На пороге компьютерной графики.

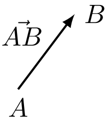
Храмов Д. А.

18.03.2020

В этой лекции

- Векторы. Система координат. Координаты вектора.
- Преобразования векторов (перемещение, поворот, масштабирование, ...).
- Однородные координаты.

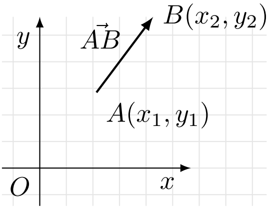
Вектор



Вектор — математический объект, который характеризуется длиной и направлением.

Вектор $\vec{AB}$ — упорядоченная пара точек A (начало вектора) и B (конец вектора).

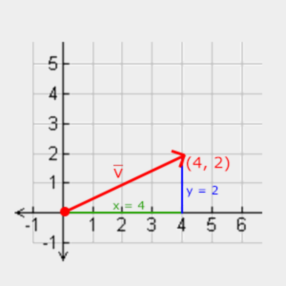
Система координат



Дает возможность ввести координаты вектора:
$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Внимание! *В программировании, для краткости, "вектором" называют одномерный массив чисел. Такой массив действительно может представлять координаты вектора. Но сам вектор — это геометрический объект, который от выбора системы координат не зависит.*

Длина вектора (норма)



$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

```
p = [4,2];
norm(p)

ans =
      4.4721
```

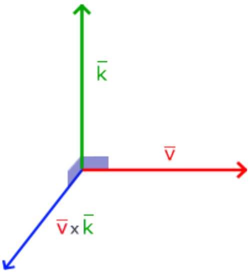
Скалярное произведение векторов (dot product)

$$\vec{v} \cdot \vec{k} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{k}|| \cdot \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (0.6 \cdot 0) + (-0.8 \cdot 1) + (0 \cdot 0) = -0.8.$$

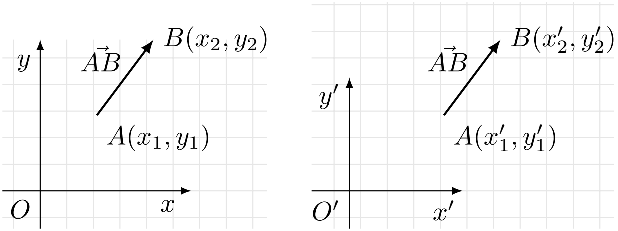
```
v = [0.6,-0.8,0]; k = [0,1,0];
dot(v,k)

ans =

   -0.8000
```

Векторное произведение векторов (cross product)




```
cross(v,k)
```

Координаты вектора в разных системах координат

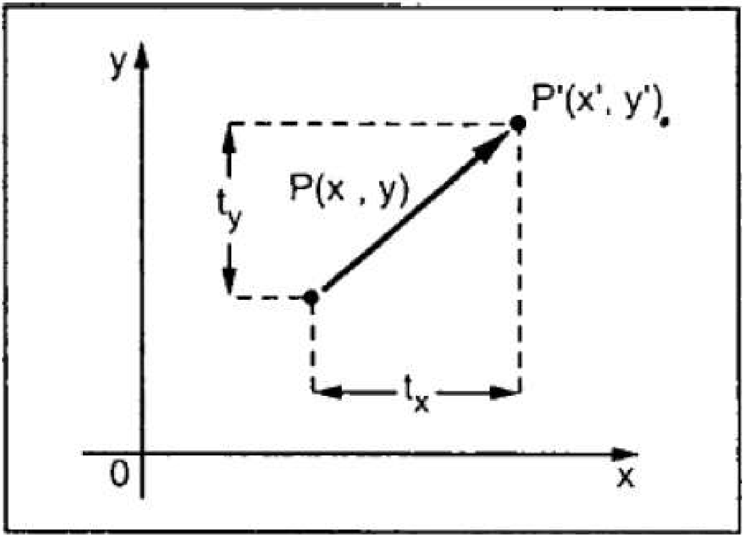


В различных системах координат один и тот же вектор имеет разные координаты.

