中学生でも解ける東大大学院入試問題（１７５）

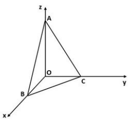
2015-04-20 12:30:40

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

天気予報通り、朝から小雨です。夕方からはしっかり降るようですが、明日の午後から回復に向かい、水曜日からしばらく晴れの日が続くようです。今年の４月は雨の日が多く感じます。

さて、今回は平成２５年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「図のように、直交する座標軸の原点をＯとし、座標軸上にそれぞれ点Ａ、Ｂ、Ｃをとり三角錐を作る（ＯＡ＝２、ＯＢ＝１、ＯＣ＝１）。この三角錐内で、$q = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$（$\alpha_0$、$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$は定数で、ｘ、ｙ、ｚは座標の値）でｑが示されるとする。各頂点でのｑの値を、$q_O = 0$、$q_A = 4$、$q_B = 2$、$q_C = 2$ としたとき、$q = 3$ となる等値面の三角錐内での面積を求めよ。



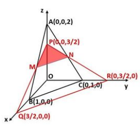
」
です。

初めに、点Ａ、Ｂ、Ｃの座標を求めましょう。ＯＡ＝２、ＯＢ＝１、ＯＣ＝１ですから、Ａ（０,０，２）、Ｂ（１,０,０）、Ｃ（０,１,０）で、原点Ｏ（０，０，０）です。

これらの座標値を式
$q = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$　　　（１）
に代入すると、
$q_O = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0$
$= \alpha_0$
$= 0$　　　（２）
$q_A = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 2$
$= \alpha_0 + 2\alpha_3$
$= 4$　　　（３）
$q_B = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0$
$= \alpha_0 + \alpha_1$
$= 2$　　　（４）
$q_C = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0$
$= \alpha_0 + \alpha_2$
$= 2$　　　（５）
となります。

（２）（３）（４）（５）から、
$\alpha_0 = 0$
$\alpha_1 = 2$
$\alpha_2 = 2$
$\alpha_3 = 2$
となり、これらを（１）に代入して、
$q = 2x + 2y + 2z$　　　（６）
となります。

したがって、ｑ＝３となる等値面は、（６）にｑ＝３を代入して、
$x + y + z = 3/2$　　　（７）
で表される平面になり、これを図１に示します。

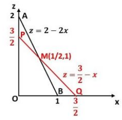


▲図１． $x + y + z = 3/2$ の平

ここで問われているのは、三角錐ＡＢＣ内にある平面（７）の面積で、これは図１の△ＰＭＮ（赤色領域）の面積になります。

そこで、直線ＡＢと直線ＰＱの交点を求めます。

図２にあるように、直線ＡＢの式は、$z = 2 - 2x$、直線ＰＱの式は、$z = 3/2 - x$　なので、交点Ｍは、Ｍ（１/２，０,１)です。



▲図２．直線ＡＢと直線ＰＱの交点Ｍを求めます

同様に、直線ＡＣと直線ＱＲの交点Ｎは、Ｎ（０,１/２,１）です。

以上から、Ｐ（０,０,３/２）、Ｍ（１/２,０,１)、Ｎ（０,１/２,１）を頂点とする三角形の面積を求めることになるのですが、あとは、適当に底辺と高さを決めて、三角形の面積を計算してもＯＫですし、この三角形が正三角形になることを使ってもＯＫです。

ここでは、ＭＮを底辺として面積を求めてみます。

三平方の定理から、
ＭＮ^2＝（１/２）^2＋（１/２）^2
　　　＝１/２
ＭＮ＝√（１/２）
です。

点Ｐから底辺ＭＮに下ろした垂線の足は、ＭＮの中点なので、その座標は（１/４,１/４,１）で、点Ｐからの長さｈは、
ｈ＝√（（１/４）^2＋（１/４）^2＋（１-　３/２）^2)
　＝√６/４
となり、これが高さになります。

したがって、△ＰＭＮの面積Ｓは、
Ｓ＝１/２・√（１/２）・√６/４
　＝√３/８
で、これが答えになります。

３次元空間での平面は高校で勉強しますが、その式は、ａｘ＋ｂｙ＋ｃｚ＋ｄ＝０　となります。平面上の直線の式ａｘ＋ｂｙ＋ｃ＝０にｚの項を加えた形です。興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533