中学生でも解ける東大大学院入試問題（５５）

2014-12-06 12:48:50

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

気温が７℃とかなり寒くなりました。明日から少しずつ気温は上がるようですが、寒い日が続きます。体調に気を付けて勉強してください。

さて、今回は平成１８年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「一辺の長さが１の正四面体に内接する球の半径を求めよ。」
です。

シンプルな問題です。まず、見取り図を描きましょう。正四面体は、４つの面がそれぞれ合同な正三角形である錐体で、その内部に球が内接しているので、図１のようになります。

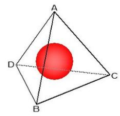

図１．見取り図

立体図形の問題は、都合の良い平面を選び、平面図形の問題に変換するのが基本的な解法テクニックです。この問題では、内接する球の半径を求めるのですから、球の中心を通る平面を考ええます。と言うことで、ＢＤの中点をＭとして、補助線ＡＭ、ＣＭを引きましょう。

そこで、正四面体を面ＡＢＤの方向から見てみます。すると図２のように、正三角形ＡＢＤと内接する球を面ＡＢＤに投影した円は、ＡＭを対称軸とした図形になり、正四面体と内接する球の接点ＮはＡＭ上にあります。

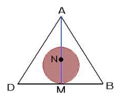

図２．面ＡＢＤの方向から見たところ

正四面体を面ＢＣＤから見た場合も同様で、正四面体と内接する球の接点ＨはＣＭ上にあります。

さらに、四面体に内接する球の中心Ｏは、Ｎを通る面ＡＢＤの法線およびＨを通る面ＢＣＤの法線上にあるので、ＯはＣＮ上かつＡＨ上にあることになります。

以上を図３に示します。

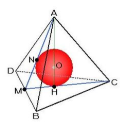

図３．Ｏ、Ｎ、Ｈの位置関係

あとは平面ＡＣＭを考えればＯＫで、立体図形の問題を平面図形の問題に変換することができました。

まず、ＡＭ（＝ＣＭ）の長さを求めておきましょう。

面ＡＢＤは一辺の長さが１の正三角形なので、図４のようにＡＭの長さは、√３/２になります。（中３の今頃勉強する大切な事柄です。忘れていた人は、直ぐに復習しましょう）

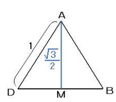

図４．ＡＭ（＝ＣＭ）の長さ

続いて、図５に面ＡＣＭを示します。ここまでくれば、あとは簡単です。

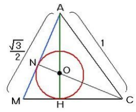

図５．面ＡＣＭ

△ＡＨＭと△ＡＨＣはどちらも直角三角形なので三平方の定理が使えます。

まず、△ＡＨＭに三平方の定理を使うと、
ＡＭ^2＝ＡＨ^2＋ＨＭ^2 （ＡＭ^2はＡＭの２乗を表します）
で、ＡＭ＝√３/２なので、
３/４＝ＡＨ^2＋ＨＭ^2 （１）
です。

次に、△ＡＨＣに三平方の定理を使うと、
ＡＣ^2＝ＡＨ^2＋ＨＣ^2
で、ＡＣ＝１、ＨＣ＝ＭＣ－ＨＭ＝√３/２－ＨＭ　なので、
１＝ＡＨ^2＋（√３/２－ＨＭ）^2
　＝ＡＨ^2＋３/４－√３ＨＭ＋ＨＭ^2
これを整理して、
１/４＝ＡＨ^2－√３ＨＭ＋ＨＭ^2 （２）
となります。

（１）と（２）の両辺を引くと
１/２＝√３ＨＭ
より、
ＨＭ＝１/２√３
　　＝√３/６
です。

これを（１）に代入してＡＨを計算すると、
３/４＝ＡＨ^2＋３/３６
ＡＨ^2＝３/４－１/１２
　　　＝８/１２
　　　＝２/３
より、
ＡＨ＝√（２/３）
　　＝√６/３
となります。

ここで、△ＣＭＮと△ＣＯＨに着目すると、△ＣＭＮ∽△ＣＯＨなので、
ＣＭ：ＮＭ＝ＣＯ：ＨＯ
が成り立ちます。

そこで、ＣＭ＝√３/２、ＮＭ＝ＨＭ＝√３/６、ＣＮ＝ＡＨ＝√６/３、
ＣＯ＝ＣＮ－ＯＮ＝ＣＮ－ＨＯ　を代入すると、
√３/２：√３/６＝（√６/３－ＨＯ）：ＨＯ
を得ます。

これを計算しすると、
√３/２・ＨＯ＝√３/６（√６/３－ＨＯ）
ＨＯ＝√６/９－１/３・ＨＯ
４/３・ＨＯ＝√６/９
ＨＯ＝√６/１２
となり、内接する球の半径を√６/１２　と求めることができました。

この問題は立体図形問題の解法パターンを勉強するにはちょうど良いものなので、別の解法含めていろいろ考えてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533