Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

5. Transformações lineares

Exercício 1. Verifique quais das seguintes aplicações são lineares.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x, y, 0)$;

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (x + 1, y + 2)$;

c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y, z) = (x + y, z)$;

d) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $p(x, y, z) = (xy, z)$;

e)
$$\begin{array}{rrcl} d: & \mathcal{P}_3(x) & \longrightarrow & \mathcal{P}_3(x) \\ & p(x) & \mapsto & p''(x) \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rrcl} t: & \mathbb{R}^{m\times n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n\times m} \\ & A & \mapsto & A^T \end{array}$$

Exercício 2. Para cada uma das aplicações lineares do exercício anterior, determine o núcleo e indique a sua dimensão.

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação, tal que

$$f(x, y, z) = (x + k, z + k), \quad k \text{ constante real.}$$

a) Indique para que valores de k essa aplicação é linear.

b) Para o valor de k encontrado na alínea anterior, determine $\operatorname{Nuc} f$ e uma sua base.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, 2x + 5y, x + 3y + z).$$

a) Determine a representação matricial de f.

b) Calcule, de duas formas distintas, $f(1, 2, 3)$.

c) Determine $\operatorname{Nuc} f$ e uma sua base.

d) Indique uma base para $\operatorname{Im} f$.

Exercício 5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja representação matricial é

$$\mathcal{M}_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a expressão de $T(x_1, x_2, x_3)$, com $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

b) Diga, justificando, se o vector $(5, 7, 9) \in \operatorname{Im} T$. Determine uma base para $\operatorname{Nuc} T$.

c) Indique uma base para $\operatorname{Im} T$.

Exercício 6. Para cada uma das aplicações lineares seguintes, determine o núcleo e a sua dimensão e diga se a aplicação é injetiva. Indique ainda a dimensão do espaço imagem e diga se a aplicação é sobrejetiva.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y, z) = (x, x - y, x + z)$.

b) g a aplicação linear cuja representação matricial é

$$\mathcal{M}_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$\begin{aligned} h(1,0,0,0) &= (1,-1,2) \\ h(0,1,0,0) &= (-2,5,3) \\ h(0,0,1,0) &= (-7,16,7) \\ h(0,0,0,1) &= (-3,6,1). \end{aligned}$$

Exercício 7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear representada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determine $T(1, 2, 4)$.

b) Verifique se T é bijetiva.

c) Determine uma base para $\operatorname{Im} T$.

d) Determine uma base para $\operatorname{Nuc} T$.

e) Determine $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{u}) = (4, -3, 8)\}$.

Exercício 8. *a)* Justifique que $((1, 1), (-1, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e determine as coordenadas dos vetores $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ e $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ nessa base.

b) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$T(1, 1) = (1, 2, 1), \quad T(-1, 1) = (-1, 0, 3).$$

(i) Construa a representação matricial de T.

(ii) Determine $T(x, y)$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Diga, justificando, se T é injetiva e/ou sobrejetiva.

Exercício 9. Seja Φ_k a aplicação linear cuja representação matricial é

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & k-2 & 1 \\ 2 & 8 & k \\ k+1 & 2k & -k-1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Determine os valores de k para os quais a aplicação Φ_k é injetiva.

b) Determine $\operatorname{Nuc} \Phi_{-2}$ e diga qual a sua dimensão.

c) Determine uma base para $\operatorname{Im} \Phi_1$.

Exercício 10. Diga porque não existe ou apresente um exemplo de uma transformação linear nas condições indicadas.

a) $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo tenha dimensão 2.

b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim \operatorname{Nuc} g = 2$.

c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(3, 3) = (1, 2)$ e $h(5, 5) = (2, 1)$.

d) $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\operatorname{Nuc} t = \langle (1, 1, 1), (1, 1, 0) \rangle$ e $(1, 3) \in \operatorname{Im} t$.

Exercício 11. Seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$f(1,0,0)=(1,1,2),\quad f(0,1,0)=(-1,2,0),\quad f(0,0,1)=(-1,5,2).$$

a) Determine $f(-1,-2,1)$.

b) Determine $\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3 : f(\mathbf{u})=(0,3,3)\}$.

c) Diga, justificando, se f é injetiva e/ou sobrejetiva.

Exercício 12. Seja $T_{\alpha,\beta}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja representação matricial é

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}1 & -\alpha & 0\\ 0 & -1 & \beta\\ 1 & 0 & -\beta\end{pmatrix},\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

a) Calcule α e β de modo que $(1,1,1)\in\operatorname{Im}T_{\alpha,\beta}$.

b) Indique, justificando, para que valores de α e β a aplicação linear é bijetiva.

c) Calcule $T_{2,2}(1,-1,1)$.

d) Calcule uma base do núcleo de $T_{1,1}$.

