中学生でも解ける東大大学院入試問題（１４７）

2015-03-22 11:05:38

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れて良い天気になりました。近所の滝山名店会では毎週日曜日に朝市をやっていて、好天のおかげもあってか賑やかでした。

さて、今回は平成２３年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「１回３００円で引けるくじ引きがある。くじには１から４のいずれかの番号が書かれていて、４種類の景品のうち、番号に対応する景品と交換することができる。くじを引き続けて、４種類全ての景品を手に入れるまでにかかる費用の期待値を求めよ。ただし、くじは１から４の番号が等確率で出るものとし、これはくじを引き続けても変わらないものとする。」
です。

４種類全ての景品を手に入れるのに必要なくじを引く回数を求めて、それに１回のくじ引きの代金３００円を掛ければ、それにかかる費用の期待値を求めることができます。

ここで、ｎ種類の景品を手に入れるのに必要なくじを引く回数の期待値Ｅ（ｎ）が、
Ｅ（ｎ）＝ｎ（１＋１/2＋１/３＋・・・＋１/ｎ）　　　　　　（１）
であることを知っていれば、（１）にｎ＝４を代入し、
Ｅ（４）＝４・（１＋１/2＋１/３＋１/４）
　　　　＝２５/３
となり、これにくじを引く代金３００円を掛ければ、４種類全ての景品を手に入れるまでにかかる費用の期待値を求めることができて、それをＥとすると、
Ｅ＝２５/３×３００
　＝２５００（円）
となり、これが答えです。

ここで使った（１）が成立することを証明するには、期待値の線形性（和の期待値は期待値の和）を使うのが一般的です。

まず、Ｘを全ての景品を手に入れるために引かなければならないくじの回数、Ｘiを新たな景品を手に入れるまでに引かなくてはならないくじの回数とすると、
Ｘ＝Ｘ1＋Ｘ2＋・・・・＋Ｘn
となり、その期待値Ｅ［Ｘ］は、
Ｅ［Ｘ］＝Ｅ［Ｘ1＋Ｘ2＋・・・＋Ｘn］
　　　　＝Ｅ［Ｘ1］＋Ｅ［Ｘ2］＋・・・＋Ｅ［Ｘn］　　←（期待値の線形性）
となります。

ここで今、（ｉ－１）種類の景品を手に入れているとして、新しい景品を手に入れる確率ｐiは、
ｐi＝（ｎ－（ｉ－１））/ｎ
　＝（ｎ－ｉ＋１）/ｎ
となり、Ｅ［Ｘi］はｐiの逆数なので、
Ｅ［Ｘi］＝ｎ/（ｎ－i＋１）
となります。

したがって、
Ｅ［Ｘ］＝Ｅ［Ｘ1］＋Ｅ［Ｘ2］＋Ｅ［Ｘ3］＋・・・Ｅ［Ｘn-1］＋Ｅ［Ｘn］
　　　　＝ｎ/ｎ＋ｎ/（ｎ－１）＋ｎ/（ｎ－２）＋・・・＋ｎ/２＋ｎ/１
　　　　＝ｎ（１/１＋１/２＋・・・＋１/（ｎ－２）＋１/（ｎ－１）＋１/ｎ）
と（１）を導くことができました。

また、期待値の漸化式を立式して証明する方法もあります。

まず、ｉ種類の景品を手に入れている状態から、全ての景品を手に入れるまでに引かなければならないくじの回数の期待値をE(ｉ）とします。

つまり、Ｅ（０）が景品を１つも手に入れていない状態からｎ個の景品を手に入れるまでに引かなければならないくじの回数になり、これが求める期待値になります。

そこで、ｉ種類の景品を手に入れている状態で、１回くじを引いたとき新しい景品を手に入れる確率を考えると、それは（ｎ－ｉ）/ｎになります。

つまり、新しい景品を手に入れるまでに引かなければならないくじの回数の期待値は、ｎ/（ｎ－ｉ）になるので、
Ｅ（ｉ＋１）＝Ｅ（ｉ）－ｎ/（ｎ－ｉ）　　　　　　（２）
が成り立ちます。ここで、Ｅ（ｎ）＝０です。

（２）から

$$
\begin{aligned}
E(0) - E(1) &= n/n \\
E(1) - E(2) &= n/(n-1) \\
E(2) - E(3) &= n/(n-2) \\
&\cdots\cdots \\
E(n-2) - E(n-1) &= n/2 \\
E(n-1) - E(n) &= n/1
\end{aligned}
$$

を得ます。

そこで、これらの左辺、右辺を足し合わせ、$E(n)=0$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
E(0) &= n/n + n/(n-1) + n/(n-2) + \cdots + n/1 \\
&= n\,(1/n + 1/(n-1) + 1/(n-2) + \cdots + n/2 + n/1) \\
&= n\,(1 + 1/2 + \cdots + 1/(n-2) + 1/(n-1) + 1/n)
\end{aligned}
$$

となり、（１）を得ることができます。

（１）は調和数列と言って綺麗で覚えやすい式なので、等確率で当たる n 種類の景品を全て手に入れるのに必要なくじを引く回数が（１）になることを覚えておくと役に立つかも知れません。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533