中学生でも解ける東大大学院入試問題（１０７）

2015-02-03 13:30:18

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日に比べて風がなく少しましな天気になりましたが、明後日は雪の予報と、もうしばらく厳しい寒さが続くようです。受験生の皆さんは暖かくして勉強してください。

さて、今回は平成１６年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「代数方程式　$x^5-1=0$　のすべての解を求めよ。」
です。　（x^5 は x の５乗を表します）

前回の問題に似ているものです。

まず、与えられた方程式を因数分解すると、
$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$　　　（１）
になります。

（１）から、$x=1$ が一つの解であることが判りますが、問題は右辺の２番目の（　）の４次式をどのようにして解くかということです。

そこで、
$x^4+x^3+x^2+x+1=0$　　　（２）
として、$x^2 \neq 0$ ではないので、（２）の両辺を x^2 で割ります。

すると、
$x^2+x+1+1/x+1/x^2=0$
となり、さらに、
$(x^2+2+1/x^2)-1+x+1/x$
$=(x+1/x)^2+(x+1/x)-1$
$=0$　　　（３）
と変形します。

ここで、
$t=x+1/x$　　　（４）
とおくと、（３）は、
$t^2+t-1=0$　　　（５）
と２次方程式に変換できました。

（５）を解の公式で解くと、
$t=(-1\pm\sqrt{5})/2$　　　（６）
となります。

そこで、（４）（６）から、
$x+1/x=(-1\pm\sqrt{5})/2$
となり、これを整理すると、
$x^2-(\sqrt{5}-1)/2\cdot x+1=0$　　　（７）
$x^2+(\sqrt{5}+1)/2\cdot x+1=0$　　　（８）
の２つの２次方程式を得ることができます。

これらの２次方程式を解の公式を使って解けばお仕舞いです。

（７）から
$x=(-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})/4$

（８）から
$x=(-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{(10-2\sqrt{5})})/4$
となり、求める答えは、
１、$(-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})/4$、$(-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{(10-2\sqrt{5})})/4$
になります。　（i は虚数単位です。高校で勉強します）

これらの５個の解で面白いことは、
$\alpha=(-1+\sqrt{5}+i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})/4$
とすると、他の４つの解が、α^2、α^3、α^4、α^5 と表せることです。

例えば、（２）に α^2 を代入すると、$\alpha^5=1$ なので、
$(\alpha^2)^4+(\alpha^2)^3+(\alpha^2)^2+(\alpha^2)+1$
$=\alpha^8+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^2+1$
$=\alpha^{(5+3)}+\alpha^{(5+1)}+\alpha^4+\alpha^2+1$

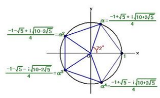
$=\alpha^3+\alpha+\alpha^4+\alpha^2+1$
$=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$
$=0$
となります。

このことは、複素数平面上で考えると判りやすくなります。

方程式$x^5-1=0$の５個の解は、下図のように、複素数平面上で原点を中心にする単位円に内接する正五角形の頂点に対応しています。

そこで、それらを三角関数を使って表すと、
ｃｏｓ７２°　　＋ｉｓｉｎ７２°
ｃｏｓ２・７２°+ｉｓｉｎ２・７２°
ｃｏｓ３・７２°+ｉｓｉｎ３・７２°
ｃｏｓ４・７２°+ｉｓｉｎ４・７２°
ｃｏｓ５・７２°+ｉｓｉｎ５・７２°
となります。

一方、ド・モアブルの定理
ｃｏｓｎθ+ｉｓｉｎｎθ=（ｃｏｓθ+ｉｓｉｎθ）^n
から、
ｃｏｓｎ・７２°+ｉｓｉｎん・７２°=（ｃｏｓ７２°+ｉｓｉｎ７２°）^n
なので、一つの解のｎ乗は５つの解のいずれかに一致することになります。



▲図．５個の解は単位円に内接する正五角形の頂点に対応します

前回に続いて複素数などが出てきて中学数学を逸脱してしまいましたが、中学生の皆さんは高校・大学・大学院とたくさん面白い数学が待っているので楽しみにしていて下さい。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533