

問題 1

電荷 $-e$ ($e > 0$)、質量 m のひとつの電子が、図 1 の(a)(b)のような十分大きな平行平板電極の間で加速される。 $t=0$ で平板電極(a)の位置で、初期速度 v_0 は 0 であったとする。電極(a)の電位は $-U < 0$ である。この電子が電位 0 の電極(b)にあけられた小さな穴を通過し、まっすぐに(b)(c)間の領域を通過後、 z 方向に一様な磁束密度 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ (ただし $B \geq 0$) の存在する領域(c)(d)間にに入る。この一様磁束が存在する領域は y 方向に無限に広く、 x 方向には長さ l の領域にのみ存在するものとする。これらの装置はすべて真空中にある。電子の運動に抵抗力は働くない。また磁束密度は電子の運動によって乱されることはない。

- (1) この電子が電極(b)を通過する時刻と速さを求めよ。
- (2) この電子が境界(d)の右側の領域に達する条件を求めよ。
- (3) この電子が境界(d)を通過する時点での速さを求めよ。
- (4) この電子が境界(d)を通過する際の軌跡が x 軸となす角を計算せよ。
- (5) この電子が境界(d)を通過する時刻を求めよ。解答には逆三角関数を用いてよい。
- (6) (c)(d)間の磁束密度が問(2)で求めた条件を満たさない場合、何が起こるか説明せよ。
- (7) 磁束密度 B が様々な値をとると、問(6)の場合も含め電子の軌跡は様々に変化する。しかし、電子が到達できない領域がある。この領域を図示せよ。

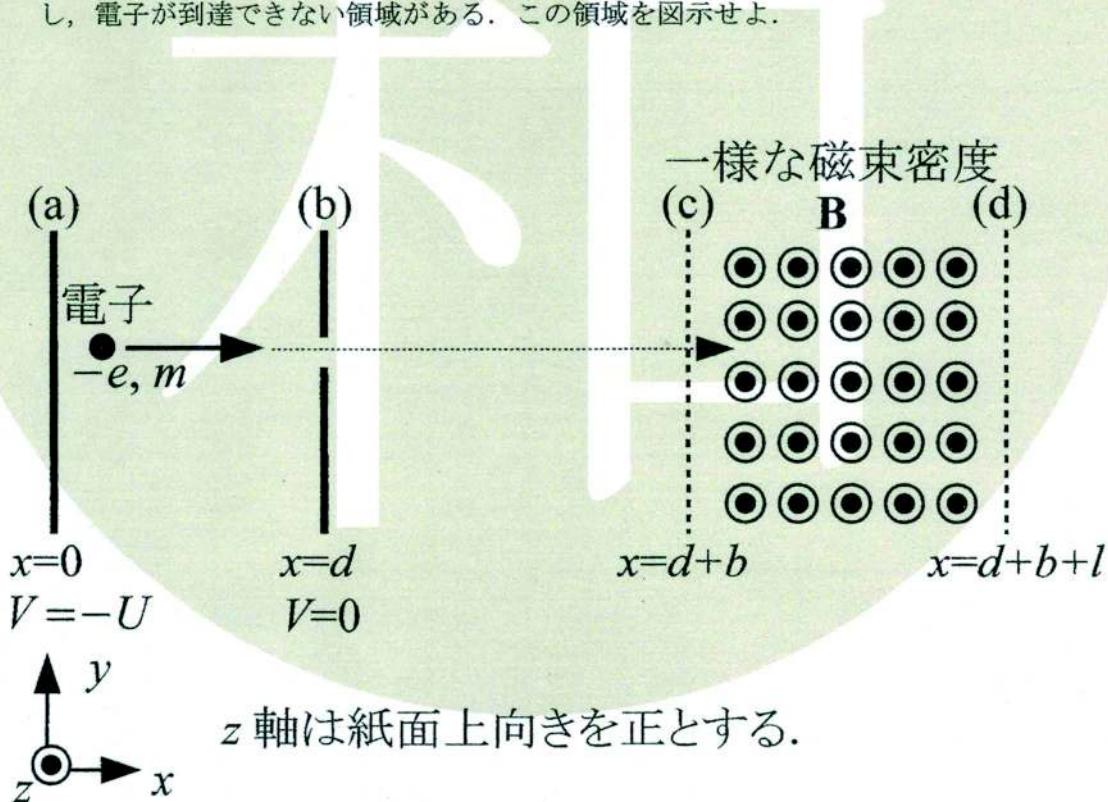


図 1

Problem 1

An electron, whose electric charge and mass are $-e$ ($e > 0$) and m , respectively, is accelerated between a pair of sufficiently large parallel plate electrodes (a) and (b) in Fig. 1. The initial position of the electron is at (a) and the initial velocity v_0 of the electron is zero at $t=0$. The electric potential of the plate electrode (a) is $-U < 0$. This electron passes through a small hole at the plate electrode (b), whose voltage is 0, runs straight in the region between (b) and (c), and enters the region between (c) and (d), where homogeneous magnetic flux density $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, where $B \geq 0$, is applied in z -direction. This region of homogeneous magnetic flux is infinitely large in y -direction and has a length of l in x -direction. The whole setup is placed in a vacuum. No resistance force is applied on the moving electron. Effects caused by the moving electron on the magnetic flux density are negligible.

- (1) Find the time and the speed of the electron when it passes through the electrode (b).
- (2) Find the condition that the electron reaches the right-hand side of the boundary (d).
- (3) Find the speed of the electron at the time when it passes through the boundary (d).
- (4) Find the angle of the electron trajectory to the x -axis when the electron passes through the boundary (d).
- (5) Find the time when the electron passes through the boundary (d). You can use inverse trigonometric functions here.
- (6) Explain what happens when the magnetic flux density between the boundaries (c) and (d) does not meet the condition obtained in Question (2).
- (7) The trajectory of the electron varies depending on the magnetic flux density B . However, there is a region(s) where the electron can never pass. Illustrate the region(s) graphically.

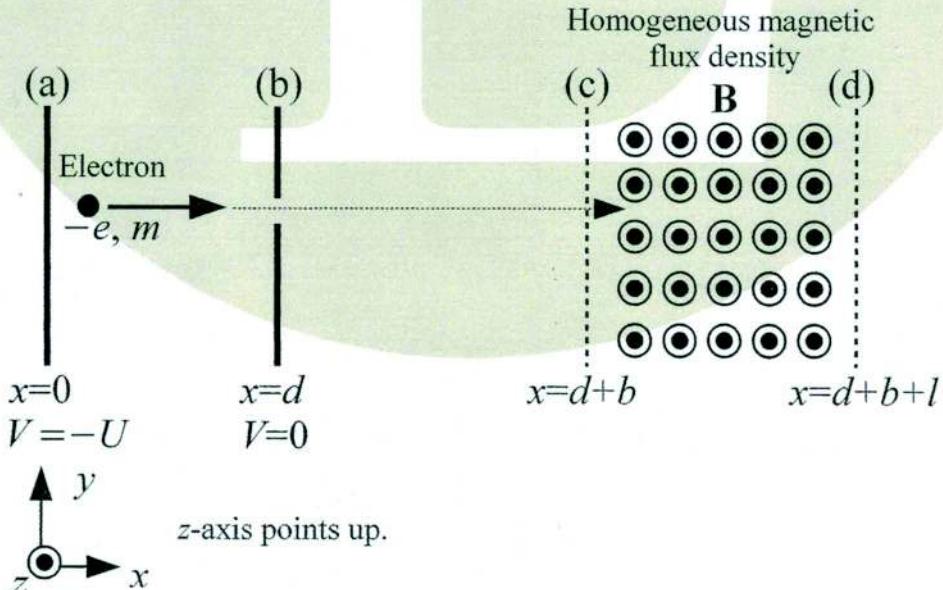


Fig. 1

問題 2

MOS ランジスタは非線形特性があるため、動作の解析が困難である。そこで、バイアス点の近傍の微小範囲で解析を行う。この手法を小信号解析と呼ぶ。短チャネル MOS ランジスタの小信号モデルは図 1 のように書ける。ただし、基板バイアス効果を無視する。また、相互コンダクタンスを g_m 、トランジスタの出力抵抗を r_o 、ゲート・ソース間電圧の小信号成分を v_{gs} とする。記号は凡例に従う。以下の間に答えよ。

- (1) 図 2 のように抵抗負荷 R_D を付けたソース接地回路の小信号等価回路を示せ。さらに、電圧増幅率 A_V 、入力抵抗 R_{in} 、出力抵抗 R_{out} を式で示せ。
- (2) 図 3 は、図 2 の抵抗負荷 R_D の代わりに定電流源を付けたソース接地回路である。この回路の小信号等価回路を示せ。また、電圧増幅率 A_V を式で示せ。
- (3) 定電流源の作り方として、図 4 のような回路を使うことが考えられる。この時の小信号等価回路を示せ。また、電圧増幅率 A_V を式で示せ。
- (4) 図 5 のような回路を使って、図 4 における定電流源としての MOS にゲートバイアス V_b を与える。この回路では、 I_{in} と同じ大きさの電流をいつでも I_{out} に流すことができる。このことに着目し、図 6 の差動增幅回路の差動ゲインを求めよ。
- (5) 図 7 のように差動增幅回路に容量で帰還を掛ける。この差動增幅回路の閉ループゲインを求めよ。

