中学生でも解ける東大大学院入試問題（９６）

2015-01-23 12:02:55

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

風があるのですが冷たい風ではなく気温も９℃と過ごしやすい日になりました。週末も暖かい日が続くようです。

さて、今回は平成２６年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「点Ａ、Ｂはそれぞれ直線ｙ＝ｘ、ｙ＝２ｘ上にある。線分ＡＢの長さが６であるとき、線分ＡＢを２：１に内分する点Ｐの軌跡を表す方程式を求めよ。」
です。

図１にグラフを示します。点Ａ、点Ｂおよび点Ｐの座標をそれぞれ、（ｘ1，ｙ1）、（ｘ2，ｙ2）、（ｘ，ｙ）としました。

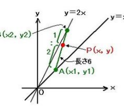


図１．グラフを書きます

解答の方針は、次の３つの条件、
（あ）点Ａ、点Ｂがそれぞれ直線ｙ＝ｘ、ｙ＝２ｘ上にあること
（い）線分ＡＢの長さが６であること
（う）点Ｐは線分ＡＢを２：１で内分する点であること
を使って、点Ｐ（ｘ，ｙ）の関係式を求めることになります。

まず、（あ）の条件から、
ｙ1＝ｘ1　　　　（１）
ｙ2＝２ｘ2　　　（２）
なので、点Ａ、Ｂの座標は、Ａ（ｘ1，ｘ1）、Ｂ（ｘ2，２ｘ2）になります。

次に（い）の条件から、三平方の定理を使って、
（ｘ2－ｘ1）^2＋（ｙ2－ｙ1）^2＝６^2　　　（３）　　（Ｘ^2はＸの２乗を表します）
となり、（３）に（１）（２）を代入して、
（ｘ2－ｘ1）^2＋（２ｘ2－ｘ1）^2＝３６　　（４）
となります。

最後に（う）の条件から、
ｘ＝（ｘ1＋２ｘ2）/3　　　　（５）
ｙ＝（ｙ1＋２ｙ2）/3　　　　（６）
となり、（６）に（１）（２）を代入して、
ｙ＝（ｘ1＋４ｘ2）/3　　　　（７）
となります。

したがって、（４）（５）（７）を使って、ｘとｙの関係式を求めることになります。
（ｘ2－ｘ1）^2＋（２ｘ2－ｘ1）^2＝３６　　（４）
ｘ＝（ｘ1＋２ｘ2）/3　　　　　　　　　　（５）
ｙ＝（ｘ1＋４ｘ2）/3　　　　　　　　　　（７）

ここでは、（５）（７）からｘ1、ｘ2をｘとｙの式で表し、それを（４）に代入してｘとｙの関係式を導きましょう。

（５）（６）を、
３ｘ＝ｘ1＋２ｘ2　　　　（８）
３ｙ＝ｘ1＋４ｘ2　　　　（９）
と変形し、（８）×2－（９）、（８）－（９）から
ｘ1＝３（２ｘ－ｙ）　　　　（１０）
ｘ2＝３（－ｘ＋ｙ）/2　　　（１１）
を得ます。

続いて、（１０）（１１）から、
ｘ2－ｘ1　＝３（－ｘ＋ｙ）/2－３（２ｘ－ｙ）
　　　　　＝－１５ｘ/2＋９ｙ/2　　　　　　　　（１２）
２ｘ2－ｘ1＝３（－ｘ＋ｙ）－３（２ｘ－ｙ）
　　　　　＝－９ｘ＋６ｙ　　　　　　　　　　　（１３）
をつくり、これを（４）に代入して、
（－１５ｘ/2＋９ｙ/2）^2＋（－９ｘ＋６ｙ）^2＝３６

とし、これを整理して、
$61x^2-78xy+25y^2=16$　　　　　　　　（１４）
とｘとｙの関係式を求めることができました。

これが点Ｐの軌跡を表す方程式で答えになります。

この（１４）の式は２次式で中学数学でもお馴染みの放物線やその他に双曲線、楕円などを表します。

２次式の一般形を
$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
とした場合、
$AC-(B/2)^2>0$　⇒楕円
$AC-(B/2)^2=0$　⇒放物線
$AC-(B/2)^2<0$　⇒双曲線
と判別できます。

ここで、（１４）を調べてみると、
$61\times25-(-78/2)^2=1525-1521$
$=4>0$
で楕円になることが判ります。

（１４）はｘとｙの項がないので、ｘ軸、ｙ軸を適当量回転させるだけで単純な楕円の式を導くことができますが、これは大学で勉強する範囲なのでスキップして、ここでは（１４）の楕円がどんなイメージかを調べてみます。

点Ａが原点から遠くなると、点Ａを中心にした半径６の円と$y=2x$の交点がなくなります。

そこで、点Ａを中心にした半径６の円と$y=2x$が接する場合を調べることにします。

高校数学の範囲では、円の方程式と$y=2x$を使って２次方程式をつくり、これが重解を持つ条件で円の方程式を決定することができますが、ここでは円が直線と接するとき半径が接点で接線と直交することを使って接点を求めましょう。

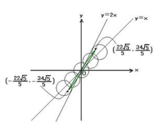
$y=2x$に直交する直線$y=-x/2+b$、$y=2x$上の接点を$(x_2,\ 2x_2)$とすると、
$2x_2=-x_2/2+b$より、
$b=5x_2/2$
となり、$y=2x$に直交する直線は、
$y=-x/2+5x_2/2$
となります。

この直線と$y=x$との交点は、$(5x_2/3,\ 5x_2/3)$で、接点からの長さが６なので、三平方の定理により、
$(x_2-5x_2/3)^2+(2x_2-5x_2/3)^2=6^2$
を導くことができます。

これを解くと、
$x_2=\pm18\sqrt{5}/5$
で、
接点の座標は$(\pm18\sqrt{5}/5,\ \pm36\sqrt{5}/5)$
円の中心の座標は$(\pm6\sqrt{5},\ \pm6\sqrt{5})$
になります。

すると、円の中心と接点とを結ぶ線分を２：１に内分する点のｘ、ｙ座標は、それぞれ、
$(\pm6\sqrt{5}\pm36\sqrt{5}/5)/3=\pm22\sqrt{5}/5$
$(\pm6\sqrt{5}\pm72\sqrt{5}/5)/3=\pm34\sqrt{5}/5$
になります。

つまり、$(22\sqrt{5}/5,\ 34\sqrt{5}/5)$と$(-22\sqrt{5}/5,\ -34\sqrt{5}/5)$が楕円の長径の両端になります。正確ではありませんが図２に（１４）の楕円のイメージを示します。



▲図２．答えの楕円のイメージ図

放物線、双曲線や楕円などの２次曲線はたいへん面白いので調べてみるとよいでしょう。

TEL 042-472-5533