

中学生でも解ける東大大学院入試問題（８１つづき）

2015-01-07 11:54:30

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日は暖かかったので今日の冷え込みを覚悟していたのですが、思ったほどではありませんでした。寒さに馴れてきたせいでしょうか。

さて、今回は昨日と同じ平成２４年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「次に示す計算は六進法の加算である。O、N、E、T、Wは１～５の数字であり、異なる文字には異なる数字が対応する。各文字に対応する数字を求めよ。」

$$\begin{array}{r} \text{ONE} \\ + \text{ONE} \\ \hline \text{TWO} \end{array}$$

▲問題の計算式

です。

昨日は六進法の加算表を使って解きましたが、今回は乗算を使う解法と十進法に変換する解法を調べます。

最初に乗算を使う解法です。問題の計算式を図１のように乗算に直します。

$$\begin{array}{r} \text{ONE} \\ \times \text{2} \\ \hline \text{TWO} \end{array}$$

▲図１．問題の計算式を乗算に直します

図２に、掛ける数が２の場合の六進法乗算表を示します。

\times	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14

▲図２．乗算表

ここでまず覆面算攻略のポイントである最上位の桁の繰り上がりに着目すると、 $O \times 2$ は繰り上がっていません。

そこで図２の乗算表を調べると、２を掛けて繰り上がらないのは、０、１、２であることが判りますが、本問で０は候補ではないので、 $O = 1$ または２となります。

次に、１桁目に着目します。 $E \times 2$ の１桁目が０になるのですが、図２の乗算表から、ある数に２を掛けてその積の１桁目が１になるものはありません。すなわち、 $O = 2$ となります。

すると、 $E = 1$ または４となります。

一方、３桁目に着目すると、 $O \times 2 = 4$ なので、 $T = 4$ （２桁目から繰り上がらない場合）または５（２桁目から繰り上がる場合）と判ります。

これらをまとめると、 E と T の考えられる組合せは、 $(E, T) = (1, 4) (1, 5) (4, 5)$ となります。

そこで、これらの E 、 T の組合せで場合分けします。

$(E, T) = (1, 4)$ [残りの数は３、５] の場合、１桁目の $E \times 2$ は繰り上がらないので、 W は $N \times 2$ の１桁目になりますが、その数は乗算表から０、２、４以外なく、残りの数[３、５]と一致するものがないので、 $(E, T) \neq (1, 4)$ となります。

$(E, T) = (1, 5)$ [残りの数は３、４] の場合、１桁目の $E \times 2$ は繰り上がらないので、 W は $N \times 2$ の１桁目になり、その数は乗算表から０、２、４以外なく、残りの数[３、４]から $W = 4$ となります。すると、 $N = 2$ または５となりますが、 $O = 2$ 、 $T = 5$ なので、 $(E, T) \neq (1, 5)$ です。

$(E, T) = (4, 5)$ [残りの数は１、３] の場合、 $T = 5$ なので、 $N \times 2$ は繰り上がらなければなりません。乗算表から残りの数で繰り上がるのは３なので、 $N = 3$ となります。すると、 $N \times 2$ の１桁目は０になり、 $E \times 2$ の２桁目が１であることから、 $W = 1$ となります。

以上をまとめると、 $O = 2$ 、 $N = 3$ 、 $E = 4$ 、 $T = 5$ 、 $W = 1$ で、これが正解になります。

次に十進法に変換して解いてみましょう。

$$'ONE' = O \times 6^2 + N \times 6 + E$$

$$= 36O + 6N + E$$

なので、

$$'ONE' + 'ONE' = 72O + 12N + 2E$$

です。

一方、

$$'TWO' = 36T + 6W + O$$

なので、

$$72O + 12N + 2E = 36T + 6W + O$$

$$71O = 2(18T + 3W - 6N - E) \quad (1)$$

が成り立ちます。

ここで、(1)の右辺の $18T + 3W - 6N - E$ は、 $T = 5$ 、 $W = 4$ 、 $N = 1$ 、 $E = 2$ のとき最大になり、その値は 94 なので、(1) が成り立つためには、

$$O = 2$$

$$18T + 3W - 6N - E = 71 \quad (2)$$

となります。

次に、(2)を変形して、

$$3(6T + W - 2N) = 71 + E \quad (3)$$

とすると、(3)の右辺が3の倍数になるためには、 $E = 1$ または 4 となります。

ここで、 $E = 1$ の場合、(3)から、

$$6T + W - 2N = 24$$

$$6T = 24 + 2N - W \quad (4)$$

です。

ここで、(4)の右辺は6の倍数であり、かつ、残りの数が $[3, 4, 5]$ なので、

$$25 \leq 6T = 24 + 2N - W \leq 31$$

となります。

つまり、 $6T = 30$ なので、 $T = 5$ です。これを(4)に代入し整理すると、

$$2N - W = 6 \quad (5)$$

となりますが、残りの数 $[3, 4]$ で(5)を満たすことはできません。つまり、 $E \neq 1$ と判ります。

次に、 $E = 4$ の場合、(3)から、

$$6T + W - 2N = 25$$

$$6T = 25 + 2N - W \quad (6)$$

です。

ここで、(6)の右辺は6の倍数であり、かつ、残りの数は $[1, 3, 5]$ なので、

$$22 \leq 6T = 25 + 2N - W \leq 34$$

となります。

つまり、 $6T = 30$ なので、 $T = 5$ です。これを(6)に代入し整理すると、

$$2N - W = 5 \quad (7)$$

となりますが、残りの数 $[1, 3]$ で(7)を満たすのは、 $N = 3$ 、 $W = 1$ となります。

まとめると、 $O = 2$ 、 $N = 3$ 、 $E = 4$ 、 $T = 5$ 、 $W = 1$ と正解を得ることができました。

昨日と今日で3種類の解法を調べましたが、どれも場合分けをするという同様な解答になりました。実際、私が受験するのであれば、最後の十進法に変換する解答を選んだと思いますが、皆さんはどうでしょう。よりスマートな解法をご存知の方は教えて頂ければ幸いです。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533