



**Universidade do Minho**

Escola de Ciências

Departamento de Matemática  
e Aplicações

# Álgebra Linear EI

**MIEINF**

2015/2016

Aulas teóricas

# 1. MATRIZES

## 1.1 Conceitos básicos

### Definição:

- ① Uma **matriz** é um quadro de números dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.
- ② Os  $m \times n$  elementos contidos na matriz são chamados os **elementos da matriz** e representam-se entre parênteses curvos ou retos.

### Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

## Definição:

- ① Uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas diz-se de **ordem  $m$  por  $n$**  e escreve-se  $m \times n$ .
- ② Uma matriz diz-se **real (complexa)** se todos os seus elementos são números reais (**complexos**).
- ③ O conjunto das matrizes **reais (complexas)** de ordem  $m \times n$  denota-se por  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ( $\mathbb{C}^{m \times n}$ ).

**Exemplo:** A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

é uma matriz real de ordem  $3 \times 4$ , i.e.,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ .

Genericamente, uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  pode escrever-se como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou, abreviadamente  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  ou ainda (dependendo do contexto)  $A = (a_{ij})$ .

O elemento  $a_{ij}$  está na posição (linha  $i$ , coluna  $j$ ) da matriz  $A$ .

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{12} = 3 \\ a_{33} = 6 \end{array}$$

► Qual a matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$  tal que  $a_{ij} = i + j$ ?

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$ .

- ① Se  $m \neq n$ ,  $A$  diz-se uma matriz **retangular**.
- ② Se  $m = n$ ,  $A$  diz-se uma matriz **quadrada** (de ordem  $n$ ).
- ③ Se  $m = 1$ ,  $A$  diz-se uma **matriz linha**.
- ④ Se  $n = 1$ ,  $A$  diz-se uma **matriz coluna**.

**Exemplo:** As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \pi & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad x = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$$

A matriz  $A$  é uma matriz retangular de ordem  $3 \times 2$ , a matriz  $B$  é uma matriz quadrada de ordem  $3 \times 3$  (ou simplesmente de ordem 3) e a matriz  $x$  é uma matriz linha.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>As matrizes linha ou coluna, são usualmente representadas por letras minúsculas a negrito e os seus elementos são identificados usando apenas um índice.

**Definição:** Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz de ordem  $n$ .

- ① A diagonal principal de  $A$  (ou os elementos diagonais de  $A$  ou a diagonal de  $A$ ) são os elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ .
- ② A diagonal secundária de  $A$  são os elementos  $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ .

**Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

Diagonal secundária:

**Definição:** Uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  diz-se

- ① **diagonal** se todos os elementos fora da diagonal são nulos, i.e.,

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

- ② **triangular superior** se todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, i.e.,

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

- ③ **triangular inferior** se todos os elementos acima da diagonal são nulos, i.e.,

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

**Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} \text{red} & 0 & 0 \\ 0 & \text{red} & 0 \\ 0 & 0 & \text{red} \end{pmatrix}$$

**Matriz diagonal**

$$\begin{pmatrix} \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} \\ 0 & \text{blue} & \text{blue} \\ 0 & 0 & \text{blue} \end{pmatrix}$$

**Triangular superior**

$$\begin{pmatrix} \text{green} & 0 & 0 \\ \text{green} & \text{green} & 0 \\ \text{green} & \text{green} & \text{green} \end{pmatrix}$$

**Triangular inferior**

## Definição:

- ① Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se **matriz nula**. A matriz nula de ordem  $m \times n$  é representada por  $\mathbf{0}_{m \times n}$  ou simplesmente  $\mathbf{0}$ .
- ② Uma matriz diagonal de ordem  $n$  cujos elementos são todos iguais a 1 chama-se **matriz identidade** e representa-se por  $I_n$  ou simplesmente  $I$ .

$$\mathbf{0}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definição:** Sejam  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  matrizes da mesma ordem. Diz-se que  **$A$  é igual a  $B$** , se e só se

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$A = B$$



## 1.2 Operações com matrizes

### Soma de matrizes

Se duas matrizes têm a mesma ordem, a sua soma é a matriz que se obtém adicionando os elementos homólogos das matrizes dadas.

