



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO - BICOCCA

Scuola di Scienze

Dipartimento di Informatica, Sistemistica e Comunicazione

Corso di Laurea Magistrale in Informatica

# Algoritmi per la trasformata di Burrows-Wheeler Posizionale con compressione run-length

**Relatore:** *Prof.ssa Raffaella Rizzi*

**Correlatore:** *Dott. Yuri Pirola*

**Tesi di Laurea Magistrale di:**

*Davide Cozzi*

*Matricola 829827*

**Anno Accademico 2021-2022**

*E pensare che  
mi iscrissi ad informatica  
per fare il sistemista!*

# Abstract

Negli ultimi anni, a partire dall'articolo di Durbin del 2014, la **Trasformata di Burrows-Wheeler Posizionale (*PBWT*)** è stata al centro delle ricerche riguardanti il disegno di algoritmi efficienti per il pattern matching su grandi collezioni di aplotipi. Come indicato da Durbin stesso, una **rappresentazione run-length encoded della *PBWT*** risulta essere molto efficiente dal punto di vista della memorizzazione della stessa.

In questa tesi, svolta in collaborazione con il laboratorio di ricerca **BIAS** del **Dipartimento di Informatica Sistemistica e Comunicazione (*DISCo*)**, con professori e ricercatori dell'**University of Florida (*UFL*)** e della **Dalhousie University (Canada)**, si è quindi implementata una variante della **RLPB-WT**, ispirata ai risultati già ottenuti con la **variante run-length encoded della *BWT*** tradizionale, che permettesse di risolvere il problema del matching tra un aplotipo esterno e un pannello di aplotipi.

A tal fine si sono selezionate le informazioni minimali da memorizzare per ogni run, utilizzando strutture dati succinte (come gli sparse bit-vectors) al fine di ottimizzare la complessità spaziale della struttura dati, e costruendo un efficiente algoritmo per effettuare query alla struttura stessa.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Preliminari</b>	<b>5</b>
2.1	Motivazioni Biologiche . . . . .	5
2.2	Bitvector . . . . .	5
2.2.1	Funzione rank . . . . .	6
2.2.2	Funzione select . . . . .	6
2.3	Straight-Line Program . . . . .	7
2.3.1	Longest Common Extension . . . . .	9
2.4	Suffix Array . . . . .	10
2.4.1	Longest common prefix . . . . .	11
2.4.2	SA inverso . . . . .	12
2.4.3	LCP permutato . . . . .	12
2.4.4	Funzioni phi e phi invertito . . . . .	13
2.5	Trasformata di Burrows-Wheeler . . . . .	14
2.5.1	Trasformata di Burrows-Wheeler run-length encoded . . . . .	16
2.5.2	R-index . . . . .	17
2.5.3	Match massimali con RLBWT . . . . .	18
2.5.4	PHONI . . . . .	20
2.6	Trasformata di Burrows-Wheeler posizionale . . . . .	21
2.6.1	Match con aplotipo esterno . . . . .	25
2.6.2	Varianti della PBWT . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Metodo</b>	<b>36</b>
3.1	Introduzione agli strumenti usati . . . . .	36
3.1.1	MaCS . . . . .	37
3.1.2	SDSL . . . . .	39
3.1.3	BigRePair e ShapedSlp . . . . .	39
3.1.4	Snakemake . . . . .	41
3.2	Introduzione alle varianti della RLPBWT . . . . .	41
3.2.1	Perché un'implementazione run-length . . . . .	42

3.2.2	Una prima proposta . . . . .	42
3.3	RLPBWT naive . . . . .	42
3.4	RLPBWT con bitvectors . . . . .	45
3.5	Algoritmo per match massimali . . . . .	50
3.6	RLPBWT con pannello denso . . . . .	51
3.6.1	Algoritmo con matching statistics . . . . .	51
3.7	RLPBWT con SLP . . . . .	51
3.7.1	Algoritmo con matching statistics . . . . .	51
3.8	Funzione Phi . . . . .	51
3.8.1	Costruzione della struttura di supporto . . . . .	51
3.8.2	Estensione dei match . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>52</b>
4.1	Ambiente di benchmark . . . . .	52
4.1.1	Descrizione input . . . . .	52
4.2	Analisi della complessità . . . . .	52
4.2.1	Analisi temporale . . . . .	52
4.2.2	Analisi spaziale . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>53</b>
5.1	Sviluppi futuri . . . . .	53
5.1.1	K-mems . . . . .	53
5.1.2	RLPBWT multi-allelica . . . . .	53
5.1.3	RLPBWT con dati mancanti . . . . .	53
	<b>Bibliografia e sitografia</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Tabelle</b>	<b>57</b>
<b>B</b>	<b>Algoritmi</b>	<b>59</b>
<b>C</b>	<b>Esempi di File</b>	<b>73</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

# Capitolo 2

## Preliminari

In questo capitolo verranno specificate tutti i concetti fondamentali atti a comprendere i metodi usati in questa tesi che le motivazioni della stessa. In primis, verranno introdotte le *motivazioni biologiche*, al fine di dare uno scopo pratico agli algoritmi e alle strutture dati introdotte, per procedere poi con un breve excursus dei fondamenti teorici presenti allo stato dell'arte.

Dal punto di vista tecnico verranno quindi introdotti i *bit vector* e gli *straight-line programs*, fondamentali sia per la *run-length encoded Burrows-Wheeler Transform*. Anche quest'ultima verrà introdotta, dopo la versione classica della trasformata, per la quale saranno necessari i concetti di *suffix array* e *longest common prefix array*. Si introdurrà infine la *Positional Burrows-Wheeler Transform*, avendo che la tesi tratta una sua versione *run-length encoded*.

### 2.1 Motivazioni Biologiche

### 2.2 Bitvector

**TUTTE LE TABELLE VANNO VERIFICATE!!!**

Nell'ambito delle *strutture dati succinte*, una delle strutture dati principali, ormai sviluppatasi in molteplici varianti, è quella denominata **bit vector**.

**Definizione 1.** Si definisce un **bit vector**  $B$  come un array di lunghezza  $n$ , popolato da elementi binari. Formalmente si ha quindi:

$$B[i] = \{0, 1\}, \forall i \text{ t.c. } 0 \leq i < n$$

In alternativa si potrebbe avere come formalismo:

$$B[i] = \{\perp, \top\}, \forall i \text{ t.c. } 0 \leq i < n$$

Nel corso degli ultimi anni si sono sviluppate diverse varianti dei *bit vector*, finalizzate ad offrire diversi costi di complessità spaziale e diversi tempi computazionali per le principali funzioni offerte.

Il primo vantaggio di questa struttura dati, nelle varianti che si andranno poi a nominare, è quella di garantire *random access* in tempo costante pur sfruttando varie tecniche per la memorizzazione efficiente della stessa in memoria. Lo spazio necessario per l'implementazione, presente in *SDSL* [1], delle principali varianti è visualizzabile in tabella A.1. Il secondo vantaggio consiste nel fatto che i *bit vector* permettono l'implementazione efficiente di due funzioni:

1. la **funzione rank**
2. la **funzione select**

Tali funzioni, al costo di  $\mathcal{O}(n)$  bit aggiuntivi, possono essere supportate in tempo costante. Questo è però un discorso prettamente teorico, infatti si vedrà come, nelle implementazioni in *SDSL*, le complessità temporali delle due funzioni non siano mai entrambe costanti.

### 2.2.1 Funzione rank

La prima funzione che si approfondisce è la **funzione rank**. Tale funzione permette di calcolare il *rank* di un dato elemento del bit vector  $B$ ,  $|B| = n$ . In altri termini, data una certa posizione  $i$  del *bit vector*, la funzione restituisce il numero di 1 presenti fino a quella data posizione, esclusa. Più formalmente si ha:

$$\text{rank}_B(i) = \sum_{k=0}^{k < i} B[k], \quad \forall i \text{ t.c. } 0 \leq i < n$$

Come detto, da un punto di vista teorico, al costo di  $\mathcal{O}(n)$  bit aggiuntivi in memoria tale funzione sarebbe supportata in tempo  $\mathcal{O}(1)$ . Questo però non risulta vero nelle principali implementazioni. La complessità temporale varia infatti a seconda dell'implementazione, anche in conseguenza al fatto che si ha una quantità diversa di bit aggiuntivi salvati in memoria. La tabella con le complessità temporali stimate della *funzione rank*, per le varianti di *bit vector* implementate in *SDSL*, è visualizzabile in tabella A.2.

### 2.2.2 Funzione select

La seconda funzione fondamentale è la **funzione select**. Tale funzione permette, dato un valore intero  $i$ , di calcolare l'indice dell' $i$ -esimo valore pari a 1 nel *bit vector*  $B$ , tale che  $|B| = n$ . Più formalmente si ha che:

$$\text{select}_B(i) = \min\{j < n \mid \text{rank}_B(j+1) = i\}, \quad \forall i \text{ t.c. } 0 < i \leq \text{rank}_B(n)$$



Anche in questo caso vale lo stesso discorso fatto per la *funzione rank* in merito alla complessità temporale e ai bit aggiuntivi. La tabella con le complessità temporali stimate della *funzione select*, per le varianti di *bit vector* implementate in *SDSL*, è visualizzabile in tabella A.3.

Si può quindi vedere un semplice esempio esplicativo.

**Esempio 1.** *Ipotizziamo di avere il seguente bit vector  $B$ , di lunghezza  $n = 14$ :*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0

*Si ha che, per esempio:*

$$\text{rank}(6) = 3$$

$$\text{select}(5) = 9$$

Da un punto di vista pratico si vedrà nel corso di questa tesi come l'uso di tali strutture, nel dettaglio l'uso dei *bit vector plain* e dei *bit vector sparsi*, sia fondamentale sia nella costruzione delle *strutture run-length encoded* che nelle interrogazioni alle stesse.

## 2.3 Straight-Line Program

Nel contesto *bioinformatico* una delle principali problematiche è la gestione di testi molto estesi. Pensiamo, ad esempio, al caso umano. Il primo cromosoma, il più lungo tra i cromosomi umani, conta circa 247.249.719 *bps* (paia di basi), nonostante, è bene segnalare, l'uomo non sia affatto l'essere vivente con il genoma più esteso. Fatta questa breve premessa è facile comprendere l'importanza degli algoritmi e delle strutture dati atte alla compressione di testi.

Per questa tesi si è provveduto all'uso di uno di tali algoritmi di compressione, ovvero i **Straight-line programs (SLPs)**. Parlando in termini generici un *SLP* è una **grammatica context-free** che genera una e una sola parola [2]. Si parla, a causa di ciò, di **grammar-based compression**.

**Definizione 2.** *Sia dato un alfabeto finito  $\Sigma$  per i simboli terminali. Sia data una stringa  $s = a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma^*$ , lunga  $n$  e costruita sull'alfabeto  $\Sigma$ . Si ha quindi che  $a_i \in \Sigma$ ,  $\forall i$  t.c.  $1 \leq i \leq n$ , denotando con  $\text{alph}(s) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  l'insieme dei simboli della stringa  $s$ .*

*Un **SLP** sull'alfabeto  $\Sigma$  è una grammatica context-free  $\mathcal{A}$ :*

$$\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \Sigma, \mathcal{S}, \mathcal{P})$$

*dove:*

- $\mathcal{V}$  è l'insieme dei simboli non terminali
- $\Sigma$  è l'insieme dei simboli terminali
- $\mathcal{S} \in \mathcal{V}$  è il simbolo iniziale non terminale
- $\mathcal{P}$  è l'insieme delle produzioni, avendo che:

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{V} \times (\mathcal{V} \cup \Sigma)^*$$

Tale grammatica, per essere un SLP, deve soddisfare due proprietà:

1. si ha una e una sola produzione  $(A, \alpha) \in \mathcal{P}$ ,  $\forall A \in \mathcal{V}$  con  $\alpha \in (\mathcal{V} \cup \Sigma)^*$  (si noti che la produzione  $(A, \alpha)$  può anche essere indicata con  $A \rightarrow \alpha$ )
2. la relazione  $\{(A, B) \mid (A, \alpha) \in \mathcal{P}, B \in \text{alph}(\alpha)\}$  è aciclica

Si ha quindi che la grandezza dell'SLP è calcolabile come:

$$|\mathcal{A}| = \sum_{(A, \alpha) \in \mathcal{P}} |\alpha|$$

Si ha quindi che il linguaggio generato da un SLP,  $\mathcal{A}$ , consiste in una singola parola, denotata da  $\text{eval}\mathcal{A}$ .

A partire dall'SLP  $\mathcal{A}$  si genera quindi un **albero di derivazione**, che nel dettaglio è un *albero radicato e ordinato*, dove la *radice* è etichettata con  $\mathcal{S}$ , ogni *nodo interno* è etichettato con un simbolo di  $\mathcal{V} \cup \Sigma$  e ogni foglia è etichettata con un simbolo di  $\Sigma$ .

Si vede quindi un esempio chiarificatore [3].

**Esempio 2.** Si prenda la seguente stringa:

$$s = \text{GATTAGATACAT\$GATTACATAGAT}$$

Si potrebbe produrre il seguente SLP:

$$S \rightarrow \text{ZWAY\$ZYAW}$$

$$Z \rightarrow \text{WX}$$

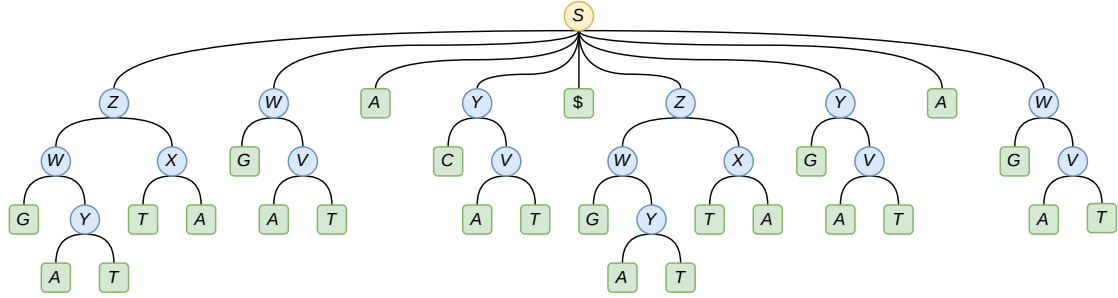
$$Y \rightarrow \text{CV}$$

$$X \rightarrow \text{TA}$$

$$W \rightarrow \text{GV}$$

$$V \rightarrow \text{AT}$$

Al quale corrisponde il seguente albero di derivazione, dove il simbolo iniziale non terminante, ovvero la radice, è indicata con un cerchio giallo, i simboli non terminanti, ovvero i nodi interni, sono indicati dai cerchi blu mentre i simboli terminanti, ovvero le foglie, sono indicati dai quadrati verdi:



Nel 2020, Gagie et al. [3], a cui si rimanda per approfondimenti, proposero una variante degli *SLPs* che garantisse miglioramenti prestazionali per il *random access* alla grammatica stessa. Sfruttando, ad esempio, i *bit vector sparsi* si è quindi potuto garantire *random access* su un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , compresso tramite *SLP*, in tempo:

$$\mathcal{O}(\log n)$$

#### VERIFICARE BENE COSA SIA $n$ .

L'uso di tale variante degli *SLP* è stato cruciale, come si vedrà più avanti in questa tesi, per la costruzione della versione run-length encoded sia della **Burrows-Wheeler Transform** (*BWT*) che della **Positional Burrows-Wheeler Transform** (*PBWT*).

### 2.3.1 Longest Common Extension

Oltre a permettere un veloce *random access* alla testo compresso, la variante degli *SLPs* proposta da Gagie et al. permette di effettuare un'altra operazione in modo "veloce": le **Longest Common Extension** (*LCE*) queries.

**Definizione 3.** Dato un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , il risultato della *LCE query* tra due posizioni  $i$  e  $j$ , tali che  $0 \leq i, j < n$ , corrisponde al più lungo prefisso comune tra le sotto-stringhe che hanno come indice di partenza  $i$  e  $j$ , avendo quindi il più lungo prefisso comune tra  $T[i : n - 1]$  e  $T[j : n - 1]$ .

Sfruttando l'*SLP* del testo  $T$  è quindi possibile effettuare due *random access* al testo compresso, in  $i$  e  $j$ , per poi "risalire" l'albero al fine di computare il prefisso comune tra  $T[i : n - 1]$  e  $T[j : n - 1]$ . Quindi il calcolo di una *LCE query* di

lunghezza  $l$  è effettuabile in tempo:

$$\mathcal{O}\left(1 + \frac{l}{\log n}\right)$$

VERIFICARE BENE COSA SIA  $n$ .

## 2.4 Suffix Array

Nel 1976 Manber e Myers proposero una struttura dati per la memorizzazione di stringhe e la loro interrogazione, efficiente sia per l'aspetto temporale che spaziale, chiamata **Suffix Array (SA)** [4].

**Definizione 4.** Dato un testo  $T$ ,  $\$$ -terminato, tale che  $|T| = n$ , si definisce **suffix array** di  $T$ , denotato con  $SA_T$ , un array lungo  $n$  di interi, tale che  $SA_T[i] = j$  sse il suffisso di ordine  $j$ , ovvero  $T[SA_T[i] : n-1]$ , è l' $i$ -esimo suffisso nell'ordinamento lessicografico dei suffissi di  $T$ . In altri termini quindi il **suffix array** altro non è che una permutazione dell'intervallo di numeri interi  $[0, n-1]$ .

Grazie a questa definizione si può quindi dire che, presi  $i, i' \in \mathbb{N}$  tali che  $0 \leq i < i' < n$  allora vale che, indicando con  $\prec$  l'ordinamento lessicografico:

$$T[SA_T[i] : n-1] \prec T[SA_T[i'] : n-1]$$

Si vede quindi esempio chiarificatore.

**Esempio 3.** Si prenda la stringa:

$$s = \text{mississippi}\$, |s| = 12$$

Si producono quindi i seguenti suffissi e il loro riordinamento:

Indice del suffisso	Suffisso	Indice del suffisso	Suffisso
0	mississippi\$	11	\$
1	ississippi\$	10	i\$
2	ssissippi\$	7	ippi\$
3	sissippi\$	4	issippi\$
4	issippi\$	1	ississippi\$
5	ssippi\$	0	mississippi\$
6	sippi\$	9	pi\$
7	ippi\$	8	ppi\$
8	ppi\$	6	sippi\$
9	pi\$	3	sissippi\$
10	i\$	5	ssippi\$
11	\$	2	ssissippi\$

Ottenendo quindi che:

$$SA_T = [11, 10, 7, 4, 1, 0, 9, 8, 6, 3, 5, 2]$$

### 2.4.1 Longest common prefix

L'uso del *suffix array* è spesso accompagnato dal **Longest Common Prefix**.

**Definizione 5.** Si definisce il **Longest Common Prefix (LCP)** di un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , denotato con  $LCP_T$ , come un array lungo  $n + 1$ , contenente la lunghezza del prefisso comune tra ogni coppia di suffissi consecutivi nell'ordinamento lessicografico dei suffissi, quindi in  $SA_T$ . Più formalmente  $LCP_T$  è un array tale che, avendo  $0 \leq i \leq n$  e indicando con  $\text{lcp}(x, y)$  il più lungo prefisso comune tra le stringhe  $x$  e  $y$ :

$$LCP_T[i] = \begin{cases} -1 & \text{se } i = 0 \vee i = n \\ \text{lcp}(T[SA_T[i-1] : n], T[SA_T[i] : n]) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Esempio 4.** Riprendendo l'esempio precedente si avrebbe quindi:

Indice	SA <sub>T</sub>	LCP <sub>T</sub>	Suffisso
0	11	-1	\$
1	10	0	i\$
2	7	1	ippi\$
3	4	1	issippi\$
4	1	4	ississippi\$
5	0	0	mississippi\$
6	9	0	pi\$
7	8	1	ppi\$
8	6	0	sippi\$
9	3	2	sissippi\$
10	5	1	ssippi\$
11	2	3	ssissippi\$
12	-	-1	-

Senza entrare in ulteriori dettagli relativi all'algoritmo di pattern matching tramite  $SA$  e  $LCP$ , in quanto non centrali per il resto della trattazione, risulta comunque interessante riportare le complessità temporali. Si ha quindi che per l'algoritmo di query su  $SA$  senza l'uso dell' $LCP$  si ha, per un testo lungo  $n$  e un pattern lungo  $m$ :

$$\mathcal{O}(m \log n)$$

Con l'uso dell' $LCP$  questo si riduce a:

$$\mathcal{O}(m + \log n)$$

Per ulteriori approfondimenti si rimanda al testo di Gusfield [5].

