

中学生でも解ける東大大学院入試問題（８３）

2015-01-09 13:26:14

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

気温が10℃と暖かい日になりました。予報では明後日まで10℃を上回るようです。とはいえ、朝夕は冷え込みますので、特に受験生の皆さんは体調に気をつけて暖かくして勉強してください。

さて、今回は平成23年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「1から9まで、それぞれ別の数字が書かれた9枚のカードがある。ここから無作為に3枚抜き出すものとする。

- 1) 抜き出された3つの数字の和が偶数になる確率を求めよ。
  - 2) 抜き出された3つの数字の積が偶数になる確率を求めよ。
  - 3) 3つの数字が、抜き出した順に大きくなっていく確率を求めよ。
  - 4) 抜き出された3つの数字の和が、残りの6つの和よりも大きくなる確率を求めよ。
  - 5) 抜き出された3つの数字の積が、残りの6つの積よりも大きくなる確率を求めよ。」
- です。

確率の問題です。都立高校の数学入試問題では、大問1の小問7に確率・場合の数からの出題が続いていましたが、この2年は「資料の整理」の問題が出題されています。そろそろ今年は確率の問題に戻るかもしれません。

都立高校入試の確率・場合の数の問題でカードを取り扱う場合、その枚数は5枚なので、樹形図を描いて解くことができます。ところが、本問のように9枚となると樹形図を描くのもたいへんで（もちろん、頑張れば樹形図を描くことはできますが）、少し工夫して解くのが現実的でしょう。

まず、1)ですが、取り出した順番に（1枚目、2枚目、3枚目）と表すと、3つの数字の和が偶数になるのは、

（偶数、偶数、偶数）

（偶数、奇数、奇数）

（奇数、偶数、奇数）

（奇数、奇数、偶数）

の4通りの場合になります。

これらの起こる確率を求めると、

（偶数、偶数、偶数）の場合は、 $4/9 \cdot 3/8 \cdot 2/7 = 1/21$

（偶数、奇数、奇数）の場合は、 $4/9 \cdot 5/8 \cdot 4/7 = 10/63$

（奇数、偶数、奇数）の場合は、 $5/9 \cdot 4/8 \cdot 4/7 = 10/63$

（奇数、奇数、偶数）の場合は、 $5/9 \cdot 4/8 \cdot 4/7 = 10/63$

となり、これらを足し合わせて、

$$1/21 + 10/63 + 10/63 + 10/63 = 11/21$$

が答えになります。

高校で勉強する組合せを使うと、偶数が3つ取り出される確率は、 $4C3/9C3$ 、偶数が1つ奇数が2つ取り出される確率は、 $4C1 \cdot 5C2/9C3$  となるので、これらを足し合わせて、

$$\begin{aligned} 4C3/9C3 + 4C1 \cdot 5C2/9C3 &= (4 \cdot 3 \cdot 2/3 \cdot 2 \cdot 1) / (9 \cdot 8 \cdot 7/3 \cdot 2 \cdot 1) + \\ &\quad (4/1) \cdot (5 \cdot 4/2 \cdot 1) / (9 \cdot 8 \cdot 7/3 \cdot 2 \cdot 1) \\ &= 1/21 + 10/21 \\ &= 11/21 \end{aligned}$$

と計算できます。

次に2)ですが、3つの数字の積が偶数になるためには、1つ偶数が取り出されればよいので、

（偶数、\*、\*）（\*は、偶数でも奇数でもどちらでよい）

（\*、偶数、\*）

（\*、\*、偶数）

となるのですが、（\*、偶数、\*）や（\*、\*、偶数）では、1枚目（または1枚目と2枚目）に取り出された数が偶数か奇数で2枚目（または3枚目）の偶数である確率が変わってしまうので、\*を場合分けする必要があります。

こんなときには、排反事象を利用するのが賢いでしょう。つまり、（奇数、奇数、奇数）である確率を求めて、全事象の確率1から差し引くわけです。

（奇数、奇数、奇数）である確率は、 $5/9 \cdot 4/8 \cdot 3/7 = 5/42$  なので、求める確率は、 $1 - 5/42 = 37/42$  となります。

これを組合せを使って解くと、

$$4C1 \cdot 5C2/9C3 + 4C2 \cdot 5C1/9C3 + 4C3 \cdot 5C0/9C3 = 37/42$$

または、

$$1 - 5C3/9C3 = 37/42$$

となります。

続いて3)ですが、1枚目に1、2枚目に2を選ぶと3枚目はどれでもよいことになります。

また、1 枚目に 1、2 枚目に 3 を選ぶと 3 枚目は 2 以外のどれでもよいことになります。

これを続けていくと、求める確率は、

$$\begin{aligned} & 1/9 \cdot 1/8 \cdot (7/7 + 6/7 + \dots + 1/7) \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot (6/7 + 5/7 + \dots + 1/7) \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot (5/7 + 4/7 + \dots + 1/7) \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot (4/7 + 3/7 + 2/7 + 1/7) \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot (3/7 + 2/7 + 1/7) \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot (2/7 + 1/7) \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot 1/7 \end{aligned}$$

となり、これを計算すると、

$$\begin{aligned} & 1/9 \cdot 1/8 \cdot 28/7 \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot 21/7 \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot 15/7 \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot 10/7 \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot 6/7 \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot 3/7 \\ & + 1/9 \cdot 1/8 \cdot 1/7 \\ & = 1/(9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot (28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1) \\ & = 1/(9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot 84 \\ & = 1/6 \end{aligned}$$

です。

これを順列・組合せを使って解きましょう。

まず、9 枚のカードから取り出した順に 3 枚並べる場合の数は、 $9 \cdot 8 \cdot 7 (=9P3)$  です。

一方、9 枚のカードから 3 枚取り出した場合、それらの 3 枚を数字の小さい順に並べることは 1 通りに決まるので、9 枚のカードから小さい順に 3 枚取り出す場合の数は、 $9C3$  になります。

したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} 9C3/9P3 &= (9 \cdot 8 \cdot 7) / (3 \cdot 2 \cdot 1) / (9 \cdot 8 \cdot 7) \\ &= 1/6 \end{aligned}$$

になります。

ここまでで長くなってしまったので、4)、5) は次回に調べます。興味があれば解いてみてください。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533