

中学生でも解ける東大大学院入試問題（134）

2015-03-08 11:00:21

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

小雨が降り今日も寒い日になりました。晴れ間が見られるのは明後日になるようです。

さて、今回は平成25年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

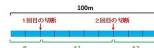
「100mの長さのロープに、端部から10mごとの等間隔で9つの印がつけられている。9つの印の中から無作為に1つ選んでその場所でロープを切り、長い方あるいは二等分された場合はそのどちらかのロープをA、残りをBと呼ぶこととする。さらにロープAに付けられている印（一回目に切られた個所の印を除く）の中から無作為に1つ選んでその場所でロープAを切り、長い方あるいは二等分された場合はそのどちらかのロープをA1、残りをA2と呼びことにする。

（1）ロープA2の長さが40mになる確率を求めよ。

（2）ロープA2の長さがロープBより長くなる確率を求めよ。」

です。

問題文が長いので図を描いて具体例で確かめることが大切です。下図に、1回目の切断をロープの左端から2つ目の印で、2回目の切断を7つ目の印で行った例を示します。



▲図.具体例での確認

この場合、ロープAとBの長さは、それぞれ80mおよび20mになり、ロープA1とA2の長さは、それぞれ50mおよび30mになります。

（1）では、このような手順でロープを切断したとき、2回目に切断したロープの短い方が40mになる確率を問うているわけです。

それが判ればあとは簡単で、ロープA2の長さが40mになるときロープA1の長さは40m以上なので、ロープAの長さは80m以上、つまり、80mまたは90mになります。

ロープAの長さが90mになるのは、ロープの左端から1つ目の印または右端から1つ目の印で切断したときで、その確率は2/9です。

このとき、ロープAには8つの印が残っていて、ロープA2の長さが40mになるのは、ロープAの左端から4つ目の印または右端から4つ目の印を切断したときで、その確率は2/8になります。

したがって、ロープAの長さが90mになって、ロープA2の長さが40mになる確率は、 $2/9 \times 2/8 = 1/18$ になります。

次にロープAの長さが80mになるのは、ロープの左端から2つ目の印または右端から2つ目の印で切断したときで、その確率は2/9です。

このとき、ロープAには7つの印が残っていて、ロープA2の長さが40mになるのは、ロープAの左端から4つ目の印を切断したときで、この左端から4つ目の印は右端から4つ目の印と同じなので、その確率は1/7です。

したがって、ロープAの長さが80mになって、ロープA2の長さが40mになる確率は、 $2/9 \times 1/7 = 2/63$ になります。

以上から、ロープA2の長さが40mになる確率は、 $1/18 + 2/63 = 11/126$  となり、これが答えです。

続いて（2）です。

ロープBの長さが30m以上とすると、ロープAの長さは70m以下となります。

すると、ロープA2の長さは30m以下になるので、ロープA2の長さがロープBより長くなるのは、ロープBの長さが20m以下、つまり、ロープAの長さが80m以上であることが必要です。

ここで（1）と同じように、ロープAの長さが90mになる場合と80mになる場合に分けて調べます。

まず、ロープAの長さが90mになる確率は、（1）で示したように2/9です。

このとき、ロープBの長さは10mなので、ロープA2の長さは20m以上にはなりません。ロープAには8つの印が残っていますが、ロープAの両端から1つめの印を除いたところで切断すれば、ロープA2の長さは20m以上になり、その確率は、6/8です。

したがって、ロープAの長さが90mになって、ロープA2の長さが20m以上になる確率は、 $2/9 \times 6/8 = 1/6$  になります。

次に、ロープAの長さが80mになる確率は、 $2/9$ です。

このとき、ロープBの長さは20mなので、ロープA2の長さは30m以上にならなくてはなりません。ロープAには7つの印が残っていますが、ロープAの両端から1および2つ目の合わせて4つの印を除いたところで切断すれば、ロープA2の長さは30m以上になり、その確率は、 $3/7$ です。

したがって、ロープAの長さが80mになって、ロープA2の長さが30m以上になる確率は、 $2/9 \times 3/7 = 2/21$  になります。

以上から、ロープA2の長さがロープBより長くなる確率は、 $1/6 + 2/21 = 1\frac{1}{42}$  となり、これが答えです。

ちょうど中2生は確率を勉強し始めた時期ですが、興味のある人は確率についていろいろ調べて勉強すると理解が深まると思います。

---

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533