Universidade do Minho — MIEInf

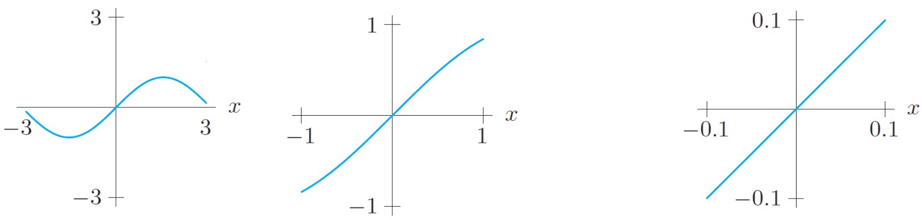
Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

folha 4 — 2015'16

Derivada num ponto.

1. Na figura seguinte representa-se graficamente a função definida por $y = \operatorname{sen} x, x \in \mathbb{R}$, em domínios/ escalas cada vez menores (análogo ao efeito de ampliação em torno do ponto de coordenadas $(0, 0)$).



(a) Explique porque é que, partindo destas imagens, se pode conjeturar que $\operatorname{sen}'(0) = 1$.

(b) Recorrendo à definição de função derivada num ponto, verifique que $\operatorname{sen}'(0) = 1$.

(c) Consultando o formulário das derivadas, constate que $(\operatorname{sen} x)'\big|_{x=0} = 1$.

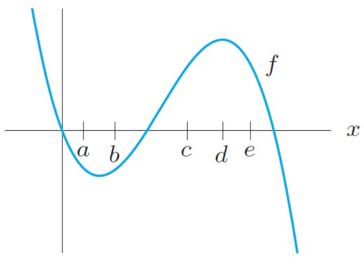
(d) Recorrendo à primeira imagem, o que se pode dizer sobre o sinal de $\operatorname{sen}'(-\pi)$, $\operatorname{sen}'(\frac{\pi}{4})$ e $\operatorname{sen}'(\frac{\pi}{2})$.

2. Atente na tabela abaixo, relativa a valores que a função definida por $y = x^3, x \in \mathbb{R}$, toma, com aproximações a 3 casas decimais, na vizinhança de $x = 2$.

x	1.998	1.999	2.000	2.001	2.002
x^3	7.976	7.988	8.000	8.012	8.024

Use os valores tabelados para obter uma aproximação para $f'(2)$.

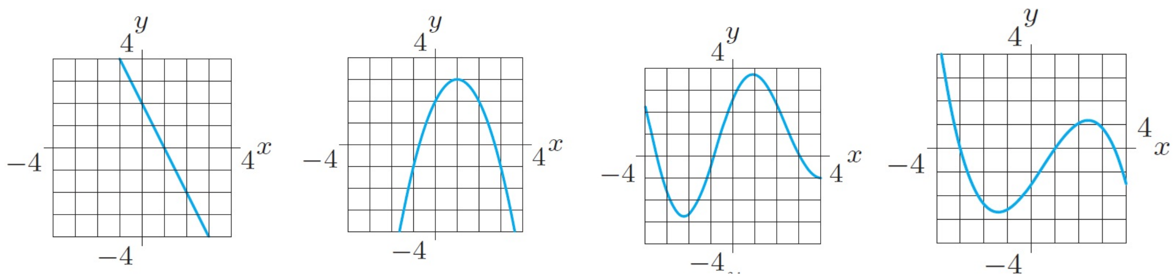
3. Com base na figura, faça corresponder as letras a, b, c, d e e às derivadas na tabela.



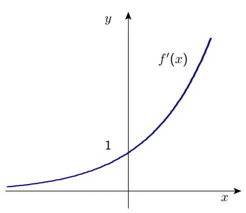
x					
$f'(x)$	0	0,5	2	−0,5	−2

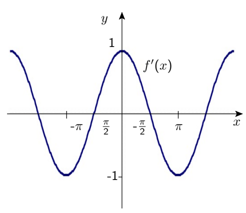
Função derivada.

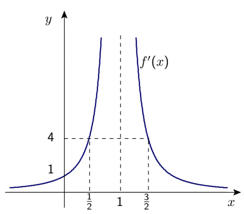
4. Esboce o gráfico da derivada de cada uma das funções abaixo representada.



5. Encontre uma lei que possa definir uma função f cuja derivada se representa graficamente por

(a)


(b)


(c)


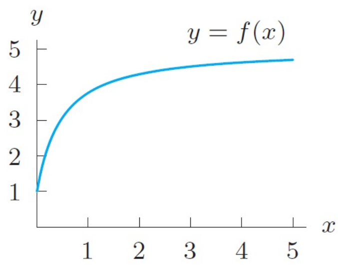
6. Represente na figura os seguintes números

(a) $f(4)$

(b) $f(4) - f(2)$

(c) $\dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$

(d) $f'(3)$



Propriedades das funções deriváveis.

7. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções (definidas no maior domínio possível):

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$;

(b) $f(x) = x \ln x$;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

(e) $f(x) = x^3$;

(f) $f(x) = 3^x$;

(g) $f(x) = x^x$;

(h) $f(x) = x^3 e^x$;

(i) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$;

(j) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

(k) $f(x) = \sqrt{x} + x^\pi$;

(l) $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x}}$;

(m) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7$;

(n) $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$;

(o) $f(x) = x \ln(x^2 + x + 1)$.

8. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções (definidas no maior domínio possível):

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$;

(b) $f(x) = \arccos x + \operatorname{argsh} x$;

(c) $f(x) = \cos(\ln x)$;

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2})$;

(e) $f(x) = \operatorname{ch}(3x)$;

(f) $f(x) = \operatorname{sh}(x^2 + 1)$;

(g) $f(x) = \operatorname{sh}^3 x$;

(h) $f(x) = \ln(\operatorname{ch}(x + 1))$;

(i) $f(x) = \ln \sqrt{1 + \cos^2 x}$;

(j) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{ch} x)$;

(k) $f(x) = \arctan(\ln x)$;

(l) $f(x) = \operatorname{argsh}(\cos x)$

(m) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

(n) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$;

(o) $f(x) = \dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{\ln x}$;

(p) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$;

(q) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2))$;

(r) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} e^x \operatorname{sen} x$.

9. Seja $u : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Usando a regra da cadeia, mostre que

(a) $[e^{u(x)}]' = u'(x)\, e^{u(x)}$;

(b) $[u^\alpha(x)]' = \alpha\, u'(x) u^{\alpha-1}(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $[\ln u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ se $u > 0$;

(d) $[\cos u(x)]' = -u'(x) \operatorname{sen} u(x)$;

(e) $[\operatorname{sen} u(x)]' = u'(x) \cos u(x)$;

(f) $[\operatorname{tg} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$;

(g) $[\operatorname{ch} u(x)]' = u'(x) \operatorname{sh} u(x)$;

(h) $[\operatorname{sh} u(x)]' = u'(x) \operatorname{ch} u(x)$;

(i) $[\arccos u(x)]' = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$;

(j) $[\arctan u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u^2(x) + 1}$;

(k) $[\operatorname{argsh} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + 1}}$.

10. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{2x}$.

(a) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

(b) Determine uma equação da reta normal ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

11. Determine duas funções f e g deriváveis tais que a derivada da função composta $h = g \circ f$ seja dada por

(a) $h(x) = 2xe^{x^2+1}$;

(b) $h(x) = -3 \operatorname{sen} x (\cos x)^2$.