### 2.4.2 SA inverso

Ai fini di poter comprendere future definizioni si presenta brevemente anche l'**Inverse Suffix Array (ISA)**, ovvero la permutazione inversa dei valori del *suffix array*.

**Definizione 6.** Dato il *suffix array*  $SA_T$ , costruito su un testo  $T$  di lunghezza  $n$ , si definisce l'*inverse suffix array*  $ISA_T$  come:

$$ISA_T[i] = j \iff SA_T[j] = i, \forall i \in \{0, n-1\}$$

**Esempio 5.** Riprendendo l'esempio precedente si avrebbe quindi:

Indice	SA <sub>T</sub>	ISA <sub>T</sub>	Suffisso
0	11	5	\$
1	10	4	i\$
2	7	11	ippi\$
3	4	9	issippi\$
4	1	3	ississippi\$
5	0	10	mississippi\$
6	9	8	pi\$
7	8	2	ppi\$
8	6	7	sippi\$
9	3	6	sissippi\$
10	5	1	ssippi\$
11	2	0	ssissippi\$

### 2.4.3 LCP permutato

Un'altra permutazione che bisogna introdurre è il **permuted longest-common-prefix array (PLCP)** [6]. Tale permutazione permette una rappresentazione succinta in memoria [7], permettendo di ottenere gli stessi risultati di quest'ultimo. Un'altro vantaggio è che la sua ricostruzione richiede un minor costo computazionale.

**Definizione 7.** Si definisce il **permuted longest-common-prefix array**  $PLCP_T$ , costruito a partire da un testo  $T$  di lunghezza  $n$ , come un array tale per cui [8]:

$$PLCP_T[p] = \begin{cases} 0 & \text{se } ISA_T[p] = 0 \\ LCP_T[ISA_T[p]] & \text{altrimenti} \end{cases}, \forall p \in \{0, n-1\}$$

ovvero dove i valori sono in ordine di posizione e non lessicografico. In altri termini [6]:

$$PLCP[SA[p]] = LCP[p], \forall p \in \{1, n-1\}$$

Quindi, essendo i valori in  $PLCP$  i medesimi in  $LCP$  ma solo con un ordine diverso si ha a che fare con una permutazione.

Ciò che permette una rappresentazione compatta del  $PLCP$  è descritto nel seguente lemma [9].

**Lemma 1.** *Dato un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , si ha che:*

$$PCLP_T[i] \geq PLCP_T[i - 1] - 1, \forall i \in \{1, n - 1\}$$

**Esempio 6.** *Riprendendo l'esempio precedente si avrebbe quindi:*

Indice	$SA_T$	$ISA_T$	$LCP_T$	$PLCP_T$	Suffisso
0	11	5	-1	0	\$
1	10	4	0	4	i\$
2	7	11	1	3	ippi\$
3	4	9	1	2	issippi\$
4	1	3	4	1	ississippi\$
5	0	10	0	1	mississippi\$
6	9	8	0	0	pi\$
7	8	2	1	1	ppi\$
8	6	7	0	1	sippi\$
9	3	6	2	0	sissippi\$
10	5	1	1	0	ssippi\$
11	2	0	3	0/-1	ssissippi\$

In merito a  $PLCP_T[11]$  si ha che esso, a seconda delle definizioni, può essere sia 0 che -1.

#### 2.4.4 Funzioni phi e phi invertito

L'ultimo concetto che si introduce sono le **funzioni**  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$ , usate per poter identificare i valori precedenti e successivi di un dato valore in  $SA_T$  al fine di poter sia ricostruire efficientemente il  $PLCP$  di un testo  $T$  (per i dettagli si rimanda all'articolo di Kärkkäinen [6]) che di permettere, come si vedrà brevemente più avanti nella sezione 2.5, il riconoscimento di tutte le occorrenze di un match in  $T$  [8].

**Definizione 8.** *Dato un testo  $T$  di lunghezza  $n$  si definiscono le funzioni, che di fatto sono permutazioni dei valori di  $SA_T$ ,  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  come [8]:*

$$\varphi(p) = \begin{cases} null & \text{se } ISA_T[p] = 0 \\ SA_T[ISA_T[p] - 1] & \text{altrimenti} \end{cases}, \forall p \in \{0, n - 1\}$$

$$\varphi(p)^{-1} = \begin{cases} null & \text{se } ISA_T[p] = n - 1 \\ SA_T[ISA_T[p] + 1] & \text{altrimenti} \end{cases}, \forall p \in \{0, n - 1\}$$

Si noti che si assume il valore null quando, rispettivamente, si studia il primo e l'ultimo valore del suffix array.

Analogamente possono essere definite come [6]:

$$\varphi[SA[p]] = SA[p - 1]$$

$$\varphi^{-1}[SA[p]] = SA[p + 1]$$

**Esempio 7.** Riprendendo l'esempio precedente si avrebbe quindi:

Indice	SA <sub>T</sub>	ISA <sub>T</sub>	LCP <sub>T</sub>	PLCP <sub>T</sub>	$\varphi$	$\varphi^{-1}$	Suffisso
0	11	5	-1	0	1	9	\$
1	10	4	0	4	4	0	i\$
2	7	11	1	3	5	<i>null</i>	ippi\$
3	4	9	1	2	6	5	issippi\$
4	1	3	4	1	7	1	ississippi\$
5	0	10	0	1	3	2	mississippi\$
6	9	8	0	0	8	3	pi\$
7	8	2	1	1	10	4	ppi\$
8	6	7	0	1	9	6	sippi\$
9	3	6	2	0	0	8	sissippi\$
10	5	1	1	0	11	7	ssippi\$
11	2	0	3	0/-1	<i>null</i>	10	ssissippi\$

Infatti, ad esempio, il valore 9 in SA<sub>T</sub> è preceduto dal valore  $\varphi(9) = 0$  ed è seguito dal valore  $\varphi^{-1}(9) = 8$ .

## CAPIRE SE SERVE DIRE ALTRO

## 2.5 Trasformata di Burrows-Wheeler

Introdotta nel 1994 da Burrows e Wheeler con lo scopo di comprimere testi, la **Burrows-Wheeler Transform** [10] è divenuta ormai uno standard nel campo dell'*algoritmica su stringhe* e della *bioinformatica*, grazie ai suoi molteplici vantaggi sia dal punto di vista della complessità temporale che da quello della complessità spaziale.

Nel dettaglio la *BWT* è una *trasformata reversibile* che permette una *compressione lossless*, quindi senza perdita d'informazione. Tale trasformazione vien costruita a partire dal riordinamento dei caratteri del testo in input, fattore che ha portato all'evidenza per cui caratteri uguali tendono ad essere posti consecutivamente all'interno della stringa prodotta dalla trasformata.

**Definizione 9.** Dato un testo  $T$  \$-terminato, tale che  $|T| = n$ , si definisce la **Burrows-Wheeler Transform (BWT)** di  $T$ , denotata con  $BWT_T$ , come un



array di caratteri lungo  $n$  dove l'elemento  $i$ -esimo è il carattere che precede l' $i$ -esimo suffisso  $T$  nel riordinamento lessicografico. Più formalmente si ha che, con  $0 \leq i < n$ :

$$BWT_T[i] = \begin{cases} T[SA_T[i] - 1] & \text{se } SA_T[i] \neq 1 \\ \$ & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In termini più pratici, la  $BWT$  di un testo è calcolabile riordinando lessicograficamente tutte le possibili **rotazioni** del testo  $T$ .

**Definizione 10.** Si definisce **rotazione  $i$ -esima**, denotata con  $rot_T(i)$  di un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , come la stringa ottenuta dalla concatenazione del suffisso  $i$ -esimo con la restante porzione del testo. Più formalmente si ha che, avendo  $0 \leq i < n$ :

$$rot_T(i) = T[i : n - 1] \cdot T[0 : i - 1]$$

Data questa definizione quindi la  $BWT$  del testo  $T$  risulta essere l'ultima colonna della matrice che si ottiene riordinando tutte le **rotazioni** di  $T$ , che altro non sono che i suffissi già riordinati per il calcolo del  $SA$  a cui viene concatenata la parte restante del testo.

Un altro array spesso utilizzato insieme alla  $BWT$  è il cosiddetto **array  $F$** , lungo  $|T|$ , che altro non è che l'array formato dalla prima colonna della matrice delle rotazioni. In termini ancora più semplicistici l'array  $F$  è banalmente l'array formato dal riordinamento lessicografico dei caratteri del testo  $T$ .

Per chiarezza si vede un esempio.

**Esempio 8.** Si prenda la stringa:

$$s = \text{mississippi}\$, \quad |s| = 12$$

Si produce la seguente matrice delle rotazioni riordinate:

Indice	$SA_T$	$F_T$	Rotazione	$BWT_T$
0	11	\$	\$mississippi	i
1	10	i	i\$mississipp	p
2	7	i	ippi\$mississ	s
3	4	i	issippi\$miss	s
4	1	i	ississippi\$m	m
5	0	m	mississippi\$	\$
6	9	p	pi\$mississip	p
7	8	p	ppi\$mississi	i
8	6	s	sippi\$missis	s
9	3	s	sissippi\$mis	s
10	5	s	ssippi\$missi	i
11	2	s	ssissippi\$mi	i

Avendo quindi:

$$F_T = \$iiiimppssss \text{ e } BWT_T = ipssm\$pissii$$

L'importanza di questa trasformata è dovuta soprattutto al fatto che sia *reversibile*, implicando quindi che a partire da  $BWT_T$  è possibile ricostruire  $T$ . Questo è possibile grazie ad una proprietà intrinseca della trasformata che viene riassunta nel cosiddetto **LF-mapping**.

**Definizione 11.** Dato un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , data la sua  $BWT_T$  e il suo array  $F_T$  si definisce **LF-mapping** come la proprietà per la quale l' $i$ -esima occorrenza di un carattere  $\sigma$  in  $BWT_T$  corrisponde all' $i$ -esima occorrenza dello stesso carattere in  $F_T$ .

Grazie a questa definizione è possibile partire dall'ultimo carattere del testo, \$, e ricostruire l'intero testo a ritroso. Si vede quindi un breve esempio.

**Esempio 9.** Si riprende l'esempio precedente, avendo:

$$BWT_T = ipssm\$pissii \text{ e } F_T = \$iiiimppssss$$

Si comincia dal simbolo \$ in  $BWT_T$ , che è l'ultimo carattere di  $T$ . Si inoltre ha che esso corrisponde al primo, e unico \$ in  $F_T$ , all'indice 0. Tale simbolo, per l'ovvia proprietà delle rotazioni è preceduto dal simbolo  $BWT_T[0] = i$  in  $T$ . Quindi  $i$  precederà \$ in  $T$ . Si sa inoltre che tale  $i$  è il primo  $i$  in  $BWT_T$ . Si cerca quindi il primo  $i$  in  $F_T$ , sapendo che sono lo stesso simbolo nel testo. A questo punto il simbolo allo stesso indice di tale  $i$  nella  $BWT_T$  sarà il simbolo che precede  $i$  nel testo. Proseguendo a ritroso si ricostruisce l'intero testo:

$$T = mississippi\$$$

### 2.5.1 Trasformata di Burrows-Wheeler run-length encoded

Come già introdotto con la  $BWT$  caratteri uguali tendono ad essere messi in posizioni consecutive all'interno della trasformata stessa. Si è quindi pensato, fin da subito, ad un modo efficiente per memorizzare in modo compresso testi mediante l'uso del *run-length encoding* memorizzando le cosiddette **run** di caratteri consecutivi uguali mediante coppie:

(carattere, lunghezza della run)

**Esempio 10.** Vediamo un breve esempio.

Si ipotizzi di avere la seguente stringa:

$$s = aaacctggggg$$

Una sua memorizzazione run-length sarebbe:

$$\{(a, 4), (c, 2), (t, 1), (g, 6)\}$$

### 2.5.2 R-index

In questa direzione, nel 2005, Mäniken e Navarro proposero la **Run-Length encoded Burrows–Wheeler Transform (RLBWT)** [11]. Dato un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , la **RLBWT** di  $T$  è la rappresentazione *run-length encoded* della  $BWT_T$  ed è denotata come  $RLBWT_T$ . Si ha che  $|RLBWT_T| = r$ , dove  $r$  è il numero di run.

Una strategia per la memorizzazione in modo compatto la  $RLBWT$ , di  $r$  run, è quella di memorizzare:

- una stringa  $c$ , tale che  $|c| = r$ , contenente un solo carattere per ogni run della  $BWT_T$ , tale che  $|BWT_T| = n$
- un bitvector  $bv$ , tale che  $|bv| = n$ , tale che  $bv[i] = 1$  sse  $BWT_T[i]$  è il primo carattere di una run

**Esempio 11.** Si prenda ad esempio la seguente  $BWT_T$ :

$$BWT_T = acggtcccaa$$

Si hanno:

$$c = acgtca$$

$$bv = 1110110010$$

Grazie al lavoro di Mäniken e Navarro si giunse al seguente teorema.

**Teorema 1.** Dato un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , se ne può costruire la  $RLBWT$  in uno spazio  $\mathcal{O}(r)$  tale per cui si possono conteggiare tutte le occorrenze di un pattern  $P$ , tale che  $|P| = m$ , in tempo:

$$\mathcal{O}(m \log n)$$

Nonostante questi ottimi risultati, per poter computare l'*FM-index*, si richiedeva anche la costruzione dei *suffix array samples* in spazio  $\mathcal{O}(r)$ .

Grazie al loro indice la struttura era in grado di, dato un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , e dato un pattern  $P$ , tale che  $|P| = m$ :

- conteggiare le occorrenze (*count query*) del pattern nel testo, in tempo  $\mathcal{O}(m \log n)$ , con spazio  $\mathcal{O}(r)$
- localizzare tali occorrenze (*locate query*) in tempo  $\mathcal{O}(s)$ , con spazio  $\mathcal{O}\left(\frac{r}{s}\right)$ , avendo  $s$  come distanza tra due *SA samples*

Si ha quindi che i *SA samples* di un ordine di grandezza maggiore, in termini di memoria, rispetto alla *RLBWT*.

A tal proposito, nel 2017, Policriti and Prezza [12] mostrarono come, dato un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , e dato un pattern  $P$ , tale che  $|P| = m$ , trovare l'intervallo nella  $BWT_T$  contenente i caratteri in *occ* che precedono le occorrenze di  $P$  in  $T$  in spazio  $\mathcal{O}(r)$  e in tempo:

$$\mathcal{O}(m \log \log n)$$

Questo risultato è ora noto in letteratura come **Toehold Lemma** e dimostra come identificare **un** *SA sample* nell'intervallo contenente una il pattern  $P$ . Il limite è dato dal fatto che non si supporta la localizzazione di tutte le  $k$  occorrenze degli *SA samples* in quell'intervallo.

Nel 2020 Gagie et al [13] trovarono soluzione a questo problema, mediante la definizione della funzione  $\varphi$  (che nel dettaglio si dettaglierà più avanti) che ha permesso di avere le *locate query* in spazio  $\mathcal{O}(r)$ . Tale risultato si riassume nel seguente teorema.

**Teorema 2.** *Dato un testo  $T$ , tale che  $|T| = n$ , si può memorizzare  $T$  in spazio  $\mathcal{O}(r)$  tale che si possano trovare tutte le  $k$  occorrenze di un pattern  $P$ , tale che  $|P| = m$ , in tempo:*

$$\mathcal{O}((m + k) \log \log n)$$

La struttura dati dietro questo risultato è stata denotata **R-index**, un'evoluzione dell'*FM-index*, consistente in:

- la *RLBWT*
- i *SA sample*, ovvero i valori di *SA* all'inizio e alla fine di ogni run. Si noti quindi che sono memorizzati in spazio proporzionale al numero di run

Per i dettagli in merito alla costruzione dell'indice si rimanda ai paper di Kuhnle et al. [14], di Mun et al. [15] e di Boucher et al. [16].

### 2.5.3 Match massimali con RLBWT

Dopo aver introdotto l'**R-index** bisogna brevemente spiegare come avvenga effettivamente la ricerca dei match di un pattern  $P$ , lungo  $m$ , in un testo  $T$ , lungo  $M$ . Il fine è quindi quello di calcolare i cosiddetti **Maximal exact matches (MEM)**, ovvero match esatti tra  $P$  e  $T$  che non possono essere estesi in alcuna direzione.

**Definizione 12.** *Dato un testo  $T$ , con  $|T| = n$ , e un pattern  $P$ , con  $|P| = m$ , si definisce una sottostringa  $P[i : i + l - 1]$ , di lunghezza  $l$ , **MEM** di  $P$  in  $T$  se:*

- $P[i : i + l - 1]$  è una sottostringa di  $T$
- $P[i - 1 : i + l - 1]$  non è una sottostringa di  $T$  (non si può estendere a sinistra)
- $P[i : i + l]$  non è una sottostringa di  $T$  (non si può estendere a destra)

L'importanza nel calcolo dei match massimali esatti si ritrova nel loro uso nei metodi di allineamento basati sul **paradigma seed-and-extend**. Tale paradigma, sfruttato in algoritmi di allineamento come **BLAST** [17], uno degli allineatori più usati al mondo, si basa sul trovare *MEM* di piccola lunghezza, i *seed* appunto, per poi continuare l'allineamento tramite algoritmi più sofisticati, spesso basati sulla *programmazione dinamica*.

Nel 2020, Bannai et al. [18] mostrarono come il calcolo dei *MEM* fosse equivalente al calcolo delle **Matching Statistics (MS)**, un concetto teorico molto usato in *bioinformatica*. Informalmente, per ogni posizione  $i$  di un pattern  $P$ , le *MS* riportano la lunghezza della più lunga sottostringa comune, iniziante in  $i$ , tra  $P$  e un testo  $T$ , e l'indice di inizio di tale sottostringa in  $T$ .

**Definizione 13.** Dato un testo  $T$ , con  $|T| = n$ , e un pattern  $P$ , con  $|P| = m$ , si definisce **matching statistics** di  $R$  su  $T$  un array  $MS$ , tale che  $|MS| = m$  di coppie (*pos*, *len*) tale che:

- $T[MS[i].pos : MS[i].pos + MS[i].len - 1] = P[i : i + MS[i].len - 1]$ , quindi si ha un match tra  $P$  e  $T$  lungo  $MS[i].len$  a partire da  $MS[i].pos$  in  $T$  e da  $i$  in  $P$
- $P[i : i + MS[i].len]$  non occorre in  $T$ , quindi il match non è ulteriormente estendibile

Una volta calcolato *MS* si ha il seguente lemma.

