中学生でも解ける東大大学院入試問題（１９２）

2015-08-03 09:38:32

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨夕は近くの滝山名店会でビアホールを楽しみにしていたのですが、塾生の勉強に興が乗ってしまい、結局行きそびれてしまいました。暑い日の冷たいビールは格別ですが、家で発泡酒というのもなかなか良いものです。

さて、今回は平成２７年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「以下の数列の第１５項までの和を求めよ。
$1+1$、$2+3+4+9$、$8+27+16+81+32+243$、・・・　」
です。

第２項目を見ると、見覚えのある数字が並んでいて、
$2+3+4+9=2^1+3^1+2^2+3^2$
であることは直ぐに判るでしょう。

この規則を第１項と第３項目に当てはめてみると、
$1+1=2^0+3^0$
$8+27+16+81+32+243=2^3+3^3+2^4+3^4+2^5+3^5$
と上手くいきました。

そこで、第ｎ項目をa_nとして何項が書き下してみると、
$a_1=2^0+3^0$
$a_2=2^1+3^1+2^2+3^2$
$a_3=2^3+3^3+2^4+3^4+2^5+3^5$
$a_4=2^6+3^6+2^7+3^7+2^8+3^8+2^9+3^9$
$a_5=2^{10}+3^{10}+2^{11}+3^{11}+2^{12}+3^{12}+2^{13}+3^{13}+2^{14}+3^{14}$
・・・・・
となります。

この操作をa_{15}まで繰り返して和を求めてもＯＫですが、ここではa_n項の右辺にある第１項の指数（b_n）を求めることにします。

それらを整理すると、

n	第１項の指数（b_n）
1	0
2	1
3	3
4	6
5	１0
・	・
・	・
・	・

となっています。

ここでb_nの規則性を調べるため、階差数列を作ると、
$b_2-b_1=1$
$b_3-b_2=2$
$b_4-b_3=3$
$b_5-b_4=4$
となり、
$b_{(n+1)}-b_n=n$
が成り立っていることが判ります。

これから、
$b_{16}-b_{15}=15$
$b_{15}-b_{14}=14$
　・・・
$b_3-b_2=2$
$b_2-b_1=1$
で、これらの辺々を足し合わせて、
$b_{16}-b_1=1+2+\cdots+14+15$
$\quad=15\times(15+1)/2$
$\quad=120$
です。

ここで、$b_1=0$を代入すると、
$b_{16}=120$

で、a_{16}の右辺の第１項の指数が１２０であることが判り、a_{15}の右辺の最終項の指数は１１９になります。

したがって、与えられた数列の第１５項までの和Ｓは、
$S=a_1+a_2+\cdots+a_{14}+a_{15}$
$\quad =2^0+3^0+2^1+3^1+\cdots+2^{118}+3^{118}+2^{119}+3^{119}$
$\quad =2^0+2^1+\cdots+2^{118}+2^{119}+3^0+3^1+\cdots+3^{118}+3^{119}$
となります。

そこで、
$P=2^0+2^1+\cdots+2^{118}+2^{119}$
$Q=3^0+3^1+\cdots+3^{118}+3^{119}$
として、
$2\cdot P=2^1+2^2+\cdots+2^{119}+2^{120}$
$3\cdot Q=3^1+3^2+\cdots+3^{119}+3^{120}$
を作り、それぞれからＰ、Ｑを引くと、
$2\cdot P-P=2^1+2^2+\cdots+2^{119}+2^{120}-(2^0+2^1+\cdots+2^{118}+2^{119})$
$P=2^{120}-2\sim0$
$\quad =2^{120}-1$
$3\cdot Q-Q=3^1+3^2+\cdots+3^{119}+3^{120}-(3^0+3^1+\cdots+3^{118}+3^{119})$
$2\cdot Q=3^{120}-3^0$
$\qquad =3^{120}-1$
$Q=3^{120}/2-1/2$
となります。

以上より、
$S=P+Q$
$\quad =2^{120}-1+3^{120}/2-1/2$
$\quad =2^{120}+3^{120}/2-3/2$
となり、これが答えです。

ちなみに、第ｎ項までの和Ｓｎは、
$S_n=2^{(n(n-1)/2)}+3^{(n(n-1)/2)}/2-3/2$
になります。

問題に与えられた数列が、２と３の累乗でできていることが判れば簡単な問題でした。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533