Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

3. Determinantes

Exercício 1. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 2. Calcule, de duas formas diferentes, o determinante de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercício 3. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

e sabendo que $\det A = 2$, calcule:

a) $\det(3A)$ b) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2g & 2h & 2i \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-d & b-e & c-f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Exercício 4. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes, usando o método de eliminação de Gauss.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 5. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & k \\ 0 & k & -k & k \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine os valores de k para os quais se tem $\det A_k = 2$.

Exercício 6. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine os valores de λ para os quais se tem $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

Exercício 7. Mostre que
$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c.$$

(Sugestão: Adicione à coluna 1 as colunas 2 e 3.)

Exercício 8. Mostre que $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c).$

(Este determinante é chamado de *determinante de Vandermonde*).

Exercício 9. Deduza as seguintes expressões:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)(y_3 - x_3)$

Exercício 10. Resolva a seguinte equação nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$
$$\det \begin{pmatrix} x_1 & a & a & \dots & a & a \\ a & x_2 & a & \dots & a & a \\ a & a & x_3 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x_{n-1} & a \\ a & a & a & \dots & a & a \end{pmatrix} = 0,$$

supondo $a \neq 0$.

Exercício 11. Use o método da adjunta para calcular a inversa das seguintes matrizes.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

(Obs: Recorde que a inversa de uma matriz simétrica invertível é também simétrica.)

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(Obs: Tenha em conta que a inversa de uma matriz triangular superior invertível é também triangular superior.)

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercício 12. Prove que, se $ad - bc \neq 0$, então a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é invertível e calcule a sua inversa.

Exercício 13. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os valores de α para os quais $\operatorname{car} A_\alpha = 3$.

b) Faça $\alpha = 0$ e calcule $\det A_0$.

c) Justifique que a matriz A_{-1} é invertível e calcule a primeira coluna da sua inversa, usando determinantes.

Exercício 14. Para cada $t \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2+t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2+t \end{pmatrix}.$$

a) Calcule o determinante de A_t.

b) Diga para que valores do parâmetro real t a matriz A_t é invertível.

c) Faça $t = 0$ e determine A_0^{-1}, usando o método da matriz adjunta.

Exercício 15. Use a regra de Cramer para resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$

Exercício 16. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule o determinante de A e de B, usando o Teorema de Laplace.

b) Determine as matrizes $\operatorname{adj} A$ e $\operatorname{adj} B$.

c) Calcule a inversa de cada uma das matrizes, usando os resultados das alíneas anteriores.

d) Use a regra de Cramer para resolver o sistema $A\boldsymbol{x} = (1\ 0\ 1)^T$.

Exercício 17. Seja A uma matriz de ordem n cuja soma dos elementos de cada linha é igual a zero. Justifique que $\det A = 0$.

(Obs: Note que, se $\boldsymbol{x}$ for uma matriz coluna com n componentes todas iguais a 1, então $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.)

Exercício 18. Seja A uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$).

a) Sendo A_{ij} o complemento algébrico do elemento a_{ij}, mostre que:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k, \end{cases} .$$

Conclua, então, que

$$A \operatorname{adj} A = \det A \, I_n.$$

b) Use a alínea anterior para estabelecer o resultado seguinte (enunciado nas aulas teóricas): *Se A for invertível, tem-se*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

c) Mostre que, se A não for invertível, então

$$A \operatorname{adj} A = \mathbf{0}_{n \times n}.$$

Exercício 19. Seja A uma matriz de ordem n ($n \geq 2$), invertível. Mostre que:

a) $|\operatorname{adj} A| = |A|^{n-1}$.

b) A matriz $\operatorname{adj} A$ também é invertível e

$$(\operatorname{adj} A)^{-1} = \operatorname{adj}(A^{-1}).$$

Exercício 20. Calcule o determinante da seguinte matriz de ordem n, $n > 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

Exercício 21. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou são falsas.

a) $\det((A+B)^2) = (\det(A+B))^2$;

b) $\det((A+B)^2) = \det(A^2 + 2AB + B^2)$;

c) se A é uma matriz ortogonal então $\det A = 1$;

d) se A e B são matrizes reais de ordem 3 tais que $\det A = \frac{1}{2}$ e $\det B = -2$, então

$$\det(A^{-1}B^2) + \det(2A^T B) = 6;$$

e) se A é uma matriz de ordem $n \times n$, com todos os elementos iguais a 1, então $\det(A - nI_n) = 0$.

Relativamente às questões 22 e 23, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

Exercício 22. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) $A = B^{-1}$.	◯	◯
b) $\det A = 1$.	◯	◯
c) O sistema $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tem solução única.	◯	◯

Exercício 23. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) $A^2 = 4I_4$.	◯	◯
b) $\det A = 16$.	◯	◯
c) $\operatorname{adj} A = 4A$.	◯	◯

Exercício 24. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou são falsas.

a) Se $A^T = -A^2$ e A é não singular, então $\det A = -1$.

b) Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ é uma matriz tal que $a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{se } j = 1 \\ 1, & \text{se } j > 1 \text{ e } j \neq i \\ j, & \text{se } j > 1 \text{ e } j = i \end{cases}$,

então $\det A = \alpha(n-1)!$.

c) Se A é uma matriz de ordem 6 tal que $\det A = -1$, então $\det(\operatorname{adj} A) = -1$.

