Test Avancé 2

Camp Stellenbosch 2022

Temps: $2\frac{1}{2}$ heures

1. William et Beatrice jouent à un jeu. Ils placent des rois sur un échiquier $n \times m$. Les rois ne peuvent pas être placés sur une case qui partage un point avec une case qui contient un roi d'une couleur différente. William joue en premier et place les rois blancs. Beatrice joue deuxième et place les rois noirs. Y a-t-il une statégie gagnant et qui a la stratégie ?

2. Soit $\triangle ABC$ un triangle avec $\angle C = 90°$, et soit Γ le cercle de diamètre AC. Soient D et E des points sur Γ tels que D se trouve en AB et $DE \parallel AC$. Soit P le point d'intersection des droites AE et BC. Montrer que
$$PC \cdot BC = AC^2.$$

3. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ une suite de nombres réels définie par:
   - $a_1 = l$
   - $a_2 = m$
   - $a_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1} + a_{n-2}}$ pour tout les entiers $n \geq 3$.

   Montrer qu'il existe une infinité de pairs d'entiers l et m tels que a_{2022} soit un entier strictement positif.

4. Trouver la valeur de l'expression suivant pour chaque entier strictment positif n:
$$\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

5. Soient x, y, et z des réels strictement positifs tels que $xyz = 1$. Montrer que
$$\frac{x^2y^2}{y^2(x+1)^2 + x^2 + x^2y^2} + \frac{y^2z^2}{z^2(y+1)^2 + y^2 + y^2z^2} + \frac{z^2x^2}{x^2(z+1)^2 + z^2 + z^2x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

```
 .--.              .--.
: (\ ". _......_ ." /) :
 ,.    `        `    .,
  /'   _        _   `\
 /     0}      {0     \
|       /      \       |
|     /'        `\     |
 \   | .  .==.  . |   /
  '._ \.' \__/ './ _.'
  /  ``'._-''-_.'``  \
```