Universidade do Minho | MIEInf
Dep. Matemática e Aplicações | 2015/2016

Tópicos de Matemática Discreta

folha 1

1. Noções elementares de lógica

1.1. Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:

(a) A Terra é redonda.

(b) Hoje está sol.

(c) $2 + x = 3$ e 2 é par.

(d) $(25 \times 2) + 7$

(e) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.

(f) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?

(g) $4 < 3$

(h) Se $x \geq 2$ então $x^3 \geq 1$.

(i) A U.M. é a melhor academia do país.

1.2. Representando as frases *Eu gosto de leite*, *Eu não gosto de cereais* e *Eu sei fazer crepes* por p_0, p_1 e p_2, respetivamente, traduza as seguintes fórmulas para linguagem corrente:

(a) $p_0 \wedge p_1$ (c) $\neg p_2$ (e) $\neg p_0 \vee \neg p_1$ (g) $(p_2 \wedge p_0) \vee p_1$

(b) $p_1 \vee p_2$ (d) $\neg(p_0 \vee p_1)$ (f) $p_2 \to p_0$ (h) $p_2 \wedge (p_0 \vee p_1)$

1.3. Considere as proposições *7 é um número inteiro par*, *3+1=4* e *24 é divisível por* 8 representadas, respetivamente, por p_0, p_1 e p_2.

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

  (i) $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.

  (ii) Não é verdade que 7 seja ímpar ou $3 + 1 = 4$.

  (iii) Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

  (i) $p_0 \vee (\neg p_2)$

  (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$

  (iii) $(\neg p_2) \to (\neg p_1 \vee p_0)$

1.4. De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

(a) $(\neg\, (p_1 \vee p_2))$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 2

(b) $((\neg p_5) \to (\neg p_6))$

(c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($

(d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \to \perp)$

(e) $(\perp)$

(f) $(((p_9 \to ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \to (p_7 \vee \perp)))$

1.5. Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:

(a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$

(b) 1 e -1 são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.

(c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.

(d) $\sqrt{530} < 25 \to 530 < 25^2$

(e) 7^4 é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

1.6. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

(a) $p_0 \vee (\neg p_0)$

(b) $\neg(p_0 \vee p_1)$

(c) $p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$

(d) $p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$

(e) $\neg(p_0 \to \neg p_1)$

(f) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$

(g) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$

(h) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(i) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$

(j) $p_0 \wedge \neg(p_1 \to p_2)$

(k) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(l) $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$

1.7. Suponha que p_0 representa uma proposição verdadeira, p_1 uma proposição falsa, p_2 uma proposição falsa e p_3 uma proposição verdadeira. Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $p_0 \vee p_2$

(b) $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$

(c) $\neg(p_0 \wedge p_1)$

(d) $\neg p_3 \vee \neg p_2$

(e) $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(f) $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$

(g) $p_2 \to p_1$

(h) $p_0 \leftrightarrow p_2$

(i) $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$

(j) $p_3 \to (p_0 \to \neg p_3)$

(k) $((p_1 \to p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$

(l) $(p_3 \to p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$

1.8. Admitindo que p_0, p_1 e p_2 representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

(a) $p_0 \wedge p_1$

(b) $p_0 \vee p_1$

(c) $p_0 \to p_1$

(d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 3

1.9. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.

(b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

(c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

(d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

(e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.

(f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

(g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

(h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

1.10. Considere as seguintes afirmações:

- Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
- Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
- Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.

(a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases simples.

(b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

1.11. De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p_0 \to (p_0 \lor p_1)$

(b) $\neg(p_0 \land p_1) \to (p_0 \lor p_1)$

(c) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(d) $(p_0 \to (p_0 \lor p_1)) \land p_1$

(e) $(p_0 \lor \neg p_0) \to (p_0 \land \neg p_0)$

(f) $\neg(p_0 \to (p_1 \to p_0))$

1.12. Indique quais dos pares de fórmulas que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\neg(p_0 \land p_1)$; $\neg p_0 \land \neg p_1$

(b) $p_0 \to p_1$; $p_1 \to p_0$

(c) $\neg(p_0 \to p_1)$; $p_0 \land (p_1 \to (p_0 \land \neg p_0))$

(d) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$; $\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$

1.13. Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p_0 \lor \neg p_1$ e que envolva apenas os conetivos $\land$ e $\neg$.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 4

1.14. Considere em cada alínea o predicado $p(n)$ sobre os números inteiros e: (i) para cada valor de n, indique se a correspondente proposição é ou não verdadeira; (ii) indique se a proposição $\exists_n\ p(n)$ é verdadeira; (iii) indique se a proposição $\forall_n\ p(n)$ é verdadeira.

