Programação Linear - análise de sensibilidade

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

18 de setembro de 2017

Análise de sensibilidade

antes

- Na resolução de um dado problema, assumimos que os dados eram constantes que não podiam ser alteradas.
- Na realidade, os dados podem não estar totalmente correctos, ou podemos querer avaliar se os deveremos alterar.

Guião

- Após determinar a solução óptima, queremos analisar como é que a solução óptima varia quando varia o valor de um dado (passaremos a tratá-lo como um parâmetro),
- ou seja, analisar a sensibilidade da solução óptima ao parâmetro.
- Parâmetros a analisar: quantidade de recurso disponível e coeficiente da função objectivo.

depois

- Os *solvers* de programação linear produzem relatórios que ajudam a efectuar a análise de sensibilidade.

Motivação

- Resolvendo o seguinte modelo com um *solver* de PL:

```
       max:  30x1 +20x2 +10x3;
restricao1:   1x1 + 1x2 + 2x3 <=  40;
restricao2:   2x1 + 2x2 + 1x3 <= 150;
restricao3:   2x1 + 1x2       <=  20;
```

- obtém-se o seguinte relatório com a solução óptima:

Objective	
Variables	result
	500
x1	0
x2	20
x3	10

- Para além de conhecer a solução óptima, fazer 20 unidades da actividade 2 e 10 unidades da actividade 3, com vendas de 500,
- podemos querer saber ...

E se ...?

Questões pós-optimização

- Se a quantidade do recurso 1 variasse, como variaria o valor da solução óptima?
- E essa variação é válida dentro de que limites de variação do recurso?
- Se o preço da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?
- Qual o preço mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?

- Os *Relatórios de análise de sensibilidade* têm informação que permite dar directamente resposta a estas questões.
- Os *solvers* de programação linear elaboram-nos usando a definição matricial de PL.

Relatórios de análise de sensibilidade

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Conteúdo

- Objectivo da análise de sensibilidade
- Relatórios de análise de sensibilidade
- Alteração num termo independente das restrições
  - Exemplo
- Alteração num coeficiente da função objectivo
  - Exemplo1: variável não-básica no quadro óptimo
  - Exemplo2: variável básica no quadro óptimo
- Apêndices

Objectivo

- A *análise de sensibilidade* estuda as alterações na solução óptima que resultam de variações nos dados do problema (quadro inicial).

A análise de sensibilidade permite:

- analisar as alterações dos valores dos elementos do quadro óptimo quando há uma variação no quadro inicial:
  - num termo independente de uma restrição, b_i,
  - num coeficiente da função objectivo, c_j.
- determinar os limites máximos de variação dos elementos do quadro inicial sem alterar o conjunto de variáveis básicas da solução óptima.

- *Análise pós-optimização* é uma designação alternativa de análise de sensibilidade.

Alteração do termo independente b_i

- O valor do termo independente b_i da restrição $A^i x \leq b_i$ indica frequentemente a quantidade de recurso disponível.
- O valor pode alterar-se ou podemos estar interessados em comprar mais unidades de recurso.

Questões pós-optimização

- Se a quantidade do recurso 1 variasse, como variaria o valor da solução óptima?
- E essa variação é válida dentro de que limites de variação do recurso?

- vamos ver o conceito de preço-sombra ...

Preço-sombra de um dado recurso

Preço-sombra: valor que o decisor atribui a uma unidade do recurso,

medido pelo aumento do valor da função objectivo resultante de se usar uma unidade adicional do recurso.

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- A restrição inicial do recurso 1 é: $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40$.
- Na solução óptima, a variável não-básica $s_1 = 0$ (usam-se $1(0) + 1(20) + 2(10) = 40$ unidades de recurso 1) e $\delta z / \delta s_1 = -5$.

- Aumentar a variável s_1 equivale a usar menos unidades do recurso 1.
- Usar mais unidades do recurso é uma variação no sentido oposto.

- O preço-sombra do recurso 1 é $\delta z / \delta(-s_1) = +5$ (valor da função obj. aumenta 5 unidades por cada unidade adicional do recurso 1).

Exemplo: variação de b_1, da primeira restrição

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- A quantidade actualmente disponível de recurso 1 é 40 ($b_1 = 40$).

Lembrete: o preço-sombra do recurso 1 é 5 :

- se a quantidade de recurso 1 aumentar uma unidade, a função objectivo aumenta 5 unidades;
- se a quantidade de recurso 1 diminuir uma unidade, a função objectivo diminui 5 unidades.