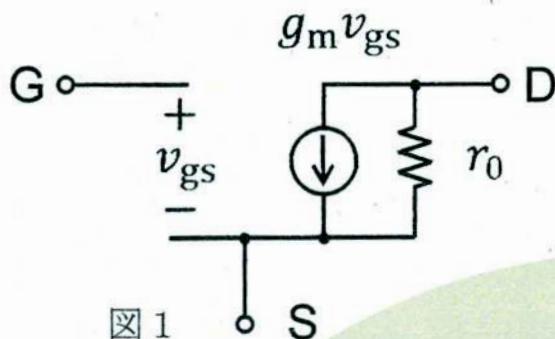


図 1

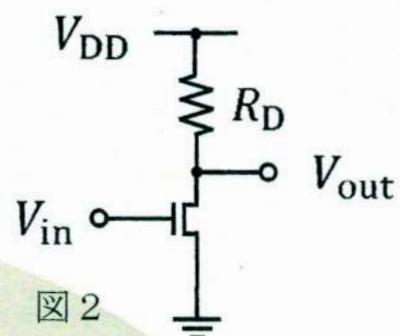


図 2

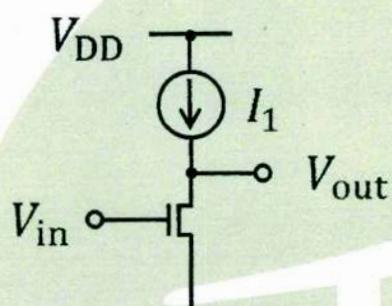


図 3

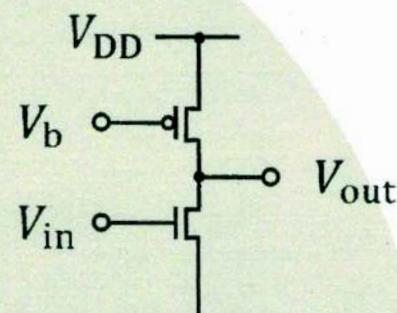


図 4

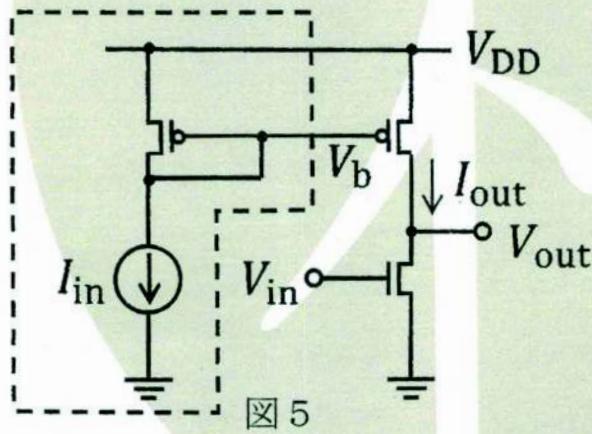


図 5

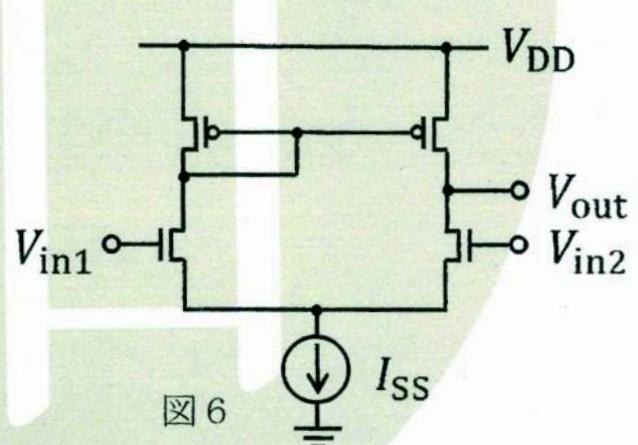


図 6

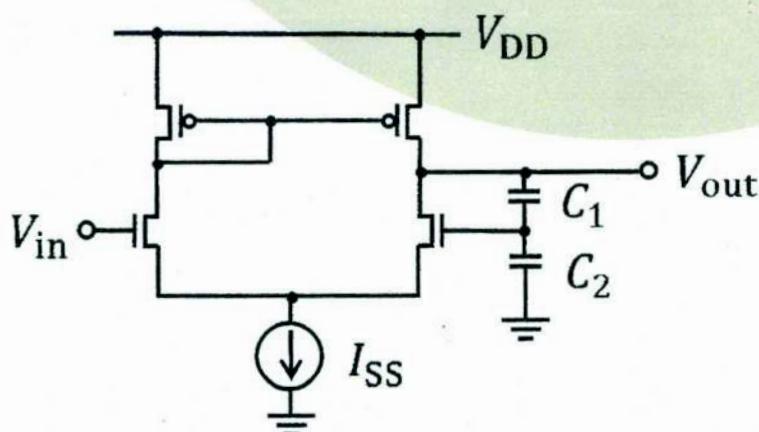
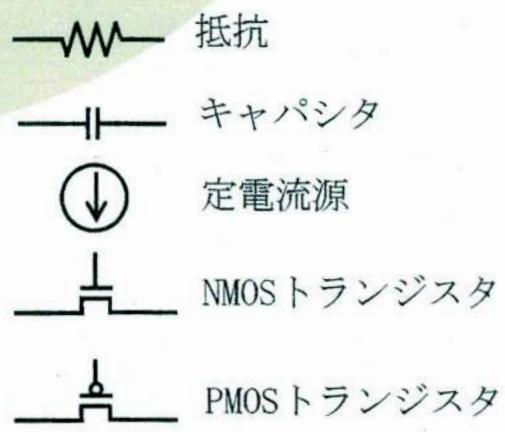


図 7



凡例

Problem 2

Because of the non-linear characteristics of MOS transistors, it is difficult to analyze their operation. Therefore, a minute range in the vicinity of the bias point is analyzed. This is referred to as the small-signal analysis method. Figure 1 shows the small-signal model of a short-channel MOS transistor. Here, the substrate bias effect is neglected, and let g_m be the transconductance, r_0 be the output resistance, and v_{gs} be the small signal component of the gate-to-source voltage. Symbols in the figures can be found in the legend. Answer the following questions.

- (1) Draw the small-signal equivalent circuit of the common-source circuit with a load resistance R_D as shown in Fig. 2. In addition, express the voltage gain A_V , the input resistance R_{in} , and the output resistance R_{out} .
- (2) Figure 3 shows the common-source circuit after replacing R_D in Fig. 2 with a constant current source. Draw the small-signal equivalent circuit for it. In addition, find a formula for the voltage gain A_V .
- (3) A constant current source can be realized by a circuit shown in Fig. 4. Draw its small-signal equivalent circuit. In addition, find a formula for the voltage gain A_V .
- (4) The circuit shown in Fig. 5 is used to provide a gate bias V_b of the MOS transistor as a constant current source in Fig. 4. In this circuit, the current I_{out} is always equal to I_{in} . Taking this into account, show the differential gain of the differential amplifier circuit shown in Fig. 6.
- (5) As shown in Fig. 7, feedback is applied to the differential amplifier circuit by using the capacitors. Find the closed-loop gain of this differential amplifier circuit.

