中学生でも解ける東大大学院入試問題（２３）

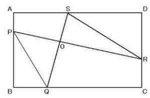
2014-10-26 12:06:23

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今は晴れていて良い天気なのですが、ラジオの天気予報では、午後から雲が出て雨が降るところもあると言っていました。天気図を見ると、大陸からの高気圧が続いているので、明日から暫く晴れそうです。

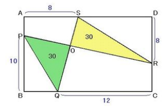
さて、今回も図形問題を取り上げます。平成１８年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題で、相似の問題です。都立高校入試にも相似問題が頻出ですが、それと同レベルの問題で、相似問題を解くために必要なテクニックを使うので良い問題だと思います。

問題は、
「長方形ＡＢＣＤの各辺上に、図のように４つの点Ｐ、Ｑ、Ｒ、ＳをとりＰＲとＱＳの交点をＯとする。三角形ＰＱＯと三角形ＲＳＯの面積が等しく、それぞれ３０ｃｍ2　であるとき、長方形ＡＢＣＤの面積を求めよ。但し、ＡＳ＝８ｃｍ、ＰＢ＝１０ｃｍ、ＱＣ＝１２ｃｍ、ＲＤ＝８ｃｍである。」



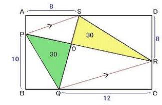
▲問題図

まず、問題文の条件を問題図に書き入れた図１を示します。



▲図１．問題図に条件を書き入れました

面積の等しい三角形があるときには、等積変形を思い浮かべましょう。すると、図２のようにＰＳ、ＱＲに補助線を引きたくなります。



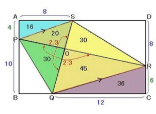
▲図２．等積変形を思い出して補助線を引く

ここで、△ＰＱＲと△ＳＱＲの面積が等しいので、ＰＳ//ＱＲになります。

すると、△ＡＰＳ∽△ＣＲＱで、その相似比はＡＳ：ＣＱ＝８：１２＝２：３となります。ここで、ＡＰ＝２α、ＣＲ＝３αとすると、ＡＢ＝ＣＤより、
２α＋１０＝３α＋８
したがって、
α＝２、ＡＰ＝４ｃｍ、ＣＲ＝６ｃｍ
とＡＰとＣＲの長さが判ったので、△ＡＰＳと△ＣＲＱの面積は、それぞれ１６ｃｍ2、３６ｃｍ2となります。

一方、△ＯＰＳ∽△ＯＲＱで、その相似比は２：３です。これから、ＯＰ：ＯＲ＝２：３、ＯＳ：ＯＱ＝２：３なので、△ＯＰＳと△ＯＲＱの面積は、それぞれ２０ｃｍ2、４５ｃｍ2となります。（△ＯＰＳの場合、△ＰＱＳの面積は△ＰＯＱ（＝３０ｃｍ2）と△ＰＯＳ（＝△ＯＰＳ）の面積の和に等しく、その面積比は、ＯＱ：ＯＳ＝３：２になるので、△ＰＯＱの面積：△ＰＯＳの面積＝３０：△ＯＰＳ＝３：２より△ＯＰＳ＝２０ｃｍ2となります。△ＯＲＱも同様）

ここで、いままでに得られた結果を図３にまとめます。



▲図３．いままでに判ったこと

あとは、△ＢＰＱと△ＤＳＲの面積を求めるか、ＢＱまたはＤＳの長さを求めればお仕舞いです。ここでは、ＢＱの長さを求めてみましょう。

台形ＡＳＱＢに着目すると、その面積Ｓは、

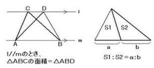
Ｓ＝（８＋ＢＱ）・１４・1/2
＝７（８＋ＢＱ）　　　（１）

一方、台形ＡＳＱＢの面積は、△ＡＰＳ、△ＯＰＳ、△ＰＱＯ、△ＢＰＱの面積の和なので、
Ｓ＝１６＋２０＋３０＋（△ＢＰＱの面積）
＝６６＋（△ＢＰＱの面積）　　　（２）

ところが、△ＢＰＱの面積は、
ＢＱ・１０・1/2＝５・ＢＱ　　　（３）
なので、（１）（２）（３）より、
７（８＋ＢＱ）＝６６＋５・ＢＱ
整理して、
２・ＢＱ＝６６- ５６
＝１０
ゆえに、
ＢＱ＝５ｃｍ
と判りました。

以上より、長方形ＡＢＣＤは、縦１４ｃｍ、横１７ｃｍとなり、その面積は、２３８ｃｍ2になります。

ここで使った等積変形や、三角形で対辺をａ：ｂに内分する点に頂点から引いた線分でできる2つの三角形の面積比はａ：ｂになることを図4にまとめておきます。



▲図４．覚えておきたい解法テクニック

これらは、都立高校入試に頻出する大切なテクニックなのでしっかり覚えておきましょう。

[学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533