tópicos de matemática discreta – MIEInf

carla mendes | cláudia m. araújo | suzana m. gonçalves

UM | 2015/2016

introdução

A palavra **lógica** tem raíz no grego clássico: *logos* significa *razão*

A lógica consiste no estudo dos princípios e das técnicas do raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos válidos.

Desempenha, pois, um papel fundamental em qualquer área do saber, em particular na Matemática e na Informática.

Na Informática, a lógica é usada, por exemplo, no desenvolvimento de linguagens de programação, na verificação da correção de programas e nos circuitos digitais.

introdução

exemplo:

situação 1: Todos os coelhos gostam de cenouras. Este animal é um coelho. Então, este animal gosta de cenouras.

situação 2: Todos os que estão nesta sala gostam de Matemática. Tu estás nesta sala. Então, tu gostas de Matemática.

Formalmente, o raciocínio das duas situações é o mesmo.

introdução

problema 1: Um crime foi cometido por uma e apenas uma pessoa de um grupo de cinco suspeitos: Armando, Bernardo, Carlos, Daniel e Eduardo.

Questionados sobre quem era o culpado, cada um deles respondeu:

Armando: "Sou inocente."
Bernardo: "O Armando disse a verdade."
Carlos: "O Eduardo é o culpado."
Daniel: "O Carlos mentiu."
Eduardo: "O Daniel é o culpado."

Sabendo que apenas um dos suspeitos mentiu e que todos os outros disseram a verdade, quem é o culpado?

introdução

problema 2: "O Ernesto tem mais de mil livros", diz o Alberto.

"Não tem", diz o Jorge, "tem menos que isso."

"Certamente, tem pelo menos um livro", diz a Henriqueta.

Se apenas uma das afirmações é verdadeira, quantos livros tem o Ernesto?

introdução

Linguagem

Para exprimir argumentos precisos e rigorosos sobre afirmações é indispensável uma linguagem simples e clara, na qual as afirmações efetuadas não tenham significado ambíguo.

A linguagem corrente não tem estes requisitos:

> *"Não fiz nada."*
>
> *"Não gostas de mim?"– perguntei. "Não." – respondeu ele.*

É necessário utilizar uma **linguagem formal**.

sistema lógico

Um sistema lógico apresenta as seguintes componentes:

sintaxe: é o conjunto de símbolos e regras de formação que definem as palavras, designadas por *fórmulas*, que podem ser utilizadas para representar de forma precisa, concisa e sem ambiguidade a linguagem natural (ou parte dela);

semântica: é o conjunto de regras que associam um *significado* às fórmulas;

sistema dedutivo: é o conjunto de fórmulas, designadas por *axiomas*, e de regras, designadas por *regras de inferência*, utilizados na construção de argumentos.

Ao longo dos anos, foram definidos diversos sistemas lógicos. Nesta unidade curricular, estudaremos algumas noções básicas associadas ao **Cálculo Proposicional Clássico** e ao **Cálculo de Predicados Clássico**.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Na linguagem natural, podemos encontrar diversos tipos de frase – declarativas, exclamativas, interrogativas, imperativas. Na construção de um argumento, recorremos apenas a frases declarativas.

As frases podem ser simples ou compostas.

Uma **frase (declarativa) simples** tem, gramaticalmente falando, um sujeito e um predicado.

exemplo 1.1 [frases simples]:

Braga possui 181 874 habitantes no seu concelho.
O António gosta de Lógica.
Todo o número inteiro é par.

No Cálculo Proposicional, cada frase simples é encarada como um elemento indivisível, não se diferenciando partes da afirmação como o nome ou o verbo.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Representaremos as frases simples por $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$).

A estes símbolos chamamos **variáveis proposicionais**. O conjunto das variáveis proposicionais é denotado por $\mathcal{V}^{CP}$.

A partir de frases simples e recorrendo a expressões como "não", "e", "ou", "se... então", "... se e só se...", obtêm-se frases mais complexas, designadas por **frases compostas**.

exemplo 1.2 [frases compostas]:

[1]*Braga possui 181 874 habitantes no seu concelho e conta com mais de 2000 anos de história como cidade.*
[2] *Se o António gosta de Lógica, então é bom aluno a Tópicos de Matemática Discreta e a Lógica Computacional.*
[3] *Se todo o número inteiro é par, então 7 é divisível por 2.*

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

No Cálculo Proposicional, as frases compostas são representadas usando:

- as variáveis proposicionais;
- os símbolos $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados **conetivos proposicionais**, e designados, respetivamente, por **absurdo**, **negação**, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**;
- os símbolos auxiliares "(" e ")".

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Representemos por p_n e p_m duas frases declarativas ($n, m \in \mathbb{N}_0$).

$\neg p_n$

A frase "não p_n" designa-se por **negação de** p_n e é representada por $\neg p_n$.
A $\neg p_n$ também podemos associar as leituras "é falso p_n" e "não é verdade p_n".

$p_n \wedge p_m$

A frase "p_n e p_m" designa-se por **conjunção de** p_n **e** p_m e é representada por $p_n \wedge p_m$.

$p_n \vee p_m$

A frase "p_n ou p_m" designa-se por **disjunção de** p_n **e** p_m e é representada por $p_n \vee p_m$.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

$p_n \rightarrow p_m$

A frase "Se p_n, então p_m" designa-se por **implicação de p_n, p_m** e é representada por $p_n \rightarrow p_m$.

A $p_n \rightarrow p_m$ também podemos associar as leituras "p_n implica p_m", "p_n é suficiente para p_m", "p_m é necessário para p_n", "p_m se p_n", "p_m sempre que p_n", "p_n só se p_m" e "p_n somente se p_m".

A p_n chamamos **antecedente** ou **hipótese** da implicação e a p_m chamamos **consequente** ou **conclusão**.

$p_n \leftrightarrow p_m$

A frase "p_n se e só se p_m", que resulta da conjunção das implicações "Se p_n, então p_m" e "Se p_m, então p_n", designa-se por **equivalência de p_n e p_m** e é representada por $p_n \leftrightarrow p_m$.

A $p_n \leftrightarrow p_m$ também se associam as leituras "p_n é equivalente a p_m" e "p_n é necessário e suficiente para p_m".

