3.6 Séries de potências

Definição

Convergência

Raio e intervalo de convergência

Representação de funções por séries de potências

Séries de Taylor

Definição

Seja x um número real arbitrário.

- [Série de potências de x] Chama-se série de potências de x com coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ a uma série da forma
$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$
- Chama-se série de potências de $x-a$ ou série de potências centrada em a com coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ a uma série da forma
$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n.$$

Exemplo

1. A série $\sum_{n\geq 0} x^n$ é uma série de potências de x. Aqui
$$a_n = 1, \qquad \text{e} \qquad u_n = x^n.$$
2. A série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ é uma série de potências de x. Aqui
$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad \text{e} \qquad u_n = \frac{x^n}{n!}.$$
3. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{(x-3)^n}{n}$ é uma série de potências de $x-3$. Aqui
$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \text{e} \qquad u_n = \frac{(x-3)^n}{n}.$$

Observação

1. Por uma questão de comodidade, considera-se, neste capítulo, a sucessão dos coeficientes definida em $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
2. Ao escrever o termo correspondente a $n = 0$, adota-se a convenção $(x-a)^0 = 1$ mesmo quando $x = a$.
3. As séries de potências são casos particulares de "séries de funções".
4. Um problema particularmente interessante é o de determinar o domínio de convergência da série, isto é, o conjunto de pontos x para os quais a série é convergente e representa uma função.

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

5. Para cada x fixo, a série de potências é uma série numérica que pode ser estudada em termos de convergência/divergência.

6. A série de potências pode convergir para uns valores de x e divergir para outros valores de x.

7. Quando $x = a$ todos os termos da série são nulos para $n \geq 1$ pelo que a série converge sempre quando $x = a$. Converge para a_0.

Exemplo

1. [Recordar] A série geométrica de razão r, $\sum_{n\geq 1} r^{n-1}$, converge se e só se $|r| < 1$. Neste caso tem por soma
$$\frac{1}{1-r}.$$

- A série de potências
$$\sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$$
é (absolutamente) convergente se e só se $|x| < 1$ e tem por soma
$$\frac{1}{1-x}.$$
Isto é, para $|x| < 1$
$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Convergência

- Para cada x, a série de potências
$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$$
é uma série numérica (de sinal arbitrário) de termo geral
$$u_n = a_n(x-a)^n.$$

  - Pode-se, então aplicar os critérios já estudados nas secções anteriores (c.f. 3.1 a 3.4).

Exemplo

1. Mostre que é absolutamente convergente a série
$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

- Esta é uma série de termos de sinal arbitrário com $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.
- Estude-se a série dos módulos aplicando o critério da razão:

2. Aplicar o critério da razão à série $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$.

- Aqui $u_n = a_n\,(x-a)^n$ que não tem sinal fixo.
- Estuda-se a série dos módulos $\sum_{n\geq 0} |a_n\,(x-a)^n|$.
- Critério da razão (para séries de termos não negativos)

$$\lim_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}\,(x-a)^{n+1}}{a_n\,(x-a)^n}\right| = |x-a| \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-a|\,\ell$$

- Então, se
  (a) $|x-a|\,\ell < 1$, isto é, $|x-a| < \frac{1}{\ell}$ a série de potências converge.
  (b) $|x-a|\,\ell > 1$ isto é, $|x-a| > \frac{1}{\ell}$ a série de potências diverge.
  (c) $|x-a|\,\ell = 1$ isto é, $|x-a| = \frac{1}{\ell}$ nada se pode concluir sobre a natureza da série de potências.

Para uma dada série de potências

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$$

só existem 3 possibilidades.

(i) A série converge apenas quando $x = a$; neste caso tem soma $S = a_0$.

(ii) A série converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$;

(iii) Existe um número positivo R tal que a série
- converge absolutamente se $|x-a| < R$
- diverge se $|x-a| > R$.

- [Raio de convergência] O número R chama-se raio de convergência da série.

- [Intervalo de convergência] O intervalo de convergência da série é o conjunto de valores de x para os quais a série converge. Há várias possibilidades

  (i) a série só converge para $x = a$, temos $x \in [a, a]$ $(R = 0)$;

  (ii) a série converge absolutamente para $x \in \mathbb{R}$ $(R = \infty)$;

  (iii) a série converge absolutamente para $|x-a| < R$ $(R \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ e

$$\begin{array}{lclcl}]a-R, a+R[& \text{ou} & [a-R, a+R[& \text{ou} \\ ]a-R, a+R] & \text{ou} & [a-R, a+R] & \end{array}$$

Exemplo

1. Determinar o intervalo de convergência da série $\sum_{n\geq 1} \frac{(x-3)^n}{n}$.

Representação de funções por séries de potências

- Pode-se usar a série de potências $\sum_{n\geq 0} a_n\,(x-a)^n$ para definir uma função cujo domínio é o intervalo de convergência da série.
  - Para cada x do intervalo de convergência, toma-se $f(x)$ igual à soma da série, isto é
  $$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n\,(x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$
  - Se f é uma função definida desta forma, diz-se que
  $$\sum_{n\geq 0} a_n\,(x-a)^n$$
  é uma representação de $f(x)$ por uma série de potências.
  - Diz-se também que f é representada pela série.

