中学生でも解ける東大大学院入試問題（１３３）

2015-03-07 11:28:42

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

気温が５℃と寒い日になりました。予報では月曜日まで３日間ほど悪い天気が続くようです。

さて、今回は平成２５年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「二人のプレイヤーＡとＢが、確率ｐ（$0<p<1$）で表がでるコインでゲームを行う。コインの表が出た場合はプレイヤーＡの持ち点が１点加算され、Ｂは１点失う。コインの裏が出た場合はプレイヤーＢの持ち点が１点加算され、Ａは１点失う。いずれかのプレイヤーの持ち点が０になるとゲームは終了し、持ち点が残っているプレイヤーが勝者となる。プレイヤーＡ、Ｂがそれぞれ持ち点ｍとｎでゲームをスタートするとき、プレイヤーＡが勝つ確率を求めよ。ただし、ｍとｎは正の整数とする。」
です。

「ギャンブラーの破産問題」と呼ばれる問題です。

プレイヤーＡが勝者になる確率は、初めに持っている持ち点に依存するので、その確率を$P(m)$とします。

ここで、１回目にコインが表の場合、Ａの持ち点は$m+1$になり、裏だった場合、$m-1$になります。

したがって、
$$P(m)=pP(m+1)+(1-p)P(m-1) \qquad (1)$$
という漸化式が成り立ちます。

あとは、（１）の３項間漸化式を解けばお仕舞いです。

まず（１）を整理して、
$$pP(m+1)-P(m)+(1-p)P(m-1)=0 \qquad (2)$$
とします。

ここで、（２）の特性方程式
$$px^2-x+(1-p)=(x-1)(px+p-1)=0$$
の解は、１、$(1-p)/p$になります。

ここで、$1\neq(1-p)/p$、つまり、$p\neq 1/2$の場合の一般項$P(m)$を
$$P(m)=A\cdot 1^m+B\cdot((1-p)/p)^m$$
$$=A+B\cdot((1-p)/p)^m \qquad (3)$$
と予想します。

実際に（３）を（１）の漸化式をに代入すると成立していることが判ります。

そこで初期条件を調べると、Ａの持ち点が０のとき、Ａが勝者になる確率は０なので
$$P(0)=0$$
で、また、Ａの持ち点が$m+n$のとき、Ａが勝者になる確率は１なので、
$$P(m+n)=1$$
です。

これらを（３）に代入して、
$$P(0)=A+B=0 \qquad (4)$$
$$P(m+n)=A+B\cdot((1-p)/p)^{(m+n)}=1 \qquad (5)$$
を得ます。

そこで（４）（５）から、
$$A-A\cdot((1-p)/p)^{(m+n)}=1$$
$$A(1-((1-p)/p)^{(m+n)}=1$$
$$A=1/(1-((1-p)/p)^{(m+n)}$$
$$B=-1/(1-((1-p)/p)^{(m+n)}$$
となります。

これらのＡ、Ｂを（３）に代入すると、
$$P(m)=1/(1-((1-p)/p)^{(m+n)}-1/(1-((1-p)/p)^{(m+n)}\cdot((1-p)/p)^m$$
$$=(1-((1-p)/p)^m)/(1-((1-p)/p)^{(m+n)})$$
となります。（$\alpha=(1-p)/p$と置くと、$P(m)=(1-\alpha^m)/(1-\alpha^{(m+n)})$です）

また、$p=1/2$の場合は、一般項$P(m)$を
$$P(m)=A+Bm \qquad (6)$$
と予想します。

ｐ＝１/２のとき、（１）の漸化式は、
$P(m) = 1/2\, P(m+1) + 1/2\, P(m-1)$
となり、これに（６）を代入すると成り立っていることが判ります。

そこで初期条件
$P(0) = A = 0$
$P(m+n) = A + B(m+n) = 1$
から、
$A = 0$
$B = 1/(m+n)$
となり、これらを（６）に代入して、
$P(m) = m/(m+n)$
となります。

以上をまとめると、
ｐ＝１/２のとき、
$P(m) = m/(m+n)$

ｐ≠１/２のとき、
$P(m) = (1-((1-p)/p)^m)/(1-((1-p)/p)^{(m+n)})$
$= (1-\alpha^m)/(1-\alpha^{(m+n)})$、ただし、$\alpha = (1-p)/p$
となり、これが答えになります。

３項間漸化式を解く方法は、特性方程式の２つの解から２つの２項間漸化式を導く方法が一般的ですが、計算量が多くなるので、ここでは上記のような特性方程式の解から一般項を予想する方法を使いました。この方法は、ｎ項間漸化式にも使えるので覚えておくと便利です。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533