

## 中学生でも解ける東大大学院入試問題（１２４）

2015-02-21 11:11:42

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

このところ晴れて暖かい日が続きますが、明日の天気は雨模様です。とは言っても気温は今日より上がるようで、待ち遠しい春が近づいています。受験生の皆さんはもう一息です。頑張ってください。

さて、今回は平成１６年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「３つの一桁の数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  ( $c > a > b$ ) がある。  $c = 2 \times b + 1$ 、 $a = 2 \times b - 1$  のとき以下の間に答えよ。

(１)  $a \times c$  は偶数か、奇数か。

(２)  $a + b + c$  の最大値を求めよ。

(３)  $a \times b \times c$  が奇数となる ( $a$ 、 $b$ 、 $c$ ) を求めよ。」  
です。

初めに、 $b$  の変域を調べておきましょう。

$c = 2 \times b + 1$ 、 $a = 2 \times b - 1$  を  $c > a > b$  に代入すると、

$$2 \times b + 1 > 2 \times b - 1 > b$$

となり、右側の不等式から、

$$2b - 1 > b$$

$$b > 1 \quad (4)$$

が判ります。

次に、 $c$  は一桁の数なので  $c \leq 9$  で、これと  $c = 2 \times b + 1$  から、

$$2 \times b + 1 \leq 9$$

$$b \leq 4 \quad (5)$$

が判ります。

したがって、 $b$  の変域は、(４) (５) から、

$$1 < b \leq 4 \quad (6)$$

となります。

それでは、(１)に進みましょう。

まず、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  は、一桁の数なので整数ということです。したがって、 $a = 2 \times b - 1$ 、 $c = 2 \times b + 1$  から、 $a$  も  $c$  も奇数になります。つまり、 $a \times c$  は、奇数と奇数の積で、それは奇数になります。

これを式で表すと、

$$a \times c = (2 \times b - 1)(2 \times b + 1)$$

$$= 4b^2 + 2b - 2b - 1$$

$$= 4b^2 - 1$$

$$= 2(2b^2 - 1) + 1$$

ここで、 $2b^2 - 1$  は整数なので、 $a \times c$  は奇数になります。

次に(２)です。

まず、与式を変形すると、

$$a + b + c = 2 \times b - 1 + b + 2 \times b + 1$$

$$= 5b \quad (7)$$

となります。

ここで、(６)から  $b$  の最大値は４なので、(７)の最大値は２０になります。このとき、 $a = 7$ 、 $c = 9$  です。

続いて(３)です。

(１)から、 $a \times c$  は奇数なので、 $a \times b \times c$  が奇数になるのは、 $b$  が奇数のときです。

一方、(６)から  $b$  が奇数となるのは、 $b = 3$  のときだけで、このとき、 $a = 5$ 、 $c = 7$  です。

したがって、 $a \times b \times c$  が奇数となる ( $a$ 、 $b$ 、 $c$ ) は、(５，３，７) となります。

簡単な問題でしたが、このような整数問題では、変数の取り得る範囲を調べておくことと見通しが良くなり、より簡単になることがあるので、覚えておいてください。