中学生でも解ける東大大学院入試問題（１７）

2014-10-19 10:34:50

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

毎日良い天気が続きます。天気図では大きな高気圧が日本列島をすっぽり覆っていて全国的に晴天で行楽日和です。

今回は平成２２年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題を取り上げます。

「ｎ^321-　１　が１０の整数倍となるような１０００以下の正の整数ｎの個数を求めよ」（ｎ^321はｎの３２１乗を表します）

問題文が短くて見通しの良い問題です。ｎ^321-　１が１０の倍数になるということは、ｎ^321の一の位の数が１ということで、これはｎ^321を１０で割った余りが１になるということです。

ところが、ｎ^321を１０で割ったときの余りを調べると言っても、０＜ｎ≦１０００、つまり、１０００通りの場合について、かつ、それの３２１乗を計算するのは骨が折れるどころの話ではありません。そこで、少しでも計算量を少なくすることを考えなければなりません。

まず、１０００通りのｎについてですが、ｎ^321を１０で割ったときの余りを調べればよいのですから、ｎの一の位だけを考えればよいということで、これで１０００通りの計算から１０通りに減らすことができます。

さらに、ある数　ａ^ｂ　を　ｐ　で割った余りが周期的に繰り返すことを思い出せば、ｎ^321の指数を小さい値にすることができ、計算も現実的になりそうです。

と言うことで、ｎ＝１０ｍ＋ｒ　（ｍ≧０、０≦ｒ≦９、ｍ、ｒは整数）　として、ｎの一の位の数　ｒ　について、ｒ^ｋ　（とりあえずｋの範囲を１≦ｋ≦９、ｋは整数として、これで周期性が見つかると良いのですが）　を１０で割った余りの調べてみましょう。その結果を表に示します。

【10を法としたときのrのk乗の値（k＝1～9）】

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
r^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
r^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
r^5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^6	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
r^7	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
r^8	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
r^9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

▲ｒのｋ乗を１０で割った余り

この表に赤字で記した　ｒ　と　ｒ^5、　ｒ^9　は同じになっていて周期性があることが判ります。つまり、　ｒ^(4q+1)　（ｑ≧０、ｑは整数）　を１０で割った余りは等しくなるということです。

これで準備完了なので仕上げに取り掛かりましょう。

まず、３２１＝４×８０＋１　なので、ｎ^321を１０で割った余りは、ｎを１０で割った余りと等しくなります。したがって、ｎ^321-　１が１０で割り切れるのは、ｒ＝１の場合です。

そこで、ｎ＝１０ｍ＋１　（ｍ≧０、ｍは整数）　とすると、０＜ｎ≦１０００から、
０＜１０ｍ＋１≦１０００
-　１＜１０ｍ≦９９９
ー１/１０＜ｍ≦９９９/１０
より、
０≦ｍ≦９９
となり、ｎの個数は１００個となります。

最後のところを合同式で表すと、
ｎ^321-　１≡０（ｍｏｄ１０）
ｎ^321≡１（ｍｏｄ１０）
(ｎ^5)^64・ｎ≡ｎ^64・ｎ
≡ｎ^65
≡（ｎ^5）^13
≡ｎ^13
≡（ｎ^5)^2・ｎ^3
≡ｎ^2・ｎ^3
≡ｎ^5
≡ｎ（ｍｏｄ１０）
より、
ｎ≡１（ｍｏｄ１０）
したがって、
ｎ＝１０ｍ＋１　（ｍ≧０、ｍは整数）
となります。

累乗数の余りや下位桁の数を求める問題の場合、それらの解法のテクニックは、累乗数の余りが必ず循環することです。しっかり覚えておきましょう。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533