中学生でも解ける東大大学院入試問題（１８５）

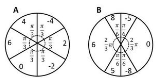
2015-05-01 12:03:38

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

外を歩いていると汗が出るぐらい暑い日になりました。これから数日間、夏日が続くようです。

さて、今回は平成２５年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「下図に示すような２つの円形ダーツボードがある。これらの２つのダーツボードに対してそれぞれ一回だけ矢を投げるとき、得られる点数の和をＸとする。このとき次の問いに答えなさい。ただし、矢は必ずダーツボードに命中することとし、各点数エリアに矢が命中する確率はボード全体に対するそのエリアの面積比で決まることとする。



（１）Ｘの期待値を求めなさい。
（２）Ｘの分散を求めなさい。　　」
です。

Ａのダーツボードでの得点をＹ、Ｂのダーツボードでの得点をＺとすると、Ｘ＝Ｙ＋Ｚ　になりますが、それらの期待値Ｅ（Ｘ）、Ｅ（Ｙ）、Ｅ（Ｚ）の間には次のような関係が成り立ちます。

Ｅ（Ｘ）＝Ｅ（Ｙ＋Ｚ）＝Ｅ（Ｙ）＋Ｅ（Ｚ）　　（１）

（１）の右側の等式は、期待値の線形性と言い、ＹとＺが独立でなくても成立します。

一方、分散Ｖ（Ｘ）、Ｖ（Ｙ）、Ｖ（Ｚ）について、
Ｖ（Ｘ）＝Ｖ（Ｙ＋Ｚ）＝Ｖ（Ｙ）＋Ｖ（Ｚ）　　（２）
の右側の等式が成り立つのは、ＹとＺが独立である場合です。

つまり、Ｘの期待値を計算するためには、Ｙの期待値とＺの期待値を計算しそれらの和を取ればＯＫで、分散についても、Ａのダーツボードでの得点ＹとＢのダーツボードでの得点Ｚは独立ですから、期待値の場合と同じように、Ｙの分散とＺの分散の和を計算すればＯＫです。

それでは（１）に取り掛かりましょう。

まず、Ｙの期待値Ｅ（Ｙ）を計算します。期待値は、確率変量がとる値と、その値をとる確率との積を足し合わせればよいので、
Ｅ（Ｙ）＝（－４）・1/6＋2・1/6＋（－２）・1/6＋0：1/6＋6・1/6＋4・1/6
　　　＝1
となります。（ダーツボードの図を見れば、６・1/＝１と直ぐ判ります）

同様に、Ｚの期待値Ｅ（Ｚ）も
Ｅ（Ｚ）＝（－５）・1/1２＋0・1/3＋（－８）・1/1２＋5・1/1２＋6・1/3＋8・1/1２
　　　＝2
となります。

そして（１）から、
Ｅ（Ｘ）＝Ｅ（Ｙ＋Ｚ）
　　　＝Ｅ（Ｙ）＋Ｅ（Ｚ）
　　　＝1＋2
　　　＝3
となり、Ｘの期待値は３で、これが答えになります。

次に（２）の分散です。分散は、確率変量がとる値と平均値（期待値）との差の二乗と、その値をとる確率との積を足し合わせればよいので、Ｙの分散Ｖ（Ｙ）は、
Ｖ（Ｙ）＝（－４－１）^2・1/6＋（2－１）^2・1/6＋（－２－１）^2・1/6＋（0－１）^2・1/6＋（6－１）^2・1/6＋（4－１）^2・1/6
　　　＝（２５＋1＋9＋1＋２５＋9）/6
　　　＝７０/6
　　　＝３５/3
となります。

同様に、Ｚの分散Ｖ（Ｚ）も
Ｖ（Ｚ）＝（－５－２）^2・1/1２＋（0－２）^2・1/3＋（－８－２）^2・1/1２＋（5－２）^2・1/1２＋（6－２）^2・1/3＋（8－２）^2・1/1２
　　　＝（４９＋１００＋9＋３６）・1/1２＋（4＋１６）・1/3

＝１９４/１２＋２０/３
＝１３７/６
となります。

そして（２）から
Ｖ（Ｘ）＝Ｖ（Ｙ＋Ｚ）
＝Ｖ（Ｙ）＋Ｖ（Ｚ）
＝３５/３＋１３７/６
＝６９/２
となり、Ｘの分散は６９/２で、これが答えになります。

もし、期待値や分散の線形性を知らないときは、下表を作って計算することもできます。

B＼A	4	−4	2	−2	0	6	確率
−5	−1	−9	−3	−7	−5	1	$\frac{1}{72}$
0	4	−4	2	−2	0	6	$\frac{1}{18}$
−8	−4	−12	−6	−10	−8	−2	$\frac{1}{72}$
5	9	1	7	3	5	11	$\frac{1}{72}$
6	10	2	8	4	6	12	$\frac{1}{18}$
8	12	4	10	6	8	14	$\frac{1}{72}$

▲表.　Ｘの値とその確率

表は、Ａ、Ｂの得点とそれらの和、および、それらの確率を示したものです。試しに、この表を使って、分散Ｖ（Ｘ）を計算してみましょう。平均値（期待値）は先程求めた３を使います。

Ｖ（Ｘ）＝（（－１－３）^2＋（－９－３）^2＋（－３－３）^2＋（－７－３）^2＋（－５－３）^2＋（１－３）^2）・1/７２
＋（（４－３）^2＋（－４－３）^2＋（２－３）^2＋（－２－３）^2＋（０－３）^2＋（６－３）^2）・1/１８
＋（（－４－３^2＋（－１２－３）^2＋（－６－３）^2＋（－１０－３）^2＋（－８－３）^2＋（－２－３）^2）・1/７２
＋（（９－３）^2＋（１－３）^2＋（７－３）^2＋（３－３）^2＋（５－３）^2＋（１１－３）^2）・1/７２
＋（（１０－３）^2＋（２－３）^2＋（８－３）^2＋（４－３）^2＋（６－３）^2＋（１２－３）^2）・1/１８
＋（（１２－３）^2＋（４－３）^2＋（１０－３）^2＋（６－３）^2＋（８－３）^2＋（１４－３）^2）・1/７２

＝（１６＋１４４＋３６＋１００＋６４＋４）・1/７２
＋（１＋４９＋１＋２５＋９＋９）・1/１８
＋（４９＋２２５＋８１＋１６９＋１２１＋２５）・1/７２
＋（３６＋４＋１６＋０＋４＋６４）・1/７２
＋（４９＋１＋２５＋１＋９＋８１）・1/１８
＋（８１＋１＋４９＋９＋２５＋１２１）・1/７２

＝３６４/７２＋９４/１８＋６７０/７２＋１２４/７２＋１６６/１８＋２８６/７２
＝１４４４/７２＋２６０/１８
＝３６１/１８＋２６０/１８
＝６２１/１８
＝６９/２
と、前の答えと一致しました。

期待値や分散の線形性を利用した場合に比べて計算量が３倍になるので、それらの線形性を頭に入れて置くと良いでしょう。但し、分散が線形なのは２つの確率変量が独立な場合なので注意してください。