dos restantes.*

**Demonstração:**

► Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n$  linearmente dependentes.

Então pode ter-se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

com pelo menos um dos coeficientes diferente de zero.

Suponhamos que  $\alpha_1 \neq 0$ .<sup>5</sup> Então podemos escrever

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n.$$

Donde,  $v_1$  é combinação linear dos restantes vetores.

---

<sup>5</sup>A demonstração será totalmente análoga se considerarmos outro escalar não nulo.

► Suponhamos agora que um dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , por exemplo  $v_1$ , é combinação linear dos restantes, i.e.

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Vem então

$$v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

Tem-se assim uma combinação linear nula com pelo menos um dos coeficientes diferente de zero (o de  $v_1$ , que vale 1), pelos que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são linearmente dependentes.

## Exemplos

1. Os vetores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u = (1, 2)$  e  $v = (2, 4)$  são linearmente dependentes, porque  $v = 2u$ .
2. Os vetores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $u = (1, 2, 0)$ ,  $v = (1, 2, 4)$  e  $w = (3, 6, 4)$  são linearmente dependentes, porque  $w = 2u + v$ .

**Teorema:** *Se  $v_1, \dots, v_n$  são vetores linearmente independentes de um espaço vetorial  $V$  e  $v$  não é combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$ , então  $v_1, \dots, v_n, v$  são linearmente independentes.*

**Demonstração:**

Consideremos

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v = \mathbf{0}$$

e mostremos que terá de ser  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0$ .

Se  $\alpha_{n+1}$  fosse diferente de zero, poder-se-ia escrever  $v$  como combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$ , o que iria contra a hipótese. Logo, temos de ter  $\alpha_{n+1} = 0$ . Mas então, ficamos com

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}.$$

Como, por hipótese,  $v_1, \dots, v_n$  são vetores linearmente independentes, isto implica que terá de ser  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

## Teorema:

Sejam  $u_1, \dots, u_n$  vetores de um espaço vetorial  $V$  e sejam  $v_1, \dots, v_n$  vetores obtidos de  $u_1, \dots, u_n$  por uma das seguintes operações:

1. troca da ordem de dois vetores;
2. multiplicação de um dos vetores por um escalar não nulo;
3. substituição de um vetor pela sua soma com um múltiplo de outro.

Os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente *independentes* (*dependentes*) sse  $u_1, \dots, u_n$  são linearmente *independentes* (*dependentes*).

**Demonstração:** ver folha de exercícios.

**Definição:** Uma sequência de vetores  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  de um espaço vetorial  $V$  é uma **base** de  $V$  se os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são linearmente independentes e geram  $V$ .

## Exemplos

1. Os vetores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u = (1, 0)$  e  $v = (0, 1)$  são linearmente independentes e geram  $\mathbb{R}^2$ , logo  $(u, v)$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Os vetores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u = (1, 0)$  e  $v = (2, 0)$  não são linearmente independentes nem geram  $\mathbb{R}^2$ , logo  $(u, v)$  não é uma base de  $\mathbb{R}^2$ .
3. O vetor de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u = (1, 0)$  é linearmente independente, mas não gera  $\mathbb{R}^2$ , logo  $(u)$  não é uma base de  $\mathbb{R}^2$ .
4. Os vetores de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u = (1, 0)$ ,  $v = (0, 1)$  e  $w = (1, 2)$  geram  $\mathbb{R}^2$ , mas não são linearmente independentes, logo  $(u, v, w)$  não é uma base de  $\mathbb{R}^2$ .

## Exemplos

1. A sequência  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , com

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

é uma base de  $\mathbb{R}^n$ .

2. A sequência  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$  é uma base do espaço  $\mathcal{P}_n(x)$  dos polinómios, na variável  $x$ , de grau menor ou igual a  $n$ .

3.  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  é uma base de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .



## Teorema:

*Seja  $V$  um espaço vetorial. Se  $u_1, \dots, u_m$  geram  $V$  e  $v_1, \dots, v_n$  são vetores de  $V$  linearmente independentes, então  $m \geq n$ .*

**Corolário:** *Se um espaço vetorial  $V$  tem uma base com  $n$  elementos, então todas as bases de  $V$  têm  $n$  elementos.*

## Demonstração:

Seja  $(u_1, \dots, u_n)$  uma base de  $V$  e seja  $(v_1, \dots, v_m)$  uma outra base de  $V$ . Então,

$$\left. \begin{array}{ll} (u_1, \dots, u_n) \text{ base} & \Rightarrow u_1, \dots, u_n \text{ geram } V \\ (v_1, \dots, v_m) \text{ base} & \Rightarrow v_1, \dots, v_m \text{ lin. indep.} \end{array} \right\} \Rightarrow n \geq m$$

$$\left. \begin{array}{ll} (u_1, \dots, u_n) \text{ base} & \Rightarrow u_1, \dots, u_n \text{ lin. indep.} \\ (v_1, \dots, v_m) \text{ base} & \Rightarrow v_1, \dots, v_m \text{ geram } V \end{array} \right\} \Rightarrow m \geq n$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow n \geq m \\ \Rightarrow m \geq n \end{array} \right\} \Rightarrow m = n$$

**Definição:** Se  $V$  é um espaço vetorial que admite uma base com  $n$  elementos, diz-se que  $V$  tem **dimensão**  $n$  e escreve-se  **$\dim V = n$** .

