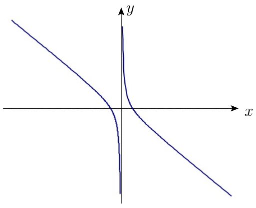
Cálculo

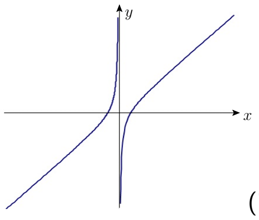
folha 3 — 2015'16

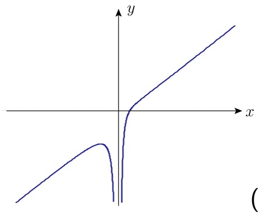
Funções racionais.

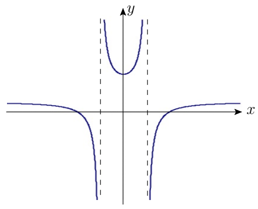
1. Considere a e b dois números reais tais que $0 < b < a$. Nestas condições, estabeleça a correspondência devida entre cada uma das expressões seguintes e a respetiva representação gráfica.

(a) $y = \dfrac{a}{x} - x$ (b) $y = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x}$ (c) $y = \dfrac{(x-a)(x^2+a)}{x^2}$ (d) $y = \dfrac{(x-a)(x+a)}{(x-b)(x+b)}$

(i)


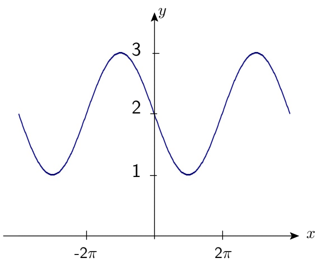
(ii)


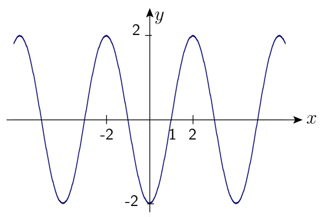
(iii)


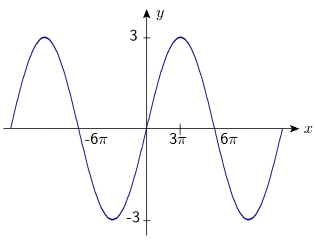
(iv)


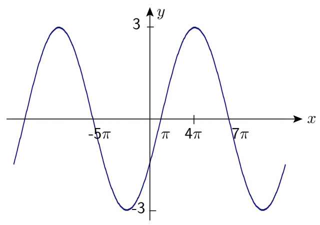
Funções trigonométricas diretas e inversas.

2. Identifique, através de uma fórmula, as funções trigonométricas que a seguir se representam

(a)


(c)


(b)


(d)


3. Expresse, usando o conceito de função composta, a diferença entre sen x^2, sen$^2 x$ e sen(sen x).

NOTA: As notações sen$^2 x$ e (sen x)^2 são equivalentes, isto é, sen$^2 x$ = (sen x)^2.

4. A baía de Fundy, no Canadá, tem as maiores marés do mundo. Aí a diferença entre o **nível máximo e o mínimo das águas** é igual a 15 m. Num local particular da baía a profundidade da água (y, em metros) define-se em função do tempo (t, medido em horas a partir da meia-noite) por

$$y(t) = D + A\cos\left[B(t-C)\right].$$

(a) Qual o significado físico do parâmetro D?

(b) Qual o valor de A?

(c) Admitindo que o tempo decorrido entre duas marés consecutivas é de 12.4 horas, qual o valor de B?

(d) Qual o significado físico de C?

5. Estabeleça as seguintes igualdades, válidas para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ (b) $\text{sen}^2\, x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ (c) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

6. Resolva as equações seguintes:

(a) $\text{sen}(2x) = \frac{1}{2}$ (b) $\sqrt{3}\,\text{sen}(3x) + \cos(3x) = 2$ (c) $4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{1}{2}$

7. Calcule

(a) $\text{sen}(\text{arcsen}(-\frac{1}{2}))$

(b) $\text{arcsen}(\text{sen}(7\frac{\pi}{6}))$

(c) $\cos(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}))$

(d) $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$

(e) $\text{arctg}(\text{tg}(-\frac{\pi}{4}))$

(f) $\text{tg}(\text{arctg}(-1))$

8. Deduza as seguintes igualdades em domínios que deverá especificar:

(a) $\begin{cases} \text{sen}(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2} \\ \text{tg}(\arccos x) &= \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \cos(\text{arcsen}\, x) &= \sqrt{1-x^2} \\ \text{tg}(\text{arcsen}\, x) &= \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \cos(\text{arctg}\, x) &= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \text{sen}(\text{arctg}\, x) &= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

9. Calcule

(a) $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $\text{cotg}\left(\text{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

(c) $\cos\left(\text{arcsen}\,\frac{1}{2} - \arccos\frac{3}{5}\right)$

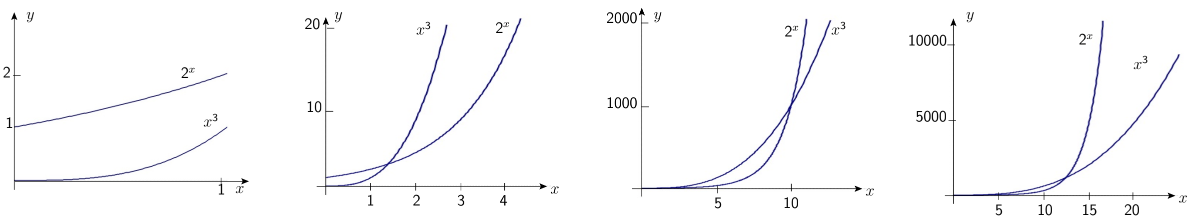
(d) $\text{arcsen}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) + 4\,\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(e) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$

(f) $\text{tg}^2\left(\text{arcsen}\,\frac{3}{5}\right) - \text{cotg}^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$

Funções exponenciais e logarítmicas.

10. Em linguagem corrente usa-se a expressão "crescimento exponencial" como sinónimo de um crescimento muito rápido. Analise as seguintes representações gráficas e reflita sobre o que pode, em rigor, dizer-se quando comparamos uma função exponencial com uma função potência.



11. Resolva as seguintes equações:

(a) $e^x = e^{1-x}$

(b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

(c) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$

(d) $\ln(x^2 - 1) + 2\ln 2 = \ln(4x - 1)$

Funções hiperbólicas diretas e inversas.

12. Demonstre as seguintes igualdades:

(a) $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

(b) $\text{ch}\ x + \text{sh}\ x = e^x$

(c) $\text{sh}(-x) = -\,\text{sh}\ x$

(d) $\text{ch}(-x) = \text{ch}\ x$

(e) $\text{sh}(x+y) = \text{sh}\ x\ \text{ch}\ y + \text{ch}\ x\ \text{sh}\ y$

(f) $\text{ch}(x+y) = \text{ch}\ x\ \text{ch}\ y + \text{sh}\ x\ \text{sh}\ y$

(g) $\text{th}^2 x + \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} = 1$

(h) $\text{coth}^2 - \dfrac{1}{\text{sh}^2 x} = 1$

(i) $\text{argsh}\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$

(j) $\text{argch}\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in [1, +\infty[$

(k) $\text{argth}\ x = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, \quad x \in]-1, 1[$

(l) $\text{argcth}\ x = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\,]-1, 1[$