Cap. 1– Funções reais de variável real

M.Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt)

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

setembro 2016

Funções reais de variável real

Parte I

Generalidades sobre funções reais de variável real

Definição

- Chama-se função real de variável real a um terno D, E e f onde D e E são dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, e f é de uma lei de formação (regra de correspondência) que a cada elemento x de D associa um único elemento $f(x)$ de E.
  - denota-se a função por $f : D \longrightarrow E$;
  - usar-se-à as notações $x \mapsto f(x)$ ou $x \rightsquigarrow f(x)$ para indicar que o elemento x de D é transformado por f no elemento $f(x)$ de E;
  - o conjunto D designa-se domínio da função;
  - o conjunto E designa-se conjunto de chegada da função

- Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $D \subset \mathbb{R}$ não vazio. Nestas condições

    - a imagem ou contradomínio de f é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por
$$\mathrm{CD}_f = \{f(x) \mid x \in D\};$$

    - o gráfico de f é o conjunto G_f dos pares ordenados $(x, f(x))$ com $x \in D$, isto é,
$$\mathrm{G}_f = \{(x, f(x)) | \, x \in D\}.$$

Observação

- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ significa que a função f a cada elemento de D faz corresponder um número real.
- $D \subset \mathbb{R}$ significa que D é um subconjunto de $\mathbb{R}$, isto é, D é um intervalo ou é a reunião de intervalos.
  Alguns exemplos:
$$D = [1, 2], \quad D =]1, 2], \quad D =]-\infty, 2], \quad D =]1, 2] \cup [5, 6], \quad \ldots$$
- Quando não houver dúvidas denotar-se-á a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ simplesmente por f.
- Há diferentes formas para descrever uma função
    - tabelas
    - gráficos
    - fórmulas
    - séries
    - ...

Casos particulares

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$f(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}_0$ e $a_0, \ldots, a_n$ são números reais tais que $a_n \neq 0$, denomina-se função polinomial de grau n.

  - [Caso particular $n = 0$] um polinómio de grau zero também se diz função constante e escreve-se

$$f(x) = a_0\,.$$

  O contradomínio de f é o conjunto $\mathrm{CD}_f = \{a_0\}$ e o gráfico de f representa-se como os pontos da reta definida por $y = a_0$.

- Uma função racional f é uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde p e q são funções polinomiais e cujo domínio é o conjunto $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$.

- O valor absoluto é a função $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|x| := \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- A função identidade é a função $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $id_{\mathbb{R}}(x) = x$.

Operações algébricas

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \cap B \neq \emptyset$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções.

- A soma diferença de f e g é a função $f + g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad \forall x \in A \cap B.$$

- O produto de f e g é a função $f \cdot g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in A \cap B.$$

- O quociente de f e g é a função $\dfrac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in D = A \cap \{x \in B \ : \ g(x) \neq 0\}.$$

Composição de funções

- Sejam $D_f, D_g, B, C \subset \mathbb{R}$, não vazios, tais que $B \cap D_g \neq \emptyset$ e

$$f : D_f \longrightarrow B \quad \text{e} \quad g : D_g \longrightarrow C$$

duas funções.

A função composta de g e f, denotada $g \circ f$, é a função definida por

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow C \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

onde

$$D = \{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\}.$$

Exemplo

- Sejam

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(x) = x^2.$$

Caracterize as funções $g \circ f$ e $f \circ g$

Restrição e prolongamento de uma função

- A restrição de uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ a um subconjunto $X \subset A$ é a função $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f\Big|_X(x) = f(x), \qquad \forall x \in X$$

[Nota] Conceito fundamental no Cap. 1.3

- Um prolongamento de uma função $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ a um conjunto $A \supset X$ é uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que coincida com g em X, isto é tal que

$$f\Big|_X(x) = g(x), \qquad \forall x \in X$$

Nota

A restrição é única mas o prolongamento não!

