

中学生でも解ける東大大学院入試問題（４０）

2014-11-19 12:26:18

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝は少し風が強かったのですが、昼前にはおさまって暖くなりました。とは言っても気温は１５℃前後です。週末には２～３℃暖かくなるようです。

さて、今回は平成２０年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「ある会社がＡ、Ｂ二つの製品を一つ作る時これに必要な材料と燃料の組み合わせは下表のようになっている。

製品	材料	燃料	単価
	アルミ	プラスチック	(円)
A	1	4	1
B	5	2	1
使用可能量	100	100	575

▲表

それぞれの材料と燃料の使用可能量と製品の単価が表に示されたとおりであったとき、売り上げを最大にするようなＡ、Ｂの生産量の組み合わせは何か。」

一般的に、方程式の問題でもグラフの問題でも、求められている答えを変数とし、問題文に書かれていることや条件を立式して解くのが基本です。この問題ではＡ、Ｂの生産量を問われているので、それらをそれぞれ x 、 y と置いて立式しましょう。

まず、材料のアルミについては、Ａ、Ｂをそれぞれ１つ作るのに１および５必要で、使用可能量が１００なのですから、

$$x + 5y \leq 100 \quad (1)$$

が成り立ちます。

同様に、プラスチック、燃料についても、

$$4x + 2y \leq 100 \quad (2)$$

$$2.5x + 1.5y \leq 57.5 \quad (3)$$

が成り立ちます。

また、 x 、 y は負でない整数（多分）で、

$$x, y \geq 0 \quad (4)$$

となります。

一方、売り上げ S は、

$$S = 25000x + 10000y \quad (5)$$

となり、(1) (2) (3) (4) を満たし、(5) を最大にする x 、 y を求めればOKです。

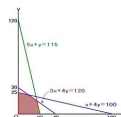
ここで、(1) (2) (3) は２元１次不等式なので、それらの不等号を等号とした直線と x 、 y 軸で囲まれた領域が、(1) (2) (3) (4) を満たす (x, y) の範囲となります。そして、その領域を通る直線(5)で切片(y 切片)が最大になるものを見つけない訳です。このとき強力な武器になるのがグラフで、それを利用すれば簡単に解くことができます。

まず、(5) の左辺の x 、 y の係数に共通する因数 5000 があるので(5) を簡単しておきましょう。両辺を 5000 で割って、 $s = S/5000$ とすると、(5) は、

$$s = 5x + 2y \quad (6)$$

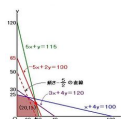
となり、 S を最大にする (x, y) を求めることは、 s を最大にする (x, y) を求めることと同じです。

それでは早速グラフを描くと図１のようになり、赤色の部分が(1) (2) (3) (4) の共通する領域です。



▲図１．(1) (2) (3) (4) の領域

次に(6)の直線を描き入れるのですが、まず(6)の傾き($-5/2$)と同じ適当な直線を描き入れます。ここでは、図２のように、(20, 0) (0, 50) を通る直線(赤色破線)を描きましたが、この直線と平行で切片が最大になる直線が(6)となります。



▲図 2 . 直線 (6) を決める

図 2 のグラフから判るように、(6) が最大になるのは、

$$3x + 4y = 120 \quad (7)$$

と

$$5x + y = 115 \quad (8)$$

との交点を通る場合です。

そこで、(7) (8) からそれらの交点を求めると、(20 , 15) になります。(x も y も整数で良かったです)

以上より、与えられた条件下で売り上げを最大にする A、B の生産量は、それぞれ 20、15 となること判りました。

グラフを描いて可視化することはとても大切で強力なテクニックです。1 次、2 次関数などの問題を解くときも面倒がらずにグラフを描くようにしましょう。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533