

中学生でも解ける東大大学院入試問題（207）

2018-04-23 11:08:08

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今回は、平成30年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

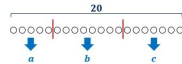
「 a 、 b 、 c を自然数とする。

1) $a + b + c = 20$ となる (a, b, c) の組は何通りか。

2) $a + b + c \leq 20$ となる (a, b, c) の組は何通りか。」

です。

1) では、下図のように、20個の球を並べて、球と球の間の2ヶ所に仕切りを入れることを考えましょう。



▲図．20個の球を並べて球と球の間の2ヶ所に仕切りを入れます

このとき、20個の球は3つに分割され、左、中央、右の球の個数をそれぞれ a 、 b 、 c とすれば、2個の仕切りの入れ方が (a, b, c) の組の個数になります。

つまり、仕切りを入れることができる19ヶ所から2ヶ所選ぶ選び方が (a, b, c) の組の個数になるので、

$${}^{19}C_2 = \frac{19 \times 18}{2 \times 1} = 171$$

から、**171（通り）** が答えです。

2) は1) と同じように、球を20個、19個、・・・、3個並べて、2ヶ所に仕切りを入れることを考えます。

すると、それぞれの場合の仕切りの入れ方は、

$${}^{19}C_2, {}^{18}C_2, \dots, {}^3C_2$$

になり、 $a + b + c \leq 20$ となる (a, b, c) の組は、

$${}^{19}C_2 + {}^{18}C_2 + \dots + {}^3C_2$$

です。

この式の各項を

$${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

で置き換えて計算すると、

$$\begin{aligned} & {}^{19}C_2 + {}^{18}C_2 + \dots + {}^3C_2 \\ &= \frac{1}{2} \{ (19^2 - 19) + (18^2 - 18) + \dots + (3^2 - 3) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (19^2 + 18^2 + \dots + 3^2) - (19 + 18 + \dots + 3) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (361 + 324 + \dots + 9) - (19 + 18 + \dots + 3) \} \\ &= \frac{1}{2} (2465 - 187) \\ &= 1139 \end{aligned}$$

になり、 $a + b + c \leq 20$ となる (a, b, c) の組は **1139（通り）** で、これが答えです。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

を知っていれば、より簡単に計算できます。

簡単な問題です。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<https://caitakiyama.jimdo.com/>