

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１９８）

2015-08-09 10:24:55

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と同じように風が吹いて少し涼しく感じます。明日は台風の影響でしょうか、雨が降るようです。

さて、今回は平成２７年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「何人かの泥棒（Ａ、Ｂ、Ｃ、・・・）がグループで宝石商を襲い、同じダイヤモンドを７２個奪った。グループでダイヤモンドを分配したい。

まず、泥棒Ａが他の泥棒に分配案を提案する。この提案に対して、提案者を含むすべての泥棒の半数以上が賛成すれば、その提案は受け入れられる。ただし、過半数が反対すれば、泥棒Ａはグループから追放される。

泥棒Ａが追放された場合、泥棒Ｂが次に分配案を提案する。その提案に対して、提案者を含むすべてのグループに残っている泥棒の半数以上が賛成すれば、その提案は受け入れられ、さもなければ泥棒Ｂは追放される。

泥棒Ｂも追放された場合は、泥棒Ｃが提案するというように続く。

泥棒が分配案を提案したり、提案に対して賛成・反対を表明したりする場合は、追放されず自分の最終的な分配数が最大になるようにする。

また、泥棒たちは、自分自身の賛成・反対にかかわらず最終的に自分への分配数が同じであり追放されない場合、ランダムに賛成・反対を決める。

なお、泥棒たちは、他の泥棒も必ず同じ考え方をすることを知っているものとする。また、追放された場合、ダイヤモンドは受け取れない。

（１）泥棒グループが３人（Ａ、Ｂ、Ｃ）の場合、Ａは最大何個のダイヤモンドを得ることが可能か。また、その時のＡの提案の内容を示せ。

（２）泥棒グループが９人（Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄ、Ｅ、Ｆ、Ｇ、Ｈ、Ｉ）の場合、Ａは最大何個のダイヤモンドを得ることが可能か。また、その時のＡの提案の内容を示せ。」です。

長い問題文ですが、要は、分配案の提案者が、自分を含めて半数以上の賛成者を獲得するようにダイヤモンドを分配する方法を見つけるということです。提案者以外が、ある提案に賛成するか反対するかは、提案に賛成した場合と、提案に反対した場合、つまり提案者を追放して次の提案者の分配案とを比べて、どちらが得（ダイヤモンドが多く獲得できる）かで決まることになります。したがって、泥棒の人数が２人の場合から遡って調べていくのが明快です。

まず（１）ですが、Ａが追放されてＢとＣが残った場合、Ｂのどのような分配案に対してもＢは賛成するので、半数以上の賛成を得ることになり、Ｂの提案は受け入れられることになります。したがって、Ｂの分配案は、〔Ｂ：７２個、Ｃ：０個〕になります。

次にＡの分配案について考えてみます。

Ａは自分自身以外に１人の賛成者を獲得すれば提案は受け入れられます。

それではまずＢを賛成者にすることを考えてみます。

Ｂを賛成者にするためには、少なくとも７２個のダイヤモンドを分配しなければなりません。なぜならば、Ａが追放された場合、Ｂは７２個のダイヤモンドを得ることができるからです。（但し、ここでＡがＢに７２個のダイヤモンドを与える提案をしてもＢはランダムに賛成・反対を決めるのでＡの提案が受け入れられるとは限りません）

次にＣを賛成者にすることを考えると、もしＡが追放された場合、Ｃはダイヤモンドを得ることができないので、ＡはＣに１個のダイヤモンドを分配すれば、Ｃを賛成者にすることができ、Ａの提案が受け入れられます。

