

簡単な東大大学院入試問題（２）

2014-09-14 12:59:16

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

雲が少なく秋晴れの天気になりました。明日は曇るようですが、暫く良い天気が続くようです。

先日中学生でも解ける東大大学院の入試問題を紹介しましたが、今回も簡単な魔方陣の問題を取り上げます。（多分、小学生でも解けると思います）

問題は、平成１９年度の工学系研究科システム量子工学のもので、

「下の表において、異なる正の自然数を９つのマス目にいれる。そして、各行、各列、各対角線に並ぶ３つの数字の積がすべて同じ値になるように自然数を選ぶものとする。このとき x の値を求めよ」

4	x	
		8
64		

表１．問題の表

というものです。

普通の魔方陣は、各行、各列、対角線に並ぶ数字の和を扱う場合が多いですが、この問題では積を扱います。とはいっても 3×3 の魔方陣でポイントになるのは中央の数字です。

例えば、表２のような魔方陣を考えます。

a	b	c
d	N	e
f	g	h

表２．魔方陣の性質

各行、各列、対角線上の３つの数字の和を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= a + b + c \\ &= d + e + f \\ &= g + h + N \end{aligned}$$

となり、これらを足し合わせると、

$$\begin{aligned} 3S &= (a + b + c) + (d + e + f) + (g + h + N) \\ &= (a + b + c + d + e + f + g + h + N) \\ &= S + 3N + S \\ &= 2S + 3N \end{aligned}$$

したがって、

$$S = 3N$$

が成り立ちます。

積の場合も同じ様に、

$$\begin{aligned} P &= a \times b \times c \\ &= d \times e \times f \\ &= g \times h \times N \end{aligned}$$

となり、これらを掛け合わせると、

$$\begin{aligned} P^3 &= (a \times b \times c) \times (d \times e \times f) \times (g \times h \times N) \quad (P^3 \text{ は } P \text{ の } 3 \text{ 乗を表します}) \\ &= (a \times b \times c \times d \times e \times f \times g \times h \times N) \\ &= P \times N^3 \times P \\ &= P^2 \times N^3 \end{aligned}$$

したがって、

$$P = N^3 \quad (1)$$

が成り立ちます。

それでは問題を片付けましょう。表３のように中央の数を N 、その他、 c 、 d 、 g 、 h を置き、各行、各列、対角線上の３つの数の積を P とすると、

4	x	c
d	N	8
64	g	h

表３．解答

(１) から、

$$P = 8 \times d \times N$$

$$= 4 \times 6 \ 4 \times d$$

これから、

$$N = 3 \ 2$$

2つの対角線上と右列の3つの数の積を使って、

$$P = 4 \times 3 \ 2 \times h$$

$$= 6 \ 4 \times 3 \ 2 \times c$$

$$= 8 \times c \times h$$

これらから、

$$c = 1 \ 6$$

$$h = 2 \ 5 \ 6$$

$$P = 3 \ 2 \ 7 \ 6 \ 8$$

上の行から

$$P = 3 \ 2 \ 7 \ 6 \ 8$$

$$= 4 \times 1 \ 6 \times x$$

$$= 6 \ 4 \ x$$

から、

$$x = 5 \ 1 \ 2$$

となります。

別にこのように解かなくても方陣の空欄に a、b、c、・・・などと置いて方程式を作っても正解できます。また、与えられている数が2の累乗であるので2の対数を取り、積から和に変換して解くこともできますが、各数が2の累乗であることを示す必要があるかも知れません。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533