Álgebra Linear EI

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

4. Espaços vetoriais

Exercício 1. Verifique que o conjunto $\mathcal{P}_n(x)$ dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n com coeficientes reais, algebrizado por meio da adição de polinómios e da multiplicação de um polinómio por um número real é um espaço vetorial real.

Exercício 2. Considere o conjunto $C([a,b])$ das funções reais de variável real contínuas em $[a,b]$. Se $f,g \in C([a,b])$ considere definida a soma $f+g$ por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in [a,b].$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in C([a,b])$ considere $\alpha\, f$ definida por

$$(\alpha\, f)(x) = \alpha\, f(x), \qquad x \in [a,b].$$

Prove que $C([a,b])$ é um espaço vetorial real para as operações acima definidas.

Exercício 3. Mostre que se U é um subespaço vetorial de um espaço vetorial V então $\mathbf{0}_V \in U$.

Exercício 4. Verifique se os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais do espaço vetorial V indicado.

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 = x_2\}$.
b) $V = \mathbb{R}^2, \quad T = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0\}$.
c) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.

Exercício 5. Prove que o conjunto formado pelas matrizes reais simétricas de ordem n é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Exercício 6. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$. Mostre que:

a) O conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. (Recorde o Exercício 10 da folha de sistemas de equações.)
b) O conjunto das soluções do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 7. Indique, sem efetuar quaisquer cálculos, quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço V indicado.

a) $V = \mathbb{R}^3, \quad U_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
b) $V = \mathbb{R}^3, \quad U_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$;
c) $V = \mathbb{R}^4, \quad U_3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2$ e $x_3 = x_4\}$;
d) $V = \mathbb{R}^3, \quad U_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3$ e $x_4 = 5\}$.

Exercício 8. Identifique o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores:

a) $\boldsymbol{u}_1 = (1,0,0)$ e $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,1)$.
b) $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,1), \boldsymbol{v}_2 = (2,-1,-3)$ e $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,1)$.
c) $\boldsymbol{w}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{w}_2 = (2,1,1)$ e $\boldsymbol{w}_3 = (0,1,3)$

Exercício 9. Identifique o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Exercício 10. Sejam $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vetores de um espaço vetorial V e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Prove que:

a) $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \alpha\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.

b) $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.

Exercício 11. Considere os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1)$.

a) Escreva $\boldsymbol{v} = (3, -1)$ como combinação linear de $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$.

b) Mostre que $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ são linearmente independentes.

c) Verifique que qualquer vetor $\boldsymbol{x} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear de $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$.

Exercício 12. Verifique se são linearmente independentes os vetores de $\mathbb{R}^3$ apresentados em seguida. No caso de serem linearmente dependentes escreva um deles como combinação linear dos restantes.

a) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)$.

b) $(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, -1, 1)$.

Exercício 13. Sejam $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vetores de um espaço vetorial V e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Mostre que, se $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores linearmente independentes (dependentes), então:

a) $\alpha\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ também são linearmente independentes (dependentes);

b) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ também são linearmente independentes (dependentes).

Exercício 14. Determine uma base e a dimensão dos subespaços apresentados nos exercícios 4 e 7.

Exercício 15. Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

a)
$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 = x_3 + x_4\};$$

b)
$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_2 = x_3\}.$$

Exercício 16. Apresente uma base e indique a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ formado pelas matrizes:

a) Simétricas de ordem 2.

b) Triangulares superiores de ordem 2.

c) Diagonais de ordem 2.

Exercício 17. Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Mostre que:

a) Se $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$, então $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V.

b) Se $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores de V linearmente independentes, então $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V.

Exercício 18. Seja V um espaço vetorial e $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ uma sua base. Mostre que qualquer vetor $\boldsymbol{v} \in V$ se escreve, de forma única, como combinação linear dos vetores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

Observação: Os coeficientes da combinação linear são chamados as *coordenadas* do vetor em relação a essa base.

Exercício 19. *a)* Determine as coordenadas do vetor $\boldsymbol{x} = (1, -4, 2)$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Sejam $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 0)$, e $\boldsymbol{u}_3 = (1, 0, -1)$. Mostre que $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de vetor $\boldsymbol{x}$, dado na alínea anterior, relativamente a esta base.

