

tópicos de matemática discreta – MIEInf

carla mendes | cláudia m. Araújo | suzana m. gonçalves

UM | 2015/2016

indução nos naturais

exemplo 3.1

Consideremos a afirmação “Para qualquer natural n , $n^2 - n + 41$ é primo”.

Atribuindo valores a n , podemos verificar a veracidade das proposições correspondentes obtidas a partir do predicado $p(n)$: “o número $n^2 - n + 41$ é primo”.

| | | | | | | | | | | |
|----------------|----|----|----|----|----|----|-----|------|--------|-----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... | 40 | 41 | ... |
| $n^2 - n + 41$ | 41 | 43 | 47 | 53 | 61 | 71 | ... | 1601 | 41^2 | ... |

41 é um número primo, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

43 é um número primo, pelo que $p(2)$ é verdadeira.

47 é um número primo, pelo que $p(3)$ é verdadeira.

53 é um número primo, pelo que $p(4)$ é verdadeira.

61 é um número primo, pelo que $p(5)$ é verdadeira.

71 é um número primo, pelo que $p(6)$ é verdadeira.

(...)

1601 é um número primo, pelo que $p(40)$ é verdadeira.

indução nos naturais

Poderemos, assim, concluir que $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$?

41^2 não é um número primo, pelo que $p(41)$ é falsa!

Para provarmos que uma determinada propriedade é válida para todo o número natural, precisamos de um método de prova adequado. Como o exemplo anterior o ilustra, não basta verificar a veracidade da propriedade para um número finito de naturais para podermos concluir a validade da propriedade em \mathbb{N} .

indução nos naturais

A definição indutiva de \mathbb{N} através das seguintes regras

i | $1 \in \mathbb{N}$;

ii | se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$,

justifica a adoção do método de prova que iremos estudar. Começemos por apresentar o conceito de predicado hereditário.

definição 3.2

Um predicado $p(n)$, com \mathbb{N} como universo de variação da variável n , diz-se **hereditário** quando, para todo $k \in \mathbb{N}$, se a proposição $p(k)$ é verdadeira, então a proposição $p(k + 1)$ é verdadeira.

indução nos naturais

exemplo 3.3

1 | “ $2n$ é par” é um predicado hereditário pois se $2k$ é par para algum $k \in \mathbb{N}$, então $2(k+1) = 2k + 2$ também é par (por ser a soma de 2 números pares).

2 | “ n é par” não é um predicado hereditário pois se k é par para algum $k \in \mathbb{N}$, então $k+1$ é ímpar.

3 | “ $2n+1$ é par” é um predicado hereditário pois se $2k+1$ é par para algum $k \in \mathbb{N}$, então $2(k+1)+1 = 2k+2+1 = (2k+1)+2$ também é par (por ser a soma de 2 números pares).

indução nos naturais

Consideremos os predicados em $1 \mid$ e $3 \mid$ do exemplo anterior, denotando por $p(n)$ o predicado “ $2n$ é par.” e por $q(n)$ o predicado “ $2n + 1$ é par” . Ambos são hereditários, mas apenas um é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

É claro que $p(1)$ é verdadeira pois $2 \times 1 = 2$ é par. A hereditariedade de $p(n)$ permite-nos induzir que a propriedade é válida para todo o número natural.

Por outro lado, a hereditariedade de $q(n)$ não é suficiente para concluir que a propriedade é verdadeira para todo o número natural, uma vez que nos falta um ponto de partida.

princípio de indução simples para \mathbb{N} teorema 3.4 [princípio de indução (simples) para \mathbb{N}]

Seja $p(n)$ um predicado sobre \mathbb{N} . Se

1 | $p(1)$ é verdadeira e

2 | $p(n)$ é hereditário, ou seja, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k + 1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

demonstração Admitamos que as condições 1 | e 2 | são satisfeitas para o predicado $p(n)$ e mostremos que, para qualquer natural n , $p(n)$ é verdadeira. Nesse sentido, consideremos o conjunto X dos números naturais que não satisfazem $p(n)$, ou seja,

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}.$$

princípio de indução simples para \mathbb{N}

Suponhamos, no intuito de uma redução ao absurdo, que $X \neq \emptyset$. Seja m o menor número natural que pertence a X . Por $1 \mid$, $1 \notin X$ e, portanto, $m > 1$. Logo, $m = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Uma vez que m é o menor natural que pertence a X , sabemos que $m - 1 = (k + 1) - 1 = k$ não pertence a X , isto é, k satisfaz o predicado $p(n)$. Ora, por $2 \mid$, $p(n)$ é hereditário e, portanto, $k + 1$ satisfaz o predicado $p(n)$, ou seja, m satisfaz $p(n)$, o que contradiz o facto de m pertencer a X . Logo, X tem de ser vazio e, assim, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

A condição $1 \mid$ do teorema anterior é designada por **base de indução** e a condição $2 \mid$ por **passo de indução**.