Exemplo:

$$\begin{array}{c} \text{+} \qquad \qquad \qquad \text{1+2} \\ \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} \boxed{2} & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} \boxed{3} & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{array} \right). \end{array}$$

**Definição:** Sejam  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  duas matrizes de ordem  $m \times n$ . A soma de  $A$  e  $B$  é uma matriz  $C = (c_{ij})$ , cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$C = A + B$$

**Definição:** Sejam  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  duas matrizes de ordem  $m \times n$ .  $A - B$  significa  $A + (-B)$  sendo  $-B = (-b_{ij})$ .

### **Teorema:** Propriedades da adição de matrizes

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes de ordem  $m \times n$ . Então:

①  $A + B = B + A$ .

*Comutatividade*

②  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

*Associatividade*

③  $A + \mathbf{0} = A$ .

*Elemento neutro*

④  $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$ .

*Elemento simétrico*

**Demonstração:** Ao cuidado dos alunos

## Multiplicação escalar

**Definição:** Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz de ordem  $m \times n$  e  $\alpha$  um número (ou escalar). O **produto de  $\alpha$  por  $A$**  é a matriz  $C = (c_{ij})$  cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

$$C = \alpha A$$

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad 4A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

## Teorema: Propriedades da multiplicação escalar

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $m \times n$  e  $\alpha$  e  $\beta$  escalares.

①  $(\alpha \beta)A = \alpha(\beta A).$

*Associatividade mista*

②  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$

*Distributividade - adição escalares*

③  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

*Distributividade - adição matrizes*

④  $1 A = A.$

*Elemento identidade*

⑤  $0 A = \mathbf{0}.$

*Elemento absorvente*

*Demonstração:* Ao cuidado dos alunos

## Multiplicação de duas matrizes

**Definição:** Sejam  $A = (a_{ij})$  uma matriz de ordem  $m \times l$  e  $B = (b_{ij})$  uma matriz de ordem  $l \times n$ . O **produto de  $A$  por  $B$**  é a matriz  $C = (c_{ij})$  de ordem  $m \times n$  cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$C = AB$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{red}} & \cdots & \boxed{\text{red}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\text{red}} & \cdots & \boxed{\text{red}} \end{pmatrix}_{m \times l} \begin{pmatrix} \boxed{\text{blue}} & \cdots & \boxed{\text{blue}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\text{blue}} & \cdots & \boxed{\text{blue}} \end{pmatrix}_{l \times n} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{green}} & \cdots & \boxed{\text{green}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\text{green}} & \cdots & \boxed{\text{green}} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

## Exemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}_{1 \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}_{1 \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$$

## Exemplos (continuação)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{4 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 & \boxed{3} & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 5} =$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \boxed{1} & \square & \boxed{2} & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}_{4 \times 5}$$

## Teorema: Propriedades da multiplicação de matrizes

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes e  $\alpha$  um número. Então:

①  $(AB)C = A(BC).$

*Associatividade*

②  $A(B + C) = AB + AC.$

*Distributividade à direita*

③  $(A + B)C = AC + BC.$

*Distributividade à esquerda*

④  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

*Associatividade mista*

⑤  $AI = IA = A$

*Elemento identidade*

⑥  $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$

*Elemento absorvente*

*Demonstração:* Ao cuidado dos alunos



**Exemplo:** Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

tem-se que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

donde se conclui:

- ▶  $AB \neq BA$ ;
- ▶  $AB = \mathbf{0}$  e  $A \neq \mathbf{0}$  e  $B \neq \mathbf{0}$ ;
- ▶  $A \neq \mathbf{0}$  e  $AB = AC$ , com  $B \neq C$ .

### 1.3 Inversa de uma matriz

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Diz-se que  $A$  é uma matriz **invertível**,<sup>2</sup> se existir uma matriz  $X$ , de ordem  $n$ , tal que

$$X A = A X = I_n.$$

A matriz  $X$  diz-se **inversa de  $A$** .

