

中学生でも解ける東大大学院入試問題（８５）

2015-01-12 11:39:53

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

強い風で外は寒いですが気温は8℃なので室内はそれほど寒くありません。

昨夜のNHK大河ドラマ「花燃ゆ」も面白かったです。商店が並ぶ道を杉家親子が歩いていましたが、現在の田町辺りでしょうか。（田町は萩市の商店街です）低い視聴率からのスタートでしたが、これから上がっていくと良いですね。

さて、今回は平成26年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「ある町で、ガソリンスタンドA店とB店が競合している。販売されているガソリンは1種類だけで、その仕入れ価格は60【円/L】である。まず、A店がガソリンをxA【L】仕入れ、B店はxA【L】を知った後にB店の利益を最大化するようにガソリンをxB【L】仕入れる。ガソリン販売価格P【円/L】は、以下の関係式によって決められ、仕入れたガソリンは全て売れるとする。

$$P = 200 - (xA + xB) / 1000 \quad (xA + xB \leq 140000) \\ 60 \quad (xA + xB > 140000)$$

A店の利益を最大化するxAを求めよ。」
です。

何を言っているのか判り難い問題かもしれませんが、そのようなときには、具体的に数字を入れてみて問題の意味を考えてみましょう。

そこで、xB = 0 としてみると、A店の利益は、売り上げ（販売価格×販売量xA）- 仕入れ（仕入れ価格60円×xA）なので、

$$\begin{aligned} \text{A店の利益} &= (200 - xA/1000) \cdot xA - 60 \cdot xA \\ &= 1/1000 \cdot xA^2 + 140 \cdot xA \\ &= 1/1000 \cdot (xA^2 - 140000 \cdot xA) \\ &= 1/1000 \cdot (xA - 70000)^2 - 70000^2 \\ &= 1/1000 \cdot (xA - 70000)^2 + 4900000 \end{aligned}$$

となり、xA = 70000【L】のとき、利益が最大になって、それは4900000【円】となります。（xA^2はxAの2乗を表します）

ところが、A店が70000【L】仕入れると、B店は利益の最大化を図ってxB【L】仕入れます。すると、販売価格が下がり、A店の利益が減ることになります。

つまり、この問題は、B店の仕入れるガソリンの量を見越して、A店はどれだけのガソリンを仕入れたらよいかという問題です。

それでは初めに、A店がxA仕入れたとき、B店の利益が最大になるxBを調べます。

$$\begin{aligned} \text{B店の利益} &= (200 - (xA + xB) / 1000) \cdot xB - 60 \cdot xB \\ &= 1/1000 \cdot xB^2 + (140 - xA/1000) \cdot xB \\ &= 1/1000 \cdot (xB^2 - (140000 - xA) \cdot xB) \\ &= 1/1000 \cdot (xB - (140000 - xA) / 2)^2 \\ &\quad - ((140000 - xA) / 2)^2 \end{aligned}$$

なので、xB = (140000 - xA) / 2 のとき、利益が最大になります。

つまり、A店が仕入れたxAに対して、B店はxB = (140000 - xA) / 2 を仕入れて利益の最大化を図ります。

次に、この場合のA店の利益を調べましょう。

$$\begin{aligned} \text{A店がxA、B店がxB} &= (140000 - xA) / 2 \text{ を仕入れた場合のA店の利益は、} \\ \text{A店の利益} &= (200 - (xA + (140000 - xA) / 2) / 1000) \cdot xA - 60 \cdot xA \\ &= (200 - (140000 + xA) / 2000) \cdot xA - 60 \cdot xA \\ &= (130 - xA/2000) \cdot xA - 60 \cdot xA \\ &= 1/2000 \cdot xA^2 + 70 \cdot xA \\ &= 1/2000 \cdot (xA^2 - 140000 \cdot xA) \\ &= 1/2000 \cdot (xA - 70000)^2 - 70000^2 \\ &= 1/2000 \cdot (xA - 70000)^2 + 2450000 \end{aligned}$$

となり、xA = 70000のとき、最大利益2450000となります。

以上より、A店の利益を最大化するxAは、70000【L】となります。

このような問題のように問題の意味が掴み難いときには、簡単な具体例を考えてみると解答の手掛かりを得ることができるとあるので、是非、実践してみてください。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533