

中学生でも解ける東大大学院入試問題（８６）

2015-01-13 12:35:35

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

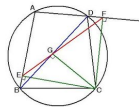
天気予報では、冬將軍は一旦退散と言っていましたが、少し風があつて寒さはあまり変わらないようです。明後日は少し崩れるようですが、他は冬晴れが続きます。受験生の皆さんは、体調に気をつけて頑張ってください。

さて、今回は平成２４年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「円に内接する四角形ＡＢＣＤを考える。ただし、辺ＢＣは辺ＤＡよりも長く、かつ、辺ＡＢは辺ＣＤよりも長いとする。そして、辺ＡＢ、辺ＤＡ、対角線ＢＤ、またはそれらの延長線への、頂点Ｃからの垂線の足を、それぞれＥ、Ｆ、Ｇとする。このとき、 $\angle EFG$ の大きさを求めよ。」
です。

問題には図がない（少し不親切という気もしなくはありませんが）ので、図１のような図を描きましょう。



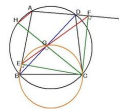
▲図１．問題図形の作図

図１を作図すると、問題の $\angle EFG$ は 180° と判つてしまい、特に証明や説明を要求していないので、それを解答欄に書いてお仕舞いという受験生も多かったのではないかと思います。

つまり、これは作図問題で、受験のときコンパスを携帯しているか（受験案内に定規、コンパスを持ってくること、とあったか知りませんが）を試すものだったのかも知れません。

それはともかく、図１を眺めると、この問題は「シムソンの定理」（ $\triangle ABC$ の外接円周上の１点ＰからＢＣ、ＣＡ、ＡＢに下ろした垂線の足は１直線上にある）であることが判ります。

「シムソンの定理」の証明はいろいろありますが、ここでは図２のように、ＣＧの延長線と円との交点をＨとして、 $AH \parallel GE$ 、 $AH \parallel FG$ を示す方針で進めます。



▲図２．ＣＧの延長線と円との交点をＨ、四角形ＢＣＧＥの外接円を描く

$\angle BGC = \angle BEC = 90^\circ$ なので、四角形ＢＣＧＥは円に内接します。

すると、弧ＢＥの円周角が等しいので、
 $\angle BCE = \angle BGE$ (1)

で、
 $\angle EGH = \angle BGH - \angle BGE$
 $= 90^\circ - \angle BGE$ (2)

$\angle CBE = 180^\circ - \angle BCE - \angle BGE$
 $= 180^\circ - 90^\circ - \angle BCE$
 $= 90^\circ - \angle BCE$ (3)

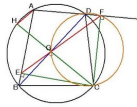
となり、(1) (2) (3) より、
 $\angle EGH = \angle CBE$ (4)
 です。

一方、弧ＡＣの円周角は等しいので、
 $\angle AHC = \angle AHG = \angle ABC = \angle CBE$ (5)

となり、(4) と (5) より、
 $\angle EGH = \angle AHG$ (6)
 です。

ここで、 $\angle EGH$ と $\angle AHG$ は、ＡＨ、ＥＧの錯角で、それらが等しいことからＡＨとＥＧは平行となります。

ここまでで半分終わりです。次は、 $AH \parallel FG$ を示しましょう。図３のように、四角形ＣＦＤＧの外接円を描きます。



▲図3．四角形C F D Gの外接円を描く

$\angle C F D = \angle C G D = 90^\circ$ なので、四角形C F D Gは円に内接します。

弧C Fの円周角は等しいので、
 $\angle C G F = \angle C D F$ (7)
 です。

$\angle C D F = 180^\circ - \angle A D C$ (8)

で、(7) (8) より、
 $\angle C G F = 180^\circ - \angle A D C$
 $\angle A D C = 180^\circ - \angle C G F$ (9)
 です。

一方、四角形A H C Dは円に内接するので、
 $\angle A H C + \angle A D C = 180^\circ$ (10)
 で、(9) (10) から、
 $\angle A H C + 180^\circ - \angle C G F = 180^\circ$
 $\angle A H C = \angle C G F$
 $\angle A H G = \angle C G F$ (11)
 となります。

ここで、 $\angle A H G$ と $\angle C G F$ は、AH、FGの同位角で、それらが等しいことからAHとFGは平行になります。

以上から、 $A K \parallel E G \parallel F G$ なので、 $\angle E G F = 180^\circ$ となり、これが答えになります。

「シムソンの定理」や「方べきの定理」は都立高校入試には出題されませんが、図形が好きな人は覚えておくの良いでしょう。他の証明方法も考えたり、調べてみてください。