Relatório *Duals*

- A coluna *value* apresenta os valores das variáveis do problema dual, *i.e.*, os valores da linha da função objectivo do quadro simplex:
  - {x1,...,x3} $\leftrightarrow$ variáveis de folga do dual (de facto, são os valores simétricos, porque o *solver* usa o vector $-(c_B B^{-1} A - c)$.)
  - {recurso1,...,recurso3} $\leftrightarrow$ variáveis de decisão do dual ($c_B B^{-1}$).

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

- O relatório *Duals* indica que o preço-sombra do recurso 1 é 5.

Relatório *Duals:* interpretação

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Relativamente ao recurso 1:

- quando a quantidade de recurso 1 (b_1) varia desde 20 até 240,
- o valor do óptimo da função obj. é $500 + 5(b_1 - 40), \forall b_1 \in [20, 240]$,
- e as variáveis básicas óptimas continuam a ser x_3, s_2 e x_3.

- ... como vamos ver ...

Alteração de b_i: quais as alterações no quadro óptimo?

Quais os vectores / matrizes que sofrem alterações no quadro óptimo?

- Quando há uma alteração de um elemento do vector b (vector dos termos independentes das restrições),
- as únicas alterações no quadro óptimo são no vector $B^{-1}b$ e no elemento $c_B B^{-1} b$ (ver quadros no diapositivo seguinte).

- Lembrete: a matriz B é a submatriz de $[\ A \mid I\ ]$ com as colunas das variáveis básicas:

$$B = \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \boxed{\begin{array}{ccc} 10 & 0 & 20 \end{array}}$$

- O vector c_B tem os coeficientes do vector c das mesmas variáveis.

Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} \; * \; \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \\ \hline \end{array} \; =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \\ \hline \end{array}$$

Exemplo 1: variação de b_1 (passa a ser $40+\alpha$):

$$b_{ant} = \boxed{\begin{array}{c} 40 \\ 150 \\ 20 \end{array}}, \quad b_{novo} = \boxed{\begin{array}{c} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{array}}$$

- Novo vector $B^{-1}b_{novo}$:

$$B^{-1}b_{novo} = \boxed{\begin{array}{rrr} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} 10+\alpha/2 \\ 100-\alpha/2 \\ 20 \end{array}}$$

- Novo valor de $c_B B^{-1}b_{novo}$:

$$c_B B^{-1}b_{novo} = \boxed{\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 15 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{array}} = \boxed{500+5\alpha}$$

Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de b_1

		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
Quadro Inicial	s_1	0	1	1	2	1	0	0	$40+\alpha$
	s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
	s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
Quadro Óptimo	x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	$10+\alpha/2$
	s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	$100-\alpha/2$
	x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	5	0	0	5	0	15	$500+5\alpha$

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação máxima de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $B^{-1}b_{novo}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo no lado direito do quadro, e é necessário usar o simplex dual para determinar o novo quadro óptimo.

Determinação da variação máxima de α, e de b_1

- Variação máxima de α :

$$B^{-1} b_{novo} = \boxed{\begin{array}{c} 10 + \alpha/2 \\ 100 - \alpha/2 \\ 20 \end{array}} \geq \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq -20 \\ \alpha \leq 200 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$-20 \leq \alpha \leq 200.$$

- Variação máxima de b_1 :

$$40 - 20 \leq b_1 \leq 40 + 200,$$

ou seja,

$$20 \leq b_1 \leq 240.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Duals*.

nota: coluna do quadro simplex mostra alterações em $B^{-1}b$

O novo vector $B^{-1}b_{novo}$ pode ser expresso em função do vector anterior $B^{-1}b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} B^{-1}b_{novo} &= B^{-1}b_{novo} + B^{-1}b_{ant} - B^{-1}b_{ant} = \\ &= B^{-1}b_{ant} + B^{-1}(b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

As alterações produzidas em $B^{-1}b_{ant}$ seguem a alteração existente na coluna da variável de folga associada ao recurso que varia (neste exemplo, a coluna de s_1).

$$\begin{aligned} B^{-1}b_{novo} &= \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 100 \\ 20 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{rrr} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{array}} = \\ &= \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 100 \\ 20 \end{array}} + \alpha \boxed{\begin{array}{r} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{array}} \end{aligned}$$

nota: preço-sombra mostra alteração do valor de $c_B B^{-1} b$

O novo valor da função objectivo $c_B B^{-1} b_{novo}$ pode ser expresso em função do valor anterior $c_B B^{-1} b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} b_{novo} &= c_B B^{-1} b_{novo} + c_B B^{-1} b_{ant} - c_B B^{-1} b_{ant} = \\ &= c_B B^{-1} b_{ant} + c_B B^{-1} (b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

As alterações produzidas em $c_B B^{-1} b_{ant}$ seguem o preço-sombra associado ao recurso que varia (neste exemplo, o recurso associado à variável de folga s_1).

