中学生でも解ける東大大学院入試問題（２０）

2014-10-23 12:35:05

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

雨が降ったり止んだりしていますが、これから天気は回復します。週末は気温も上がり暖かくなるようです。

昨日に続いて平成２０年東大大学院工学系研究科環境海洋工学入試問題の小問（２）を取り上げます。

問題は、
「２^n－１が素数ならば、２^(n-1)・（２^n－１）のすべての正の約数の和は、２^n・（２^n－１）になることを証明せよ。ただし、『すべての正の約数』とは、１および２^(n-1)・（２^n－１）を含むものとする。」　（２^n　は２のｎ乗を表します）
というものです。

どうでもよいことかも知れませんが、
Ｎ＝２^(n-1)・（２^n－１）　　（１）
とすると、Ｎの約数の和がＮの２倍になるということですね。

それでは解答に取り掛かりましょう。昨日、６５６の約数の和を求める問題で、６５６を素因数分解し、その指数を利用しましたが、今回の問題も全く同じように解くことができます。

まず、２^n－１は素数なのでｎは自然数となり、つまり、（１）の式はＮを素因数分解を表しているということです。

すると、昨日説明した《　》のＮの素因数分解式から約数の和Ｓを求める式を使えば、Ｓ＝２^n・（２^n－１）となるはずです。
《　Ｎ＝ａ^p×ｂ^q×・・・×ｃ^r　のとき、Ｎの約数の和Ｓは、
Ｓ＝（ａ^(p+1)－１）／（ａ－１）×（ｂ^(q+1)－１）／（ｂ－１）×・・・×（ｃ^(r+1)－１）／（ｃ－１）》

では、それを確かめてみましょう。《　》のなかで、　ａ＝２、ｐ＝ｎ－１、ｂ＝２^n－１、ｑ＝１、ｒ＝０、ｃは任意　をＮの式に代入すると（１）となり、そのときのＳは、
Ｓ＝（２^(n-1+1)－１）／（２－１）×（（２^n－１）^(1+1)－１）／（２^n－１－１）
　＝（２^n－１）（（２^n－１）^2－１）／（２^n－２）
　＝（２^n－１）（（２^n－１）＋１）（（２^n－１）－１）／（２^n－２）
　＝（２^n－１）・２^n（２^n－２）／（２^n－２）
　＝２^n・（２^n－１）
と確かに証明すべき式になりました。

では次に、Ｎの約数を書き出して和を作ってみましょう。

Ｎの約数は、１、２、２^2、２^3、・・・、２^(n-1)、（２^n－１）、（２^n－１）・２、（２^n－１）・２^2、（２^n－１）・２^3、・・・、（２^n－１）・２^(n-1) で２ｎ個あります。

これらを
Ｓ１＝１＋２＋２^2＋２^3＋・・・＋２^(n-1)
Ｓ２＝（２^n－１）＋（２^n－１）・２＋（２^n－１）・２^2＋（２^n－１）・２^3＋・・・＋（２^n－１）・２^(n-1)
　＝（２^n－１）（１＋２＋２^2＋２^3＋・・・＋２^(n-1)）
として、Ｓ＝Ｓ１＋Ｓ２を計算すると、
　Ｓ＝１＋２＋２^2＋２^3＋・・・＋２^(n-1)＋（２^n－１）（１＋２＋２^2＋２^3＋・・・＋２^(n-1)）
　＝（（２^n－１）＋１）（１＋２＋２^2＋２^3＋・・・＋２^(n-1)）
　＝２^n（１＋２＋２^2＋２^3＋・・・＋２^(n-1)）
となり、１＋２＋２^2＋２^3＋・・・＋２^(n-1)　は、公比を２とする等比数列の和なので、
１＋２＋２^2＋２^3＋・・・＋２^(n-1)）＝２^n－１
より、
Ｓ＝２^n（２^n－１）
と目的の式になりました。

この問題の小問（１）と（２）の関係が判然としないのですが、もしかすると、小問（１）は６５６の約数を書き下して、小問（２）は式の計算をさせるつもりだったのでしょうか。よく判りません。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533