Na aplicação da condição $2 \mid$, chamamos **hipótese de indução** a “ $p(k)$ é verdadeira”.

princípio de indução simples para \mathbb{N}

Dado um predicado $p(n)$ sobre \mathbb{N} , uma aplicação deste princípio para provar que a proposição $\forall n \, p(n)$ é verdadeira diz-se uma **prova por indução nos naturais**.

exemplo 3.5

Mostremos que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado “ $n^3 - n$ é divisível por 3”.

i | **base de indução** | Para $n = 1$, temos $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$.

Como 0 é divisível por 3, $p(1)$ é verdadeira.

ii | **passo de indução** | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $k^3 - k$ é divisível por 3.

Então, existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que $k^3 - k = 3q$.

princípio de indução simples para \mathbb{N}

Assim,

$$\begin{aligned}
 (k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\
 &= k^3 + 3k^2 + 3k - k \\
 &= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\
 &= 3k + (3k^2 + 3k) \\
 &= 3(k + k^2 + k).
 \end{aligned}$$

Logo, $(k+1)^3 - (k+1) = 3(k + k^2 + k)$, pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por i | e ii |, podemos concluir que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^3 - n \text{ é divisível por 3.}$$

princípio de indução simples para \mathbb{N}

exemplo 3.6

Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2 , para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $q(n)$ o predicado " $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ ".

i | **base de indução** | Para $n = 1$, temos $1 = 1^2$, pelo que $q(1)$ é verdadeira.

ii | **passo de indução** | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $q(k)$ é verdadeira, ou seja, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$. Então,

$$\begin{aligned}
 &1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) \\
 &= (1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)) + (2k + 1) \\
 &= k^2 + (2k + 1) \\
 &= k^2 + 2k + 1 \\
 &= (k + 1)^2,
 \end{aligned}$$

princípio de indução simples para \mathbb{N}

pelo que $q(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por i | e ii |, podemos concluir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

exemplo 3.7

Mostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3},$$

pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $h(n)$ o predicado " $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}$ ".

i | **base de indução** | Para $n = 1$, temos

$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^1 = 1 + \frac{1}{3} \geq 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{n}{3}$, pelo que $h(1)$ é verdadeira.

princípio de indução simples para \mathbb{N}

ii | **passo de indução** | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $h(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{3}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{(k+1)} &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^k \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{k}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ &= 1 + \frac{k}{3} + \frac{1}{3} + \frac{k}{9} \\ &= 1 + \frac{k+1}{3} + \frac{k}{9} \\ &\geq 1 + \frac{k+1}{3}. \end{aligned}$$

Assim, $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{(k+1)} \geq 1 + \frac{k+1}{3}$, pelo que $h(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por i | e ii |, podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}$.

princípio de indução simples para \mathbb{N} de base n_0

Como já referimos, é necessário que se verifiquem simultaneamente a base e o passo de indução para que se possa induzir a validade da propriedade em causa para todo o número natural.

Consideremos o predicado $p(n)$: " $n^2 > 2n + 1$ ".

Facilmente se verifica que $p(1)$ é falsa: $1^2 = 1 \not> 3 = 2 \times 1 + 1$.

No entanto, o passo de indução verifica-se, ou seja, o predicado $p(n)$ é hereditário. De facto, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k^2 > 2k + 1$,

$$\begin{aligned}
 (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
 &= k^2 + (2k + 1) \\
 &> (2k + 1) + (2k + 1) \\
 &= 2k + 2 + 2k \\
 &> 2k + 2 + 1 \\
 &= 2(k + 1) + 1.
 \end{aligned}$$

princípio de indução simples para \mathbb{N} de base n_0

Na verdade, $p(n)$ é válida para todos os naturais maiores ou iguais a 3.