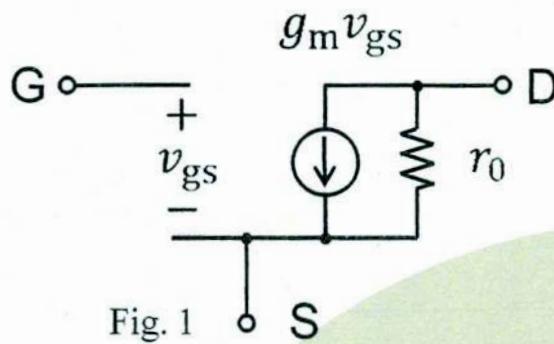


Fig. 1

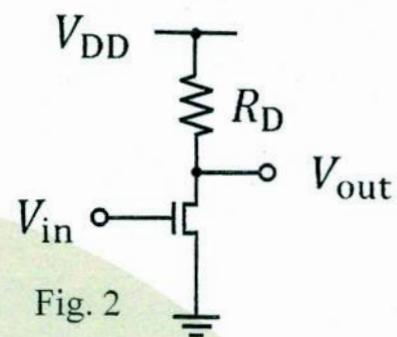


Fig. 2

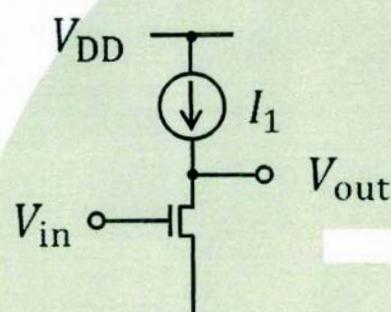


Fig. 3

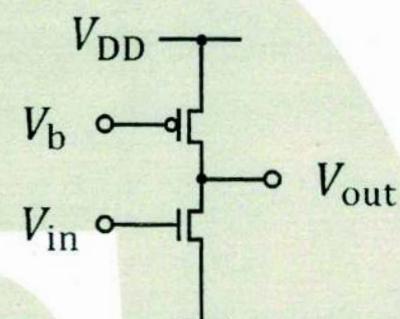


Fig. 4

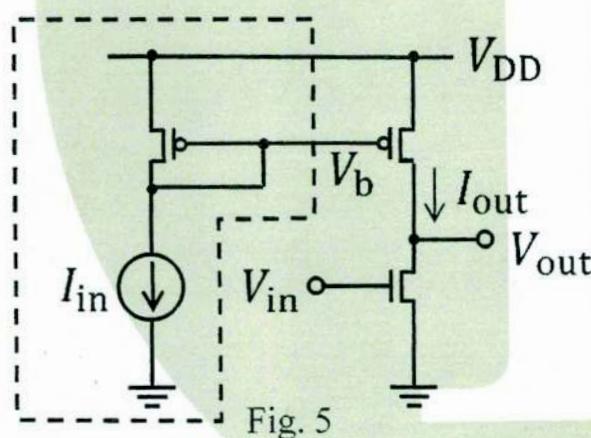


Fig. 5

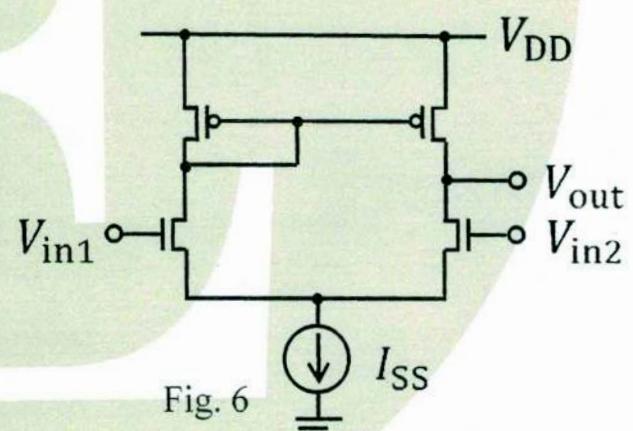


Fig. 6

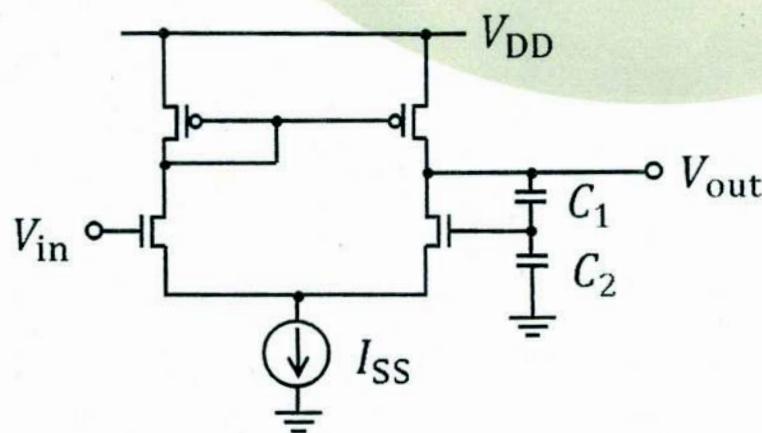
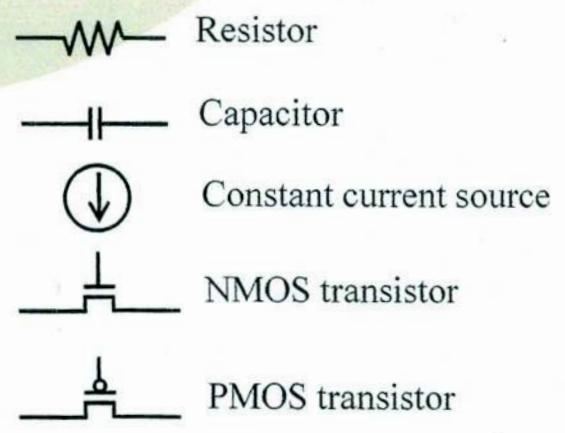


Fig. 7



Legend

問題3

エントロピーと通信路容量について以下の各間に答えよ。

表1は、A市とB市の天気の同時(結合)確率分布を示す。A市とB市の1日の天気は「晴」、「曇」、「雨」、「雪」のいずれかで表される。A市とB市の天気の間には、表1の通りの相関があるが、各市においては、ある日の天気と他の日の天気との相関はないものとする。

表 1

A市 B市	晴	曇	雨	雪
晴	1/8	1/16	1/32	1/32
曇	1/16	1/8	1/32	1/32
雨	1/16	1/16	1/16	1/16
雪	1/4	0	0	0

(1) A市とB市の100日間の天気のエントロピーをそれぞれ求めよ。

(2) A市とB市の100日間の天気の結合エントロピーを求めよ。

図1は、送信元Tから宛先Rへの通信路を表す。Tが一度に送信する符号は、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7の8個の符号のいずれか一つである。Tが送信する符号がcである時、図1の通り、Rが受信する符号はその符号cか、符号c+1(modulo 8)のいずれかであり、それぞれの確率は1/2である。例えば、Tが符号3を送信する場合、Rが符号3を受信する確率と符号4を受信する確率は、それぞれ1/2であり、その他の符号を受信する確率は0である。

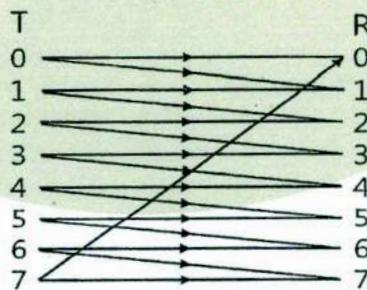
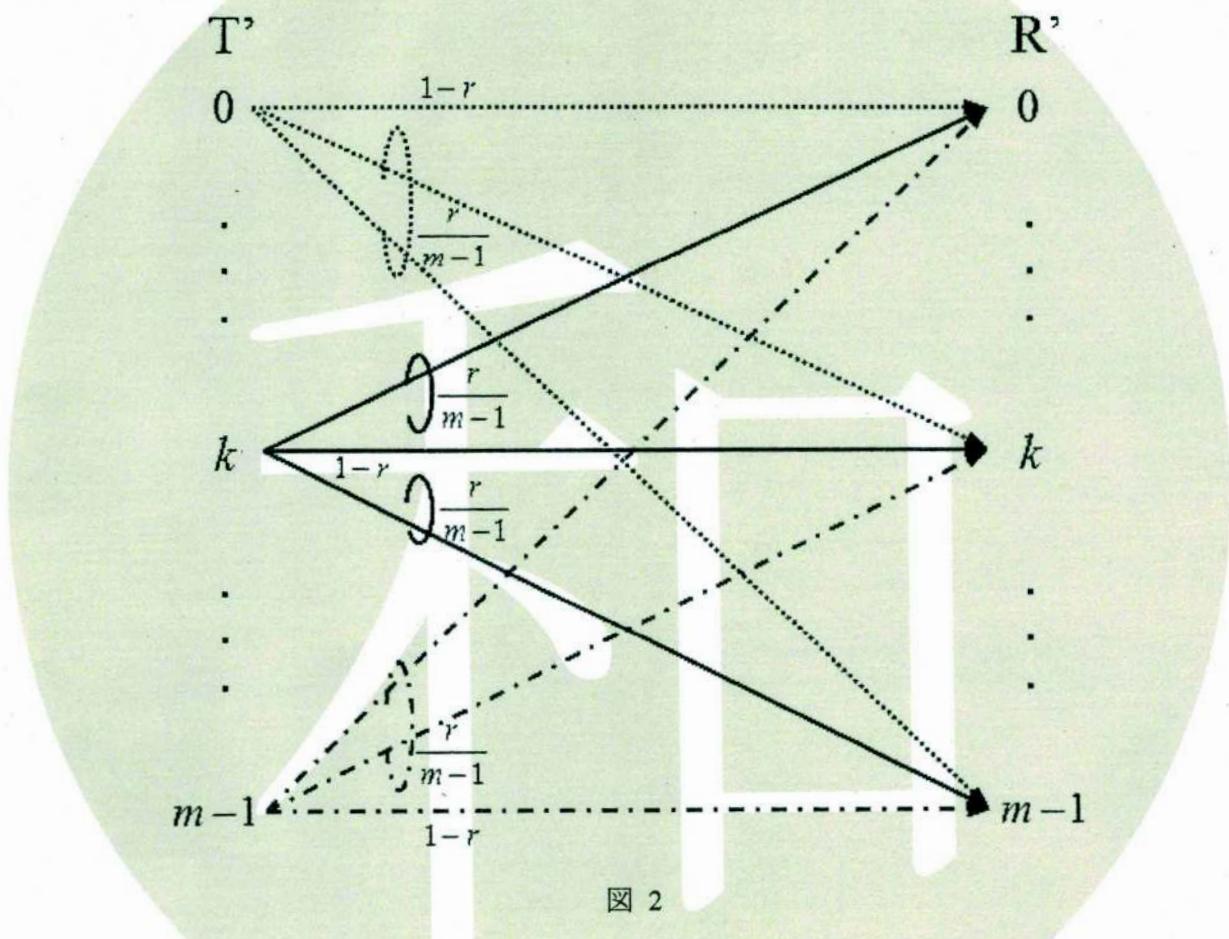


図 1

(3) この通信路の容量を求めよ。

(4) この通信路を用いて誤りの無い通信を行う手法を述べよ。

図2は、送信元 T' から宛先 R' への通信路を表す。 T' が一度に送信する符号は、 $0, 1, \dots, k, \dots, m-1$ の m 個の符号のいずれかである。 T' が送信する符号が x である時、 R' が符号 y を受信する確率 $p(y|x)$ は式(i)で与えられる。例えば、 T' が符号 k を送信する場合、 R' が受信する符号が k である確率は $(1-r)$ であり、 R' が k 以外の符号を受信する確率は、それぞれ $r/(m-1)$ である。



$$p(y|x) = \begin{cases} 1-r & x = y \text{ の場合}, \\ \frac{r}{m-1} & x \neq y \text{ の場合}. \end{cases} \quad (i)$$

- (5) この通信路の容量を m と r の式で表せ。
 (6) $m=5$ の場合、問(5)の通信路容量の概形を r の関数として描き、通信路容量の最大値とその時の r の値及び通信路容量の最小値とその時の r の値を示せ。必要であれば、次の値を使うこと。

$$\log_3 3 = 1.59, \log_2 5 = 2.32, \log_2 7 = 2.81, \log_2 11 = 3.46.$$

Problem 3

Answer the following questions regarding entropy and channel capacity.

