tópicos de matemática discreta – MIEInf

carla mendes | cláudia m. araújo | suzana m. gonçalves

UM | 2015/2016

definição 4.1

Sejam A e B conjuntos. Uma **função** (ou **aplicação**) de A em B é uma correspondência de A para B que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.

Em geral, representamos as funções por letras minúsculas f, g, h,...

Escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B. Para cada objeto $a \in A$, o único elemento b de B que f faz corresponder ao elemento a chama-se **imagem de** a **por** f e representa-se por $f(a)$. Podemos, assim, escrever

$$\begin{array}{rl} f: & A \to B \\ & a \mapsto f(a) \end{array}$$

Dada uma função $f : A \to B$, designamos por

1 | **domínio** ou **conjunto de partida** de f o conjunto A;

2 | **codomínio** ou **conjunto de chegada** de f o conjunto B;

3 | **imagem** ou **contradomínio** de f o conjunto $\mathrm{Im}(f)$ das imagens por f de todos os elementos de A, ou seja,

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

O conjunto de todas as funções de A para B representa-se por B^A.

Dado um conjunto A, chama-se **aplicação vazia** à aplicação $\emptyset : \emptyset \to A$. Esta é a única aplicação de $\emptyset$ em A e, portanto, $A^\emptyset = \{\emptyset\}$.

Se A é não vazio, não existem funções de A em $\emptyset$, pelo que $\emptyset^A = \emptyset$.

exemplo 4.2

1 | A correspondência de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ que a cada elemento x de $\mathbb{Z}$ faz corresponder o elemento $y = x^2$ é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

2 | Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e sejam f, g, h e ℓ as correspondências definidas por

$$
\begin{array}{rl} f: & A \to A \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array}, \qquad
\begin{array}{rl} g: & A \to A \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 2 \\ & 3 \mapsto 2 \end{array}, \qquad
\begin{array}{rl} h: & A \to A \\ & 1 \mapsto 1 \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 2 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array}, \qquad
\begin{array}{rl} \ell: & A \to A \\ & 1 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array}.
$$

Então, f e g são funções de A em A. Por outro lado, h não é uma função de A em A uma vez que a 1 faz corresponder duas imagens: 1 e 2. Também ℓ não é uma função de A em A uma vez que a 2 não faz corresponder qualquer imagem.

3 | Sejam A e B conjuntos, com $B \neq \emptyset$. Seja $b \in B$. A correspondência de A em B que a cada elemento de A faz corresponder o elemento b é uma função de A em B.

definição 4.3

Sejam A e B conjuntos.

Uma função $f : A \to B$ diz-se uma **função constante** se existe $b \in B$ tal que, para todo o $a \in A$, $f(a) = b$.

A função de A em A que a cada elemento $a \in A$ faz corresponder a diz-se a **função identidade de** A e representa-se por id_A, ou seja,

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{id}_A : & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a \end{array}$$

exemplo 4.4

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Então,

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{id}_A : & A & \to & A \\ & 1 & \mapsto & 1 \\ & 2 & \mapsto & 2 \\ & 3 & \mapsto & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{rrcl} \mathrm{id}_B : & B & \to & B \\ & 4 & \mapsto & 4 \\ & 5 & \mapsto & 5 \end{array} \quad \text{e a correspondência} \quad \begin{array}{rrcl} f : & A & \to & B \\ & 1 & \mapsto & 4 \\ & 2 & \mapsto & 4 \\ & 3 & \mapsto & 4 \end{array}$$

é uma função constante.

definição 4.5

Sejam A_1, A_2, B_1, B_2 conjuntos e sejam $f : A_1 \to B_1$, $g : A_2 \to B_2$ funções. Dizemos que as funções f e g são **iguais**, e escrevemos $f = g$, se

1 | $A_1 = A_2$;
2 | $B_1 = B_2$;
3 | para todo o $x \in A_1$, $f(x) = g(x)$.

exemplo 4.6

Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ e $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ funções definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Z}, \quad h(x) = k(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Como os domínios de g e de h são distintos, $g \neq h$. De igual modo, $g \neq k$. Como os codomínios de h e de k são distintos, $h \neq k$. Por outro lado, como os domínios e os codomínios de f e g são iguais e $f(x) = g(x)$ para todo o $x \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que $f = g$.

definição 4.7

Sejam A, B conjuntos, X um subconjunto de A, Y um subconjunto de B e $f : A \to B$ uma função de A em B. Designamos por

1 | **imagem de X por f** o conjunto

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\};$$

2 | **imagem inversa** (ou **pré-imagem**) **de Y por f** o conjunto

$$f^{\leftarrow}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

exemplo 4.8

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $f : A \to B$ a função definida por $f(1) = f(2) = 4$ e $f(3) = 5$.

