中学生でも解ける東大大学院入試問題（１３５）

2015-03-09 11:27:21

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

小雨が降ったり止んだりの天気になりましたが、明日から晴れ間が戻るようです。だんだん暖かくなってきたという感じです。

さて、今回は平成２１年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「箱Ｘ、箱Ｙには、それぞれに黒玉が１個、白玉が３個、合計４個ずつ入っている。１回の試行で玉１個を無作為に選び交換する。Ｎ回の試行後に、最初と同じ状態になっている確率を求めよ。」
です。

Ｎ回の試行とあるので、漸化式を使うのが良さそうです。

何回か試行して後、箱Ｘの状態で可能性のあるのは、
・黒玉０個と白玉４個
・黒玉１個と白玉３個
・黒玉２個と白玉２個
の３つの状態です。

そこで、Ｎ回試行して、それぞれの状態になる確率を順番に、Ｐ(Ｎ）、Q(N)、Ｒ(N)とします。

すると、
Ｐ(Ｎ）＋Q(N)＋Ｒ(Ｎ)＝１　　　　　（１）
Ｐ(０)＝０
Q(０)＝１　　　　　　　　　　　　　（２）
Ｒ(０)＝０
が成り立ちます。

次に漸化式を立式しましょう。

Ｎ回目の試行後に、黒玉０個と白玉４個になるには、
N－１回目の試行後に、
・黒玉０個と白玉４個の状態で、箱Ｘ、Ｙからどちらも白玉を選んで交換する場合
・と黒玉１個と白玉３個の状態で、箱Ｘから黒玉、箱Ｙから白玉を選んで交換する場合
のいずれかになります。

これを式で表すと、
Ｐ(N)＝（４/４）・（２/４）・Ｐ(N－１)＋（１/４）・（３/４）・Q(N－１）
　　＝１/２・Ｐ(N－１)＋３/１６・Q(N－１）　　　　　（３）
となります。

同様に、Ｎ回目の試行後に、黒玉１個と白玉３個になるには、
N－１回目の試行後に、
・黒玉０個と白玉４個の状態で、箱Ｘから白玉、箱Ｙから黒玉を選んで交換する場合
・黒玉１個と白玉３個の状態で、箱Ｘから白玉、箱Ｙから白玉、または、箱Ｘから黒玉、箱Ｙから黒玉を選んで交換する場合
・黒玉２個と白玉２個の状態で、箱Ｘから黒玉、箱Ｙから白玉を選んで交換する場合
のいずれかになるので、
Q(N)＝（４/４）・（２/４）・Ｐ(N－１）＋（（３/４）・（３/４）＋（１/４）・（１/４））・Q(N－１)＋（２/４）・（４/４）・Ｒ(N－１)
　　＝１/２・Ｐ(N－１）＋５/８・Q(N－１)＋１/２・Ｒ(N－１)　　　　　（４）
となります。

さらに、Ｎ回目の試行後に、
黒玉２個と白玉２個になるには、
N－１回目の試行後に、
・黒玉１個と白玉３個の状態で、箱Ｘから白玉、箱Ｙから黒玉を選んで交換する場合
・黒玉２個と白玉２個の状態で、箱Ｘから白玉、箱Ｙから白玉を選んで交換する場合
のいずれかになるので、
Ｒ(N)＝（３/４）・（１/４）・Q(N－１）＋（２/４）・（４/４）・Ｒ(N－１）
　　＝３/１６・Q(N－１)＋１/２・Ｒ(N－１）　　　　　（５）
となります。

以上の（１）～（５）からＰ(N)、Ｐ(N－１)、Ｒ(N)、Ｒ(N－１)を消去して、Q(N)、Q(N－１)の漸化式をつくり、それを解けばお仕舞いです。

そこで、（４）を
Q(N)＝１/２・（P(N-　１）＋R(N-　１））＋５/８・Q(N-　１)　　　　　（６）
とします。

一方、（１）から
P(N-　１)＋R(N-　１）＝１-　Q(N-　１)
なので、これを（６）に代入して、
Q(N)＝１/２・（１-　Q(N-　１))　＋５/８・Q(N-　１)
　　＝１/８・Q(N-　１)＋１/２　　　　　　　　　（７）
と目的の漸化式ができました。

そこで、（７）の特性方程式
ｘ＝１/８・ｘ＋１/２
から、
ｘ＝４/７
で、（７）は、
Q(N)-　４/７＝１/８・（Q(N-　１)-　４/７）　　　　　（８）
と表すことができます。

そして（８）から
Q(N)＝（１/８）^ｎ・（Q(０)-　４/７）＋４/７
となります。（（１/８）^ｎは１/８のｎ乗を表します）

一方、（２）から、Q(０)＝１なので、
Q(N)＝（１/８）^ｎ・（１-　４/７）＋４/７
　　＝３/７・（１/８）^ｎ＋４/７
となり、これが答えとなります。

解答を振り返ってみると、（４）だけ使って（３）と（５）は使いませんでしたが、もちろん（４）を使わずに（３）と（５）からでも同じ答えになります。

この問題のように「Ｎ回目」とあったらN-　１回目の状態を想定して漸化式をつくるのが解法パターンです。頭に入れておくと良いでしょう。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533