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Ao representarmos frases compostas, podemos recorrer aos símbolos auxiliares "(" e ")", de modo a evitar ambiguidades.

exemplo 1.3

Consideremos as seguintes frases e as variáveis proposicionais que as representam:

p_0 : *Braga possui 181 819 habitantes no seu concelho.*
p_1 : *Braga conta com mais de 2000 anos de história como cidade.*
p_2 : *O António gosta de Lógica.*
p_3 : *O António é bom aluno a Tópicos de Matemática Discreta.*
p_4 : *O António é bom aluno a Lógica Computacional.*
p_5 : *Todo o número inteiro é par.*
p_6 : *7 é divisível por 2.*

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

As frases compostas referidas no exemplo 1.2 podem ser representadas, respetivamente, por:

[1] $p_0 \wedge p_1$ *ou* $(p_0 \wedge p_1)$
[2] $p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_4)$ *ou* $(p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_4))$
[3] $p_5 \rightarrow p_6$ *ou* $(p_5 \rightarrow p_6)$

Estipulados os símbolos que definem o **alfabeto** da linguagem do Cálculo Proposicional, podemos, agora, definir as **palavras** destas linguagem.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

definição 1.4

O conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das **fórmulas do Cálculo Proposicional** é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

(F_1) $\perp$ é uma fórmula;

(F_2) toda a variável proposicional é uma fórmula;

(F_3) se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula;

(F_4) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula;

(F_5) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula;

(F_6) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \to \psi)$ é uma fórmula;

(F_7) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula.

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

exemplo 1.5

[1] *A palavra* $((\neg p_0) \to (p_1 \wedge p_2))$ *é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que:*

i. Pela regra (F_2), *as variáveis proposicionais* p_0, p_1 *e* p_2 *são fórmulas;*

ii. Por i. e pela regra (F_3), $(\neg p_0)$ *é uma fórmula;*

iii. Por i. e pela regra (F_4), $(p_1 \wedge p_2)$ *é uma fórmula;*

iv. Por ii., iii. e pela regra (F_6), $((\neg p_0) \to (p_1 \wedge p_2))$ *é uma fórmula;*

[2] *As palavras* $\neg p_0 \wedge$, $\to p_0$, $(p_0 \vee p_1$ *não são fórmulas do Cálculo Proposicional.*

cálculo proposicional clássico [sintaxe]

Para que uma palavra seja considerada uma fórmula do Cálculo Proposicional, é necessário que os parêntesis ocorram de acordo com as regras que definem o conjunto de fórmulas.

No entanto, é habitual omitirmos os parêntesis extremos e os parêntesis à volta da negação.

exemplo 1.6:

A fórmula $(((\neg p_0) \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge (\neg p_0)))$ *pode ser representada pela palavra* $(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_0)$.

A palavra $\neg(p_0 \vee \neg p_1)$ *é uma representação da fórmula* $(\neg(p_0 \vee (\neg p_1)))$, *ao passo que* $\neg p_0 \vee \neg p_1$ *não o é.*

A fórmula $(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))$ *pode ser representada por* $p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)$ *mas não pode ser representada por* $p_0 \wedge p_1 \vee p_2$.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Semântica

A sintaxe do Cálculo Proposicional não nos permite atribuir qualquer significado às fórmulas. De facto, uma fórmula, por si só, não tem qualquer significado – este depende da interpretação associada aos símbolos.

exemplo 1.7:

Se p_0 *representar a afirmação "*$2 \times 7 = 14$*" e* p_1 *representar a afirmação "*$1 + 2 \times 7 = 15$*", então a fórmula* $(p_0 \to p_1)$ *representa a afirmação "Se* $2 \times 7 = 14$*, então* $1 + 2 \times 7 = 15$*", que é verdadeira.*

Por outro lado, se p_0 *representar a afirmação "*$2 \times 7 = 14$*" e* p_1 *representar a afirmação "*$1 + 2 \times 7 = 16$*", então a fórmula* $(p_0 \to p_1)$ *representa a afirmação "Se* $2 \times 7 = 14$*, então* $1 + 2 \times 7 = 16$*", que é falsa.*

A semântica do Cálculo Proposicional consiste na atribuição de **valores de verdade** às suas fórmulas.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Em lógica clássica, são considerados dois valores de verdade.

definição 1.8

Os valores lógicos (ou valores de verdade) do Cálculo Proposicional são **verdadeiro** (**V** ou **1**) e **falso** (**F** ou **0**).

Interessa-nos considerar frases declarativas sobre as quais se pode decidir acerca do seu valor lógico.

definição 1.9

Uma **proposição** é uma frase declarativa sobre a qual é possível dizer objetivamente se é verdadeira ou falsa (ainda que possamos não ser capazes de, no momento atual, determinar o seu valor lógico).

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.10

Consideremos as seguintes frases:

[1] *Lisboa é a capital de Portugal.*

[2] $2 + 3 = 6$.

[3] *Quando é que vamos almoçar?*

[4] *Toma um café.*

[5] *2+x=6.*

[6] *Todo o número maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

[7] *2 é um número par.*

cálculo proposicional clássico [semântica]

As frases 1, 2, 6 e 7 são proposições:

as afirmações 1 e 7 são verdadeiras, enquanto que a afirmação 2 é falsa;

a afirmação 6 é conhecida como a *Conjetura de Goldbach* – até ao momento, não existe uma prova da sua veracidade ou da sua falsidade, mas será possível associar-lhe um e um só dos dois valores lógicos.

As restantes frases não são proposições:

as frases 3 e 4 não são do tipo declarativo e, portanto, não é possível associar-lhes um dos valores lógicos;

a frase 5 não é nem verdadeira nem falsa, visto que o valor de x é desconhecido.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Uma proposição diz-se uma **proposição simples** se se tratar de uma frase declarativa simples. Diz-se uma **proposição composta** se for uma frase declarativa composta.

A veracidade de uma frase simples pode depender do contexto em que esta é considerada.

Por exemplo, a afirmação "Este livro tem uma capa vermelha." pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do livro em causa.

Também a decisão sobre o valor lógico de uma frase composta pode depender do contexto em que se insere. No entanto, para saber se uma frase composta é verdadeira ou falsa, basta saber o que acontece com as frases simples que a compõem.

