Programação Linear - Introdução

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

25 de setembro de 2017

Conteúdo

- Definições de Investigação Operacional
- Metodologia da Investigação Operacional
- Modelos de Programação Linear
- Exemplos
- Programação Linear: algumas áreas de aplicação
- Programação Linear: alguns Marcos

Definições de Investigação Operacional

- A Investigação Operacional no sentido mais lato pode ser caracterizada como sendo a aplicação de métodos, técnicas e ferramentas científicas a problemas que envolvem a operação de sistemas, por forma a prover os responsáveis pelo controlo da operação com soluções óptimas para os problemas *(Churchman, Ackoff, Arnoff, 1957)*.

- A Investigação Operacional pode ser descrita como uma abordagem científica da tomada de decisões que envolvem a operação de um sistema organizacional *(Hillier, Lieberman, 1974)*.

- A Investigação Operacional é uma abordagem científica de resolução de problemas de gestão *(Wagner, 1975)*.

Metodologia da Investigação Operacional

- Identificar o problema a abordar.
- Observar o sistema e recolher dados.
- Formular um modelo matemático do problema.
- Verificar e validar o modelo.
- Seleccionar uma decisão adequada.
- Implementar e avaliar.

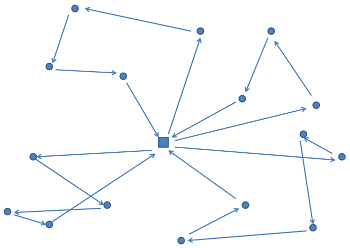
Exemplo: problema de planeamento de rotas de veículos

Objectivo

- Dados um conjunto de veículos com capacidades e
- um conjunto de clientes com procuras e janelas temporais de visita,

encontrar a solução de custo mínimo, em que haja

- um conjunto de rotas, todas começando e terminando no depósito,
- sendo cada cliente visitado por um único veículo.



Construção de modelos de Investigação Operacional (IO)

Após identificar o problema, a observação do sistema permite reconhecer:

- a forma de representar uma decisão admissível,
- as regras gerais que determinam quais as decisões admissíveis, e
- a forma de atribuir um valor a cada decisão.

Modelos de Investigação Operacional

- Um modelo matemático identifica as decisões admissíveis.
- Para associar um valor a cada decisão, há uma *medida de eficiência*,
- que permite identificar a(s) melhor(es) decisão(ões).

Os modelos de *Programação Linear* são os mais usados em IO:

- *programação* é usado no sentido de planeamento, como em programação de actividades, e
- as funções envolvidas nos modelos são *lineares*.

Programação Linear: elementos dos modelos

Variáveis de decisão:

- são incógnitas que associamos às decisões (soluções) admissíveis.
- *e.g.*, x_1 - quantidade de produto 1 a fabricar numa semana.

Parâmetros:

- são dados do sistema que não podem ser alterados.
- *e.g.*, volume de mão-de-obra disponível por semana.

Programação Linear: estrutura dos modelos

Restrições:

- definem o conjunto de decisões (soluções) admissíveis.
- Uma restrição exprime uma relação entre uma **função linear** das variáveis de decisão e uma constante (*e.g.*, um parâmetro).
- *e.g.*, $3x_1 + 2x_2 \leq 120$.

Função objectivo:

- (ou medida de eficiência) é uma **função linear** das variáveis de decisão que associa um valor a cada solução do conjunto de soluções admissíveis.
- *e.g.*, a função linear $12x_1 + 10x_2$ associa um valor a cada solução.

Fim em vista:

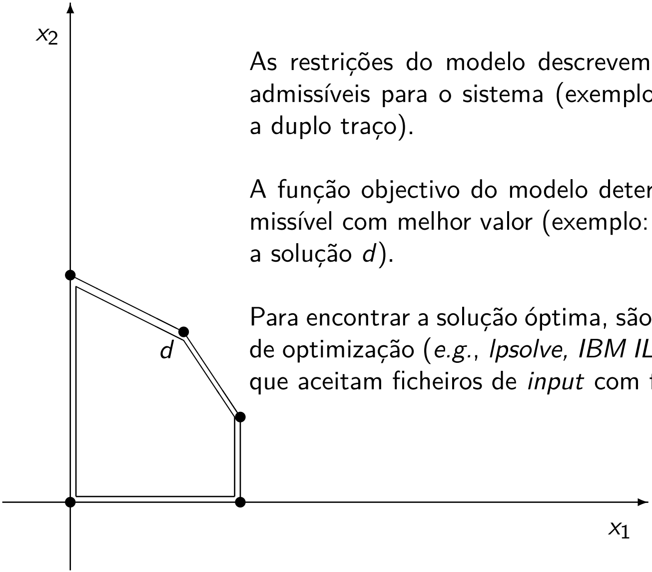
- determinar a(s) solução(ões) que optimiza(m) a função objectivo.
  - Maximizar lucro
  - Minimizar custo