**Teorema:** *Se  $A$  for invertível, a sua inversa é única.*

**Demonstração:** *Suponhamos que  $X$  e  $Y$  são inversas de  $A$ , i.e.,  $X A = A X = I_n$  e  $Y A = A Y = I_n$ . Como*

$$Y A X = Y (A X) = Y I_n = Y$$

$$Y A X = (Y A) X = I_n X = X,$$

*conclui-se que  $X = Y$ .*

A inversa de uma matriz  $A$  é denotada por  $A^{-1}$ .

---

<sup>2</sup>ou **regular** ou **não singular**

**Exemplo:** As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

satisfazem

$$X A = A X = I_3.$$

Assim,  $X = A^{-1}$  (e  $A = X^{-1}$ ), i.e., as matrizes  $A$  e  $X$  são invertíveis.

A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

não é invertível (Verifique!).

**Teorema:** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $n$ , invertíveis. Então,*

- ①  $A^{-1}$  é invertível, sendo  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ②  $AB$  é invertível, sendo  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Demonstração:**

- ① *Imediato, por definição de inversa.*
- ② *Pretende-se mostrar que  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ . Como*

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

*e*

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

*o resultado fica provado.*

## 1.4 Transposta de uma matriz

**Definição:** Dada uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$ , a matriz cujas colunas são as linhas de  $A$  pela ordem correspondente, diz-se a **matriz transposta de  $A$**  e representa-se por  $A^T$ .

A matriz  $B = A^T$  é de ordem  $n \times m$  e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

$$B = A^T$$

**Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Teorema:** *Sejam,  $A$  e  $B$  matrizes e  $\alpha$  um número. Se as operações indicadas estiverem definidas então,*

- ①  $(A^T)^T = A$ ,
- ②  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,
- ③  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ,
- ④  $(AB)^T = B^T A^T$ ,
- ⑤ *Se  $A$  é invertível, então  $A^T$  é invertível e  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .*

**Demonstração:**

①+②+③ *Ao cuidado dos alunos.*

- ④ *Se  $A = (a_{ij})_{m \times l}$  e  $B = (b_{ij})_{l \times n}$  então  $(AB)^T = (c_{ij})_{n \times m}$  e  $B^T A^T = (d_{ij})_{n \times m}$ . Além disso,*

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = c_{ij}.$$

- ⑤  $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$ . *Analogamente,  $A^T (A^{-1})^T = I$ .*

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz quadrada.

- ▶  $A$  diz-se **simétrica** se e só se  $A^T = A$ , i.e.,  $a_{ij} = a_{ji}$ .
- ▶  $A$  diz-se **antissimétrica** se e só se  $A^T = -A$ , i.e.,  $a_{ij} = -a_{ji}$ .

**Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

simétrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

não simétrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

não antissimétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

antissimétrica

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$ . A matriz obtida de  $A$  substituindo cada elemento pelo seu conjugado diz-se a **matriz conjugada de  $A$**  e representa-se por  $\overline{A}$ .

A matriz  $B = \overline{A}$  é de ordem  $m \times n$  e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = \overline{a_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

$$B = \overline{A}$$

**Exemplo:**

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1+2i & i & 3 \\ -i & 1-i & 4 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & -i & 3 \\ i & 1+i & 4 \end{pmatrix}$$



**Teorema:** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes e  $\alpha$  um número. Se as operações indicadas estiverem definidas então,*

①  $\overline{\overline{A}} = A,$

②  $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B},$

③  $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha} \overline{A},$

④  $\overline{AC} = \overline{A} \overline{C},$

⑤ *Se  $A$  é invertível, então  $\overline{A}$  é invertível e  $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}.$*

**Demonstração:** *Ao cuidado dos alunos.*

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$ . A transposta da matriz conjugada de  $A$  diz-se a **matriz transconjugada de  $A$**  e representa-se por  $A^*$ .

A matriz  $B = A^*$  é de ordem  $n \times m$  e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

$$B = A^*$$

**Exemplo:**

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1+2i & i & 3 \\ -i & 1-i & 4 \end{pmatrix} \text{ então } A^* = \begin{pmatrix} 1-2i & i \\ -i & 1+i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz quadrada.