A afirmação "Este livro tem uma capa vermelha e está escrito em português." é verdadeira para alguns livros e falsa para outros. Porém, é verdadeira sempre que ambas as frases simples que a compõem forem verdadeiras.

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.11

Consideremos as seguintes proposições:

[1] *2 é um número par.*

[2] *Todo o número primo é ímpar.*

[3] *2 é um número par e todo o número primo é ímpar.*

A proposição 1 é uma proposição simples que assume o valor lógico verdadeiro, enquanto que a proposição 2 é uma proposição simples que assume o valor lógico falso.

A proposição 3 é composta: obtém-se a partir da conjunção de duas proposições simples. Como uma das proposições simples que a compõem é falsa, assume também o valor lógico falso.

cálculo proposicional clássico [semântica]

No Cálculo Proposicional, não se pretende determinar se uma frase simples é ou não verdadeira. O objetivo é estudar a veracidade das proposições compostas a partir da verdade ou falsidade das frases que as compõem e do significado dos conetivos.

Estudaremos de seguida o significado associado a cada um dos conetivos proposicionais referidos anteriormente. Esse mesmo significado pode ser expresso de forma clara através de tabelas designadas por **tabelas de verdade**.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dada uma proposição arbitrária φ, a sua negação tem um valor lógico contrário ao de φ. A relação entre o valor lógico de φ e o valor lógico de $\neg\varphi$ pode ser representado através da seguinte tabela de verdade:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

exemplo 1.12

A proposição "Todo o número primo é ímpar." é falsa. A sua negação, "Nem todo o número primo é ímpar.", é verdadeira: basta considerar o número primo 2.

A proposição "24 é divisível por 8." é verdadeira. A sua negação, "24 não é divisível por 8." é falsa, uma vez que $24 = 8 \times 3$.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dadas duas proposições φ e ψ, a conjunção de φ e ψ é verdadeira somente se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. A tabela de verdade associada ao conetivo $\wedge$ é a seguinte:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

exemplo 1.13

As proposições "24 é divisível por 8." e "56 é divisível por 8." são verdadeiras. Por outro lado, a proposição "28 é divisível por 8." é falsa.

A proposição "24 e 56 são divisíveis por 8.", que resulta da conjunção das duas primeiras proposições atrás referidas, é verdadeira. A proposição "28 e 56 são divisíveis por 8." é falsa.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dadas duas proposições φ e ψ, a disjunção de φ e ψ é verdadeira se pelo menos umas das proposições que a compõem é verdadeira. O significado do conetivo $\vee$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

exemplo 1.14

A proposição "24 não é divisível por 8 ou 5 não é um número primo." é falsa pois é a disjunção de duas proposições falsas. A proposição "24 não é divisível por 8 ou 100 não é divisível por 4." é verdadeira, pois uma das proposições que a compõem é verdadeira.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \to \psi$ é verdadeira se ψ é verdadeira sempre que φ é verdadeira. O significado do conetivo $\to$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

exemplo 1.15

Consideremos as seguintes proposições:

[1] *Se* $3 > 1$, *então* $2 > 1$.

[2] *Se* $3 > 1$, *então* $1 > 2$.

[3] *Se* $1 > 3$, *então* $2 > 1$.

[4] *Se* $1 > 3$, *então* $1 > 2$.

A proposição 2 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se ψ e φ são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas. O significado do conetivo $\leftrightarrow$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

exemplo 1.16

Consideremos as seguintes proposições:

[1] $3 > 1$ *se e só se* $2 > 1$.

[2] $3 > 1$ *é equivalente a* $1 > 2$.

[3] $1 > 3$ *é necessário e suficiente para* $1 > 2$.

A proposição 2 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Conhecidos os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula, esta tem associado um e um só **valor lógico**. Na análise de qual será o valor lógico de uma fórmula, relacionado-o com os valores lógicos das variáveis que nela ocorrem, é útil o recurso a tabelas de verdade.

exemplo 1.17

Queremos estudar o valor lógico da fórmula $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$.

Esta fórmula tem duas variáveis, p_0 *e* p_1*, pelo que se torna necessário considerar todas as combinações possíveis dos valores lógicos de* p_0 *e* p_1.

Como cada variável pode assumir um de dois valores lógicos (0 ou 1), existem 2^2 *combinações possíveis. Logo, a tabela de verdade terá 4 linhas.*

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

cálculo proposicional clássico [semântica]

Para cada caso, determinamos primeiro o valor lógico de $\neg p_0$ e de $p_1 \vee p_0$, para podermos, depois, determinar o valor lógico de $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	
1	0	0	1	
0	1	1	1	
0	0	1	0	

Da análise da seguinte tabela de verdade,

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

podemos concluir que a fórmula $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$ é verdadeira apenas quando p_0 é falsa e p_1 é verdadeira.

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.18

Estudemos, agora, o valor lógico da fórmula $\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$.

Esta fórmula tem três variáveis, p_0, p_1 *e* p_2, *pelo que existem* 2^3 *combinações dos valores lógicos de* p_0, p_1 *e* p_2.

Logo, a tabela de verdade terá 8 linhas:

p_0	p_1	p_2	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$	$\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

Analisando a tabela, podemos concluir que a fórmula $\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$ *é falsa apenas quando as três variáveis proposicionais,* p_0, p_1 *e* p_2, *são falsas.*

cálculo proposicional clássico [semântica]

observação 1.19

Se φ é uma fórmula com n variáveis proposicionais, então existem 2^n combinações possíveis para os valores lógicos das variáveis que ocorrem em φ.
Assim, uma tabela de verdade de φ terá 2^n linhas.

Existem fórmulas que assumem sempre o valor lógico verdadeiro qualquer que seja a combinação dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

cálculo proposicional clássico [semântica]

definição 1.20

Uma **tautologia** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

exemplo 1.21

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$*, as fórmulas* $p_n \vee \neg p_n$ *e* $p_n \to p_n$ *são tautologias.*

p_n	$\neg p_n$	$p_n \vee \neg p_n$
1	0	1
0	1	1

p_n	$p_n \to p_n$
1	1
0	1

cálculo proposicional clássico [semântica]

No resultado que se segue, listam-se tautologias que são utilizadas com frequência.

proposição 1.22

Dadas as fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, as seguintes fórmulas são tautologias:

[Modus Ponens]
$(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$

[Modus Tollens]
$((\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi) \to \neg\varphi$

[transitividade]
$((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)$

cálculo proposicional clássico [semântica]

demonstração Verifiquemos se a fórmula que expressa a transitividade é uma tautologia.