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} b_{novo} &= \boxed{500} + \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} = \\ &= \boxed{500} + \alpha \boxed{5} \end{aligned}$$

Alteração num coeficiente da função objectivo

- O valor de um coeficiente c_j da função objectivo está frequentemente relacionado com o preço de venda ou com o lucro associado a uma actividade.
- O valor pode alterar-se ou podemos estar interessados em alterá-lo para tornar uma actividade mais competitiva.

Questões pós-optimização

- Se o preço da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?
- Qual o preço mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?

Relatório *Objective*

- Os coeficientes da função objectivo são $(c_1, c_2, c_3) = (30, 20, 10)$.
- Não há alteração das actividades atractivas (variáveis básicas na solução óptima) se os coeficientes de custo se mantiverem dentro do intervalo definido pelas colunas **from** e **till**.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

- ... como vamos ver ...

Alteração de c_j: quais as alterações no quadro óptimo?

- Há alterações nas matrizes e nos vectores do quadro óptimo que envolvem os coeficientes de custo que se alteram nos dados iniciais.
- É necessário distinguir 2 casos:

Caso I: Variável é **não-básica** no quadro óptimo

- só se altera um elemento do vector c,
- e só há alterações no vector $c_B B^{-1} A - c$ do quadro final;

Caso II: Variável é **básica** no quadro óptimo

- alteram-se um elemento do vector c e um elemento do vector c_B (que é construído a partir de c),
- e há alterações nos vectores $c_B B^{-1} A - c$, $c_B B^{-1}$ e $c_B B^{-1} b$ do quadro final.

Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$\left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c|c} A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \end{array}\right]$$

Exemplo 2: variação de c_1

- Como a actividade 1 não é atractiva, interessa analisar o aumento do valor do coeficiente c_1, que passa a ser igual a $30+\alpha$,

Caso I: Variável x_1 é não-básica no quadro óptimo

$$
\begin{aligned}
c_{ant} &= \boxed{30 \quad\quad 20 \quad 10} \\
c_{novo} &= \boxed{30+\alpha \quad 20 \quad 10}
\end{aligned}
$$

Novo vector $c_B B^{-1} A - c_{novo}$:

$$
\begin{aligned}
c_B B^{-1} A - c_{novo} &= c_B B^{-1} A - c_{novo} + c_{ant} - c_{ant} = \\
&= \left(c_B B^{-1} A - c_{ant}\right) + \left(c_{ant} - c_{novo}\right) \\
c_B B^{-1} A - c_{novo} &= \boxed{5 \quad\quad 0 \quad 0} + \boxed{-\alpha \quad 0 \quad 0} = \\
&= \boxed{5-\alpha \quad 0 \quad 0}
\end{aligned}
$$

Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de c_1

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30+\alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5-\alpha$	0	0	5	0	15	500

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação máxima de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $c_B B^{-1} A - c_{novo}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

Determinação da variação máxima de α, e de c_1

- Variação máxima de α :

$$c_B B^{-1} A - c_{novo} \quad = \quad \boxed{5-\alpha \quad 0 \quad 0}$$

$$\left\{ \; 5-\alpha \geq 0 \right. \qquad\qquad \left\{ \; \alpha \leq 5 \right.$$

ou seja,

$$-\infty \leq \alpha \leq 5.$$

- Variação máxima de c_1 :

$$-\infty \leq c_1 \leq 30+5,$$

ou seja,

$$-\infty \leq c_1 \leq 35.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Objective*.

Relatório *Objective:* interpretação

Relativamente ao coeficiente da função objectivo c_1 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 enquanto o valor associado à actividade x_1 for inferior a 35.

- Para além desse limite, a actividade não-básica x_1 tornar-se-á atractiva para entrar na base, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Exemplo 3: variação de c_3

- Como a actividade 3 é atractiva, interessa analisar o decremento do valor do coeficiente c_3, que passa a ser igual a $10 - \alpha$,

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

$$c_{ant} = \boxed{30 \quad 20 \quad 10}$$

$$c_{novo} = \boxed{30 \quad 20 \quad 10 - \alpha}$$

$$c_{B_{ant}} = \boxed{10 \quad\quad 0 \quad 20}$$

$$c_{B_{novo}} = \boxed{10 - \alpha \quad 0 \quad 20}$$

(continua)

Exemplo 3: variação de c_3 (cont.)

