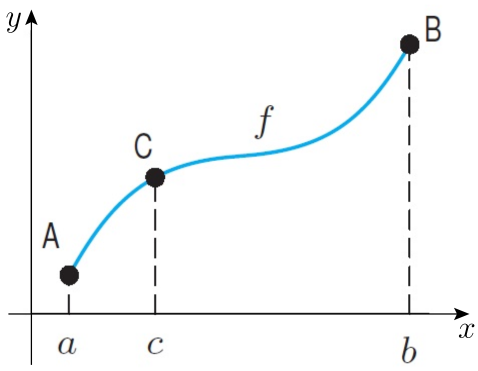
Cálculo

folha 5 2015'16

Propriedades das funções deriváveis.

1. Considere a função real de variável real representada graficamente por



(a) Exprima em termos de f, o declive da reta que passa por A e por B.

(b) Esboce a reta tangente à curva em C.

(c) Compare o declive das retas reportadas nas alíneas anteriores.

(d) Existem pontos, na curva, nos quais a reta tangente (à curva) é paralela à reta definida em (1b)?

2. Em cada das seguintes alíneas, esboce graficamente uma função f satisfazendo os requisitos especificados

(a) as 1.ª e 2.ª derivadas são sempre positivas;

(b) a 1.ª derivada é sempre negativa mas a 2.ª derivada é positiva para alguns pontos e negativa para outros

(c) crescente, com concavidade voltada para baixo, com $f(5) = 2$ e $f'(5) = \frac{1}{2}$.

3. Sabendo que $f(2) = 3$ e $f'(2) = 1$ calcule $f(-2)$ e $f'(-2)$ quando

(a) f é par

(b) f é ímpar

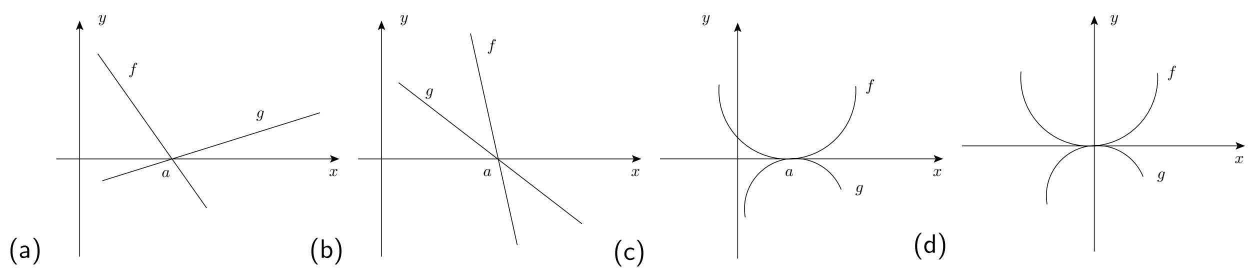
4. Para uma dada função derivável, sabe-se que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 7$. O que pode dizer das seguintes a afirmações?

(a) $\lim\limits_{x\to 3} xf(x) = 21$

(b) se $g(3) = 4$, $\lim\limits_{x\to 3}[f(x) \cdot g(x)] = 28$

(c) se $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ não existe, $\lim\limits_{x\to 3}[f(x) \cdot g(x)]$ também não existe.

5. Deduza o sinal de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a partir da figura



6. Recorrendo ao teorema de Lagrange, mostre que para todo o $x \neq 0$, $e^x > 1 + x$.

7. Seja f uma função polinomial com exatamente dois máximos locais e um mínimo local.

(a) Esboce um possível gráfico de f.

(b) Qual o maior número de zeros que f poderá ter?

(c) Qual o número mínimo de zeros que f poderá ter?

(d) Qual o menor número de pontos de inflexão que f poderá ter?

(e) Qual o menor grau que f poderá ter?

(f) Defina, algebricamente, uma possível função f.

8. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\operatorname{tg} x}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x e^{-x^2+1}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \, \ln(x-1)$

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-1}$

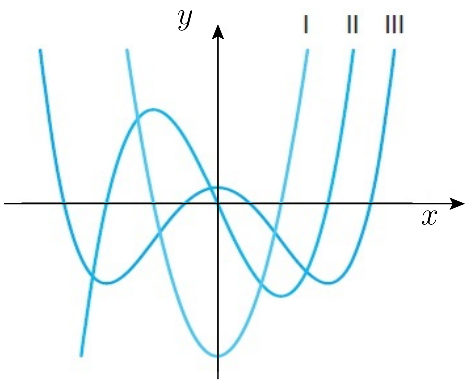
9. Estude as funções (i.e. indique domínio e contradomínio, extremos e intervalos de monotonia, pontos de inflexão e concavidade; esboce um gráfico) definidas por:

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

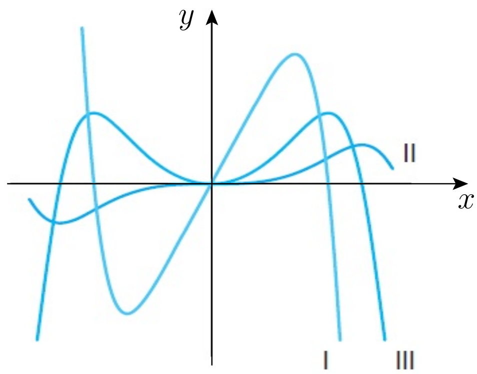
(b) $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

(c) $h(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

10. Cada figura representa graficamente as funções f, f' e f''. Identifique, em cada caso, qual o esboço que corresponde a cada uma dessas funções:



(a)



(b)

11. O que acontece, quanto à concavidade resultante, quando adicionamos duas funções?

12. Determine o polinómio de Taylor de ordem n da função f indicada em torno do ponto a apresentado:

(a) $f(x) = e^x,\ x\in\mathbb{R}, \quad n = 10, \quad a = 0$

(b) $f(x) = \cos x,\ x\in\mathbb{R}, \quad n = 8, \quad a = 0$

(c) $f(x) = \ln x,\ x\in\mathbb{R}^+, \quad n = 7, \quad a = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad n = 6, \quad a = 0$

13. Relativamente a cada função dada no exercício anterior, compare o valor de f e do correspondente polinómio $P_{n,a}$ nos pontos b e c indicados:

(a) $b = 1, \ \ c = 3$ (b) $b = \dfrac{\pi}{4}, \ \ c = \pi$ (c) $b = 1.1\,, \ \ c = 2$ (d) $b = 0.1\,, \ \ c = -1$

14. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 6 em torno da origem é dado por

$$P_{6,0}(x) = 3x - 4x^3 + 5x^6\,.$$

Determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

15. Escreva o polinómio $-x^6 + 6\,x^5 - 9\,x^4 - 4\,x^3 + 23\,x^2 - 21\,x + 6$ em potências de $x - 1$.

16. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas tal que

$$f(3) = 1,\ f'(3) = -2,\ f''(3) = 3 \ \text{ e } \ f'''(3) = -5\,.$$

Determine os polinómios de Taylor de ordens 2 e 3 da função f em torno do ponto 3. Use os dois polinómios para aproximar o valor de $f(2.9)$.

17. Use o polinómio de Taylor de ordem 4, da função definida por $f(x) = \cos x$, em torno de $a = 0$ para explicar porque razão se tem

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$