

中学生でも解ける東大大学院入試問題（193）

2015-08-04 09:39:22

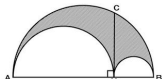
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

東京は5日間連続の猛暑日になるようです。熱中症に気をつけて過ごしましょう。受験生の皆さんは、涼しいところでしっかり勉強してください。

さて、今回は平成27年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「下図のように3つの半円がある。ABに垂直な線分CHの長さが4cmのとき、斜線の部分の面積を求めよ。ただし、円周率を $\pi$ とする。」

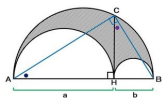


▲問題図

です。

一見して、直径に対する円周角が直角でそれにより $\triangle ACH$ と $\triangle CBH$ が相似になることがわかりますから、簡単に解けそうです。

まず図1のように、 $AH = a$ 、 $BH = b$ とし、続いてAC、BCに補助線を引きます。



▲図1. AC、BCに補助線を引きます

$$\begin{aligned} \text{ここで}\triangle ACH\text{と}\triangle CBH\text{において、} \\ \angle CAH = 180^\circ - \angle AHC - \angle ACH \\ = 180^\circ - 90^\circ - \angle ACH \\ = 90^\circ - \angle ACH \end{aligned} \quad (1)$$

です。

$$\begin{aligned} \text{一方、}\angle ACB = 90^\circ\text{なので、} \\ \angle BCH = \angle ACB - \angle ACH \\ = 90^\circ - \angle ACH \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{となり、(1)(2)から} \\ \angle CAH = \angle BCH \end{aligned} \quad (3)$$

です。

$$\begin{aligned} \text{また、} \\ \angle AHC = \angle CHB = 90^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

です。

したがって、(3)(4)から2組の角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle ACH \sim \triangle CBH$$

となり、このとき相似三角形の対応する辺の比は等しいので、

$$AH : HC = CH : HB$$

が成り立ち、 $AH = a$ 、 $HC = CH = 4$  (cm)、 $HB = b$ を代入すると、

$$\begin{aligned} a : 4 &= 4 : b \\ ab &= 16 \end{aligned} \quad (5)$$

となります。

一方、求める面積をSとすると、

$$S = (\text{ABを直径とする円の面積の}1/2) - (\text{AHを直径とする円の面積の}1/2) - (\text{BHを直径とする円の面積の}1/2)$$

なので、

$$\begin{aligned} S &= \left( \frac{(a+b)^2}{4} \times \pi \times \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{a^2}{4} \times \pi \times \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{b^2}{4} \times \pi \times \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \times \pi \times (a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2) \\ &= \frac{1}{4} \times \pi \times ab \end{aligned} \quad (6)$$

です。

最後に、(5)と(6)から、

$$S = \frac{1}{4} \times \pi \times 16$$

$$= 4\pi$$

で、答えは  $4\pi$  (平方センチメートル) です。

判りやすい問題でした。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校  
http://caitakiyama.jimdo.com/  
TEL 042-472-5533