**Lemma 2.** Dato un testo  $T$ , con  $|T| = n$ , un pattern  $P$ , con  $|P| = m$ , e il corrispondente array di matching statistics  $MS$  si ha che:

$$P[i : i + l - 1], \forall 1 < i \leq m$$

è un **MEM** di lunghezza  $l$  in  $T$  sse:

$$MS[i].len = l \wedge MS[i - 1].len \leq MS[i].len$$

### CAPIRE SE METTERE DETTAGLI DI CALCOLO CON LCP.

Per costruire l'array *MS* l'approccio naive è quello di sfruttare interamente l'*LCP array* ma, sempre nell'articolo di Bannai et al. [18], si è presentato una semplice concetto in grado di ottimizzare il processo, quello delle **threshold**. Questa piccola struttura dati memorizza il minimo valore dell'*LCP array* tra due run consecutive nel medesimo simbolo nella *BWT*.

**Definizione 14.** Dato un testo  $T$  e date  $BWT_T[j' : j]$  e  $BWT_T[k : k']$  due run consecutive dello stesso carattere in  $BWT_T$ . Si definisce la **threshold** posizione:

$$j < i \leq k \text{ tale che } i \text{ è l'indice del minimo valore in } LCP[j + 1 : k],$$

Rossi et al., nel 2021, sfruttarono tutte le conoscenze relative alla **RLBWT**, all'**R-index** e alle **matching statistics** per ideare **MONI: A Pangenomics Index for Finding MEMs** [19]. In questa soluzione si ha quindi la costruzione, in due *sweep*, tramite l'**algoritmo di Bannai**, dell'array delle *matching statistics*. Infatti si ha:

- un primo sweep che computa i vari  $MS[i].pos$
- un secondo sweep che, tramite random access sul testo  $T$ , computa i vari  $MS[i].len$  e, contemporaneamente, annota i match

## APPROFONDIRE ULTIMA FRASE CAPIRE SE METTERE ESEMPIO

Questa pubblicazione è stata uno dei punti di partenza per riadattare quanto studiato sulla *BWT* classica al fine di ottenere risultati analoghi per la *PBWT*. Per ulteriori dettagli sull'implementazione, sul calcolo delle *threshold* e sui risultati si rimanda direttamente al paper di *MONI* [19].

### 2.5.4 PHONI

Nel 2021, Boucher, Gagic, Rossi et al. proposero un ulteriore miglioramento di quanto fatto in *MONI*, con **PHONI: Streamed Matching Statistics with Multi-Genome References**.

In questo progetto non solo si sostituì l'uso delle *thresholds* con l'uso delle **LCE queries**, riducendosi ad un solo *sweep* sull'array  $MS$  (permettendo un uso “online” dell'algoritmo), ma si esplicitò anche l'uso delle *funzioni*  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  e dell' $PLCP_T$  per il riconoscimento di tutte le occorrenze di ogni *MEM* tra un pattern e un testo. A tal fine si sfrutta infatti il seguente teorema [13].

**Teorema 3.** Dato un testo  $T$ , tale che  $|t| = n$ , si può memorizzare  $T$  in  $\mathcal{O}(r)$ , con  $r$  numero di run, tale che, dato un indice  $p \in \{0, n - 1\}$  si possano computare  $\varphi(p)$ ,  $\varphi^{-1}(p)$  e  $PLCP[p]$  in tempo:

$$\mathcal{O}(\log \log n)$$

Si è quindi potuto migliorare e semplificare l'**algoritmo di Bannai** usato in *MONI* sfruttando un solo *sweep*. Infatti, sfruttando le *LCE query*, avendo il testo  $T$  in memoria sotto forma di *SLP*, è possibile computare contemporaneamente

sia i vari  $MS[i].pos$  che i vari  $MS[i].len$ , avendo, come nel caso dell'*algoritmo di Bannai*, anche il computo dei match nel momento in cui si hanno a disposizione i valori  $MS[i].len$ , avendo che si ha un *MEM* sse  $MS[i].len = l \wedge MS[i-1].len \leq MS[i].len$ .

Per ulteriori approfondimenti si rimanda al paper di *PHONI* [8]. **CAPIRE SE SERVE APPROFONDIMENTO SU COMPLESSITÀ CHE PERÒ NON SONO BEN DEFINITI IN QUANTO DIPENDENTI DALLA STRUTTURA SOTTOSTANTE**

## 2.6 Trasformata di Burrows-Wheeler posizionale

Presentata nel 2014 da Richard Durbin la **Positional Burrows-Wheeler Transform (PBWT)** [20], traducibile con *trasformata di Burrows-Wheeler posizionale*, è una struttura efficiente per la memorizzazione e l'interrogazione di pannelli di aplotipi.

Formalmente si considera un pannello  $X$  di  $M$  aplotipi  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ , su  $N$  siti, indicizzati tramite  $k = 0, \dots, N-1$ , tale che tutti i siti sono considerati biallelici. Da un punto di vista computazionale quest'ultima assunzione comporta che il pannello  $X$  è costruito sull'alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$ , avendo quindi che:

$$x_i[k] = \{0, 1\}$$

Si consideri che l'alfabeto è *ordinato*, avendo che  $0 \prec 1$ .

Prima di proseguire con la trattazione è bene fornire la descrizione di alcuni formalismi utilizzati:

- si denota, per una qualsiasi sequenza  $s$ , con  $s[k_1, k_2)$  la **sottostringa** di  $s$  che inizia alla colonna  $k_1$  e termina alla colonna  $k_2 - 1$
- date due sequenze  $t$  e  $s$ , si definisce un **match** tra le due sequenze sse  $s[k_1, k_2) = t[k_1, k_2)$ , avendo che tale match inizia alla colonna  $k_1$  e termina alla colonna  $k_2 - 1$
- un match tra due sequenze  $s$  e  $t$ , come definito al punto precedente, è definito **localmente massimale** sse non si ha alcuna estensione a destra o sinistra che comporti un ulteriore match, avendo quindi che:

$$(k_1 = 0 \vee s[k_1 - 1] \neq t[k_1 - 1]) \wedge (k_2 = N \vee s[k_2] \neq t[k_2])$$

- comparando una sequenza  $s$  ad un pannello di aplotipi  $X$  si definisce che  $s$  ha un **set-maximal match** con  $x_i$ , che inizia alla colonna  $k_1$  e termina alla colonna  $k_2 - 1$ , sse tale match è *localmente massimale* e

non si ha alcun altro match di  $s$  con un altro  $x_j$  che include l'intervallo  $[k_1, k_2)$

La costruzione di questa struttura dati si basa, ad ogni colonna  $k$ , sul riordinamento lessicografico delle sequenze di aplotipi basato sull'ordinamento inverso dei prefissi terminanti in colonna  $k - 1$ . I valori presenti in colonna  $k$  dopo il riordinamento altro non sono che i valori che andranno a popolare la cosiddetta **matrice PBWT**, che rappresenta la vera e propria trasformata. Si noti che avere le sequenze ordinate in base ai prefissi invertiti alla  $k$ -esima colonna permette di identificare i match con maggior facilità in quanto, ad ogni colonna, aplotipi con suffisso comune (o prefisso comune in ordine inverso) saranno in posizioni consecutive all'interno della trasformata.

La computazione di tutti i riordinamenti non presenta difficoltà dal punto di vista computazionale in quanto, conoscendo l'ordinamento in colonna  $k$ , si può derivare facilmente l'ordinamento in colonna  $k + 1$ , studiando solo i valori alla colonna precedente ed effettuando uno **step di radix sort**.

Più formalmente si denota con  $a_k[i] = m$ , con  $m < M$ , l'indice della sequenza  $x_m$  del pannello  $X$  da cui deriva il prefisso  $i$ -esimo nell'ordine inverso in colonna  $k$ . Si ottiene quindi che l'array  $a_k$ , detto **prefix array**, altro non è che una permutazione degli indici  $0, \dots, M - 1$ .

**Definizione 15.** Dato un aplotipo  $i$ , appartenente al pannello  $X$ , e un indice di colonna  $k$ , si definisce il **prefix array**  $a_k$  come una permutazione degli indici  $0, \dots, M - 1$  tale che  $a_k[i] = j$  sse  $x_j$  è l' $i$ -esimo aplotipo di  $X$  nell'ordinamento inverso dei prefissi ottenuto alla colonna  $k$ .

Data questa definizione ne segue che la **matrice PBWT** si ottiene direttamente andando a vedere, per ogni colonna, gli indici del **prefix array** e prendendo i valori del pannello  $X$  secondo l'ordine espresso da quell'array.

Per comodità di rappresentazione definiamo formalmente i valori della **matrice PBTW** con il seguente formalismo:

$$y_i^k[k] = x_{a_k[i]}[k]$$

avendo quindi che  $y_i^k$  denota la sequenza  $i$ -esima secondo l'ordinamento ottenuto per la colonna  $k$ . Possiamo quindi meglio spiegare perché risulti semplice computare i vari **prefix array**. Infatti, si ha quindi che l'ordinamento degli elementi per  $a_{k+1}$  è lo stesso degli elementi per  $a_k$ , al più di “guidare” internamente il riordinamento tramite i valori di  $y_i^k[k]$ , seguendo l'ordinamento dato dall'alfabeto. A breve, tramite un esempio, si chiarirà meglio quanto detto.

### SPIEGARE MOLTO MEGLIO QUANTO DETTO

Come anticipato prefissi simili saranno consecutivi nei riordinamenti fino alla colonna  $k$ -esima risulta quindi utile tenere traccia della posizione iniziale dei match



tra prefissi vicini. Formalmente, dato  $i > 0$ , si definisce il  $d_k[i]$  come il più piccolo  $j$  tale che  $y_i^k[j, k) = y_{i-1}^k[j, k)$ . Ne segue ovviamente che, se  $y_i^k[k-1] \neq y_{i-1}^k[k-1]$ , allora  $d_k[i] = k$ . Per definizione, inoltre,  $d_k[i] = k$  se  $i = 0$ . L'array  $d_k$  è detto **divergence array**.

**Definizione 16.** Si definisce **divergence array** l'array  $d_k$  tale che  $d_k[i]$  è l'indice colonna iniziale del match massimale a sinistra terminante in  $k$  tra l' $i$ -esimo aplotipo e il suo precedente nell'ordinamento ottenuto alla colonna  $k$ -esima.

Si può quindi dimostrare che l'inizio di qualsiasi match massimale terminante in colonna  $k$  tra qualsiasi  $y_i^k$  e  $y_j^k$ , con  $i < j$ , è calcolabile facilmente avendo che è dato da:

$$\max_{i < m \leq j} d_k[m]$$

Si noti che al posto del **divergence array** si può usare anche una variante del **Longest Common Prefix (LCP) array**, denotato  $l_k$ , che, anziché memorizzare l'indice d'inizio del match massimale a sinistra da due aplotipi consecutivi nell'ordinamento ottenuto alla colonna  $k$ -esima, tiene traccia della lunghezza di tale match. Formalmente si ha che  $l_k[i] = k - d_k[i]$ .

**FORSE SERVE DEFINIZIONE FORMALE.**

Fatte queste premesse possiamo quindi fornire una definizione formale di **PBWT**.

**Definizione 17.** Dato  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$  un insieme/pannello di  $M$  aplotipi con  $N$  siti, la **PBWT** di  $X$  è una collezione di  $N + 1$  coppie di array  $(a_k, d_k)$ , con  $0 \leq k \leq N$ , dove ogni  $a_k$  è detto **prefix array** e ogni  $d_k$  è detto **divergence array**.

L'algoritmo per la costruzione di  $a_{k+1}$  e  $d_{k+1}$  a partire da  $a_k$  e  $d_k$  è disponibile all'algoritmo B.1.

Ai fini della trattazione dell'algoritmo di match con un'aplotipo esterno ricordiamo un'ulteriore definizione.

**Definizione 18.** Definiamo  $\alpha_k$  come l'inverso della permutazione data dal **prefix array**  $a_k$ , avendo che:

$$\alpha_k[i] = j \iff a_k[j] = i$$

**Esempio 12.** Vediamo quindi un esempio chiarificatore.  
Si assuma il seguente pannello  $X$ :

X	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
00	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
01	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
02	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
03	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
04	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
05	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
06	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
07	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
08	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
09	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
10	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
12	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
13	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
14	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
15	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
16	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
17	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
18	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
19	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1

Volendo calcolare  $y^6$  riordiniamo il pannello con l'ordine inverso alla quinta colonna e  $y^6$  altro non è che la sesta colonna del pannello riordinato,  $a_6$  la colonna degli indici e  $d_6$  la colonna iniziale in cui terminano le sottolineature:

X	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
14	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
15	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	0	1	0	0	0	1	0	1
00	1	0	0	1	<u>0</u>	<u>0</u>	0	0	0	0	0	1	1	0	1
09	0	1	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	0	1	0	0	0	0	1	1
10	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	0	1	0	0	0	0	1	1
16	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	0	0	0	0	1	1	0	1
08	0	1	0	0	1	<u>0</u>	0	0	0	1	1	1	0	0	1
11	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	0	0	0	0	1	1	0	0	0
12	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	0	0	1	0	1	1	0	0	1
13	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	0	0	1	0	1	1	0	0	1
18	0	1	1	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	0	0	0	0	0	1	0	0	1
19	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	1	0	0	0	0	0	1	0	1
01	1	0	0	1	<u>1</u>	<u>0</u>	0	1	0	0	0	0	0	1	1
02	1	0	0	1	<u>1</u>	<u>0</u>	0	1	0	0	0	1	0	0	1
03	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	0	1	0	0	0	1	0	0	1
17	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
04	0	1	0	1	<u>0</u>	<u>1</u>	0	0	0	0	0	1	0	0	1
05	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	0	0	0	0	0	1	0	0	1
06	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	0	0	0	0	0	1	0	0	1
07	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Ottenendo quindi:

$$a_6 = [14, 15, 0, 9, 10, 16, 8, 11, 12, 13, 18, 19, 1, 2, 3, 17, 4, 5, 6, 7]$$

$$\alpha_6 = [2, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 6, 3, 4, 7, 8, 9, 0, 1, 5, 15, 10, 11]$$

$$d_6 = [6, 0, 4, 2, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 3, 0, 4, 0, 0, 6, 4, 0, 0, 0]$$

$$l_6 = [0, 6, 2, 4, 6, 6, 1, 6, 6, 6, 3, 6, 2, 6, 6, 0, 2, 6, 6, 6]$$

Nel complesso, permutando con tutti i vari prefix array, si otterrebbe la seguente **matrice PBTW**:

X	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
00	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
01	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
02	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
03	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
04	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
05	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
06	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
07	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
08	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
09	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
10	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
11	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
12	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
13	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
17	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
18	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
19	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1

### 2.6.1 Match con aplotipo esterno

Durbin, nel suo articolo, propone diversi algoritmi, ad esempio per il calcolo di match interni ad  $X$  più lunghi di una lunghezza minima  $L$  o per la ricerca di tutti i *set-maximal match* interni ad  $X$  in tempo lineare. Di interesse per questa tesi è però il cosiddetto *algoritmo 5*, quello che si propone di trovare tutti i *set-maximal match* tra il pannello  $X$  e un aplotipo esterno  $z$ , assumendo che  $|z| = M$ .

L'idea dietro l'algoritmo è quella di usare tre indici:  $e_k$ ,  $f_k$  e  $g_k$ . Nel dettaglio  $e_k$  tiene traccia dell'inizio del più lungo match, terminante in colonna  $k$ , tra  $z$  e un qualche  $y_i^k$ . L'intervallo  $[f_k, g_k) \subseteq [0, \dots, M)$  invece identifica il sotto-intervallo di

$a_k$  contenente gli indici degli aplotipi appartenenti a tale match. Formalmente si ha quindi che:

$$z[e_k, k) = y_i^k[e_k, k) \wedge z[e_k - 1] \neq y_i^k[e_k - 1], \forall i \text{ t.c. } f_k \leq i < g_k$$

Si noti che  $g_k = M$  sse  $y_{M-1}^k$  appartiene alle sequenze per cui si ha tale match più lungo.

Bisogna quindi capire come aggiornare  $e_k$ ,  $f_k$  e  $g_k$  passando dalla colonna  $k$  alla colonna  $k + 1$ . L'idea è quella per cui, avendo  $f_{k+1} < g_{k+1}$  allora sicuramente ho ancora delle righe che presentano un match che parte da  $e_k = e_{k+1}$  e termina in  $k$  che può essere esteso in  $k + 1$ . In caso contrario, avendo  $f_{k+1} = g_{k+1}$ , non si hanno match estendibili e quindi si può concludere che quelli terminanti in colonna  $k$  erano match massimali, dovendo poi aggiornare  $e_{k+1}$  ottenendo i relativi  $f_{k+1}$  e  $g_{k+1}$ . Bisogna quindi capire come funzioni la variante dell'**LF-mapping**, guidato dal carattere corrente dell'aplotipo query, all'interno della **PBWT**, per ottenere  $f_{k+1}$  e  $g_{k+1}$  a partire da  $f_k$  e  $g_k$  (e di conseguenza  $e_{k+1}$ ).

Per effettuare il mapping abbiamo bisogno di tre componenti:

1. l'array  $c$  tale per cui  $c[k] = j$  sse la colonna  $k$  contiene  $j$  occorrenze di 0
2. l'array  $u_k$  tale per cui, alla colonna  $k$ -esima,  $u_k[i] = j$  sse  $j$  è il numero di occorrenze di 0 prima dell'indice  $i$  nella colonna  $k$
3. l'array  $v_k$  tale per cui, alla colonna  $k$ -esima,  $v_k[i] = j$  sse  $j$  è il numero di occorrenze di 1 prima dell'indice  $i$  nella colonna  $k$

Tali valori possono essere computati e memorizzati in fase di costruzione della **PBWT**, come visibile direttamente nell'algoritmo B.1 per quanto riguarda  $u$  e  $v$ , avendone già la computazione. Per quanto riguarda  $c$  si ha che potrebbe essere banalmente calcolato anch'esso in fase di costruzione della **PBWT**, tenendo ogni volta traccia del numero di 0 incontrati nella colonna  $k$ -esima.

Sfruttando i valori di questi 3 array possiamo quindi effettuare il mapping, definito per comodità da una funzione, rappresentabile in pseudocodice come nell'algoritmo B.2:

$$w_k : \{0, \dots, M\} \times \Sigma \rightarrow \{0, \dots, M\}$$

tale per cui:

$$w_k(i, \sigma) = \begin{cases} u_k[i] & \text{se } \sigma = 0 \\ v_k[i] + c[k] & \text{se } \sigma = 1 \end{cases}$$

Infatti, come confermato anche dall'algoritmo di costruzione stesso, si ha che:

$$a_{k+1} [w_k(i, y_i^k[k])] = a_k[i]$$

**Esempio 13.** Vediamo un piccolo esempio chiarificatore, riprendendo il precedente.

Per praticità riporta che:

$$a_5 = [14, 15, 17, 0, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 16, 8, 11, 12, 13, 18, 19, 1, 2, 3]$$

$$\alpha_5 = [3, 17, 18, 19, 4, 5, 6, 7, 11, 8, 9, 12, 13, 14, 0, 1, 10, 2, 15, 16]$$

$$a_6 = [14, 15, 0, 9, 10, 16, 8, 11, 12, 13, 18, 19, 1, 2, 3, 17, 4, 5, 6, 7]$$

$$\alpha_6 = [2, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 6, 3, 4, 7, 8, 9, 0, 1, 5, 15, 10, 11]$$

Si ha quindi, ad esempio, con  $k = 5$  e  $i = 2$ , che:

$$a_6 [w_5 (2, y_2^5[5])] = a_5[2]$$

Avendo:

$$w_5 (2, y_2^5[5]) = w_5 (2, 1) = v_5[2] + c[5] = 0 + 15 = 15$$

Si ha che:

$$a_6[15] = 17 = a_5[2]$$

Ai fini dell'algoritmo serve però il “passaggio inverso” rispetto a quello indicato da questa equazione, ovvero passare dalla colonna  $k$  alla colonna  $k + 1$ . Quindi, pensando alla permutazione inversa del **prefix array**, si ha che:

$$\alpha_{k+1}[i] = w_k(\alpha_k[i], x_i[k])$$

**Esempio 14.** Si riprendono i dati dell'esempio precedente e si vuole calcolare, sempre con  $k = 5$  e  $i = 2$ :

$$\alpha_6[2] = w_5(\alpha_5[2], x_2[5]) = w_5(18, 0) = 13$$

Come volevasi dimostrare.

