中学生でも解ける東大大学院入試問題（１３１）

2015-03-05 12:48:46

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

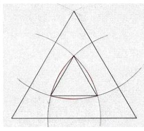
少し風がありますが、今日も良い天気で暖かくなりました。しかし、明日からしばらく晴れ間のない天気が続くようです。

さて、今回は平成２４年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「一辺の長さが√２の正三角形の各頂点を中心に半径１の円をそれぞれ描くとき、３個の円の共通部分の面積を求めよ。」
です。

久しぶりの図形問題です。いままで図形問題の説明図はエクセルで作っていたのですが、この問題については大きくなりすぎてしまうため、手書きの図を使います。

問題を図示すると図１のようになり、中央部の赤色の線で囲んだルーロー三角形のような図形の面積が問われています。

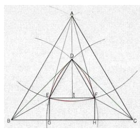


▲図１．問題を図示しました

三角関数を知っているならば、それを使って簡単に解けてしまいますが、それを知らない場合、三平方の定理と三角形の重心を使って解くこともできます。（相当な計算量になりますけれど）

しかし、今回は別の方法を調べてみます。

まず、問題に与えられた正三角形の一辺の長さ√２と円の半径１から連想するのが、直角二等辺三角形の斜辺と他の一辺の関係です。図１で、その直角二等辺三角形を探すと図２に示した△ＤＢＣがそれになります。



▲図２．△ＤＢＣは直角二等辺三角形

すると、
∠ＤＢＥ＝∠ＤＢＣ－∠ＥＢＧ
　　　　＝４５°－３０°
　　　　＝１５°
∠ＢＤＥ＝∠ＤＢＡ（平行線の錯角）
　　　　＝∠ＡＢＣ－∠ＤＢＣ
　　　　＝６０°－４５°
　　　　＝１５°
となり、△ＥＢＤは二等辺三角形になります。

ここで、正三角形ＤＥＦの一辺の長さをｘとし、点Ｅ、点Ｆから辺ＢＣに垂線を下ろし、その足をそれぞれ点Ｇおよび点Ｈとすると、△ＢＥＧは３つの内角がそれぞれ９０°、６０°、３０°の直角三角形なので、
ＢＥ：ＢＧ＝２：√３
になります。

一方、
ＤＥ＝ＥＢ＝ｘ
なので、
ＢＧ＝√３ｘ／２
です。

同様に、
ＣＨ＝√３ｘ／２
で、
ＧＨ＝ＥＦ＝ｘ
から、
ＢＣ＝ＢＧ＋ＧＨ＋ＣＨ

$= \sqrt{3}x/2 + x + \sqrt{3}x/2$
$= (\sqrt{3}+1)x$
です。

ところが、
$BC = \sqrt{2}$
なので、
$(\sqrt{3}+1)x = \sqrt{2}$
が成り立ち、これから
$x = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$
となります。

そこで、正三角形ＤＥＦの面積は、
正三角形ＤＥＦ$= 1/2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})/2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$
$= (2\sqrt{3}-3)/4$
になります。

あとは、正三角形ＤＥＦの周りに３つある円弧と弦で囲まれた図形の面積を計算するればお仕舞いです。

それには、扇形ＡＥＦの面積から△ＡＥＦの面積を引くのが早いでしょう。

まず、扇形ＡＥＦの面積は、その中心角が３０°ですから、
扇形ＡＥＦ$= 1 \times 1 \times \pi \times 30/360$
$= \pi/12$
です。

次に△ＡＥＦの面積は、
$\triangle AEF = 1/2 \cdot EF \cdot AI$
で、
$EF = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$
ＡＩは、正三角形ＡＢＣの高さ（$\sqrt{6}/2$）からＥＧ（（$\sqrt{6}-\sqrt{2}$）/４）を引いたもの、つまり、
$AI = \sqrt{6}/2 - (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$
$= (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$
なので、
$\triangle AEF = 1/2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})/2 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$
$= 1/4$
となります。

したがって、正三角形ＤＥＦの周りにある円弧と弦で囲まれた図形の面積（１つ分）は、
$\pi/12 - 1/4$
で、これが３つあるので、合わせて
$(\pi - 3)/4$
になります。

最後に、正三角形ＤＥＦ面積とこれを足し合わせて、
$(2\sqrt{3}-3)/4 + (\pi-3)/4 = (\pi + 2\sqrt{3} - 6)/4$
となり、これが答えになります。

他にもいろいろな解法があると思うので興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533