Exercício 20. *a)* No espaço $\mathcal{P}_2(x)$, determine as coordenadas, na base $(1, x, x^2)$, de

$$p(x) = 1 - 4x + 2x^2.$$

b) Considere os polinómios definidos por

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 1 - x, \quad p_3(x) = 1 - x^2,$$

Mostre que (p_1, p_2, p_3) é uma base de $\mathcal{P}_2(x)$. Determine as coordenadas do polinómio p, dado na alínea anterior, relativamente a esta base.

Exercício 21. *a)* Mostre que os vetores $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, 1)$ e $\boldsymbol{u}_3 = (0, -1)$ constituem um sistema de geradores de $\mathbb{R}^2$.

b) Retire vetores, entre os dados, para obter uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 22. Determine os valores de k para os quais $((1, 0, 2), (-1, 2, -3), (-1, 4, k))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 23. Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^3$, $U = \langle (1, 0, 1), (2, 2, 4), (0, 0, 1), (1, 2, 3) \rangle$.

Exercício 24. Seja $U = \{(3a + b, 2a - b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Verifique que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de U.

c) Determine α de modo que o vetor $(2, 3, \alpha)$ pertença a U.

Exercício 25. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.

a) Verifique que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de S.

c) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $S = \langle (1, 0, -1), (-1, 1, \alpha) \rangle$.

Exercício 26. Determine a dimensão e indique uma base para o espaço das colunas e para o espaço das linhas de cada uma das seguintes matrizes.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *d)* $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e)* $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 27. Determine a dimensão e indique uma base para o núcleo de cada uma das matrizes do exercício anterior.

Exercício 28. Construa uma matriz cujo espaço nulo seja gerado pelo vetor $(2, 0, 1)$.

Exercício 29. Existe alguma matriz A tal que $(1, 1, 1) \in \mathcal{L}(A)$ e $(1, 0, 0) \in \mathcal{N}(A)$?

Exercício 30. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule a nulidade e a característica de A.

b) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o espaço nulo de A.

c) Resolva o sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, onde $\boldsymbol{b} = (1\ 0\ 2\ \ -1\ 0)^T$.
(Note que $\boldsymbol{b}$ é a primeira coluna de A.)

Nas questões **31** a **39**, indique, a(s) alínea(s) correta(s).

Exercício 31. Os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.

a) $A_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 2\}$.
b) $A_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = x + 2y \text{ e } w = x - 3y\}$.
c) $A_3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \text{ e } y = -w\}$.
d) $A_4 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = 0\}$.
e) $A_5 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 1,\ y = 0,\ x + w = 1\}$.
f) $A_6 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x > 0 \text{ e } y < 0\}$.

Exercício 32. Os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^{n\times n}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

a) O conjunto de todas as matrizes invertíveis de ordem n.
b) O conjunto de todas as matrizes diagonais de ordem n.
c) O conjunto de todas as matrizes triangulares superiores de ordem n.
d) O conjunto de todas as matrizes singulares de ordem n.

Exercício 33. Os seguintes vetores geram $\mathbb{R}^3$.

a) $(1, -1, 2),\ (0, 1, 1)$.
b) $(1, 2, -1),\ (6, 3, 0),\ (4, 1, 1),\ (-1, 1, 1)$.
c) $(2, 2, 3),\ (-1, -2, 1),\ (0, 1, 0)$.
d) $(1, 1, -1),\ (1, 0, 3),\ (-1, -2, 5)$.

Exercício 34. Os seguintes polinómios geram $\mathcal{P}_2(x)$.

a) $x^2 + 1,\ x^2 + x,\ x + 1$.
b) $x^2 + 1,\ x^2 + x$.
c) $x2 + 2,\ 2x^2 - x + 1,\ x + 2,\ x^2 + x + 4$.
d) $x^2 - 3x + 2,\ x^2 - 1$.

Exercício 35. Os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes.

a) $(1, 2, -1),\ (3, 2, 5)$.
b) $(4, 2, 1),\ (2, 6, -5),\ (1, -2, 3)$.
c) $(1, 1, 0),\ (0, 2, 3),\ (1, 2, 3),\ (3, 6, 6)$.
d) $(1, 2, 3),\ (1, 1, 1),\ (1, 0, 1)$.

