

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１９９）

2015-08-10 09:29:15

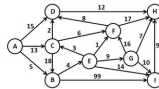
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

天気予報では、しばらく30℃前半の気温が続くようで、先週末までの猛暑に比べて少し過ごしやすくなりそうです。夏休みも半分終わりました。宿題など早めに片付けるとよいでしょう。

さて、今回は平成27年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「下図に示す有向グラフにおいて、頂点Aから各頂点までの最短経路の距離と、最短経路における直前の頂点を求め、下表に埋めよ。ただし、辺の傍の数字は距離を示す。」



▲問題図

頂点	Aからの距離	直前の頂点
B	5	A
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		

▲解答の表

です。

アルファベット順に調べていきましょう。

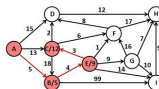
まず頂点Cです。頂点Cに到達する直前の頂点は、AまたはEです。

頂点Aの場合、最短経路は、 $A \rightarrow C$ （13）です。（経路の後の（）の数はその経路の距離を表します）

頂点Eの場合、頂点Eに到達する直前の頂点はBで、頂点Bを経由する最短経路と頂点Eまでの最短経路は $A \rightarrow B \rightarrow E$ となります。つまり、頂点AからEを経由するCまでの最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C$ （12）です。

以上から、頂点AからCまでの最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C$ で、そのとき頂点Aからの距離は12、直前の頂点はEになります。

これで、図1のように、頂点（A）、（B）、C、Eの最短経路が判りました。



▲図1．頂点（A）、（B）、C、Eの最短経路

次に頂点Dです。頂点Dに到達する直前の頂点は、A、CまたはFです。

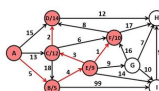
頂点Aの場合、最短経路は $A \rightarrow D$ （15）です。

頂点Cの場合、最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D$ （14）です。

頂点Fに到達する直前の頂点は、C、EまたはGで、それらの頂点を経由する最短経路と頂点Aからの距離は、それぞれ $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow F$ （18）、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$ （10）、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow F$ （34）となり、頂点Eを経由する経路が最短経路になります。つまり、頂点AからFを経由するDまでの最短経路は $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$ （18）です。

以上から、頂点AからDまでの最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D$ で、そのとき頂点Aからの距離は14、直前の頂点はCになります。

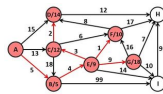
これで、図2に示すように、頂点（A）、（B）、C、D、E、Fの最短経路が判りました。



▲図2．頂点（A）、（B）、C、D、E、F

続いて頂点Gです。頂点Gに到達する直前の頂点はEだけなので、最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G$ で、そのとき頂点Aからの距離は18、直前の頂点はEになります。

これで、図3に示すように、頂点(A)、(B)、C、D、E、F、Gの最短経路が判りました。



▲図3．頂点(A)、(B)、C、D、E、F、Gの最短経路

続いて頂点Hです。頂点Hに到達する直前の頂点は、D、F、GまたはIです。

頂点Dの場合、最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow H$ (26) です。

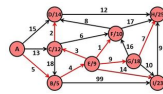
頂点Fの場合、最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow H$ (27) です。

頂点Gの場合、最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H$ (25) です。

頂点Iに到達する直前の頂点は、B、EまたはGで、それらの頂点を經由する最短経路と頂点Aからの距離は、それぞれ $A \rightarrow B \rightarrow I$ (104)、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow I$ (23)、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow I$ (28) となり、頂点Eを經由する経路が最短経路になります。つまり、頂点AからIを經由するHまでの最短経路は $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow H$ (32) です。

以上から、頂点AからHまでの最短経路は、 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H$ で、そのとき頂点Aからの距離は25、直前の頂点はGになります。

これで、図4に示すように、頂点Aから各頂点までの最短経路と距離が判りました。



▲図4．頂点Aから各頂点までの最短経路

これをまとめると、

頂点B: $A \rightarrow B$ (5)

頂点C: $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C$ (12)

頂点D: $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D$ (14)

頂点E: $A \rightarrow B \rightarrow E$ (9)

頂点F: $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$ (10)

頂点G: $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G$ (18)

頂点H: $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H$ (25)

頂点I: $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow I$ (23)

となり、解答の表を埋めたものを表1に示します。

頂点	Aからの距離	直前の頂点
B	5	A
C	12	E
D	14	C
E	9	B
F	10	E
G	18	E
H	25	G
I	23	E

▲表1．解答の表を埋めました

頂点Aからの最短経路が決まった頂点を利用して、逐次、最短経路を決めていく方法が簡単です。