L'ultima equazione ci suggerisce quindi che l'LF-mapping sopra definito consente il corretto aggiornamento di  $f_k$  e  $g_k$ . Definendo quindi:

$$f_{k+1} = w_k(f, z[k])$$

si ha che  $f_{k+1}$  sarà l'indice, in  $a_{k+1}$ , della prima sequenza  $y_j^k$ , con  $j \geq f$ , per la quale  $y_j^k[k] = z[k]$ . Analogamente si ha anche:

$$g_{k+1} = w_k(g, z[k])$$

Si hanno quindi, dopo il calcolo di  $f_{k+1}$  e  $g_{k+1}$  due possibili casi:

1. si ha che  $f_{k+1} < g_{k+1}$ , quindi si hanno ancora match che partono da  $e_k$  e terminano in  $k$  che si estendono anche in  $k+1$ . In tal caso quindi  $e_{k+1} = e_k$
2. si ha che  $f_{k+1} = g_{k+1}$ , quindi non si hanno match che partono da  $e_k$  e terminano in  $k$  che sono anche estendibili in  $k+1$ . Bisogna quindi annotare i match terminanti in  $k$ , nell'intervallo  $[f_k, g_k)$  su  $a_k$ , e poi calcolare i nuovi  $e_k$ ,  $f_k$  e  $g_k$ . La chiave per questo calcolo è che, virtualmente, l'aplotipo  $z$  si trova o subito prima del blocco di aplotipi  $[f_k, g_k)$  in colonna  $k$ , secondo l'ordinamento dato dalla medesima colonna, o subito dopo. Si ha quindi che, essendo nell'ordinamento o subito prima di  $f_k$  o subito dopo  $g_k$ :

$$y_{f_{k+1}-1}^{k+1} < z < y_{f_{k+1}}^{k+1}$$

Diventa quindi possibile inferire che:

$$e_{k+1} \leq d_{k+1}[f_{k+1}]$$

Si considera quindi, come punto di partenza  $e_{k+1} = d_{k+1}[f_{k+1}] - 1$ , studiando di conseguenza  $z[e_{k+1}]$ , avendo due casi possibili:

- (a) se tale valore è 0 allora, per l'ordinamento,  $z$  ha un match migliore con  $y_{f_{k+1}-1}^{k+1}$  rispetto che con  $y_{f_{k+1}}^{k+1}$ . Si aggiorna quindi  $e_{k+1}$ , decrementandolo, fino a che si ha match tra  $z[e_{k+1}-1]$  e  $y_{f_{k+1}-1}^{k+1}[e_{k+1}-1]$ . Infine si decrementa  $f_{k+1}$  fino a che  $d_{k+1}[f_{k+1}] \leq e_{k+1}$ , trovando quelle righe per il quale il **divergence array** non supera il valore di  $e_{k+1}$ . Si ottengono in tal modo le sequenze, nel riordinamento in  $k+1$ , che hanno un match da  $e_{k+1}$  a  $k+1$ . Invece  $g_{k+1}$  resta fisso
- (b) se tale valore è 1 allora, per l'ordinamento,  $z$  ha un match migliore con  $y_{f_{k+1}}^{k+1}$  rispetto che con  $y_{f_{k+1}-1}^{k+1}$ . Si aggiorna quindi  $e_{k+1}$ , decrementandolo, fino a che si ha match tra  $z[e_{k+1}-1]$  e  $y_{f_{k+1}-1}^{k+1}[e_{k+1}-1]$ . Infine si incrementa  $g_{k+1}$  fino a che  $d_{k+1}[g_{k+1}] \leq e_{k+1}$ , per lo stesso ragionamento del caso precedente. Invece  $f_{k+1}$  resta fisso

Si noti inoltre che, a livello di inizializzazione, si hanno:

$$f_0 = g_0 = e_0 = 0$$

Quindi il primo step sarà già un caso in cui  $f_k = g_k$  qualora  $x_0[0] = y_0^0 \neq z[0]$ .

**Esempio 15.** Mostrare un esempio completo di esecuzione richiederebbe troppo tempo quindi ci si limita a mostrare cosa succede nel caso in cui, ad un certo punto dell'esecuzione si hanno  $f_{k+1} = g_{k+1}$ .

Si assuma il pannello e la matrice PBWT visti all'esempio 12 con una query  $z$ . Nel complesso si identificherebbero i seguenti match:

X	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
00	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
01	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
02	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
03	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
04	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
05	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
06	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
07	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
08	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
09	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
10	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
12	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
13	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
14	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
15	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
16	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
17	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
18	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
19	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
z	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1

Si assuma di essere in colonna  $k = 6$ , avendo, dopo i calcoli fatti in colonna  $k = 5$ :

- $f_6 = 6$
- $g_6 = 10$
- $e_6 = 0$

Avendo quindi che, a partire dalla colonne 0 fino alla colonna  $6 - 1 = 5$  si hanno le righe nel range  $[6, 10)$  di  $a_5$  che matchano con  $z[0, 5]$ .

Bisogna quindi aggiornare  $f$  e  $g$ . Si assuma che  $z[6] = 1$  e che:

$$y^6 = 000000000000100000000, \quad c[6] = 19$$

Si calcolano quindi:

$$f_7 = w_6(6, 1) = v_6[6] + c[6] = 0 + 19 = 19$$

$$g_7 = w_6(10, 1) = v_6[10] + c[6] = 0 + 19 = 19$$

Avendo quindi  $f_7 = g_7$  si procede, in primis, annotando i match terminanti in  $k_5$ . Seguendo l'algoritmo si ha quindi un primo aggiornamento di  $e_{k+1}$ , che viene inizializzato a, avendo in memoria  $d_7$  con random access in tempo costante:

$$e_7 = d_7[19] - 1 = 7 - 1 = 6$$

Questo viene fatto in quanto, come detto, l'aplotipo  $z$  si trova o subito prima del blocco di aplotipi  $[f_k, g_k]$ .

Essendo inoltre  $z[e_7] = z[6] = 1$  si procede aggiornando  $g$  e tenendo fermo  $f$ , avendo che, essendo  $z[6] = 1$ , gli aplotipi che matchano seguiranno nel mapping tramite il simbolo  $\sigma = 1$ . Si procede quindi inizializzando il nuovo  $g$ :

$$g_7 = f_7 + 1 = 20$$

ricordando che  $g$  può “superare” le dimensioni del pannello essendo escluso in  $[f_k, g_k]$ .

A questo punto si segue la linea specificata da  $f_7$  in  $a_7$  a ritroso, partendo da  $e_7 - 1$ , fino a che si hanno match con  $z$ , aggiornando così il valore di  $e_7$ .

In questo caso non si hanno altre operazioni, in quanto  $g_7 = M$  ma, qualora non lo fosse stato, si sarebbe incrementato  $g_7$  fino a che il corrispondente  $d_7[g_7]$  sarebbe stato minore o uguale di  $e_7$ , identificando tutte le nuove righe che hanno un match da  $e_7$  a  $k = 6$  con  $z$ .

### SISTEMARE ESEMPIO E CAPIRE SE METTERE LE IMMAGINI

L'algoritmo 5 è visualizzabile all'algoritmo 2.1 e, secondo i calcoli di Durbin, ha complessità  $\mathcal{O}(NM)$ , in quanto si ritiene che il numero di accessi ai loop interni sia limitato dalla costante rappresentante il numero di match,  $c$ . Nonostante ciò tale complessità temporale è ancora in corso di studio in quanto si hanno in letteratura evidenze della sua non correttezza. Un esempio è il paper di Naseri [21], dove si afferma che l'intuizione per cui tale costante  $c$  limiti superiormente gli accessi ai loop innestati sia falsa. Si noti che nell'articolo non viene però precisata una nuova misura per la complessità dell'algoritmo. **VERIFICARE ULTIMA FRASE (MA ANCHE TUTTO IL RESTO CHE VA SCRITTO MEGLIO)**

### Limiti spaziali

Bisogna affrontare la tematica della complessità in spazio di tale algoritmo. Ipotizzando di non ricalcolare colonna per colonna tutti i dati necessari (comportando



---

**Algoritmo 2.1** Algoritmo 5 di Durbin.

---

```

function FIND_SET_MAXIMAL_MATCHES_FROM_Z( $z$ )
  for  $k \leftarrow 0$  to  $N$  do
     $e, f, g \leftarrow \text{Update\_Z\_Matches}(k, z, e, f, g)$ 
function UPDATE_Z_MATCHES( $k, z, e, f, g$ )
   $f' \leftarrow w(k, f, z[k])$ 
   $g' \leftarrow w(k, g, z[k])$ 
  if  $f' < g'$  then                                      $\triangleright$  se  $k$  è  $N - 1$  match da  $e_k$  a  $N - 1$ 
     $e' \leftarrow e_k$ 
  else                                                     $\triangleright$  match da  $e_k$  a  $k$ 
     $e' \leftarrow d_{k+1}[f'] - 1$ 
    if  $z[e'] = 0$  and  $f' > 0$  then
       $f' \leftarrow g' - 1$ 
      while  $z[e' - 1] = y_{f'}^{k+1}[e' - 1]$  do  $e' \leftarrow e' - 1$ 
      while  $d_{k+1}[f'] \leq e'$  do  $f' \leftarrow f' - 1$ 
    else
       $g' \leftarrow f' + 1$ 
      while  $z[e' - 1] = y_{f'}^{k+1}[e' - 1]$  do  $e' \leftarrow e' - 1$ 
      while  $g' < M$  and  $d_{k+1}[g'] \leq e'$  do  $g' \leftarrow g' + 1$ 
  return  $e', f', g'$ 

```

---

un'incremento dal punto di vista temporale).

Ricapitolando, per poter eseguire l'algoritmo 5, si necessita di avere in memoria, con *random access* in tempo costante:

- il **pannello**  $X$ , di dimensione  $NM$
- il **prefix array**  $a_k$ , di dimensione  $NM$
- il **divergence array**  $d_k$ , di dimensione  $NM$
- i **vettori**  $u_k$  e  $v_k$ , complessivamente di dimensione  $2NM$
- il **vettore**  $c_k$ , di dimensione  $N$

Possiamo quindi dire che si ha una complessità in memoria pari a  $\mathcal{O}(NM)$  e, nel dettaglio, Durbin stima si tratti di  $13NM$  byte<sup>1</sup>.

Per poter capire meglio la problematica prendiamo ad esempio un pannello di medie dimensioni, con  $N = 30000$  e  $M = 100000$ . Ne segue che, secondo la stima di Durbin, si necessitano  $\sim 36.32$  gigabytes di memoria. Inoltre, una stima sperimentale di tale richiesta di memoria può essere confermata con l'esecuzione dell'implementazione della **PBWT** di Durbin stesso. Infatti, monitorando con `time` il picco di memoria durante l'esecuzione si ha che esso corrisponde a  $\sim 40.76$  gigabytes (comprensivi anche di tutto ciò che è “a contorno” all'algoritmo stesso). I dati quindi sembrano confermare le stime di Durbin e confermano l'alto uso di memoria richiesto dall'algoritmo 5. Questa è stata la motivazione principale per cui si è sviluppata, in questa tesi magistrale, una versione **run-length encoded** della struttura dati che permettesse di effettuare query con un aplotipo esterno.

## 2.6.2 Varianti della PBWT

Negli anni immediatamente successivi all'articolo di Durbin, una miriade di articoli e ricerche sono state svolte per migliorare la *PBWT*, crearne varianti o utilizzarla per portare a compimento vari studi. Non essendo tali lavori direttamente correlati a questa tesi non verranno approfonditi ma, soprattutto nell'ottica dei prospetti futuri, è bene citarne i principali.

### PBWT multiallelica

La prima variante che si introduce è la **PBWT multiallelica** (*mPBWT*), proposta da Naseri et al. nel 2019 [22]. Questo lavoro estende la *PBWT* di Durbin generalizzandola ad un alfabeto arbitrario.

<sup>1</sup><https://github.com/richarddurbin/pbwt/blob/0de8d02df1b77146ded81e9e196991fdab520767/pbwtMatch.c#L252>

Dal punto di vista delle motivazioni biologiche, questa soluzione risulta fondamentale, oltre che per lo studio di specie multialleliche (soprattutto nel mondo vegetale) in quanto gli studi riportano come, nell'uomo, la presenza di siti triallelici sia sotto stimata.

Da un punto di vista prettamente algoritmico si sono quindi estesi i concetti di  $c$ ,  $u_k$  e  $v_k$  visti nella *PBWT* per ottenere un vero e proprio *FM-index* in grado di lavorare su alfabeto arbitrario  $\Sigma$ , con conseguente forte aumento dello spazio richiesto in memoria. Da un punto di vista della complessità temporale, invece, si ha che le complessità degli algoritmi devono tenere conto anche della grandezza dell'alfabeto stesso, avendo però che, essendo esso tendenzialmente di dimensioni ridotte, questo fatto non comporta, in media, particolari problematiche dal punto di vista dei tempi di calcolo. Le complessità temporali della *mPBWT* infatti sono incrementate di un fattore  $t$ , con  $t = |\sigma|$ , e se tale valore è assunto costante ad inizio computazione, avendo che difficilmente si ha  $t \gg 2$ , la complessità temporale non subisce variazioni considerevoli.

### PBWT con struttura LEAP

Sempre nel 2019 Naseri et al. proposero anche una variante della *PBWT* che permettesse il calcolo non solo dei match massimali, come per l'algoritmo 5 di Durbin, ma anche qualsiasi match di lunghezza maggiore uguale ad una lunghezza arbitraria  $L$  [23]. Tale algoritmo fu nominato **PBWT-query**. Inoltre, nello stesso articolo, proposero una struttura dati aggiuntiva, detta **LEAP (*Linked Equal/Alternating Position*)**, che, al costo della memorizzazione di otto array aggiuntivi che permettessero di effettuare dei salti nella *matrice PBWT* (salvando gli indici del precedente/prossimo valore nella colonna uguale/diverso) e di memorizzare gli indici dei valori nel *divergence array* relativi a tali indici, che ottimizzava i tempi dell'algoritmo per la *PBWT-query* ottenendo l'algoritmo detto (**L-PBWT-query**).

### CAPIRE SE SPIEGARE MEGLIO, APPROFONDIRE E FORMALIZZARE GLI 8 ARRAY

Da un punto di vista computazionale si noti che la complessità dell'algoritmo per la *PBWT query*, con match di lunghezza minima  $L$  è:

$$\mathcal{O}(N + c(R - L + 1))$$

Avendo:

- $R$  lunghezza media dei match
- $c$  numero totale dei match

In merito ai tempi dell'algoritmo *L-PBWT-query* si ha invece che è, al costo di  $8NM$  byte, con  $N$  e  $M$  dimensioni del pannello, in più in memoria:

$$\mathcal{O}(N + c)$$

## VERIFICARE SIANO BYTE

### PBWT dinamica

Sanaullah et al., nel 2021, proposero la **Dynamic PBWT (*d-PBWT*)** [21], col fine di superare le limitazioni imposte dalle strutture statiche usate nella *PBWT* di Durbin. Si è quindi pensato di sostituire, per i vari elementi della *PBWT*, l'uso degli array, statici, con l'uso di *linked list*, dinamiche.

Grazie a alle *linked list* si è quindi reso possibile l'aggiornamento efficiente della *matrice PBWT* all'aggiunta di un nuovo aplotipo nel pannello o alla rimozione di uno.

Da un punto di vista computazionale è interessante notare come le implementazioni degli algoritmi di Durbin presentino la medesima complessità computazionale, a partire dalla creazione della *d-PBWT* in  $\mathcal{O}(NM)$  e che l'aggiunta e la rimozione di un aplotipo siano entrambe in tempo:

$$Avg. \mathcal{O}(N)$$

### PBWT con wildcard

La tematica dei dati mancanti è una tematica aperta in *bioinformatica*. I sequenziatori infatti presentano un range d'errore dal 1% al 15%, si ha a volte un basso *coverage* (ovvero il numero di read che contengono la base sequenziata per un certo locus del genoma) e la fase di assemblaggio del genoma può comportare errori. Questo, in fase di produzione dei pannelli, implica che in alcuni casi non si sappia quale sia l'allele corretto per un individuo riferendosi ad un sito.

Williams e Mumey, nel 2020, proposero quindi l'uso della **PBWT con wildcard** al fine di disegnare un algoritmo in grado di trovare i match interni ad un pannello bialeleico con dati mancanti, rappresentati come *wildcard* mediante il simbolo “\*” (avendo quindi  $\Sigma = \{0, 1, *\}$ ) [24].

In termini computazionali gli autori sono riusciti a formulare un algoritmo in grado di trovare tutti i match interni (ovvero i *blocchi*) massimali al pannello in tempo, con  $T$  numero di blocchi:

$$\mathcal{O}(NMT)$$

## CAPIRE SE PARLARE DI IMPUTE5

**IMPUTE5**

Per citare un uso della *PBWT* si può parlare di **genotype imputation**, ovvero il processo con il quale si predicono genotipi non ancora osservati in un campione di individui usando un pannello di aplotipi. Questo tipo di studio si basa sui dati prodotti dai **GWAS** (*Genome-wide association studies*), studi il cui scopo è quello di esaminare multipli genomi alla ricerca di associazioni tra varianti genetiche e malattie (o outcome specifici delle stesse), identificando varianti genomiche che sono statisticamente associati al rischio per una malattia.

A tal fine, nel 2020, Rubinacci et al. proposero **IMPUTE5** [25], un metodo basato sulla *PBWT* per la *genotype imputation* in grado di studiare pannelli di grandi dimensioni.

**CAPIRE SE DIRE ALTRO**

# Capitolo 3

## Metodo

In questo capitolo verranno illustrate le metodologie usate in questa tesi, trattando, sia dal punto di vista teorico che sperimentale, tutte le soluzioni che hanno portato alla costruzione della **RLPBWT**.

Nel dettaglio, dopo una breve introduzione agli strumenti computazionali usati, si approfondiranno tutte le varianti della **RLPBWT** ottenute durante lo studio, evidenziandone pro e contro

### 3.1 Introduzione agli strumenti usati

Prima di addentrarci negli aspetti più teorici è bene trattare gli strumenti computazionali usati durante la fase di sviluppo.

Dal punto di vista dei linguaggi di programmazione si sono usati:

- **C++**, per l'implementazione delle strutture dati e degli algoritmi
- **Python**, per la creazione della struttura a partire dal pannello in input e per gestire l'intera pipeline di sperimentazione, partendo dal *pre-processing* dell'input fino alla produzione dei grafici al termine della computazione

Nel dettaglio la costruzione della **RLPBWT**, i cui singoli step verranno approfonditi nel corso del capitolo, si articola nel seguente modo:

1. **input:** pannello binario generato tramite **MaCS**
2. **opzionale:** produzione dell'**SLP** del pannello
3. **step intermedio:** estrazione dal pannello in input di un pannello di query di grandezza selezionata dall'utente e costruzione della struttura dati

4. **opzionale:** serializzazione della struttura dati
5. **output:** file contenente i risultati dei match

Si specifica che per il file di output si è mantenuto lo stesso formato utilizzato da Durbin nella sua implementazione della **PBWT** [26]. Tale formato prevede, per facilitarne il parsing, un **tsv** (*tab-separated values*) con le seguenti colonne:

1. colonna semplicemente indicante che si ha un *MATCH*
2. l'indice della query di cui si annota il match
3. l'indice dell'aplotipo per cui si ha il match
4. l'indice della colonna da cui parte il match
5. l'indice della colonna in cui termina il match
6. la lunghezza del match

Un esempio è visualizzabile alla listing C.1.

