

中学生でも解ける東大大学院入試問題（69つづき）

2014-12-25 12:07:47

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

少し風があつて外は寒いですが、室内はあまり寒さを感じません。今日は2学期の終業式で明日から冬期講習が始まります。

さて、昨日に続いて平成26年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題の(2)です。

問題は、

「(2) 次の関係があるとき、 12×6 の値は何か。

$2 \times 3 = 6$ 、 $2 \times 4 = 11$ 、 $3 \times 3 = 12$ 、 $4 \times 5 = 26$ 、 $6 \times 5 = 42$ 、 $13 \times 14 = 215$ 」

です。

$$2 \times 3 = 6 \rightarrow 6$$

$$2 \times 4 = 8 \rightarrow 11$$

$$3 \times 3 = 9 \rightarrow 12$$

となっていることから「 \rightarrow 」は10進法で表された数をn進法に変換するものと予想できます。

そして、問題に与えられている式を眺めると、使われている最大の数が6なので、7進法でないかと予想する訳です。

10進法で表された数を7進法に変換するには、10進法で表された元の数を7で商が0になるまで割り続け、そのときの剰余を逆の順に並べればOKです。

例えば図に示したように、10進法で66を7進法に変換する場合、66を7で割って、商9、剰余3を計算します。

続いて、前の商9を7で割って、商1、剰余2を計算します。

さらに、前の商1を7で割って、商0、剰余1を計算します。

そこで計算した剰余を計算した順番と逆に並べると123となり、これが10進法で表した66の7進法での表記になります。

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 66} \\ 7 \overline{) 63} \dots 3 \\ 7 \overline{) 3} \dots 2 \\ 0 \dots 1 \end{array} \uparrow 123$$

▲図. 10進法から7進法への変換例

それでは、問題に与えられた式を確認していきましょう。

まず 2×3 については、10進法では6になり、これを7進法に変換すると6になります。したがって、 $2 \times 3 = 6$ でOKです。

次に 2×4 については、10進法では8になり、7進法に変換すると11で、これもOKです。

さらに、 3×3 については、10進法では9になり、7進法に変換すると12で、OKです。

この辺りで、もう十分と問題の 12×6 を計算したくなりますが、もう少し我慢して最後まで確認しましょう。

4×5 については、10進法で20、7進法で26でOK。

6×5 については、10進法で30、7進法で42でOK。

ところが、最後の 13×14 については、10進法で182、7進法で350となりNGです。

つまり、単純に10進法から7進法に変換するのではなかった訳です。

そこで変換の「ひとひねり」を見つけなければなりません、 $13 \times 14 = 215$ の215に注目しましょう。

この215が7進法で表されたものとして、これを10進法に変換してみます。この変換方法は、 $2 \times 7^2 + 1 \times 7 + 5 = 110$ （ 7^2 は7の2乗を表します）で、110となります。

つまり、 $13 \times 14 \rightarrow 110$ となる演算で、前の5つの計算式と整合性のあるものを考えればよいことになります。

ここで、問題に与えられた6式のうち前の5式は1桁同士の掛け算で、それらの積を7進法に変換して上手くいきました。ということは、 13×14 も一の位同士は掛け算をしなければならず、その積は $3 \times 4 = 12$ となります。

この12を使って110になる数を作る方法を考えればよいのですが、 13×14 の十の位同士を掛けると、 $10 \times 10 = 100$ が出てきます。これと12を足すと112となり、これから十の位の数を引くと、 $112 - 1 - 1 = 110$ となり、110を作ることができます。

一般化すると、2桁の2数を $10p + q$ 、 $10r + s$ とすると、
 $(10p + q)(10r + s) = 100pr + qs - (p + r)$ (1)
 という演算になります。

ところが、他にいろいろな演算を考えることができて、例えば、
 $(10p + q)(10r + s) = 100pr + (q - p)(s + r)$ (2)
 とすると、

$$\begin{aligned} 13 \times 14 &= (10 + 3)(10 + 4) \\ &= 100 + (3 - 1)(4 + 1) \\ &= 100 + 2 \times 5 \\ &= 110 \end{aligned}$$

や、
 $(10p + q)(10r + s) = 49(p + r) + qs$ (3)
 とすると、

$$\begin{aligned} 13 \times 14 &= 49(1 + 1) + 3 \times 4 \\ &= 98 + 12 \\ &= 110 \end{aligned}$$

などです。

上記した3種類の演算は、1桁同士の掛け算 ($p = r = 0$) の場合、すべて、
 $(10p + q)(10r + s) = qs$
 となつて、問題に与えられている計算式と整合性があります。

と言うことで、上記した3種類の演算で 12×6 の値を計算してみます。

式(1)を使った場合

$$\begin{aligned} 12 \times 6 &= 10 \times 0 + 2 \times 6 - 1 - 0 \\ &= 11 \end{aligned}$$

これを7進法で表して、 $11 \rightarrow 14$

式(2)を使った場合

$$\begin{aligned} 12 \times 6 &= 10 \times 0 + (2 - 1)(6 + 0) \\ &= 6 \end{aligned}$$

これを7進法で表して、 $6 \rightarrow 6$

式(3)を使った場合

$$\begin{aligned} 12 \times 6 &= 49(1 + 0) + 2 \times 6 \\ &= 61 \end{aligned}$$

これを7進法で表して、 $61 \rightarrow 115$

どれでもよいような気がするのですが、出題者の正解を知りたいところです。ちょっと調べて何か判ったら報告します。はっきりしない解答で申し訳ありません。