Table 1 shows the joint probability distribution of the weather of city A and city B. The weather of the cities for a day is represented by one of “Sunny”, “Cloudy”, “Rainy”, and “Snowy”. There are some correlations between the weather of city A and that of city B as shown in Table 1. It is assumed that, for each city, there is no correlation between the weather of a day and that of any other day.

Table 1

City A \ City B	Sunny	Cloudy	Rainy	Snowy
Sunny	1/8	1/16	1/32	1/32
Cloudy	1/16	1/8	1/32	1/32
Rainy	1/16	1/16	1/16	1/16
Snowy	1/4	0	0	0

- (1) Calculate the entropy of weather for one hundred days of city A and that of city B, respectively.
- (2) Calculate the joint entropy of weather for one hundred days of city A and city B.

Figure 1 shows a channel between a transmitter T and a receiver R. T transmits one of 8 codes of 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, and 7 at a time. For a code c transmitted by T, R receives the code c or code $c+1$ (modulo 8), as shown in Fig. 1, and both of their probabilities are 1/2. For example, when T transmits code 3, the probability of R receiving code 3 and that of R receiving code 4 are both 1/2. The probability of R receiving any other codes is zero.

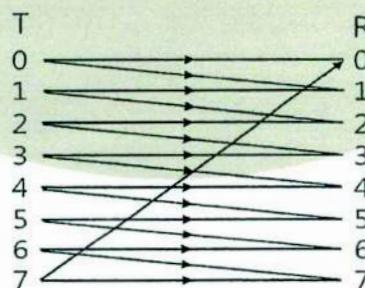


Fig. 1

- (3) Calculate the capacity of this channel.
- (4) Explain a method to achieve error-free communication over this channel.

Figure 2 shows a channel between a transmitter T' and a receiver R' . T' transmits one of m codes of $0, 1, \dots, k, \dots, m-1$ at a time. When the code transmitted by T' is x , the probability $p(y|x)$ of R' receiving code y is given by Eq. (i). For example, when T' transmits the code k , the probability of R' receiving the code k is $(1-r)$, and the probability of R' receiving any one of codes other than k is $r/(m-1)$.

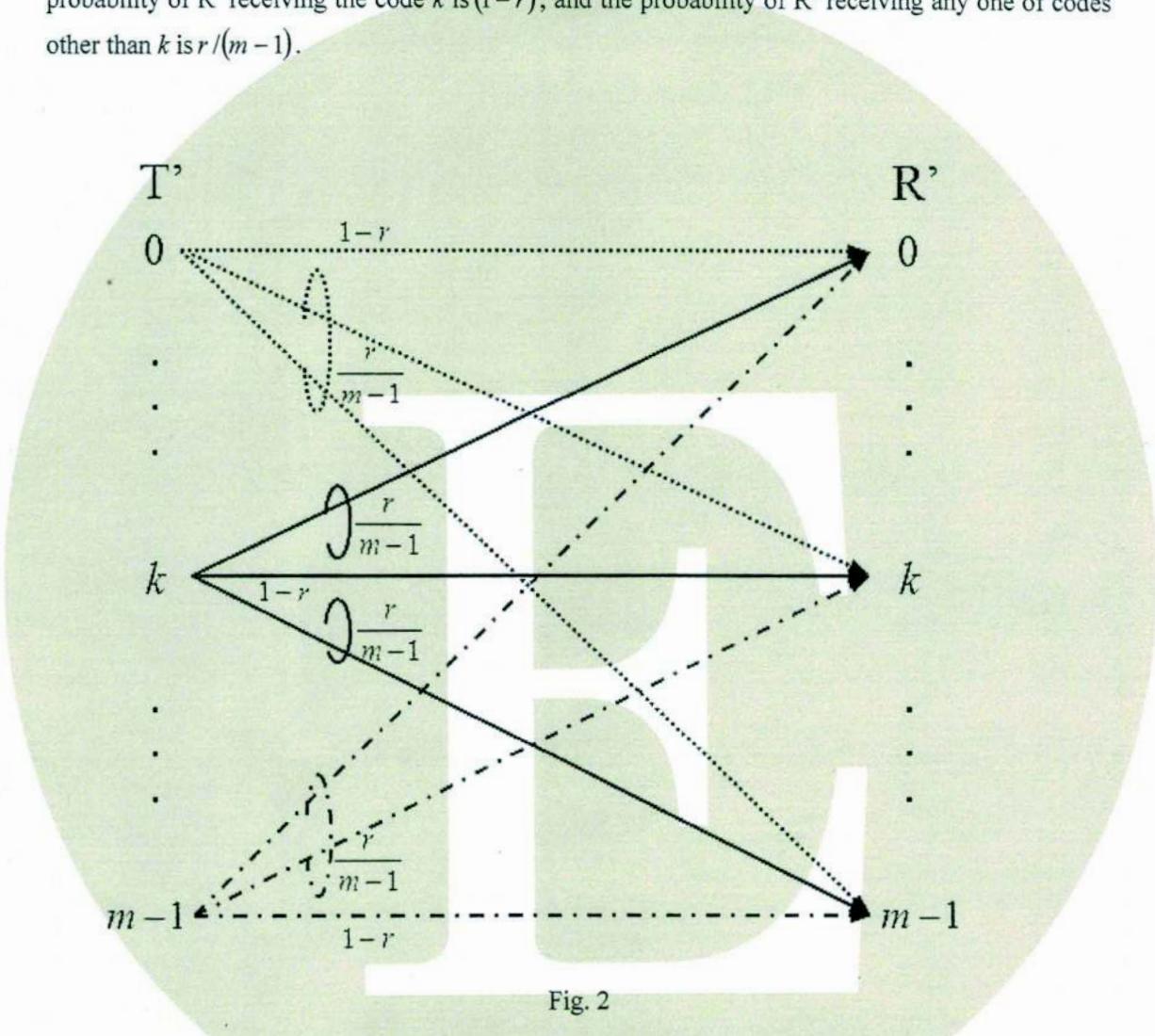


Fig. 2

$$p(y|x) = \begin{cases} 1-r & \text{when } x = y, \\ \frac{r}{m-1} & \text{when } x \neq y. \end{cases} \quad (i)$$

- (5) Show the capacity of this channel as an expression using m and r .
- (6) When $m = 5$, draw a sketch of a graph of the channel capacity in Question (5) as a function of r , indicating the values of the maximum channel capacity with its corresponding r and the minimum channel capacity with its corresponding r . Use values below if necessary.
 $\log_2 3 = 1.59, \log_2 5 = 2.32, \log_2 7 = 2.81, \log_2 11 = 3.46$.

問題4

文字列探索とはテキスト文字列の中から、与えられたパターン文字列に一致する部分を見つけることである。文字列探索に関する以下の各問い合わせよ。ここでテキスト文字列とパターン文字列の長さをそれぞれ n, m ($m > 0, n > 0$) とする。また m は n に比べて十分小さいものとする。

- (1) 最も単純な文字列探索アルゴリズムは、図1に示すように、テキスト文字列にパターン文字列を重ねて一致するかどうかを比較し、一致しなければ重ねる位置を1文字ずつ移動させていく方法である。このアルゴリズムを用いた場合、最大で何回文字比較を行う必要があるか n, m を用いて表せ。またこのアルゴリズムの時間計算量（オーダー）を述べよ。



図1

- (2) 文字の不一致が見つかったときに、パターン文字列を複数文字分移動させることによって処理を効率化できる。図2のように、いくつかの文字が一致した後に不一致となった場合に、その位置より前のパターンに応じて移動量が決定される。文字比較は、テキスト文字列の不一致となった文字から再開する。

図2の1回目の移動の際に1文字分ではなく2文字分移動できる理由を述べよ。また2回目、5回目の移動の際に、4文字分、5文字分ではなく3文字分しか移動できない理由を述べよ。

