

中学生でも解ける東大大学院入試問題（90）

2015-01-17 13:00:19

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

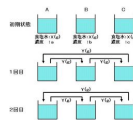
気温は11℃なのですが風があるので寒く感じます。センター試験が始まり本格的な入試シーズンに突入です。中学、高校、大学受験生の皆さん、体調に気をつけて頑張ってください。

さて、今回は平成22年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「濃度の異なる3種類食塩水A、B、CがそれぞれXグラムある。食塩水Aの初期濃度a、食塩水Bの初期濃度b、食塩水Cの初期濃度cの関係は、 $0 < a - b = b - c$ である。各食塩水からYグラムずつ同時に取り、食塩水Aから取った食塩水を食塩水Bのところに、食塩水Bから取った食塩水を食塩水Cのところに、食塩水Cから取った食塩水を食塩水Aのところに混ぜる。この交換作業を2回繰り返した後、食塩水Bと食塩水Cの濃度が等しくなる場合のXとYとの関係を求めなさい。」

中学入試で頻出の食塩水問題です。問題文は長いですが内容は簡単で、図1のように、3種類の食塩水においてバケツリレーのようにYグラムの食塩水を隣の食塩水に2回移したところ、2つの濃度が等しくなったということです。これは、1回目の交換作業後の濃度を求めれば簡単に立式することができます。



▲図1．交換作業

まず初めに、食塩水問題で定番の表1を作りましょう。この表1の空欄を埋めれば、ほとんどお仕舞いです。

	A	B	C
初期食塩水	$a$	$b$	$c$
1回目交換後			
2回目交換後			

▲表1．食塩の質量と濃度

では早速、表1を完成させましょう。

まず1回目の交換作業で、食塩水Aの食塩質量は、 $aY$ （g）減って $cY$ （g）増えるので、  
 $aX - aY + cY = a(X - Y) + cY$ （g）  
 になります。

そして、濃度は、  
 $(a(X - Y) + cY) / X$   
 です。

同様に、食塩水B、Cについても、

〔食塩水B〕  
 食塩質量： $b(X - Y) + aY$ （g）  
 濃度： $(b(X - Y) + aY) / X$

〔食塩水C〕  
 食塩質量： $c(X - Y) + bY$ （g）  
 濃度： $(c(X - Y) + bY) / X$   
 となります。

これらを表2に書き入れます。

	A	B	C
初期食塩水	$a$	$b$	$c$
1回目交換後	$(a(X - Y) + cY) / X$	$(b(X - Y) + aY) / X$	$(c(X - Y) + bY) / X$
2回目交換後			

▲表2．1回目交換作業終了時の結果

続いて2回目の交換作業です。（少し式が長くなります）

食塩水Aの食塩質量は、 $(a(X - Y) + cY) / X \cdot Y$ （g）減って、  
 $(c(X - Y) + bY) / X \cdot Y$ （g）増えるので、  
 $a(X - Y) + cY - (a(X - Y) + cY) / X \cdot Y + (c(X - Y) + bY) / X \cdot Y$ （g）  
 になります。

同様に、食塩水B、Cの食塩質量についてもそれぞれ、  
 $b(X - Y) + aY - (b(X - Y) + aY) / X \cdot Y + (a(X - Y) + cY) / X \cdot Y$ （g）

$c(X - Y) + bY - (c(X - Y) + bY) / X \cdot Y + (b(X - Y) + aY) / X \cdot Y \text{ (g)}$   
となります。

これらを表3に書き入れます。

	食塩水A	食塩水B	食塩水C
食塩	100	100	100
水	100	100	100
食塩水	200	200	200
食塩濃度	50%	50%	50%

▲表3. 2回目交換作業終了時の結果

2回目の交換作業後、食塩水Bと食塩水Cの濃度が等しくなったのですから、それらの食塩質量が等しくなります。  
(食塩水質量はどちらもX(g)なので)

つまり、

$$b(X - Y) + aY - (b(X - Y) + aY) / X \cdot Y + (a(X - Y) + cY) / X \cdot Y \\ = c(X - Y) + bY - (c(X - Y) + bY) / X \cdot Y + (b(X - Y) + aY) / X \cdot Y$$

が成り立ちます。

あとは、この式と問題にある  $a - b = b - c$  を使って、XとYの関係も求めれば出来上がりです。

食塩質量の式の両辺にXを掛けて整理すると、

$$b(X - Y)X + aXY - b(X - Y)Y - aY^2 + a(X - Y)Y + cY^2 \\ = c(X - Y)X + bXY - c(X - Y)Y - bY^2 + b(X - Y)Y + aY^2$$

$$bX^2 - bXY + aXY - bXY + bY^2 - aY^2 + aXY - aY^2 + cY^2 \\ = cX^2 - cXY + bXY - cXY + cY^2 - bY^2 + bXY - bY^2 + aY^2$$

$$(b - c)X^2 + 2(a - 2b + c)XY - 3(a - b)Y^2 = 0$$

となり、 $a - b = b - c \Rightarrow 2b = a + c$  を代入して、

$$X^2 = 3Y^2$$

となり、したがって、

$$X = \sqrt{3}Y$$

となります。

途中の計算が煩雑でしたが、食塩水問題の基本は食塩の質量と食塩水の質量に分けて調べることです。そのとき表を使うと判りやすくなるので図表を活用しましょう。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533