### 3.1.1 MaCS

#### RIVEDERE!

**MaCS** [27], sviluppato da Gary K. Chen, è un simulatore di *processi coalescenti*, basati sulla **teoria della coalescenza**. Tale teoria è un modello di come gli alleli campionati da una popolazione possano essere originati da un antenato comune. Il tool simula genealogie spaziali tra i cromosomi sfruttando processi Markoviani. Nel dettaglio il lavoro è fortemente ispirato dai risultati di Wiuf e Hein [28], che per primi proposero un algoritmo basato sulla costruzione e sulla memorizzazione di un **ancestral recombination graph (ARG)**.

Chen stesso segnala le seguenti differenze con l'algoritmo di Wiuf e Hein:

- gli eventi di ricombinazione si verificano solo sulla geneologia locale nella posizione attuale sulla sequenza invece che in qualsiasi altro punto dell'*ARG*, ma possono unirsi a qualsiasi lignaggio sull'*ARG* compresi quelli non sulla geneologia locale (ad esempio un arco non ancestrale)
- i tempi di attesa (ovvero la distanza tra le ricombinazioni sulla sequenza) sono calcolati in modo esponenziali con intensità basata sulla lunghezza dell'arco della geneologia locale invece della lunghezza *ARG*
- l'algoritmo è detto dell'*n*-esimo ordine Markoviano, dove *n* è basato sui parametri inserito dall'utente

L'autore ricorda che queste modifiche rendono l'algoritmo sostanzialmente più efficiente del Wiuf e Hein con poca perdita di precisione.

Dal punto di vista pratico l'esecuzione di *MaCS* produce i pannelli binari, da intendersi come pannelli di aplotipi, che verranno poi studiati tramite la *PBWT* e la *RLPBWT*. Tali pannelli presentano:

- un header, con informazioni in merito al comando usato e al seed
- una riga per ogni sito, con prima alcune informazioni in merito a come è stato prodotto il dato e poi la sequenza di valori binari, uno per ogni sample
- un footer, con ulteriori informazioni, tra cui le dimensioni del pannello

Quindi, trascurando le varie informazioni aggiuntive, il pannello è **trasposto** rispetto a quanto studiato dalla *PBWT* e dalla *RLPBWT*. Questa però risulta essere una comodità in quanto, leggendo iterativamente il file, si legge di volta in volta la *i*-esima colonna, ovvero quanto serve per la costruzione della struttura dati.

Per capire meglio come venga prodotto un pannello tramite questo strumento, analizziamo un semplice esempio:

```
./macs 5 3000 -t 0.001 -r 0.001
```

Dove:

- 5 è il numero di sample richiesto, ovvero il numero di sequenze che il software simulerà
- 3000 è la lunghezza in paia-basi della regione genomica su cui verranno simulate le 5 sequenze
- -t 0.001 segnala il *mutation rate* per ogni sito, ovvero la frequenza di *nuove mutazioni* per un sito nel tempo
- -r 0.001 segnala il *recombination rate* per ogni sito, ovvero la frequenza di *ricombinazioni geniche*, che sono i processi per i quali si ottengono nuove combinazioni di alleli a partire da un *genotipo*, per un sito nel tempo

Il risultato, dove si noti vengono selezionati 4 siti dopo la simulazione, del comando appena descritto è visualizzabile alla listing C.2.

**MANCA SIGNIFICATO DEGLI “HEADER” DI OGNI SITE NEL RISULTATO.**



### 3.1.2 SDSL

La libreria più utilizzata nel progetto, come anche in diverse sue dipendenze, è **Succinct Data Structure Library (SDSL)** [1]. Questa libreria, scritta in C++11, fornisce diverse implementazioni riguardanti strutture dati succinte, come i già citati, nella sezione 2.2, **bitvectors**.

Nel dettaglio, in questo progetto, *SDSL* è stata usata per:

- gli **sparse bitvectors**, il cui uso specifico verrà specificato più avanti nel capitolo
- i cosiddetti **int vectors**, ovvero vettori di interi memorizzati in modo efficiente
- le funzioni di atto a gestire le **serializzazioni** delle strutture dati implementate
- stimare, in certi casi, lo **spazio in memoria** richiesto per le varie strutture

### 3.1.3 BigRePair e ShapedSlp

Come introdotto alla sezione 2.3, una delle varianti della **RLPBWT**, richiede l'uso, estremamente vantaggioso dal punto di vista della memoria occupata, degli **SLP**.

Da un punto di vista implementativo, l'oggetto contenente l'*SLP* del pannello viene costruito ed interrogato mediante l'uso della libreria **ShapedSlp** [29], implementazione dei risultati ottenuti da Gagie et al. [3]. Inoltre, tale libreria basa il suo funzionamento sull'uso di un'altra libreria, detta **BigRePair** [30], che implementa i quanto studiato da Gagie et al. [31] in merito alla compressione, via uso di grammatiche, di file con frequenti ripetizioni (come possono essere, nel nostro caso, pannelli binari di aplotipi).

In termini di pipeline si procede quindi:

1. generando la *grammatica* tramite *BigRePair*, che accetta come file di input un file **txt** "raw" ma anche un file in formati più standard come i *FASTA*
2. generando l'*SLP* tramite *ShapedSlp* specificatamente a partire dai risultati di *BigRePair* (si segnala che la libreria accetta anche input prodotti tramite altri tool che non verranno qui approfonditi)

### Compressione del panel

I tool appena citati assumono un input “monodimensionale”, ovvero una singola sequenze lineare. Nel nostro caso l’input era invece un file `.macs` con rappresentato il pannello trasposto. Nel dettaglio, assumendo di avere il pannello come nella listing C.2 (pannello al quale sono già state estratte le query), si avrebbe, isolando:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dove però come detto le righe sono i siti e le colonne i sample. Per ottenere l’*SLP* bisogna quindi, in primis, trasporre la matrice:

$$X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per procedere ulteriormente bisogna però ricordare che sull’*SLP* si avrà necessità di effettuare *LCE query* che però, si anticipa, nel nostro pannello, devono essere fatte tra due righe da destra a sinistra (a differenza di quanto visto nel caso standard dove si confrontavano prefissi comuni). Ad esempio, prendendo la seconda e la terza riga, avremmo una *LCE query* lunga 3, terminante nella prima colonna esclusa:

$$X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per rendere possibile questa operazione quindi il pannello deve essere sia salvato come un’unica riga, per ottenerne l’*SLP*, che “da destra a sinistra”, per permettere le *LCE query*. Si procede quindi concatenando ogni riga, selezionandole consecutivamente e leggendone i singoli elementi da destra a sinistra ottenendo, con colorate gli stessi risultati della query fatta sopra:

0010 0110 0111 1100 0110

*Si noti che qui si sono segnalate le varie righe con uno spazio ma solo per praticità “visiva”.*

### 3.1.4 Snakemake

PARTE DA FARE UNA VOLTA STABILITA LA PIPELINE FINALE

## 3.2 Introduzione alle varianti della RLPBWT

Lo sviluppo di questo progetto di tesi è stato tale per cui si sono sviluppate varie implementazioni della **RLPBWT**. Tali varianti non sono da intendersi ugualmente valide ma corrispondono al percorso evolutivo che c'è stato nell'ultimo anno di studio e ricerca in merito. Riassumendo il tutto si vedranno:

- una prima implementazione *naive*, detta appunto **RLPBWT naive**, che corrisponde al primo tentativo di studio. Questa soluzione non permette di sapere quali righe del pannello stanno matchando ma solo quali
- si è quindi iniziato ad introdurre l'uso dei *bitvectors*, con la **RLPBWT con bitvectors**, il cui funzionamento è pressoché analogo alla versione *naive* al più dell'uso di tali strutture succinte per il funzionamento del mapping. Questa soluzione non permette di sapere quali righe del pannello stanno matchando ma solo quali
- il primo sostanziale “cambio di paradigma”, si ha avuto con la **RLPBWT con pannello denso**, variante in cui, oltre all'uso dei *bitvectors* si è proceduto al calcolo dei match tramite *matching statistics* e *LCE query*. Questa soluzione permette di sapere l'indice di una sola riga per la quale si sta avendo un match con il pattern
- migliorando la soluzione precedente con l'uso dell'*SLP* per la memorizzazione del pannello si è ottenuta la **RLPBWT con SLP**. Questa soluzione permette di sapere l'indice di una sola riga per la quale si sta avendo un match con il pattern
- con l'implementazione della **funzione  $\varphi$**  per la **RLPBWT** si è permesso di estendere i risultati delle ultime due varianti in modo da ottenere tutti i match con tutti gli indici delle righe per cui si hanno tali match con il pattern

Si può quindi iniziare ad apprezzare il percorso evolutivo e incrementale vissuto con questo progetto.

### 3.2.1 Perché un'implementazione run-length

Prima di proseguire con la spiegazione dettagliata delle varianti è bene dare una prima motivazione al perché si sia ritenuto utile sviluppare una variante **run-length encoded** della **PBWT**.

Citando direttamente il paper di Durbin del 2014 [20], in cui si introduce la struttura:

*Furthermore we can also expect the  $y$  arrays to be strongly run-length compressible. This is because population genetic structure means that there is local correlation in values due to linkage disequilibrium, which means that haplotypes with similar prefixes in the sort order will tend to have the same allele values at the next position, giving rise to long runs of identical values in the  $y$  array. So the PBWT can easily be stored in smaller space than the original data.*

Dove, con la dicitura *y arrays*, si ottengono le colonne già permutate della **matrice PBWT**.

Quindi il risultato atteso è quello per cui aplotipi simili, che ad ogni step saranno consecutivi nel riordinamento, è molto probabile presentino lo stesso allele nella colonna di cui si sta in quel momento calcolando la permutazione. Ne segue che, all'interno della **matrice PBWT**, è molto probabile che si abbiano, consecutivamente, lunghe run di 0 e di 1.

Si noti quindi che si ottiene quindi il medesimo risultato atteso che si ha con la **BWT**, avendo che caratteri uguali è probabile che vengano posti in modo consecutivo all'interno della **BWT** stessa. Si hanno quindi le stesse premesse che hanno portato alla **RLBWT**, considerando inoltre che, come in quel caso, non si tratta solo di memorizzare la struttura con compressione run-length ma di lavorare direttamente con la struttura dati compressa, risolvendo il problema del pattern matching senza decomprimere la struttura dati.

### 3.2.2 Una prima proposta

## 3.3 RLPBWT naive

Un primo approccio alla **compressione run-length** è stato quello di semplicemente “adattare” quanto presentato da Durbin. Soprattutto a causa di questo fattore tale approccio è stato nominato **RLPBWT naive**.

L'idea è stata quella di capire quali informazioni fossero necessarie al fine di poter calcolare i match. Si è quindi partiti studiando quanto memorizzato da Durbin stesso, pensando ad eventuali alternative.

Il dato fondamentale che la **PBWT** tiene in memoria è *il pannello  $X$ , con random access*. Ovviamente memorizzare l'intero pannello non era possibile. D'altro canto

l'idea dietro la **RLPBWT** è quella di memorizzare con *compressione run-length* la *matrice PBWT*. La soluzione iniziale è stata quindi quella di memorizzare gli indici delle *teste di run*, ovvero gli indici iniziali di ogni run. Ovviamente questa informazione non è sufficiente per poter sapere se una run sia composta da simboli  $\sigma = 0$  o simboli  $\sigma = 1$ . Fortunatamente, essendo lo studio limitato, come per la *PBWT*, a pannelli costruiti su alfabeto binario,  $\Sigma = \{0, 1\}$ , si è potuto sfruttare il fatto che le run si alternano tra un carattere e l'altro. Basta quindi tenere in memoria anche un valore booleano, nominato  $start^k$ , che permetta di capire se, in colonna  $k$ , la prima run sia una run di simboli  $\sigma = 0$ . Infatti le run di indice pari presentano lo stesso simbolo della prima run e quindi, dato un qualsiasi indice di run, è possibile sapere quale sia il simbolo di tale run.

Si memorizzano gli indici delle teste di run in un array  $p_k$ , di lunghezza pari al numero di run in colonna  $k$ .

Il passaggio successivo è stato quello di capire se le informazioni necessarie al mapping fossero tutte necessarie. In altri termini se, data la colonna  $k$  nella *matrice PBWT*, fossero necessari  $c[k]$ ,  $u_k$  e  $v_k$ . In merito al valore  $c[k]$ , per quanto calcolabile in tempo  $\mathcal{O}(r)$ , dove  $r$  è il numero di run della colonna  $k$ -esima, si è deciso che si potesse calcolarlo in fase di costruzione delle *RLPBWT* e memorizzarlo esattamente come per la *PBWT*. In merito invece ai vettori  $u_k$  e  $v_k$  si è cercato un modo per ottenerne una rappresentazione che implicasse avere un solo valore per ogni run della colonna. In altri termini si è cercato di capire se fosse possibile tenere in memoria  $r$  valori che permettessero di effettuare comunque il mapping, a partire da un indice arbitrario  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ . Anche in questo caso l'alternanza data dal caso binario ha permesso di trovare una semplice soluzione. I valori di  $u_k$  e  $v_k$  crescono infatti in modo alternato. A seconda del simbolo  $\sigma$  rappresentato in una data run infatti si avrà che solo i valori dell'array relativo a tale simbolo, nel range di indici di quella run, verranno incrementati ad ogni passo di una unità. Per fare un semplice esempio, se siamo in una run di 0 e iteriamo virtualmente all'interno di tale run, solo i valori di  $u_k$ , in quel range di indici, cresceranno di volta in volta di uno mentre per  $v_k$ , nello stesso range, si avrà sempre lo stesso valore.

**Esempio 16.** Si vede un esempio per chiarire meglio quanto espresso in merito a  $u_k$  e  $v_k$ .

Sia data la seguente colonna:

$$y^5 = 00101111000000000000$$

Si hanno, oltre a  $c[5] = 15$ :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$y^5$	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_5$	0	1	2	2	3	3	3	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$v_5$	0	0	0	1	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Grazie a questa alternanza è quindi possibile memorizzare, per ogni indice di testa di run  $i$ , tale che  $i \neq 0$ , solo il valore di  $u_k[i]$  o  $v_k[i]$ , rispettivamente se sia una run su simboli  $\sigma = 1$  o  $\sigma = 0$ . Questo in quanto, se si analizza una run di zeri si avrà che solo i valori di  $v_k$ , nel range della run, verranno incrementati ad ogni step. Per  $i = 0$  banalmente si ha che  $u_k[i] = v_k[i] = 0$ .

Memorizzando i valori di  $u_k$  e  $v_k$  in un array  $uv_k$ , tale che  $|uv_k| = |r|$ , dove  $r$  è il numero di run alla colonna  $k$ -esima, e dato  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ , a seconda che la colonna presenti o meno la prima run con simboli  $\sigma = 0$ , si possono estrarre, in tempo costante, i valori di  $u_k$  e  $v_k$  per una data testa di run. Nel dettaglio, dato  $i \in 0, \dots, r-1$ :

- se  $i = 0$  si ha che  $u_k[p[i]] = v_k[p[i]] = uv_k[0] = 0$
- se  $i \bmod 2 = 0$  si hanno due casi:
  - la prima run è di simboli  $\sigma = 0$  e quindi si ottiene  $u_k[p[i]] = uv_k[i-1]$  e  $v_k[p[i]] = uv_k[i]$
  - la prima run è di simboli  $\sigma = 1$  e quindi si ottiene  $u_k[p[i]] = uv_k[i]$  e  $v_k[p[i]] = uv_k[i-1]$
- se  $i \bmod 2 \neq 0$  si hanno due casi:
  - la prima run è di simboli  $\sigma = 0$  e quindi si ottiene  $u_k[p[i]] = uv_k[i]$  e  $v_k[p[i]] = uv_k[i-1]$
  - la prima run è di simboli  $\sigma = 1$  e quindi si ottiene  $u_k[p[i]] = uv_k[i-1]$  e  $v_k[p[i]] = uv_k[i]$

Lo pseudocodice relativo a quanto appena detto è consultabile all'algoritmo B.5. In questa prima soluzione, infine, si è deciso di non mantenere in memoria il *prefix array* e di mantenere completamente il *divergence array*, sotto forma di *LCP array*, per poter, da un punto di vista informale, reimplementare l'algoritmo 5 di Durbin solo con meno informazioni in memoria. Il non memorizzare il *prefix array*, d'altro canto, impedisce di identificare con precisione le righe del pannello per cui si ha un match quindi l'algoritmo, che verrà presentato più avanti nella tesi, è limitato al poter sapere quante righe matchano e non quali.

**INSERIRE ALGORITMO DI COSTRUZIONE**

In conclusione si riporta quindi un esempio dei dati memorizzati, per una data colonna, nella *RLPBWT naive*.

**Esempio 17.** *Sia data la seguente colonna:*

$$y^5 = 0010111110000000000000$$

*Per la RLPBWT naive si hanno in memoria:*

$$p_5 = [0, 2, 3, 4, 8]$$

$$uv_5 = [0, 2, 1, 3, 5]$$

$$c[5] = 15$$

$$l_5 = [0, 5, 4, 1, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 5, 5, 5, 2, 5, 1, 5, 5]$$

### QUI MANCA SPEIGAZIONE OFFSET

Si ha quindi già una forte riduzione dello spazio in memoria occupato dalla struttura, questo nonostante la memorizzazione completa dell'*LCP array*. Riprendendo quindi l'esempio già visto per la *PBWT*, dato un pannello di medie dimensioni, con  $N = 30000$  e  $M = 100000$ , si ha che l'uso della *RLPBWT naive* richiede  $\sim 8.17$  gigabytes di memoria (rispetto ai  $\sim 40.76$  gigabytes della *PBWT*).

*La spiegazione dell'algoritmo di match è rimandata a dopo l'introduzione della seconda variante, ovvero della **RLPBWT con bitvector**, in quanto le due versioni condividono, ad un alto livello di astrazione, il medesimo procedimento per il calcolo dei match.*

## 3.4 RLPBWT con bitvectors

Al fine di compiere un ulteriore passo verso la formulazione di una struttura dati efficiente dal punto di vista dello spazio in memoria per la **RLPBWT**, si è provveduto a modificare la versione *naive* al fine di introdurre l'uso dei **bitvectors**. Questo è stato fatto al fine di ottenere una rappresentazione in memoria della stessa che fosse ancora più efficiente. Come si vedrà questa versione intermedia non comporterà un miglioramento effettivo del consumo di memoria ma permetterà di avere la base su cui costruire le versioni successive.

L'idea è quindi quella di sostituire, data una colonna  $k$ , quanto necessario a rappresentare le run (ovvero il vettore  $p_k$  della variante naive) e quanto necessario a permettere il mapping (ovvero il vettore  $uv_k$ ).

In primis, per poter localizzare le run nella  $k$ -esima colonna, si è scelto di usare

un *bitvector*, che denominiamo per praticità  $h_k$ , tale che  $|h_k| = N$ . Formalmente si ha che:

$$h_k[i] = \begin{cases} 1 & \text{se } y^k[i] \neq y^k[i+1] \vee i == N-1, \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Informalmente, quindi, si ha che si ha 1 in  $h_k$  in tutti gli indici corrispondenti alla fine di una run.