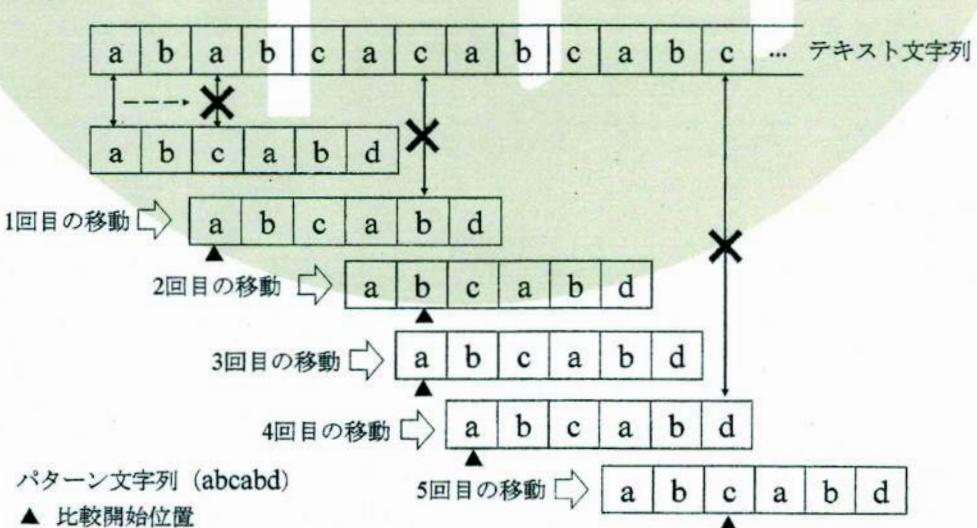


図2

- (3) 図3に示す表はパターン文字列“abcabd”の、各文字で不一致となった場合のパターン文字列の移動量を示している。この表に倣ってパターン文字列(i) “abababcd”，(ii) “aaabcabcd”について移動量の表を作成せよ。

文字位置	0	1	2	3	4	5
パターン文字列 (abcabd)	a	b	c	a	b	d
パターン文字列移動量	1	1	2	3	3	3

図3

- (4) プログラム1は、パターン文字列“patn”を入力として、問(3)で示した移動量の表“table”を求めるプログラムである。空欄(A), (B)に当てはまる条件を述べよ。またこのプログラムの時間計算量（オーダー）を述べよ。

プログラム1

```
void maketable(char *patn, int *table){  
    int i, j, k;  
    int m = strlen(patn); // パターン文字列の長さ  
    table[0] = 1; table[1] = 1;  
    for(i = 2; i < m; i++) {  
        for(j = 1; j < i; j++) {  
            for(k = j; k < i; k++) {  
                if([ (A) ]) break;  
            }  
                if([ (B) ]) break;  
        }  
        table[i] = j;  
    }  
}
```

- (5) 移動量の表が求まっているとして、問(2)のアルゴリズムでは文字列探索の際に最大何回文字比較を行う必要があるか述べよ。またこのアルゴリズムの時間計算量（オーダー）を述べよ。
- (6) 問(2)のアルゴリズム以外に文字列探索を高速化するアルゴリズムが数多くある。それらのアルゴリズムの中の一つを簡潔に述べよ。

Problem 4

String search is to find an occurrence of a given pattern string in a text string. Answer the following questions about string search. Let n and m ($m > 0, n > 0$) be the lengths of the text string and the pattern string, respectively, and m be much smaller than n .

- (1) One of the simplest string search algorithms compares the characters of the pattern string with those of the text string one by one as shown in Fig. 1. When a mismatch is found, the pattern string is shifted by one character. In this algorithm, find at most how many times the characters are compared using m and n . In addition, give the order of the time complexity of the algorithm.

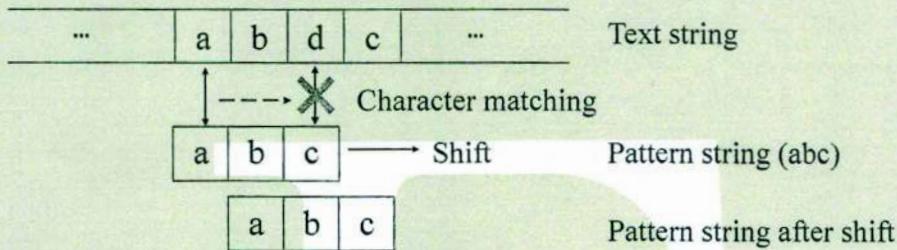


Fig. 1

- (2) The matching process can be accelerated by shifting the pattern string by more than one character when a mismatch is found. As shown in Fig. 2, when a mismatch is found after matching some characters, the shift amount is determined by the sub-pattern preceding the mismatched character. The character comparison is restarted from the mismatched character of the text string.

Describe the reason why the pattern string can be shifted by 2 characters instead of 1 character at the 1st shift in Fig. 2. In addition, describe the reason why the pattern string can be shifted by only 3 characters, by neither 4 characters nor 5 characters, when the mismatches are found in the 2nd shift and the 5th shift.

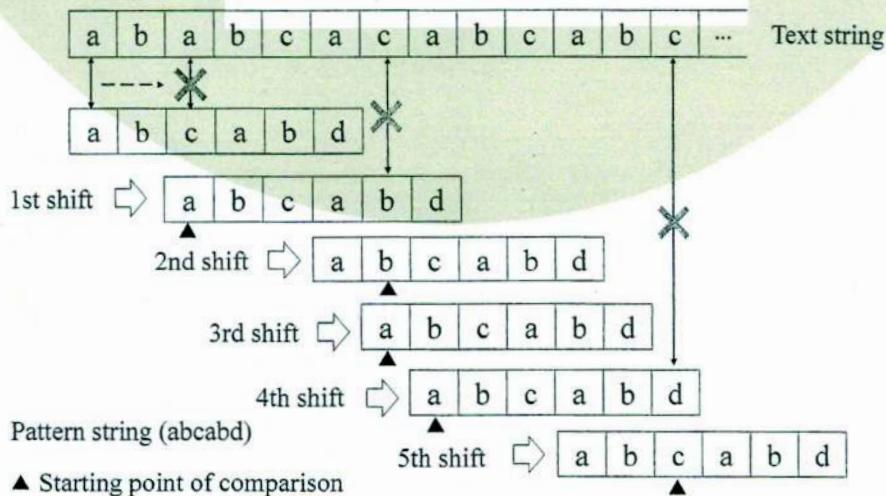


Fig. 2

- (3) Figure 3 shows the shift amounts when the mismatches are found at respective characters of the pattern string “abcabd”. Make the tables of shift amounts for the pattern strings (i) “abababcd” and (ii) “aaabcabcd” after the fashion of Fig. 3.

Character position	0	1	2	3	4	5
Pattern string (abcabd)	a	b	c	a	b	d
Shift amount of pattern string	1	1	2	3	3	3

Fig. 3

- (4) Program 1 is a program to make a table “table” of shift amounts for an input pattern string “patn” as explained in Question (3). Write conditions appropriate for the blanks (A) and (B). In addition, give the order of the time complexity of the program.

Program 1

```
void maketable(char *patn, int *table){  
    int i, j, k;  
    int m = strlen(patn); // length of pattern string  
    table[0] = 1; table[1] = 1;  
    for(i = 2; i < m; i++) {  
        for(j = 1; j < i; j++) {  
            for(k = j; k < i; k++) {  
                if([ (A) ]) break;  
            }  
                if([ (B) ]) break;  
        }  
        table[i] = j;  
    }  
}
```

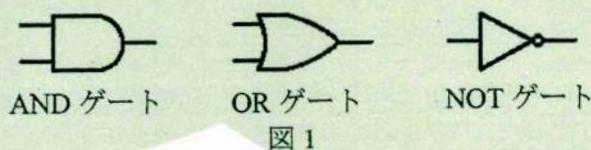
- (5) Assuming that the table of shift amounts has been made, estimate at most how many times the characters are compared by the algorithm described in Question (2). In addition, give the order of the time complexity of the algorithm.

- (6) There are many algorithms other than the algorithm described in Question (2) for accelerating string search. Describe briefly one of such algorithms.

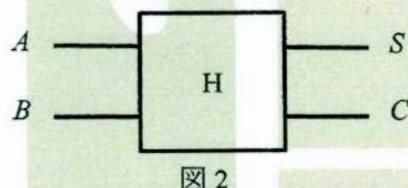
問題A

加算器の論理回路について、以下の各間に答えよ。

- (1) 入力 A, B を 1 ビットの符号なし 2 進数の表現とした場合、その和である 2 ビットの符号なし 2 進数を出力する論理回路を半加算器という。半加算器の真理値表を示せ。表中では、出力の下位ビットを S 、繰り上がりである上位ビットを C とせよ。
- (2) AND, OR, NOT ゲートで構成した半加算器の回路を図示せよ。ただし各ゲートは図 1 に示す記号を用いて表せ。



- (3) 半加算器では下位桁からの繰り上がりを扱えないため、複数ビットの 2 進数に対する加算のひと桁分を実現することはできない。下位桁からの繰り上がりを足し込む機能を持つ全加算器の真理値表を示せ。表中では、全加算器が担当する桁のふたつの入力をそれぞれ A, B 、ひとつ下位の桁からの繰り上がりを C_{in} 、この桁の出力を S 、次の桁への繰り上がり出力を C_{out} とせよ。
- (4) 全加算器は、半加算器ふたつと OR ゲートひとつによって構成することができる。そのような論理回路の構成を図示せよ。ただし各半加算器は図 2 のように示せ。



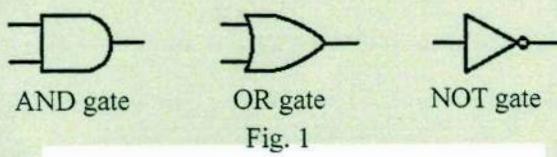
単に全加算器を直列接続すれば、任意ビット数の加算器を構成できる。しかし、この構成ではすべての出力ビットが得られるまでの時間がビット数に比例するので、ビット数が多いと遅延が長くなり過ぎる。これを解決するために、加算器の並びに沿って繰り上がりを順次伝播するのではなく、繰り上がりを計算するための専用回路を別途構成する、キャリールックアヘッド手法が広く用いられている。

- (5) 任意入力数/出力数の AND/OR ゲートを用いることにより、配線遅延を無視すればどの桁に対する繰り上がりビットもゲート 2 段分の遅延で求められることを示せ。
- (6) 実際には、すべての桁についての繰り上がりをゲート 2 段で求めるのではなく、より段数が多いキャリールックアヘッド回路を用いることが多い。このような設計が広く用いられる技術的な理由を述べよ。

Problem A

Answer the following questions on logic circuits for adders.