Construindo a tabela de verdade de $\tau : ((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)$, podemos concluir que esta fórmula é uma tautologia se o seu valor lógico for sempre verdadeiro.

φ	ψ	σ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \sigma$	$(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \sigma)$	$\varphi \to \sigma$	τ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

De modo análogo, verifica-se que as outras duas fórmulas que expressam o Modus Tollens e o Modus Ponens são tautologias (exercício).

cálculo proposicional clássico [semântica]

A negação de uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso.

definição 1.23

Uma **contradição** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

exemplo 1.24

As fórmulas $p_n \wedge \neg p_n$ *e* $p_n \leftrightarrow \neg p_n$ *são contradições para todo o* $n \in \mathbb{N}_0$.

p_n	$\neg p_n$	$p_n \wedge \neg p_n$
1	0	0
0	1	0

p_n	$\neg p_n$	$p_n \leftrightarrow \neg p_n$
1	0	0
0	1	0

cálculo proposicional clássico [semântica]

Existem fórmulas que, embora distintas, assumem o mesmo valor lógico para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

Se φ e ψ foram duas fórmulas nessas condições, facilmente concluímos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

definição 1.25

Sejam φ e ψ duas fórmulas proposicionais. Dizemos que φ e ψ são **logicamente equivalentes** se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso, escrevemos $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.26

As fórmulas $\varphi : (p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \to \neg p_1$ *e* $\psi : \neg(p_0 \wedge p_1)$ *são logicamente equivalentes, pois*

$$\varphi \leftrightarrow \psi : ((p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \to \neg p_1) \leftrightarrow (\neg(p_0 \wedge p_1))$$

é uma tautologia.

p_0	p_1	$p_1 \vee p_0$	$p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$	$\neg p_1$	φ	$p_0 \wedge p_1$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1

cálculo proposicional clássico [semântica]

Em seguida, listamos algumas das equivalências lógicas mais conhecidas e frequentemente utilizadas.

proposição 1.27

Dadas as fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

[associatividade]

$((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma))$
$((\varphi \vee \psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee (\psi \vee \sigma))$

[comutatividade]

$((\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi))$
$((\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi))$

cálculo proposicional clássico [semântica]

[idempotência]

$(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$
$(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

[elemento neutro]

$((\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$
$((\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$

[elemento absorvente]

$((\varphi \wedge (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$
$((\varphi \vee (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \vee \neg\psi)$

[leis de De Morgan]

$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

cálculo proposicional clássico [semântica]

[distributividade]

$$((\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma))$$
$$((\varphi \vee (\psi \wedge \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma))$$

[dupla negação]

$$\neg(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$$

[lei do contrarrecíproco]

$$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

$$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$$

cálculo proposicional clássico [semântica]

demonstração Comecemos por mostrar a equivalência lógica da dupla negação.

Construindo a tabela de verdade de $\neg(\neg\varphi) \leftrightarrow \varphi$, concluímos que esta fórmula é uma tautologia:

φ	$\neg\varphi$	$\neg(\neg\varphi)$	$\neg(\neg\varphi) \leftrightarrow \varphi$
1	0	1	1
0	1	0	1

Logo, as fórmulas $\neg(\neg\varphi)$ e φ são logicamente equivalentes.

cálculo proposicional clássico [semântica]

Verifiquemos, agora, a equivalência lógica

$$((\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)).$$

(as restantes provas ficam como exercício)

À semelhança do que foi feito no caso da dupla negação, construindo a tabela de verdade de $\tau : ((\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma))$, concluímos que esta fórmula é uma tautologia:

φ	ψ	σ	$\psi \vee \sigma$	$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \wedge \sigma$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$	τ
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.28

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos mostrar que a fórmula

$$(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1)),$$

é logicamente equivalente à fórmula p_0.

De facto,

$$\begin{aligned} (p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1)) &\Leftrightarrow p_0 \wedge (p_1 \vee \neg p_1) && [\textit{distributividade}] \\ &\Leftrightarrow p_0 && [\textit{elemento neutro}] \end{aligned}$$

Poderíamos, também, mostrar que a fórmula $(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))$ *é logicamente equivalente a* p_0 *provando que a fórmula* $((p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))) \leftrightarrow p_0$ *é uma tautologia.*

cálculo proposicional clássico [semântica]

exemplo 1.29

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos provar que as fórmulas $p_0 \to (p_1 \to p_2)$ *e* $\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$ *são logicamente equivalentes.*

Pela lei do contrarrecíproco,

$$(p_1 \to p_2) \Leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1),$$

pelo que

$$(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \Leftrightarrow (p_0 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)).$$

De novo pela lei do contrarrecíproco, temos

$$(p_0 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0).$$

Assim,

$$(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0).$$

cálculo de predicados

Na secção anterior, referimos que frases como x é um inteiro par ou $x + y = 2$ não são proposições, visto que os seus valores lógicos dependem dos valores de x e de y.

No entanto, é frequente encontrarmos, no estudo de qualquer teoria matemática, frases que fazem referência a objetos genéricos representados por letras, designadas por **variáveis**.

Frases como esta são objeto de estudo de um ramo da lógica denominado Cálculo de Predicados.

Nesta Unidade Curricular, não pretendemos aprofundar o estudo de Cálculo de Predicados, mas iremos estudar algumas noções elementares que permitem a familiarização com o simbolismo, o significado, o uso e a negação de frases quantificadas.

cálculo de predicados

Em frases que envolvam variáveis, está implícito um domínio de discurso, designado por **universo** ou **domínio de variação** das variáveis.

exemplo 1.30

Na frase x é um inteiro par, a variável x refere-se a um inteiro, pelo que o universo de x é o conjunto $\mathbb{Z}$.