Empiricamente ci si aspettano “poche” run all’interno di una colonna della *matrice PBWT*, per quanto già discusso nella sezione 2.6. Avendo poche run ci si aspetta anche “pochi” 1 all’interno di  $h_k$ , di conseguenza si è optato per usare gli **sparse bitvector** per la memorizzazione in memoria di ogni  $h_k$ , ricordando che, secondo quanto riportato per la libreria *SDSL* [1], tale variante richiede in memoria, indicando con  $r$  il numero di run:

$$\approx r \left( 2 + \log \frac{|h_k|}{r} \right) \text{ bit}$$

### VERIFICARE CHE SIANO BITS

Più elaborata è la rappresentazione dei vettori  $u_k$  e  $v_k$ . In questo caso si è deciso, a differenza della rappresentazione unica vista nella *RLPBWT naïve*, di optare per due *sparse bitvector*. In particolare, per il vettore  $u_k$ , tale che  $|u_k| = c[k]$ , si ha che:

$$u_k[i] = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è il numero di simboli che contiene la } \text{rank}_{u_k}(i)\text{-esima run di } 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$\forall i \in \{0, \dots, |u_k| - 1\}$$

Analogamente si definisce  $v_k$ , tale che  $|v_k| = N - c[k]$  come:

$$v_k[i] = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è il numero di simboli che contiene la } \text{rank}_{v_k}(i)\text{-esima run di } 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$\forall i \in \{0, \dots, |v_k| - 1\}$$

Si noti che:

$$\text{rank}_{h_k}(|h_k| - 1) + 1 = (\text{rank}_{u_k}(|u_k| - 1) + 1) + (\text{rank}_{v_k}(|v_k| - 1) + 1)$$

Ovvero il numero di 1 presenti in  $h_k$  è pari alla somma di quelli presenti in  $u_k$  e  $v_k$ . Ne segue che, anche per questi ultimi due vettori, la scelta di usare *sparse bitvector* per la loro memorizzazione sia giustificata dalla poca quantità, empiricamente, di simboli  $\sigma = 1$ .

Si vede un esempio chiarificatore.



**Esempio 18.** Sia data la seguente colonna:

$$y^5 = 0010111110000000000000$$

Si ha quindi che:

$$h_5 = 0111000100000000000001$$

Avendo appunto un numero di run pari a:

$$\text{rank}_{h_5}(|h_5|) + 1 = 4 + 1 = 5$$

In merito alle run composte da simboli  $\sigma = 0$  si ha che:

$$u_5 = 0110000000000001$$

Avendo infatti che si segnalano:

- la prima run composta da due simboli  $\sigma = 0$
- la seconda run composta da un solo simbolo  $\sigma = 0$
- la terza run composta da dodici simboli  $\sigma = 0$

Parlando invece di  $v_5$  si ha:

$$v_5 = 10001$$

Avendo che:

- la prima run è composta da un solo simbolo  $\sigma = 1$
- la seconda run è composta da quattro  $\sigma = 1$

Le restanti informazioni, ovvero, per la colonna  $k$ , il valore  $c[k]$ , il booleano  $\text{start}^k$  e l'LCP array  $l_k$  sono le medesime della variante *naive* della RLPBWT (motivo per quale solo a breve si tratterà l'algoritmo di match).

Lo pseudocodice relativo alla costruzione della colonna  $k$ -esima della **RLPBWT con bitvector** è disponibile all'algoritmo B.3 (dove sono presenti anche le istruzioni per le varianti che verranno trattate in seguito).

#### CAPIRE SE METTERE UNO PSEUDO A PARTE

Bisogna spiegare come, data un indice di apotipo  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  e una colonna  $k$ , estrarre  $u'_k[i]$  e  $v'_k[i]$ , ovvero come se si stesse usando la PBWT classica, a partire dagli attuali  $u_k[i]$  e  $v_k[i]$ . Ovviamente, se  $i = 0$ , si ha che  $u'_k[0] = v'_k[0] = 0$ . In caso contrario bisogna capire la run in cui si trova l'indice  $i$ . Questo si ottiene direttamente sfruttando  $h_k$ :

$$\text{run} = \text{rank}_{h_k}(i)$$

Una volta calcolato l'indice di run si hanno tre possibilità:

1. si ha che  $run = 0$  e una run di simboli  $\sigma = b$ , con  $b \in \{0, 1\}$  allora:

$$(u, v) = \begin{cases} (i, 0) & \text{se } b = 0 \\ (0, i) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. si ha che  $run = 1$  e una run di simboli  $\sigma = b$ , con  $b \in \{0, 1\}$ . In tal caso bisogna per prima cosa individuare l'indice di inizio della seconda run, sfruttando  $h_k$ :

$$beg = select_{h_k}(1) + 1$$

A questo punto si ha il numero di simboli della prima run, indicizzata a 0, e, calcolando la distanza tra l'indice di riga e quello di inizio della prima run, avendo che:

$$(u, v) = \begin{cases} (beg, i - beg) & \text{se } b = 0 \\ (i - beg, beg) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3. si ha che  $run = j$ , con  $j \in \{2, r - 1\}$ . Anche in questo caso si procede calcolando l'indice di inizio della run:

$$beg = select_{h_k}(run) + 1$$

e l'offset rispetto all'indice  $i$  dato:

$$offset = i - beg$$

Poi, sfruttando la solita dicotomia fornita dal caso binario in studio, si hanno due casi:

- (a) si è in una run di indice pari. Si sfruttano poi  $u_k$  e  $v_k$  per sapere l'indice della precedente run con simboli  $\sigma = 0$ :

$$pre_u = select_{u_k} \left( \left\lfloor \frac{run}{2} \right\rfloor \right) + 1$$

e quello della run con simboli  $\sigma = 1$ :

$$pre_v = select_{v_k} \left( \left\lfloor \frac{run}{2} \right\rfloor \right) + 1$$

Si noti che si usa  $\frac{run}{2}$  in quanto, essendo in una run di indice pari si hanno precedentemente lo stesso numero di run per  $\sigma = 0$  e per  $\sigma = 1$  e quindi si considera lo stesso numero di “run” nei due bitvector  $u_k$  e  $v_k$ .

A questo punto, sempre per il ragionamento per cui solo uno tra  $u$  e  $v$  non è costante all'interno di una run si ha che o  $pre_u$  o  $pre_v$  è tale costante mentre l'altro valore deve essere calcolato considerando l'offset:

$$(u, v) = \begin{cases} (pre_u + offset, pre_v) & \text{se } b = 0 \\ (pre_u, pre_v + offset) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (b) ci si trova in una run di indice dispari, quindi non si hanno precedentemente lo stesso numero di run per i due simboli. Bisogna quindi calcolare quante siano tali run. Se la prima run è di zeri:

$$run_u = select_{u_k} \left( \left\lfloor \frac{run}{2} \right\rfloor \right) + 1$$

$$run_v = select_{v_k} \left( \left\lfloor \frac{run}{2} \right\rfloor \right)$$

mentre se la prima run non è di zeri si devono invertire i due valori. Si sa quindi quali “run” considerare sui due bitvector  $u_k$  e  $v_k$ .

Posso quindi procedere come nel caso precedente, avendo:

$$pre_u = select_{u_k}(run_u) + 1$$

$$pre_v = select_{v_k}(run_v) + 1$$

E potendo quindi restituire:

$$(u, v) = \begin{cases} (pre_u, pre_v + offset) & \text{se } b = 0 \\ (pre_u + offset, pre_v) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## SPIEGAZIONE DA MIGLIORARE

**Esempio 19.** Si prendano i dati e i risultati ottenuti all'esempio 18. Si vogliono calcolare  $u$  e  $v$  per  $i = 6$ .

In primis si ha quindi:

$$run = rank_{h_5}(6) = 3$$

:

$$beg = select_{h_5}(3) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$offset = i - beg = 6 - 4 = 2$$

Quindi ci si trova nel terzo caso e, nel dettaglio, avendo una run di indice dispari. Si calcolano quindi:

$$run_u = select_{u_5} \left( \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \right) + 1 = select_{u_5}(1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$run_v = select_{v_5} \left( \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \right) = select_{v_5}(1) = 0$$

che non andranno invertiti avendo  $start^5 = \top$ .  
Si calcolano quindi:

$$pre_u = select_{u_5}(2) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$pre_v = select_{v_5}(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Avendo infatti, in totale, tre simboli  $\sigma = 0$  e un simbolo  $\sigma = 1$  prima dell'indice 6. Concludendo, avendo  $start^5 = \top$ :

$$(u, v) = (pre_u, pre_v + offset) = (3, 1 + 2) = (3, 3)$$

L'algoritmo per il calcolo di  $u$  e  $v$ , tenendo in considerazione che tale metodo verrà usato anche nelle varianti che verranno presentate in seguito della *RLPBWT*, è disponibile all'algoritmo B.6.

### 3.5 Algoritmo per match massimali

Avendo presentato le prime due varianti della **RLPBWT**, concettualmente simili tra loro e diverse dalle successive due varianti, è possibile discutere dell'algoritmo di match con un aplotipo esterno, che riprende esattamente quanto discusso nell'algoritmo 5 di Durbin.

Il metodo procede quindi con l'aggiornamento dei tre indici  $e_k$ ,  $f_k$  e  $g_k$ , avendo che gli ultimi due possono assumere qualsiasi valore in  $\{0, M\}$ , come con la *PBWT* classica. Avendo memorizzato solo informazioni relative alle *run* bisogna quindi, ogni volta, ricondurre l'indice alla run corretta:

- nella *RLPBWT naive* si risale all'indice di run a cui appartiene un certo indice, in colonna  $k$ , in  $\{0, M\}$  scorrendo l'array  $p_k$
- nella *RLPBWT con bitvector* la medesima operazione viene risolta usando la funzione  $rank_{h_k}$

Inoltre Durbin sfruttava il *random access* al pannello, avendo in memoria sia il pannello che il *prefix array*, al fine di aggiornare il valore di  $e_k$ . In entrambe le versioni già presentate della *RLPBWT* non si ha in memoria né il *prefix array* né il pannello ma solo solo la rappresentazione compatta della *matrice PBWT*. Si è quindi dovuto pensare ad un metodo che ricomponga data una riga  $x_j$  del pannello  $X$  a partire da un elemento, indicizzato con  $i$  alla colonna  $k + 1$ , della *matrice PBWT*, muovendosi da destra a sinistra e seguendo in modo inverso il *mapping*.

Per ottenere l'indice alla colonna  $k$ -esima da cui “proviene” l'indice  $i$  in colonna  $k + 1$  si inizia analizzando il valore  $c[k]$ . Infatti, se  $i < c[k]$ , allora sicuramente, in colonna  $k$ , è un indice corrispondente a  $\sigma = 0$  quello dal quale proviene, ricordando come la costruzione della colonna  $k + 1$  nella *matrice PBWT* si abbia grazie ad un *passo di radix sort* con ordinamento stabile. Si sfruttano così ho l'array  $p_k$  o le funzioni  $rank_{h_k}$  e  $select_{h_k}$  per risalire all'indice in colonna  $k$ , calcolando prima l'indice di run e l'eventuale offset, per il quale il mapping porta all'indice  $i'$  in colonna  $k + 1$ , seguendo “virtualmente” la riga  $x_j$  del pannello originale.

Per quanto riguarda la *RLPBWT naive* si ha lo pseudo codice per il mapping inverso consultabile all'algoritmo B.10 mentre per quanto riguarda la *RLPBWT con bitvector* si ha l'algoritmo B.11.

#### CAPIRE QUANTO APPROFONDIRE I DUE ALGORITMI.

Si procede quindi riadattando l'algoritmo di Durbin all'uso delle *run*, ottenendo, ad ogni step, i medesimi valori per  $e_k$ ,  $f_k$  e  $g_k$ . Le uniche differenze sono:

- il calcolo del mapping necessita dell'estrazione dei valori  $u$  e  $v$ , tenendo conto esplicito degli offset nel caso della *RLPBWT naive*
- non si ha *random access* al pannello quindi bisogna procedere ogni volta con il'inverso del mapping e il calcolo del simbolo a partire dall'indice della run
- non si ha il *prefix array* in memoria quindi non è possibile sapere quali siano le righe che stanno matchando fino alla colonna  $k$  ma solo quante, sapendo che sono  $g_k - f_k$

Anche in questo caso i due algoritmi sono consultabili, rispettivamente, all'algoritmo B.12 e all'algoritmo B.13.

#### APPROFONDIRE SPIEGAZIONE ALGORITMI

## **3.6 RLPBWT con pannello denso**

### **3.6.1 Algoritmo con matching statistics**

## **3.7 RLPBWT con SLP**

### **3.7.1 Algoritmo con matching statistics**

## **3.8 Funzione Phi**

### **3.8.1 Costruzione della struttura di supporto**

### **3.8.2 Estensione dei match**

# Capitolo 4

## Risultati

### 4.1 Ambiente di benchmark

#### 4.1.1 Descrizione input

### 4.2 Analisi della complessità

#### 4.2.1 Analisi temporale

#### 4.2.2 Analisi spaziale

# Capitolo 5

## Conclusioni

### 5.1 Sviluppi futuri

#### 5.1.1 K-mems

#### 5.1.2 RLPBWT multi-allelica

#### 5.1.3 RLPBWT con dati mancanti



# Bibliografia e sitografia

- [1] Simon Gog, Timo Beller, Alistair Moffat, and Matthias Petri. From theory to practice: Plug and play with succinct data structures. In *13th International Symposium on Experimental Algorithms, (SEA 2014)*, pages 326–337, 2014.
- [2] Markus Lohrey. Algorithmics on slp-compressed strings: A survey. *Groups-Complexity-Cryptology*, 4(2):241–299, 2012.
- [3] Travis Gagie, Giovanni Manzini, Gonzalo Navarro, Hiroshi Sakamoto, Louisa Seelbach Benkner, Yoshimasa Takabatake, et al. Practical random access to slp-compressed texts. In *International Symposium on String Processing and Information Retrieval*, pages 221–231. Springer, 2020.
- [4] Udi Manber and Gene Myers. Suffix arrays: a new method for on-line string searches. *siam Journal on Computing*, 22(5):935–948, 1993.
- [5] Dan Gusfield. *Algorithms on Strings, Trees, and Sequences: Computer Science and Computational Biology*. Cambridge University Press, 1997.
- [6] Juha Kärkkäinen, Giovanni Manzini, and Simon J Puglisi. Permuted longest-common-prefix array. In *Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching*, pages 181–192. Springer, 2009.
- [7] Kunihiro Sadakane. Succinct representations of lcp information and improvements in the compressed suffix arrays. In *SODA*, volume 2, pages 225–232, 2002.
- [8] Christina Boucher, Travis Gagie, I Tomohiro, Dominik Köppl, Ben Langmead, Giovanni Manzini, Gonzalo Navarro, Alejandro Pacheco, and Massimiliano Rossi. Phoni: Streamed matching statistics with multi-genome references. In *2021 Data Compression Conference (DCC)*, pages 193–202. IEEE, 2021.
- [9] Toru Kasai, Gunho Lee, Hiroki Arimura, Setsuo Arikawa, and Kunsoo Park. Linear-time longest-common-prefix computation in suffix arrays and its applications. In *Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching*, pages 181–192. Springer, 2001.

- [10] Michael Burrows and David Wheeler. A block-sorting lossless data compression algorithm. 1994.
- [11] Veli Mäkinen and Gonzalo Navarro. Succinct suffix arrays based on run-length encoding. In *Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching*, pages 45–56. Springer, 2005.
- [12] Alberto Policriti and Nicola Prezza. Lz77 computation based on the run-length encoded bwt. *Algorithmica*, 80(7):1986–2011, 2018.
- [13] Travis Gagie, Gonzalo Navarro, and Nicola Prezza. Fully functional suffix trees and optimal text searching in bwt-runs bounded space. *Journal of the ACM (JACM)*, 67(1):1–54, 2020.
- [14] Alan Kuhnle, Taher Mun, Christina Boucher, Travis Gagie, Ben Langmead, and Giovanni Manzini. Efficient construction of a complete index for pan-genomics read alignment. *Journal of Computational Biology*, 27(4):500–513, 2020.
- [15] Taher Mun, Alan Kuhnle, Christina Boucher, Travis Gagie, Ben Langmead, and Giovanni Manzini. Matching reads to many genomes with the r-index. *Journal of Computational Biology*, 27(4):514–518, 2020.
- [16] Christina Boucher, Travis Gagie, Alan Kuhnle, Ben Langmead, Giovanni Manzini, and Taher Mun. Prefix-free parsing for building big bwts. *Algorithms for Molecular Biology*, 14(1):1–15, 2019.
- [17] Stephen F Altschul, Warren Gish, Webb Miller, Eugene W Myers, and David J Lipman. Basic local alignment search tool. *Journal of molecular biology*, 215(3):403–410, 1990.
- [18] Hideo Bannai, Travis Gagie, and I Tomohiro. Refining the r-index. *Theoretical Computer Science*, 812:96–108, 2020.
- [19] Massimiliano Rossi, Marco Oliva, Ben Langmead, Travis Gagie, and Christina Boucher. Moni: A pangenomic index for finding maximal exact matches. *Journal of Computational Biology*, 02 2022.
- [20] Richard Durbin. Efficient haplotype matching and storage using the positional burrows–wheeler transform (pbwt). *Bioinformatics*, 30(9):1266–1272, 01 2014.
- [21] Ahsan Sanaullah, Degui Zhi, and Shaojie Zhang. d-PBWT: dynamic positional Burrows–Wheeler transform. *Bioinformatics*, 37(16):2390–2397, 02 2021.

- [22] Ardalan Naseri, Degui Zhi, and Shaojie Zhang. Multi-allelic positional burrows-wheeler transform. *BMC bioinformatics*, 20(11):1–8, 2019.
- [23] Ardalan Naseri, Erwin Holzhauser, Degui Zhi, and Shaojie Zhang. Efficient haplotype matching between a query and a panel for genealogical search. *Bioinformatics*, 35(14):i233–i241, 2019.
- [24] Lucia Williams and Brendan Mumey. Maximal perfect haplotype blocks with wildcards. *Iscience*, 23(6):101149, 2020.
- [25] Simone Rubinacci, Olivier Delaneau, and Jonathan Marchini. Genotype imputation using the positional burrows wheeler transform. *PLoS genetics*, 16(11):e1009049, 2020.
- [26] Richard Durbin. PBWT. <https://github.com/richarddurbin/pbwt>, 2014.
- [27] Gary K. Chen. MaCS. <https://github.com/gchen98/macs>, 2019.
- [28] Carsten Wiuf and Jotun Hein. Recombination as a point process along sequences. *Theoretical population biology*, 55(3):248–259, 1999.
- [29] I. Tomohiro. ShapedSlp. <https://github.com/itomomoti/ShapedSlp>, 2020.
- [30] Giovanni Manzini. BigRePair. <https://gitlab.com/manzai/bigrepair>, 2019.
- [31] Travis Gagie, Giovanni Manzini, Gonzalo Navarro, Hiroshi Sakamoto, Yoshimasa Takabatake, et al. Rpair: rescaling repair with rsync. In *International Symposium on String Processing and Information Retrieval*, pages 35–44. Springer, 2019.

# Appendice A

## Tabelle

Tabella A.1: Stime dello spazio occupato per la memorizzazione di alcune varianti di *bit vector*. Si assume un bit vector di lunghezza  $n$  con un numero di bit posti pari a 1 (o  $\top$ ) pari a  $m$ .  $K$  indica un valore costante.

Variante	Spazio occupato
<i>Plain bitvector</i>	$64 \lceil \frac{n}{64} + 1 \rceil$
<i>Interleaved bitvector</i>	$\approx n \left(1 + \frac{64}{K}\right)$
<i>H<sub>0</sub>-compressed bitvector</i>	$\approx \lceil \log \binom{n}{m} \rceil$
<i>Sparse bitvector</i>	$\approx m \left(2 + \log \frac{n}{m}\right)$

Tabella A.2: Complessità temporali stimate della *funzione rank* per alcune varianti di *bit vector*, con la quantità di bit aggiuntivi richiesta. Si assume un bit vector di lunghezza  $n$ , con un numero di bit posti pari a 1 (o  $\top$ ) pari a  $m$ , e un numero  $k$  di valori prima della posizione richiesta.

