

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１２７）

2015-02-24 12:01:18

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

曇りがちですが気温は12℃と暖かい日になりました。今日は都立高校の入学試験なので暖かくて良かったです。受験生の皆さん、頑張ってください。

さて、今回は平成15年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「次の差分方程式（漸化式）を解き $x(n)$ を求めよ。ここで n は正の整数、 $x(0)=1$ とし、 k 、 r は実数で定数とする。

$$x(n) = kx(n-1) - r$$
」

です。

差分方程式とか漸化式など中学数学では勉強しない用語がでてきますが、与えられた式は、 $x(n)$ が、 $x(n-1)$ と k との積から r を引いたものになるというだけのことです。

与えられた式

$$x(n) = kx(n-1) - r \quad (1)$$

から、 $x(n-1)$ を作ると、

$$x(n-1) = kx(n-2) - r \quad (2)$$

となります。

(1)に(2)を代入すると、

$$x(n) = k(kx(n-2) - r) - r \\ = k^2x(n-2) - r(k+1)$$

となります。

この操作を続けていくと、

$$x(n) = k^2(kx(n-3) - r) - r(k+1) \\ = k^3x(n-3) - r(k^2+k+1) \\ = k^3(kx(n-4) - r) - r(k^2+k+1) \\ = k^4x(n-4) - r(k^3+k^2+k+1) \\ \dots \dots \dots \\ = k^px(n-p) - r(k^{p-1}+k^{p-2}+\dots+k+1)$$

となります。

ここで、 $n=p$ とすれば、

$$x(n) = k^nx(0) - r(k^{n-1}+k^{n-2}+\dots+k+1)$$

となり、 $x(0)=1$ なので、

$$x(n) = k^n - r(k^{n-1}+k^{n-2}+\dots+k+1) \quad (3)$$

です。

さらに、(3)の右辺の2項目の()を S とすれば、

$$S = k^{n-1}+k^{n-2}+\dots+k+1 \quad (4)$$

で、 kS は、

$$kS = k^n+k^{n-1}+\dots+k^2+k \quad (5)$$

となり、(5)-(4)は、

$$kS - S = (k-1)S \\ = k^n - 1$$

から、 $k \neq 1$ のとき

$$S = (k^n - 1) / (k - 1)$$

です。(等比数列の和の公式です)

これを(3)に代入し、

$$x(n) = k^n - r(k^n - 1) / (k - 1)$$

を得ることができます。

一方、 $k=1$ のときは、(3)に $k=1$ を代入し、

$$x(n) = 1 - rn$$

です。

以上をまとめると、

$k \neq 1$ のとき

$$x(n) = k^n - r(k^n - 1) / (k - 1)$$

$k=1$ のとき

$$x(n) = 1 - rn$$

が答えになります。

このように $x(n)$ を逐次代入していかななくても解く方法があり、そこでは特性方程式を使います。

与えられた式の $x(n)$ 、 $x(n-1)$ を α とすると、
 $\alpha = k\alpha - r$ (6)
となりますが、これを特性方程式と言います。

この α を使うと、
 $x(n) - \alpha = k(x(n-1) - \alpha)$
と変形することができ、与式を簡単に（等比数列の一般項を表す式）することができます。

そこで、(6) を α について解くと、 $k \neq 1$ のとき
 $\alpha = r / (k - 1)$
で、
 $x(n) - r / (k - 1) = k(x(n-1) - r / (k - 1))$ (7)
となります。

ここで、
 $y(n) = x(n) - r / (k - 1)$
とすると、(7) は、
 $y(n) = k y(n-1)$
となり、
 $y(n) = k^n y(0)$
から、
 $x(n) - r / (k - 1) = k^n (x(0) - r / (k - 1))$
 $x(n) = k^n (1 - r / (k - 1)) + r / (k - 1)$
 $= k^n - r (k^n - 1) / (k - 1)$
と前の答えと一致しました。（ $k = 1$ は省略）

差分方程式（漸化式）の考え方は、中学入試でお馴染みの「階段昇り問題」などにも出てくるものですが、漸化式やその特性方程式を使った解法など高校で勉強するので楽しみにしてください。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533