A frase x é um inteiro par não é uma proposição. No entanto, se substituirmos x por valores do seu universo, obtemos frases às quais já é possível associar um valor de verdade. Por exemplo, 2 é um inteiro par e 3 é um inteiro par são proposições que assumem o valor lógico verdadeiro e falso, respetivamente.

definição 1.31

Um **predicado nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$, com $n \in \mathbb{N}$, é uma frase declarativa que faz referência às variáveis $x_1, \ldots, x_n$ cujo valor lógico depende da substituição destas variáveis por valores do seu domínio de variação, tornando-se numa proposição sempre que as variáveis são substituídas por valores do seu universo.

cálculo de predicados

Representamos um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ por uma letra minúscula p, q, r,... (eventualmente com índices) seguida das variáveis que ocorrem nesse predicado colocadas entre parêntesis e separadas por vírgulas.

exemplo 1.32

Os predicados x é um inteiro par e x é maior do que y podem ser representados, respetivamente, por $p(x)$ e por $q(x, y)$.

Dado um predicado $p(x_1, \ldots, x_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, se, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_i é um valor do domínio de variação de x_i, então representamos por $p(a_1, \ldots, a_n)$ a substituição das variáveis de p por esses valores concretos.

exemplo 1.33

Considerando os predicados do exemplo anterior, $p(8)$ representa a proposição 8 é um inteiro par e $q(\sqrt{2}, 3)$ representa a proposição $\sqrt{2}$ é maior do que 3.

cálculo de predicados

Os conetivos lógicos que definimos na sintaxe do Cálculo Proposicional Clássico estendem-se ao Cálculo de Predicados de um modo natural.

Assim, se $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$ são predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então

$$\neg p(x_1, \ldots, x_n), \qquad p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n),$$

$$p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(x_1, \ldots, x_n), \qquad p(x_1, \ldots, x_n) \to q(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{e} \qquad p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \ldots, x_n)$$

são também predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

cálculo de predicados

exemplo 1.34

Sejam $p(x)$ o predicado x é um inteiro par e $q(x)$ o predicado x é um número primo. Então, $p(x) \wedge q(x)$ representa o predicado x é um inteiro par e é um número primo.

A substituição das variáveis de um predicado por valores concretos dos seus domínios de variação não é a única forma de obter uma proposição a partir de um predicado. Também o podemos fazer recorrendo aos chamados **quantificadores**.

definição 1.35

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, a frases tais como "Para todo o x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", "Qualquer que seja o x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", "Para cada x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.", dá-se a designação de **quantificação universal**. Estas frases podem ser representadas por $\forall_{x_i}\ p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

cálculo de predicados

Ao símbolo $\forall$ chamamos **quantificador universal** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "todo", "para todo", "qualquer que seja" ou "para cada".

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\forall_x\ p(x)$ é uma proposição.

A proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ for verdadeira para **todo** o elemento a do domínio de variação de x, também designado **universo de quantificação de** x.

exemplo 1.36

Se $p(x)$ representar o predicado $x^2 \geq 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira, uma vez que a afirmação em causa é verdadeira para qualquer real.

cálculo de predicados

Se existir (pelo menos) um elemento b do domínio de variação de x para o qual $p(b)$ é uma proposição falsa, a proposição $\forall_x \; p(x)$ é falsa.

exemplo 1.37

Se $q(x)$ representar o predicado $x^2 > 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x \; q(x)$ é falsa, pois 0 é um número real e $q(0)$ é falsa.

definição 1.38

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Se $p(x_1, \dots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \dots, x_n$, frases tais como "Existe um x_i tal que $p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$.", "Para algum x_i, $p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$." são designadas de **quantificação existencial**.

cálculo de predicados

Estas frases podem ser representadas por $\exists_{x_i}\ p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Ao símbolo $\exists$ chamamos **quantificador existencial** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: “existe” ou “para algum”.

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\exists_x\ p(x)$ é uma proposição.

A proposição $\exists_x p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ for verdadeira para **algum** elemento a do universo de quantificação de x.

Por outro lado, se não existir qualquer elemento b do universo de quantificação de x para o qual $p(b)$ seja verdadeira, a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa.

cálculo de predicados

exemplo 1.39

Se $p(x)$ representar o predicado $x + 3 = 2$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números inteiros, a proposição $\exists_x \; p(x)$ é verdadeira, pois $-1 \in \mathbb{Z}$ e $p(-1)$ é verdadeira.

Por outro lado, se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números naturais, a proposição $\exists_x \; p(x)$ é falsa, uma vez que a equação não tem solução em $\mathbb{N}$.

Se o universo de uma dada quantificação for um certo conjunto U, podemos escrever $\forall_{x \in U} \; p(x)$ e $\exists_{x \in U} \; p(x)$, em vez de $\forall_x \; p(x)$ e $\exists_x \; p(x)$, respetivamente.

cálculo de predicados

exemplo 1.40

A frase Existe um natural x tal que $x+3=2$ *pode ser representada por* $\exists_{x\in\mathbb{N}}\ x+3=2$.

Relativamente ao predicado $x+3=2$*, prova-se que o número inteiro* -1 *é, de facto, o único inteiro a tal que* $p(a)$ *é uma proposição verdadeira.*

definição 1.41

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a existência de um único objeto que satisfaça o predicado $p(x)$ pode ser representada pela expressão $\exists^1_x\ p(x)$, à qual é usual associar uma das leituras "Existe um e um só x tal que $p(x)$" ou "Existe um único x tal que $p(x)$".

exemplo 1.42

A proposição $\exists^1_{x\in\mathbb{Z}}\ x+3=2$ *é verdadeira, ao passo que* $\exists^1_{x\in\mathbb{Z}}\ x^2-1=0$ *é falsa (tanto* 1 *como* -1 *satisfazem o predicado* $x^2-1=0$*, contradizendo a unicidade de um objeto que o satisfaça).*

cálculo de predicados

Os quantificadores universal e existencial podem ser combinados para quantificar uma mesma condição.

exemplo 1.43

Sejam $p(x, y)$ *o predicado* $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ *e* $q(x, y)$ *o predicado* $x + y = 0$.