**Observação:** Se  $V = \{0\}$ , considera-se que  $\emptyset$  é base de  $V$  e que  $\dim V = 0$ .

## Exemplos

1.  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$$\dim \mathbb{R}^n = ?$$

2.  $\dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = 4$

$$\dim \mathbb{R}^{m \times n} = ?$$

3.  $\dim \mathcal{P}_2(x) = 3$

$$\dim \mathcal{P}_n(x) = ?$$

4.  $B = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$  é uma base do subespaço

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\},$$

$$\text{logo } \dim S = 2.$$

**Corolário:** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e sejam  $v_1, \dots, v_p$  vetores de  $V$ .*

- 1. Se  $p < n$ , então  $v_1, \dots, v_p$  não geram  $V$ .*
- 2. Se  $p > n$ , então  $v_1, \dots, v_p$  não são linearmente independentes.*

*Dito de outro modo: num espaço de dimensão  $n$ , o número mínimo de geradores é  $n$  e o número máximo de vetores linearmente independentes é  $n$ .*

**Demonstração:** De imediato, tendo em conta o resultado do teorema anterior, a definição de dimensão e a definição de base.

**Teorema:** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ .*

- 1. Se  $u_1, \dots, u_n$  **geram**  $V$ , então  $(u_1, \dots, u_n)$  é uma base de  $V$ .*
- 2. Se  $v_1, \dots, v_n$  são vetores de  $V$  **linearmente independentes**, então  $(v_1, \dots, v_n)$  é uma base de  $V$ .*

**Demonstração:** Ver folha de exercícios.

**Exemplo:** Os vetores  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (1, 1, 0)$  e  $w = (1, 0, 0)$  são 3 vetores linearmente independentes de  $\mathbb{R}^3$ ; como  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ , eles constituem uma base deste espaço.

Para que valores de  $k$  os vetores  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (k, -1, -k)$  e  $w = (1, k, 1)$  constituem uma base de  $\mathbb{R}^3$ ?

## 4.4 Matrizes e espaços vetoriais

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes reais de ordem  $m \times n$  tais que

$$A \xrightarrow{\text{linhas}} B.$$

Consideremos as linhas de  $A$  e de  $B$  como vetores de  $\mathbb{R}^n$ .  
Relembre que:

1. As linhas de  $A$  geram o mesmo subespaço de  $\mathbb{R}^n$  que as linhas de  $B$ .
2. As linhas de  $A$  são linearmente independentes sse as linhas de  $B$  são linearmente independentes.

**Teorema:** *As linhas não nulas de uma matriz com a forma em escada são linearmente independentes.*

## Aplicações

Sejam dados  $m$  vetores  $v_1, \dots, v_m$  de  $\mathbb{R}^n$ .

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{linhas}} A' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_m \end{pmatrix} \quad A' \text{ com forma em escada}$$

① Verificar se os vetores são linearmente independentes

$v_1, \dots, v_m$  são linearmente independente sse  $A'$  não tem linhas nulas

sse  $v'_m \neq 0$

sse  $\text{car}(A) = m$

## Exemplos

1. Os vetores  $u_1 = (1, 2, 3)$ ,  $u_2 = (3, 2, 1)$  e  $u_3 = (1, 0, -1)$  são **linearmente dependentes**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Os vetores  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (3, 2, 1)$  e  $v_3 = (1, 0, 1)$  são **linearmente independentes**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② Determinar uma base e a dimensão de  $\mathcal{V} = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

Sendo  $r = \text{car}(A)$ ,  $(v'_1, \dots, v'_r)$  é uma base de  $\mathcal{V}$

$$\dim \mathcal{V} = \text{car}(A)$$

### Exemplos

1.

$$\mathcal{V}_1 = \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 0, -1) \rangle$$

$$\dim \mathcal{V}_1 = 2 \quad \text{e} \quad ((1, 2, 3), (0, 1, 2)) \text{ é uma base de } \mathcal{V}_1$$

2.

$$\mathcal{V}_2 = \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle$$

$$\dim \mathcal{V}_2 = 3 \quad \text{e} \quad ((1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)) \text{ é uma base de } \mathcal{V}_2$$



### ③ Verificar se $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

$$v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \text{ sse } \text{car } A = \text{car} \begin{pmatrix} A \\ - \\ v \end{pmatrix}$$

### Exemplos

1.  $(1, 0, -1) \in \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.  $(1, 0, 1) \notin \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 4.5 Espaços associados a matrizes

### Definição:

Seja  $A$  uma matriz real de ordem  $m \times n$ .