Exemplo

- Seja $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2.$
  - Restrição de f a $X = [1,2]$ é a função, seja $h = f\big|_{[1,2]}$,

    $$h : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = x^2$$

  - Prolongamento de f a $A = [-5,5]$
    - $g : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2;$
    - $\ell : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,5]; \\ 0, & x \in [-5,0[\end{cases}$
    - e muitas outras funções ...

Características geométricas

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que:

- f é uma função par quando
  para qualquer $x \in D$, $-x \in D$ e $\forall x \in D\ f(-x) = f(x)$;
- f é uma função ímpar quando
  para qualquer $x \in D$, $-x \in D$ e $\forall x \in D\ f(-x) = -f(x)$;
- f é uma função periódica de período p quando
  para qualquer $x \in D$, $x + p \in D$ e $\forall x \in D\ f(x+p) = f(x)$.

Exemplo

- $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$ não é par;
- $h : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = x^2$ não é par;
- $g : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^2$ é par;
- $\ell : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ell(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,5]; \\ 0, & x \in [-5,0[\end{cases}$ não é par.

Sugestão: Represente graficamente as funções acima indicadas.

Seja $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é

- majorada quando existe $M \in \mathbb{R} \, : \, f(x) \leq M$, qualquer que seja $x \in D$
- minorada quando existe $m \in \mathbb{R} \, : \, f(x) \geq m$, qualquer que seja $x \in D$
- limitada se f é majorada e minorada, isto é,

$$\exists A \in \mathbb{R}^+ \, : \, \forall x \in D \quad |f(x)| \leq A.$$

- crescente quando para quaisquer x, y em $D \qquad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- decrescente quando para quaisquer x, y em $D \qquad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- monótona quando f é crescente ou decrescente.

Sejam $D, E \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : D \longrightarrow E$ diz-se

- injetiva quando
$$\forall\, x, y \in D \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- sobrejetiva quando
$$\forall y \in E \quad \exists x \in D : \quad f(x) = y$$

- bijetiva quando f for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Exemplo

- Não é injetiva nem sobrejetiva a função
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

- Não é injetiva mas é sobrejetiva a função
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

- É injetiva e sobrejetiva, logo bijetiva, a função
$$\begin{aligned} h :]-\infty, 0] &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto h(x) = x^2 \end{aligned}$$

Função inversa

- Seja $f : D \longrightarrow E$ uma função bijetiva. A função

$$E \longrightarrow D$$

que faz corresponder a $y \in E$ o único $x \in D$ tal que $f(x) = y$ é chamada função inversa de f e é indicada por f^{-1}.

Nota

Não confundir f^{-1} com $\dfrac{1}{f}$.

Propriedades da função inversa

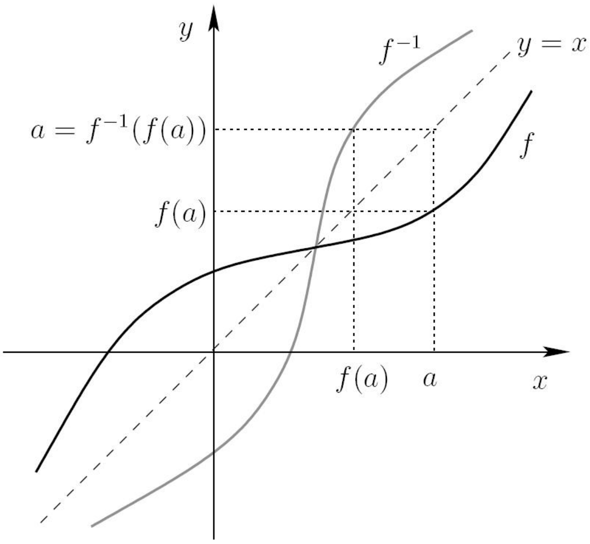
Seja $f : D \longrightarrow E$ uma função bijetiva.

1. Se $g : E \longrightarrow D$ é uma função bijetiva, então g é a função inversa de f se e só se
   - $g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in D;$
   - $f(g(y)) = y, \qquad \forall y \in E.$

2. Se g é a função inversa de f, então
   - $D_f = \text{CD}_g;$
   - $\text{CD}_f = D_g;$
   - $g^{-1} = f.$

Representação gráfica de uma função e da sua inversa

Partindo de uma representação gráfica da função f pode obter-se uma representação gráfica de f^{-1}:



Exemplo

- A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$ tem inversa?
- Indique, caracterizando, uma restrição de f que admita função inversa. Designe-a por g.
- Caracterize a inversa de g.