Então, $f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{4, 4\} = \{4\}$, $f^{\leftarrow}(\{4, 5\}) = \{1, 2, 3\} = A$ e $f^{\leftarrow}(\{6\}) = \emptyset$.

2 | Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq 0 \\ 3-x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

$X = \{-4, 0, 1, 2\}$ e $Y = \{-5, 0, 5\}$. Então,

$$f(X) = \{f(-4), f(0), f(1), f(2)\} = \{7, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$$

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}(Y) = &\quad \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = -5 \vee f(x) = 0 \vee f(x) = 5\} \\ = &\quad \{x \in \mathbb{Z} : (2x+3 = -5 \wedge x \geq 0) \vee (3 - x = -5 \wedge x < 0) \vee \\ \vee &\quad (2x+3 = 0 \wedge x \geq 0) \vee (3 - x = 0 \wedge x < 0) \vee \\ \vee &\quad (2x+3 = 5 \wedge x \geq 0) \vee (3 - x = 5 \wedge x < 0)\} \\ = &\quad \{1, -2\} \end{aligned}$$

3 | Consideremos a função

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x|$$

Então,

i | $f(\{-1,0,1\}) = \{0,1\}$; $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$; $f(]-2,3]) = [0,3]$;

ii | $f^{\leftarrow}(\{1\}) = \{-1,1\}$; $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-) = \emptyset$; $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

proposição 4.9

Sejam A, B conjuntos, $f : A \to B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$ e $B_1, B_2 \subseteq B$. Então,

1 | $f(\emptyset) = \emptyset$;

2 | $f(A) \subseteq B$;

3 | se $A_1 \subseteq A_2$, então $f(A_1) \subseteq f(A_2)$;

4 | $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

5 | $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$;

6 | $f^{\leftarrow}(B) = A$;

7 | Se $B_1 \subseteq B_2$, então $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$;

8 | $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$;

9 | $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$;

demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 3, 4, 7 e 8. As restantes são deixadas como exercício.

1 | Por definição, $f(\emptyset) = \{f(x) : x \in \emptyset\}$. Ora, $\emptyset$ não tem elementos, pelo que $x \in \emptyset$ é uma condição impossível. Portanto, $f(\emptyset) = \emptyset$.

3 | Suponhamos que $A_1 \subseteq A_2$. Então,

$$\forall_x \ (x \in A_1 \rightarrow x \in A_2).$$

Pretendemos mostrar que $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, ou seja, $\forall_y \ (y \in f(A_1) \rightarrow y \in f(A_2))$.

Seja $y \in f(A_1)$. Então, existe $x \in A_1$ tal que $y = f(x)$.

Por hipótese, $x \in A_1 \rightarrow x \in A_2$. Logo, $x \in A_2$ e, assim, $y = f(x)$ com $x \in A_2$. Portanto, $y \in f(A_2)$.

Vimos, então, que $y \in f(A_1) \rightarrow y \in f(A_2)$, pelo que $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

4 | Pretendemos mostrar que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

$(\subseteq)$ Comecemos por mostrar que $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$.

Seja $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Então, existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$.

Ora,

$$x \in A_1 \cup A_2 \leftrightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2).$$

Se $x \in A_1$, então $y = f(x) \in f(A_1)$. Se $x \in A_2$, então $y = f(x) \in f(A_2)$. Logo, $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$ e, portanto, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

($\supseteq$) Mostremos, agora, que $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$.

Seja $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Então, $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$. Se $y \in f(A_1)$, então existe $x \in A_1$ tal que $y = f(x)$. Se $y \in f(A_2)$, então existe $x \in A_2$ tal que $y = f(x)$. Em ambos os casos, $x \in A_1 \cup A_2$, pelo que $y = f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$.

