中学生でも解ける東大大学院入試問題（４９）

2014-11-29 11:47:39

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今は雨が降っていますが、これから晴れてくるようです。少し暖かくなると良いのですが。

さて、今回は平成２２年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「３つの実数　１、A、B　（A < B）は、並べ方によって、等比数列にも等差数列にもなる。A、Bの組み合わせをすべて求めよ。」

等比数列、等差数列は、高校で勉強するのですが、それほど難しい話ではありません。

等比数列は、最初の数に定数ｒを次々と掛けていってできる数の列（数列）で、ｒを公比と言います。例えば、最初の数を１、公比を２とすると、この数列は、
１、２、４、８、１６、・・・
となります。

等差数列は、最初の数に定数ｄを次々と加えていってできる数の列（数列）で、ｄを公差と言います。例えば、最初の数を１、公差を２とすると、この数列は、
１、３、５、７、９、・・・
となります。

では本問に取り掛かりましょう。

AとBとの大小関係については、A < Bですが、A、Bと１との大小関係が決まっていません。そのため、A、Bと１との大小関係による場合分けが必要になりますが、その前にA、Bの取り得る範囲を調べておきましょう。

まず等差数列の場合、その公差が０のとき、A = Bとなるので、公差は０ではありません。すると、１、A、Bは相異なる実数となります。つまり、A、B≠1 となります。

次にAまたはBが０のとき、１、A、Bは等比数列にならないので、A、B≠0 となります。

以上の条件、A < B、A、B≠1、A、B≠0 を考慮すると、
（あ）１ < A < B
（い）A < １ < B
（う）A < B < １
と３つの場合に分けることができます。

さらにここで、３つの実数が等比数列になる場合と等差数列になる場合の性質を調べておきましょう。

３つの実数をａ、ｂ、ｃ、公比をｒ、公差をｄとします。

まず、ａ、ｂ、ｃの順に等比数列になる場合は、
ｂ = ｒａ
ｃ = ｒｂ
なので、上の式の右辺と下の式の左辺、上の式の左辺と下の式の右辺を掛けて、
ｂ・ｒｂ = ｒａ・ｃ
ｂ^2 = ａｃ　　　（ｂ^2はｂの２乗を表します）
が成り立ちます。つまり、中央の数の２乗が他の２数の積に等しいということです。

次に、ａ、ｂ、ｃの順に等差数列になる場合は、
ｂ = ａ + ｄ
ｃ = ｂ + ｄ
なので、上の式の左辺と下の式の右辺、上の式の右辺と下の式の左辺を足して、
ｂ + ｂ + ｄ = ａ + ｄ + ｃ
２ｂ = ａ + ｃ
が成り立ちます。つまり、中央の数の２倍が他の２数の和に等しいということです。

これで準備完了です。早速、上記の３つの場合について、一つひとつ調べていきましょう。

（あ）１ < A < Bの場合
１、A、Bの順に等差数列になるので、
２A = １ + B　　　（１）
です。

また、１、A、Bはすべて正の数なので、等比数列になるとすれば、１、A、Bの順になります。つまり、
A^2 = B　　　（２）
となります。

（１）と（２）を解くと、
$2A = 1 + A^2$
$A^2 - 2A + 1 = 0$
$(A - 1)^2 = 0$
より、$A = 1$で、これは不適となります。

（い）$A < 1 < B$の場合
A、１、Bの順に等差数列になるので、
$2 = A + B$　　　　（３）
です。

ここでさらに、（ア）$A > 0$と（イ）$A < 0$の場合に分ける必要があります。

（ア）$A > 0$の場合
A、１、Bはすべて正の数なので、等比数列になるとすれば、A、１、B（またはその逆）の順になります。つまり、
$1^2 = AB$
$1 = AB$　　　　（４）
となります。

（３）と（４）を解くと、
$1 = A(2 - A)$
$1 = 2A - A^2$
$A^2 - 2A + 1 = 0$
$(A - 1)^2 = 0$
より、$A = 1$で、これは不適となります。

（イ）$A < 0$の場合
等比数列になるならば、１、Bが正の数でAが負の数なので、公比が負の数になります。つまり、正-負-正と並ぶので、１、A、B（またはその逆）の順になります。つまり、
$A^2 = 1 \cdot B$
$\quad = B$　　　　（５）
です。

（３）と（５）を解くと、
$A^2 = 2 - A$
$A^2 + A - 2 = 0$
$(A + 2)(A - 1) = 0$
$A = -2$、1
ここで、$A < 0$なので、
$A = -2$
となります。

$A = -2$を（５）に代入して、
$B = 4$
です。

つまり、-2、1、4は、この順に公差３の等比数列、1、-2、4の順に公比-2の等比数列になります。

次の（う）に進みましょう。

（う）$A < B < 1$の場合
A、B、１の順に等差数列になるので、
$2B = A + 1$　　　　（６）

ここで細かい場合分けが必要です。

（ア）$A > 0$の場合
A、B、１はすべて正の数なので、等比数列になるとすれば、A、B、１（またはその逆）の順になります。つまり、
$B^2 = A \cdot 1$
$\quad = A$　　　　（７）

（６）と（７）を解いて、
$2B = B^2 + 1$
$B^2 - 2B + 1 = 0$
$(B - 1)^2 = 0$
より、$B = 1$で、これは不適です。

（イ）$A < 0 < B$の場合
先ほどと同様、Aが負の数で、Bと１が正の数なので、これらが等比数列になるとすれば、B、A、１（またはその

逆）の順になります。つまり、
$A^2 = B \cdot 1$
$= B$　（８）

（６）と（８）を解いて、
$2A^2 = A + 1$
$2A^2 - A - 1 = 0$
$(2A + 1)(A - 1) = 0$
$A = -1/2$、1
ここで、$A < 0$ より、
$A = -1/2$
となります。

$A = -1/2$ を（８）に代入して、
$B = 1/4$
です。

つまり、$-1/2$、$1/4$、1 はこの順に公差 $3/4$ の等差数列、$1/4$、$-1/2$、1 の順に公比 -2 の等比数列になります。

（ウ）$A < B < 0$ の場合
A、B の２数が負の数で、１が正の数なので、等比数列になるならば、A、１、B（またはその逆）の順になります。
つまり、
$1^2 = AB$
$1 = AB$　（９）

（６）と（９）を解いて、
$1 = (2B - 1)B$
$1 = 2B^2 - B$
$2B^2 - B - 1 = 0$
$(2B + 1)(B - 1) = 0$
$B = -1/2$、1
ここで、$B < 0$ より、
$B = -1/2$
となります。

$B = -1/2$ を（９）に代入して、
$A = -2$
です。

つまり、-2、$-1/2$、1 はこの順に公差 $3/2$ の等差数列、-2、1、$-1/2$ の順に公比 $-1/2$ の等比数列になります。

結局６つの場合に分けて調べましたが、答えのA、Bの組み合わせ（A，B）は、
$(-2, 4)$、$(-1/2, 1/4)$、$(-2, -1/2)$ の３つになります。

複雑そうな問題も場合分けをするとシンプルになります。場合分けのテクニックを身に付けて活用してください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533