中学生でも解ける東大大学院入試問題（１９）

2014-10-22 12:29:41

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

予報通り雨になり、気温も１４℃と寒くなっています。明日も雨が続くようですが、明後日には回復するようです。

今回は平成２０年東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。この問題は２つの小問から成るのですが、今回取り上げるのは小問（１）です。

問題は、
「６５６のすべての正の約数はいくつあるか?　また、すべての約数の和を求めよ。ただし、『すべての正の約数』とは、1および６５６を含むものとする。」

自然数Ｎの約数の個数とその和を求めるためには、Ｎを素因数分解して、
$N = a^p \times b^q \times \cdots \times c^r$　　（１）
と表すと、Ｎの約数の個数ｎは、
$n = (p+1)(q+1)\cdots(r+1)$　　（２）
となり、その和Ｓは、
$S = (a^{p+1}-1)/(a-1) \times (b^{q+1}-1)/(b-1) \times \cdots \times (c^{r+1}-1)/(c-1)$　　（３）
となります。

これらの（２）（３）を簡単な数１２で確認してみましょう。

まず、１２の約数を求めると、１、２、３、４、６、１２となります。つまり、個数は6個、それらの和は２８となります。

次に、１２を（１）のように素因数分解すると、
$12 = 2^2 \times 3$
となり、（２）（３）を使って計算すると、
（１２の約数の個数）$= (2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$
（１２の約数の和）$= (2^3-1)/(2-1) \times (3^2-1)/(3-1)$
$= 7/1 \times 8/2$
$= 28$
と約数を求めて計算した場合と一致しました。

では、どうして（２）（３）が成り立つかを簡単に説明します。

まず、（２）、つまり約数の個数ですが、（１）のＮの約数は、
$a^x \times b^y \times \cdots \times c^z$　（$0 \leqq x \leqq p$、$0 \leqq y \leqq q$、$0 \leqq z \leqq r$、x、y、zは整数）
で表され、かつ、a^x、b^y、c^z　はお互いに素です。

ここで、Ｎの約数の種類、つまりＮの約数の個数は、ａ、ｂ、・・・、ｃをそれぞれ何回使うかで決まって、ａについての使い方は（ｐ＋１）通り、ｂについては（ｑ＋１）通り、・・・ｃについては（ｒ＋１）通りなので、、約数の個数は、それらの積（ｐ＋１）（ｑ＋１）・・・（ｒ＋１）通りとなります。

次に、（３）の約数の和ですが、
$(a^0 + a^1 + \cdots + a^p)(b^0 + b^1 + \cdots + b^q)\cdots(c^0 + c^1 + \cdots + c^r)$　　（４）
を展開すると、$a^x \times b^y \times \cdots \times c^z$（$0 \leqq x \leqq p$、$0 \leqq y \leqq q$、$0 \leqq z \leqq r$）となるＮの約数がすべて、かつ、重複なく現れます。言い換えると、左側の（　）からa^xを選び、中央の（　）からb^yを選び、右側の（　）からc^zを選んで積をつくることにより、Ｎのすべての約数を重複なく得ることができるということです。

ところが、（４）の左側の（　）は、ａを公比とする等比数列の和となっているので、
$a^0 + a^1 + \cdots + a^p = (a^{p+1}-1)/(a-1)$

同様に、
$b^0 + b^1 + \cdots + b^q = (b^{q+1}-1)/(b-1)$
$c^0 + c^1 + \cdots + c^r = (c^{r+1}-1)/(c-1)$
なので、（３）が成り立ちます。（等比数列の和は、高校で勉強するところですが、
$T = a^0 + a^1 + \cdots + a^p = 1 + a + \cdots + a^p$
$aT = a + a^2 \cdots + a^{p+1}$
から、
$aT - T = a + a^2 \cdots + a^{p+1} - (1 + a + \cdots + a^p)$
$= a^{p+1} - 1$
$(a-1)T = a^{p+1} - 1$
$T = (a^{p+1}-1)/(a-1)$
と導きます）

それでは、初めの問題に戻って、６５６の約数の個数と約数の和を求めましょう。
$656 = 2^4 \times 41$
なので、

（約数の個数）＝（４＋１）（１＋１）＝１０個
（約数の和）＝（２^5-　１）/（２-　１）×（４１^2-　１）/（４１-　１）
＝３１×１６８０/４０
＝３１×４２
＝１３０２
となります。

まあ、６５６のように約数の個数が１０個程度であれば、すべての約数を書き出しても大した手間ではありません。実際にやってみると、６５６の約数は、１、２、４、８、１６、４１、８２、１６４、３２８、６５６で個数は１０個、それらの和は、１３０２と簡単に求めることができます。（電卓で計算しましたが）

ところが、６５６より小さい５７６（＝２^6×３^2）では、約数の個数が２１個になるので、いちいち書き出して計算するのも面倒になります。と言うことで、約数の個数とそれらの和の求め方を頭に入れておくと便利です。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533