A prova deste resultado pode ser feita recorrendo a uma variante do Princípio de Indução, considerando para base de indução o elemento de \mathbb{N} a partir do qual se pode provar a validade da propriedade

teorema 3.8 [princípio de indução (simples) para \mathbb{N} de base n_0]

Sejam $p(n)$ um predicado sobre \mathbb{N} e $n_0 \in \mathbb{N}$. Se

1 | $p(n_0)$ é verdadeira e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

princípio de indução simples para \mathbb{N} de base n_0

exemplo 3.9

Verifiquemos, então, que para todo $n \geq 3$, $n^2 > 2n + 1$.

i | **base de indução** | Para $n = 3$, temos $n^2 = 3^2 = 9 > 7 = 2 \times 3 + 1$, pelo que $p(3)$ é verdadeira.

ii | **passo de indução** | Mostrámos há pouco que $p(n)$ é hereditário. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$, $p(k + 1)$ é verdadeira sempre que $p(k)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} de base 3 e por i | e ii |, podemos concluir que para todo $n \geq 3$, $n^2 > 2n + 1$.

princípio de indução simples para \mathbb{N} de base n_0

exemplo 3.10

Mostremos que para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$, pelo método de indução para \mathbb{N} de base 5.

Representemos por $p(n)$ o predicado " $2^n > n^2$ ".

i | **base de indução** | Para $n = 5$, temos $2^n = 2^5 = 32 > 25 = 5^2$, pelo que $p(5)$ é verdadeira.

ii | **passo de indução** | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 5$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $2^k > k^2$. Então,

$$\begin{aligned}
 2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\
 &> 2 \times k^2 \\
 &= k^2 + k^2 \\
 &> k^2 + 2k + 1 \quad (\text{pelo exemplo 3.9}) \\
 &= (k+1)^2,
 \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

princípio de indução completa para \mathbb{N}

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} de base 5 e por i | e ii |, podemos concluir que para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Na prova de certas propriedades sobre os naturais, a aplicação do Princípio de Indução Simples não é fácil. Nestes casos, torna-se mais conveniente optar por um outro método de prova, o chamado **Princípio de Indução Completa** (ou **Princípio de Indução Forte**).

teorema 3.11 [princípio de indução completa para \mathbb{N}]

Seja $p(n)$ um predicado sobre \mathbb{N} . Se

1 | $p(1)$ é verdadeira e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$, se, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, $p(j)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

princípio de indução completa para \mathbb{N} de base n_0

Este princípio parece ser mais geral do que o Princípio de Indução Simples, mas prova-se serem equivalentes: toda a prova que possa ser feita pelo Princípio de Indução Simples pode ser feita pelo Princípio de Indução Completa e vice-versa.

À semelhança do que acontece com o Princípio de Indução Simples, podemos enunciar o **Princípio de Indução Completa de base n_0** .

teorema 3.12 [princípio de indução completa para \mathbb{N} de base n_0]

Sejam $p(n)$ um predicado sobre \mathbb{N} e $n_0 \in \mathbb{N}$. Se

1 | $p(n_0)$ é verdadeira e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se, para todo $j \in \{n_0, \dots, k\}$, $p(j)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

princípio de indução completa para \mathbb{N} de base n_0

exemplo 3.13

Recorrendo ao Princípio de Indução Completa de base 2, mostremos que todo o número natural diferente de 1 é primo ou é um produto de números primos.

Representemos por $p(n)$ o predicado “ n é primo ou n é um produto de primos.”.

i | **base de indução** | 2 é primo e, portanto, $p(2)$ é verdadeira.

ii | **passo de indução** | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$ e admitamos que $p(j)$ é verdadeira para todo $j \in \{2, \dots, k\}$.

Se $k + 1$ é primo, então $p(k + 1)$ é verdadeira.

Se $k + 1$ não é primo, então existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $1 < a, b < k + 1$ e $k + 1 = ab$.

princípio de indução completa para \mathbb{N} de base n_0

Por hipótese de indução, como $a, b \in \{2, \dots, k\}$, sabemos que a é primo ou um produto de primos e b é primo ou um produto de primos.

Logo, $k + 1 = ab$ é um produto de primos, pelo que $p(k + 1)$ é verdadeira.

Por $1 \mid$ e $2 \mid$ e pelo Princípio de Indução Completa de base 2, mostrámos que todo o número natural diferente de 1 é primo ou é um produto de primos.