

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１１）

2014-10-08 11:24:43

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日はノーベル物理学賞やH 2 A ロケットの成功など日本の科学技術の素晴らしさを実感でき嬉しい日になりました。  
今日の化学賞、明日（多分）の文学賞も受賞すると良いですね。

さて、昨日に続いて虫食い算を取り上げます。問題は、平成21年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試に  
出題されたものです。

「次の虫食い算のAに入る数字を求めよ」

$$\begin{array}{r}
 \square\square \\
 \times \square\square 8 \\
 \hline
 \square\square\square \\
 0\square 0 \\
 \hline
 \square\square \\
 1\square 6 A \square
 \end{array}$$

▲問題図

2桁と3桁の掛け算で手間が掛かりそうですが、4行目を見ると00となっているので、2行目の十の位の数字は0であることが簡単に判ります。

また、5行目の数が千の位までしかないのに6行目の合計が万の位の数になっていることから百の位が繰り上がり、さらに千の位も繰り上がっていることが判ります。

以上のことを手掛かりにして攻略していく訳ですが、今回は式を使って解いていきます。そのため、図2のように□にアルファベットを割り当てます。

$$\begin{array}{r}
 \square a \square b \\
 \times \square c \square d 8 \\
 \hline
 \square e \square f \square g \\
 0\square h 0 \\
 \hline
 \square i \square j \\
 1\square j 6 A \square k
 \end{array}$$

▲図1．問題図の□にa～kを置いたもの

早速、式を作りましょう。

1行目の数と2行目の一の位の数との積が3行目の数になるので、  
 $(10a + b) \times 8 = 100e + 10f + g$  (1)

同様に、1行目の数と2行目の十の位および百の位の数との積が、それぞれ4行目、5行目の数になるので、  
 $(10a + b) \times 10d = 0$  (2)  
 $(10a + b) \times 100c = 1000h + 100i$  (3)

3行目から5行目の数の和が6行目の数になるので、  
 $100e + 10f + g + 1000h + 100i$   
 $= 10000 + 1000j + 600 + 10A + k$  (4)

これで準備完了です。

まず、(2)から  
 $d = 0$  (5)  
 です。

(3)を整理すると、  
 $(10a + b) \times c = 10h + i$  (6)

(4)の両辺をじっくり見比べると、左辺と右辺の一の位の数字は、それぞれgとkで、それらは等しくなるので、  
 $g = k$  (7)

(7)を(4)に代入して、両辺を10で除すると、  
 $10e + f + 100h + 10i$   
 $= 1000 + 100j + 60 + A$  (8)

(8)の両辺をじっくり見比べると、左辺と右辺の一の位の数字は、それぞれfとAで、それらは等しくなるので、  
 $f = A$  (9)

(9)を(8)に代入して、両辺を10で除すると、  
 $e + 10h + i$

$$= 100 + 10j + 6 \quad (10)$$

$$(10) \text{ を整理して、} \\ 10(h-j) = 106 - (e+i) \quad (11)$$

ここまで来ると大分すっきりしました。ここで導いた式をまとめておきましょう。

$$\begin{aligned} (10a+b) \times 8 &= 100e + 10f + g & (1) \\ d &= 0 & (5) \\ (10a+b) \times c &= 10h + i & (6) \\ g &= k & (7) \\ f &= A & (9) \\ 10(h-j) &= 106 - (e+i) & (11) \end{aligned}$$

さて、整数不定方程式問題解法のテクニックは、

- ・大小関係を使う
- ・因数分解を使う
- ・剰余で分類する

の3つがありますが、ここでは初めの大小関係を使っていきましょう。

そこで、(11)の右辺に注目します。 $0 \leq e, i \leq 9$ 、 $e, i$  は整数 なので、  
 $0 \leq e + i \leq 18$

$$\begin{aligned} \text{ですから、} \\ 86 \leq 106 - (e+i) \leq 106 & \quad (12) \end{aligned}$$

