

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１２６）

2015-02-23 11:47:39

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

本州の太平洋岸に寒冷前線が延びていて、そのおかげで南風が吹き込み暖かくなりました。明日は都立高校入学試験ですが、今日と同様、暖かくなるようで良かったです。

さて、今回は平成２２年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「 $A = 999 \cdots 99$ （２０１０桁すべて９）とする。 A^2 の各桁の数字の和を求めよ。」
です。（ A^2 は A の２乗を表します）

以前、同じような１９９１年の日本数学オリンピックの予選問題を取り上げました。

$A = 999 \cdots 99$ （２０１０桁すべて９）を見ると、

$$A = 10^{2010} - 1$$

と変形したくなります。これを使って A^2 を計算すると、

$$A^2 = (10^{2010} - 1)^2 \\ = 10^{4020} - 2 \cdot 10^{2010} + 1 \quad (1)$$

となります。

（１）の右辺の第１項は、先頭の数字が１でそのあとに０が４０２０個続く数で、第２項目は、先頭の数字が２でそのあとに０が２０１０個続く数です。

これらの差は、２０１１桁目が８、それ以上で４０２０桁目までのすべての桁は９、２０１０桁目以下で１桁目までのすべての桁は０になります。

つまり、２０１２桁目から４０２０桁目までの２００９桁が９、２０１１桁目が８、１桁目から２０１０桁目までの２０１０桁が０になるということで、

$$10^{4020} - 2 \cdot 10^{2010} = 99 \cdots 9800 \cdots 0$$

となります。ここで、「 $99 \cdots 9$ 」は、９が２００９個並び、「 $00 \cdots 0$ 」は、０が２０１０個並びます。

したがって、

$$A^2 = 10^{4020} - 2 \cdot 10^{2010} + 1 \\ = 99 \cdots 9800 \cdots 0 + 1 \\ = 99 \cdots 9800 \cdots 01$$

となります。ここで、「 $99 \cdots 9$ 」、「 $00 \cdots 0$ 」は、それぞれ、９および０が２００９個並びます。

以上から、 A^2 の各桁の数字の和は、

$$9 \times 2009 + 8 + 1 = 18090$$

になり、これが答えです。

９が n 個並んだ数は、 $10^n - 1$ で表すことができることを覚えておきましょう。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533