Cálculo

folha 7 — 2015'16

Integral de Riemann.

1. Um objeto move-se ao longo de um eixo de coordenadas x. O seu movimento é descrito por uma função $x = x(t)$ no intervalo de tempo $[0, T]$, t em horas. A posição no instante inicial é $x(0) = 0$ e que a lei das velocidades deste movimento é descrita pelo gráfico ao lado.
Determine:

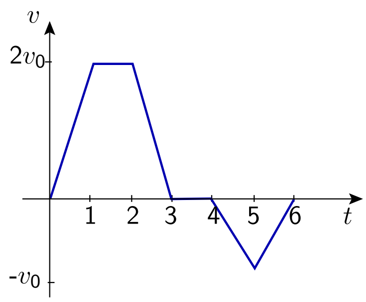
(a) os intervalos de tempo onde o objeto está respetivamente: parado, em movimento uniforme, em movimento acelerado e em movimento desacelerado

(b) os deslocamentos efetuados nestes intervalos de tempo

(c) as distâncias percorridas nos mesmos intervalos de tempo

(d) a posição no instante $t = T$ e o deslocamento total

(e) a lei do movimento $x(t)$ e esboce o seu gráfico.



2. Nas somas –esquerda, direita e média– de Riemann, as "alturas" dos retângulos calculam-se usando, respetivamente, o extremo esquerdo, o direito e o ponto médio de cada subintervalo. Nestas condições,

(a) estime o valor de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, usando as somas esquerda, direita e média e dois subintervalos de $[1, 2]$.

(b) compare os resultados obtidos na alínea anterior com o valor exato do integral.

(c) esboce, numa representação gráfica apropriada, as quatro quantidades obtidas anteriormente.

3. Considere uma função f, real de uma variável real, definida em $[0, 12]$ e representada por

x	0	3	6	9	12
$f(x)$	100	97	90	78	85

(a) Qual das somas –esquerda, direita ou média– de Riemann é a melhor aproximação para $\int_0^{12} f(x)\,dx$?

(b) Admita que f é contínua, sem pontos críticos nem pontos de inflexão. Nestas condições a estimativa obtida na alínea anterior será uma aproximação por defeito ou por excesso para $\int_0^{12} f(x)\,dx$?

4. Mostre, geometricamente, que

$$\int_0^1 \sqrt{2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

5. Sabendo que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 3$, calcule

(a) $\displaystyle\int_0^{0.5} f(2t)\,dt$ (b) $\displaystyle\int_0^1 f(1-t)\,dt$ (c) $\displaystyle\int_1^{1.5} f(3-2t)\,dt$.

6. Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida em $\mathbb{R}$ por:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt$ (b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$ (c) $F(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt$.

7. Sabendo que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz a igualdade abaixo para $x \geq 0$, calcule f em cada um dos seguintes casos:

(a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$ (b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3e^x - x^4$.

8. Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \text{sen}\, t}{2 + t^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sem calcular o integral, encontre um polinómio P de grau 2 tal que $P(0) = F(0)$, $P'(0) = F'(0)$, $P''(0) = F''(0)$.

9. Seja $a > 0$ e $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Justifique que

(a) se f é ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

(b) se f é par, então $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx$.

10. Dados $a < b \in \mathbb{R}$, mostre que se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, então existe $c \in \,]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

11. Calcule os integrais seguintes

(a) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2 - 2x^5)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{x} + 2)^2\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\, \text{sen}(x^2)\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_{-5}^0 2x\sqrt{4 - x}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_0^\pi x\, \text{sen}\, x\, dx$

(h) $\displaystyle\int_0^\pi (x + 2)\cos x\, dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x\, \text{sen}\, x\, dx$

(j) $\displaystyle\int_0^2 x^3\, e^{x^2}\, dx$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2 + 1)\, dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \text{arcsen}\, x\, dx$

(m) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$, com
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1, \\ 2 - x & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

(n) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\, \text{sen}\, x\, |\, dx$

(o) $\displaystyle\int_{-3}^5 |x - 1|\, dx$

(p) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$, com
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ -x & \text{se} \quad 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

(q) $\displaystyle\int_{-3}^2 \sqrt{|x|}\, dx$.

12. Usando a substituição indicada, calcule os seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \text{arcsen}\, x\, dx, \quad x = \text{sen}\, t$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{\text{arcsen}\, x}\, dx, \quad x = \text{sen}\, t$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx, \quad t = \text{sen}\, t$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx, \quad x = 3\ \text{sen}\, t$

(e) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}\, dx, \quad x = \text{sh}\, t$

(f) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\, dx, \quad t = x - 1$

(g) $\displaystyle\int_0^{3/2} 2^{\sqrt{2x+1}}\, dx, \quad x = \frac{t^2 - 1}{2}$

(h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1 - e^{2x}}\, dx, \quad t = e^x.$

13. [Mudança de variável universal]

(a) Mostre que, se $x = 2\,\text{arctg}\, t$, então

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \text{e} \qquad \text{sen}\, x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

(b) Usando a substituição $x = 2\,\text{arctg}\, t$, calcule

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\text{sen}\, x + \cos x}\, dx.$$