- (1) When two inputs A and B are representations of one-bit unsigned binary numbers, the logic circuit that makes the two-bit binary unsigned representation of the sum of the inputs is called *half adder*. Give the truth table of the half adder. In the table, the lower bit of the output should be indicated as S , and the upper bit, which represents the carry, should be indicated as C .
- (2) Give a circuit diagram of a half adder consisting of AND, OR, and NOT gates. Gates should be represented as shown in Fig. 1.



- (3) Half adders cannot take a carry from lower places into account, and thus cannot realize one bit portion of addition of multi-bit binary numbers. Give the truth table of *full adder* that has the function of summing up the carry from lower places. In the table, the two input bits of the full adder should be indicated as A and B , the carry from one lower place should be indicated as C_{in} , the output of the place should be indicated as S , and the carry to be propagated to the next place should be indicated as C_{out} .
- (4) A full adder can be built using two half adders and a single OR gate. Give a diagram of such a logic circuit. Here, a half adder should be drawn as shown in Fig. 2.

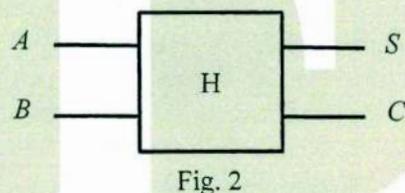


Fig. 2

Adders of an arbitrary number of bits can be constructed by simply connecting full adders in line. With such a construction, however, the time required to obtain all the output bits is proportional to the number of bits, making an adder for many bits too slow. To solve this problem, the carry look-ahead method, in which carries are not propagated through the line of full adders but are computed separately by dedicated circuits, is commonly adopted.

- (5) Show that the carry bits for all the places can be obtained only with delays of two gates, using AND/OR gates of an arbitrarily large number of inputs and outputs, when wiring delays are ignored.
- (6) The common practice is, instead of using circuitry that can compute all the carry bits with two levels of gates, using carry look-ahead circuits with more stages. Describe the technical reason why such a design is common.

問題B

図1は、TCP（Transmission Control Protocol）におけるコネクションの確立に関する手順を表すシーケンス図である。TCPについて以下の間に答えよ。

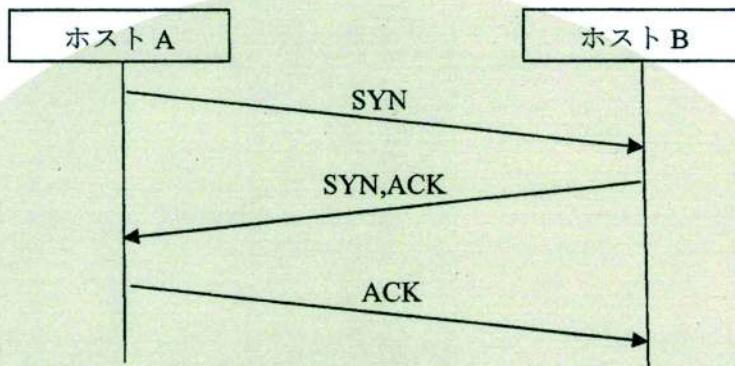


図1

- (1) TCPでは、フロー制御や誤り制御等を実現するため、32ビットのシーケンス番号が用いられている。シーケンス番号のサイズが32ビットに比べて小さ過ぎた場合と大き過ぎた場合の問題をそれぞれ述べよ。
- (2) シーケンス番号の初期値は、予め決められた値ではなく、ランダムに設定される。その理由を1点述べよ。
- (3) コネクション確立後、正しい値よりはるかに大きな値を確認応答番号に設定するようにした場合、発生する問題を述べよ。
- (4) 図1の通り、SYNフラグが設定されたSYNセグメントを受信したホストは、コネクション確立後のデータ授受が可能であれば、SYNフラグとACKフラグが設定されたSYN,ACKセグメントを返す。しかし、データ授受が不可能であれば、ACKフラグが設定されていないセグメントを返す。この手順において、ACKフラグが設定されていないセグメントを返すのではなく、セグメントをまったく返さないように手順を変更した場合、発生する問題を述べよ。
- (5) 二つのホストAとBがほぼ同時にSYNセグメントを互いに送信し、その後、相手ホストが送信したSYNセグメントをそれぞれ受信した場合のコネクション確立手順のシーケンス図を、SYNセグメントの送受信を含めて、図1に倣って示せ。
- (6) 図1の手順において、ホストAがSYNセグメントをホストBに送信した後ホストBからSYN,ACKセグメントを受け取ってもホストBにACKセグメントを返さなかったものとする。ホストAがこのような動作を短時間の間に頻繁に繰り返した場合、ホストBで発生する問題を述べよ。また、ホストBでこの問題を解決するための方法を述べよ。

Problem B

Figure 1 is a sequence chart which shows a procedure for setting up a connection in TCP (Transmission Control Protocol). Answer the following questions concerning TCP.

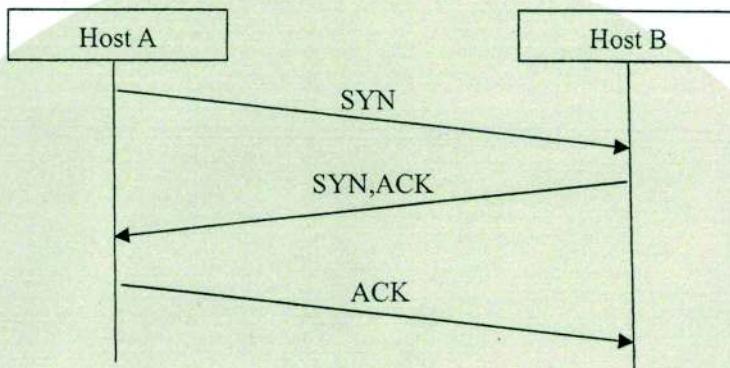


Fig. 1

- (1) Sequence numbers of 32 bits are used in TCP for flow control, error control and so on. What problems can arise if the size of sequence numbers is too small and if it is too large compared with 32 bits?
- (2) The initial value of a sequence number is not predetermined but is set at random. Describe one reason for this.
- (3) What problem arises if the acknowledgment number is set to a value much larger than the correct one after the connection setup?
- (4) A host, which has received a SYN segment whose SYN flag is set, will return a SYN,ACK segment whose SYN and ACK flags are both set if the data exchange is possible after the connection setup, as shown in Fig. 1. If the data exchange is impossible, however, the host will return a segment whose ACK flag is not set. What problem arises if the procedure is changed so that no segments are returned instead of returning a segment whose ACK flag is not set?
- (5) Consider a connection setup procedure in the case where two hosts A and B transmit SYN segments to each other almost simultaneously and receive such transmitted SYN segments afterwards. Show a sequence chart for this procedure including the exchange of SYN segments in a manner similar to Fig. 1.
- (6) Assume that host A transmits a SYN segment to host B and that host A does not return an ACK segment to host B after receiving a SYN,ACK segment from host B. If such operations are repeated frequently in a short period of time by host A, what problem arises for host B? In addition, describe a method for host B for solving this problem.

問題C

格子振動のモデルとして、図1に示すように、質量 M の原子Aがばね定数 K の自然長のばねによって、1次元的に左右とも無限遠方までつながれている場合を考える。隣接した原子間の距離を a とする。この1次元格子を伝わる縦波は、第 n 番目の原子の平衡点からの変位を u_n とすると、

$$u_n = u \exp[i(qna - \omega t)] \quad (\text{i})$$

と表される。ただし、 n は $-\infty \sim +\infty$ の整数、 u は振動振幅、 ω は角振動数、 t は時間、 q は波数、 i は虚数単位である。各原子に働く力はフックの法則に従うものとする。

- (1) n 番目の原子に関する運動方程式を示せ。
- (2) ω と q の関係(分散関係)を求めよ。解答では、 $1 - \cos qa = 2 \sin^2(qa/2)$ を用いて式を簡単にせよ。また、この分散関係を第1ブリルアンゾーン内($-\pi/a \leq q \leq \pi/a$)で図示せよ。
- (3) 群速度($d\omega/dq$)の q 依存性を第1ブリルアンゾーン内で図示せよ。また、 $q = \pm \pi/a$ で起きている現象を説明せよ。
- (4) 長さ L の周期的境界条件を用いることにより、 q の式を求めよ。
- (5) 問(2)で得られた分散関係に対して状態密度 $g(\omega)$ を求め、 $g(\omega)$ が発散する ω が存在することを示せ。
- (6) 図2に示すように、図1の ℓ 番目の原子Aを、質量 $M/2$ の原子Bで置き換える。このとき、式(iii)で表される原子Bから左右に減衰していく解のみの存在が許される。 $|\exp(\gamma a)| > 1$ のとき、 $\exp(\gamma a)$ の値を求めよ。ただし、 γ は減衰定数である。

$$u_n = u \exp(-i\omega t) \exp(-\gamma a|n - \ell|) \quad (\text{ii})$$

- (7) 問(6)で求めた解に対応する q と ω を求めよ。

本サンプルは2020年度以前の問題に基づいたものであり、問題形式、分量、出題範囲、難易度において現在のものと異なります。
This sample is based on the problems before FY2020, which are different from the current ones in their style, volume, range, and level.

