中学生でも解ける東大大学院入試問題（１８７）

2015-05-03 10:29:54

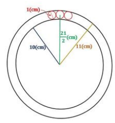
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れていますが、時々陽が陰ったりして、下り坂の天気を感じさせます。西から低気圧が近づいていて、明後日は雨が降るようです。

さて、今回は平成２４年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「半径１０ｃｍと１１ｃｍの２つの同心円の間に、直径１ｃｍの小円が重ならずに入る最大数を求める式を導きなさい。ただし、円周率はπとする。」
です。

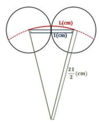
問題を図示すると、図１のようになります。



▲図１．問題を図で表しました

直径１ｃｍの小円（赤色）が、２つの同心円の間に何個入るかということです。

そこで、図２に示すように、隣り合う小円同士の関係を調べてみましょう。



▲図２．隣り合う小円同士の関係

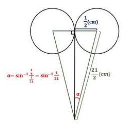
小円の中心は、同心円の中心とする半径２１/２（ｃｍ）の円周上にあります。その円周で、隣り合う小円の中心の間にできる弧（劣弧）の長さをＬとすると、隣り合う小円の中心間の長さは１（ｃｍ）なので、
Ｌ＞１　　　　　　　　　　（１）
が成り立ちます。

一方、２つの同心円の間に小円がｎ個（ｎは正の整数）入るとすると、ｎ個の小円の中心を繋いだ弧の長さはｎＬ（ｃｍ）で、これは円周以下でなければならないので、
２１/２・２・π≧ｎＬ
２１π/ｎ≧Ｌ　　　　　　（２）
となります。

そこで、（１）と（２）から、
２１π/ｎ＞１
２１π＞ｎ
となり、ｎは２１πを超えない最大の整数なので、ガウス記号を用いて、
ｎ＝［２１π］　　　　　（３）
で、これが答えになります。（問題の最大数を求める式というのがよく判らないのですが）

実際に（３）を計算すると、
ｎ＝［２１π］≦［２１・３．１４２］＝［６５．９８２］＝６５
で、２つの同心円の間に、直径１ｃｍの小円が重ならずに入る最大数は、６５個になります。

別の方法としては、図３のように、同心円の中心と２個の隣り合う小円の中心を結んでできる中心角の１/２をαとすると、小円をｎ個並べたときの中心角の大きさは、２αｎになりますが、これが２π以下であることを使う方法もあります。



▲図３．中心角の和が２π以下であることを使う方法

この方法では高校で勉強する三角関数を使います。

図３の直角三角形に着目して、
ｓｉｎα＝（1/２）/（２1/2）＝1/２１
で、
α＝ａｒｃｓｉｎ（1/２１）　　（ａｒｃｓｉｎはｓｉｎの逆関数です）
です。

したがって、
２αｎ≦２π
から、
ｎ≦π/ａｒｃｓｉｎ（1/２１）
なので、
ｎ＝［π/ａｒｃｓｉｎ（1/２１）］
となります。（出題者はこの式を想定していたのかもしれませんね）

そこで、ａｒｃｓｉｎ（1/２１）を０．０４７６３、πを３．１４２として計算すると、
ｎ＝［π/ａｒｃｓｉｎ（1/２１）］≦［３．１４２/０．０４７６３］≦［６５．９７］＝６５
となり、先程の答えと一致しました。

後の方法で使った三角関数は高校で勉強しますが、大変便利な道具なので興味のある人は調べてみて下さい。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533