中学生でも解ける東大大学院入試問題（６０）

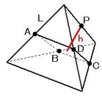
2014-12-13 12:20:26

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

近くの「はなみずき広場」で花祭りをやっていて太鼓の音が聞こえてきます。晴れていて日向は暖かいので見物する人が多くなりそうです。

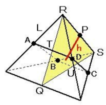
さて、今回は平成２２年東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「図に示すように、一辺の長さＬの正四面体の辺の中点を５個用いて正四角錐（Ｐ-ＡＢＣＤ）をつくる。この四角錐の底面ＡＢＣＤから頂点Ｐまでの距離ｈを、Ｌを用いて表せ。」



▲問題図

都立高校入試問題より易しいかもしれませんね。立体図形問題を解くポイントは、都合の良い切り口を見つけ、立体図形問題を平面図形問題に変換ることでです。この問題の場合、都合の良い切り口は、図１の黄色の面、△ＱＲＳしかありません。Ｐから四角形ＡＢＣＤに降ろした法線の足とＰとの線分の長さがｈですが、Ｐも法線の足も△ＱＲＳにあるので、その平面を考えればｈを求めることができます。

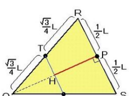


▲図１．都合の良い切り口を選ぶ

ここで、△ＱＲＳの辺の長さを求めておきましょう。ＱＲとＱＳは、一辺の長さＬの正三角形の高さなので、
$QR=QS=\sqrt{3}L/2$
で、Ｔ、ＵはそれぞれＱＲ、ＱＳの中点なので、
$TQ=TR=UQ=US=\sqrt{3}L/4$
です。

また、ＰはＲＳの中点なので、
$PR=PS=L/2$
です。

そこで、図２に△ＱＲＳを示します。



▲図２．△ＱＲＳ

△ＱＲＳは、ＱＲ＝ＱＳの二等辺三角形でＰはＲＳの中点ですから、ＱＰはＲＳの垂線になります。つまり、△ＰＱＲは直角三角形となり、三平方の定理により、
$QR^2=PR^2+PQ^2$　　　（ＱＲ^2　はＲＱの２乗を表します）
が成り立ち、$QR=\sqrt{3}L/2$、$PR=L/2$ を代入して、
$3L^2/4=L^2/4+PQ^2$
$PQ=\sqrt{2}L/2$
となります。

また、△ＱＲＰ∽△ＱＴＨでその相似比は２：１なので、
$QP:QH=QP:(QP-HP)$
$\quad=2:1$
より、
$HP=1/2\,QP$
$\quad=\sqrt{2}L/4$
で、すなわち、
$h=\sqrt{2}L/4$
が答えになります。

この問題のように都合の良い切り口が直ぐに見つかると立体図形問題も簡単です。都立高校入試の過去問などで練習すると良いでしょう。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533