Logo, $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$ e $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$, pelo que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

7 | Suponhamos que $B_1 \subseteq B_2$, ou seja,

$$\forall_y \ (y \in B_1 \to y \in B_2).$$

Queremos mostrar que $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$. Dado $x \in f^{\leftarrow}(B_1)$, sabemos que $x \in A$ e $f(x) \in B_1$, por definição de imagem inversa. Ora, $B_1 \subseteq B_2$, pelo que $f(x) \in B_2$. Assim, $x \in f^{\leftarrow}(B_2)$.

8 | Verifiquemos, agora, que $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$. Dado $x \in A$,

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) & \leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ & \leftrightarrow (f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2) \\ & \leftrightarrow (x \in f^{\leftarrow}(B_1) \vee x \in f^{\leftarrow}(B_2)) \\ & \leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2) \end{aligned}$$

Logo, $\forall_x \ (x \in f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) \leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2))$, donde segue a igualdade pretendida.

definição 4.10

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **injetiva** quando quaisquer dois elementos distintos de A têm imagens distintas por f, ou seja, $\forall_{x,y \in A}\ (x \neq y \to f(x) \neq f(y))$. Equivalentemente, f é injetiva quando

$$\forall_{x,y \in A}\ (f(x) = f(y) \to x = y).$$

exemplo 4.11

1 | Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5,6,7\}$ e seja $f : A \to B$ a função definida por $f(1) = 6$, $f(2) = 7$ e $f(3) = 4$. Então, f é injetiva pois não existem objetos distintos com a mesma imagem.

2 | Sejam $C = \{1,2,3,4\}$ e $D = \{5,6,7\}$ e seja $g : C \to D$ a função definida por $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 7$ e $g(4) = 7$. Então, g não é injetiva pois $3 \neq 4$ e $g(3) = 7 = g(4)$.

3 | Seja $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por $h(n) = 2n + 1$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$. A função h é injetiva pois, dados $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$h(n) = h(m) \leftrightarrow 2n + 1 = 2m + 1 \leftrightarrow 2n = 2m \leftrightarrow n = m.$$

4 | Seja $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $k(x) = x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. A função k não é injetiva pois $-2 \neq 2$ e $k(-2) = 4 = k(2)$.

definição 4.12

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **sobrejetiva** quando todo o elemento de B é imagem de algum elemento de A, ou seja,

$$\forall_{y \in B} \exists_{x \in A} \; f(x) = y.$$

Equivalentemente, f é sobrejetiva se $f(A) = B$.

exemplo 4.13

Consideremos as funções definidas no exemplo 4.11.

1 | A função $f : \{1,2,3\} \to \{4,5,6,7\}$ definida por $f(1) = 6$, $f(2) = 7$ e $f(3) = 4$ não é sobrejetiva pois 5 não é imagem de qualquer elemento de A.

2 | A função $g : \{1,2,3,4\} \to \{5,6,7\}$ definida por $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 7$ e $g(4) = 7$ é sobrejetiva pois todo o elemento de $\{5,6,7\}$ é imagem de algum elemento de A.

3 | A função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $h(n) = 2n + 1$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$, não é sobrejetiva pois, dado $m \in \mathbb{Z}$ par, m não é da forma $2n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$.

4 | A função $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $k(x) = x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, não é sobrejetiva pois $k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$.

definição 4.14

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **bijetiva** quando f é injetiva e sobrejetiva, ou equivalentemente,

$$\forall_{y \in B} \exists^1_{x \in A}\ f(x) = y.$$

exemplo 4.15

1 | A função $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$ definida por $f(1) = 5$, $f(2) = 4$ e $f(3) = 6$ é bijetiva, uma vez que elementos distintos têm imagens distintas e todo o elemento do conjunto de chegada é imagem de algum objeto do domínio.

2 | A função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(n) = n + 1$, para todo o $n \in \mathbb{Z}$ é bijetiva. De facto, dados $n, m \in \mathbb{Z}$

$$g(n) = g(m) \leftrightarrow n + 1 = m + 1 \leftrightarrow n = m.$$

Portanto, g é injetiva. Por outro lado, dado $m \in \mathbb{Z}$, $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$ e

$$g(n) = g(m - 1) = (m - 1) + 1 = m,$$

pelo que g é sobrejetiva. Como g é injetiva e sobrejetiva, podemos concluir que é bijetiva.