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

Novo vector $c_{B_{novo}} B^{-1}$:

$$c_{B_{novo}} B^{-1} = \boxed{\begin{matrix} 10-\alpha & 0 & 20 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} =$$

$$= \boxed{\begin{matrix} 5-\alpha/2 & 0 & 15+\alpha/2 \end{matrix}}$$

Novo vector $c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo}$ (após efectuar todos os cálculos):

$$c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} = \boxed{\begin{matrix} 5+\alpha/2 & 0 & 0 \end{matrix}}$$

Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de c_3

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação máxima de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $c_B B^{-1} A - c_{novo}$ e de $c_{B_{novo}} B^{-1}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

Determinação da variação máxima de α, e de c_3

- Variação máxima de α :

$$c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} = \boxed{5+\alpha/2 \quad 0 \quad 0} \geq \tilde{0}$$

$$c_{B_{novo}} B^{-1} = \boxed{5-\alpha/2 \quad 0 \quad 15+\alpha/2} \geq \tilde{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5+\alpha/2 \geq 0 \\ 5-\alpha/2 \geq 0 \\ 15+\alpha/2 \geq 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq -10 \\ \alpha \leq 10 \\ \alpha \geq -30 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$-10 \leq \alpha \leq 10.$$

- Variação máxima de c_3 :

$$10 - 10 \leq c_3 \leq 10 - (-10),$$

ou seja,

$$0 \leq c_3 \leq 20.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Objective*.

Relatório *Objective:* interpretação

Relativamente ao coeficiente da função objectivo c_3 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 enquanto o valor associado à actividade x_3 se mantiver entre 0 e 20.

- Se o valor for inferior a 0, a actividade x_3 deixa de ser atractiva (ver apêndice).
- Se o valor for superior a 20, a actividade x_3 permanece atractiva, mas a solução óptima terá outras variáveis básicas (ver apêndice).

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Conclusão

- A análise de sensibilidade permite avaliar alternativas ao cenário actual, e ajuda em processos de decisão.
- Análises semelhantes às efectuadas podem ser feitas quando há mais de um parâmetro a variar simultaneamente.
- É também possível fazer uma análise de sensibilidade para a variação dos coeficientes tecnológicos, os elementos a_{ij} da matriz A.

Apêndices

1. Aumento do preço associado à actividade x_3

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $20+\epsilon$ (*i.e.*, $\alpha = -10-\epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $0-\epsilon$ (*i.e.*, $\alpha = 10+\epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

- O elemento da coluna **from value** só é significativo para variáveis não-básicas na solução óptima.
- Quando x_1 é atractiva (coluna pivot), entra na base, e toma o valor $20/2 = 10$.
- Este valor corresponde à menor razão positiva (linha pivot), saindo da base a variável x_2 (ver diapositivo seguinte).

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

2. Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30+\alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha$	0	0	5	0	15	500

Alterações no vector $B^{-1}b$ e no valor de $c_B B^{-1}b$

O novo vector $B^{-1}b_{novo}$ pode ser expresso em função do vector anterior $B^{-1}b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} B^{-1}b_{novo} &= B^{-1}b_{novo} + B^{-1}b_{ant} - B^{-1}b_{ant} = \\ &= B^{-1}b_{ant} + B^{-1}(b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

O novo valor da função objectivo $c_B B^{-1}b_{novo}$ pode ser expresso em função do valor anterior $c_B B^{-1}b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} c_B B^{-1}b_{novo} &= c_B B^{-1}b_{novo} + c_B B^{-1}b_{ant} - c_B B^{-1}b_{ant} = \\ &= c_B B^{-1}b_{ant} + c_B B^{-1}(b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

- Há alterações nas matrizes e nos vectores do quadro óptimo que envolvem os coeficientes de custo que se alteram nos dados iniciais.
- É necessário distinguir 2 casos:

Caso I: Variável é **não-básica** no quadro óptimo

- só se altera um elemento do vector c,
- e só há alterações no vector $c_B B^{-1} A - c$ do quadro final;

Caso II: Variável é **básica** no quadro óptimo

- alteram-se um elemento do vector c e um elemento do vector c_B (que é construído a partir de c),
- e há alterações nos vectores $c_B B^{-1} A - c$, $c_B B^{-1}$ e $c_B B^{-1} b$ do quadro final.

Fim