

中学生でも解ける東大大学院入試問題（２１）

2014-10-24 13:30:19

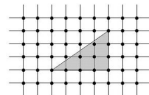
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日、一昨日とは打って変わって、とても良い天気になりました。このところ寒く感じる日が続いていましたが、今日は暖かく過ごしやすい日になりました。

今回は、平成17年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。ここ暫く、合同式など数に関する問題が続いたので、今回は図形問題を選びました。

問題は、

「下図のように等間隔で規則的に並んでいる格子点上に頂点が存在する多角形を考える。このような多角形の面積 S は、多角形に周上にある格子点数 a （下図の場合は8）と多角形の内部にある格子点数 b （下図の場合は3）とを用いて表すことができる。この関係式を求めよ。」
です。



▲問題図

これは、「ピククの定理」というもので、答えは、

$$S = a/2 + b - 1 \quad (1)$$

になります。

例えば、問題図の直角三角形では、格子点間の長さを1とすると、底辺4、高さ3なので、その面積 S は、6になります。

一方、(1)を使って計算すると、 $a = 8$ 、 $b = 3$ から、 $S = 8/2 + 3 - 1 = 6$ と上記のものと一致します。

これを証明する方法は、簡単な長方形から初めて、直角三角形、三角形、多角形と一般化する方法や、数学的帰納法を使う方法などありますが、1問あたりの試験時間10分間で解答を書き上げるのは難しいでしょう。もとより、この問題でも「ピククの定理」の証明を要求しているのではなく、(1)の関係式を要求しているので、それさえ知っていれば3秒で正解できる訳ですが。

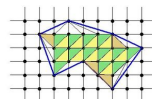
今回は、多角形を面積 $1/2$ の三角形に分割して、「ピククの定理」を説明する方法を紹介します。

まず、図1に格子点を頂点とする多角形（7角形）を青線で示し、その内部を面積 $1/2$ の三角形で分割します。

（実は、格子点上に頂点を持つ多角形が面積 $1/2$ の三角形に分割できることを証明する必要があります。

そこで、多角形の各辺で斜めになっているものを1辺とする三角形または台形を作り、元の多角形に付加した図形を考えます。

ここで、新たに作った三角形と台形の面積は、整数または半整数になり、それらを元の多角形に付加した図形は、長方形に分割できるのでその面積は整数となります。つまり、元の多角形の面積は、（整数- 整数または半整数）= 整数または半整数となり、元の多角形は面積 $1/2$ の三角形に分割できることになります。）



▲図 多角形を面積 $1/2$ の三角形で分割する

もとに戻って、基本方針を説明すると、

・多角形内の面積 $1/2$ の三角形の個数を m とする
→多角形の面積 S は、 $m/2$ (2)

一方、

・三角形の内角の和が 180°
→ m 個の三角形の内角の和は、 $180^\circ \times m$ (3)

・多角形の内部の格子点（その数は b 個）を頂点とする三角形の内角の和が 360°
→その合計は、 $360^\circ \times b$ (4)

・多角形の周上の格子点（その数は a 個）から多角形の頂点（その数は n 個）を除いた格子点（その数は $(a - n)$ 個）を頂点とする三角形の内角の和が 180°

→その合計は、 $180^\circ \times (a - n)$ (5)

・ m 個の三角形の内角の和 (3) から (4)、(5) を引いたものが、多角形 (n 角形) の内角の和、 $180^\circ \times (n - 2)$ (6)

の (2) (3) (4) (5) (6) を使って、 S 、 a 、 b の関係式を導くというものです。

早速立式すると、 $(6) = (3) - (4) - (5)$ から、
 $180^\circ \times (n - 2) = 180^\circ \times m - 360^\circ \times b - 180^\circ \times (a - n)$ (7)

となり、両辺を 180° で除すると、

$$\begin{aligned} n - 2 &= m - 2b - a + n \\ m &= n - 2 + 2b + a - n \\ &= a + 2b - 2 \end{aligned}$$

(2) より、

$$\begin{aligned} S &= 1/2 (a + 2b - 2) \\ &= a/2 + b - 1 \end{aligned}$$

と「ピットの定理」の式を導出することができました。興味のある方は、方眼紙にいろいろな多角形を描いて調べてみてください。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533