

中学生でも解ける東大大学院入試問題（10）

2014-10-07 12:05:33

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

涼しい風が吹いて気持ちの良い日になりました。朝夕はめっきり冷え込んできたので風邪など引かぬよう気をつけてください。

さて、一昨日に続いて東大大学院入試問題から掛け算の虫食い算を紹介します。問題は平成22年度工学系研究科システム創成学のもので以下の通りです。

「次の虫食い算のZに入る数字をもとめよ」

$$\begin{array}{r} \square\square \\ \times \square\square \\ \hline 2\square \\ 6\square \\ \hline 7Z\square \end{array}$$

▲問題図

□のままだと説明し難いので、図1のように、□のところにA～Gを置きます。

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array} \\ \times \begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline \end{array} \\ \hline 2\begin{array}{|c|} \hline E \\ \hline \end{array} \\ 6\begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \\ \hline 7Z\begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \end{array} \end{array}$$

▲図1. 問題図の□にA～Gを置いたもの

まず、百の位が6→7と繰り上がっているので、十の位の2 + Fは2桁の数になる訳で、つまり、Fは、7、8、9のいずれかになります。そこで、それぞれの場合について調べていきます。

F = 7の場合

1行目の数ABにCを掛けて67になるのですが、67は素数なので、ABは67、Cは1となります。すると、67にDを掛けて2Eとすることができないので、F = 7は不適当です。

F = 8の場合

上と同様、ABにCを掛けて68になるので、 $68 = 68 \times 1$ 、 34×2 、 17×4 からABとCの組み合わせ（AB，C）は、

- (1) (68, 1)
- (2) (34, 2)
- (3) (17, 4)

となります。

しかし、(1)～(3)のすべてについて、68、34および17にD掛けて2Eとすることができないので、F = 8も不適当です。

F = 9の場合

上と同様、ABにCを掛けて69になるので、 $69 = 69 \times 1$ 、 23×3 からABとCの組み合わせ（AB，C）は、

- (4) (69, 1)
- (5) (23, 3)

となります。

(4)の(69, 1)は上と同様に不適当なのですが、(5)の(23, 3)については、D = 1のとき、 $23 \times 1 = 23$ となりOKです。

以上より、A = 2、B = 3、C = 3、D = 1、F = 9が決まりました。初めの計算式にそれらを入れた結果を図2に示します。

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \times \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline 2\begin{array}{|c|} \hline E \\ \hline \end{array} \\ 6\begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \\ \hline 7Z\begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \end{array} \end{array}$$

▲図2.計算途中経過

すると、E = 3、G = 3、Z = 1となることが判り、答えはZ = 1となります。図3に完成した計算式を示します。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \times \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 6 & 9 \\ \hline 7 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

▲図3．完成した計算式

以上のように、この虫食い算は簡単に解けるのですが、以下に式を使って解く方法を示します。

まず、計算式の2つの掛け算と1つの足し算を式に表します。そのために、各行の数を以下のように表します。

- (1行目) $AB \rightarrow 10A + B$
 (2行目) $CD \rightarrow 10C + D$
 (3行目) $2E \rightarrow 20 + E$
 (4行目) $6F \rightarrow 600 + 10F$
 (5行目) $7ZG \rightarrow 700 + 10Z + G$

これらを使って2つの掛け算と1つの足し算を立式すると、
 (10A + B)D = 20 + E (6)
 (10A + B) × 10C = 600 + 10F (7)
 20 + E + 600 + 10F = 700 + 10Z + G (8)

(7)と(8)を整理して、
 (10A + B)C = 60 + F (9)
 10F - 10Z + E - G = 80 (10)

まず、(10)から
 $E = G$ (11)
 となり、(10)と(11)から
 $F - Z = 8$ (12)
 となります。

(12)が成り立つのは、FとZの組み合わせ(F, Z)が
 (8, 0)
 (9, 1)
 のときで、それぞれの場合を調べます。

(F, Z) = (8, 0)の場合、(9)より、
 (10A + B)C = 68
 $= 68 \times 1, 34 \times 2, 17 \times 4$
 であることから、10A + BとCの組み合わせ(10A + B, C)は、
 (68, 1)
 (34, 2)
 (17, 4)
 となります。

10A + B = 68, 34, 17を(6)に代入すると、
 $68 \times D = 20 + E$
 $34 \times D = 20 + E$
 $17 \times D = 20 + E$
 となりますが、これらを満たすDはないので、(F, Z) = (8, 0)は不適切となります。

次に、(F, Z) = (9, 1)の場合、(9)より、
 (10A + B)C = 69
 $= 69 \times 1, 23 \times 3$
 であることから、10A + BとCの組み合わせ(10A + B, C)は、
 (69, 1)
 (23, 3)
 となります。

10A + B = 69, 23を(6)に代入すると、
 $69 \times D = 20 + E$ (13)
 $23 \times D = 20 + E$ (14)
 となり、(13)を満たすDはありませんが、(14)はD = 1のとき成り立ち、そのとき、E = 3となります。すると、(11)からG = 3となります。

以上まとめると、A = 2、B = 3、C = 3、D = 1、E = 3、F = 9、G = 3、Z = 1となります。

別解と言っても、筆算式を眺めながら解くか、式にして解くかの違いで、やっていることは同じで失礼しました。

中3の受験生以外は、中間試験も終わったので算数パズルに挑戦してみても如何ですか。なかなか勉強になります。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533