Dados dois números reais quaisquer a *e* b, *sabemos que* $p(a, b)$ *é verdadeira. Logo, a proposição* $\forall_{x\in\mathbb{R}}\,\forall_{y\in\mathbb{R}}\ p(x, y)$ *é verdadeira.*

Todo o número inteiro admite um simétrico em $\mathbb{Z}$, *pelo que a proposição* $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\,\exists_{y\in\mathbb{Z}}\ q(x, y)$ *é verdadeira.*

No entanto, a proposição $\forall_{x\in\mathbb{N}_0}\,\exists_{y\in\mathbb{N}_0}\ q(x, y)$ *é falsa.*

cálculo de predicados

exemplo 1.44

Exprimamos cada uma das seguintes proposições como quantificações:

[a] *A equação* $x^3 = 27$ *tem solução no conjunto dos números naturais.*

[b] *Todo o número real admite um inverso para a multiplicação.*

[c] *Todo o inteiro maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

[d] *No conjunto dos números reais, existe um elemento absorvente para a multiplicação e este elemento é único.*

cálculo de predicados

[a]: $\exists_{x\in\mathbb{N}}\ x^3 = 27$

[b]: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ xy = 1$

[c]: $\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ (n \geq 4 \rightarrow (\exists_{m,p\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\ (n = m + p \wedge \forall_{k\in\mathbb{N}}\ ((k|m \rightarrow (k = 1 \vee k = m)) \wedge (k|p \rightarrow (k = 1 \vee k = p))))))$

[d]: $\exists^1_{y\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ xy = yx = 0$

cálculo de predicados

Quando temos um predicado em duas ou mais variáveis, a valoração da proposição obtida pela quantificação de todas as variáveis pode depender da ordem dessas quantificações.

exemplo 1.45

Consideremos o predicado $x + y = 5$.

A proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\, \exists_{y\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$ *é verdadeira.*

A proposição $\exists_{y\in\mathbb{Z}}\, \forall_{x\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$ *é falsa.*

De notar que, quando as quantificações de todas as variáveis é feita com o mesmo quantificador, a ordem das quantificações não afeta a valoração da proposição e, como tal, é possível simplificar a escrita, usando apenas um quantificador.

cálculo de predicados

exemplo 1.46

A proposição (verdadeira) $\exists_{x \in \mathbb{Z}} \exists_{y \in \mathbb{Z}}\ x + y = 5$ *pode ser escrita como* $\exists_{x,y \in \mathbb{Z}}\ x + y = 5$.

A proposição (falsa) $\forall_{x \in \mathbb{Z}} \forall_{y \in \mathbb{Z}}\ x + y = 5$ *pode ser escrita como* $\forall_{x,y \in \mathbb{Z}}\ x + y = 5$.

Se a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa, então não existe qualquer valor a do domínio de quantificação de x para o qual $p(a)$ seja verdadeira.

Por outras palavras, $p(a)$ é falsa para todo o elemento a do domínio de quantificação de x.

cálculo de predicados

Equivalentemente, podemos afirmar que $\neg p(a)$ é verdadeira para todo o elemento a do domínio de quantificação de x, isto é, a proposição $\forall_x\ (\neg p(x))$ é verdadeira.

Logo, $\neg(\exists_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\forall_x\ (\neg p(x))$.

Do mesmo modo, concluímos que $\neg(\forall_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\exists_x\ (\neg p(x))$.

cálculo de predicados

exemplo 1.47

Consideremos a proposição 1000000 *é o maior número natural.*

Usando linguagem simbólica, podemos reescrever a afirmação anterior como $\forall_{x\in\mathbb{N}} \quad 1000000 > x$.

A negação da proposição é 1000000 *não é o maior número natural. Esta última proposição significa que existe pelo menos um natural que não é menor que* 1000000.

Podemos, assim, reescrever a negação da proposição inicial como $\exists_{x\in\mathbb{N}} \quad x \not< 1000000$ *ou, equivalentemente, como* $\exists_{x\in\mathbb{N}} \quad x \geq 1000000$.

alguns métodos de prova

definição 1.48

A prova (demonstração) de uma proposição matemática é um argumento logicamente válido (construído com base em princípios - regras e axiomas) que estabelece a veracidade da proposição.

Consideremos a proposição "$2 = 1$" e a argumentação que se segue, que lhe conferiria o valor lógico verdadeiro.

exemplo 1.49

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} a = b \quad & \Rightarrow \quad aa = ab \\ & \Rightarrow \quad a^2 = ab \\ & \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \\ & \Rightarrow \quad (a+b)(a-b) = b(a-b) \\ & \Rightarrow \quad a + b = b \\ & \Rightarrow \quad b + b = b \\ & \Rightarrow \quad 2b = b \\ & \Rightarrow \quad 2 = 1 \end{aligned}$$

alguns métodos de prova

Sabemos que a proposição "$2 = 1$" é falsa, pelo que o argumento apresentado não pode ser válido.

Qual é a falácia do argumento?

Uma vez que estamos a assumir que $a = b$, facilmente concluímos que $a - b = 0$, pelo que não podemos aplicar a lei do corte no quinto passo da argumentação.

O argumento apresentado é, pois, incorreto.

alguns métodos de prova

A prova de uma proposição pode ser **direta** ou **indireta**.

Numa prova direta de uma proposição procura-se estabelecer a veracidade da mesma a partir de axiomas ou factos conhecidos e sem assumir pressupostos adicionais.

Porém, em certos casos, a prova direta não é simples e pode mesmo não ser possível. Nestas situações pode-se optar por um método de prova indireta. Por exemplo, pode-se provar a veracidade de uma proposição mostrando que esta não pode ser falsa.

alguns métodos de prova

prova direta de uma conjunção

Na prova direta de $p \wedge q$, procura-se uma prova de p e uma prova de q.

exemplo 1.51

proposição: *$x^2 + 2x + 2 = 0$ não tem soluções reais e as raízes do polinómio $x^2 - 1$ são -1 e 1.*

demonstração: *Usando a fórmula resolvente para equações polinomiais de 2.º grau, temos que*

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Portanto, $x^2 + 2x + 2 = 0$ não tem soluções reais.
Consideremos agora a equação $x^2 - 1 = 0$. Atendendo a que

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1,$$

podemos afirmar que as raízes do polinómio $x^2 - 1$ são -1 e 1.

alguns métodos de prova

prova direta de uma disjunção

Na prova direta de $p \vee q$ basta fazer prova de uma das proposições p ou q.