1. Chama-se **espaço das linhas** de  $A$  e representa-se por  $\mathcal{L}(A)$ , ao subespaço de  $\mathbb{R}^n$  gerado pelas  $m$  linhas de  $A$ .
2. Chama-se **espaço das colunas** de  $A$  e representa-se por  $\mathcal{C}(A)$ , ao subespaço de  $\mathbb{R}^m$  gerado pelas  $n$  colunas de  $A$ .

### Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(A) = \langle (1, -1, 1, 0), (2, -1, 3, 1), (3, -2, 4, 1) \rangle$$

$$\mathcal{C}(A) = \langle (1, 2, 3), (-1, -1, -2), (1, 3, 4), (0, 1, 1) \rangle$$

$$A \xrightarrow{\text{linhas}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2$$

$$\text{Base } \mathcal{L}(A) : ((1, -1, 1, 0), (0, 1, 1, 1))$$

$$A^T \xrightarrow{\text{linhas}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim \mathcal{C}(A) = 2$$

$$\text{Base } \mathcal{C}(A) : ((1, 2, 3), (0, 1, 1))$$

É possível, conhecendo uma matriz em escada, equivalente por linhas a  $A$ , determinar simultaneamente uma base para  $\mathcal{L}(A)$  e uma base para  $\mathcal{C}(A)$ ?

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{linhas}} A' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_m \end{pmatrix} \quad A' \text{ matriz em escada}$$

- ▶ Uma base para o **espaço das linhas** de  $A$  é constituída pelas **linhas não nulas de  $A'$** .
- ▶ Uma base para o **espaço das colunas** de  $A$  é constituída pelas **colunas de  $A$  que correspondem às colunas de  $A'$  que contêm pivôs- colunas principais**.

**Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{linhas}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \quad \uparrow$

**Base  $\mathcal{L}(A)$  :**  
 $((1, -1, 1, 0), (0, 1, 1, 1))$

**Base  $\mathcal{C}(A)$  :**  
 $((1, 2, 3), (-1, -1, -2))$

**Teorema:**  $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \text{car } A$

**Observação:** Definições equivalentes de **característica** de  $A$ :

1. número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada, equivalente por linhas a  $A$ ;
2. dimensão do espaço das linhas de  $A$ ;
3. dimensão do espaço das colunas de  $A$ ;
4. número (máximo) de linhas linearmente independentes de  $A$  ;
5. número (máximo) de colunas linearmente independentes de  $A$

**Teorema:** *Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$ . O sistema  $Ax = b$  tem solução se e só se  $b \in \mathcal{C}(A)$ .*

**Demonstração:** O sistema  $Ax = b$  tem solução sse existe  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  tal

que  $A\alpha = b$ , ou seja, sse tivermos

$$(\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

onde  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  são as  $n$  colunas da matriz  $A$ . Tal é equivalente a ter-se

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

o que equivale a dizer que  $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \mathcal{C}(A)$ .

$$\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \Leftrightarrow \text{car}(B) = \text{car}(B|\mathbf{v}),$$

onde  $B$  é a matriz com os vetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  como colunas.

**Teorema:** *Seja  $Ax = 0$  um sistema homogêneo de  $m$  equações em  $n$  incógnitas. O conjunto de soluções deste sistema constitui um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Ver folha de exercícios.

**Definição:** Dada uma matriz real de ordem  $m \times n$ , chama-se **espaço nulo** ou **núcleo** de  $A$ , e representa-se por  $\mathcal{N}(A)$ , ao subespaço de  $\mathbb{R}^n$  formado pelas soluções do sistema  $Ax = 0$ .

**Exemplo:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

$$A \xrightarrow{\text{linhas}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_6 - x_5 \\ x_3 = -x_6 \\ x_4 = x_6 - x_5 \end{cases}$$

**SPI** g.i. 6-4=2

$$\mathcal{N}(A) = \{(0, \beta - \alpha, -\beta, \beta - \alpha, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{N}(A) = \langle (0, -1, 0, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 1, 0, 1) \rangle$$

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(A) &= 2 \\ \text{car } A &= 4 \end{aligned}$$



**Teorema:** *Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$ . Então*

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{car } A$$

**Exemplo:** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{10 \times 20}$  uma matriz tal que  $\text{car } A = 6$ . Então*

$$\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \text{car } A = 6$$

$$\dim \mathcal{N}(A) = 20 - 6 = 14$$

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = 10 - 6 = 4$$