以上から、ＡはＣを賛成者にするのが得で、Ａの分配案は、〔Ａ：７１個、Ｂ：０個、Ｃ：１個〕になります。

したがって、（１）の答えは、Ａが得ることのできるダイヤモンドの個数は、７１個で、提案の内容は、「Ａに７１個、Ｂに０個、Ｃに１個のダイヤモンドを分配する」です。

続いて（２）です。これは（１）と同じことを繰り返していけばＯＫです。

・Ｈ、Ｉが残った場合（ＡからＧが追放された場合）

（１）にあるように、Ｈの分配案は、〔Ｈ：７２個、Ｉ：０個〕です。

・Ｇ、Ｈ、Ｉが残った場合

（１）にあるように、Ｇの分配案は、〔Ｇ：７１個、Ｈ：０個、Ｉ：１個〕です。

・ F、G、H、Iが残った場合

Fは自分自身以外に1人の賛成者が必要で、G、H、Iを賛成者にするために分配しなければならないダイヤモンドの最少数は、それぞれ、  
Gに対して、 7 2個  
Hに対して、 1個  
Iに対して、 2個 (←1個にすると前のG、H、Iが残った場合に得られるダイヤモンド数と同じになりランダムに賛成・反対を決めることになる)  
なので、Fの分配案は、[F: 7 1個、G: 0個、H: 1個、I: 0個]です。

・ E、F、G、H、Iが残った場合

Eは自分自身以外に2人の賛成者が必要で、F、G、H、Iを賛成者にするために分配しなければならないダイヤモンドの最少数は、それぞれ、  
Fに対して、 7 2個  
Gに対して、 1個  
Hに対して、 2個 (←上記と同様)  
Iに対して、 1個  
なので、Eの分配案は、[E: 7 0個、F: 0個、G: 1個、H: 0個、I: 1個]です。

・ D、E、F、G、H、Iが残った場合

Dは自分自身以外に2人の賛成者が必要で、E、F、G、H、Iを賛成者にするために分配しなければならないダイヤモンドの最少数は、それぞれ、  
Eに対して、 7 1個  
Fに対して、 1個  
Gに対して、 2個 (←上記と同様)  
Hに対して、 1個  
Iに対して、 2個 (←上記と同じ)  
なので、Dの分配案は、[D: 7 0個、E: 0個、F: 1個、G: 0個、H: 1個、I: 0個]です。

・ C、D、E、F、G、H、Iが残った場合

Cは自分自身以外に3人の賛成者が必要で、D、E、F、G、H、Iを賛成者にするために分配しなければならないダイヤモンドの最少数は、それぞれ、  
Dに対して、 7 1個  
Eに対して、 1個  
Fに対して、 2個 (←上記と同様)  
Gに対して、 1個  
Hに対して、 2個 (←上記と同様)  
Iに対して、 1個  
なので、Cの分配案は、[C: 6 9個、D: 0個、E: 1個、F: 0個、G: 1個、H: 0個、I: 1個]です。

・ B、C、D、E、F、G、H、Iが残った場合

Bは自分自身以外に3人の賛成者が必要で、C、D、E、F、G、H、Iを賛成者にするために分配しなければならないダイヤモンドの最少数は、それぞれ、  
Cに対して、 7 0個  
Dに対して、 1個  
Eに対して、 2個 (←上記と同様)  
Fに対して、 1個  
Gに対して、 2個 (←上記と同様)  
Hに対して、 1個  
Iに対して、 2個 (←上記と同様)  
なので、Bの分配案は、[B: 6 9個、C: 0個、D: 1個、E: 0個、F: 1個、G: 0個、H: 1個、I: 0個]です。

・ A、B、C、D、E、F、G、H、Iが残った場合

Aは自分自身以外に4人の賛成者が必要で、B、C、D、E、F、G、H、Iを賛成者にするために分配しなければならないダイヤモンドの最少数は、それぞれ、  
Bに対して、 7 0個  
Cに対して、 1個  
Dに対して、 2個 (←上記と同様)  
Eに対して、 1個  
Fに対して、 2個 (←上記と同様)  
Gに対して、 1個  
Hに対して、 2個 (←上記と同様)  
Iに対して、 1個  
なので、Aの分配案は、[A: 6 8個、B: 0個、C: 1個、D: 0個、E: 1個、F: 0個、G: 1個、H: 0個、I: 1個]です。

したがって、(2)の答えは、Aが得ることのできるダイヤモンドの個数は、6 8個で、提案の内容は、「Aに6 8個、Bに0個、Cに1個、Dに0個、Eに1個、Fに0個、Gに1個、Hに0個、Iに1個のダイヤモンドを分配する」です。

この問題のポイントは、泥棒が2人の場合から遡って調べていくことです。頭に入れておくと役に立つこともあるでしょう。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校  
<http://caitakiyama.jimdo.com/>  
TEL 042-472-5533