Трактовки преобразования координат:

1. Координаты вектора остаются неизменными, а изменяется система координат.
2. Изменяются координаты вектора, а система координат остается неизменной.

Перенос (трансляция, translation)



Связь новых координат со старыми

$$
\begin{aligned}
x' &= x + t_x, \\
y' &= y + t_y.
\end{aligned}
$$

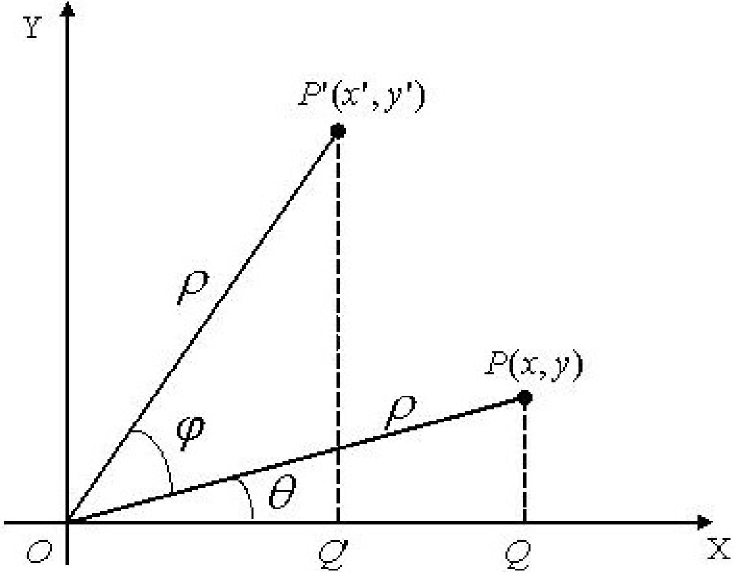
Введем матричные обозначения

$$
P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}.
$$

В матричной записи получим

$$
P' = P + T.
$$

Поворот (rotation)



Формулы для пересчета старых координат точки P в новые P'

Пусть Q и Q' — проекции точек $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ соответственно на ось X.

Тогда из прямоугольного треугольника $OP'Q'$ имеем:

$$\begin{array}{l} \cos(\theta + \varphi) = \dfrac{x'}{\rho}, \\ \sin(\theta + \varphi) = \dfrac{y'}{\rho}. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x' = \rho \cos(\theta + \varphi), \\ y' = \rho \sin(\theta + \varphi). \end{array}$$

Раскрывая суммы $\cos()$ и $\sin()$, получим

$$\begin{array}{l} x' = \rho \cos\theta \cos\varphi - \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ y' = \rho \sin\theta \cos\varphi + \rho \cos\theta \sin\varphi. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi, \\ y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi, \end{array}$$

поскольку $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$.

Формулы преобразования координат в матричной записи

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

Вспомнив, что

$$P' = \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array}\right], \quad P = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right],$$

запишем формулы преобразования координат в матричном виде

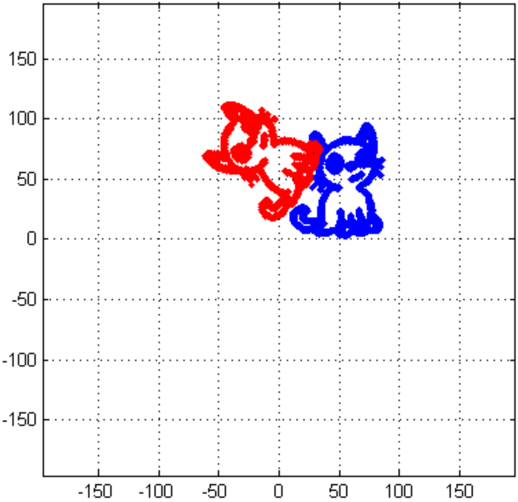
$$\left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right].$$

$$P' = RP,$$

где R – матрица поворота:

$$R = \left[\begin{array}{cc} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right].$$