Variante	Bit aggiuntivi	Complessità temporale
<i>Plain bitvector</i>	$0.0625 \cdot n$	$\mathcal{O}(1)$
<i>Interleaved bitvector</i>	128	$\mathcal{O}(1)$
<i>H<sub>0</sub>-compressed bitvector</i>	80	$\mathcal{O}(k)$
<i>Sparse bitvector</i>	64	$\mathcal{O} \left( \log \frac{n}{m} \right)$

**Tabella A.3:** Complessità temporali stimate della *funzione select* per alcune varianti di *bit vector*, con la quantità di bit aggiuntivi richiesta. Si assume un bit vector di lunghezza  $n$ , con un numero di bit posti pari a 1 (o  $\top$ ) pari a  $m$ .

Variante	Bit aggiuntivi	Complessità temporale
<i>Plain bitvector</i>	$\leq 0.2 \cdot n$	$\mathcal{O}(1)$
<i>Interleaved bitvector</i>	64	$\mathcal{O}(\log n)$
<i>H<sub>0</sub>-compressed bitvector</i>	64	$\mathcal{O}(\log n)$
<i>Sparse bitvector</i>	64	$\mathcal{O}(1)$

**Tabella A.4:** Tabella stima complessità temporale delle principali operazioni effettuate nelle varianti della RLPBWT.

Operazione	Complessità temporale
Rank per sparse bitvector	$\mathcal{O}(\frac{height}{ run })$
Select per sparse bitvector	$\mathcal{O}(1)$
Random Access su slp	$\mathcal{O}(\log(height \times width))$
LCE lunga $l$ su slp	$\mathcal{O}\left(1 + \frac{l}{\log(height \times width)}\right)$

# Appendice B

## Algoritmi

---

**Algoritmo B.1** Algoritmo di Durbin per la costruzione di  $a_{k+1}$  e  $d_{k+1}$  a partire da  $a_k$  e  $d_k$ .

---

```
1: function BUILDPREFIXANDDIVERGENCEARRAYS( $k, M, a_k, d_k$ )
2:    $u \leftarrow 0, v \leftarrow 0$ 
3:    $p \leftarrow k + 1, q \leftarrow k + 1$ 
4:    $a \leftarrow [], b \leftarrow [], d \leftarrow [], e \leftarrow []$ 
5:   for every  $i \in [0, M - 1]$  do
6:     if  $d_k[i] > p$  then
7:        $p \leftarrow d_k[i]$ 
8:     if  $d_k[i] > q$  then
9:        $q \leftarrow d_k[i]$ 
10:    if  $y_i^k[k] = 0$  then
11:       $a[u] \leftarrow a_k[i], d[u] \leftarrow p$ 
12:       $u \leftarrow u + 1, p \leftarrow 0$ 
13:    else
14:       $b[v] \leftarrow a_k[i], e[v] \leftarrow q$ 
15:       $v \leftarrow v + 1, q \leftarrow 0$ 
16:   $a_{k+1} \leftarrow \text{concatenate}(a, b)$ 
17:   $d_{k+1} \leftarrow \text{concatenate}(d, e)$ 
```

---

---

**Algoritmo B.2** Algoritmo per l'LF-mapping nella PBWT.

---

```
1: function  $w(k, i, s, c_k, u_k, v_k)$ 
2:   if  $s = 0$  then
3:     return  $u_k[i]$ 
4:   else
5:     return  $c_k + v_k[i]$ 
```

---

---

**Algoritmo B.3** Algoritmo per la costruzione di una colonna della RLPBWT con bitvectors

---

```

1: function BUILD_BV(col, pref, div)
2:    $c \leftarrow 0$ ,  $u \leftarrow 0$ ,  $v \leftarrow 0$ ,  $u' \leftarrow 0$ ,  $v' \leftarrow 0$ ,  $curr_{lcs} \leftarrow 0$ ,  $tmp_{thr} \leftarrow 0$ ,  $tmp_{beg} \leftarrow 0$ 
3:    $start \leftarrow \top$ ,  $beg_{run} \leftarrow \top$ ,  $push_{zero} \leftarrow \perp$ ,  $push_{one} \leftarrow \perp$ 
4:   for every  $k \in [0, height)$  do
5:     if  $k = 0 \wedge col[pref[k]] = 1$  then
6:        $start \leftarrow \perp$ 
7:     if  $col[k] = 0$  then
8:        $c \leftarrow c + 1$ 
9:      $runs \leftarrow [0..0]$  ▷ sparse bitvector for runs of length  $height + 1$ 
10:     $thrs \leftarrow [0..0]$  ▷ sparse bitvector for thresholds of length  $height$ 
11:     $zeros \leftarrow [0..0]$  ▷ sparse bitvector for zeros of length  $c$ 
12:     $ones \leftarrow [0..0]$  ▷ sparse bitvector for ones of length  $height - c$ 
13:     $samples_{beg} \leftarrow []$ ,  $samples_{end} \leftarrow []$  ▷ couple of vectors for samples of length  $r$ 
14:    if  $start$  then
15:       $push_{one} \leftarrow \top$ 
16:    else
17:       $push_{zero} \leftarrow \top$ 
18:    for every  $k \in [0, height)$  do
19:      if  $beg_{run}$  then
20:         $u \leftarrow u'$ ,  $v \leftarrow v'$ ,  $tmp_{beg} \leftarrow pref[k]$ 
21:         $beg_{run} \leftarrow \perp$ 
22:      if  $col[pref[k]] = 1$  then
23:         $v' \leftarrow v' + 1$ 
24:      else
25:         $u' \leftarrow u' + 1$ 
26:      if  $k = 0 \vee col[pref[k]] \neq col[pref[k - 1]]$  then
27:         $curr_{lcs} \leftarrow div[k]$ ,  $tmp_{thr} \leftarrow k$ 
28:      if  $div[k] < curr_{lcs}$  then
29:         $curr_{lcs} \leftarrow div[k]$ ,  $tmp_{thr} \leftarrow k$ 
30:      if  $k = height - 1 \vee col[pref[k]] \neq col[pref[k + 1]]$  then
31:         $runs[k] \leftarrow 1$ 
32:        if  $k \neq height - 1 \wedge div[k + 1] < div[tmp_{thr}]$  then
33:           $thrs[k] \leftarrow 1$ 
34:        else
35:           $thrs[tmp_{thr}] \leftarrow 1$ 
36:         $push(samples_{beg}, tmp_{beg})$ 
37:         $push(samples_{end}, pref[k])$ 
38:        if  $push_{one}$  then
39:          if  $v \neq 0$  then
40:             $ones[k - 1] = 1$ 
41:             $swap(push_{zero}, push_{one})$ 
42:          else
43:            if  $u \neq 0$  then
44:               $zeros[k - 1] = 1$ 
45:               $swap(push_{zero}, push_{one})$ 
46:         $beg_{run} \leftarrow \top$ 
47:      if  $|zeros| \neq 0$  then
48:         $zeros[|zeros| - 1] \leftarrow 1$ 
49:      if  $|ones| \neq 0$  then
50:         $ones[|ones| - 1] \leftarrow 1$ 
51:      build rank/select for the four bitvectors
52:      return ( $start$ ,  $c$ ,  $runs$ ,  $zeros$ ,  $ones$ ,  $samples_{beg}$ ,  $samples_{end}$ ,  $div$ )

```

---



---

**Algoritmo B.4** Algoritmo per estrazione simbolo da una run in una colonna

---

```
1: function GET_SYMBOL( $s, r$ )  $\triangleright s = \top$  iff column start with 0,  $r$  run index  
2:   if  $s$  then  
3:     if  $r \bmod 2 = 0$  then return 0 else return 1  
4:   else  
5:     if  $r \bmod 2 = 0$  then return 1 else return 0
```

---

---

**Algoritmo B.5** Algoritmo per uvtrick naive

---

```
1: function UVTRICK( $k, i$ )  $\triangleright k$  indice di colonna,  $i$  indice di run  
2:   if  $i = 0$  then  
3:     return (0, 0)  
4:   else if  $i \bmod 2 = 0$  then  
5:      $u \leftarrow uv_k[i - 1], v \leftarrow uv_k[i]$   
6:     if  $start^k$  then  
7:       return ( $u, v$ )  
8:     else  
9:       return ( $v, u$ )  
10:  else  
11:     $u \leftarrow uv_k[i], v \leftarrow uv_k[i - 1]$   
12:    if  $start^k$  then  
13:      return ( $u, v$ )  
14:    else  
15:      return ( $v, u$ )
```

---

---

**Algoritmo B.6** Algoritmo per uvtrick con bitvector

---

```

1: function UVTRICK( $k, i$ )  $\triangleright k$  is column index,  $i$  row index
2:   if  $i = 0$  then
3:     return  $(0, 0)$ 
4:    $run \leftarrow rank_h^k(i)$ 
5:   if  $run = 0$  then
6:     if  $start^k$  then
7:       return  $(i, 0)$ 
8:     else
9:       return  $(0, i)$ 
10:  else if  $run = 1$  then
11:    if  $start^k$  then
12:      return  $(select_h^k(run) + 1, i - (select_h^k(run) + 1))$ 
13:    else
14:      return  $(i - (select_h^k(run) + 1), select_h^k(run) + 1)$ 
15:  else
16:    if  $run \bmod 2 = 0$  then
17:       $pre_u \leftarrow select_u^k(\frac{run}{2}) + 1$ 
18:       $pre_v \leftarrow select_v^k(\frac{run}{2}) + 1$ 
19:       $offset \leftarrow i - (select_h^k(run) + 1)$ 
20:      if  $start^k$  then
21:        return  $(pre_u + offset, pre_v)$ 
22:      else
23:        return  $(pre_u, pre_v + offset)$ 
24:    else
25:       $run_u \leftarrow (\frac{run}{2}) + 1$ 
26:       $run_v \leftarrow \frac{run}{2}$ 
27:      if  $\neg start^k$  then
28:         $swap(run_u, run_v)$ 
29:       $pre_u \leftarrow select_u^k(run_u) + 1$ 
30:       $pre_v \leftarrow select_v^k(run_v) + 1$ 
31:       $offset \leftarrow i - (select_h^k(run) + 1)$ 
32:      if  $start^k$  then
33:        return  $(pre_u, pre_v + offset)$ 
34:      else
35:        return  $(pre_u + offset, pre_v)$ 

```

---

---

**Algoritmo B.7** Algoritmo per convertire un indice in indice di run

---

```

1: function INDEX_TO_RUN( $k, i$ )  $\triangleright k$  indice di colonna,  $i$  indice di run
2:    $run \leftarrow 0, found \leftarrow \perp$ 
3:   if  $i \geq p_k[|p_k| - 1]$  then
4:     return  $|p_k| - 1$ 
5:   for every  $r \in [0, |p_k| - 1]$  do
6:     if  $p_k[r] \geq i < p_k[r + 1]$  then
7:        $run \leftarrow r, found \leftarrow \top$ 
8:     break
9:   if  $\neg found$  then
10:     $run = |p_k| - 1$ 
11:  return  $run$ 

```

---



---

**Algoritmo B.8** Algoritmo per lf-mapping

---

```

1: function LF( $k, i, s$ )  $\triangleright k$  is column index,  $i$  row index,  $s$  symbol
2:    $c \leftarrow c[k]$ 
3:    $(u, v) \leftarrow uvtrick(k, i)$ 
4:   if  $s = 0$  then
5:     return  $u$ 
6:   else
7:     return  $c + v$ 

```

---



---

**Algoritmo B.9** Algoritmo per lf-mapping con offset

---

```

1: function LF_OFF( $k, i, s, o$ )  $\triangleright k$  is column index,  $i$  row index,  $s$  symbol,  $o$  offset
2:    $(u, v) \leftarrow uvtrick(k, i)$ 
3:   if  $p_k[i] + 0 = height$  then
4:     if  $get\_symbol(start^k, i) = 0$  then
5:        $v \leftarrow v - 1$ 
6:     else
7:        $u \leftarrow u - 1$ 
8:   if  $s = 0$  then
9:     return  $u + o$ 
10:  else
11:    return  $c[k] + v + o$ 

```

---

---

**Algoritmo B.10** Algoritmo per lf-mapping inverso naïve

---

```

1: function REVERSE_LF( $k, i$ )           ▷  $k$  indice di colonna,  $i$  indice di riga
2:   if  $k = 0$  then                       ▷ by design
3:     return 0
4:    $k \leftarrow k - 1$ 
5:    $c \leftarrow rlpbwt[k].c$ 
6:    $u \leftarrow 0, v \leftarrow 0, offset \leftarrow 0, run \leftarrow 0, found \leftarrow \perp$ 
7:   if  $i < c$  then
8:      $u \leftarrow i$ 
9:      $prev_0 \leftarrow 0, next_0 \leftarrow 0$ 
10:    for every  $j \in [0, |p_k|)$  do
11:       $(prev_0, \_) = uvtrick(k, j)$ 
12:       $(next_0, \_) = uvtrick(k, j + 1)$ 
13:      if  $prev_0 \leq u < next_0$  then
14:         $run \leftarrow j, found \leftarrow \top$ 
15:        break
16:    if  $\neg found$  then
17:       $run \leftarrow |p_k| - 1$ 
18:       $(curr_u, \_) \leftarrow uvtrick(k, run), offset \leftarrow u - curr_u$ 
19:      return  $p_k[run] + offset$ 
20:  else
21:     $v \leftarrow i - c$ 
22:     $prev_1 \leftarrow 0, next_1 \leftarrow 0$ 
23:    for every  $j \in [0, |p_k|)$  do
24:       $(\_, prev_1) = uvtrick(k, j)$ 
25:       $(\_, next_1) = uvtrick(k, j + 1)$ 
26:      if  $prev_1 \leq v < next_1$  then
27:         $run \leftarrow j, found \leftarrow \top$ 
28:        break
29:    if  $\neg found$  then
30:       $run \leftarrow |p_k| - 1$ 
31:       $(curr_v, curr_u) \leftarrow uvtrick(k, run), offset \leftarrow v - curr_v$ 
32:      return  $p_k[run] + offset$ 

```

---

---

**Algoritmo B.11** Algoritmo per lf-mapping inverso con bitvector

---

```

1: function REVERSE_LF( $k, i$ )                                 $\triangleright k$  is column index,  $i$  row index
2:   if  $k = 0$  then                                            $\triangleright$  by design
3:     return 0
4:    $k \leftarrow k - 1$ 
5:    $c \leftarrow rlpbwt[k].c$ 
6:   if  $i < c$  then
7:     if  $start^k$  then
8:        $run \leftarrow rank_u^k(i) \cdot 2$ 
9:     else
10:       $run \leftarrow rank_u^k(i) \cdot 2 + 1$ 
11:      $i_{run} \leftarrow 0$ 
12:     if  $run \neq 0$  then
13:        $i_{run} \leftarrow select_h^k(run) + 1$ 
14:        $(prev_0, \_) \leftarrow uvtrick(k, i_{run})$ 
15:       return  $i_{run} + (i - prev_0)$ 
16:   else
17:     if  $start^k$  then
18:        $run \leftarrow rank_v^k(i) \cdot 2 + 1$ 
19:     else
20:        $run \leftarrow rank_v^k(i) \cdot 2$ 
21:      $i_{run} \leftarrow 0$ 
22:     if  $run \neq 0$  then
23:        $i_{run} \leftarrow select_h^k(run) + 1$ 
24:        $(\_, prev_1) \leftarrow uvtrick(k, i_{run})$ 
25:       return  $i_{run} + (i - (c + prev_1))$ 

```

---

---

**Algoritmo B.12** Algoritmo per match con aplotipo esterno con panel  $width \times height$  naive

---

```

1: function EXTERNAL_MATCHES( $z$ )                                 $\triangleright$  assuming  $|z| = rlpbwt.width$ 
2:    $f \leftarrow 0, f_{run} \leftarrow 0, f' \leftarrow 0, e \leftarrow 0, l \leftarrow 0$ 
3:    $g \leftarrow 0, g_{run} \leftarrow 0, g' \leftarrow 0, f_{off} \leftarrow 0, g_{off} \leftarrow 0$ 
4:   for every  $k \in [0, |z|)$  do
5:      $f_{run} \leftarrow index\_to\_run(f, k), g_{run} \leftarrow index\_to\_run(g, k)$ 
6:      $f_{off} \leftarrow f - p_k[f_{run}], f_{off} \leftarrow g - p_k[g_{run}]$ 
7:     if  $z[k] = 0$  then
8:       if  $get\_symbol(start^k, f_{run}) = 1$  then  $f_{off} \leftarrow 0$ 
9:       if  $get\_symbol(start^k, g_{run}) = 1$  then  $g_{off} \leftarrow 0$ 
10:    else
11:      if  $get\_symbol(start^k, f_{run}) = 0$  then  $f_{off} \leftarrow 0$ 
12:      if  $get\_symbol(start^k, g_{run}) = 0$  then  $g_{off} \leftarrow 0$ 
13:     $f' \leftarrow lf\_off(k, f, z[k], f_{off}), g' \leftarrow lf(k, g, z[k], g_{off}), l \leftarrow g - f$ 
14:    if  $f' > height$  then  $f' \leftarrow f' - f_{off}$ 
15:    if  $g' > height$  then  $g' \leftarrow g' - g_{off}$ 
16:    if  $f' < g'$  then
17:       $f \leftarrow f', g \leftarrow g'$ 
18:    else
19:      if  $k \neq 0$  then
20:        report matches in  $[e, k - 1]$  with  $l$  haplotypes
21:      if  $f' = |lcp^{k+1}|$  then  $e \leftarrow k + 1$  else  $e \leftarrow k - lcp^{k+1}[f']$ 
22:      if  $(z[e] = 0 \wedge f' > 0) \vee f' = height$  then
23:         $f' \leftarrow g' - 1$ 
24:        if  $e \geq 1$  then
25:           $f_{rev} \leftarrow f', k' \leftarrow k + 1$ 
26:          while  $k' \neq e - 1$  do  $f_{rev} \leftarrow reverse\_lf(k', f_{rev}), k' \leftarrow k' - 1$ 
27:           $run \leftarrow index\_to\_run(f_{rev}, k'), symb \leftarrow get\_symbol(start^{k'}, run)$ 
28:          while  $e > 0 \wedge z[e - 1] = symb$  do
29:             $f_{rev} \leftarrow reverse\_lf(e, f_{rev})$ 
30:             $run \leftarrow index\_to\_run(f_{rev}, e - 1), symb \leftarrow get\_symbol(start^{e-1}, run)$ 
31:          while  $f' > 0 \wedge (k + 1) - lcp^{k+1}[f] \leq e$  do  $e \leftarrow e - 1$ 
32:           $f \leftarrow f', g \leftarrow g'$ 
33:        else
34:           $g' \leftarrow f' - 1$ 
35:          if  $e \geq 1$  then
36:             $f_{rev} \leftarrow f', k' \leftarrow k + 1$ 
37:            while  $k' \neq e - 1$  do  $f_{rev} \leftarrow reverse\_lf(k', f_{rev}), k' \leftarrow k' - 1$ 
38:             $run \leftarrow index\_to\_run(f_{rev}, k'), symb \leftarrow get\_symbol(start^{k'}, run)$ 
39:            while  $e > 0 \wedge z[e - 1] = symb$  do
40:               $f_{rev} \leftarrow reverse\_lf(e, f_{rev})$ 
41:               $run \leftarrow index\_to\_run(f_{rev}, e - 1), symb \leftarrow get\_symbol(start^{e-1}, run)$ 
42:            while  $e < height \wedge (k + 1) - lcp^{k+1}[e] \leq e$  do  $e \leftarrow e + 1$ 
43:             $f \leftarrow f', g \leftarrow g'$ 
44:      if  $f < g$  then
45:        report matches in  $[e, |z| - 1]$  with  $l \leftarrow g - f$  haplotypes

