

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１１８つづき）

2015-02-15 10:44:30

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と同様、冷たい風が吹いていますが陽射しは暖かく気温も 10°C を超えるようです。明日も晴れて暖かくなるようですが、明後日は厳しい寒さになるようで、受験生の皆さんは体調に気を付けて勉強してください。

さて、今回は昨日に続いて平成 26 年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題の（２）です。

問題は、

「赤、青、黄の 3 種類の同じ大きさの正方形の板を重ねることなく隙間なく並べて縦 N 枚、横 N 枚の正方形領域を作る。このとき、縦横に隣合う板の色が同じにならないようにする。また、各色の板が足りなくなることはない。以下の間に答えよ。

（１） $N = 2$ のとき、並べ方の総数を求めよ。

（２） $N = 3$ のとき、並べ方の総数を求めよ。」

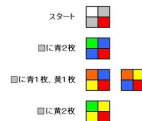
です。

（１）については、樹形図を使う方法と排反事象を使う方法を調べましたが、（２）ではどちらの方法も場合分けが多くなり少し大変そうです。

そこで、格子の 1 つからスタートして、その上下左右に置く色で場合分けする方法を調べてみましょう。

まず、（１）の 2×2 の格子で試してみましょう。

図 1 は右下に赤の板を置いた場合をスタートにしています。その上と左の灰色の部分には赤が置けないので青または黄が置かれるわけですが、青が 2 枚、青 1 枚黄 1 枚、黄 2 枚の 3 つの場合に分けることができます。



▲図 1. (2×2 格子) 上と左の色で場合分けします

青 2 枚の場合、残った左上の部分は、青と隣合わせ（緑）になります。（緑）

青 1 枚黄 1 枚の場合、残った左上の部分は、青、黄と隣合わせ（橙）になります。（橙）

黄 2 枚の場合、残った左上の部分は、黄と隣合わせ（緑）になります。（緑）

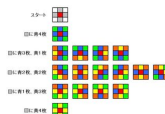
ここで、同色と隣合わせ（緑）になっている部分は 2 種類の色を置くことができ、異色と隣合わせ（橙）になっている部分は 1 種類の色を置くことができます。

したがって、右下を赤とした場合の並べ方は、

1 通り（青 2 枚） \times 2
 + 2 通り（青 1 枚黄 1 枚） \times 1
 + 1 通り（黄 2 枚） \times 2
 = 6 通り

で、スタートの色が 3 種類あるので、並べ方の総数は、6 通り \times 3 = 18 通りとなり、昨日の答えと一致しました。

それでは、この方法を 3×3 の格子に適用してみましょう。図 2 のように、中央の格子を赤としてスタートします。



▲図 2. (3×3 格子) 上下左右の色で場合分けします

スタートの上下左右（灰）の位置に、青 4 枚、青 3 枚黄 1 枚、青 2 枚黄 2 枚、青 1 枚黄 3 枚、黄 4 枚の 5 つの場合に分けて調べます。

青 4 枚の場合、残りの 4 つの部分は、すべて同色と隣合わせ（緑）になります。（緑 4）

青 3 枚黄 1 枚の場合、残りの 4 つの部分は、同色と隣合わせになるのが 2 箇所（緑）、異色と隣合わせになるのが 2 箇所（橙）です。（緑 2、橙 2）

青 2 枚黄 2 枚の場合は、上下と左右に同色が置かれた場合とそうでない場合で異なります。

上下と左右に同色が置かれるのは 2 通りで、その場合、残りの 4 つの部分は、すべて異色と隣合わせ（橙）になります。（橙 4）

上下と左右に異色が置かれるのは 4 通りで、その場合、残りの 4 つの部分は、同色と隣合わせになるのが 2 箇所（緑）、異色と隣合わせになるのが 2 箇所（橙）です。（緑 2、橙 2）

青 1 枚黄 3 枚の場合、残りの 4 つの部分は、同色と隣合わせになるのが 2 箇所（緑）、異色と隣合わせになるのが 2 箇所（橙）です。（緑 2、橙 2）

黄 4 枚の場合、残りの 4 つの部分は、すべて同色と隣合わせ（緑）になります。（緑 4）

したがって、中央を赤とした場合の並べ方は、

$$\begin{aligned} & 1 \text{ 通り (青 4 枚)} \times 2^4 \\ & + 4 \text{ 通り (青 3 枚黄 1 枚)} \times 2^2 \times 1^2 \\ & + 4 \text{ 通り (青 2 枚黄 2 枚、上下、左右異色)} \times 2^2 \times 1^2 \\ & + 2 \text{ 通り (青 2 枚黄 2 枚、上下、左右同色)} \times 1^4 \\ & + 4 \text{ 通り (青 1 枚黄 3 枚)} \times 2^2 + 1^2 \\ & + 1 \text{ 通り (黄 4 枚)} \times 2^4 \\ & = 82 \text{ 通り} \end{aligned}$$

になり、スタートの色が 3 種類あるので、並べ方の総数は、 $82 \text{ 通り} \times 3 = 246 \text{ 通り}$ になり、これが答えになります。

他に、 2×2 から 3×3 に拡張していく方法や 2 色で配置したものからスタートして残りの一色で置換していく方法を調べたのですが、それなりに場合分けが面倒で、上記の方法が一番簡単ようです。もっと簡単な方法をご存知の方は教えてください。