Пример. Преобразование координат изображения



Код примера

```
A = imread('kitten.bmp');
[N,M] = size(A);
[i,j] = find(~A);
x = j; y = M-i;
plot(x,y,'.')
v = 2*max([N,M]);
grid on
axis([-v v -v v])
axis square
hold on

R = @(phi) [cos(phi),sin(phi); -sin(phi),cos(phi)];

a =-pi/3;
B = R(a)*[x';y'];
plot(B(1,:),B(2,:),'r.')
```

Матрица преобразования координат

Для произвольной матрицы A размерности 2 x 2 можно записать аналогично

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

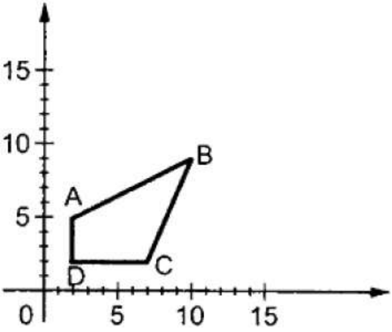
или

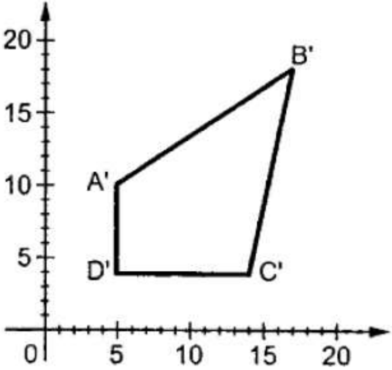
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

где A – матрица преобразования координат

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

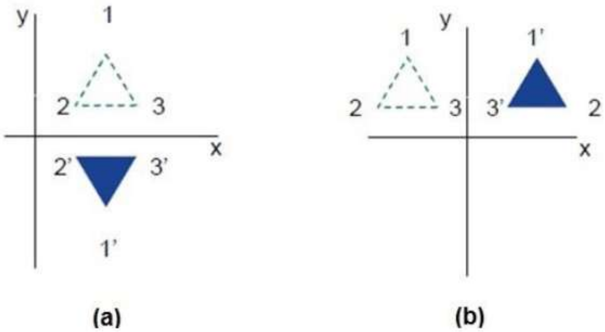
Масштабирование (scaling)





$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Отражение (reflection)



$$\text{a)} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Последовательные преобразования

Пусть координаты точки $P(x, y)$ преобразуются сначала в координаты $P'(x', y')$ при помощи матрицы B, а затем в координаты $P''(x'', y'')$ при помощи матрицы A

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица C, выполняющая преобразование от $P(x, y)$ к $P''(x'', y'')$,

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

запишется в виде

$$C = AB$$

или

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = AB.$$

Однородные координаты

Большинство операций по преобразованию координат выполняется умножением матриц, тогда как перенос – суммированием.

Для единообразия, в компьютерной графике вводят однородные координаты для плоскости

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

а вместо матриц размерности 2 x 2 (для плоскости) используют матрицы размерности 3 x 3, что позволяет записать все преобразования, используя только умножение матриц. В том числе и перенос

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Некоммутативность умножения матриц

Выполним в разной последовательности масштабирование и перенос начала отсчета

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$ST = \begin{bmatrix} S_x & 0 & S_x t_x \\ 0 & S_y & S_y t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad TS = \begin{bmatrix} S_x & 0 & t_x \\ 0 & S_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тем не менее, произведение некоторых видов матриц коммутативно. Например, диагональные матрицы переставлять можно. Вспомним геометрический смысл осуществляемого ими преобразования.

Обратное преобразование

Преобразование, обратное тому, что осуществляется матрицей A выполняется при помощи обратной к A матрицы A^{-1}.

Для прямой и обратной матриц справедливо

$$AA^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица.

Ссылки

1. LearnOpenGL - Transformations – иллюстрации к норме и произведениям векторов.
2. TutorialsPoint: 2D Transformation – картинки с переносом, масштабированием и отражением.
3. Representing Data as a Surface - MATLAB & Simulink – график поверхности, код примера построения графика `sinc`.
4. MATLAB Plot Gallery – просто красивые и полезные примеры.