Parte II

Limite

Ponto de acumulação de um conjunto

- Um número real $a \in \mathbb{R}$ diz-se um ponto de acumulação de D e escreve-se $a \in D'$ quando

  para todo o $r > 0$ existe $x \in D$ tal que $0 < |x - a| < r$.

Nota

- Se a é um ponto de acumulação de D não significa que $a \in D$.
- [Ideia intuitiva] $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de D se estiver "rodeado" por pontos de D.

Exemplos

- $D =]-1, 2]$, $\qquad D' =$

- $D = [-1, 5] \backslash \{0, 2\}$, $\qquad D' =$

- $D = \{-1, 1, 2\}$, $\qquad D' =$

Limite

Sejam $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de domínio D e $a \in D'$.

- O número real ℓ é o limite segundo Cauchy de $f(x)$, quando x tende para a, e escreve-se

  $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

  quando

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \; (x \in D \;\wedge\; 0 < |x - a| < \varepsilon\,) \Longrightarrow |f(x) - \ell\,| < \delta.$$

Observação

- Na definição anterior ℓ pode ser 0 (zero), mas não pode ser ∞ (infinito).
- $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow \ |f(x) - \ell| < \delta$ ler-se-á, por exemplo,

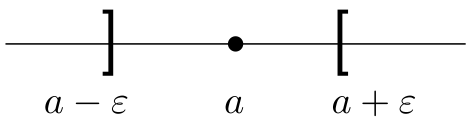
  "dado um número positivo δ, arbitrariamente pequeno, existe um número real positivo ε, suficientemente pequeno, tais que, se $x \in D$, $x \neq a$ e a distância de x a a é menor do que ε, então a distância do correspondente $f(x)$ a ℓ é menor do que δ";
- [Ideia intuitiva] Escrever-se-á

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

  sempre que as imagens $f(x)$ se aproximam de ℓ, desde que x se aproxime de a, percorrendo apenas pontos do domínio D mas sem nunca atingir o ponto a.

Observação

- Em $\mathbb{R}$, um intervalo aberto centrado em a pode designar-se simplesmente por vizinhança do ponto a:
  - $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\,, \qquad \varepsilon > 0$;
  - geometricamente



- Um número real x pertence à vizinhança de raio ε do ponto a se e só se

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Alguns resultados sobre limites

Teorema (Unicidade do limite)

Sejam $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \ell_2 \qquad \text{então} \qquad \ell_1 = \ell_2\,.$$

Teorema

Sejam $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ e f é limitada em $D\setminus\{a\}$ então

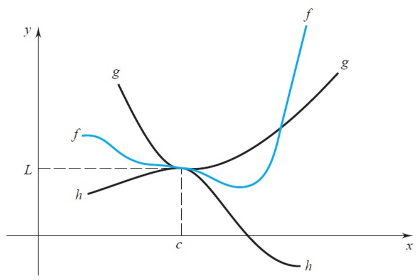
$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Teorema (Enquadramento)

Sejam $f, g, h\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$ tais que

$$h(x) \le f(x) \le g(x)\,, \quad \forall x \in D\setminus\{a\}.$$

Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ então também $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.



Teorema (Aritmética dos limites)

Sejam $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$. Suponha-se que existem

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad m = \lim_{x\to a} g(x).$$

Então:

- $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \ell + m$;
- $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \ell m$;
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{m}$, desde que $m \neq 0$.

