

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１７２）

2015-04-16 15:20:32

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

気温が 20°C は超え暖かく過ごしやすい日になりました。週末まで良い天気が続くようです。

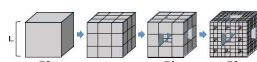
さて、今回は平成 25 年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「図のように一辺の長さが L の立方体から始めて、以下の手順を n 回繰り返す、立方体の集合からなる図形を作る。

（手順）

各立方体の各辺を 3 等分して 27 個の小さな立方体に分割する。このうち、中心の小さな立方体 1 個と、各側面の中央の小さな立方体 6 個を取り除く。



このとき、以下の問に答えよ。

- （１） n 回繰り返した後に得られる図形の体積を求めよ。
 （２） n 回繰り返した後に得られる図形の表面積を求めよ。」
 です。

前回の問題と同じように、等比数列を使って簡単に解けそうです。

まず（１）ですが、 $n = 1$ のときに取り除かれる体積を求めましょう。

27 個の小さな立方体に分割して、中央の 1 個と各側面の 6 個の小さな立方体を取り除くので、 $n = 1$ のときに取り除かれる体積は、 $\frac{7}{27} \cdot L^3$ になります。

次に $n = 2$ のときは、残った 20 個の小さな立方体に対して同様の操作をするので、 $n = 2$ のときに取り除かれる体積は、 $20 \cdot \frac{7}{27} \cdot \left(\frac{L}{3}\right)^3$ になります。

ついでに $n = 3$ のときも調べると、残った $20 \times 20 = 400$ 個のさらに小さな立方体に対して同様の操作をするので、 $n = 3$ のときに取り除かれる体積は、 $20^2 \cdot \frac{7}{27} \cdot \left(\frac{L}{9}\right)^3$ になります。

したがって、 n 回目に取り除かれる体積は、 $20^{n-1} \cdot \frac{7}{27} \cdot \left(\frac{L}{3^{n-1}}\right)^3$ になります。

ここで、1 回目から n 回目の操作で取り除かれる体積の和を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{7}{27} \cdot L^3 + 20 \cdot \frac{7}{27} \cdot \left(\frac{L}{3}\right)^3 + 20^2 \cdot \frac{7}{27} \cdot \left(\frac{L}{9}\right)^3 + \cdots + 20^{n-1} \cdot \frac{7}{27} \cdot \left(\frac{L}{3^{n-1}}\right)^3 \\ &= \frac{7}{27} \cdot L^3 \left(1 + \frac{20}{3} + \left(\frac{20}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{20}{3}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{7}{27} \cdot L^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{20}{3}\right)^n}{1 - \frac{20}{3}} \\ &= L^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{20}{3}\right)^n}{2} \end{aligned}$$

です。

一方、元の立方体の体積は L^3 なので、残った図形の体積は、
 $L^3 - L^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{20}{3}\right)^n}{2} = \frac{20}{2} \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^{n-1} \cdot L^3$
 で、これが答えになります。

申し訳ありませんが、急な用事ができてしまったので、（２）の表面積は次回にします。興味がある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533