Tópicos de Matemática Discreta

folha 12

5. Relações binárias

5.1. Para cada uma das relações seguintes indique o domínio e imagem.

(a) S é a relação de $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ para $B = \{1, 2, 3\}$ dada por $S = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$.

(b) R é a relação em $\mathbb{R}$ dada por $R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\big\}$.

(c) $|$ é a relação "divide" em $\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$ definida por $a \mid b \leftrightarrow (\exists_{n\in\mathbb{N}}\ b = na)$.

5.2. Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Considere as seguintes relações em A:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (10, 8)\}\ , \qquad S = \{(10, 2), (10, 8)\}\ , \qquad T = \{(6, 2), (6, 4), (8, 10)\}\ .$$

Determine

(a) R^{-1}	(d) $T^{-1} \cap S$	(g) $S^{-1} \circ S$	(j) $T^{-1} \circ S^{-1}$
(b) $R^{-1} \cup S^{-1}$	(e) $S \circ T$	(h) $(S \circ T)^{-1}$	(k) $(R \circ S) \circ T$
(c) $T \setminus S^{-1}$	(f) $R \circ T$	(i) $S^{-1} \circ T^{-1}$	(l) $R \circ (S \circ T)$

5.3. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, w, z\}$. Considere as relações binárias R, de A em B, e S, de B em A:

$$\begin{aligned} R &= \{(1, x), (1, z), (2, y), (2, z)\} \\ S &= \{(x, 1), (x, 3), (y, 2), (w, 2), (z, 3)\}. \end{aligned}$$

Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.

(a) Determine R^{-1}, S^{-1}, T, $T \circ T$, U e $U \circ U$.

(b) Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(c) Indique o domínio e a imagem de R.

(d) Indique quantas relações binárias de A em B existem.

(e) Indique todas as relações binárias de A em B cujo domínio é $\{2, 3\}$ e cuja imagem é $\{x, z\}$.

(f) Dê um exemplo de relações binárias não vazias R', de A em B, e S', de B em A, tais que $S' \circ R' \neq \emptyset$ e $R' \circ S' = \emptyset$.

5.4. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Dê exemplo de, ou justifique que não existe:

(a) uma relação binária R de A em B tal que $R = R^{-1}$;

(b) relações binárias R e S em A tais que $R \circ S = S \circ R$ e $R \neq S$;

(c) uma relação binária R em A tal que $\mathrm{id}_A \subseteq R$ e $\mathrm{id}_A \not\subseteq R^{-1}$;

(d) uma relação binária R de A em B tal que $\mathrm{Dom}(R) = \emptyset$;

(e) relações binárias R de A em B e S de B em A tais que $R \circ S = \mathrm{id}_B$ e $S \circ R = \mathrm{id}_A$.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 13

5.5. Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Mostre que

(a) Se $R^{-1} = R$, então R é simétrica.

(b) R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$.

5.6. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações em A:

$$R_1 = \{(1,4), (2,2), (2,3), (3,2), (4,1)\}, \qquad R_2 = \{(2,3)\},$$

$$R_3 = \{(1,2), (2,3), (3,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}, \quad R_4 = \{(a,a) \mid a \in A\} = \mathrm{id}_A.$$

Diga, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação

(a) reflexiva; (b) simétrica; (c) antissimétrica; (d) transitiva.

5.7. Sejam A um conjunto e R uma relação simétrica e transitiva em A. Mostre que

(a) R não é necessariamente reflexiva. (b) Se o domínio de R é A, então R é reflexiva.

5.8. Considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Determine todas as relações de equivalência em A e, para cada uma, indique o conjunto quociente.

5.9. Seja $A = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação de equivalência R em A definida por $x\ R\ y$ se e só se $x^2 = y^2$. Indique todos os elementos da classe $[-3]_R$ e determine o conjunto quociente A/R.

5.10. Seja $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$ e considere a relação de equivalência $\sim$ em A definida por $x \sim y$ se e só se $x + y = 2n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Indique todos os elementos da classe $[2]_\sim$ e determine o conjunto quociente $A/\sim$.

5.11. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Considere as seguintes relações de equivalência em A: R é a menor relação de equivalência em A tal que $(1,2), (1,3), (4,5) \in R$ e S é a relação de equivalência em A cujas classes de equivalência são: $\{1,3\}$, $\{4\}$ e $\{2,5\}$. Determine R, indique todos os elementos da classe $[2]_R$ e indique, se existirem, $a, b \in A$ tais que aRb e aSb.

5.12. Considere a relação R em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $(x,y)\, R\, (z,w)$ se e só se $y = w$. Verifique que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e descreva a classe de equivalência $[(2,3)]_R$.

