tópicos de matemática discreta – MIEInf

carla mendes | cláudia m. araújo | suzana m. gonçalves

UM | 2015/2016

Um grafo é uma coleção de nós (também designados por vértices) e de arestas. Cada uma das arestas liga dois nós. Para visualizar um grafo, podemos representar os nós por pontos do espaço, do plano ou de qualquer outra superfície e as arestas por linhas que ligam os nós.

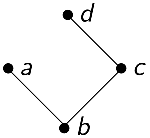
Esta representação não é única. A única característica importante de um grafo é a incidência de nós e arestas. Todos os elementos de um grafo podem sofrer continuamente deslocações ou deformações, continuando, no entanto e sempre, a representar o mesmo grafo, isto é, a mesma coleção de nós e de arestas.

definição 6.1

Um **grafo simples** G é um par ordenado $G = (V, E)$ no qual V é um conjunto não vazio e E é um conjunto de subconjuntos de V com exactamente dois elementos. Aos elementos de V chamamos **vértices** e aos elementos de E chamamos **arestas**.

exemplo 6.2

O grafo

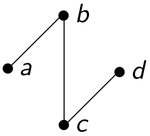


é simples. De facto, se tomarmos $V = \{a, b, c, d\}$ e $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$, o grafo $G = (V, E)$ tem a representação dada. Nesta unidade curricular, estudaremos apenas os grafos simples. Não havendo ambiguidade e se nada for dito em contrário, referir-nos-emos aos grafos simples apenas como **grafos**.

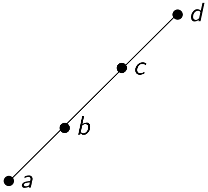
definição 6.3

Dois grafos simples são iguais se $V = V'$ e $E = E'$.

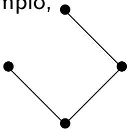
observação [1] Existem representações *aparentemente* distintas de um mesmo grafo.
No entanto, numa representação de um grafo, o importante é o número de vértices, o número de arestas e o modo como estas se dispõem em relação àqueles.
É claro que o grafo do exemplo 6.2 pode ser representado por



ou



observação [2] Uma mesma representação pode descrever grafos que, por definição, são distintos. Por exemplo,



tanto pode representar o grafo $G_1 = (V_1, E_1)$, onde $V_1 = \{a, b, c, d\}$ e $E_1 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ como o grafo $G_2 = (V_2, E_2)$, onde $V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$. Os grafos G_1 e G_2 diferem apenas na natureza dos seus vértices e dizem-se isomorfos.

definição 6.4
Dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ dizem-se **isomorfos** quando existe $f : V_1 \to V_2$ bijetiva tal que, para todo $v, v' \in V_1$, $\{v, v'\} \in E_1$ se e só se $\{f(v), f(v')\} \in E_2$.

No resto deste estudo não distinguiremos entre grafos isomorfos.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices e m arestas. Para facilitar a escrita, consideremos

$$V = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \qquad \text{e} \qquad E = \{e_j : 1 \leq j \leq m\}.$$

definição 6.5

Diz-se que $e_j \in E$ é **incidente** com $v_i \in V$ quando existe $v_k \in V$ tal que a aresta e_j liga os vértices v_i e v_k.

definição 6.6

Uma matriz $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{Z})$ diz-se uma **matriz de incidência** de G quando

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{se } e_j \textit{ não é incidente com } v_i \\ 1 & \textit{se } e_j \textit{ é incidente com } v_i. \end{cases}$$

exemplo 6.7

Seja $G = (V, E)$ o grafo onde $V = \{a, b, c, d\}$ e $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$. Considerando $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$, $v_4 = d$, $e_1 = \{a, b\}$, $e_2 = \{b, c\}$ e $e_3 = \{c, d\}$, obtemos a matriz de incidência

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que temos 4 linhas, pois existem 4 vértices, e 3 colunas, correspondentes às 3 arestas.

definição 6.8

Dois vértices v_i e v_j de G dizem-se **adjacentes** quando existe uma aresta em G incidente com ambos.

definição 6.9

Diz-se que uma matriz $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Z}\}$ é uma **matriz de adjacência** de G quando

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{se } v_i \textit{ e } v_j \textit{ não são adjacentes} \\ 1 & \textit{se } v_i \textit{ e } v_j \textit{ são adjacentes}. \end{cases}$$

exemplo 6.10

A matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de adjacência do grafo do exemplo 6.7.

observação

[1] Uma matriz de adjacência de um grafo simples é uma matriz quadrada. Mais, é uma matriz simétrica cuja diagonal é preenchida por zeros.

