

中学生でも解ける東大大学院入試問題（５３）

2014-12-04 11:56:32

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

曇っていて、気温は $10^{\circ}\text{C}$ と寒い日が続きます。夕方から雨になるようですが、明日には上がるようです。受験生の皆さんは、暖かくして勉強してください。

さて、今回は平成20年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「次の表は、たて、よこ、ななめの数の合計がすべて同じ数になる。この表を完成せよ。」

	14	
		8
	-2	

▲問題の表

魔方陣の問題は、数字の入っていない空欄に文字を入れて方程式を作れば簡単です。

早速、図1のように空欄にA～Fを入れましょう。

A	14	B
C	D	8
E	-2	F

▲図1．空欄に文字を入れる

次は、方程式を作ります。たて、よこ、ななめの数の合計がすべて同じ数になるので、

$$\begin{aligned}
 & A + 4 + E & (1) \\
 = & 14 + D + (-2) & (2) \\
 = & B + 8 + F & (3) \\
 = & A + 14 + B & (4) \\
 = & C + D + 8 & (5) \\
 = & E + (-2) + F & (6) \\
 = & A + D + F & (7) \\
 = & B + D + E & (8)
 \end{aligned}$$

と立式できます。

これらの式をじっくり観察すると、(1)と(6)、(2)と(7)を組み合わせると、AとFだけを含む2つの式ができることが判ります。つまり、AとFの連立方程式が作れるので、AとFの数を決めることができます。(2)と(8)、(3)と(6)からB、Eを求めてもOKです)

(1)と(6)から、

$$\begin{aligned}
 A + 4 + E &= E + (-2) + F \\
 A - F &= -6 & (9)
 \end{aligned}$$

(2)と(7)から、

$$\begin{aligned}
 14 + D + (-2) &= A + D + F \\
 A + F &= 12 & (10)
 \end{aligned}$$

(9)と(10)の両辺を足して、

$$\begin{aligned}
 2A &= 6 \\
 \text{より、} \\
 A &= 3 & (11)
 \end{aligned}$$

(11)を(10)に代入して、

$$\begin{aligned}
 3 + F &= 12 \\
 \text{より、} \\
 F &= 9 & (12)
 \end{aligned}$$

と、A、Fが決まりました。そこで、それらを(1)から(8)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 & 3 + 4 + E \\
 = & 14 + D + (-2) \\
 = & B + 8 + 9 \\
 = & 3 + 14 + B \\
 = & C + D + 8 \\
 = & E + (-2) + 9 \\
 = & 3 + D + 9 \\
 = & B + D + E
 \end{aligned}$$

となり、これを整理すると、

$$\begin{aligned}
& E + 7 \\
& = D + 12 \\
& = B + 17 \\
& = B + 17 \\
& = C + D + 8 \\
& = E + 7 \\
& = D + 12 \\
& = B + D + E
\end{aligned}$$

となり、重複する式を除くと、

$$\begin{aligned}
& E + 7 & (13) \\
& = D + 12 & (14) \\
& = B + 17 & (15) \\
& = C + D + 8 & (16) \\
& = B + D + E & (17)
\end{aligned}$$

となります。

ここで、(13)から(17)の式をじっくり観察すると、(13)と(15)、(14)と(17)を組み合わせると、BとEの連立方程式が作れることが判ります。

(13)と(15)から、

$$E + 7 = B + 17$$

$$B - E = -10 \quad (18)$$

(14)と(17)から、

$$D + 12 = B + D + E$$

$$B + E = 12 \quad (19)$$

(18)と(19)の両辺を足して、

$$2B = 2$$

から、

$$B = 1 \quad (20)$$

(20)を(19)に代入して、

$$1 + E = 12$$

から、

$$E = 11$$

と、BとEを決めることができました。それらを(13)から(17)に代入して、

$$1 + 1 + 7$$

$$= D + 12$$

$$= 1 + 17$$

$$= C + D + 8$$

$$= 1 + D + 11$$

となり、これらを整理して、

$$18$$

$$= D + 12$$

$$= 18$$

$$= C + D + 8$$

$$= D + 12$$

となり、重複する式を除くと、

$$18 \quad (21)$$

$$= D + 12 \quad (22)$$

$$= C + D + 8 \quad (23)$$

(21)と(22)から、

$$D = 6 \quad (24)$$

とDが決まりました。(24)を(22)と(23)に代入すると、

$$6 + 12 = C + 6 + 8$$

から、

$$C = 4$$

となり、これでAからFまで決まりました。図2に完成した魔方陣を示します。

3	14	1
4	6	8
11	-2	9

図2. 完成した魔方陣

別の方法としては、 $3 \times 3$ の魔方陣の場合、いずれかの、たて、よこ、ななめの数の和と中央の数の3倍とが等しくなることを利用して解くことができます。

例えば、図 1 では、中央のたての列から、

$$1 + D + (-2) = 3D$$

が成り立ち、これから

$$2D = 1 - 2$$

$$D = -\frac{1}{2}$$

とDを簡単に決めることができ、方程式だけで解くより若干速く解答できます。

方程式を使って魔方陣を解くことは、魔方陣をパズルとして楽しむのであれば味気ないかもしれませんが、試験で役に立つこともあるかもしれないので、頭に入れておくとい良いでしょう。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533