- ▶  $A$  diz-se **hermiteana** ou **hermítica** se e só se  $A^* = A$ , i.e.,  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ .
- ▶  $A$  diz-se **anti-hermiteana** ou **anti-hermítica** se e só se  $A^* = -A$ , i.e.,  $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ .

**Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3+i \\ 2+i & 6 & 4 \\ 3-i & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

hermítica

$$\begin{pmatrix} 0 & 2-i & 3+i \\ -2-i & 0 & 4 \\ -3+i & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

anti-hermítica

## 1.5 Produto de matrizes fracionadas em blocos

Suponhamos que duas matrizes  $A$  e  $B$  estão “fracionadas” em blocos:

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rt} \end{array} \right),$$

e que:

- ▶ o número de “**colunas de blocos**” de  $A$  é igual ao número de “**linhas de blocos**” de  $B$
- ▶ os blocos que formam cada linha de blocos têm todos o mesmo número de linhas
- ▶ os blocos que formam cada coluna de blocos têm todos o mesmo número de colunas
- ▶ o número de **colunas de cada bloco**  $A_{ik}$  é igual ao número de **linhas de cada bloco**  $B_{kj}$ .

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1j} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2j} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rj} & \cdots & B_{rt} \end{pmatrix}$$

O produto  $AB$  pode formar-se combinando os blocos **exatamente** da mesma forma como combinamos os **escalares no produto usual**. Isto é, o bloco na posição  $(i, j)$  de  $AB$  é obtido usando a fórmula

$$A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \cdots + A_{ir} B_{rj}.$$

**Exemplo:** Se  $A$  e  $B$  são as matrizes

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array} \right),$$

$$B = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline C & C \end{array} \right),$$

então:

$$AB = \left( \begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline C & C \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 2C & C \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Consideremos o produto de duas matrizes  $A_{m \times p}$  e  $B_{p \times n}$ .

Fracionemos  $A$  nos  $m$  blocos que são as suas linhas  $\mathbf{l}_1(A), \mathbf{l}_2(A), \dots, \mathbf{l}_m(A)$  e consideremos  $B$  como um só bloco. Tem-se, então:

$$AB = \left( \begin{array}{c} \frac{\mathbf{l}_1(A)}{\mathbf{l}_2(A)} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{l}_m(A)}{\mathbf{l}_m(A)} \end{array} \right) B = \left( \begin{array}{c} \frac{\mathbf{l}_1(A) B}{\mathbf{l}_2(A) B} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{l}_m(A) B}{\mathbf{l}_m(A) B} \end{array} \right).$$

Se designarmos por  $\mathbf{l}_1(AB), \dots, \mathbf{l}_m(AB)$  as  $m$  linhas de  $AB$ , vemos que

$$\mathbf{l}_i(AB) = \mathbf{l}_i(A) B,$$

ou seja, temos:

Para obtermos uma determinada linha  $i$  do produto  $AB$ , teremos apenas de multiplicar a linha  $i$  da matriz  $A$  pela matriz  $B$ , não sendo necessário calcular toda a matriz  $AB$ .

Se designarmos por  $\mathbf{c}_1(B), \dots, \mathbf{c}_n(B)$  as colunas da matriz  $B$ , tem-se

$$AB = A(\mathbf{c}_1(B) \mid \mathbf{c}_2(B) \mid \dots \mid \mathbf{c}_n(B)) = (A\mathbf{c}_1(B) \mid A\mathbf{c}_2(B) \mid \dots \mid A\mathbf{c}_n(B))$$

ou seja, tem-se:

$$\mathbf{c}_j(AB) = A \mathbf{c}_j(B).$$

Assim:

Para obtermos uma dada coluna  $j$  da matriz produto  $AB$ , bastará multiplicar  $A$  pela coluna  $j$  de  $B$ .

