中学生でも解ける東大大学院入試問題（１７６）

2015-04-21 12:44:18

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

気温は２０℃なのですが、晴れてきたので暖かく感じます。これから暫くの間、良い天気が続くようです。

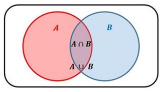
さて、今回は平成１８年度東大大学院新領域創成科学研究科情報生命科学の入試問題です。

問題は、
「集合ＡとＢの和集合、積集合、差集合をそれぞれ、Ａ∪Ｂ、Ａ∩Ｂ、Ａ－Ｂであらわす。また集合Ａの補集合をＡ’、集合Ａの元の個数をｎ（Ａ）であらわす。

（１）差集合Ａ－Ｂをそれ以外の記号を用いてあらわせ。
（２）ｎ（Ａ∪Ｂ）＝ｎ（Ａ）＋ｎ（Ｂ）－ｎ（Ａ∩Ｂ）を証明せよ。
（３）Ａ∩（Ｂ∪Ｃ）＝（Ａ∩Ｂ）∪（Ａ∩Ｃ）を証明せよ。
（４）Ａ∩（Ｂ’∩Ｃ）’を展開せよ。
（５）集合演算におけるド・モルガンの法則を書け。　」
です。（集合Ａの補集合はＡの上添え字Cとなっていますが、ここではＡ’としました）

集合の問題です。昔は小学校で扱っていましたが評判が良くなかったようで、今は高校で勉強します。とは言っても、ベン図を使えば難しくありません。

まず図１に、集合Ａ、Ｂ、Ａ∪Ｂ、Ａ∩Ｂを表したベン図を示します。

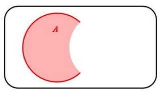


▲図１．集合Ａ、Ｂ、Ａ∪Ｂ、Ａ∩Ｂを表したベン図

図１で、赤色領域が集合Ａ、青色領域が集合Ｂ、赤色と青色領域を合わせた領域が集合Ａ∪Ｂ、赤色と青色領域が重なっている領域が集合Ａ∩Ｂになります。

補集合Ａ’は集合Ａを除いた領域で、補集合Ｂ’は集合Ｂを除いた領域になります。

それでは（１）です。差集合Ａ－Ｂは、図２に示すように、集合Ａから集合Ｂを除いたものです。



▲図２．差集合Ａ－Ｂ

図２から判るように、
Ａ－Ｂ＝Ａ－Ａ∩Ｂ
なのですが、両辺に、記号“－”はあるので、これではダメなようです。

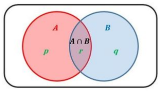
そこで図２を再度見直すと、差集合Ａ－Ｂは、集合Ａと集合Ｂの補集合Ｂ’との積集合になっていることが判ります。

つまり、
Ａ－Ｂ＝Ａ∩Ｂ’
で、これが答えです。

ここで、和、積、差集合を内包的表示すると、
和集合Ａ∪Ｂ＝｛ｘｌｘ∈Ａ　または　ｘ∈Ｂ｝
積集合Ａ∩Ｂ＝｛ｘｌｘ∈Ａ　かつ　　ｘ∈Ｂ｝
差集合Ａ－Ｂ＝｛ｘｌｘ∈Ａ　かつ　ｘ～∈Ｂ｝　　（ｘ～∈Ｂは、ｘが集合Ｂの元ではない、です）
なります。

これから、
Ａ－Ｂ＝｛ｘｌｘ∈Ａ　かつ　ｘ～∈Ｂ｝
　　　＝｛ｘｌｘ∈Ａ　かつ　ｘ∈Ｂ’｝
　　　＝Ａ∩Ｂ’
と示すこともできます。

次に（２）です。図３に示すように、集合Ａ－Ｂ、Ｂ－Ａ、Ａ∩Ｂの元の個数を、それぞれ、ｐ、ｑ、ｒとします。



▲図３．各集合の元の個数を p、q、r としました

ここで、
$n(A \cup B) = p + q + r$
$n(A) = p + r$
$n(B) = q + r$
$n(A \cap B) = r$
で、
$p + q + r = (p + r) + (q + r) - r$
から、
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
です。

続いて（３）です。

ここでは、ベン図を使わずにやってみましょう。

まず、$x \in A \cap (B \cup C)$ とすると、$x \in A$　かつ　$x \in B \cup C$　です。

そして、$x \in B \cup C$　より、$x \in B$　または　$x \in C$　となります。

ここで、$x \in B$ の場合と $x \in C$ の場合に場合分けします。

・$x \in B$ の場合
$x \in A$ なので、$x \in A \cap B$　で、したがって、$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ です。

・$x \in C$ の場合
$x \in A$ なので、$x \in A \cap C$　で、したがって、$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ です。

以上から、
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$　　　　（１）
となります。

続けて、
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とすると、$x \in (A \cap B)$　または　$x \in (A \cap C)$ です。

ここで、$x \in (A \cap B)$ の場合と $x \in (A \cap C)$ の場合に場合分けします。

・$x \in (A \cap B)$ の場合
$x \in A$　かつ　$x \in B$　で、$x \in B$　から、$x \in B \cup C$　です。これと $x \in A$ より、$x \in A \cap (B \cup C)$ です。

・$x \in (A \cap C)$ の場合
$x \in A$　かつ　$x \in C$　で、$x \in C$　から、$x \in B \cup C$　です。これと $x \in A$ より、$x \in A \cap (B \cup C)$ です。

以上から、
$x \in A \cap (B \cup C)$　　　　（２）
となります。

したがって、（１）と（２）から、$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成り立ちます。

のんびり解いていたので、塾生が来る時間になってしまいました。（４）と（５）は次回調べます。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533