É possível definir novas funções a partir de funções dadas.

proposição 4.16

Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Então, a correspondência de A para C que a cada elemento x de A faz corresponder o elemento $g(f(x))$ de C é uma função de A para C.

demonstração

Como f é uma função de A para B, dado $x \in A$, existe um único elemento y em B tal que $f(x) = y$. Por sua vez, como g é uma função de B para C e y é um elemento de B, existe um único elemento z de C tal que $g(y) = z$. Assim, para cada elemento x de A, existe um único elemento z de C tal que $g(f(x)) = g(y) = z$. Logo, a correspondência em causa é uma função. $\square$

definição 4.17

Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Designa-se por **função composta de g com f**, e representa-se por $g \circ f$, a função de A para C que a cada elemento x de A faz corresponder o elemento $g(f(x))$ de C, ou seja, $g \circ f$ é a função

$$\begin{aligned} g \circ f : \quad & A \to C \\ & x \mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

exemplo 4.18

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ e $C = \{8, 9\}$ conjuntos e sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ as funções definidas por $f(1) = 4$, $f(2) = 6$ e $f(3) = 7$ e $g(4) = g(6) = 8$, $g(5) = g(7) = 9$. Então, a função $g \circ f : A \to C$ define-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) \quad &= g(f(1)) = g(4) = 8 \\ (g \circ f)(2) \quad &= g(f(2)) = g(6) = 8 \\ (g \circ f)(3) \quad &= g(f(3)) = g(7) = 9 \end{aligned}$$

2 | Dadas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ e $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > 0 \\ -3x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = -x^2, \text{ para todo o } x \in \mathbb{N}_0,$$

podemos considerar as funções $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $f \circ g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definidas por

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -4x^2, & \text{se } x > 0 \\ -9x^2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = 3x^2, \text{ para todo o } x \in \mathbb{N}_0.$$

Como podemos verificar no exemplo anterior, a composição de funções não é, em geral, comutativa. Prova-se, no entanto, ser válida a propriedade associativa para a composição de funções.

proposição 4.19

Sejam A, B, C, D conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ funções. Então,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

demonstração Por definição de função composta, as funções $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ têm A como conjunto de partida e D como conjunto de chegada. Além disso, dado $x \in A$,

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x). \end{aligned}$$

proposição 4.20

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Então, $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

proposição 4.21

Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Então,

1 | Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.

2 | Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

3 | Se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva.

demonstração

1 | Suponhamos que f e g são injetivas. Então, dados $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad & \leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) & \\ & \rightarrow f(x) = f(y) & (g \text{ é injetiva}) \\ & \rightarrow x = y & (f \text{ é injetiva}).\end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é injetiva.

2 | Suponhamos agora que f e g são sobrejetivas. Seja $z \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetiva, existe $y \in B$ tal que $z = g(y)$. Ora, $y \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetiva. Logo, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Assim, existe $x \in A$ tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Mostrámos que, para todo o $z \in C$, existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$, ou seja, $g \circ f$ é sobrejetiva.

3 | Suponhamos que f e g são bijetivas. Então, f e g são injetivas e, por 1|, $g \circ f$ também o é. Mais, f e g são sobrejetivas e, por 2|, $g \circ f$ também o é. Logo, $g \circ f$ é bijetiva.

teorema 4.22

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Então, f é bijetiva se e só se existe uma única função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

definição 4.23

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função bijetiva. À única função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$ chamamos **função inversa de** f. Escrevemos $g = f^{-1}$ e dizemos que f **é invertível**.

proposição 4.24

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções bijetivas. Então,

1 | $(f^{-1})^{-1} = f$.

2 | $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

demonstração

1 | Pelo teorema 4.22, como f é bijetiva, sabemos que f é invertível, ou seja, existe $f^{-1} : B \to A$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. Daqui, novamente pelo teorema 4.22, f^{-1} é invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$.

2 | Pela proposição 4.21, como f e g são bijetivas, também $g \circ f$ o é, sendo $(g \circ f)^{-1}$ uma função de C em A.

Por outro lado, f^{-1} é uma função de B em A e g^{-1} é uma função de C em B, pelo que $f^{-1} \circ g^{-1}$ é também uma função de C em A.

Além disso, dado $x \in C$, atendendo à proposição 4.20,

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ \mathrm{id}_C)(x) \\
&= ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ \mathrm{id}_B \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (\mathrm{id}_A \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (g \circ f)^{-1}(x).
\end{aligned}
$$

Portanto, as funções $f^{-1} \circ g^{-1}$ e $(g \circ f)^{-1}$ são iguais.