**Notação:** Sendo  $A$  uma determinada matriz  $m \times n$ , usaremos a notação  $\mathbf{a}_j$  (a letra minúscula correspondente à letra usada para a matriz, em negrito, indexada por  $j$ ) para designar a sua  $j$ -ésima coluna. Assim,

$$A = ( \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n )$$

será o fracionamento de  $A$  nas suas colunas (por simplicidade, dispensaremos o uso dos traços indicadores da partição)



Uma exceção à regra referida é o caso da matriz identidade de ordem  $n$  cujas colunas são, geralmente, designadas por  $e_1, \dots, e_n$ , isto é,

$$I_n = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n)$$

Sejam  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Então o produto  $Ac$  pode ser obtido do seguinte modo, usando o fracionamento de  $A$  nas suas  $n$  colunas e o fracionamento de  $b$  nas suas linhas (cada uma apenas com um elemento)

$$A c = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n.$$

## 1.6 Operações elementares sobre as linhas/colunas de uma matriz

**Definição:** Uma **operação elementar sobre uma linha (coluna)** de uma matriz  $A$  é uma operação de um dos seguintes tipos:

**OL<sub>1</sub> (OC<sub>1</sub>):** Troca de duas **linhas (colunas)**.

$$L_i \leftrightarrow L_j \quad (C_i \leftrightarrow C_j)$$

**OL<sub>2</sub> (OC<sub>2</sub>):** Multiplicação de uma **linha (coluna)** por um número diferente de zero.

$$L_i \leftarrow \alpha L_i \quad (C_i \leftarrow \alpha C_i), \quad \alpha \neq 0.$$

**OL<sub>3</sub> (OC<sub>3</sub>):** Substituição de uma **linha (coluna)** pela sua soma com um múltiplo de outra **linha (coluna)**.

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \\ (C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$$

## Exemplos

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcolor{red}{L_1 \leftrightarrow L_3}]{\textcolor{blue}{OL}_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcolor{red}{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}]{\textcolor{blue}{OL}_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\textcolor{red}{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}]{\textcolor{blue}{OL}_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcolor{red}{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}]{\textcolor{blue}{OL}_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\textcircled{2} A \xrightarrow[\textcolor{green}{C_1 \leftrightarrow C_2}]{\textcolor{blue}{OC}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcolor{green}{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}]{\textcolor{blue}{OC}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcolor{green}{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1}]{\textcolor{blue}{OC}_3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcolor{red}{C_2 \leftarrow -\frac{1}{5}C_2}]{\textcolor{blue}{OC}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcolor{red}{C_3 \leftarrow C_3 + 6C_2}]{\textcolor{blue}{OC}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = C$$

**Definição:** Diz-se que  $A$  é uma matriz **equivalente por linhas** (por **colunas**) a uma matriz  $B$ , se esta matriz se pode obter a partir de  $A$ , através de um número finito de operações elementares sobre as **linhas** (**colunas**) de  $A$ . Neste caso, usa-se a notação

$$A \xrightarrow{\text{linhas}} B \quad (A \xrightarrow{\text{colunas}} B)$$

**Exemplo:** Relativamente às matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  do exemplo anterior, tem-se

$$A \xrightarrow{\text{linhas}} B \quad \text{e} \quad A \xrightarrow{\text{colunas}} C$$

Facilmente se prova que (resultados análogos para colunas):

$$\textcircled{1} A \xrightarrow{\text{linhas}} A$$

$$\textcircled{2} \text{ Se } A \xrightarrow{\text{linhas}} B \text{ então } B \xrightarrow{\text{linhas}} A$$

$$\textcircled{3} \text{ Se } A \xrightarrow{\text{linhas}} B \text{ e } B \xrightarrow{\text{linhas}} C \text{ então } A \xrightarrow{\text{linhas}} C$$


**Definição:** O elemento  $a_{ik}$  de uma matriz  $A = (a_{ij})$  diz-se um **pivô** se é o primeiro elemento não nulo da sua linha, i.e.,


$$a_{ik} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{ij} = 0, \quad j = 1 \dots, k-1.$$

Uma linha nula não tem pivôs.

**Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \blacksquare & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 elementos não nulos  
**pivôs**

 podem ser ou  
não nulos

**Definição:** Diz-se que uma matriz  $m \times n$  é uma **matriz em escada** ou tem a **forma em escada**, se:

- ① Não há linhas totalmente nulas seguidas de linhas não nulas.
- ② Se o pivô da linha  $i$  estiver na coluna  $k$ , então todos os elementos abaixo da posição  $i$ , nas colunas  $1, \dots, k$  são nulos.

**Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ 0 & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ 0 & 0 & 0 & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{■} \end{pmatrix}$$

X

$$\begin{pmatrix} \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ 0 & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ 0 & 0 & 0 & \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{■} & \text{■} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{■} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓

**Teorema:** *Toda a matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  é equivalente, por linhas, a uma matriz em escada.*

## Processo de redução de uma matriz $A$ à forma em escada

**Passo 1:** Se  $A$  é a matriz nula ou uma matriz linha, então  $A$  está na forma em escada e o processo termina.

**Passo 2:** Por troca de linhas, se necessário, construímos uma matriz  $B$  cuja primeira linha tem um pivô  $b_{1k}^3$  com índice de coluna mínimo.

$$A \xrightarrow{\text{OL}_1} B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \text{red} & \text{blue} & \cdots & \text{blue} \\ 0 & \cdots & 0 & \text{blue} & \text{blue} & \cdots & \text{blue} \\ 0 & \cdots & 0 & \text{blue} & \text{blue} & \cdots & \text{blue} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \text{blue} & \text{blue} & \cdots & \text{blue} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$   
 $k$

<sup>3</sup>Note-se que tal pivô existe, dado que estamos a supor  $A \neq 0$ .

**Passo 3:** Adicionando múltiplos convenientes da linha 1 às linhas  $2, \dots, m$ , anulamos todos os elementos da coluna  $k$ , situados abaixo da posição 1.

$$B \xrightarrow[\substack{L_i \leftarrow L_i - \frac{b_{ik}}{b_{1k}} L_1}]{OL_3} C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \text{red} & \text{blue} & \dots & \text{blue} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \text{black} & \dots & \text{black} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \text{black} & \dots & \text{black} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \text{black} & \dots & \text{black} \end{pmatrix}$$

**Passo 4:** “Repetir” o processo, considerando as linhas  $2, \dots, m$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \text{red} & \text{blue} & \dots & \text{blue} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \text{black} & \dots & \text{black} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \text{black} & \dots & \text{black} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \text{black} & \dots & \text{black} \end{pmatrix}$$



**Exemplo:** Reduzir a matriz  $A$  à forma em escada.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Passo 1:**  $A$  não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

**Passo 2:**

$$A \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{OL_1} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Passo 3:**

$$B \xrightarrow[\substack{L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftrightarrow L_5 - 2L_1}]{OL_3} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 4:** Vamos repetir o processo, considerando as linhas 2 a 5 da matriz  $C$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A'$

**Passo 1':**  $A'$  não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

**Passo 2':**

$$A \xrightarrow{\text{linhas}} B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 3':**

$$B' \xrightarrow[\text{\textcolor{red}{$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$}}]{\text{\textcolor{blue}{$OL_3$}}} C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 4':** Vamos repetir o processo, considerando as linhas 3 a 5 da matriz  $C'$ .

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 1'':**  $A''$  não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

**Passo 2'':**

$$A \xrightarrow[\text{linhas}]{} C' \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{\text{OL}_1} B'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 3'':**

$$C'' = B'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 4':** Vamos repetir o processo, considerando a linhas 4 e 5 da matriz  $C''$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A'''$

**Passo 1''':**  $A'''$  é uma matriz nula, logo  $C''$  é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz  $A$ .

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$  e seja  $E$  uma matriz em escada, equivalente por linhas a  $A$ . Chama-se **característica de  $A$**  ao número de linhas não nulas (número de pivôs) de  $E$  e denota-se por  $\text{car}(A)$ .

**Exemplo:**

$$\text{car} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{car} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

**Observação:** Pode provar-se que se duas matrizes em escada  $E_1$  e  $E_2$  são equivalente por linhas a uma dada matriz  $A$ , então  $E_1$  e  $E_2$  têm necessariamente o mesmo número de linhas nulas (não nulas).