Programação linear: forma geral do modelo

- Problema de optimização (ou maximização ou minimização) de uma função objectivo linear sujeita a restrições lineares:

$$
\begin{aligned}
\{\max, \min\}\ z \quad &= \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{sujeito a} \quad & \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \in R_{\leq} \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \forall i \in R_{\geq} \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \forall i \in R_{=} \\
& \quad x_j \geq 0, \forall j
\end{aligned}
$$

- z : função objectivo
- $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$: variáveis de decisão.
- $c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n$: coeficientes da função objectivo $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.
- b_i : coeficiente do lado direito das restrições, indexado por i
- $x_j \geq 0$: restrições de não-negatividade, para todos os j.



As restrições do modelo descrevem **todas** as soluções admissíveis para o sistema (exemplo: região delimitada a duplo traço).

A função objectivo do modelo determina a solução admissível com melhor valor (exemplo: a solução óptima é a solução d).

Para encontrar a solução óptima, são usadas ferramentas de optimização (*e.g.*, *lpsolve, IBM ILOG Cplex, Gurobi*), que aceitam ficheiros de *input* com formatos definidos.

Ver mais

Programação Linear: elementos dos modelos (exemplos)

- Variáveis de decisão:
  - quantidades a produzir de um artigo
  - rotas a percorrer por veículos
  - fluxos a enviar pelos arcos duma rede
  - actividades (ou projectos) a seleccionar
  - instantes para iniciar as actividades
- Parâmetros
  - recursos disponíveis
  - número de unidades pedidas por um cliente
  - tempo de processamento de uma actividade
- Restrições:
  - relação entre a função que exprime a quantidade de um recurso que as actividades consomem e o recurso disponível
  - relação entre a função que exprime a quantidade de um bem que as actividade produzem e a procura a satisfazer
  - relação que traduz as regras de funcionamento do sistema (*e.g.*, conservação de fluxo, precedência entre operações)

Exemplo 1: problema de produção

- Uma empresa produz 2 tipos de artigos: Artigo 1 e Artigo 2.
- A produção destes artigos requer 3 tipos de recursos:
  - Material
  - Mão de Obra
  - Tempo-Máquina
- Objectivo: determinar o **plano de produção diário** (solução admissível) que **maximiza o lucro total** (com o valor óptimo).
- A quantidade disponível de cada recurso, o consumo de recursos por cada artigo produzido e o lucro líquido de cada artigo são:

	Artigo 1	Artigo 2	Quantidade disponível
Material	3 [unid./art.]	2 [unid./art.]	120 [unid./dia]
Tempo-Homem	1 [h.hom./art.]	2 [h.hom./art.]	80 [h.hom./dia]
Tempo-Máquina	1 [h.maq./art.]	0 [h.maq./art.]	30 [h.maq/dia]
Lucro Unitário	12 [U.M./art.]	10 [U.M./art.]	

Exemplo 1: problema de produção - elementos do modelos

Variáveis de decisão (incógnitas associadas às decisões admissíveis):

- x_1 : quantidade de artigos de tipo 1 a fabricar diariamente [art./dia]
- x_2 : quantidade de artigos de tipo 2 a fabricar diariamente [art./dia]

Parâmetros (dados do sistema que não podem ser alterados):

- quantidade disponível de cada recurso;
- lucro unitário dos artigos;
- consumo de recursos por cada artigo (coeficientes tecnológicos)

Exemplo 1: problema de produção - restrições e função objectivo

Restrições:

- função linear $3x_1 + 2x_2$: qtd. de material usada diariamente [unid./dia]
- restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 120$: apenas são admissíveis as soluções que não excedam a disponibilidade diária de material [unid./dia]
- as outras restrições são semelhantes.
- Todas as variáveis têm restrições de não-negatividade $(x_1, x_2 \geq 0)$.$^{(*)}$

Função objectivo:

- função objectivo $12x_1 + 10x_2$: lucro diário [U.M./dia]

(*) o caso em que as variáveis podem ser positivas ou negativas (s/ restrição de sinal) está tratado nos diapositivos TransformaçõesBásicas.

