

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１６５）

2015-04-09 11:35:50

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日の雪には驚きましたが、今日は晴天です。気温も１０℃以上高くなり過ごしやすい日になりました。しかし、明日から下り坂で明後日まで雨模様のように、これは菜種梅雨でしょうか。

さて、今回は平成１７年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「漸化式 $a(1) = 1$ 、 $a(i+1) = 2a(i) + 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列の一般項 $a(n)$ を求めよ。」
です。（問題では、 $a(1)$ などの（ ）の中は下付き添字になっています）

漸化式の一番初めに登場する形のもので、答えを求めるだけならば、１０行位で終わってしまうので、初めに漸化式と特性方程式について説明します。

まず、問題に与えられた漸化式を一般化して、

$$a(i+1) = p a(i) + q \quad (1)$$

$p \neq 1$

の場合を考えます。

ここで、一般項 $a(n)$ を求めるためには、（１）を

$$(a(i+1) - \alpha) = \beta (a(i) - \alpha) \quad (2)$$

の形にしてしまえば、左辺を右辺に繰り返し代入することにより、

$$\begin{aligned} a(n) - \alpha &= \beta (a(n-1) - \alpha) \\ &= \beta^2 (a(n-2) - \alpha) \\ &\quad \vdots \\ &= \beta^{(n-1)} (a(1) - \alpha) \end{aligned}$$

と $a(n)$ を表すことができます。

そこで、（２）を変形して、（１）と比べてみます。

（２）から、

$$a(i+1) = \beta a(i) - \alpha\beta + \alpha$$

で、これを（１）と比べると、

$$p = \beta \quad (3)$$

$$q = -\alpha\beta + \alpha \quad (4)$$

になり、（３）を（４）に代入して、

$$q = -p\alpha + \alpha \quad (5)$$

$$\alpha = p\alpha + q$$

を得ることができます。

一方、（１）の $a(i+1)$ 、 $a(i)$ を x と置いた式、

$$x = p x + q \quad (6)$$

を特性方程式と言いますが、これをよく見ると、 $x = \alpha$ としたものが（５）であることが判ります。

つまり、（１）の漸化式を（２）の形にする場合、特性方程式の解が α になるということです。

そこで、問題に戻ると、与えられた漸化式の特性方程式は、

$$x = 2x + 1$$

です。

これを解くと、 $x = -1$ となり、与えられた漸化式は、

$$(a(i+1) + 1) = 2(a(i) + 1) \quad (7)$$

と変形できます。

続いて、（７）の左辺を繰り返し右辺に代入することで、

$$a(n) + 1 = 2^{(n-1)} (a(1) + 1)$$

を得て、ここで、 $a(1) = 1$ なので、

$$a(n) = 2^{n-1}$$

となり、これが答えです。

今回扱った漸化式は最も基本的なものですが、他にいろいろな形をした漸化式があり、それぞれ面白いテクニックを使って一般項を求めます。興味のある人は調べてみて下さい。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533