

中学生でも解ける東大大学院入試問題（202）

2017-03-18 10:58:28

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

空に薄い雲がかかっていますが陽射しは十分で、気持ちのいい陽気になりました。明日は晴天で、気温も 20°C 近くになるようです。

さて、今回は平成29年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「段数が無限大の階段がある。ある人が、最初の0段目にいて、コインを投げて表が出たら1段上がって立ち止まり、裏が出たら2段上がって立ち止まり、これを繰り返していくとする。ただしコインの表と裏は同じ確率で出るとする。

（1）4段目に立ち止まることがある確率 P_4 を求めよ。

（2） N 段目に立ち止まることがある確率 P_N を N を使った式で示し、 N が非常に大きくなったときに P_N が収束する値を示せ。」

早速、取り掛かりましょう。

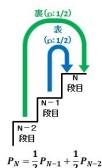
（1）では、高々4段目に立ち止まる確率 P_4 を求めるので、以下のようにすべての場合を書き上げて、計算することもできます。

- ・ 0 段目-（表）- 1 段目-（表）- 2 段目-（表）- 3 段目-（表）- 4 段目 $[p = 1/16]$
- ・ 0 段目-（表）- 1 段目-（表）- 2 段目-（裏）- 4 段目 $[p = 1/8]$
- ・ 0 段目-（表）- 1 段目-（裏）- 3 段目-（表）- 4 段目 $[p = 1/8]$
- ・ 0 段目-（裏）- 2 段目-（表）- 3 段目-（表）- 4 段目 $[p = 1/8]$
- ・ 0 段目-（裏）- 2 段目-（裏）- 4 段目 $[p = 1/4]$

から、

$P_4 = 1/16 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/4 = 11/16$ です。

また、下図のように、漸化式を使って計算することもできます。



▲図．漸化式を使って計算します

N 段目に立ち止まるのは、 $N-1$ 段目でコインが表の場合と $N-2$ 段目でコインが裏の場合ですから、各段に立ち止まる確率を P_N 、 P_{N-1} 、 P_{N-2} とすると、

$$P_N = \frac{1}{2}P_{N-1} + \frac{1}{2}P_{N-2}$$

が成り立ちます。

ここで、 $N = 4$ とすると、

$$P_4 = \frac{1}{2} \cdot P_3 + \frac{1}{2} \cdot P_2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{2} \cdot P_1 \right) + \frac{1}{2} \cdot P_2$$

$$= \frac{3}{4} \cdot P_2 + \frac{1}{4} \cdot P_1$$

で、 $P_1 = 1/2$ 、 $P_2 = 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$ なので、

$$P_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16} + \frac{1}{8} = 11/16$$

で、前の値と同じになりました。

続いて（2）です。

ここは漸化式

$$P_{N+1} = \frac{1}{2}P_N + \frac{1}{2}P_{N-1}$$

から P_N を求めます。

特性方程式

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = (t-1)\left(t + \frac{1}{2}\right) = 0$$

の解は、1 と $-1/2$ なので、

$$P_{N+1} - P_N = \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-1} (P_2 - P_1) \\ = \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-1} \times \frac{1}{4}$$

と

$$P_{N+1} + \frac{1}{2}P_N = \underset{=1}{1^{N-1}} \left(P_1 + \frac{1}{2}P_1\right)$$

になります。

これらから P_{N+1} を消去して、 $P_1 = 1/2$ 、 $P_2 = 3/4$ を代入すると、

$$P_N = -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-1} + \frac{2}{3}$$

になり、 P_N を N を使った式で表すことができました。

そして、 N が非常に大きくなったとき、 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{(N-1)}$ は 0 に近づくので、 P_N は $2/3$ に収束します。

確率と漸化式についての基本問題です。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
 TEL 042-472-5533