Exemplo 1: problema de produção - modelo

- Função objectivo:

$$\max z = 12x_1 + 10x_2$$

- Restrições:

$$\begin{array}{lcr} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ 1x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ 1x_1 & \leq & 30 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Exemplo 2: sudoku 2 × 2

- O sudoku é um puzzle lógico em que se pretende preencher todas as células com algarismos, de forma a que não haja repetição de nenhum algarismo nas linhas, nas colunas ou nos blocos.
- Vamos ver uma versão com uma matriz 4×4, dividida em 4 blocos 2×2, em que os algarismos de algumas das células são dados.

Exemplo:

	1	4	
			2
1			
	3	2	

- Como representar uma decisão? Quais as variáveis de decisão?
- Quais as restrições?
- Qual é a função objectivo?
- Qual o espaço de soluções admissíveis?

Exemplo 2: sudoku 2 × 2 - elementos do modelo

Variáveis de decisão:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, se a célula } (i,j) \text{ tiver o algarismo } k \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

- cada célula apenas pode ter um algarismo;
- numa linha, cada algarismo apenas pode aparecer uma vez;
- numa coluna, cada algarismo apenas pode aparecer uma vez;
- num bloco 2 × 2, cada algarismo apenas pode aparecer uma vez; e
- há células que devem ter o algarismo dado no puzzle.

Função objectivo:

- O objectivo do jogo é obter uma solução admissível,
- sendo todas as soluções igualmente boas.
- A função objectivo pode ser uma função qualquer.

Exemplo 2: sudoku 2 × 2 - solução do modelo

Modelo:

- ver ficheiro `sudoku_2x2.lp`

Solução do modelo, obtida com o *lpsolve*:

- $x_{121} = x_{134} = x_{242} = x_{311} = x_{423} = x_{432} = 1$ (conforme atribuição feita no modelo)
- $x_{112} = x_{143} = x_{213} = x_{224} = x_{231} = x_{322} = x_{333} = x_{344} = x_{414} = x_{441} = 1$
- todas as outras variáveis $x_{ijk} = 0$

Solução do puzzle:

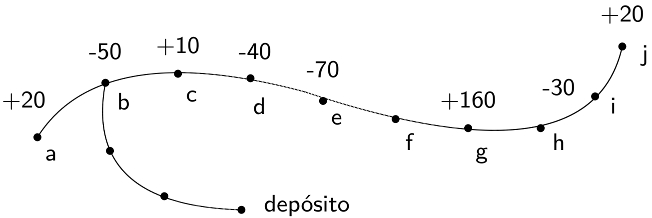
2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

Exemplo 3: transporte de terras

- As obras de terraplanagem representam uma parte significativa dos custos de construção de vias de comunicação.
- Grandes volumes de terra devem ser deslocados de zonas de empréstimo para zonas de depósito para obter os nivelamentos desejados.
- Os custos de transporte de terra são aproximadamente proporcionais à distância percorrida.
- Objectivo: estabelecer o plano de deslocação de terra para minimizar custos de terraplanagem.

Exemplo 3: transporte de terras (cont.)

- Os pontos $a, b, \ldots, j$ encontram-se distanciados entre si de 10 Km.
- As quantidades associadas aos pontos indicam os volumes de terra a deslocar (em milhares de m^3), sendo as zonas de empréstimo e de depósito assinaladas pelos sinais $+$ e $-$, respectivamente.
- Pode ainda recorrer-se a uma zona de depósito, situada fora do traçado da via, a uma distância de 30 Km do ponto b.



- Quais as variáveis de decisão? Quais os dados? Quais as restrições?

Exemplo 3: transporte de terras - elementos dos modelos

Variáveis de decisão:

- volume de terra a transportar desde cada zona de empréstimo para cada zona de depósito.

Parâmetros:

- volume de terra a deslocar de cada zona;
- distâncias;
- custo de transporte por m^3 e por Km.

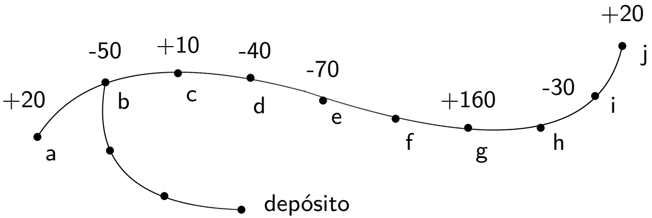
Restrições:

