中学生でも解ける東大大学院入試問題（２０６）

2018-04-21 11:36:00

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今回は、平成３０年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「Ｏ、Ａ、Ｂ、Ｃを頂点とする４面体の３つの線分ＯＡ、ＯＢ、ＯＣが互いに直交し、それぞれの長さがａ、ｂ、ｃであるとき、頂点Ｏから平面ＡＢＣへ下ろした垂線の長さを求めよ。」
です。

点（ｘ1，ｙ1，ｚ1）から平面ａｘ＋ｂｙ＋ｃｚ＋ｄ＝０へ下ろした垂線の長さが、

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

になることを知っていれば簡単です。

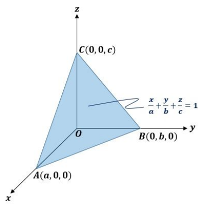
図１のように、空間座標に４面体ＯＡＢＣをおくと、平面ＡＢＣは、

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

で、これを整理すると、

$$bcx+cay+abz-abc=0$$

になります。



▲図１．空間座標に４面体ＯＡＢＣをおきました

原点Ｏから平面ＡＢＣに下ろした垂線の長さは、

$$\frac{|bc\times 0+ca\times 0+ab\times 0-abc|}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$
$$=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

で、これが答えです。

点から平面に下ろした垂線の長さの関係を利用しなくても次のように解くことができます。

４面体ＯＡＢＣで、底面を△ＯＡＢと考えると、∠ＡＯＢ＝９０°なので、その面積Ｓ（ＯＡＢ）は、
Ｓ（ＯＡＢ）＝ａｂ/２
です。

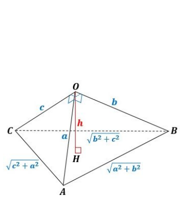
このとき、∠ＡＯＣ＝∠ＢＯＣ＝９０°から高さはｃになり、４面体ＯＡＢＣの体積Ｖ（ＯＡＢＣ）は、
Ｖ（ＯＡＢＣ）＝ａｂ/２×ｃ×１/３＝ａｂｃ/６　　　　　　　（★）
になります。

次に、△ＡＢＣを底面として４面体ＯＡＢＣの体積を表します。

図２に示すように、ＡＢ、ＢＣ、ＣＡの長さは、三平方の定理から、

$$AB=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$BC=\sqrt{b^2+c^2}$$
$$CA=\sqrt{c^2+a^2}$$

です。



▲図２．△ＡＢＣを底面として４面体ＯＡＢＣの体積を表します

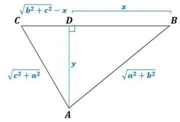
そこで図３のように、ＡからＢＣに下ろした垂線の足をＤ、ＢＤ＝ｘ、ＡＤ＝ｙとすると、三平方の定理から

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$
$$\left(\sqrt{b^2+c^2}-x\right)^2+y^2=c^2+a^2$$

が成り立ち、これらから

$$x=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$
$$y=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2+c^2}}$$

です。



▲図３．△ＡＢＣに注目します

したがって、△ＡＢＣの面積Ｓ（ＡＢＣ）は、

$$S(ABC)=\frac{1}{2}\times\sqrt{b^2+c^2}\times\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2+c^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}$$

になります。

ここで、Ｏから平面ＡＢＣに下ろした垂線の足をＨ、ＯＨの長さをｈとすると、４面体ＯＡＢＣの体積Ｖ（ＯＡＢＣ）は、

$$V(OABC)=\frac{1}{3}\times S(ABC)\times OH$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}\times h$$
$$=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{6}\times h$$

で、これは（★）と等しいので、

$$\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{6}\times h=\frac{abc}{6}$$

が成り立ちます。

これをｈについて解くと、

$$h=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

になり、前の答えと同じになりました。

簡単な問題です。