exemplo 1.52

proposição: *A soma de dois números naturais consecutivos é ímpar ou o seu produto é maior do que 3.*

demonstração: *Sejam n e m dois números naturais consecutivos, com $n > m$. Então, $n = m + 1$, pelo que*

$$n + m = (m + 1) + m = 2m + 1.$$

Assim, $n + m$ é um número ímpar. Logo, a soma de quaisquer dois números naturais consecutivos é ímpar e, portanto, a proposição é verdadeira.

alguns métodos de prova

prova direta de uma implicação

Para demonstrar diretamente uma afirmação do tipo $p \to q$, assume-se a veracidade de p e constrói-se uma prova de q.

exemplo 1.53

proposição: *Todo o inteiro ímpar se escreve como a diferença de dois quadrados perfeitos.*

demonstração: *Pretendemos mostrar que, se $n \in \mathbb{Z}$ é um número ímpar, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $n = a^2 - b^2$.*
Suponhamos, então, que $n \in \mathbb{Z}$ é um número ímpar.
Então, existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.
Ora,

$$n = 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k + 1)^2 - k^2,$$

com $k + 1$ e k inteiros. Logo, n escreve-se como a diferença de dois quadrados perfeitos. $\square$

alguns métodos de prova

Atendendo à equivalência lógica $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$, a prova de uma afirmação do tipo $p \leftrightarrow q$ passa pela prova de duas implicações.

prova direta de uma equivalência

Na prova direta de $p \leftrightarrow q$, constrói-se uma prova de $p \rightarrow q$ e uma prova de $q \rightarrow p$.

alguns métodos de prova

prova direta de uma negação

Na prova de $\neg p$, assume-se p e procura-se uma contradição.

exemplo 1.50

proposição: *Não existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $2n + 16m = 13$.*

demonstração: *Suponhamos que existem números naturais n e m tais que $2n + 16m = 13$. Então,*

$$13 = 2n + 16m = 2(n + 8m),$$

pelo que 13 é divisível por 2, o que contradiz o facto de 13 ser um número ímpar. Assim, não existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $2n + 16m = 13$.

alguns métodos de prova

prova indireta por contradição ou redução ao absurdo

Para provar uma afirmação p, assume-se $\neg p$ e procura-se uma contradição.

No exemplo que se segue, apresenta-se uma demonstação do resultado enunciado recorrendo a uma prova por redução ao absurdo.

exemplo 1.54

proposição: *Existe uma infinidade de números primos.*

demonstração: *No sentido de provarmos por contradição este resultado, admitamos que existe um número finito de primos, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Considere-se, agora, o número*

$$x = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

É óbvio que o número x não é divisível por nenhum dos números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (pois o resto da divisão é sempre 1).

alguns métodos de prova indireta

Logo, x é um número primo, o que contradiz a hipótese inicial de que existem apenas n números primos.

Então a hipótese inicial está errada e, portanto, existe um número infinito de primos. $\square$

Muitas proposições matemáticas são enunciadas na forma de uma implicação $p \to q$. Para além destas, existem outras proposições que, embora não sendo implicações, a sua prova pode passar pela demonstração de uma afirmação do tipo $p \to q$.

Por estes motivos, é conveniente conhecer e estudar diversos métodos de prova indireta que existem para uma implicação.

alguns métodos de prova

A prova de $p \to q$ pode ser feita por contradição. Uma vez que $p \to q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \wedge \neg q)$, temos que $\neg(p \to q)$ é logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$.

prova de uma implicação por redução ao absurdo

Na prova de $p \to q$, assume-se $p \wedge \neg q$ e procura-se uma contradição.

exemplo 1.55

proposição: *Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.*

demonstração: *Iremos demonstrar este resultado por redução ao absurdo. Nesse sentido, supomos que $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x^2 = 2$ e $x \in \mathbb{Q}$, e procuramos uma contradição.*
Ora, se $x^2 = 2$ temos que

$$x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}.$$

Suponhamos que $x = \sqrt{2}$ (o outro caso é análogo).

alguns métodos de prova

Então, $\sqrt{2} = x \in \mathbb{Q}$*, pelo que existem* $a, b \in \mathbb{Z}$ *tais que* $b \neq 0$, $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = 1$ *e*

$$x = \frac{a}{b}.$$

Assim,

$$2 = x^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

pelo que $a^2 = 2b^2$.
Logo, a^2 *é um número par e, consequentemente,* a *também o é. Portanto, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $a = 2k$.
Assim, $(2k)^2 = 2b^2$ *ou, equivalentemente,*

$$4k^2 = 2b^2,$$

pelo que $b^2 = 2k^2$.
Então, b^2 *é par e* b *também o é.*
Como a *e* b *são pares, 2 é divisor de ambos os números, contrariando o facto de* $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = 1$. $\square$

alguns métodos de prova

Atendendo a que as fórmulas $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$ são logicamente equivalentes, a demonstração de um resultado do primeiro tipo pode ser feita, indiretamente, apresentando uma prova de $\neg q \to \neg p$.

prova de uma implicação por contraposição ou por contrarrecíproco

Para demonstrar uma afirmação do tipo $p \to q$, assume-se $\neg q$ e encontra-se uma prova de $\neg p$.

alguns métodos de prova

exemplo 1.56

proposição: *Se x é um natural tal que x^2 é ímpar, então x é ímpar.*

demonstração: *Iremos demonstrar este resultado por contraposição. Nesse sentido, suponhamos que x não é ímpar, ou seja, x é par.*
Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x = 2k,$$

pelo que

$$x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Logo, x^2 é par. $\square$

alguns métodos de prova

Como já referimos anteriormente, a prova de uma conjunção ou de uma disjunção pode também ser feita de um modo indireto.

