

中学生でも解ける東大大学院入試問題（9）

2014-10-05 11:22:14

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

予報通りしつかりした雨が降っていて、明日は豪雨になるようです。夕方の塾生が来るころには台風が過ぎてくれれば良いのですが。

さて、これまでも何回か取り上げましたが、東大大学院入試には論理的思考を試すということで、算数パズルが出題されます。今回は平成18年度工学系研究科システム量子工学で出題された虫食い算を取り上げます。

問題は、

「A、B、C、Dが1から9までの整数のうちのそれぞれ異なる数字であるとき、下の式を満足するAとBの組み合わせをすべて求めよ」

$$\begin{array}{r} \text{A B} \\ + \text{A B} \\ \hline \text{D B C} \end{array}$$

というものです。簡単そうですね。では、早速解いていきましょう。

まず、A、B、C、Dは1から9までの整数なので、D = 1は決定です。そうすると、A + Aが繰り上がりしなければならぬので、Aは5以上でなければならないことになります。

次に、1桁目のBに注目し、B + Bが繰り上がりする場合と繰り上がりしない場合に分けて考えます。

初めに、B + Bが繰り上がりしない場合を調べます。

B + Bが繰り上がりしないのですから、Bは4以下になります。そのとき、2桁目のA + Aは偶数で、かつ、その1桁目の数字はBなので、Bは偶数でなければなりません。

つまり、Bは4以下の偶数ということで、2または4となります。

ここで、それぞれの場合を計算すると、

B = 2のとき、A = 6、

B = 4のとき、A = 7

となります。

つまり、(A, B, C, D)の組み合わせは、

(6, 2, 4, 1)

(7, 4, 8, 1)

となることが判ります。

次に、B + Bが繰り上がりする場合です。

B + Bが繰り上がりするので、Bは5以上になります。そのとき、2桁目のA + A + 1は奇数で、かつ、その1桁目の数字がBなので、Bは奇数でなければなりません。

つまり、Bは5以上の奇数ということで、5、7、9のいずれかということになります。

ここで、それぞれの場合を計算すると、

B = 5のとき、A = 7、

B = 7のとき、A = 8、

B = 9のとき、A = 9

となります。

ここで、B = A = 9は、A、B、C、Dがそれぞれ異なるという条件に反するので除外します。

つまり、(A, B, C, D)の組み合わせは、

(7, 5, 0, 1)

(8, 7, 4, 1)

となりますが、(7, 5, 0, 1)はA、B、C、Dが1から9までの整数という条件に反するので、結局、

(8, 7, 4, 1)

となります。

以上をまとめると、(A, B, C, D)の組み合わせは、

(6, 2, 4, 1)

(7, 4, 8, 1)

(8, 7, 4, 1)

の3通りということになります。

実際に確かめてみると、

$$(6, 2, 4, 1) \rightarrow 6 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 124$$

$$(7, 4, 8, 1) \rightarrow 7 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 148$$

$$(8, 7, 4, 1) \rightarrow 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 = 174$$

と問題のなかの計算式を満たしていることが判ります。

ということで正解は、A、Bの組み合わせ(A, B)が、(6, 2) (7, 4) (8, 7)となります。

次に、別解を考えてみましょう。

問題の計算式の数を

$$AB \rightarrow 10A + B$$

$$DBC \rightarrow 100D + 10B + C$$

と表すと、計算式は、

$$(10A + B) + (10A + B) = 100D + 10B + C$$

となります。

そこで、 $D = 1$ を代入して整理すると、

$$20A - 8B = 100 + C$$

$$4(5A - 2B) = 100 + C \quad (1)$$

となります。

ここで、(1)の左辺は4の倍数であることを表していて、また、Cは1から9までの整数なので、(1)の右辺は、104または108になります。

まず、(1)の右辺が104のときを調べます。

$$4(5A - 2B) = 104$$

から、

$$5A - 2B = 26$$

つまり、

$$5A = 26 + 2B \quad (2)$$

です。

(2)の左辺は5の倍数であることを表しているので、Bが1から9までの整数であることを考慮して、 $B = 2, 7$ となり、(A, B, C, D)の組み合わせは、

$$(6, 2, 4, 1)$$

$$(8, 7, 4, 1)$$

となります。

次に、(1)の右辺が108のときです。

$$4(5A - 2B) = 108$$

から、

$$5A - 2B = 27$$

つまり、

$$5A = 27 + 2B \quad (3)$$

(3)の左辺は5の倍数であることを表しているので、Bが1から9までの整数であることを考慮して、 $B = 4, 9$ となり、(A, B, C, D)の組み合わせは、

$$(7, 4, 8, 1)$$

$$(9, 9, 8, 1)$$

となりますが、(9, 9, 8, 1)は、A, B, C, Dがそれぞれ異なるという条件に反するので、結局、

$$(7, 4, 8, 1)$$

となります。

以上をまとめると、(A, B, C, D)の組み合わせは、

$$(6, 2, 4, 1)$$

$$(8, 7, 4, 1)$$

$$(7, 4, 8, 1)$$

の3通りとなり、最初の答えと一致しました。

このような虫食い算が東大大学院入試問題にしばしばが出题されているので、それらを紹介していきたいと思います。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533