3.2 Algumas séries importantes

Série geométrica

- Chama-se série geométrica de razão r a uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1}, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

  - A sucessão geradora, u, é definida por $u_n = r^{n-1}$;
  - A sucessão das somas parciais, s , é definida por

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \begin{cases} n, & \text{se} \quad r = 1; \\ \dfrac{1-r^n}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1. \end{cases}$$

- Sendo

$$s_n = \begin{cases} n, & \text{se} \quad r = 1; \\ \dfrac{1-r^n}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1. \end{cases}$$

  - Se $r = 1$ a série diverge.

    De facto $u_n = 1$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$.

  - Se $r = -1$ a série diverge.

    De facto $u_n = (-1)^{n-1}$ e $\lim_{n\to\infty} u_n$ não existe.

  - Se $r > 1$ a série diverge.

    Temos $u_n = r^{n-1}$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} r^{n-1} \to +\infty \neq 0$.

  - Se $r < -1$ a série diverge.

    Temos $u_n = r^{n-1}$ e não existe $\lim_{n\to\infty} u_n$.

  - Se $-1 < r < 1$ a série converge e tem por soma $\dfrac{1}{1-r}$.

- [Série geométrica I] A série geométrica de razão r definida por

$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1}, \qquad r \in \mathbb{R}$$

é convergente se e só se $|r| < 1$. Neste caso, a sua soma é

$$S = \frac{1}{1-r}.$$

- [Série geométrica II] A série geométrica de primeiro termo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e razão r definida por

$$\sum_{n\geq 1} a\, r^{n-1}, \qquad r \in \mathbb{R}$$

é convergente se e só se $|r| < 1$. Neste caso, a sua soma é

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Exemplo :: Paradoxo de Zenão

- O espaço percorrido pela tartaruga é

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{10^n}=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{10^n}$$

e o espaço percorrido por Aquiles é

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{10^n}=11+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{10^n}$$

  - Mas
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{10^n}=\frac{10}{9}$$
pois é uma série geométrica de razão $\left|\frac{1}{10}\right|<1$, logo convergente.
  - O espaço percorrido pela tartaruga é $1+\frac{10}{9}=\frac{19}{9}$ m e o espaço percorrido por Aquiles é $11+\frac{10}{9}=\frac{109}{9}$ m. Logo, Aquiles vence a tartaruga.

Série harmónica

- Chama-se série harmónica a uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}.$$

  - A sucessão geradora, u , é definida por $u_n=\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;
  - A sucessão das somas parciais, s, é definida por
$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
  - A série harmónica é divergente (c.f. Cap. 3.3).

Série de Riemann

- Chama-se série de Riemann de expoente r a uma série cuja forma geral é

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^r},\qquad r>0.$$

  - A sucessão geradora, u , é definida por $u_n=\frac{1}{n^r}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;
  - A sucessão das somas parciais, s, é definida por
$$s_n=1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots+\frac{1}{n^r}$$
  - A série de Riemann é convergente se e só se $r>1$ (c.f. Cap. 3.3).

Observação

1. A série harmónica é um caso particular da série de Riemann. Obtém-se para $r=1$.

2. O estudo da convergência destas (e outras) séries será feito posteriormente de uma forma muito simples recorrendo a integrais impróprios (c.f. Cap. 3.3).