5.13. Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ e sejam

$$\Pi_1 = \{\{2,4\}, \{3\}, \{4,6\}, \{3,6,7\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{2,4,6\}, \{3,7\}\},$$

$$\Pi_3 = \{\{2\}, \{3,4,7\}\}, \qquad \Pi_4 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\},$$

$$\Pi_5 = \{\{2\}, \emptyset, \{3,4\}, \{6,7\}\}, \qquad \Pi_6 = \{\{2,6\}, \{3,7\}, \{4\}\}.$$

(a) Diga, justificando, quais dos conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ são partições de A.

(b) Para os conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ que são partições, determine $\mathcal{R}_{\Pi_j}$ e indique $[7]_{\mathcal{R}_{\Pi_j}}$.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 14

5.14. Seja $A = \{a, b\}$. Indique todas as relações de ordem parcial em A e apresente os correspondentes diagramas de Hasse.

5.15. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 as seguintes relações em A:

$$\rho_1 = \{(1,1), (4,1), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4)\}$$

$$\rho_2 = \{(1,1), (1,4), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4), (2,4)\}$$

$$\rho_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

$$\rho_4 = \{(1,1),(2,3),(2,2),(2,1),(3,3),(4,4),(3,1)\}$$

Indique se cada uma destas relações é ou não uma ordem parcial e, para cada ordem parcial, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

5.16. Mostre que os seguintes pares são c.p.o.'s:

(a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto;

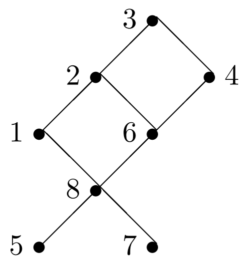
(b) $(\mathbb{N}_0, |)$, onde $|$ é a relação "*divide*" definida por $x|y \leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{N}_0} y = kx)$.

5.17. Construa diagramas de Hasse para os seguintes c.p.o.'s:

(a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, sendo $A = \{1, 2\}$;

(b) $(A, |)$, sendo $A = \{2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$ e $|$ a relação dada por $x|y \leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{N}_0} y = kx)$.

5.18. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 2, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \preceq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:



Para cada um dos conjuntos A, X e Y determine, caso existam, os majorantes e os minorantes, o supremo e o ínfimo, os elementos maximais e minimais e o máximo e o mínimo.

5.19. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:

(a) Se X tem um elemento maximal então X tem elemento máximo;

(b) Se X tem elemento máximo então X tem um elemento maximal;

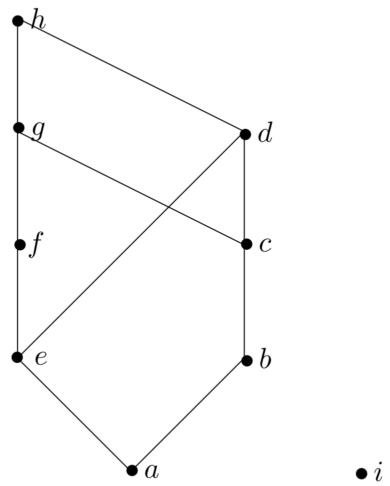
(c) Se existe $\sup(X)$ então X tem um elemento maximal;

(d) Se X tem um elemento maximal então existe $\sup(X)$.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 15

5.20. Seja $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:



(a) Indique os elementos maximais e minimais de A.

(b) Seja $X = \{c, d, e, g, h\}$. Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de X em A e, caso existam, o máximo, o mínimo, o supremo e o ínfimo de X.

(c) Dê exemplo de um subconjunto próprio de A com 3 elementos maximais e indique-os.

5.21. Mostre que, num c.p.o. $(A, \leq)$, são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$: (1) $a \leq b$; (2) $\sup\{a, b\} = b$; (3) $\inf\{a, b\} = a$.

5.22. Considere o c.p.o. $(\mathbb{N}_0, |)$ (definido no exercício 5.16.(b)).

(a) Mostre que $(\mathbb{N}_0, |)$ não é uma cadeia.
(b) Diga, justificando, se $(\mathbb{N}_0, |)$ tem elemento máximo ou elemento mínimo.
(c) Mostre que $(\mathbb{N}_0, |)$ é um reticulado, indicando para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}_0$, o supremo e o ínfimo de $\{a, b\}$.
(d) Considere $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18\}$ e $Y = \{1, 2, 5, 6, 12, 20, 30, 120\}$.

(i) Construa os diagramas de Hasse de $(X, |)$ e de $(Y, |)$.
(ii) Indique, caso existam, os elementos minimais e os elementos maximais de X.
(iii) Dê exemplos de subconjuntos Z de Y, com pelo menos quatro elementos, tais que $(Z, |)$ é uma cadeia.
(iv) Indique, caso existam, elementos $a, b \in Y$ tais que:
(α) exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$ e este supremo seja diferente do supremo de $\{a, b\}$ em $(\mathbb{N}_0, |)$;
(β) não exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$;
(v) Dê exemplo de um subconjunto W de X tal que $(W, |)$ tenha elemento máximo e elemento mínimo e não seja um reticulado.