[2] Dado um grafo simples, a construção de uma matriz de incidência (ou de adjacência) depende da ordem pela qual se consideram os vértices e as arestas. Assim, o mesmo grafo admite várias matrizes de incidência e de adjacência. No entanto, duas quaisquer matrizes de incidência (ou de adjacência) de um mesmo grafo são semelhantes, pois uma obtém-se da outra por troca de linhas e/ou colunas.

Existem grafos simples que, pelas suas características próprias, merecem destaque especial.

definição 6.11

Um **grafo trivial** é um grafo $G = (V, E)$ onde $\#V = 1$ e $\#E = 0$.

definição 6.12

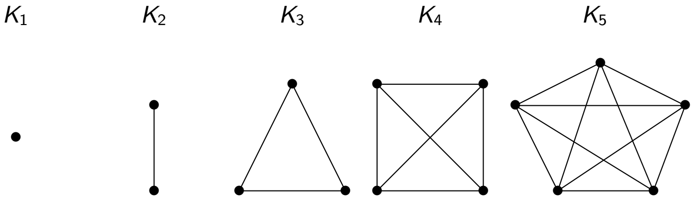
Um **grafo nulo** é um grafo $G = (V, E)$ onde $\#E = 0$.

definição 6.13

Um **grafo completo** é um grafo no qual dois quaisquer vértices são adjacentes. Um grafo completo com n vértices representa-se por K_n.

exemplo 6.14

Para $n = 1, 2, 3, 4, 5,$ os grafos completos são



proposição 6.15

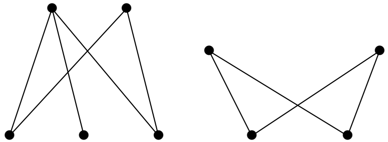
Um grafo completo K_n tem $\binom{n}{2}$ arestas.

definição 6.16

Um grafo $G = (V, E)$ diz-se um **grafo bipartido** se existir uma partição $\{X, Y\}$ de V de tal modo que cada vértice de X é adjacente apenas a vértices de Y e cada vértice de Y é adjacente apenas a vértices de X.

exemplo 6.17

Os dois grafos seguintes são bipartidos

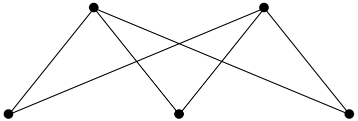


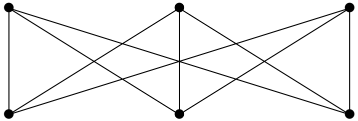
definição 6.18

Um **grafo bipartido completo** é um grafo bipartido $G = (V, E)$ tal que, para a partição $\{X, Y\}$ de V da definição, cada vértice de X é adjacente a todos os vértices de Y(e, portanto, cada vértice de Y é adjacente a todos os vértices de X). Representa-se um grafo bipartido completo por $K_{m,n}$ onde $\#X = m$ e $\#Y = n$.

exemplo 6.19

Os grafos $K_{2,3}$ e $K_{3,3}$ são representados, respetivamente, por





definição 6.20

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $v \in V$. Chama-se **grau** (ou **valência**) de v, e representa-se por grau(v), ao número de arestas incidentes com v.

exemplo 6.21

1 | No grafo completo K_6 todos os vértices têm grau 5.

2 | No grafo bipartido completo $K_{2,3}$ existem dois vértices com grau 3 e três vértices com grau 2.

teorema 6.22 [teorema do aperto de mãos]

Num grafo $G = (V, E)$, a soma dos graus de todos os seus vértices é igual ao dobro do número das suas arestas.

corolário 6.23

Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

demonstração

Seja $G = (V, E)$ é um grafo com n arestas. Então,

$$\sum_{\mathrm{grau}(v)\ \text{ímpar}} \mathrm{grau}(v) + \sum_{\mathrm{grau}(v)\ \text{par}} \mathrm{grau}(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{grau}(v) = 2n.$$

Logo, $\sum_{\mathrm{grau}(v)\ \text{ímpar}} \mathrm{grau}(v)$ é par e, portanto, o número de vértices de grau ímpar é par. $\square$

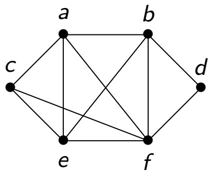
definição 6.24

Um **caminho** de um grafo G é uma sequência de vértices de G no qual dois vértices sucessivos definem uma aresta. Representa-se um caminho por $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, onde $v_1, v_2, ..., v_k$ são vértices de G. Ao primeiro vértice da sequência chamamos **origem do caminho**, ou **vértice inicial**, e ao último vértice chamamos **destino do caminho**, ou **vértice final**.