Limites no infinito e limites infinitos

Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- O que acontece se D for ilimitado, à direita ou à esquerda, e se fizer $x \in D$ tender para $+\infty$ ou $-\infty$?
  Qual o significado de

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell?$$

- Dado $a \in D'$, qual o significado de

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty?$$

- [Limites no infinito] Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se D é um conjunto não majorado, diz-se que:
  - $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para $+\infty$, e escreve-se

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$

    quando

$$\forall \delta > 0\,,\ \exists A > 0 : (\, x \in D \ \wedge\ x > A \,) \Longrightarrow\ |f(x) - \ell\,| < \delta$$

  - $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para $-\infty$, e escreve-se

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell,$$

    quando

$$\forall \delta > 0\,,\ \exists A > 0 : (\, x \in D \ \wedge\ x < -A \,) \Longrightarrow\ |f(x) - \ell\,| < \delta$$

- [Limites infinitos] Sejam $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Diz-se que

  - $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para a e escreve-se

    $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$$

    quando

    $$\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \implies f(x) > A$$

  - $f(x)$ tende para $-\infty$ quando x tende para a, e escreve-se

    $$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$$

    quando

    $$\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge 0 < |x - a| < \varepsilon) \implies f(x) < -A$$

- [Indeterminações] Se

  $$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty,$$

  o que se pode dizer sobre o limite

  $$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]?$$

  - Diz-se que $+\infty + (-\infty)$ é uma indeterminação.
  - Outras indeterminações são:

    $$0 \cdot \infty, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0}, \ 1^{\infty}, \ 0^0, \ \infty^0.$$

Veremos como tratar algumas destas indeterminações quando estudarmos derivadas!

Observação

- Diz-se que não existe
$$\lim_{x \to a} f(x)$$
quando
  - $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$
  - $f(x) \longrightarrow \infty$ quando $x \longrightarrow a$
  - e em situações análogas a
  $$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$
  ou
  $$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{onde} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \quad \text{é racional;} \\ 0, & x \quad \text{é irracional} \end{cases} \qquad \text{e} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Parte III

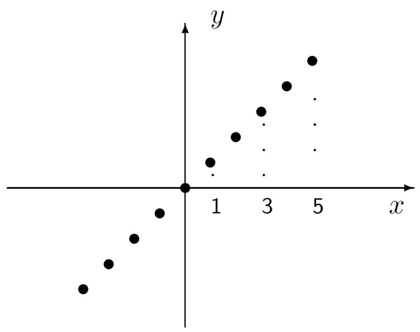
Continuidade

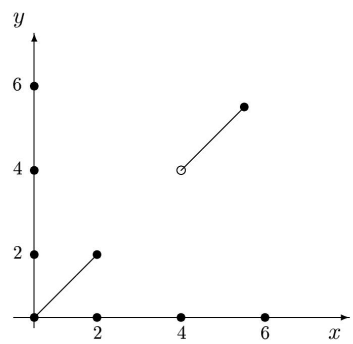
Função contínua

- Os pontos de $D \subset \mathbb{R}$ que não estão em D' dizem-se pontos isolados, isto é, $x \in D$ é ponto isolados de D se existe $r > 0$ tal que
$$]x-r, x+r[\ \cap D = \{x\}.$$
- Seja $f\colon D\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a\in D$ um ponto do seu domínio.
  - A função f é contínua em $a \in D$ quando
    - a é ponto isolado de D
    ou
    - $a \in D'$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Diz-se que:
  - $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a quando $f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;
  - $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em b quando $f(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$;
  - f é contínua em D quando f é contínua em todo $x \in D$.

- De acordo com esta definição de continuidade as funções a seguir são ambas contínuas.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:[0,2]\cup]4,6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$





Resultados sobre continuidade pontual

- [Aritmética das funções contínuas]

  Sejam $f,\, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a \in D$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Então as funções

  - $f + g$, $\alpha\, f$ e fg são contínuas em a;
  - $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a desde que $g(a) \neq 0$.

- [Continuidade da função composta]

  Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(D) \subset B$.
  Se f é contínua em $a \in D$ e g é contínua em $b = f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Exemplo: continuidade da função composta

Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f contínua, g contínua, $g \circ f$ contínua:

   $$f(x) = 2x, \quad g(x) = x^3 \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 8x^3,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua:

   $$f(x) = 2, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = 5 \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. f e g descontínuas, $g \circ f$ contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) \neq 5 \\ 0, & f(x) = 5 \end{cases} = 1, \text{ pois } f(x) \neq 5 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Há contradição com o teorema? Não! Porquê?

