中学生でも解ける東大大学院入試問題（１５）

2014-10-12 12:03:55

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

ＴＶで解説していましたが、台風１９号は、米軍の合同台風警報センターによる５段階の分類で風速６７ｍ以上の最強ランクで、スーパー台風ということです。東京には火曜日の午前に接近するようなので十分気を付けましょう。

さて、今回は平成２３年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題です。

問題は、
「ある自然数を２で割れば１余り、３で割れば２余り、４で割れば３余り、５で割れば４余るものとする。このような数のうち、最小のものを求めよ」
です。

小学５年で勉強する最小公倍数を見つける方法を利用すれば、簡単に解くことができます。

つまり、２で割れば１余る数、３で割れば２余る数、４で割れば３余る数、５で割れば４余る数を書き出していき、すべてに共通するものを見つければＯＫです。

このとき、初めに５で割って４余る数を書き出して、それらの数から４で割って３余る数を選び、次に３で割って２余る数、２で割って１余る数と篩に掛けていくと少しは手間が省けます。

では実際にやってみると、５で割って４余る数は、
４、９、１４、１９、２４、２９、３４、３９、４４、４９、５４、５９、６４、・・・
です。（答えが５９と知っているので、これだけ書きました）

このなかで４で割って３余る数は、
１９、３９、５９、・・・
です。

さらに、このなかで３で割って２余る数は、
５９、・・・

最後に２で割って１余る数は、（実は４で割って３余る数は、２で割って１余る数です）
５９、・・・
となり、答えは５９と判りました。簡単ですね。

ところが、問題を少し変えると上記の解法では手に負えなくなります。例えば、問題文の「このような数のうち、最小のものを求めよ」を「このような数のうち、小さいものから２番目（または、ｎ番目）のものを求めよ」とすると、多くの数を調べなければなりません。

そこで便利なのが合同式です。

合同式は、ａ≡ｂ（ｍｏｄｐ）と表記され、ａをｐで割った余りとｂをｐで割った余りが等しいことを表します。

この合同式の演算では、私たちが慣れ親しんでいる四則演算に相当するものが成り立っています。それらをまとめると、

ａ≡ｂ（ｍｏｄｐ）、ｃ≡ｄ（ｍｏｄｐ）のとき、
加減法:　ａ±ｂ≡ｃ±ｄ（ｍｏｄｐ）
乗法　:　ａｃ≡ｂｄ（ｍｏｄｐ）
除法　:　ｋａ≡ｋｂ（ｍｏｄｐ）⇔ａ≡ｂ（ｍｏｄｐ）（但し、ｋとｐは互いに素）
や、
ｋが整数のとき、
移項　:　ａ＋ｋ≡ｂ（ｍｏｄｐ）⇔ａ≡ｂ－ｋ（ｍｏｄｐ）
　　　　ａ－ｋ≡ｂ（ｍｏｄｐ）⇔ａ≡ｂ＋ｋ（ｍｏｄｐ）
などです。

この合同式の演算規則を使って問題を解いてみましょう。

求める自然数をＮとすると、それぞれの条件は以下のようになります。
Ｎを２で割って１余る→Ｎ≡１（ｍｏｄ２）　　（１）
Ｎを３で割って２余る→Ｎ≡２（ｍｏｄ３）　　（２）
Ｎを４で割って３余る→Ｎ≡３（ｍｏｄ４）　　（３）
Ｎを５で割って４余る→Ｎ≡４（ｍｏｄ５）　　（４）

ここで、（１）の場合、（３）が成り立ちますから、（２）（３）（４）からＮを求めます。

まず、（２）から、
Ｎ＝３ｓ＋２　（ｓは整数）　　（５）

です。

（５）を（３）に代入すると、
３ｓ＋２≡３（ｍｏｄ４）

左辺の２を移項して、
３ｓ≡１（ｍｏｄ４）

両辺を３倍して、
９ｓ≡３（ｍｏｄ４）　　　　　　（６）

左辺＝４ｓ＋４ｓ＋ｓ
で、４ｓ≡０（ｍｏｄ４）なので、（６）は、
ｓ≡３（ｍｏｄ４）

これから
ｓ＝４ｔ＋３　（ｔは整数）
となり、これを（５）に代入すると、
Ｎ＝３（４ｔ＋３）＋２
　＝１２ｔ＋１１　　　　　　　（７）

続いて、（７）を（４）に代入すると、
１２ｔ＋１１≡４（ｍｏｄ５）　　（８）

左辺＝５ｔ＋５ｔ＋２ｔ＋５＋５＋１
で、５ｔ≡０（ｍｏｄ５）、５≡０（ｍｏｄ５）なので、（８）は、
２ｔ＋１≡４（ｍｏｄ５）

左辺の１を移項して、
２ｔ≡３（ｍｏｄ５）

両辺を３倍して、
６ｔ≡９（ｍｏｄ５）　　　　　　（９）

左辺＝５ｔ＋ｔ、右辺＝５＋４　なので、（９）は、
ｔ≡４（ｍｏｄ５）

これから、
ｔ＝５ｕ＋４　　（ｕは整数）　　（１０）

（１０）を（７）に代入して、
Ｎ＝１２（５ｕ＋４）＋１１
　＝６０ｕ＋５９　　　　　　　（１１）
となります。

（１１）に　ｕ＝０を代入すると、Ｎ＝５９になり、これは各条件に合う数を書き出して求めた答えと一致します。ｕ＝１の場合は、Ｎ＝１１９で、これは条件を満たす２番目の自然数になります。つまり、ｎ番目の自然数は、
Ｎ＝６０ｎ＋５９
と簡単に求めることができました。

このように合同式は便利なので、いろいろな場面で使ってみて、その計算規則をマスターすると強力な武器になると思います。

[学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533