

中学生でも解ける東大大学院入試問題（２４）

2014-10-28 12:42:12

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

西高東低の冬の気圧配置になり北風が吹いていますが、陽射しが暖かいのでそれほど寒くはありません。しかし、これからどんどん寒くなっていきますから、特に受験生の皆さんは風邪などに気を付けてください。

しばらくの間、図形問題を取り上げたので、今回は平成２２年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題の数に関するものです。

問題は、

「９進法で表された３けたの数を７進法で表したところ、数字の並び方が逆の３けたの数になった。この数を８進法で表せ。」

ある数 N の n 進法での表し方を知っていれば簡単な問題です。（これを知らないと解けないような気がします）

まず、ある数 N を９進法で表したとき、３桁目の数字を a 、２桁目の数字を b 、１桁目の数字を c とすると、

$$N = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c \quad (1)$$

となります。（ 9^2 は９の２乗を表します）

一方、 N を７進法で表すと、３桁目の数字が c 、２桁目の数字が b 、１桁目の数字が a となるのですから、

$$N = c \cdot 7^2 + b \cdot 7 + a \quad (2)$$

となります。

ここで、 a 、 b 、 c の取り得る範囲を確認しておきましょう。７進法の場合、 a 、 b 、 c は、０以上６以下の整数となり、また、（１）から $a \neq 0$ 、（２）から $c \neq 0$ となります。まとめると、

$$1 \leq a, c \leq 6, 0 \leq b \leq 6 \quad a, b, c \text{ は整数} \quad (3)$$

となります。

これで準備完了です。早速、（１）、（２）を整理して、 a 、 b 、 c の関係式を導きましょう。

（１）＝（２）から、

$$a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c = c \cdot 7^2 + b \cdot 7 + a$$

$$81a + 9b + c = 49c + 7b + a$$

$$80a + 2b - 48c = 0$$

$$40a + b - 24c = 0 \quad (4)$$

（３）と（４）の関係から a 、 b 、 c を決定するのですが、（３）からすべての a 、 b 、 c の組み合わせは、 $6 \times 6 \times 7 = 252$ 通りなので、それらをチェックして正解に辿り着けます。

もう少し手間を省きたいのであれば、（４）を

$$b = 24c - 40a$$

と変形し、（３）に代入して、

$$0 \leq 24c - 40a \leq 6$$

$$0 \leq 12c - 20a \leq 3$$

を導いて、 a 、 c の組み合わせ３６通りをチェックするのも良いでしょう。

もっと簡単に解くのであれば、（４）を

$$8(3c - 5a) = b \quad (5)$$

とすると良いでしょう。

（５）から、 b は８の倍数で、さらに、（３）の条件下で８の倍数は０だけなので、 $b = 0$ となります。すると、

$$3c - 5a = 0$$

$$5a = 3c \quad (6)$$

となります。

（３）と（６）から、 $a = 3$ 、 $c = 5$ となり、（１）に $a = 3$ 、 $b = 0$ 、 $c = 5$ を代入して、

$$N = 3 \cdot 81 + 0 \cdot 9 + 5$$

$$= 248$$

248を８進法に変換すると、370となります。下図に計算方法を示します。

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 248} \\ 8 \overline{) 31} \dots 0 \\ \underline{3} \dots 7 \end{array}$$

▲図.248の８進法変換計算方法

都立高校入試で n 進法についての出題は見かけませんが、簡単な規則なので覚えておくに役に立つこともあるかもしれません。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533