Exercício 36. Os seguintes vetores de $\mathcal{P}_2(x)$ são linearmente dependentes.

a) $x^2 + 1,\ x - 2,\ x + 3$.
b) $2x^2 + 1,\ x^2 + 3,\ x$.
c) $3x + 1,\ 3x^2 + 1,\ 2x^2 + x + 1$.
d) $x^2 - 4,\ 5x^2 - 5x - 6,\ 3x^2 - 5x + 2,\ 2x - 1$.

Exercício 37. Os seguintes vetores de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ são linearmente dependentes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercício 38. Os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

a) $(1,2,0),\ (0,1,-1).$
b) $(1,1,-1),\ (2,3,4),\ (1,-2,3),\ (2,1,1).$
c) $(1,1,0),\ (0,2,3),\ (-2,0,3).$
d) $(3,2,2),\ (-1,2,1),\ (0,1,0).$

Exercício 39. Os seguintes vetores de $\mathcal{P}_2(x)$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(x)$.

a) $-x^2+x+2,\ 2x^2+2x+3,\ 4x^2-1.$
b) $2x^2+1,\ x^2+3.$
c) $x^2+1,\ 3x^2+1,\ 2x^2+x+1,\ 3x^2-5x+2.$
d) $3x^2+2x+1,\ x^2+x+1,\ x^2+1.$

Nas questões **40** a **46**, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).

Exercício 40. Seja V um espaço vetorial real. V F

a) Se $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V, então $(3\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ também é uma base de V. ○ ○
b) Se $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$, então $\dim V = n$. ○ ○
c) Se $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V, então o vetor nulo não pode escrever-se como combinação linear dos vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$. ○ ○
d) Se $\dim V = n$ e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores de V linearmente independentes, então $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V. ○ ○

Exercício 41. Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. V F

a) Se $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$, então $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V. ○ ○
b) Se $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V, então$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_n)$ também é uma base de V. ○ ○
c) Quaisquer $n-1$ vetores de V são linearmente independentes. ○ ○
d) O conjunto $T = \{\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V\}$ é um subespaço vetorial de V. ○ ○

Exercício 42. Seja $S =< (1,0,1), (1,2,1), (3,4,3) >$. Então: V F

a) $S = \mathbb{R}^3$. ○ ○
b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$. ○ ○
c) $(2,3,4) \in S$. ○ ○
d) os vetores $(-2,4,-2)$ e $(-2,0,-2)$ constituem uma base de S. ○ ○

Exercício 43. Seja $T = \langle (1,1,0,0), (1,0,-1,0), (1,1,1,1) \rangle$. Então: V F

a) $T = \mathbb{R}^3$. ○ ○

b) $T = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = b - c + d\}$. ○ ○

c) $(0,0,0,0) \in T$. ○ ○

d) $((1,1,0,0), (1,0,-1,0), (0,0,1,1))$ é uma base de T. ○ ○

Exercício 44. Seja A uma matriz de ordem 4×5. V F

a) As colunas de A são linearmente dependentes. ○ ○

b) O sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tem solução única. ○ ○

c) $\operatorname{car} A \leq 4$. ○ ○

d) A dimensão do núcleo de A é 2. ○ ○

Exercício 45. Seja $S = \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. V F

a) $S = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$. ○ ○

b) $(1,1,1) \in S$. ○ ○

c) $S = \langle (1,-1,0), (1,1,2), (1,0,1) \rangle$. ○ ○

d) S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2. ○ ○

Exercício 46. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V F

a) B pode obter-se por operações elementares sobre as linhas de A. ○ ○

b) $((1,1,2,0), (1,2,3,1), (1,4,5,5))$ é uma base do espaço das colunas de A. ○ ○

c) $((1,1,1,1), (1,2,3,4), (2,3,4,5))$ é uma base do espaço das linhas de A. ○ ○

d) $(-1,1,-1,1) \in \mathcal{N}(A)$. ○ ○

Exercício 4. *a)* Sim *b)* Não *c)* Sim

Exercício 7. *a)* e *c)*

Exercício 8. *a)* $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = c\}$. *b)* $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = b - a\}$. *c)* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 9. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$, ou seja, o conjunto das matrizes de ordem 2 triangulares superiores.

