

中学生でも解ける東大大学院入試問題（172つづき）

2015-04-17 12:17:58

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

先程まで晴れていたのですが、段々曇り空になってきました。夕方には雷雨があるかもしれないと天気予報で言っていましたが、今の時期は上空の空気の入替わりが激しいようです。

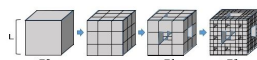
さて、昨日に続いて、平成25年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題の（2）です。

問題は、

「図のように一辺の長さがLの立方体から始めて、以下の手順をn回繰り返し、立方体の集合からなる図形を作る。

（手順）

各立方体の各辺を3等分して27個の小さな立方体に分割する。このうち、中心の小さな立方体1個と、各側面の中央の小さな立方体6個を取り除く。

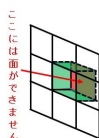


このとき、以下の問いに答えよ。

- （1）n回繰り返した後に得られる図形の体積を求めよ。
 - （2）n回繰り返した後に得られる図形の表面積を求めよ。」
- です。

早速、（2）に取り掛かりましょう。

表面積を調べるには、図1に示した図形を基本単位として考えると簡単です。



▲図1．基本単位

図1のように、立方体の1面を9個の正方形に分割して、その中央の正方形を1面とする立方体を取り除いたとき、中央の正方形がなくなりますが、窪んだ部分に4個の正方形（緑色部分）が新たに現れます。つまり、1個の立方体を取り除くと、その立方体の1面と同じ正方形の数が、 $4 - 1 = 3$ 個増えるということです。（ここで、元の立方体の中心の小さな立方体も取り除くので、奥の面（赤色部分）は無くなるということに注意してください）

そこで、元の立方体のある1面から作られていく図形を考えていきます。

まず、 $n = 0$ のとき、立方体の1面の面積は、 L^2 になります。

次に、 $n = 1$ のとき、立方体の1面の正方形を9分割した、面積 $(L/3)^2$ の正方形が12個になるので、面積は、 $12 \times (L/3)^2$ になります。

続いて、 $n = 2$ のとき、 $n = 1$ でできた12面について、1面あたり面積 $(L/3^2)^2$ の正方形が12個になるので、面積は、 $12 \times 12 \times (L/3^2)^2$ になります。

したがって、n回目のときの面積は、 $12^n \times (L/3^n)^2$ となり、これを変形すると、 $(4/3)^n \times L^2$ です。

最後に、立方体の面は6面なので、問題の手順をn回繰り返した後に得られる図形の表面積は、 $6 \times (4/3)^n \times L^2$ となり、これが答えです。

ここで、 $n \rightarrow \infty$ のときにできる図形を「メンガーのスポンジ」と言います。前回求めた体積は、 $V_n = (20/27)^n \cdot V_0$ で、今回求めた表面積は、 $S_n = (4/3)^n \cdot S_0$ ですが、ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、 $V_n \rightarrow 0$ 、 $S_n \rightarrow \infty$ となり、体積は0で表面積が無限大という奇妙な図形であることが判ります。興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533