Exercício 25. Sejam

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Justifique que a matriz A_α é invertível e calcule A_α^{-1}, usando determinantes.

b) Conclua que o sistema $A_\alpha \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é um sistema de Cramer e obtenha a sua solução, usando a regra de Cramer.

Exercício 26.

a) Seja A quadrada de ordem n, com $n \geq 2$. Mostre que se A é uma matriz simétrica, então adj A também é simétrica.

b) Considere as matrizes

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Justifique que a matriz A_α é invertível e calcule A_α^{-1}, usando determinantes. Use A_α^{-1} para calcular a solução do sistema $A_\alpha \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Exercício 1. *a)* -4; *b)* 0; *c)* -5; *d)* -15; *e)* 48.

Exercício 2. *a)* 2; *b)* 4; *c)* -11.

Exercício 3. *a)* 54; *b)* 12 ; *c)* 2; *d)* -2 .

Exercício 4. *a)* 6; *b)* 18; *c)* 10.

Exercício 5. $k = -2$ ou $k = 1$.

Exercício 6. $\lambda \in \{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$.

Exercício 10. $x_1 = a$ ou $x_2 = a \cdots$ ou $x_{n-1} = a$.

Exercício 11. *a)* $\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 12. $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exercício 13. *a)* $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$. *b)* Como $\operatorname{car} A_0 = 2 < 3$, então A_0 não é invertível, logo $\det A_0 = 0$.
c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Exercício 14. *a)* $(1+t)^4$; *b)* $t \neq -1$; *c)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 15. *a)* $x_1 = \frac{16}{7},\ x_2 = -\frac{10}{7}$; *b)* $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$; *c)* $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0$.

Exercício 16. *a)* $\det A = 3;\ \det B = -1$.

b) $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$;

Exercício 20. $(a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

Exercício 21.

a) **V**, porque $\det M^2 = (\det M)^2$.

b) **F**; um contra-exemplo é dado pelas matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (Note-se que A e B não comutam, pelo que $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.)

Exercício 21. *c)* **F**; se A é uma matriz ortogonal então $AA^T = I$, logo $\det(AA^T) = 1$, isto é, $\det A \det(A^T) = 1$, ou seja $(\det A)^2 = 1$ (pois $\det A = \det(A^T)$). Conclui-se então que $(\det A)^2 = 1$, donde $\det A = \pm 1$. Um exemplo de uma matriz ortogonal cujo determinante é igual a -1 é a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) **F**;

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}B^2) + \det(2A^TB) &= \det(A^{-1})\det(B^2) + \det(2A^T)\det B = \frac{1}{\det A}(\det B)^2 + 2^3\det(A^T)\det B \\ &= \frac{1}{\det A}(\det B)^2 + 8\det(A)\det B = 0.\end{aligned}$$

e) **V**.

$$\det(A - nI_n) = \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix} = 0.$$

(Reveja exercício 16 de sistemas).

Exercício 22. **V V V** Exercício 23. **V V V**

Exercício 24.

a) **F**. Se $A^T = -A^2$, então

$$\det(A^T) = \det(-A^2) \Leftrightarrow \det A = (-1)^n(\det A)^2 \Leftrightarrow \det A = 0 \text{ ou } \det A = (-1)^n.$$

Logo, se A é não singular, $\det A = \pm 1$, dependendo da ordem n de A ser par ou ímpar.

b) **V**.

c)

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha \times 1 \times 1 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) = \alpha(n-1)!$$

d) **V**, porque $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1} = (-1)^5 = -1$ (ver Exercício 19).

Exercício 25.

a) A_α é invertível, porque $\det A_\alpha = -\alpha \neq 0$. $A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$.

b) O sistema é de Cramer, porque tem solução única, pois $\det A_\alpha \neq 0$. A solução é $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{2}{\alpha} \end{pmatrix}$.

Exercício 26.

a) Como A é simétrica, então $A = A^T$. Logo,

$$\operatorname{adj} A = (\det A)A^{-1} = (\det A)(A^T)^{-1} = (\det A)(A^{-1})^T = ((\det A)A^{-1})^T = (\operatorname{adj} A)^T,$$

o que mostra que a matriz $\operatorname{adj} A$ também é simétrica.

b) $\det A_\alpha = -1 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

$$A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & -\alpha \\ -1 & \alpha & -1+\alpha^2 & 1-\alpha^2 \\ 1 & -\alpha & 1-\alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

A solução pode ser obtida calculando $A_\alpha^{-1}\boldsymbol{b}$. Como $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_3$, a solução é terceira coluna da matriz A_α^{-1} ou seja, é

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1+\alpha^2 \\ 1-\alpha^2 \end{pmatrix}.$$