```

---

**Algoritmo B.13** Algoritmo per match con aplotipo esterno con panel  $width \times height$  con bitvectors

---

```

1: function EXTERNAL_MATCHES( $z$ ) ▷ assuming  $|z| = rlpbwt.width$ 
2:    $f \leftarrow 0, f_{run} \leftarrow 0, f' \leftarrow 0$ 
3:    $g \leftarrow 0, g_{run} \leftarrow 0, g' \leftarrow 0$ 
4:    $e \leftarrow 0, l \leftarrow 0$ 
5:   for every  $k \in [0, |z|)$  do
6:      $f_{run} \leftarrow rank_h^k(f), g_{run} \leftarrow rank_h^k(g)$ 
7:      $f' \leftarrow lf(k, f, z[k]), g' \leftarrow lf(k, g, z[k])$ 
8:      $l \leftarrow g - f$ 
9:     if  $f' < g'$  then
10:       $f \leftarrow f', g \leftarrow g'$ 
11:     else
12:      if  $k \neq 0$  then
13:        report matches in  $[e, k - 1]$  with  $l$  haplotypes
14:      if  $f' = |lcp^{k+1}|$  then
15:         $e \leftarrow k + 1$ 
16:      else
17:         $e \leftarrow k - lcp^{k+1}[f']$ 
18:      if  $(z[e] = 0 \wedge f' > 0) \vee f' = height$  then
19:         $f' \leftarrow g' - 1$ 
20:        if  $e \geq 1$  then
21:           $f_{rev} \leftarrow f', k' \leftarrow k + 1$ 
22:          while  $k' \neq e - 1$  do
23:             $f_{rev} \leftarrow reverse\_lf(k', f_{rev}), k' \leftarrow k' - 1$ 
24:           $run \leftarrow rank_h^{k'}(f_{rev}), symb \leftarrow get\_symbol(start^{k'}, run)$ 
25:          while  $e > 0 \wedge z[e - 1] = symb$  do
26:             $f_{rev} \leftarrow reverse\_lf(e, f_{rev})$ 
27:             $run \leftarrow rank_h^{e-1}(f_{rev})$ 
28:             $symb \leftarrow get\_symbol(start^{e-1}, run)$ 
29:          while  $f' > 0 \wedge (k + 1) - lcp^{k+1}[f] \leq e$  do  $e \leftarrow e - 1$ 
30:           $f \leftarrow f', g \leftarrow g'$ 
31:        else
32:           $g' \leftarrow f' - 1$ 
33:          if  $e \geq 1$  then
34:             $f_{rev} \leftarrow f', k' \leftarrow k + 1$ 
35:            while  $k' \neq e - 1$  do
36:               $f_{rev} \leftarrow reverse\_lf(k', f_{rev}), k' \leftarrow k' - 1$ 
37:             $run \leftarrow rank_h^{k'}(f_{rev}), symb \leftarrow get\_symbol(start^{k'}, run)$ 
38:            while  $e > 0 \wedge z[e - 1] = symb$  do
39:               $f_{rev} \leftarrow reverse\_lf(e, f_{rev})$ 
40:               $run \leftarrow rank_h^{e-1}(f_{rev})$ 
41:               $symb \leftarrow get\_symbol(start^{e-1}, run)$ 
42:            while  $e < height \wedge (k + 1) - lcp^{k+1}[e] \leq e$  do  $e \leftarrow e + 1$ 
43:             $f \leftarrow f', g \leftarrow g'$ 
44:      if  $f < g$  then
45:        report matches in  $[e, |z| - 1]$  with  $l \leftarrow g - f$  haplotypes

```

---

---

**Algoritmo B.14** Algoritmo per match con matching-statistics (MS) e thresholds

---

```

1: function MATCHES_MS( $z$ )
2:    $ms_{row} \leftarrow [0..0]$ ,  $ms_{len} \leftarrow [0..0]$  ▷ ms vectors with row and len of length  $|z|$ 
3:    $curr_{row} \leftarrow rlpbwt[0].samples_{end}[|rlpbwt[0].samples_{end}| - 1]$ 
4:    $curr_{index} \leftarrow curr_{row}$ 
5:    $curr_{run} \leftarrow rank_h^0(curr_{index})$ 
6:    $symb \leftarrow get\_symbol(start^0, curr_{run})$  ▷ build matching statistics row
7:   for every  $k \in [0, |z|)$  do
8:     if  $z[i] = symb$  then
9:        $ms_{row}[k] \leftarrow curr_{row}$ 
10:      if  $k \neq |z| - 1$  then
11:         $(curr_{index}, curr_{run}, symb) \leftarrow UPDATE(k, curr_{index}, z)$ 
12:      else
13:         $curr_{thr} \leftarrow rank_t^k(curr_{index})$ 
14:         $force_{down} \leftarrow \top$  iff we are over a threshold not at the end of a run
15:         $force_{down} \leftarrow \top$  iff we are over a threshold at the end of a run and DOWN function is  $\top$ 
16:        if  $|samples_{beg}^k| = 1$  then
17:           $ms_{row}[k] \leftarrow height$ 
18:          if  $k \neq |z| - 1$  then
19:             $curr_{row} \leftarrow rlpbwt[k+1].samples_{end}[|rlpbwt[k+1].samples_{end}| - 1]$ 
20:             $curr_{index} \leftarrow height - 1$ 
21:             $curr_{run} \leftarrow rank_h^{k+1}(curr_{index})$ 
22:             $symb \leftarrow get\_symbol(start^{k+1}, curr_{run})$ 
23:          else if  $(curr_{run} \neq 0 \wedge curr_{run} = curr_{thr} \wedge \neg down) \vee curr_{run} = |samples_{beg}^k| - 1$  then
24:             $curr_{index} \leftarrow select_h^k(curr_{run})$ 
25:             $curr_{row} \leftarrow samples_{end}^k[curr_{run} - 1]$ 
26:             $ms_{row}[k] \leftarrow curr_{row}$ 
27:            if  $k \neq |z| - 1$  then
28:               $(curr_{index}, curr_{run}, symb) \leftarrow UPDATE(k, curr_{index}, z)$ 
29:          else
30:             $curr_{index} \leftarrow select_h^k(curr_{run} + 1) + 1$ 
31:             $curr_{row} \leftarrow samples_{beg}^k[curr_{run} + 1]$ 
32:             $ms_{row}[k] \leftarrow curr_{row}$ 
33:            if  $k \neq |z| - 1$  then
34:               $(curr_{index}, curr_{run}, symb) \leftarrow UPDATE(k, curr_{index}, z)$  ▷ build matching statistics len
35:   for every  $k \in [0, |ms_{row}|)$  do
36:     if  $ms_{row}[k] = height$  then
37:        $ms_{len}[k] \leftarrow 0$ 
38:     else if  $k \neq 0 \wedge ms_{row}[i] = ms_{row}[i-1] \wedge ms_{len}[i-1] \neq 0$  then
39:        $ms_{len}[i] \leftarrow ms_{len}[i-1] + 1$ 
40:     else ▷ ra is a data structure for random access over the originale panel
41:        $tmp_{index} \leftarrow i$ ,  $tmp_{len} \leftarrow 0$ 
42:       while  $tmp_{index} \geq 0 \wedge z[tmp_{index}] = ra(ms_{row}[k], tmp_{index})$  do
43:          $tmp_{index} \leftarrow tmp_{index} - 1$ ,  $tmp_{len} \leftarrow tmp_{len} + 1$ 
44:        $ms_{len}[k] \leftarrow tmp_{len}$ 
45:   for every  $k \in [0, |ms_{row}|)$  do ▷ build matching statistics matches
46:     if  $(ms_{len}[k] > 1 \wedge ms_{len}[k] \geq ms_{len}[k+1]) \vee (k = |z| - 1 \wedge ms_{len}[k] \neq 0)$  then
47:       report match ending in k, with length  $ms_{len}[k]$ , with at least row  $ms_{row}[k]$ 
48:       in case extend the matches

```

---

**function** DOWN( $pos, prev, next$ )

*using LCE queries or random access check the longest common prefix between*  
*pos and prev and between pos and next*  
*if the latter is greater or equal return  $\top$ , else  $\perp$*

---



---

**Algoritmo B.15** Algoritmo per match con matching-statistics (MS) e LCE

---

```

1: function MATCHES_MS_LCE( $z$ )
2:    $ms_{row} \leftarrow [0..0]$ ,  $ms_{len} \leftarrow [0..0]$  ▷ ms vectors with row and len of length  $|z|$ 
3:    $curr_{row} \leftarrow rlpbwt[0].samples_{end}[rlpbwt[0].samples_{end} - 1]$ 
4:    $curr_{index} \leftarrow curr_{row}$ ,  $curr_{run} \leftarrow rank_h^0(curr_{index})$ 
5:    $symb \leftarrow get\_symbol(start^0, curr_{run})$  ▷ build matching statistics row
6:   for every  $k \in [0, |z|)$  do
7:     if  $z[i] = symb$  then
8:        $ms_{row}[k] \leftarrow curr_{row}$ 
9:       if  $k = 0$  then
10:         $ms_{len}[k] \leftarrow 1$ 
11:       else
12:         $ms_{len}[k] \leftarrow ms_{len}[k - 1] + 1$ 
13:       if  $k \neq |z| - 1$  then
14:         $(curr_{index}, curr_{run}, symb) \leftarrow UPDATE(k, curr_{index}, z)$ 
15:     else
16:       if  $|samples_{beg}^k| = 1$  then
17:         $ms_{row}[k] \leftarrow height$ 
18:         $ms_{len}[k] \leftarrow 0$ 
19:        if  $k \neq |z| - 1$  then
20:           $curr_{row} \leftarrow rlpbwt[k + 1].samples_{end}[rlpbwt[k + 1].samples_{end} - 1]$ 
21:           $curr_{index} \leftarrow height - 1$ 
22:           $curr_{run} \leftarrow rank_h^{k+1}(curr_{index})$ 
23:           $symb \leftarrow get\_symbol(start^{k+1}, curr_{run})$ 
24:       else
25:        if  $curr_{run} = |samples_{beg}^k| - 1$  then
26:           $curr_{index} \leftarrow select_h^k(curr_{run})$ ,  $prev_{row} \leftarrow samples_{end}^k[curr_{run} - 1]$ 
27:           $lce \leftarrow LCE(k, curr_{row}, prev_{row})$ 
28:           $ms_{row}[k] \leftarrow prev_{row}$ ,  $curr_{row} \leftarrow prev_{row}$ 
29:          if  $k = 0$  then
30:             $ms_{len}[k] \leftarrow 1$ 
31:          else
32:             $ms_{len}[k] \leftarrow \min(ms_{len}[k - 1], lce_{len}) + 1$ 
33:          if  $k \neq |z| - 1$  then
34:             $(curr_{index}, curr_{run}, symb) \leftarrow UPDATE(k, curr_{index}, z)$ 
35:        else if  $curr_{run} = 0$  then
36:           $curr_{index} \leftarrow select_h^k(curr_{run} + 1) + 1$ ,  $next_{row} \leftarrow samples_{beg}^k[curr_{run} + 1]$ 
37:           $lce \leftarrow LCE(k, curr_{row}, next_{row})$ 
38:           $ms_{row}[k] \leftarrow next_{row}$ ,  $curr_{row} \leftarrow next_{row}$ 
39:          if  $k = 0$  then
40:             $ms_{len}[k] \leftarrow 1$ 
41:          else
42:             $ms_{len}[k] \leftarrow \min(ms_{len}[k - 1], lce_{len}) + 1$ 
43:          if  $k \neq |z| - 1$  then
44:             $(curr_{index}, curr_{run}, symb) \leftarrow UPDATE(k, curr_{index}, z)$ 
45:        else
46:           $prev_{row} \leftarrow samples_{end}^k[curr_{run} - 1]$ ,  $next_{row} \leftarrow samples_{beg}^k[curr_{run} + 1]$ 
47:           $lce \leftarrow \max_{len}(LCE(k, curr_{row}, prev_{row}), LCE(k, curr_{row}, next_{row}))$ 
48:           $curr_{row} \leftarrow lce_{row}$ 
49:           $ms_{row}[k] \leftarrow curr_{row}$ 
50:          if  $k = 0$  then
51:             $ms_{len}[k] \leftarrow 1$ 
52:          else
53:             $ms_{len}[k] \leftarrow \min(ms_{len}[k - 1], lce_{len}) + 1$ 
54:          if  $k \neq |z| - 1$  then
55:             $(curr_{index}, curr_{run}, symb) \leftarrow UPDATE(k, curr_{index}, z)$ 
56:   for every  $k \in [0, |ms_{row}|)$  do ▷ build matching statistics matches
57:     if  $(ms_{len}[k] > 1 \wedge ms_{len}[k] \geq ms_{len}[k + 1]) \vee (k = |z| - 1 \wedge ms_{len}[k] \neq 0)$  then
58:       report match ending in  $k$ , with length  $ms_{len}[k]$ , with at least row  $ms_{row}[k]$ 
   in case extend the matches

```

---

---

**Algoritmo B.16** Algoritmo per l'update usando le matching statistics

---

```

1: function UPDATE( $k, curr_{index}, z$ )
2:    $curr_{index} \leftarrow lf(k, curr_{index}, z[k])$ 
3:    $curr_{run} \leftarrow rank_h^{k+1}(curr_{index})$ 
4:    $symb \leftarrow get\_symbol(start^{k+1}, curr_{run})$ 
5:   return ( $curr_{index}, curr_{run}, symb$ )

```

---



---

**Algoritmo B.17** Algoritmo per la costruzione della struttura per  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$

---

```

1: function BUILD_PHI( $cols, panel, prefix$ )                                 $\triangleright prefix$  is the last prefix array
2:    $\varphi \leftarrow [[0..0]..[0..0]], \varphi^{-1} \leftarrow [[0..0]..[0..0]]$        $\triangleright$  sparse bit vector panels for  $\varphi$  and  $\varphi^{-1}$ 
3:    $\varphi_{supp} = [], \varphi_{supp}^{-1} = []$                                         $\triangleright$  vectors for  $\varphi$  and  $\varphi^{-1}$  row values
4:   for every  $k \in [0, |cols|)$  do
5:     for every  $i \in [0, |samples_{beg}|)$  do
6:        $\varphi[sample_{beg}^k[i]][k] \leftarrow 1$ 
7:       if  $i = 0$  then
8:          $push(\varphi_{supp}[sample_{beg}^k[i]], panel_{height})$ 
9:       else
10:         $push(\varphi_{supp}[sample_{beg}^k[i]], sample_{end}^k[i - 1])$ 
11:         $\varphi^{-1}[sample_{end}^k[i]][k] \leftarrow 1$ 
12:        if  $i = |sample_{beg}^k| - 1$  then
13:           $push(\varphi_{supp}^{-1}[sample_{end}^k[i]], panel_{height})$ 
14:        else
15:           $push(\varphi_{supp}^{-1}[sample_{end}^k[i]], sample_{beg}^k[i + 1])$ 
16:   for every  $k \in [0, |prefix|)$  do
17:     if  $\varphi[k][|\varphi[k]| - 1] = 0$  then
18:        $\varphi[k][|\varphi[k]| - 1] \leftarrow 1$ 
19:       if  $k = 0$  then
20:          $push(\varphi_{supp}[prefix^k], panel_{height})$ 
21:       else
22:          $push(\varphi_{supp}[prefix^k], prefix^k[i - 1])$ 
23:       if  $\varphi^{-1}[k][|\varphi[k]| - 1] = 0$  then
24:          $\varphi^{-1}[k][|\varphi[k]| - 1] \leftarrow 1$ 
25:         if  $k = |prefix| - 1$  then
26:            $push(\varphi_{supp}^{-1}[prefix^k], panel_{height})$ 
27:         else
28:            $push(\varphi_{supp}^{-1}[prefix^k], prefix^k[i + 1])$ 
29:   build rank/select for every sparse bitvector in  $\varphi$  and  $\varphi^{-1}$ 

```

---

---

**Algoritmo B.18** Algoritmi per le query a  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$

---

```

1: function  $\varphi(prefix_{value}, col)$ 
2:    $res \leftarrow \varphi_{supp}^{prefix_{value}}[rank_{\varphi}^{prefix_{value}}(col)]$ 
3:   if  $res = panel_{height}$  then
4:     return null
5:   else
6:     return  $res$ 
1: function  $\varphi^{-1}(prefix_{value}, col)$ 
2:    $res \leftarrow \varphi_{supp}^{-1, prefix_{value}}[rank_{\varphi^{-1}}^{prefix_{value}}(col)]$ 
3:   if  $res = panel_{height}$  then
4:     return null
5:   else
6:     return  $res$ 

```

---



---

**Algoritmo B.19** Algoritmo per estendere un match in  $col$  usando  $\varphi$ ,  $\varphi^{-1}$  e MS

---

```

1: function EXTEND_MATCHES( $col, row, len$ )
2:    $check_{down} \leftarrow \top$ ,  $check_{up} \leftarrow \top$ 
3:   while  $check_{down}$  do
4:      $down_{row} \leftarrow \varphi^{-1}(row, col)$ 
5:     if  $lce\_bounded(col, row, down_{row}, len)$  then
6:        $push(haplos, down_{row})$ 
7:        $row \leftarrow down_{row}$ 
8:     else
9:        $check_{down} \leftarrow \perp$ 
10:  while  $up_{down}$  do
11:     $up_{row} \leftarrow \varphi(row, col)$ 
12:    if  $lce\_bounded(col, row, up_{row}, len)$  then
13:       $push(haplos, up_{row})$ 
14:       $row \leftarrow up_{row}$ 
15:    else
16:       $check_{up} \leftarrow \perp$ 
17:  return  $haplos$ 

```

---

# Appendice C

## Esempi di File

**Listing C.1** Esempio del formato file in output dopo il calcolo dei match con l'implementazione della **PBWT** di Durbin.

---

MATCH	0	64435	0	16138	16138
MATCH	0	68611	0	16138	16138
MATCH	0	12520	16136	16351	215
MATCH	0	3578	16136	16351	215
MATCH	0	4042	16136	16351	215
MATCH	0	5446	16136	16351	215
MATCH	0	29111	16136	16351	215
MATCH	0	56327	16136	16351	215
MATCH	0	42859	16136	16351	215
MATCH	0	38750	16136	16351	215
MATCH	0	42872	16136	16351	215
MATCH	0	33743	16136	16351	215
MATCH	0	46913	16136	16351	215
MATCH	0	497	16136	16351	215
MATCH	0	49708	16138	46537	30399
MATCH	1	26103	0	12800	12800
MATCH	1	14003	1671	16731	15060
MATCH	1	66121	7873	29338	21465
MATCH	1	48305	15585	31210	15625
MATCH	1	60588	15585	31210	15625

---

---

**Listing C.2** Esempio di output di **MaCS**.

---

```
COMMAND:      ./macs 5 3000 -t 0.001 -r 0.001
SEED:   1656169933
SITE:   0           0.0364063206      0.103883682 00100
SITE:   1           0.0808017426      0.668414883 11101
SITE:   2           0.413947166       0.25054948 01111
SITE:   3           0.714643416       0.175509499 00010
TOTAL_SAMPLES:  5
TOTAL_SITES:    4
BEGIN_SELECTED_SITES
0      1      2      3
END_SELECTED_SITES
```

---