

中学生でも解ける東大大学院入試問題（５９）

2014-12-11 11:37:05

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

雨模様で昨日と比べて気温は少し高くなりましたが、それでも 8℃です。明日は曇りで週末から晴れ間が戻ってくるようです。受験生の皆さんは暖かくして勉強してください。

さて、今回は平成 20 年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「以下の問題にすべて答えよ。

（１）正八面体の各面に 1 ～ 8 の数字を 1 つずつ書き込んでできる八面体さいころは何種類できるか。ただし回転して同一になるものは同じとみなす。

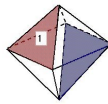
（２）その中で、どの頂点についても、そこに会する 4 面につけられた数字の和が同一になるようなものがあるか。もしあれば、そのような配列の一例を示せ。」

普通の（立方体）のさいころの場合、6 面のうちのある面に 1 を書き込み、その面に平行な面に 1 以外の数字を書き込む場合の数は 5 通りになります。

ここで残りの 4 面を考えると、これらは 1 を書き込んだ面およびそれに平行な面に対して、同じ位置関係にあります。つまり、残りの 4 面の数字をテープに並べて書き、残りの 4 面に巻き付けるとすると、4 面のどこから巻き付け始めても同じさいころができるということです。（結局、立方体さいころの種類は、30 通りです。3 番目の数字を書き込む場合の数は 1 通り、残りの 3 数字を書き込む場合の数は、 $3 \times 2 \times 1 = 6$  通りなので、 $5 \times 1 \times 6 = 30$  通り。後半は円順列で計算しても OK です）

この問題も立方体さいころと同じように扱うことができ、ポイントは 1 を書き込んだ面とそれに平行な面を決めたあと、それらの 2 面に対して残りの 6 面が取り得る位置関係が何通りあるかを調べることです。

まず、図 1 のように正八面体のある面に 1 を書き込み、それに平行な面に残りの数字を書き込みます。その場合の数は、7 通りです。



▲図 1．正八面体の互いに平行な面に 1 とある数字を書き込む

次に、残りの 6 面の位置関係を調べます。図 1 の見取り図でも簡単に判ると思いますが、念のため図 2 に展開図を示します。



▲図 2．展開図

1 を書き込んだ面を赤色面、それと平行な面を青色面とすると、残りの 6 面の赤色面と青色面とに対する位置関係は、

（Ａ）赤色面に 1 辺で接し、青色面に 1 点で接している面（緑色面）

（Ｂ）赤色面に 1 点で接し、青色面に 1 辺で接している面（黄色面）

の 2 種類しかないことがわかります。

したがって、3 番目の数字を書き込む場合の数は、緑色面または黄色面の 2 通りになります。

あとの残りの 5 面は、すでに数字が書き込まれた面に対してすべて位置関係が異なるので、残りの 5 面の数字を書き込む場合の数は、5 面の数字を並べる場合の数と同じで、 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  通りになります。

以上から、求める八面体さいころの種類は、 $7 \times 2 \times 120 = 1680$  通りになります。

次に（２）なのですが、明日取り上げたいと思います。興味があれば考えてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533