中学生でも解ける東大大学院入試問題（１８０）

2015-04-26 11:21:45

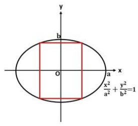
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

夏のように、夕方にわか雨が降ったりしますが、毎日良い天気が続きます。今日の予想最高気温は２４℃で、夏日まであと１℃です。

さて、今回は平成１８年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「長軸半径ａ、短軸半径ｂの楕円に内接する長方形のうち、面積が最大となるものの面積を求めよ。」
です。

図１に示した楕円に内接する長方形（赤色線）の面積の最大値を求める問題です。

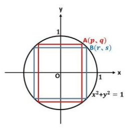


▲図１．問題を図示しました

長方形の縦横の辺の長さや頂点の座標値などを変数として長方形の面積を表し、楕円の式を使ってその最大値を求める方法が見通しが良いのですが、ここでは、円とその内接する面積最大の長方形を、ｘ、ｙ軸方向にそれぞれａ、ｂ倍して、円→楕円、円に内接する面積最大の長方形→楕円に内接する面積最大長方形、を利用しましょう。

まず、円に内接する２個の長方形があって、それらをｘ、ｙ軸にそれぞれａ、ｂ倍したとき、２個の長方形の面積の大小関係が保たれるかを調べておきましょう。

図２に、円に内接する２個の長方形を示します。赤色の長方形の頂点Ａ（ｐ,ｑ）と青色の長方形の頂点Ｂ（ｒ，ｓ）は、どちらも円周上にあります。

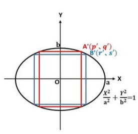


▲図２．円に内接する２個の長方形

ここで、赤い長方形の面積をＳａ、青い長方形の面積をＳｂとし、
Ｓａ＞Ｓｂ　　　　（１）
とします。

すると、
Ｓａ＝２ｐ×２ｑ＝４ｐｑ
Ｓｂ＝２ｒ×２ｓ＝４ｒｓ
なので、（１）から、
ｐｑ＞ｒｓ　　　　（２）
となります。

次に図２をｘ、ｙ軸をそれぞれａ、ｂ倍し、それらをＸ軸、Ｙ軸とします。この操作は、ｘ→Ｘ/ａ、ｙ→Ｙ/ｂと変換することで、図２は図３のように変換されます。



▲図３．ｘ→Ｘ/ａ、ｙ→Ｙ/ｂの変換

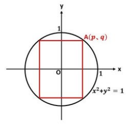
ここで、Ａ'およびＢのＸ、Ｙ座標は、
ｐ'＝ａｐ
ｑ'＝ｂｑ
ｒ'＝ａｒ
ｓ'＝ｂｓ
と変換されるので、
Ｓａ'＝４ａｂｐｑ
Ｓｂ'＝４ａｂｒｓ

となり、（２）から、
$S_{a'} > S_{b'}$
となります。

つまり、円に内接する２個の長方形があって、それらをｘ、ｙ軸にそれぞれａ、ｂ倍しても、２個の長方形の面積の大小関係は保たれることになります。

これが明らかになれば、あとは簡単で、円に内接する長方形でその面積が最大になるもの（ご存知の通り、正方形です）を調べればＯＫです。

そこで図３に示すように、円に内接する長方形を描き、頂点Ａの座標を（ｐ，ｑ）（$0 < p、q < 1$）とします。



▲図３．円に内接する面積最大の長方形

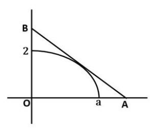
長方形の面積Ｓは、
$S = 4pq$　　　　（３）
で、Ａは円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上にあるので、
$p^2 + q^2 = 1$　　　（４）
が成り立ちます。

（４）から、
$q = \sqrt{1 - p^2}$
で、これを（３）に代入して、
$S = 4p\sqrt{1 - p^2}$
$\quad = 4\sqrt{p^2 - p^4}$
$\quad = \sqrt{-4(p^2 - 1/2)^2 + 1}$
となります。

ここで、Ｓが最大になるのは、
$p^2 = 1/2$
$p = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2$
のときで、このとき、
$q = \sqrt{2}/2$
となり、
$p = q$
つまり、正方形になるときです。

したがって、円に内接する長方形でその面積が最大になるのは正方形ということが判ったので、これらをｘ、ｙ軸方向にそれぞれａ、ｂ倍すると、（$\sqrt{2}/2$，$\sqrt{2}/2$）は、（$\sqrt{2}a/2$，$\sqrt{2}b/2$）になり、楕円に内接する面積最大の長方形の面積は、$2ab$ となり、これが答えです。

次回も楕円の問題を取り上げます。問題は、平成１６年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題で、「図において線分ＡＢは楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の接線である。但し、ａは正の定数である。三角形ＯＡＢの面積の最小値を求めよ。



▲問題図　」

　です。

興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533