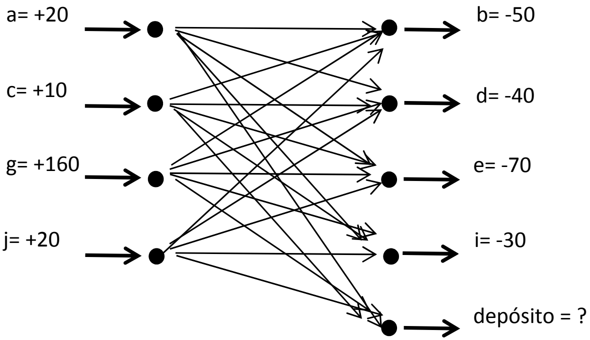
- a soma dos volumes de terra que saem de uma dada zona de empréstimo para cada zona de depósito perfaz o volume a deslocar;
- a soma dos volumes de terra que chegam a uma dada zona de depósito de cada zona de empréstimo perfaz o volume a depositar;

Função objectivo:

- função de custo de transporte.

Exemplo 3: transporte de terras - esboço de modelo





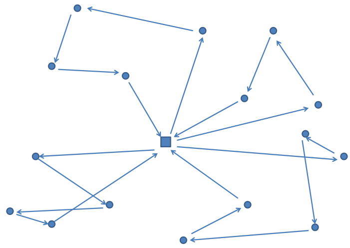
Exemplo 4: planeamento de rotas de veículos

Objectivo

- Dados um conjunto de veículos com capacidades e
- um conjunto de clientes com procuras e janelas temporais de visita,

encontrar a solução de custo mínimo, em que haja

- um conjunto de rotas, todas começando e terminando no depósito,
- sendo cada cliente visitado por um único veículo.



- Quais as variáveis de decisão? Quais os dados? Quais as restrições?

Exemplo 4: planeamento de rotas de veículos - elementos

Há modelos diferentes consoante a escolha das variáveis de decisão.

Variáveis de decisão (um exemplo):

- cada rota (uma sequência de arcos) admissível.

Parâmetros:

- carga para cada cliente; capacidade dos veículos;
- distâncias e tempos de viagem;
- ...

Restrições:

- carga não excede a capacidade do veículo;
- cada cliente é visitado por um único veículo na sua janela temporal;
- ...

Função objectivo:

- função de custo de transporte.

Programação linear: algumas áreas de aplicação

- Logística e distribuição
- Telecomunicações e redes de comunicação
- Gestão da cadeia de abastecimento
- Gestão de serviços de saúde
- Planeamento da operação de companhias de transporte (aéreo, caminho de ferro, urbano)
- Planeamento da produção
- Gestão de projectos
- Corte e empacotamento
- Gestão de pessoal
- Gestão de florestas
- ...

Programação linear: alguns marcos

- Gauss: Eliminação de Gauss para resolver um sistema de equações
- Kantorovich (1930) : atribuição eficiente de recursos, e.g., modelos de planeamento industrial e modelos de corte (galardoado com o prémio Nobel (1975) juntamente com Tim Koopmans)
- Dantzig (1947) : método Simplex
- Khachian (1979) : método do elipsóide
- Karmarkar (1984) : método de pontos interiores

- Simplex algorithm: one of the top ten algorithms of the 20th century (The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms, Barry A. Cipra, from SIAM News, Volume 33, Number 4)

Conclusão

- A programação linear é uma ferramenta de uso generalizado na indústria e nos serviços.
- A sua utilização traduz-se em economias muito relevantes.

Resultados de aprendizagem

- Definir a Investigação Operacional
- Descrever a metodologia da investigação operacional
- Identificar a estrutura dos modelos de programação linear
- Desenvolver a capacidade de analisar sistemas complexos e de criar modelos para os descrever.
  - identificar alternativas de decisão e objectivos em problemas de decisão;
  - identificar variáveis de decisão;
  - identificar parâmetros (dados)

Apêndices

(Alguns) solvers de programação matemática

CPLEX	`http://www.ilog.com/products/cplex`
XPRESS-MP	`http://www.dashoptimization.com`
COIN CLP	`http://www.coin-or.org`
GLPK	`http://www.gnu.org/software/glpk`
LP SOLVE	`https://sourceforge.net/projects/lpsolve/`

Ver também:

- Software Survey: Linear Programming, por Robert Fourer

  `http://www.orms-today.org/surveys/LP/LP-survey.html`

(Algumas) linguagens de modelação

AMPL	A Modeling Language for Mathematical Programming	www.ampl.com	*
GAMS	General Algebraic Modeling System	www.gams.com	*
OPL	Optimization Programming Language	www.ilog.com	*
LINGO	Lingo	www.lindo.com	*
GNU-MP	GNU Mathematical Programming Language	www.gnu.org/software/glpk	+

(*) - comercial

(+) - livre

Voltar

Fim