中学生でも解ける東大大学院入試問題（３１のつづき）

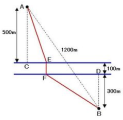
2014-11-06 13:21:35

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と同じような天気になりました。明日は晴れ間が見られるようです、その後はぱっとしない天気が続くようです。

さて、昨日は川に橋を架けて最短経路を求める問題を取り上げましたが、今日はその続きです。

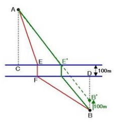
昨日の問題は、
「図に示すように、Ａ地点とＢ地点の間に幅１００ｍの川がある。Ａ地点からＣ地点までの距離は５００ｍ、Ｂ地点からＤ地点までの距離は３００ｍ、Ａ地点とＢ地点の間の距離は１２００ｍである。この川に直交する橋ＥＦを、経路ＡＥＦＢが最短となるようにつくりたい。Ｃ地点からＥ地点までの距離を求めよ。」



▲問題図

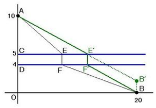
でした。

この問題のポイントは、図１のように川幅の長さをＢ地点から川（Ｄ地点）に近づけた点をＢ’として、Ａ地点とＢ’地点を結んだ直線と川のＡ地点側の境界線とが交わる点を求めると、そこがＥ地点になり、Ａ地点からＢ地点の最短経路はＡＥＦＢとなるということです。



▲図１.昨日の問題の解法

そこで今回は、この問題の類題で川幅が変化した場合を調べてみたいと思います。計算しやすいように図２のように各地点の位置を変更しました。



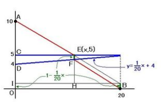
▲図２.計算しやすい条件に変更した図

まず、川幅が１と一定の場合のＥ地点を求めてみます。

図３に示すように川幅の長さ１をＢ地点から川に近づけた点をＢ’とすると、Ａ地点とＢ’地点を結んだ直線と川のＡ地点側の境界線とが交わる点がＥ地点になります。そして、△ＡＢ’Ｉと△ＥＢ’Ｈが相似であることから、
ＡＩ：Ｂ’Ｉ＝ＥＨ：Ｂ’Ｈ　　（１）
となります。

ここで、ＡＩ＝９、Ｂ’Ｉ＝２０、ＥＨ＝４を（１）に代入して、
９：２０＝４：Ｂ’Ｈ
Ｂ’Ｈ＝８０/9
となり、ＣＥ＝２０－Ｂ’Ｈなので、
ＣＥ＝２０－８０/9
　　＝１００/9
　　≒１１．１
となります。

次は、川幅が変化した場合を調べます。図３に示すように川幅がＯ地点の上側で１、Ｂ地点の上側で０とし、川の下側の境界線が直線的に変化するものとしました。



▲図３．川幅が変化した場合

図３で、Ｏを原点、ＯＢをｘ軸、ＯＡをｙ軸とすると、川の下側の境界線は、
ｙ＝１/２０・ｘ＋４
と表すことができます。

一方、Ｅ地点の座標を（ｘ、４）とすると、ＥＦの長さＬは、
Ｌ＝５－（１/２０・ｘ＋４）
　＝１－１/２０・ｘ
となります。

そして、Ｂ地点からＬだけ上側にある点Ｂ’をとると、△ＡＢ’Ｉ∽△ＥＢ’Ｈなので、（１）が成り立ちます。

ここで、
ＡＩ＝１０－Ｌ
　　＝１０－（１－１/２０・ｘ）
　　＝９＋１/２０・ｘ
Ｂ’Ｉ＝２０
ＥＨ＝５－Ｌ
　　＝５－（１－１/２０・ｘ）
　　＝４＋１/２０・ｘ
Ｂ’Ｈ＝２０－ｘ
を（１）に代入して、
（９＋１/２０・ｘ）：２０＝（４＋１/２０・ｘ）：（２０－ｘ）
となり、これを整理すると、
ｘ^2＋１８０ｘ－２０００＝０
とｘの二次方程式を得ることができました。

これを解の公式で解いて、ｘ＞０なので、
ｘ＝１０√１０１－９０
　≒１０．５
なり、
ＣＥ≒２０－１０．５
　　＝９．５
となりました。

前の川幅が一定の場合と比べて、Ｅ地点は１．６ほど左に移ることになります。（これは、ＯＢの距離を１００％とした場合、８％になります）

さらに、川幅の変化を図３と反対にした場合、すなわち、Ｏの上側での川幅が０、Ｂの上側での川幅を１とした場合、川の下側の境界線は、
ｙ＝－１/２０・ｘ＋５
となり、前と同様な計算によって、
ＣＥ≒１０．６
となります。

以上のようにいろいろ条件を変えて計算してみると面白いので時間のあるときにやってみたいと思います。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533