中学生でも解ける東大大学院入試問題（３８）

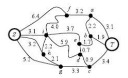
2014-11-15 11:30:09

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れていて日向は暖かいのですが屋内は寒く感じます。天気図の気圧配置はしっかりした西高東低でシベリア気団が元気一杯といった感じです。風邪など引かぬよう気を付けてください。

さて、今回は平成２１年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題で、最短経路を求めるグラフ問題です。

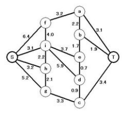
問題は、
「下図のグラフにおいて、ＳとＴの間の最短経路を求めよ。ただし、枝の傍の数字は対応する枝の長さを示している。
」



▲問題図

やみくもにＳからＴまでの経路の長さを計算して比較しても、それが最短経路かどうか判らないのでシステマティックに調べる方法を選びたいところです。その方法が「ダイクストラ法」です。

まず、問題図は見難いのでシンプルなグラフに直しましょう。ついでに、グラフで枝分かれしている点を「ノード」と呼びます。



▲図１．問題図を見やすくしました

「ダイクストラ法」は、スタート地点と繋がっているノードまでの経路を調べて、そこまでの最短経路を確定させ、次にその確定したノードと繋がっているノードまでの経路を調べて、そこまでの最短経路を確定させていきます。この操作をゴールに到るまで繰り返して、全体の最短距離を確定させる方法です。

以下の図では、最短経路が確定したノード、経路を赤色、未確定のものを緑色、調査中のものを青色で示します。また、ノードの近くに記した数字は、ノードＳからの長さを表します。

まず、図２にあるように、ノードＳからノードＳまでの最短長さは０で、ノードＳは確定します。そして、ノードＳから繋がっているノードｆ、ｉ、ｈ、ｇ　までの長さを調べて各ノードの近くに書き込みます。

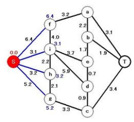


図２．最短経路の探索（１）

図２で調査中の４つの経路のうち、経路Ｓ→ｉは、ノードｆ、ｈ、ｇを経由してノードｉに到る経路の長さより短いので、経路Ｓ→ｉとノードｉが確定します。

続いて図３のように、ノードｉと繋がっているノードｆ、ｈ、ｅ、ｄまでの経路を調査します。

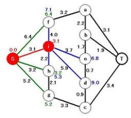


図３．最短経路の探索（２）

ノードｆについて、経路Ｓ→ｆの長さは６．４で、以下の５つの経路Ｓ→ｉ→ｆ（長さ７．１）、Ｓ→ｉ→ｅ→ｂ→ａ→ｆ（長さ１３．９）、Ｓ→ｉ→ｄ→ｅ→ｂ→ａ→ｆ（長さ１６．８）、Ｓ→ｈ→ｇ→ｃ→ｄ→ｅ→ｂ→ａ→ｆ（長さ１７．３）、Ｓ→ｇ→ｃ→ｄ→ｅ→ｂ→ａ→ｆ、ｈ（長さ１７．２）より短いので、経路Ｓ→ｆとノードｆが確定します。

また、ノードｈについては、経路Ｓ→ｈの長さは３．２で、以下の２つの経路Ｓ→ｉ→ｈ（長さ５．３）、Ｓ→ｇ→ｈ（長さ７．３）より短いので、経路Ｓ→ｈとノードｈが確定します。

続いて図４のように、ノードｆ、ｈと繋がっているノードａ、ｇまでの経路を調査します。

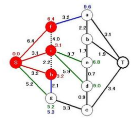


図４．最短経路の探索（３）

ノードｇについて、経路Ｓ→ｇの長さは５．２で、経路Ｓ→ｈ→ｇ（長さ５．３）より短いので、経路Ｓ→ｇとノードｇが確定します。

続いて図５のように、ノードｇと繋がっているノードｃまでの経路を調査します。

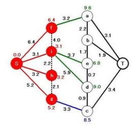
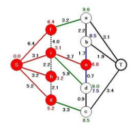


図５．最短経路の探索（４）

ノードｅについて、経路Ｓ→ｉ→ｅの長さは６．８で、次の３つの経路Ｓ→ｉ→ｄ→ｅ（長さ９．７）、Ｓ→ｆ→ａ→ｂ→ｅ（長さ１３．５）、Ｓ→ｇ→ｃ→ｄ→ｅ（長さ１０．１）より短いので、経路ｉ→ｅとノードｅが確定します。

続いて図６のように、ノードｅと繋がっているノードｂ、ｄまでの経路を調査します。

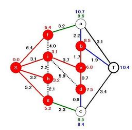


▲図６．最短経路の探索（５）

ノードｂについて、経路Ｓ→ｉ→ｅ→ｂの長さは８．５で、経路Ｓ→ｆ→ａ→ｂ（長さ１１．８）より短いので、経路ｅ→ｂとノードｂが確定します。

ノードｄについて、経路Ｓ→ｉ→ｅ→ｄの長さは７．５で、経路Ｓ→ｇ→ｃ→ｄ（長さ９．４）より短いので、経路ｅ→ｄとノードｄが確定します。

続いて図７のように、ノードｂと繋がっているノードａ、ノードＴ、ノードｄと繋がっているノードｃを調査します。

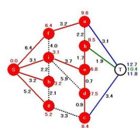


▲図７．最短経路の探索（６）

ノードａについては、経路Ｓ→ｆ→ａの長さ９．６は、経路Ｓ→ｉ→ｅ→ｂ→ａ（長さ１０．７）より短いので、経路ｆ→ａとノードａが確定します。

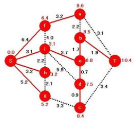
ノードｃについては、経路Ｓ→ｉ→ｅ→ｄ→ｃの長さ８．４は、経路Ｓ→ｇ→ｃ（長さ８．５）より短いので、経路ｄ→ｃとノードｃが確定します。

続いて図８のように、ノードａとノードｃと繋がっているノードＴまでの経路を調査します。



▲図８．最短経路の探索（７）

３つの経路Ｓ→ｉ→ｅ→ｂ→Ｔ、Ｓ→ｉ→ｅ→ｄ→ｃ→Ｔ、Ｓ→ｆ→ａ→Ｔの長さは、それぞれ、１０．４、１１．８および１２．７で、経路Ｓ→ｉ→ｅ→ｂ→Ｔが最短経路と判りました。図９に最終確定図を示します。



▲図９．最終確定図

少し面倒臭そうに見えますが、この程度のグラフであれば１、２分で完成できます。また、このテクニックが役に立つ場面もあるかもしれないので頭の片隅に置いておくと良いでしょう。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533