Cálculo

folha 8 — 2015'16

Aplicações do integral de Riemann.

1. Sejam f e g duas funções integráveis em $[a,b]$ cujas curvas de intersetam no intervalo. Nestas condições, qual o significado geométrico de cada um dos integrais?

(a) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ (b) $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

2. Determine a área da região limitada por $y = \sqrt{x}$, pela tangente a esta curva em $x = 4$ e pelo eixo das ordenadas.

3. Represente graficamente o conjunto A dado e calcule a sua área.

(a) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pela curva de $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{x} \leq y \leq -x + 2\}$.

(c) A é o conjunto do plano limitado superiormente pela parábola de equação $y = -x^2 + \dfrac{7}{2}$ e inferiormente pela parábola de equação $y = x^2 - 1$.

(d) A é o conjunto de todos os pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 - 1 \leq y \leq x + 1$.

4. Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

(a) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 3x, \quad y = -x^2 + 4$

(b) $x = 0, \quad x = \pi/2, \quad y = \text{sen } x, \quad y = \cos x$

(c) $x = -1, \quad y = |x|, \quad y = 2x, \quad x = 1$

(d) $y = -x^3, \quad y = -(4x^2 - 4x)$.

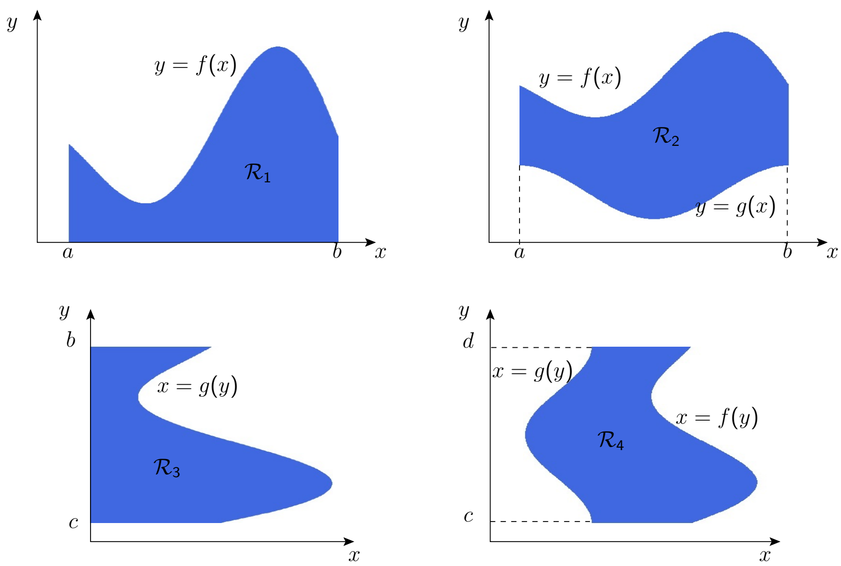
5. Defina a reta horizontal $(y = k)$ que divide a área da região entre $y = x^2$ e $y = 9$ em duas partes iguais.

6. Seja A s área limitada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b, b > 1$.

(a) Calcule A. (b) Calcule $\displaystyle\lim_{b \longrightarrow +\infty} A$.

7. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região $\mathcal{R}$ definida por $y = \sqrt{x}, y = 6 - x$ e $y = 0$ em torno do eixo das abcissas.

8. Sejam $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_4$ as regiões representadas por



Expresse os seguintes volumes em termos de integrais definidos

(a) O volume do sólido gerado pela rotação de $\mathcal{R}_1$ em torno do eixos das abcissas.

(b) O volume do sólido gerado pela rotação de $\mathcal{R}_2$ em torno do eixos das abcissas.

(c) O volume do sólido gerado pela rotação de $\mathcal{R}_3$ em torno do eixos das ordenadas.

(d) O volume do sólido gerado pela rotação de $\mathcal{R}_4$ em torno do eixos das ordenadas.

9. Faz-se um furo de raio $\frac{r}{2}$ através do centro de uma esfera de raio r. Estabeleça um integral que lhe permita calcular o volume do sólido resultante.

10. Encontre o comprimento da curva definida por $y = 2x$ entre os pontos de coordenadas $(1, 2)$ e $(2, 4)$:

(a) usando o teorema de Pitágoras;

(b) usando um integral definido em ordem a x;

(c) usando um integral definido em ordem a y;

11. Considere a curva definida por $y = x^{2/3}$.

(a) Esboce o arco desta curva, entre $x = -1$ e $x = 8$.

(b) Explique porque razão não pode usar um integral definido em ordem a x para calcular o comprimento de arco esboçado na alínea 11a.

(c) Calcule o comprimento da curva da 11a.

12. Determine o comprimento da curva definida pelas equações apresentadas, entre os pontos a e b indicados:

(a) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $A = (1, \frac{2}{3})$, $B = (8, \frac{8}{3})$

(b) $y = 5 - \sqrt{x^3}$, $A = (1, 4)$, $B = (4, -3)$

(c) $y = 6\sqrt[3]{x^2} + 1$, $A = (-1, 7)$, $B = (-8, 25)$

(d) $y = \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3}$, $A = (-2, \frac{67}{24})$, $B = (-3, \frac{109}{12})$.