が成り立ちます。

$$\begin{aligned} \text{つまり、} \\ 86 \leq 10(h-j) \leq 106 & \quad (13) \\ \text{なので、(13)を10で除し、かつ、} h-j \text{ が整数であることから、} \\ 9 \leq h-j \leq 10 & \quad (14) \end{aligned}$$

となります。

$$\begin{aligned} \text{ここで、} 0 \leq h, j \leq 9, h, j \text{ は整数なので、(14)を満たす} h, j \text{ は、} \\ h = 9 & \quad (15) \\ j = 0 & \quad (16) \end{aligned}$$

となります。

次に、(15)(16)を(11)に代入し整理すると、  
 $e + i = 16 \quad (17)$

を得ます。ここで、 $0 \leq e, i \leq 9$ 、 $e, i$  は整数なので、(17)を満たす $e, i$ の組み合わせ $(e, i)$ は、

- (ア)  $(7, 9)$
- (イ)  $(8, 8)$
- (ウ)  $(9, 7)$

となります。これらの(ア)(イ)(ウ)の場合について調べていきます。

$$\begin{aligned} \text{(ア)の場合、} \\ (6) \text{ に (15) と (ア) } i = 9 \text{ を代入して、} \\ (10a+b) \times c = 99 & \quad (17) \end{aligned}$$

$99 = 99 \times 1, 33 \times 3, 11 \times 9$  なので、(17)を満たす $10a+b$ と $c$ の組み合わせ $(10a+b, c)$ は、

- (エ)  $(99, 1)$
- (オ)  $(33, 3)$
- (カ)  $(11, 9)$

$$\begin{aligned} (1) \text{ に (ア) (エ) を代入して、} \\ 99 \times 8 = 792 \\ = 700 + 10f + g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{より、} \\ f &= 9 \\ g &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ に (ア) (オ) を代入して、} \\ 33 \times 8 = 264 \\ = 700 + 10f + g \end{aligned}$$

より、これを満たす $f, g$ はないので不適当。

$$\begin{aligned} (1) \text{ に (ア) (カ) を代入して、} \\ 11 \times 8 = 99 \\ = 700 + 10f + g \end{aligned}$$

より、これも不適当。

次に、(イ)の場合、

(6)に(15)と(イ)  $i = 8$ を代入して、  
(10a + b) × c = 98 (18)

$98 = 98 \times 1$ 、 $49 \times 2$ 、 $14 \times 7$  なので、(18)を満たす10a + bとcの組み合わせ(10a + b, c)は、

(キ) (98, 1)

(ク) (49, 2)

(ケ) (14, 7)

(1)に(イ)(キ)を代入して、

$$98 \times 8 = 784$$

$$= 800 + 10f + g$$

より、これを満たすf、gはないので不適当。

(1)に(イ)(ク)を代入して、

$$49 \times 8 = 392$$

$$= 800 + 10f + g$$

より、不適当。

(1)に(イ)(ケ)を代入して、

$$14 \times 8 = 112$$

$$= 800 + 10f + g$$

より、不適当。

最後に、(ウ)の場合、

(6)に(15)と(ウ)  $i = 7$ を代入して、  
(10a + b) × c = 97 (19)

$97 = 97 \times 1$ なので、(19)を満たす10a + bとcの組み合わせ(10a + b, c)は、

(コ) (97, 1)

(1)に(ウ)(コ)を代入して、

$$97 \times 8 = 776$$

$$= 900 + 10f + g$$

より、不適当。

以上より、(1)(6)を満たすのは、(ア)(エ)つまり、 $e = 7$ 、 $i = 9$ 、 $c = 1$ の場合のみで、そのとき、 $f = 9$ 、 $g = 2$ となります。

ここで、aからkをまとめると、

(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, A) =

(9, 9, 1, 0, 7, 9, 2, 9, 9, 0, 2, 9)

で、問題の計算式は、図3のようになります。

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 99 \\ \times 108 \\ \hline 792 \\ 000 \\ 990 \\ \hline 10692 \end{array} \end{array}$$

▲図3．正解

解答が長くなりましたがやっていることは大したことはなく、場合分けのあたりはもう少し簡単にできそうです。お疲れさまでした。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533