

中学生でも解ける東大大学院入試問題（４８）

2014-11-28 12:01:43

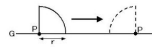
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝は晴れ間も見えたのですが、今はすっかり曇りの天気です。明日も曇りの予報ですが、最高気温は20℃で暖かくなりそうです。

さて、今回は平成17年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、

「中心角が90°で半径 r の扇形が直線 G 上をすべることなく下図の点線の位置まで回転するとき、扇形の中心 P が描く軌跡と直線 G で囲まれる面積を求めよ。」



▲問題図

中学の問題集に載っているような問題です。

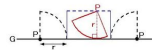
まず P の軌跡を調べましょう。

扇形が直線 G 上を回転し始めたとき、図1の Q が支点となり青色の破線で示した円弧になります。



▲図1．回転初期

P が Q の真上まで到達すると、それ以降は扇形の弧上の点が、端からもう一方の端まで順に支点になり、図2のように直線 G 上を移動します。その間 P と直線 G との距離は一定値の r で、 P の軌跡は直線 G と平行になります。



▲図2．回転中期

さらに支点が扇形の弧に端に到達すると、回転初期と同様に P の軌跡は円弧を描き、 P が直線 G 上に到達して、扇形の回転移動は完了します。

以上の回転移動をまとめると図3のようになり、青色の線で表したものが P の軌跡になります。

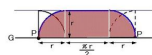


図3． P の軌跡

問題は P の軌跡と直線 G で囲まれた面積を求めることなので、図3の赤色の領域の面積を計算します。

左側の部分（回転初期）は、中心角が90°で半径 r の扇形で、この面積を S_1 とすると、 $S_1 = \pi r^2 / 4$ （ r^2 は r の2乗を表します）

中央の部分（回転中期）は、縦 r 、横 $2\pi r / 4 = \pi r / 2$ の長方形で、この面積を S_2 とすると、 $S_2 = r \cdot \pi r / 2 = \pi r^2 / 2$

右側の部分は、左側の部分と合同なので、求める面積 S は、 $S = 2S_1 + S_2 = 2(\pi r^2 / 4) + \pi r^2 / 2 = \pi r^2 / 2 + \pi r^2 / 2 = \pi r^2$ となります。

この問題では扇形を回転させましたが、正三角形や正方形などの正多角形を回転させた場合は計算が複雑になります。興味のある方は挑戦してみてください。

TEL 042-472-5533