中学生でも解ける東大大学院入試問題（４５）

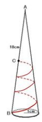
2014-11-25 12:01:32

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝から雨で、明日一杯降り続くようです。日中の気温も上がらず寒くなるようなので風邪など引かぬよう気を付けてください。

さて、今回は平成１９年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「母線ＡＢの長さが１８ｃｍ、底面の半径が１ｃｍの円錐があり、ＡＢの中点をＣとする。点Ｂから円錐の側面上を３周して点Ｃに至る最短距離の長さを求めよ。」



▲問題図

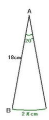
奇妙に細長い円錐ですが、実はこれには訳があって、それについては後ほど説明します。

このような立体の側面上の最短距離や経路を求める問題は、その立体の展開図を描いて指定された２点を直線で結びます。すると、その直線が最短距離や経路になります。

それでは早速、問題の円錐の展開図を描きましょう。円錐の展開図は、底面の円と側面の扇形から成りますが、ポイントは、底面の円周の長さと側面の扇形の弧の長さが一致することです。しっかり覚えておいてください。

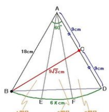
そして、扇形の弧の長さと母線を半径とする円の円周の長さの比に３６０°を掛ければ、扇形の中心角を求めることができます。

問題の円錐については、図１に示すように、底面の円周の長さが２π（ｃｍ）なので、側面の扇形の弧の長さも２π（ｃｍ）になります。また、母線を半径とする円の円周の長さは１８×２×π＝３６π（ｃｍ）で、これから扇形の中心角は、２π/３６π×３６０＝２０°になります。



▲図１．円錐の側面図

次に、円錐の側面上を３周して点Ｂから点Ｃに至るということは、図１の扇形を３つ並べて作った大きな扇形の側面上を点Ｂから点Ｃに至るということです。図２に図１の扇形を３つ並べたものを示しましたが、左の扇形が１周目、中央のものが２周目、右のものが３周目に対応します。



▲図２．扇形を３つ並べる

後は簡単で、図２の点Ｂと点Ｃとを直線で結ぶと、この直線が最短経路になり、この直線の長さが最短距離の長さになる訳です。

図２で△ＡＢＤは正三角形なので（∠ＢＡＤ＝６０°、ＡＢ＝ＡＤより、∠ＡＢＤ＝∠ＡＤＢ＝６０°）、ＢＣ＝9√3ｃｍとなります。

それでは、問題の円錐がどうして細長いのかについて調べてみましょう。簡単のため側面上を１周して点Ｂから点Ｃに至る最短距離の長さを求めることにします。

まず、図３のような底面の半径がｒ、母線の長さがＲの円錐を考えます。

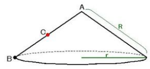
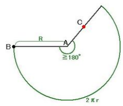


図３．問題の円錐は何故細長いのか

図３の円錐の側面の扇形を調べると、底面の円周の長さは２πｒなので側面の扇形の弧の長さも２πｒになります。また、母線を半径とする円の円周の長さは２πR となります。

ここで、側面の扇形の弧の長さが、母線を半径とする円の円周の長さの１/２より長い場合、図４のように中心角が１８０°より大きい扇形になります。すると、点Ｂと点Ｃとを結ぶ直線が扇形上に引けなくなってしまいます。



▲図４．中心角が１８０°より大きい扇形

それでも最短経路と思しき経路を探すと、それは点Ｂ→点Ａ→点Ｃとなりそうなのですが、側面上を１周しなければならないので、点Ａを扇形上に迂回しなければなりません。この点Ａを迂回する長さをεとすると、迂回路が点Ａに近づけば近づくほどεは限りなく０に近づくのですが、ε＝０とはならないので、その経路の長さに最小値がないことになります。（極限値は３/２・Ｒになります）　因みに、今回取り上げた問題でも側面上を９周する場合は最短経路の長さを決めることができません。

つまり、この手の問題で円錐（錐体）が細長いのは、側面を展開したときに指定された点間に直線が引けるようにするためということです。

と言うことで、このような問題に対しては、展開図を描き、指定された点を直線で結ぶ解法パターンを頭に入れておきましょう。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533