Exercício 13. Considere a aplicação linear $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z)=(x+y+z,-x+2z,x+2y+4z)$$

a) Indique, justificando, se a aplicação f é injetiva.

b) Verifique se $(1,1,1)\in\operatorname{Im}f$.

Nas questões seguintes, indique, a(s) alínea(s) correta(s).

Exercício 14. Considere, para cada $k\in\mathbb{R}$, a aplicação linear $\phi_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ associada à matriz

$$A_k=\begin{pmatrix}k & 2k-1 & 1\\ 0 & k-2 & 1\\ 0 & 0 & 2k\end{pmatrix}.$$

	V	F
a) dim(Im ϕ_2) $=2$.	○	○
b) $\phi_1(1,2,3)=(6,1,6)$.	○	○
c) A aplicação ϕ_3 não é injetiva.	○	○
d) Se ϕ_k é sobrejetiva, então $k\neq 0$.	○	○

Exercício 15. Seja $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e $\mathcal{M}_f$ a matriz de f.

	V	F
a) $\mathcal{M}_f$ é uma matriz 3×4.	○	○
b) f não pode ser injetiva.	○	○
c) f não pode ser sobrejetiva.	○	○
d) Se $\dim\operatorname{Nuc}f=2$, então $\dim\mathcal{C}(\mathcal{M}_f)=2$.	○	○

Exercício 1. f, h, d e t são aplicações lineares.

Exercício 2. $\operatorname{Nuc} f = \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle$, $\dim \operatorname{Nuc} f = 2$; $\operatorname{Nuc} h = \langle(-1,1,0)\rangle$, $\dim \operatorname{Nuc} h = 1$; $\operatorname{Nuc} d = \langle 1, x\rangle$, $\dim \operatorname{Nuc} d = 2$; $\operatorname{Nuc} t = \{\mathbf{0}_{m\times n}\}$; $\dim \operatorname{Nuc} t = 0$.

Exercício 3. *a)* $k = 0$; *b)* $\operatorname{Nuc} T = \langle(0,1,0)\rangle$, Base de $\operatorname{Nuc} T$: $((0,1,0))$.

Exercício 4. *a)*

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $f(1,2,3) = (2,8,12,10)$.
c) $\operatorname{Nuc} f = \langle(5,-2,1)\rangle$; Base de $\operatorname{Nuc} f$: $((5,-2,1))$.
d) Base de $\operatorname{Im} f$: $((1,0,2,1),(2,1,5,3))$.

Exercício 5. *a)* $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 + 3x_3, 3x_1 + 3x_3)$.
b) Sim. *c)* Base de $\operatorname{Nuc} T$: $((-1,-1,1))$. *d)* Base de $\operatorname{Im} T$: $((2,2,3),(-1,1,0))$.

Exercício 6.

	Nuc	dim Nuc	dim Im	injetiva	sobrejetiva
f	$\{(0,0,0)\}$	0	3	S	S
g	$\{(0,0,0)\}$	0	3	S	N
h	$\langle(1,-3,1,0),(1,-1,0,1)\rangle$	2	2	N	N

Exercício 7. *a)* $T(1,2,4) = (5,10,10)$.
b) T não é bijetiva.
c) Base de $\operatorname{Im} T$: $((1,0,2),(0,1,0))$.
d) Base de $\operatorname{Nuc} T$: $((-1,-2,1))$.
e) $\{(4-\alpha, -3-2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 8. *a)* $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(-1,1)$.
b) *(i)*

$$\mathcal{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) $T(x,y) = (x, x+y, -x+2y)$. *(iii)* É injetiva; não é sobrejetiva.

Exercício 9. *a)* $k \neq -2$ e $k \neq 1$.
b) $\operatorname{Nuc} \Phi_{-2} = \langle(-4,1,0),(1,0,1)\rangle$; $\dim \operatorname{Nuc} \Phi_{-2} = 2$.
c) Base de $\operatorname{Im} \Phi_1$: $((-1,2,2),(-1,8,2))$.

Exercício 10. *a)* Não existe.
b) Por exemplo, g definida por: $g(1,0,0) = (0,0,0), g(0,1,0) = (0,0,0), g(0,0,1) = (1,2,3)$.
c) Não existe.
d) Por exemplo, t definida por: $t(1,1,1) = (0,0), t(1,1,0) = (0,0), t(1,0,0) = (1,3)$.

Exercício 11. *a)* $f(-1,-2,1) = (0,0,0)$. *b)* $\emptyset$; *c)* Não é injetiva nem sobrejetiva.

Exercício 12. *a)* $\alpha = 0$ ou $\beta \neq 1$. *b)* $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 1$. *c)* $T_{2,2}(1,-1,1) = (3,3,-1)$.
d) Base de $\operatorname{Nuc} T$: $((1,1,1))$.

Exercício 13. *a)* Não. *b)* Não.

Exercício 14. V V F V

Exercício 15. V V F V