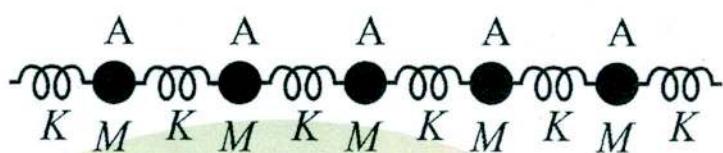


図 1

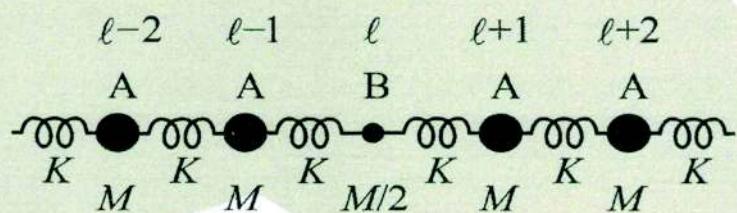


図 2



Problem C

As a model of lattice vibration, consider a one-dimensional chain composed of atoms A of mass M connected with springs with a spring constant K at their natural length, as shown in Fig. 1. The chain is infinitely long in both directions. The distance between the adjacent atoms is defined as a . The longitudinal waves propagating in the one-dimensional chain are expressed by

$$u_n = u \exp[i(qna - \omega t)], \quad (\text{i})$$

where u_n is the deviation of the n -th atom from its equilibrium position. Here, n is an integer between $-\infty$ and $+\infty$, u is the amplitude of the oscillation, ω is the angular frequency, t is the time, q is the wave number, and i is the imaginary unit. We assume that the forces applied to each atom follow the Hooke's law.

- (1) Write the equation of motion for the n -th atom.
- (2) Write the relation between ω and q (dispersion relation). In the answer sheet, simplify the answer equation form by using $1 - \cos qa = 2 \sin^2(qa/2)$. Also, draw this dispersion relation in the first Brillouin zone ($-\pi/a \leq q \leq \pi/a$).
- (3) Draw the q -dependence of the group velocity ($d\omega/dq$) in the first Brillouin zone. Explain the phenomenon taking place when $q = \pm\pi/a$.
- (4) By using the periodic boundary conditions of length L , find an expression for q .
- (5) Show the density of states $g(\omega)$ by using the dispersion relation derived in Question (2). Show that $g(\omega)$ becomes infinite at a certain value of ω .
- (6) As shown in Fig. 2, we replace the ℓ -th atom A shown in Fig. 1 with an atom B of half the mass $M/2$. At this condition, only the decaying waves expressed by Eq. (ii) can exist, which propagate in the left- and right- directions from the atom B. Find the value of $\exp(\gamma a)$ when $|\exp(\gamma a)| > 1$. Here, γ is the decay constant.

$$u_n = u \exp(-i\omega t) \exp(-\gamma a|n - \ell|) \quad (\text{ii})$$

- (7) Show q and ω corresponding to the state derived in Question (6).

本サンプルは2020年度以前の問題に基づいたものであり、問題形式、分量、出題範囲、難易度において現在のものと異なります。
This sample is based on the problems before FY2020, which are different from the current ones in their style, volume, range, and level.

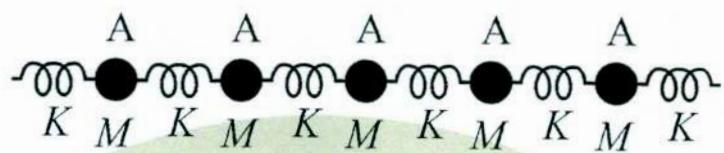


Fig. 1

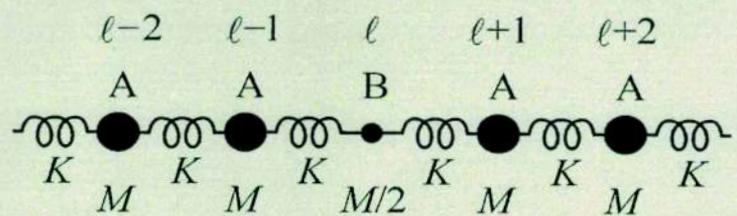


Fig. 2

問題 D

理想的なシリコン p-n 接合ダイオードの電流 I と電圧 V の関係は、以下の式で表される。

$$I = I_s \left\{ \exp\left(\frac{qV}{k_B T}\right) - 1 \right\} \quad (\text{i})$$

ただし、電圧 V は n 側の端子を基準にとり、電流 I はダイオード内部を p 側から n 側に流れる向きを正にとる。また、 q は電気素量、 k_B はボルツマン定数、 T は絶対温度、 I_s は飽和電流である。

- (1) このダイオードの p-n 接合に光を照射していないときのバンドダイヤグラムを示せ。ただし、価電子帯の上端、伝導帯の下端、および、フェルミレベルにはそれぞれ E_V 、 E_C 、 E_F なる記号を付けよ。
- (2) このダイオードの p-n 接合に光を当てたとき、電子・正孔対が発生して光電流 I_L が端子から流れ出た。このときの電荷の動きをバンドダイヤグラムを用いて示せ。ただし、価電子帯の上端、伝導帯の下端、および、フェルミレベルにはそれぞれ E_V 、 E_C 、 E_F なる記号を付けよ。
- (3) 式(i)を変形して、問(2)の状態における電流 I と電圧 V の関係式を示せ。また、このときの等価回路を表せ。ただし、ダイオードの内部抵抗は無視して良い。
- (4) 問(2)の状態における電流 I と電圧 V の関係をグラフに示せ。ただし、横軸を電圧 V 、縦軸を電流 I とする。
- (5) 問(2)で端子を開放したときに端子間に現れる電圧 V_{OC} を、問(3)で求めた式から導出せよ。ただし、 $I_L \gg I_s$ なる関係を使ってよい。
- (6) 式(i)を変形して、問(5)で求めた電圧 V_{OC} と、このダイオードから取り出せる電力 $P = I \cdot V$ が最大になるときの電圧 V_m との間に成立する関係式を示せ。

Problem D

The relationship between the current I and the terminal voltage V of an ideal silicon p-n junction diode is given by the following equation:

$$I = I_S \left\{ \exp\left(\frac{qV}{k_B T}\right) - 1 \right\}, \quad (\text{i})$$

where q is the elementary charge, k_B the Boltzmann's constant, T the absolute temperature, and I_S the saturation current. The voltage V is measured with respect to the n-type terminal, and the direction of the current I is defined to be positive when flowing from the p-type to the n-type.

- (1) Show the p-n junction band diagram of this diode when it is not irradiated by light. Use labels E_V , E_C , and E_F for the upper edge of the valence band, the lower edge of the conduction band, and the Fermi level, respectively.
- (2) When the p-n junction is irradiated by light, which creates electron-hole pairs, a photocurrent I_L is observed to flow out from the terminal. Draw the flow of such electric charges in the band diagram. Use labels E_V , E_C , and E_F for the upper edge of the valence band, the lower edge of the conduction band, and the Fermi level, respectively.
- (3) Modify Eq. (i) and show the I - V characteristic under the condition of Question (2). Show also the equivalent circuit. The internal resistance of the diode can be ignored.
- (4) Show a graph of the I - V characteristic under the condition of Question (2). Use the horizontal and vertical axes for the voltage V and the current I , respectively.
- (5) Using the equation derived in Question (3), show the open-circuit voltage V_{OC} that appears when the terminals are opened under the condition of Question (2). You may presume that $I_L \gg I_S$.
- (6) Using Eq. (i), show the relation between V_{OC} derived in Question (5) and the voltage V_m , at which the power $P = I \cdot V$ delivered from the diode is maximized.

問題 E

図1のフィードバック制御系について以下の間に答えよ。

- (1) $K_2 = 0$ とし、制御系を安定にする K_1 の範囲を求めよ。
- (2) $K_2 = 0$ とし、 $0 < K_1 < \infty$ について根軌跡を描け。
- (3) $K_2 = 0$ のときにシステムを安定限界にする $K_1 (> 0)$ を求めよ。次に、 K_1 をこの値に固定し、 $0 < K_2 < \infty$ について根軌跡を描け。
- (4) 以上の結果から言えることを述べよ。

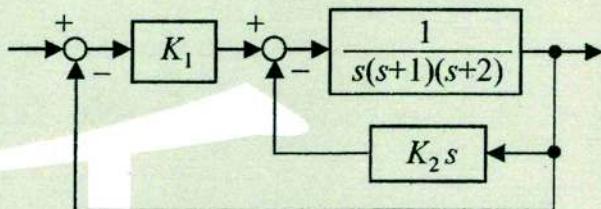


図1

Problem E

Answer the following questions on the feedback control system shown in Fig. 1.