Por convenção, chama-se **caminho trivial** à sequência $\langle a \rangle$, onde $a \in V$.

exemplo 6.25

No grafo

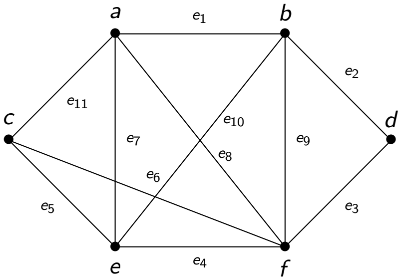


$\langle a, b, d, f, c, e, f, b \rangle$ é um caminho de a a b.

Um caminho pode ser também definido como uma sequência de arestas na qual quaisquer duas arestas sucessivas têm um vértice em comum.

exemplo 6.26

No grafo



o caminho $\langle a, b, d, f, c, e, f, b \rangle$ pode também ser representado por $\langle e_1, e_2, e_3, e_6, e_5, e_4, e_9 \rangle$.

definição 6.27

Chama-se **comprimento** de um caminho ao número de arestas que definem esse caminho.

exemplo 6.28

O caminho apresentado no exemplo 6.26 tem comprimento 7.

definição 6.29

Um **ciclo** é um caminho de comprimento maior que 2 onde não há repetição de vértices, com exceção dos vértices inicial e final, que são iguais.

exemplo 6.30

Qualquer linha poligonal pode ser vista como um ciclo.

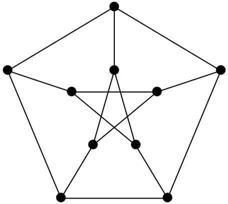
definição 6.31

Um **grafo conexo** é um grafo $G = (V, E)$ no qual existe um caminho entre quaisquer dois dos seus vértices.

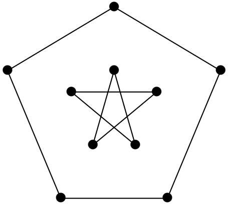
Um **grafo desconexo** é um grafo que não é conexo.

exemplo 6.32

O grafo



é um grafo conexo. O grafo



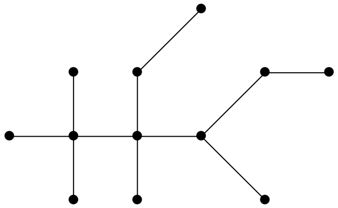
é um grafo desconexo.

definição 6.33

Uma **árvore** é um grafo conexo no qual não existem ciclos.

exemplo 6.34

O grafo



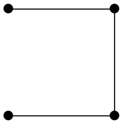
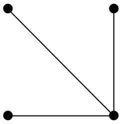
é uma árvore.

exemplo 6.35

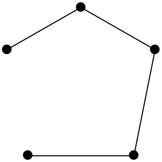
Os grafos

 e  são as únicas árvores com 2 e 3 vértices, resp..

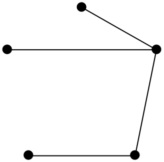
Os grafos

 e  são as únicas árvores com 4 vértices.

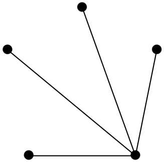
Os grafos



e



e



são as únicas árvores com cinco vértices.

proposição 6.36

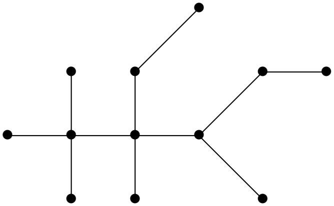
Numa árvore, a diferença entre o número de vértices e o número de arestas é 1.

proposição 6.37

Toda a árvore tem pelo menos dois vértices de grau 1.

exemplo 6.38

A árvore



tem 12 vértices e 11 arestas.

Existem 7 vértices com grau 1.