

中学生でも解ける東大大学院入試問題（182）

2015-04-28 12:09:49

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

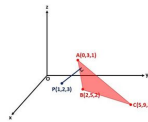
今の東久留米の気温は25℃ですが、予想では27℃まで上がるようです。天気図を見ると大陸に低気圧があつて、明後日に曇りになるようですが、その後は良い天気が続くようです。

さて、今回は平成16年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「直交座標系に3点A(0, 3, 1)、B(2, 5, 2)、C(5, 9, 3)を通る平面がある。点P(1, 2, 3)と平面間の距離を求めよ。」
です。

問題を図に表すと、図1のようになり、点Pから赤色の領域を含む平面上に下ろした垂線の足までの長さを求めるということです。



▲図1．問題を図に表しました

平面と点の距離Lは、平面の式を $ax + by + cz + d = 0$ 、点の座標を (x_0, y_0, z_0) とすると、
 $L = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
と簡単に計算できます。（大半の受験者はこの公式を使ったと思います）

また、平面上の独立な2つのベクトルの外積から平面に垂直なベクトルを求めて、それを使う方法もあります。

ここでは、点Pと平面上の点Hとの距離が最小になるとき、線分PHが平面に垂直に交わることを使って求めてみましょう。

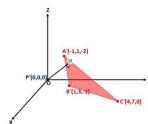
まず、後々の計算を簡単にするため、点Pが原点になるように、xyz座標系を平行移動してXYZ座標系に変換します。実際には、点Pの座標値、つまり、 $x = 1$ 、 $y = 2$ 、 $z = 3$ を他の点のそれから引くだけで、

$A \rightarrow A'(-1, 1, -2)$

$B \rightarrow B'(1, 3, -1)$

$C \rightarrow C'(4, 7, 0)$

となり、それを図2に示します。



▲図2．点Pを原点に移動しました

そこで、A'、B'、C'を通る平面を

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

とすると、A'、B'、C'が(1)上にあることから、

$$-a + b - 2c + d = 0$$

$$a + 3b - c + d = 0$$

$$4a + 7d + d = 0$$

が成り立ちます。

これらを解くと、

$$b = -a/2$$

$$c = -a$$

$$d = -a/2$$

で、これらを(1)に代入して整理すると、A'、B'、C'を通る平面の式は、

$$2x - y - 2z - 1 = 0 \quad (2)$$

です。

ここで、平面(2)上の点Qを $(s, t, s - t/2 - 1/2)$ とします。すると、PQ(OQ)の距離Lは、三平方の定理から、

$$L^2 = s^2 + t^2 + (s - t/2 - 1/2)^2$$

$$= 2(s - (1+t)/4)^2 + 9/8 \cdot (t + 1/9)^2 + 1/9$$

となります。（計算は長くなりますが、 s と t について平方完成するだけです）

つまり、 L が最小になるのは、 $t = -1/9$ 、 $s = 2/9$ のときで、そのとき、 $L^2 = 1/9$ になります。

一方、 L が最小のとき、 Q と H は一致するので、 $PH = \sqrt{1/9} = 1/3$ となり、これが答えです。

ここで、最初に挙げた平面と点との距離を計算する公式を使って検算してみましょう。

平面の式は、 $2x - y - 2z - 1 = 0$ で、点は $(0, 0, 0)$ なので、
$$\frac{|2 \cdot 0 - 0 - 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = 1/3$$
と一致しました。

途中の座標系を平行移動させるテクニックは、平面図形でも使えるので覚えておくと良いでしょう。次回は本問と類題の四角錐の体積を求める問題を取り上げます。

問題は平成 22 年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題で、
「3 次元直交座標系 x 、 y 、 z における次の 4 点を頂点とする四面体の体積を求めなさい。
 $A(0, 1, 1)$ 、 $B(1, 1, 3)$ 、 $C(4, 7, 3)$ 、 $D(3, 4, -5)$ 」
です。興味のある人は調べてみてください。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533