Exemplo

1. Escrever a função $\dfrac{1}{1+x}$, $|x|<1$ como uma série de potências.

- [Propriedades] Sejam $\sum a_n\,(x-a)^n$ com raio de convergência $R \neq 0$ e f a função definida por
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$
para todo o x no intervalo de convergência. Se $a-R<x<a+R$ então
  (i) f é contínua em todo o x;
  (ii) f é derivável e
  $$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n\geq 0} [a_n\,(x-a)^n]' = \sum_{n\geq 1} n\,a_n\,(x-a)^{n-1} \\ &= a_1 + a_2(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^{n-1} + \cdots, \quad x \in]a-R, a+R[. \end{aligned}$$
  (ii) f é integrável e
  $$\begin{aligned} \int_a^x f(t)\,dt &= \sum_{n\geq 0} \int_a^x a_n\,(t-a)^n\,dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}\,(x-a)^{n+1} \\ &= a_0(x-a) + a_1(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^{n+1} + \cdots. \end{aligned}$$

Exemplo

1. Representar a função $\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $|x|<1$ por uma série de potências.

- [Série de Taylor] Chama-se série de Taylor de f em torno de a à série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\,.$$

  - Nos pontos x onde

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

    diz-se que f admite expansão em série de Taylor em torno do ponto a.

  - No caso particular de $a=0$, s série designa-se por série de MacLaurin.

Exemplo

1. Algumas funções e as respetivas séries de MacLaurin
   - $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R},\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!};$
   - $f(x)=\operatorname{sen} x,\ x\in\mathbb{R},\qquad \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$
   - $f(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R},\qquad \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

Observação

1. Seja $I=\,]a-R,a+R[\,,\ R>0$ e f a função definida em I por

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n\,(x-a)^n.$$

Viu-se que

- f é derivável em I e $f'(x)=\sum_{n\geq 1} n\,a_n\,(x-a)^{n-1};$
- f' é derivável em I e $f''(x)=\sum_{n\geq 2} n(n-1)\,a_n\,(x-a)^{n-2};$
- Para todo o $k>0$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,a_n\,(x-a)^{n-k};$$

- Substituindo x por a em cada uma das derivadas obtém-se
  - $f(a)=a_0;$
  - $f'(a)=a_1;$
  - $f''(a)=2a_2;$
  - $f'''(a)=(3\times 2)a_3;$
  - $\vdots$
  - $f^{(k)}(a)=k!\,a_k$

- Isto é, $a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
- Assim, se f é uma função

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n\,(x-a)^n$$

  para todo o x em I, então

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\,.$$

- Por outras palavras: se f é representada por uma série de potências de $x-a$, então série de potências é a série de Taylor da função.

- [Recordar] Se f uma função $\mathcal{C}^{n+1}(I), x,\, a \in I$ então Polinómio de Taylor de f de ordem n em torno de a é

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

e a correspondente Fórmula de Taylor-Lagrange é

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x), \qquad \forall x \in I.$$

onde

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- [Representação de f por uma série de Taylor] Seja I um intervalo aberto contendo a. Se f é uma função de classe $\mathcal{C}^{\infty}(I)$ e para todo o $x \in I$,

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$$

então f é representável pela sua série de Taylor em a.

Exemplo

1. Mostre que a série de MacLaurin da função seno é $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$

Observação

1. A série anterior representa a função $\operatorname{sen} x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

De facto, como a função seno é $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0\,,\ \text{ou seja}\ \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0.$$

- **Sabemos que** $f^{(n+1)}(x) = \cos x$ **ou** $f^{(n+1)}(x) = \operatorname{sen} x$
- **Logo** $|f^{(n+1)}(c_x)| \leq 1$ **e**

$$|R_{n,0}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

donde, para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} |R_{n,a}(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} = 0$$

Do teorema das sucessões enquadradas, segue que

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0.$$

2. Na página 14/50 mostrámos que a série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ é absolutamente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{|x^n|}{n!} \qquad \text{converge}\,.$$

   - Da condição necessária de convergência estudada no Cap. 3.1

$$\sum_{n\geq 0} \frac{|x^n|}{n!} \quad \text{converge} \implies \lim_{n} \frac{|x^n|}{n!} = 0$$

   - Por isso, no exemplo anterior,

$$\lim_{n} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} = 0$$

3. Podemos ter

$$f(x) \sim \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n\,.$$