Álgebra Linear EI

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

6. Valores e vetores próprios

Exercício 1. Verifique quais dos seguintes vetores são vetores próprios da matriz

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -12 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) $(0,0,2)$ *b)* $(1,3,0)$ *c)* $(0,0,0)$ *d)* $(1,1,3)$.

Exercício 2. Verifique quais dos seguintes valores são valores próprios da matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) 2 *b)* -2 *c)* 4 *d)* 1 *e)* 0

Exercício 3. Escreva a equação característica e calcule os valores próprios das matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e)* $E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *f)* $F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 4. Sabendo que $\lambda = 1$ é um valor próprio da seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

determine os restantes valores próprios de A.

Exercício 5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Substitua a terceira linha pela sua soma com a segunda multiplicada por -2 transformando-a numa matriz triangular superior U.

b) Calcule os valores próprios de A e de U e verifique que as matrizes **não** têm o mesmo conjunto de valores próprios.

Exercício 6. Determine vetores próprios associados a cada um dos valores próprios **reais** das matrizes apresentadas no Exercício 3.

Exercício 7. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule os valores próprios de A indicando a sua multiplicidade algébrica.

b) Calcule o subespaço próprio associado a cada um dos valores próprios de A, indicando a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

Exercício 8. Seja λ um valor próprio de uma matriz A e seja $\mathbf{x}$ um vetor próprio associado a λ. Mostre que

a) $\alpha\lambda$ $(\alpha \neq 0)$ é valor próprio de αA associado ao vetor próprio $\mathbf{x}$;

b) $\lambda - p$ é valor próprio de $A - pI$ associado ao vetor próprio $\mathbf{x}$;

c) λ^k $(k \in \mathbb{N})$ é valor próprio de A^k associado ao vetor próprio $\mathbf{x}$.

Exercício 9. Seja A uma matriz de ordem 3 com valores próprios $-1, 1$ e 2. Indique os valores próprios de uma matriz B relacionada com A do seguinte modo:

a) $B = 4A$.

b) $B = -A$.

c) $B = A + 3I_3$.

d) $B = A^{-1}$.

e) $B = A^T$.

f) $B = A^3$.

Exercício 10. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine os valores próprios de A.

b) Determine o subespaços próprio associado a cada um dos valores próprios de A.

c) Indique, justificando, se a matriz A é diagonalizável.

d) Indique uma matriz B, de ordem 4, que tenha os mesmos valores próprios da matriz A.

Exercício 11. Considere novamente as matrizes apresentadas no Exercício 3. Indique, para cada matriz, a multiplicidade algébrica e geométrica de cada valor próprio real. Diga, justificando, se as matrizes são diagonalizáveis.

Relativamente às questões seguintes, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

Exercício 12. Seja A uma matriz de ordem 4, com valores próprios $-2, -1, 1$ e 2 e seja $B = -2A$.

	V	F
a) $\det A = 4$.	○	○
b) As matrizes A e B são semelhantes.	○	○
c) O sistema $(A - 2I_4)\mathbf{x} = 0$ é possível e determinado.	○	○
d) Os valores próprios da matriz B são $-4, -2, 2$ e 4.	○	○

Exercício 13. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) $(0, 0, 0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 0.	○	○
b) $(2, 2, 2)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1.	○	○
c) $(-1, -1, -1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 0.	○	○
d) $(1, 0, -1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 0.	○	○

Exercício 14. Seja A uma matriz de ordem 3, com valores próprios 0, 1 e 2.

	V	F
a) A é uma matriz invertível.	○	○
b) O sistema $A\mathbf{x} = 0$ é possível e determinado.	○	○
c) Os valores próprios da matriz $2A - I_3$ são $1, 3$ e 5.	○	○
d) Existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A.	○	○

Exercício 1. a), b)

Exercício 2. b), c), d)

Exercício 3.

Matriz	A	B	C	D	E	F
$p(\lambda)$	$(-1+\lambda)(1+\lambda)$	$1+\lambda^2$	$-(-2+\lambda)^3$	$-(-3+\lambda)^2(-1+\lambda)$	$-(-4+\lambda)(-3+\lambda)(-1+\lambda)$	$(-4+\lambda)^2(-2+\lambda)^2$
v.p.	$-1,\ 1$	$i,\ -i$	2	$1,\ 3$	$1,\ 3,\ 4$	$2,\ 4$

Exercício 4. 5 e -2.

Exercício 5.

Matriz	A	U
v.p.	$2,\ 3$	$1,\ 2,\ 6$

Exercício 6.

Matriz	A	C	D	E	F
$\overrightarrow{\text{v.p.}}$	$(-1,1)$ $(1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$, $(0,1,0)$ $(-1,0,1)$	$(1,-1,1)$, $(-1,0,1)$ $(1,2,1)$	$(0,-1,0,1)$ $(-1,0,1,0)$ $(0,1,0,1)$ $(1,0,1,0)$

Exercício 7.

a) v.p.: -3 e 3, com m.a. 1 e 2, respetivamente.

b) $V_{-3} = \langle(-1,0,1)\rangle$ e $V_3 = \langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$.

Exercício 9. *a)* $-4,4,8$ *b)* $-2,-1,1$ *c)* $2,4,5$ *d)* $-1,1/2,1$ *e)* $-1,1,2$ *f)* $-1,1,8$.

Exercício 10.

a) v.p.: $0,1$ e 2, com m.a. $1,2$ e 1, respetivamente.

b) $V_0 = \langle(-1,-2,3,1)\rangle$, $V_1 = \langle(0,0,1,0)\rangle$ e $V_2 = \langle(1,0,-1,1)\rangle$.

c) A matriz não é diagonalizável, porque não há 4 vetores próprios linearmente independentes.

d) Por exemplo, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 11. A matriz D não é diagonalizável.

Exercício 12. VFFV

Exercício 13. FFVF

Exercício 14. FFFV