- (1) Putting $K_2 = 0$, show the condition of K_1 to stabilize the system.
- (2) Putting $K_2 = 0$, draw the root locus with respect to K_1 ($0 < K_1 < \infty$).
- (3) Find K_1 (> 0) to set the system at stability limit when $K_2 = 0$. Next, by fixing K_1 to this value, draw the root locus with respect to K_2 ($0 < K_2 < \infty$).
- (4) Describe what can be said from the results above.

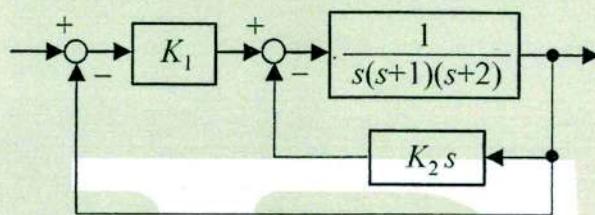
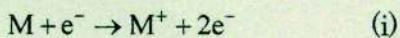


Fig. 1

問題 F

図1に示すように、陽極に正の電圧 V が印加されたギャップ長 d の平行平板電極における電子なだれの成長を考える。電極間は分子 M からなる負性気体で満たされている。陰極表面に原点を置き、陰極から陽極に向かって x 軸を取る。電極は十分大きく端部効果は無視できるものとする。

電極間において電子 e^- は陽極へと電界ドリフトにより速さ $\mu_e V/d$ で移動する。ここで μ_e は電子の移動度を表す定数である。1個の電子が陽極に向かって微小長さ dx 移動するときに分子 M と衝突し、



のように、一価の正イオン M^+ と新たにもう1個の電子を衝突電離により生成する確率は αdx である。同様に1個の電子が陽極に向かって dx 移動するときに分子 M と衝突し、



のように、一価の負イオン M^- を電子付着により生成する確率は ηdx である。ただし $\alpha - \eta > 0$ とする。これらの反応により生じた正イオン M^+ 、負イオン M^- はそれぞれ陰極および陽極へと電界ドリフトにより速さ $\mu_i V/d$ で移動する。ここで μ_i はイオンの移動度を表す定数であり、 $\mu_e \approx 1000 \mu_i$ である。

以下の間に答えよ。電気素量を e とし、電離や付着により生じた荷電粒子による電界の変歪は無視できるものとする。

- (1) 時刻 $t = 0$ において $x = 0$ の陰極表面より、 N_0 個の初期電子が放出された。電子の集団は衝突電離反応や電子付着反応によりその総数を変化させながら陽極方向へと進む。これを電子なだれという。電子の集団が陰極から x の距離に達したときの電子の数を $N_e(x)$ 、それまでに生成された正イオン M^+ および負イオン M^- の数をそれぞれ $N_p(x)$ 、 $N_n(x)$ として、 $N_e(x)$ 、 $N_p(x)$ 、 $N_n(x)$ が満たす微分方程式3つを求めよ。
- (2) 問(1)で求めた微分方程式を解き $N_e(x)$ 、 $N_p(x)$ 、 $N_n(x)$ を求めよ。
- (3) 正イオン M^+ が陰極に衝突すると1個の正イオンあたり γ の確率で新たな電子を陰極から放出させる。これを二次電子という。この二次電子の総数を求めよ。
- (4) 二次電子は新たな電子なだれに成長する。タウンゼント理論では、放電開始の条件は持続的な電子なだれの発生である。この放電開始条件式を求めよ。
- (5) ここで簡単のため問(3)(4)と異なり、 $\eta = 0$ 、 $\gamma = 0$ とし、負イオン及び二次電子による後続の電子なだれの影響は考えないものとする。図1中の電流モニタ A で観測される電流は、電子による電流 I_e と正イオンによる電流 I_p の二つの成分の和である。 I_e および I_p を時刻 t の関数 $I_e(t)$ 、 $I_p(t)$ として求め、それぞれの概形をグラフに描け。

本サンプルは2020年度以前の問題に基づいたものであり、問題形式、分量、出題範囲、難易度において現在のものと異なります。
This sample is based on the problems before FY2020, which are different from the current ones in their style, volume, range, and level.

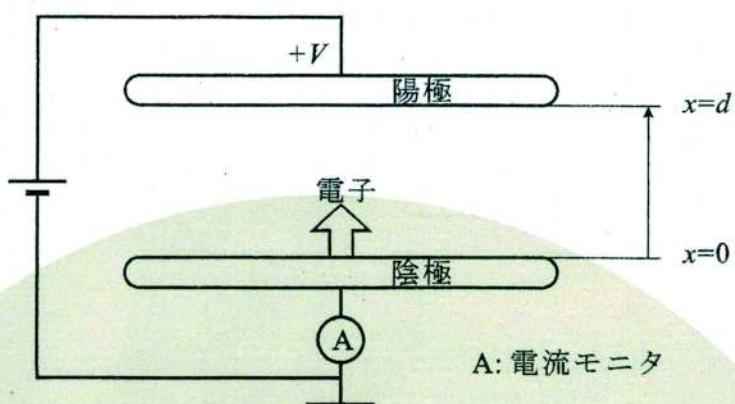


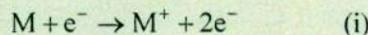
図 1

不^可

Problem F

Consider the growth of an electron avalanche between parallel-plate electrodes as shown in Fig. 1. The gap length is d , and a positive voltage V is applied to the anode. The gap is filled with an electronegative gas material made of molecule M. The origin is located on the surface of the cathode, and the x axis directs to the anode. The electrodes are infinitely large. Ignore the edge effect.

In the gap, an electron e^- drifts to the anode with the speed of $\mu_e V/d$, where μ_e is a constant corresponding to the mobility of an electron. When an electron travels a small distance dx toward the anode, the collisional ionization



occurs with the probability of αdx , where the molecule M is divided into an electron and a monovalent positive ion M^+ . In the same manner, when an electron travels a small distance dx toward the anode, the electron attachment



occurs with the probability of ηdx , where the molecule M turns into a monovalent negative ion M^- . Here, $\alpha - \eta > 0$. The generated ions M^+ and M^- drift to the cathode and anode, respectively, with the speed of $\mu_i V/d$, where μ_i is a constant corresponding to the mobility of an ion and $\mu_e \approx 1000\mu_i$.

Answer the following questions. Denote the elementary charge by e , and neglect the field distortion by charged particles generated in the ionization and the attachment mentioned above.

- (1) Electrons, whose number is initially N_0 , are emitted from the cathode at $x = 0$ at time $t = 0$. These electrons drift to the anode changing their number through the collisional ionization and the attachment. This is called an electron avalanche. Let $N_e(x)$ be the number of electrons when they travel the distance x from the cathode and $N_p(x)$ be the total number of positive ions M^+ generated by this time, and $N_n(x)$ be that of negative ions M^- . Show the three differential equations which $N_e(x)$, $N_p(x)$, and $N_n(x)$ satisfy.
- (2) Solve the differential equations derived in Question (1), and obtain $N_e(x)$, $N_p(x)$, and $N_n(x)$.
- (3) When a positive ion hits the cathode, a new electron, which is called a secondary electron, is emitted from the cathode with the probability of γ . Find the total number of the secondary electrons.
- (4) The secondary electrons grow into subsequent electron avalanches. According to Townsend theory, the inception condition of electrical discharge is the formation of sustainable electron avalanches. Find the expression for the inception condition of electrical discharge.
- (5) Here, unlike Questions (3) and (4), suppose $\eta = 0$ and $\gamma = 0$ for simplicity, where the influences of negative ions and subsequent avalanches by secondary electrons are ignored. The

current observed with the current monitor A in Fig. 1 is the sum of the current I_e carried by electrons and the current I_p carried by positive ions. Find the expressions of I_e and I_p as functions of time t , and sketch the graphs of $I_e(t)$ and $I_p(t)$.

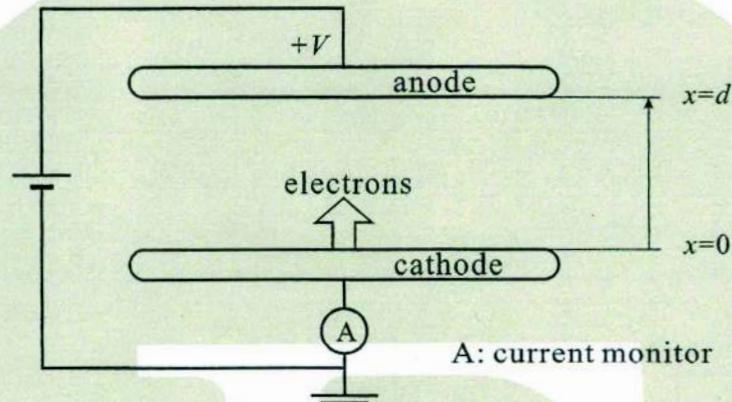


Fig. 1