中学生でも解ける東大大学院入試問題（３２）

2014-11-07 11:16:28

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

風が少しありますが暖かい日になり、教室の掃除をしていたら久しぶりに汗をかきました。しかし、明日から天気は下り坂になるようです。

さて、今回は平成１７年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「$x^2+y^2+z^2=2$ のとき、以下の式の最大値を求めなさい。
　　$3x+4y+5z$ 」
です。

この問題には定番の解法パターンがあって、それは、「コーシー・シュワルツの不等式」
$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ 　　（１）　　（ａ^2はａの２乗を表します）
を使うものです。

（１）で、$a=3$、$b=4$、$c=5$ とすると、
$(3x+4y+5z)^2 \leqq (3^2+4^2+5^2)(x^2+y^2+z^2)$
$(3x+4x+5z)^2 \leqq 50(x^2+y^2+z^2)$
$(3x+4x+5z)^2 \leqq 100$
$-10 \leqq 3x+4y+5z \leqq 10$
と問の式（$3x+4y+5y$）の取り得る範囲を求めることができました。

あとは、問の式が１０を取り得るかを調べればＯＫです。

そのため、$x=3k$、$y=4k$、$z=5k$ 　と置き、それらを
$x^2+y^2+z^2=2$
に代入すると、
$9k^2+16k^2+25k^2=50k^2$
$=2$
より、
$k^2=1/25$
$k=\pm 1/5$
となり、$k=1/5$ のとき、$x=3/5$、$y=4/5$、$z=5/5$ で、これらを問の式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
3x+4y+5z &= 3\cdot 3/5+4\cdot 4/5+5\cdot 5/5 \\
&= 9/5+16/5+25/5 \\
&= 50/5 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

となり、確かに問の式が１０になり得ることが判ったので、問の式の最大値は１０となります。

ここで問題なのが、（１）の「コーシー・シュワルツの不等式」が成り立つのかということです。

ｎ次元の「コーシー・シュワルツの不等式」を証明するには、高校で勉強する総和記号（Σ）などを使ったほうが便利ですが、２次元や３次元であれば、すべてを書き下すことで、中学生でも証明することができます。

まず、「もの」の大小を判定する大切なテクニックの一つに、２つの「もの」の差をとってその正負を調べるというものがあります。

この場合、「もの」とは（１）の両辺の式で、$(ax+by+cz)^2$ と $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ になり、それらの差を調べるということです。（１）では左辺より右辺が大きいと主張しているので、右辺から左辺を引いて、それが非負（- ではない）ことを明らかにすればよいということです。

早速、右辺- 左辺をＲとすると、

$$
\begin{aligned}
R &= (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \\
&= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2 \\
&\quad +b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2 \\
&\quad +c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2 \\
&\quad -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx) \\
&= a^2y^2+a^2z^2 \\
&\quad +b^2x^2+b^2z^2 \\
&\quad +c^2x^2+c^2y^2 \\
&\quad -2abxy-2bcyz-2cazx \\
&= b^2x^2-2abxy+a^2y^2 \\
&\quad +c^2y^2-2bcyz+b^2z^2 \\
&\quad +a^2z^2-2cazx+c^2x^2 \\
&= (bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2
\end{aligned}
$$

となり、a、b、c、x、y、z が実数であれば、
$(bx-ay)^2 \geqq 0$

（ｃｙ－ｂｚ）^2≧０
（ａｚ－ｃｘ）^2≧０
なので、Ｒ≧０となります。したがって、（１）が成り立つことが判りました。

中学生のとき、書籍名は忘れましたが、数学の啓蒙書に等式を扱う分野の研究が進み成果が上げ難くなり、等式に比べて条件が厳しくない不等式を扱う分野の研究が活発になった、というような趣旨のことが書いてありました。そこで少し不等式を調べたのですが、そのとき上記の３次元「コーシー・シュワルツの不等式」の証明を知って、最後の各項の順番を入れ換えて平方を作るところに、「世の中は上手くできているなぁ」と大変感心しました。

「コーシー・シュワルツの不等式」は美しく覚えやすいので頭に入れておくと良いでしょう。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533