

中学生でも解ける東大大学院入試問題（67）

2014-12-21 10:55:12

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

久しぶりに気温が10℃を超えて少し暖くなりました。予報では暫く同じような天気が続くようです。年末で慌しくなってきましたが、受験生の皆さんは落ち着いて勉強に専念しましょう。

さて、今回は平成25年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「以下の方程式を解け。ただし、 x は実数とする。

$$x^2+4x-33=-2\sqrt{x^2+4x+15}$$

」

左辺が2次式、右辺に根号という中学生には馴染みのない方程式ですが恐るるに足りません。右辺の根号を外すため、両辺を2乗します。すると、左辺が4次式になるのですが、変数を置き直す（変数変換）ことで2次式にすることができます。

と言うのは、与式の両辺の x についての2次式を見比べると、どちらも x^2+4x （ x^2 は x の2乗を表します）を含んでいて、これを新しい変数に置き直して両辺を2乗すると、左辺が2次式、右辺が1次式になるからです。

ここでは、

$$x^2+4x+4=(x+2)^2=X \quad (1)$$

と変数を置きなおしましょう。

（1）から、

$$x^2+4x=X-4 \quad (2)$$

なので、（2）を与式に代入して、

$$X-4-33=-2\sqrt{X-4+15}$$

$$X-37=-2\sqrt{X+11} \quad (3)$$

と変形できます。

次に（3）の両辺を2乗すると、

$$(X-37)^2=4(X+11)$$

$$X^2-74X+1369=4X+44$$

$$X^2-78X+1325=0 \quad (4)$$

と X の2次方程式になりました。

あとは、（4）を解の公式を使って解いてもOKですし、因数分解を試みるのも良いでしょう。

ここでは、因数分解でいきましょう。

（4）の定数項の1325が2つの数の積になるような2数を見つけ、それらを足したり引いたりして X の係数-78を探すのが因数分解の常套手段です。

そのために1325を素因数分解するのが上策ですが、ここでは適当にあたりをつけてやってみます。

1325は正数なので2つの数は同符号になります。

また、1325は5の倍数で10の倍数ではないので、符号を無視すると、一方の数は‘☆5’となり、もう一方は‘★3’になります。（ここで、☆、★は0から9までの整数）

これらの2数を足すと78になるのですから、☆+★が7になるわけです。

すると、☆と★の組合せは、2つの数の逆も含めて、0と7、1と6、2と5、・・・となるのですが、（3または5）×70=210または350、10×60=600、20×50=1000、30×40=1200なので、☆、★は、2、5または3、4になりそうです。

以上より、2数の候補は、23と55（積は1265）、25と53（1325）、33と45（1485）、35と43（1505）ということになります。あとは実際に掛け算して、求める2数は、25と53であることが判ります。

そこで（4）を因数分解すると、

$$(X-25)(X-53)=0 \quad (5)$$

となります。

続いて（5）から、

$$X=25$$

または、

$$X = 5 \pm 3$$

で、ここで、 $X = (x + 2)^2$ より、

$$(x + 2)^2 = 2 \pm 5 \quad (6)$$

または、

$$(x + 2)^2 = 5 \pm 3 \quad (7)$$

です。

あとは、(6) (7) を x について解けばOKで、(6) のとき、

$$x + 2 = \pm 5$$

$$x = -7, 3$$

(7) のとき、

$$x + 2 = \pm \sqrt{5 \pm 3}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{5 \pm 3}$$

になります。

まとめると、 $-7, 3, -2 \pm \sqrt{5 \pm 3}$ が与えられた方程式の解になります。

変数を新しい変数に置き直 (変数変換) して式を簡単にするテクニックは中学でも勉強するので、知らなかった人は復習しておくとい良いでしょう。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533