

中学生でも解ける東大大学院入試問題（6 1 つづき）

2014-12-15 11:59:17

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨夕は初雪が降り、今朝は厳しい冷え込みとなりました。「冬きたりなば春遠からじ」（NHK朝の連続ドラマ「マッサン」の今週の週タイトルです）ということで、厳しい寒さを乗り切りましょう。まだ、3月まではまだ大分あります。

さて、昨日に続き平成22年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題の（2）です。

問題は、

「今日は8月31日である。日付の数字を連続させて正の整数をつくると、831となる。

（1）831を2個以上の連続する正の整数の和として表す方法は何通りあるか。

（2）2個以上の連続する正の整数の和として表すことのできない数字をつくる日は1年に何日あるか。ただし、ない場合は0（ゼロ）日とせよ。なお、1月1日は11を、2月10日は210を、10月1日は101をつくる。たとえば、123をつくる日付は1月23日と12月3日の2日あることに注意せよ。」

です。

（1）は、「2個以上の連続する正の整数の和」を、2個以上の連続する整数のなかの最小の数を p 、2個以上を n 個（ $n \geq 2$ ）と2つの変数を使って立式し、その不定整数方程式を解くことで解決しました。

その途中に、

$$S = n(n + 2p - 1) / 2 \quad (1)$$

（ここで、 S は2個以上の連続する正の整数の和、 n は2個以上の連続する正の整数の個数、 $n \geq 2$ 、 p は2個以上の連続する整数のなかの最小の数、 $p \geq 1$ 、です）

がありましたが、（2）はこれを手掛かりに進めていきます。

まず、（1）の両辺を2倍して、

$$2S = n(n + 2p - 1) \quad (2)$$

とします。

そこで、 n が偶数と奇数の場合に分けて調べます。

・ n が偶数の場合

$$n = 2k \quad (k \geq 1)$$

とし、（2）に代入すると、

$$2S = 2k(2k + 2p - 1)$$

$$S = k(2(k + p) - 1) \quad (3)$$

となり、（3）の右辺の $(2(k + p) - 1)$ は正の整数で、かつ、奇数になります。つまり、 S の因数に奇数を持つということです。

・ n が奇数の場合

$$n = 2k - 1 \quad (k \geq 1)$$

とし、（2）に代入すると、

$$2S = (2k - 1)((2k - 1) + 2p - 1)$$

$$= 2(2k - 1)(k + p - 1)$$

$$S = (2k - 1)(k + p - 1) \quad (4)$$

となり、（4）の右辺の $(2k - 1)$ は正の整数で、かつ、奇数になります。つまり、この場合も S の因数に奇数を持つということです。

つまり、 S が1以外の奇数を因数に持つ場合、（1）を満たす p 、 n が存在し、「2個以上の連続する正の整数の和として表すことができる」ということになります。

すなわち、「2個以上の連続する正の整数の和として表すことができない」というのは、 S が奇数の因数を持たない、つまり、 S が2のべき乗になるということです。

1年は、1月1日（→11）から12月31日（→1231）なので、11から1231までの2のべき乗を調べると、

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

$$2^7 = 128$$

$$2^8 = 256$$

$$2^9 = 512$$

$$2^{10} = 1024$$

の7つです。

それらは、

1 6 → 1 月 6 日
3 2 → 3 月 2 日
6 4 → 6 月 4 日
1 2 8 → 1 月 2 8 日、1 2 月 8 日
2 5 6 → なし
5 1 2 → 5 月 1 2 日
1 0 2 4 → 1 0 月 2 4 日
に対応し、合わせて、7 日間になります。

このように、整数に関する問題で、偶数、奇数や剰余類で場合分けするテクニックは強力なので、頭に入れておく役に立つでしょう。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533