

中学生でも解ける東大大学院入試問題（109）

2015-02-05 13:22:01

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝から雪で明朝まで降り続くそうです。あまり積もらなければ有り難いのですが、流石に明日は雪かき作業ですね。

さて、今回は平成15年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「ある点から出発して北方向に直進し、 90° 方向を変え、続けて東方向、同じようにして次に南方向、次に西方向に直進して出発点に戻るような移動を考える。総移動距離が L である場合に、この移動で通ることのできる領域の面積を求めよ。」

です。

少し問題の意味が捉え難い問題ですが、まず、図を描いてみましょう。

図1のように、ある出発点から北方向に進んだ距離を a 、東方向に進んだ距離を b とします。

ここで、

$$a \geq 0 \quad (1)$$

$$b \geq 0 \quad (2)$$

としておきます。

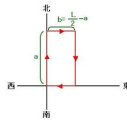
また、総移動距離が L なので、

$$2(a + b) = L$$

から、

$$b = L/2 - a \quad (3)$$

となります。



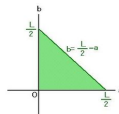
▲図1．問題の移動

ところで、ここで問われている「この移動で通ることのできる領域の面積」というのは、例えば、 b が小さくなって0になると、北方向の $L/2$ の点まで行くことができます。つまり、 $(b, a) = (0, L/2)$ はその領域に含まれるということです。

また、 a が小さくなって0になると、東方向の $L/2$ の点まで行くことができるので、 $(b, a) = (L/2, 0)$ もその領域に含まれます。

つまり、図1の平面上の点 (b, a) で(1)(2)(3)を満たす点がこの移動で通ることができる領域で、その面積は、(1)(2)(3)で囲まれた領域になります。

そこで、図2に b - a 平面上で(1)(2)(3)で囲まれた領域を示します。



▲図2．この移動で通ることのできる領域

この領域は、底辺 $L/2$ 、高さ $L/2$ の三角形で、その面積は、

$$1/2 \cdot L/2 \cdot L/2 = L^2/8 \quad (L^2はLの2乗を表します)$$

となり、これが答えになります。

もし、北方向（東方向）に負の量進むこと（つまり、南方向（西方向）に正の量進むこと）が許されるなら、(1)

(2)の不等式は、それぞれ、

$$-L/2 \leq a \leq L/2$$

$$-L/2 \leq b \leq L/2$$

となり、面積は $L^2/2$ になります。

題意のつかみ難い問題では、簡単な具体例を考えてみるのが有効です。都立高校数学入試問題の大問2では、そのような問題が出題されることがあるので、是非、覚えておいてください。

<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533