(a) $n^2 \geq 0$

(b) $n^2 < 0$

(c) $n < 5 \rightarrow n < 2$

1.15. Suponha que o domínio de variação de x é um dado conjunto de coelhos e considere os predicados na variável x: $p(x)$: *x tem pelo branco*, $q(x)$: *x gosta de cenouras*. Traduza as seguintes quantificações por palavras:

(a) $\forall_x\ p(x)$

(b) $\exists_x\ q(x)$

(c) $\forall_x\ (p(x) \wedge q(x))$

(d) $\exists_x\ (p(x) \vee q(x))$

(e) $\forall_x\ (p(x) \rightarrow q(x))$

(f) $\exists_x\ (q(x) \leftrightarrow \neg p(x))$

1.16. Suponha que o domínio de variação de x é um dado conjunto de cães e sejam $p(x)$: "x é preto", $q(x)$: "x tem quatro anos", $r(x)$: "x tem manchas brancas". Traduza as seguintes quantificações para linguagem simbólica.

(a) Existe um cão preto.

(b) Todos os cães têm quatro anos de idade.

(c) Existe um cão preto com manchas brancas.

(d) Todos os cães com quatro anos têm manchas brancas.

(e) Existe um cão tal que se tem quatro anos então não tem manchas brancas.

(f) Todos os cães são pretos se e só se não têm quatro anos.

(g) Não existem cães pretos.

1.17. Exprima cada uma das seguintes frases como quantificações:

(a) A equação $x^3 = 28$ tem solução nos números naturais.

(b) A equação $x^2 - 4 = 0$ tem uma solução positiva.

(c) 1000000 não é o maior número natural.

(d) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

(e) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 5

1.18. Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

(a) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

(b) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

(c) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.

(d) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

1.19. Escreva quantificações equivalentes à negação de cada uma das seguintes proposições.

(a) Todo o OVNI tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.

(b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.

(c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x.

(d) Existe um inteiro n tal que n^2 é um número perfeito.

1.20. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

(a) $\forall_x \exists_y \ x + y = 0$

(b) $\exists_x \forall_y \ x + y = 0$

(c) $\exists_x \forall_y \ x + y = y$

(d) $\forall_x \ (x > 0 \to \exists_y \ xy = 1)$

Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

1.21. Averigue a validade dos seguintes argumentos:

(a) O João afirma: "Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão". No dia seguinte o João comentou: "Ontem não fui ao cinema." Em resposta, a Joana concluiu: "Então viste um filme na televisão!".

Tópicos de Matemática Discreta

folha 6

(b) O João disse: "Se existe uma armadilha nesta estrada, nós não chegaremos sem nos magoarmos". Uns minutos depois, Joana deu uma queda, magoou-se e replicou: "Havia uma armadilha nesta estrada!".

(c) A Maria afirmou: "Se hoje chover e fizer frio, vai nevar". No dia seguinte a Maria comentou: "Ontem fez frio e nevou." Em resposta, a Rita concluiu: "Então choveu".

(d) O Tiago disse: "Vou almoçar ao McDonald's ou à Pizza Hut". E acrescentou: "Se comer no McDonald's fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: "O Tiago foi almoçar à Pizza Hut".

1.22. Mostre que, para todo o número real x, se $x^2 \geq x$ então $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

1.23. Mostre que a soma de dois números ímpares é um número par.

1.24. Mostre que o produto de números ímpares é um número ímpar.

1.25. Prove que, para todo o natural n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

1.26. Encontre um contraexemplo para cada das afirmações seguintes:

(a) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.

(b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.

(c) Se $x^4 = 1$, com $x \in \mathbb{R}$, então $x = 1$.

1.27. Prove que, dado um número natural n, se n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e de 3.

1.28. Mostre que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

1.29. Prove que, para quaisquer reais x e y, se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, então $x \neq 3$.