Uma vez que ambas as fórmulas $\neg p \to q$ e $\neg q \to p$ são logicamente equivalentes a $p \vee q$, a prova da disjunção de p e q pode passar pela prova de $\neg p \to q$ ou de $\neg q \to p$.

prova indireta de uma disjunção

Na prova de $p \vee q$, assume-se $\neg p$ e procura-se uma prova de q ou, equivalentemente, assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de p.

alguns métodos de prova

exemplo 1.57

proposição: *Dados dois números reais x e y tais que $xy = 0$, temos $x = 0$ ou $y = 0$.*

demonstração: *Pretendemos mostrar que $x = 0$ ou $y = 0$, assumindo que $x, y \in \mathbb{R}$ e $xy = 0$. Iremos demonstrar esta disjunção recorrendo a uma prova indireta. Nesse sentido, começamos por supor que $x \neq 0$ e procuramos concluir que $y = 0$. Sendo x um número real não nulo, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. Logo,*

$$xy = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}.0 \Leftrightarrow (\frac{1}{x}x)y = 0 \Leftrightarrow 1.y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

□

alguns métodos de prova

prova por casos

A prova de uma afirmação do tipo $(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \rightarrow q$ consiste em procurar uma prova para cada uma das implicações $p_1 \rightarrow q$, ..., $p_n \rightarrow q$. A uma prova deste tipo dá-se o nome de **prova por casos**.

exemplo 1.58

proposição: *Se a e b são números reais tais que $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$.*

demonstração: *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a < b$. Pretendemos mostrar que $a^2 < b^2$. Uma vez que $0 \leq a$, a prova será feita considerando dois casos: $a > 0$ e $a = 0$.*

[i] Se $a > 0$, então $a < b$ implica que

$$a \times a < a \times b \text{ ou, equivalentemente, } a^2 < ab.$$

alguns métodos de prova

Como $b > 0$*, também* $a < b$ *implica que*

$$a \times b < b \times b \text{ ou, equivalentemente, } ab < b^2.$$

Logo, $a^2 < ab < b^2$.

[ii] Se $a = 0$*, então* $a^2 = 0^2 = 0$ *e* $ab = 0 \times b = 0$.

Como $b > 0$*, de* $a < b$ *concluímos que*

$$a \times b < b \times b \text{ ou, equivalentemente, } ab < b^2.$$

Assim, $a^2 = 0 = ab < b^2$. $\square$

alguns métodos de prova

prova de uma proposição com quantificador universal

Na prova direta de uma proposição do tipo "$\forall_x\ p(x)$", admitimos que a variável a representa um elemento arbitrário do universo de quantificação U da variável x e mostramos que $p(a)$ é verdadeira.

No caso em que U é um conjunto finito, podemos optar por uma **prova por exaustão**, testando individualmente, para cada $a \in U$, se $p(a)$ é verdadeira.

alguns métodos de prova

exemplo 1.59

proposição: *Dado um número natural n, $n^2 + n$ é par.*

demonstração: *Pretendemos mostrar que $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n^2 + n$ é par. Admitamos que a representa um valor arbitrário em $\mathbb{N}$ e procuremos mostrar que $a^2 + a$ é par.*

Se a for par, então a^2 é par. Como a soma de dois números pares é ainda um número par, $a^2 + a$ é par.

Por outro lado, se a for ímpar, então a^2 é ímpar. Ora, a soma de dois números ímpares é um número par, pelo que $a^2 + a$ é par. $\square$

alguns métodos de prova

prova de uma proposição com quantificador existencial

Na prova direta de uma proposição do tipo "$\exists_x\ p(x)$", é necessário exibir um elemento a do universo de quantificação U da variável x tal que $p(a)$ seja verdadeira.

Este tipo de prova diz-se uma **prova construtiva**.

alguns métodos de prova

exemplo 1.60

proposição: *A equação* $x^5 - x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + 2x - 2 = 0$ *admite uma solução inteira.*

demonstração: *Pretendemos mostrar que* $\exists_{x\in\mathbb{Z}}\ x^5 - x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + 2x - 2 = 0$.

Consideremos $a = 1 \in \mathbb{Z}$. *Então,* $a^5 - a^4 - 2\sqrt{2}a^3 + 2\sqrt{2}a^2 + 2a - 2 = 1 - 1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 - 2 = 0$, *pelo que 1 é solução da equação em causa.* $\square$

Em certos casos, a prova construtiva não é simples ou não é possível, podendo-se optar por uma prova indireta por contradição. Nesta situação, a prova diz-se **não construtiva**.

alguns métodos de prova

prova de existência e unicidade

A prova direta de uma proposição do tipo "$\exists^1_x \; p(x)$" pode ser dividida em duas partes:

[prova de existência] prova-se que existe, pelo menos, um elemento a do universo de quantificação de x tal que $p(a)$ é verdade;

[prova de unicidade] supõe-se que a e b são dois elementos do universo de quantificação de x tais que $p(a)$ e $p(b)$ são verdadeiras e mostra-se que $a = b$.

alguns métodos de prova

exemplo 1.61

proposição: *Existe um elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{R}$ e esse elemento é único.*

demonstração: *Pretendemos mostrar que $\exists^1_{u\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ xu = ux = x$.*

[prova de existência] *Consideremos $u = 1 \in \mathbb{R}$. Pretendemos mostrar que $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ xu = ux = x$. Ora, dado $x \in \mathbb{R}$,*

$$xu = x \times 1 = x = 1 \times x = ux.$$

alguns métodos de prova

Logo, $u = 1$ é elemento neutro para a multiplicação.

[prova de unicidade] Suponhamos agora que $u' \in \mathbb{R}$ é elemento neutro para a multiplicação. Então,

$$1 = 1 \times u'.$$

Por outro lado, 1 é elemento neutro para a multiplicação e, portanto,

$$u' = 1 \times u'.$$

Logo, $u' = 1$. $\square$

alguns métodos de prova

prova de falsidade de uma quantificação universal por contraexemplo

A prova de falsidade de uma proposição do tipo "$\forall_x \; p(x)$" passa por mostrar que existe um elemento a do universo de quantificação tal que $p(a)$ é falsa.

Neste caso, diz-se que a é um **contraexemplo** para a proposição "$\forall_x \; p(x)$".

exemplo 1.62

proposição: Todo o número real admite inverso para a multiplicação.

refutação da proposição: É afirmado que $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}} \; xy = 1$. *Consideremos* $a = 0 \in \mathbb{R}$ *e mostremos que a proposição* "$\exists_{y\in\mathbb{R}} \; ay = 1$" *é falsa.*
Temos, pois, de mostrar que "$\forall_{y\in\mathbb{R}} \; ay \neq 1$" *é verdadeira.*
Ora, dado $y \in \mathbb{R}$,

$$ay = 0 \times y = 0 \neq 1.$$

Assim, 0 é um contraexemplo para a proposição considerada. □