中学生でも解ける東大大学院入試問題（３３）

2014-11-08 11:24:52

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日の立冬は暖かかったのですが、現在の気温は１２℃とぐっと寒くなりました。天気図を見るとシベリア気団の高気圧が日本に押し寄せています。これからどんどん寒くなりますが、特に受験生は体調に気を付けて頑張ってください。

さて、今回は平成１７年東大大学院工学系研究科システム量子工学入試問題を取り上げます。

問題は、
「正Ｎ角形において一つの内角の大きさの平方根のＭ倍（Ｍは整数）が外角の大きさに等しくなるという。Ｍ、Ｎの値を求めよ。」
です。

今ちょうど小５の算数では多角形の内角を勉強していますが、そこで仕入れた知識を使うことになります。（多角形の内角については、中２でも再度勉強します）

その知識というのは、Ｎ角形の内角の和Ａは、
Ａ＝１８０°×（Ｎ－２）
となるというものです。（判らない人は、小５または中２の教科書を見てください）

それでは、これを使って問題文を立式しましょう。

まず、正Ｎ角形の一つの内角Ｂは、ＡをＮで割って、
Ｂ＝Ａ/Ｎ
　＝１８０°×（Ｎ－２）/Ｎ
となります。

さらに、この内角の平方根のＭ倍をＣとすると、
Ｃ＝Ｍ√Ｂ
　＝Ｍ√（１８０°×（Ｎ－２））/Ｎ
となります。

一方、多角形の外角の和は３６０°なので、正Ｎ角形の外角Ｄは、
Ｄ＝３６０°/Ｎ
なり（Ｄ＝１８０°－Ｂ　としてもＯＫです）、問題はＣ＝Ｄ、つまり、
Ｍ√（１８０°×（Ｎ－２））Ｎ＝３６０°/Ｎ　　（１）
と立式することができました。結局、この問題は（１）の整数不定方程式を満たす整数Ｍ、Ｎを求めるということです。

では、早速（１）を解きましょう。まず、左辺の根号が邪魔なので（１）の両辺を２乗すると、
Ｍ^2・１８０・（Ｎ－２）/Ｎ＝３６０^2/Ｎ^2　　（Ｍ^2はＭの２乗を表します）
となり、これを整理すると、
Ｍ^2・Ｎ（Ｎ－２）＝７２０　　　（２）　　（角度の単位「°」は省略しました）
を得ます。結局、（２）を満たす整数Ｍ、Ｎを求めることになったわけです。

ここから整数Ｍ、Ｎの範囲を絞り込んでいくのですが、実際に行った順に記します。（ちょっと恥ずかしいのですが）

まず、（２）を眺めると左辺のＭ^2が目に付きます。Ｍ^2という平方数が７２０の因数になっているのでＭの範囲は、
１≦Ｍ≦２６　（１≦Ｍ^2≦６７６）
です。つまり、（２）にＭを１から２６まで逐次代入して、それらの式を満たす整数Ｎがあるかを調べていけば正解できます。

しかし、２６ケースについて調べるのは骨が折れるので少し工夫しました。ここで、正Ｎ角形ということは、Ｎ≧３ということなので、これと（２）から、
Ｍ^2≦７２０/（３・（３－２））
　　＝２４０
となります。これで、Ｍの範囲は、
１≦Ｍ≦１５　（１≦Ｍ^2≦１５）
となり、半分近くに絞り込むことができました。

しかし、１５ケースを調べるのも大変なので、もう少し工夫したいと思い、再度（２）を眺めて、右辺の７２０を素因数分解することにしました。（実は、最初に素因数分解をしようと思ったのですが、Ｍ^2≦７２０で解けることが判ってしまい、素因数分解をスキップしてしまいました）

７２０＝２^4×３^2×５
なので、Ｍ^2は、１^2、２^2、３^2、（２^2）^2、（２×３）^2、（２^2×３）^2　のいずれかとなります。つまり、
Ｍ^2＝１、４、９、１６、３６、１４４
Ｍ　＝１、２、３、　４、　６、　１２
の６ケースに絞り込めました。

それでは、これらのそれぞれのケースを（２）に代入すると、
Ｍ＝１：　Ｎ（Ｎ－２）＝７２０　→N^2－２Ｎ－７２０＝０
Ｍ＝２：　Ｎ（Ｎ－２）＝１８０　→N^2－２Ｎ－１８０＝０
Ｍ＝３：　Ｎ（Ｎ－２）＝８０　　→N^2－２Ｎ－８０＝０
Ｍ＝４：　Ｎ（Ｎ－２）＝４５　　→N^2－２Ｎ－４５＝０
Ｍ＝６：　Ｎ（Ｎ－２）＝２０　　→N^2－２Ｎ－２０＝０
Ｍ＝１２：Ｎ（Ｎ－２）＝５　　　→N^2－２Ｎ－５＝０
と６つの２次方程式を得ることができ、これらのなかでＮが整数になるものを見つければＯＫです。

それぞれを解の公式なり因数分解してＮを求めてもよいのですが、２次方程式の形が同じなので、
N^2－２Ｎ－ｋ＝０　　（ｋ＝７２０、１８０、８０、４５、２０、５）
として解の公式を使います。

すると、Ｎは、
Ｎ＝１±√（１＋ｋ）
となり、Ｎが整数になるためには、１＋ｋが平方数でなければならず、それを満たすのは、ｋ＝８０のときだけです。

そのとき、
Ｎ＝１±√８１
　＝１±９
　＝１０または－８
ここで、Ｎ≧３より、Ｎ＝１０で、このとき、Ｍ＝３となります。

検算してみると、正１０角形のときの一つの内角は、１４４°で、それの平方根は１２°、これを３倍すると、３６°です。一方、正１０角形の外角は、３６°なので正しい結果であることが判りました。

初めの絞り込みが下手だったとはいえ、このような整数の不定方程式で絞込みが上手く行くと脳内にドーパミンが放出されるのでしょうか、とても嬉しくなります。皆さんもいろいろな絞込み方を試してみてください。

[学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533