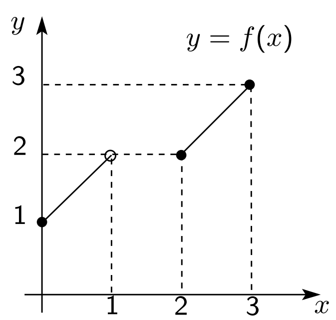
- [Continuidade da função inversa]

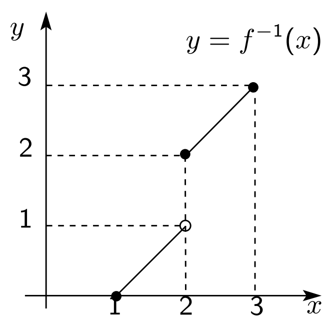
  Se I e J são intervalos reais e $f : I \longrightarrow J$ é uma função bijetiva e contínua, então f^{-1} existe e é contínua.

Exemplo Contradição com o teorema?

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

f é contínua $\qquad$ f^{-1} é descontínua





Descontinuidades

Considere-se função f: $D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Diz-se que $a \in D$ é um ponto de descontinuidade de f, ou que f possui uma descontinuidade no ponto $a \in D$, quando se verificar uma das duas condições seguintes:
  - $a \in D'$ e não existe $\lim_{x \to a} f(x)$;
  - $a \in D'$ existe $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$ e $\ell \neq f(a)$.

Destacam-se dois tipos particulares de descontinuidade:

(a) descontinuidade removível, quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \ell \neq f(a)\,;$$

(b) descontinuidade de essencial, quando não existe limite. Em particular, diz-se que uma descontinuidade essencial é de salto quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_2 \quad \wedge \quad \ell_1 \neq \ell_2\,.$$

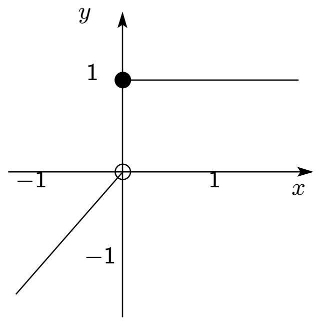
Nota

No caso (a), modificando o valor da função no ponto a, seria possível obter uma função contínua nesse ponto.

Exemplo: descontinuidades

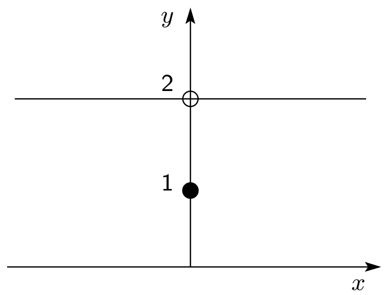
Descontinuidade de salto na origem

$$f(x) = \begin{cases} 1, \; x \geq 0 \\ x, \; x < 0 \end{cases}$$



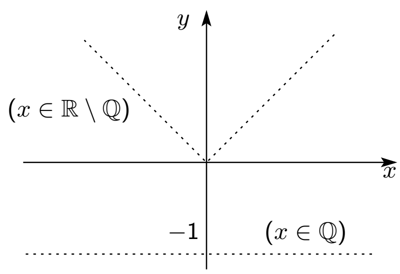
Descontinuidade removível na origem

$$g(x) = \begin{cases} 2, \; x \neq 0 \\ 1, \; x = 0 \end{cases}$$



Descontinuidade na origem que nem é de salto nem removível

$$h(x) = \begin{cases} |x|, \; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -1, \; x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



Resultados sobre funções contínuas

Teorema (de Weierstrass)

Se f: $D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e D é fechado e limitado então f é limitada e atinge os seus extremos em D, isto é,

$$\exists \, a, b \in D : \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b) \, , \quad \forall x \in D$$

Teorema (de Bolzano)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então

$$\exists \, c \in]a, b[\; : \quad f(c) = 0$$