Cálculo

Formulário 2015'16

Critérios sobre séries de números reais

[Condição necessária de convergência] Se $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim u_n = 0$.

[1.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos não negativos tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.

(a) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

(b) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

[2.º critério de comparação] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ séries de termos positivos tais que $\ell = \lim\limits_{n} \dfrac{u_n}{v_n}$, onde $\ell \in [0, +\infty]$.

(a) $\ell \neq 0$ ou $\ell \neq +\infty$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ têm a mesma natureza.

(b) Se $\ell = 0$

  (i) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

  (ii) $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

(c) Se $\ell = +\infty$

  (i) $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

  (ii) $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

[Critério da razão (ou D'Alembert)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos positivos e $\ell = \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

(a) $\ell < 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) $\ell > 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) $\ell = 1$ $\Longrightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério da raiz (ou de Cauchy)] Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ uma série de termos não negativos e $\ell = \lim \sqrt[n]{u_n}$.

(a) $\ell < 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(b) $\ell > 1$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente.

(c) $\ell = 1$ $\Longrightarrow$ nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

[Critério do integral] Se $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva, decrescente e, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja, $f(n) = u_n$ então $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

[Convergência absoluta] Se $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n|$ é convergente então $\sum_{n\geq 1} u_n$ também é convergente.

[Critério de Leibnitz] Seja $(a_n)_n$ uma sucessão decrescente tal que $\lim a_n = 0$. Então $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ é convergente.

Regras de derivação

(Omitem-se os domínios das funções e considera-se a uma constante apropriada.)

$(x^a)' = a\, x^{a-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$ | $\log_a' x = \dfrac{1}{x \ln a}$

$\mathrm{sen}' x = \cos x$ | $\cos' x = -\,\mathrm{sen}\, x$

$\mathrm{tg}' x = \sec^2 x$ | $\mathrm{cotg}' x = -\,\mathrm{cosec}^2 x$

$\sec' x = \sec x\ \mathrm{tg}\, x$ | $\mathrm{cosec}' x = -\,\mathrm{cosec}\, x\ \mathrm{cotg}\, x$

$\mathrm{sh}' x = \mathrm{ch} x$ | $\mathrm{ch}' x = \mathrm{sh} x$

$\mathrm{th}' x = \mathrm{sech}^2 x$ | $\mathrm{coth}' x = -\,\mathrm{cosech}^2 x$

$\mathrm{sech}' x = -\,\mathrm{sech}\, x\ \mathrm{th} x$ | $\mathrm{cosech}' x = -\,\mathrm{cosech}\, x\ \mathrm{coth} x$

$\mathrm{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\mathrm{arccos}' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\mathrm{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathrm{arccotg}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$\mathrm{arcsec}' x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\mathrm{arccosec}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\mathrm{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\mathrm{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\mathrm{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$ | $\mathrm{argcth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$

$\mathrm{argsech}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$ | $\mathrm{argcosech}' x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

Recorda-se ainda que $a' = 0$ e

$$(g \circ u)'(x) = g'(u(x))\, u'(x) \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Primitivas imediatas

($u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo I e $\mathcal{C}$ denota uma constante real arbitrária)

$\displaystyle\int a\, dx = ax + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int u'\, u^\alpha\ dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}\ \ (\alpha \neq -1)$

$\displaystyle\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int a^u\ u'\ dx = \frac{a^u}{\ln a} + \mathcal{C}\ \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$\displaystyle\int u' \cos u\ dx = \mathrm{sen}\, u + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int u'\ \mathrm{sen}\, u\ dx = -\cos u + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int u' \sec^2 u\ dx = \mathrm{tg}\, u + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int u'\ \mathrm{cosec}^2 u\ dx = -\,\mathrm{cotg}\, u + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int u'\ \mathrm{tg}\, u\ dx = -\ln|\cos u| + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int u'\ \mathrm{cotg}\, u\ dx = \ln|\mathrm{sen}\, u| + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int u' \sec u\ dx = \ln|\sec u + \mathrm{tg}\, u| + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int u'\ \mathrm{cosec}\, u\ dx = \ln|\mathrm{cosec}\, u - \mathrm{cotg}\, u| + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\, dx = \mathrm{arcsen}\, u + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\, dx = \mathrm{arccos}\, u + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \mathrm{arctg}\, u + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int \frac{-u'}{1+u^2}\, dx = \mathrm{arccotg}\, u + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int u'\ \mathrm{ch}\, u\ dx = \mathrm{sh}\, u + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int u'\ \mathrm{sh}\, u\ dx = \mathrm{ch}\, u + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int u'\ \mathrm{sech}^2 u\ dx = \mathrm{th}\, u + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int u'\ \mathrm{cosech}^2 u\ dx = -\,\mathrm{coth}\, u + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}\, dx = \mathrm{argsh}\, u + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\, dx = \mathrm{argch}\, u + \mathcal{C}$

$\displaystyle\int \frac{u'}{1-u^2}\, dx = \mathrm{argth}\, u + \mathcal{C}$ | $\displaystyle\int \frac{u'}{1-u^2}\, dx = \mathrm{argcth}\, u + \mathcal{C}$