**Exercício:** Qual é a característica das seguintes matrizes  $3 \times 3$ ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definição:** Diz-se que uma matriz  $m \times n$  é uma **matriz em escada reduzida** ou que tem a **forma em escada reduzida**, se:

- ① A matriz é uma matriz em escada.
- ② Os pivôs são todos 1.
- ③ Os pivôs são os únicos elementos não nulos das suas colunas.

## Exemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

X

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓



**Teorema:** *Toda a matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  é equivalente, por linhas, a uma única matriz em escada reduzida.*

**Processo de redução de uma matriz em escada, não nula, à forma em escada reduzida**

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{\blacksquare} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \cdots & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \cdots & \text{lightblue} \\ 0 & \color{red}{\blacksquare} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \cdots & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \cdots & \text{lightblue} \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{\blacksquare} & \cdots & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \cdots & \text{lightblue} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \color{red}{\blacksquare} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \cdots & \text{lightblue} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \color{red}{\blacksquare} & \text{lightblue} & \cdots & \text{lightblue} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow l$$

$\uparrow$   
 $k$

**Passo 1:** Seja  $l$  a última linha não nula da matriz em escada  $A$  e seja  $a_{lk}$  o seu pivô. Se  $a_{lk} \neq 1$ , multiplicar a linha  $l$  por  $\frac{1}{a_{lk}}$  (para que o pivô  $a_{lk}$  seja =1). Se  $l = 1$ , o processo termina.

$$A \xrightarrow[\substack{\text{OL}_2 \\ L_l \leftarrow \frac{1}{a_{lk}} L_l}]{\text{OL}_2} B = \begin{pmatrix} \text{red square} & \text{blue square} & \text{blue square} & \text{blue square} & \dots & \text{blue square} & \text{blue square} & \text{blue square} & \dots & \text{blue square} \\ 0 & \text{red square} & \text{blue square} & \text{blue square} & \dots & \text{blue square} & \text{blue square} & \text{blue square} & \dots & \text{blue square} \\ 0 & 0 & 0 & \text{red square} & \dots & \text{blue square} & \text{blue square} & \text{blue square} & \dots & \text{blue square} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{red square} & \text{blue square} & \text{blue square} & \dots & \text{blue square} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & \text{dark blue square} & \dots & \text{dark blue square} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 2:** Adicionando múltiplos convenientes da linha  $l$  às linhas  $1, \dots, l-1$ , anulamos todos os elementos da coluna  $k$ , situados acima da posição  $l$ .

$$B \xrightarrow[\substack{\text{OL}_3 \\ L_i \leftarrow L_i - a_{ik} L_l}]{\text{OL}_3} C = \begin{pmatrix} \text{red} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \text{lightblue} & \dots & \text{lightblue} & 0 & \text{lightblue} & \dots & \text{lightblue} \\ 0 & \text{red} & & & \dots & & 0 & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \text{red} & \dots & \text{lightblue} & 0 & \text{lightblue} & \dots & \text{lightblue} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{red} & 0 & \text{lightblue} & \dots & \text{lightblue} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & \text{darkblue} & \dots & \text{darkblue} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 3:** “Repetir” o processo, considerando as linhas  $1, \dots, l-1$ .

$$\begin{pmatrix} \text{red} & \text{blue} & \text{blue} & \text{blue} & \dots & \text{blue} & 0 & \text{blue} & \dots & \text{blue} \\ 0 & \text{red} & \text{blue} & \text{blue} & \dots & \text{blue} & 0 & \text{blue} & \dots & \text{blue} \\ 0 & 0 & 0 & \text{red} & \dots & \text{blue} & 0 & \text{blue} & \dots & \text{blue} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{red} & 0 & \text{blue} & \dots & \text{blue} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \text{dark blue} & \dots & \text{dark blue} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemplo:** Reduzir a matriz (em escada) à forma em escada reduzida

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow[\substack{\text{OL}_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3}]{\substack{\text{OL}_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}]{\text{OL}_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow[\substack{\text{OL}_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{1} L_2}]{\text{OL}_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}]{\text{OL}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$