

中学生でも解ける東大大学院入試問題（８９）

2015-01-16 12:06:37

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れの良い天気になりました。気温も 10°C と暖かくなり、週末も同じような天気のように、明日のセンター試験受験生にとっては何よりです。受験生の皆さん、頑張ってください。

さて、今回は平成 24 年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「 $4n^2 + 3m - mn = 0$ を満足する自然数 m 、 n の組をすべて求めよ。」
です。（ n^2 は n の 2 乗を表します）

整数の不定方程式です。その解法のポイントは、解の候補を絞り込んで、あとは虱潰しに調べることです。

早速、解の候補を絞り込みましょう。

まず、与式を次のように変形します。

$$m(n-3) = 4n^2 \quad (1)$$

(1) の右辺は 4 以上の整数で、 $m \geq 1$ ですから、 $n-3 > 0$ です。そこで (1) の両辺を $n-3$ で割って、
 $m = 4n^2 / (n-3) \quad (2)$
となります。

ここで、 $k = n-3$ ($k \geq 1$ 、整数) とおいて、(2) に代入すると、
 $m = 4(k+3)^2 / k$
 $= 4(k^2 + 6k + 9) / k$
 $= 4k + 24 + 36/k \quad (3)$
です。

(3) を眺めると、左辺の m は自然数、右辺の第 1、2 項目も自然数なので、第 3 項目の $36/k$ も自然数になります。

つまり、 k は 36 の約数ということで、 k の候補は、1、2、3、4、6、9、12、18、36 になり、したがって、 n の候補は、4、5、6、7、9、12、15、21、39 となります。

あとは虱潰しに調べていくだけで、

$$n = 4 \rightarrow m = 64$$

$$n = 5 \rightarrow m = 50$$

$$n = 6 \rightarrow m = 48$$

$$n = 7 \rightarrow m = 49$$

$$n = 9 \rightarrow m = 54$$

$$n = 12 \rightarrow m = 64$$

$$n = 15 \rightarrow m = 75$$

$$n = 21 \rightarrow m = 98$$

$$n = 39 \rightarrow m = 169$$

となるので、 m 、 n の組合せを (m, n) とすると、

(48, 6) (49, 7) (50, 5) (54, 11) (64, 4) (64, 12) (75, 15) (98, 21)
(169, 39)

が答えとなります。

判別式としては、与式を n の二次方程式と考えて、その判別式が 0 または平方数になることが n が自然数であるための必要条件であること利用する方法があります。

判別式を D とし、これを a^2 とすると、

$$D = m^2 - 48m$$

$$= a^2 \quad (a \geq 0, \text{整数})$$

です。

これを变形して、

$$(m-24)^2 - 24^2 = a^2$$

$$(m-24)^2 - a^2 = 24^2$$

$$(m-24+a)(m-24-a) = 2^6 \cdot 3^2$$

とします。

ここで、 $m-24+a \geq m-24-a$ に注意して、 $m-24+a$ と $m-24-a$ の

組合せ $(m-24+a, m-24-a)$ を調べると、

(576, 1) (288, 2) (192, 3) (144, 4) (96, 6) (72, 8) (64, 9) (48, 12)
(36, 16) (32, 18) (24, 24)

になります。

これらの場合について、mを求めると、
m = 169、98、75、64、54、50、49、48
となります。(mが自然数にならないものは省略しました)

これらのmを解の公式

$$n = (m \pm \sqrt{m^2 - 48m}) / 8$$

に代入してnを求めると、

$$m = 169 \rightarrow n = (169 \pm 143) / 8 = 39, (13/4) \quad [(\quad) \text{は不適な解です}]$$

$$m = 98 \rightarrow n = (98 \pm 70) / 8 = 21, (7/2)$$

$$m = 75 \rightarrow n = (75 \pm 45) / 8 = 15, (15/4)$$

$$m = 64 \rightarrow n = (64 \pm 32) / 8 = 12, 4$$

$$m = 54 \rightarrow n = (54 \pm 18) / 8 = 9, (9/2)$$

$$m = 50 \rightarrow n = (50 \pm 10) / 8 = (15/2), 5$$

$$m = 49 \rightarrow n = (49 \pm 7) / 8 = 7, (21/4)$$

$$m = 48 \rightarrow n = (48 \pm 0) / 8 = 6$$

となり、m、nの組合せ(m, n)は、

(169, 39) (98, 21) (75, 15) (64, 12) (64, 4) (54, 9) (50, 5) (49, 7)
(48, 6)

が答えになり、前の答えと一致しました。

整数の不定方程式の問題では解の絞り込み方法が一通りではないので、いろいろ試して多くの解法パターンを仕込んでおきましょう。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533