Exercício 11. $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$.

Exercício 12. *a)* Sim *b)* Não; $(1,-1,1) = (1,0,1) - (0,1,0)$.

Exercício 14.

4. *a)* $\dim S = 1$; base de S : $((1,1))$.
4. *c)* $\dim T = 2$; base de T : $((1,0,0),(0,1,0))$.
7. *a)* $\dim U_1 = 2$; base de U_1: $((-1,1,0),(-1,0,1))$.
7. *c)* $\dim U_3 = 2$; base de U_3: $((1,1,0,0),(0,0,1,1))$.

Exercício 15. *a)* $\dim U = 3$; base de U : $((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1))$.
b) $\dim W = 2$; base de W : $((1,1,1,0),(0,0,0,1))$.

Exercício 16. *a)* $\dim 3$; base: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
b) $\dim 3$, base: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. *c)* $\dim 2$, base: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercício 19. *a)* $(1,-4,2)$ *b)* $(-1,4,-2)$. Exercício 20. *a)* $(1,-4,2)$ *b)* $(-1,4,-2)$.

Exercício 21. *b)* $((1,0),(1,1))$. Exercício 22. $k \neq -4$.

Exercício 23. $((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$

Exercício 24. *b)* $((3,2,1),(1,-1,2))$ *c)* $\alpha = -1$. Exercício 25. *b)* $((-2,1,0),(-1,0,1))$ *c)* $\alpha = -1$.

Exercício 26. $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2$, base $\mathcal{L}(A) : ((0,2,1,1),(0,0,3,1))$, base $\mathcal{C}(A) : ((2,0,0,0),(1,3,0,0))$
$\dim \mathcal{L}(B) = \dim \mathcal{C}(B) = 3$, base $\mathcal{L}(B) : ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, base $\mathcal{C}(B) : ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$
$\dim \mathcal{L}(C) = \dim \mathcal{C}(C) = 2$, base $\mathcal{L}(C) : ((-1,3,0,2),(0,2,2,0))$, base $\mathcal{C}(C) : ((-1,0,-1),(3,2,3))$
$\dim \mathcal{L}(D) = \dim \mathcal{C}(D) = 3$, base $\mathcal{L}(D) : ((0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$, base $\mathcal{C}(D) : ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$
$\dim \mathcal{L}(E) = \dim \mathcal{C}(E) = 1$, base $\mathcal{L}(E) : ((3,0,-6,0))$, base $\mathcal{C}(E) : ((3,1))$

Exercício 27. $\dim \mathcal{N}(A) = 2$, base $\mathcal{N}(A) : ((0,-1,-1,3),(1,0,0,0))$
$\dim \mathcal{N}(B) = 0$, base $\mathcal{N}(B) : \emptyset$ $\dim \mathcal{N}(C) = 2$, base $\mathcal{N}(C) : ((2,0,0,1),(-3,-1,1,0))$
$\dim \mathcal{N}(D) = 1$, base $\mathcal{N}(D) : ((1,0,0,0))$ $\dim \mathcal{N}(E) = 3$, base $\mathcal{N}(E) : ((0,0,0,1),(2,0,1,0),(0,1,0,0))$

Exercício 28. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Exercício 29. Não.

Exercício 30. *a)* 2 e 3 *b)* Base de $\mathcal{C}(A)$: $((1,0,2,-1,0),(0,2,-1,2,0),(1,0,1,1,0))$
Base de $\mathcal{N}(A)$: $((1,1,0,0,0),(-2,0,-2,1,0))$ *c)* $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Exercício 31. F V V V F F Exercício 32. F V V F Exercício 33. F V V F

Exercício 34. V F V F Exercício 35. F F V F Exercício 36. F F V V Exercício 37. V F V

Exercício 38. F F F V Exercício 39. V F F V Exercício 40. V F F V Exercício 41. V V F V

Exercício 42. F V F V Exercício 43. F V V V Exercício 44. V F V F Exercício 45. V F V V

Exercício 46. V V V F