中学生でも解ける東大大学院入試問題（７９）

2015-01-04 11:44:39

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

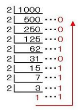
晴れていて風がなく少しは過ごしやすい天気になりました。明後日は少し崩れるようですが、暫く同じような天気が続くようです。

さて、今回は平成２５年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「天秤で１ｋｇ以下のあらゆる重さの物体を１ｇ単位で量りたい。天秤の一方にはその物体、他方には幾つかの分銅を置く。用意しておくべき最低限必要な分銅の数はいくつか。また、そのときの分銅の質量の組合せの例を１つ答えよ。ただし、用いることができる分銅は１ｇ単位とする。」
です。

この問題のポイントは、天秤の一方に重さを量りたい物体、他方に分銅を置くということです。つまり、用意した分銅は、天秤皿に置かれる場合と置かれない場合の二つしかないということで、これは２進法に関係します。

１０００を２進法で表すと、図１に示したように、１１１１１０１０００となります。



▲図１．１０００を２進法で表す

この２進法で表した１１１１１０１０００を１０進法の変換式に入れると、
$1\times2^9+1\times2^8+1\times2^7+1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$
となります。

１０進法で表記した数と２進法で表記した数は、１対１に対応しているので、２^0から２^9までの数とそれらに掛かる０または１の係数を使って１０００以下（実際は０から１０２３）の整数を表すことができます。

したがって、ここで現れた２^n（ｇ）　の分銅を用意すれば、１ｇ以上１０００ｇ以下の整数の重さを１ｇ単位で量れることになります。

つまり、２^0＝１ｇ、２^1＝２ｇ、２^2＝４ｇ、２^3＝８ｇ、２^4＝１６ｇ、２^5＝３２ｇ、２^6＝６４ｇ、２^7＝１２８ｇ、２^8＝２５６ｇ、２^9＝５１２ｇの１０種類です。

例えば、３１７ｇの物体を量る場合は、これを２進法に変換し、１００１１１１０１を求めます。

次に、これを１０進法への変換式に入れると、
$1\times2^8+0\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$
$=1\times2^8+1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^0$
$=256+32+16+8+4+1\ (=317)$
となります。

つまり、２５６ｇ、３２ｇ、１６ｇ、８ｇ、４ｇ、１ｇの分銅を使えば、３１７ｇの物体の重さを量ることができるということです。

次に、１ｇ、２ｇ、４ｇ、８ｇ、１６ｇ、３２ｇ、６４ｇ、１２８ｇ、２５６ｇ、５１２ｇの１０種類の分銅が最低限必要な分銅の数であるかという問題です。

この１０種類の分銅が最低限必要な分銅の数であることを示すには、９種類の分銅では１ｇから１０００ｇの物体の重さを量ることができない、ということを示せばＯＫです。

そこで、９種類の分銅から１、２、３、・・・９種類の分銅を選ぶ場合の数を計算します。

９種類の分銅から１種類選ぶ場合の数、　　９通り
９種類の分銅から２種類選ぶ場合の数、　３６通り
９種類の分銅から３種類選ぶ場合の数、　８４通り
９種類の分銅から４種類選ぶ場合の数、１２６通り
９種類の分銅から５種類選ぶ場合の数、１２６通り
９種類の分銅から６種類選ぶ場合の数、　８４通り
９種類の分銅から７種類選ぶ場合の数、　３６通り
９種類の分銅から８種類選ぶ場合の数、　　９通り
９種類の分銅から９種類選ぶ場合の数、　　１通り
なので、合計５１１通りになります。

つまり、９種類の分銅では、最大５１１種類の重さしか量れないということで、これは１０種類の分銅が最低限必要な数であることを示しています。

以上をまとめると、用意しておくべき最低限の分銅の数は１０種類で、その一例は、１ｇ、２ｇ、４ｇ、８ｇ、１６ｇ、３２ｇ、６４ｇ、１２８ｇ、２５６ｇ、５１２ｇです。

他の例としては、２^0＝１ｇから２^8＝２５６ｇの分銅を使うと５１１ｇまで量れるのですから、１０種類目の分銅は、４８９ｇ（＝１０００－５１１）から５１２ｇであれば、１ｇから１０００ｇまで量れることになります。

この問題では、天秤の一方に重さを量りたい物体、他方に分銅を置くということでしたが、どちらにも分銅を置くことができるとすると、これは３進法（つまり、分銅を右皿に置く、左皿に置く、置かない）になり、１ｇから１０００ｇまで量るために必要な分銅の組合せの一例は、
３^0＝１ｇ、３^1＝３ｇ、３^2＝９ｇ、３^3＝２７ｇ、３^4＝８１ｇ、３^5＝２４３ｇ、３^6＝７２９ｇ
となります。

例えば、３１７ｇの物体を量る場合は、これを３進法に変換し、１０２２０２を求めます。

次に、１０２２０２のなかの２を位の低い順に－１に変えていきます。その規則は、２を－１にしたとき、一つ上の位に１を加え、それが３のときはさらに一つ上の位に１を加え、３を０とします。（普通の足し算でで繰り上がるイメージです）

すると、１０２２０２は、１１０（－１）１（－１）となり、これを１０進法への変換式に入れると、
１×３^5＋１×３^4＋０×３^3－１×３^2＋１×３^1－１×３^0
＝２４３＋８１－９＋３－１（＝３１７）
となります。

ここで、３^n　の係数が、１のものは物体と異なる天秤皿に置く、－１のものは物体と同じ天秤皿に置く、０のものは天秤皿に置かない、とすると、
物体と異なる天秤皿に置かれる分銅は、３^5＝２４３ｇ、３^4＝８１ｇ、３^1=３ｇ
物体と同じ天秤皿に置かれる分銅は、３^2＝９ｇ、３^0＝１ｇ
となり、３１７ｇの物体を量ることができます。

天秤の分銅の組合せに関する問題が、２進法、３進法に関係してることを覚えておくと、このような問題に出くわしたときにも冷静に対処できます。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533