中学生でも解ける東大大学院入試問題（１６３）

2015-04-07 11:13:32

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今日は近所の中学校の入学式なのですが、あいにくの雨で少し残念な気もします。とは言え、新中１生は期待に胸を膨らませていることでしょう。今日からスタートする３年間の中学校生活を元気に楽しく過ごしてください。

さて、今回は平成２０年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、
「３点（４，－１，３）、（１１，０，３）、（３，６、－５）を通る円の面積を求めよ。」
です。

前回と同じく空間図形の問題です。

まず、与えられた３点をＡ（４，－１，３）、Ｂ（１１，０，３）、Ｃ（３，６、－５）とします。

そこで、ＡＢ^2、ＢＣ^2、ＣＡ^2（距離の２乗）を計算すると、
ＡＢ^2＝（１１－４）^2＋（－１－０）^2＋（３－３）^2
　　　＝４９＋１
　　　＝５０
ＢＣ^2＝（１１－３）^2＋（０－６）^2＋（３－（－５））^2
　　　＝６４＋３６＋６４
　　　＝１６４
ＣＡ^2＝（３－４）^2＋（６－（－１））^2＋（－５－３）^2
　　　＝１＋４９＋６４
　　　＝１１４
となります。

ここで、嬉しいことに、ＡＢ^2＋ＣＡ^2＝ＢＣ^2が成り立っていて、三平方の定理から、、△ＡＢＣは∠Ａ＝９０°の直角三角形です。

一方、３点Ａ、Ｂ、Ｃは円の周上にあり、直径に対する円周角は直角なので、線分ＢＣがその円の直径になります。つまり、円の半径ｒは、
ｒ＝√ＢＣ^2/２
　＝√１６４/２
　＝√４１
で、円の面積Ｓは、
Ｓ＝πｒ^2
　＝π×（√４１）^2
　＝４１π
となり、これが答えです。

この方法では、各点間の距離の２乗を計算して、たまたま三平方の定理が成り立っているようにありますが、実はその前にベクトルの内積を計算していて、∠Ａが直角であることが判っていました。

ベクトルは高校で勉強するのですが、ベクトルＡＢ、ＡＣをそれぞれ成分で表すと、
ベクトルＡＢ＝（１１－４，０－（－１），３－３）＝（７，１，０）
ベクトルＡＣ＝（３－４，６－（－１），－５－３）＝（－１，７，－８）
となり、ベクトルＡＢとベクトルＡＣの内積は、
ベクトルＡＢ・ベクトルＡＣ＝７×（－１）＋１×７＋０×（－８）＝０
となります。

ここで、ベクトルＡＢとベクトルＡＣの内積が０になりましたが、内積が０になるということは、ベクトル同士がが直交しているということで、これを計算したことで、∠Ａが直角であると判っていたわけです。

それでは次に、∠Ａが直角であることを使わない方法を調べてみましょう。

空間での平面を表す式は、
ａｘ＋ｂｙ＋ｃｚ＋ｄ＝０　　　　　（１）
です。

ここで、３点Ａ、Ｂ、Ｃが（１）上にあるので、
　４ａ　－ｂ＋３ｃ＋ｄ＝０
１１ａ　　　＋３ｃ＋ｄ＝０
　３ａ＋６ｂ－５ｃ＋ｄ＝０
が成り立ちます。

これらから、（１）は、
４ｘ－２８ｙ－２５ｚ＝－３１　　　（２）

となります。

一方、３点を通る円の中心座標を（ｘ0，ｙ0，ｚ0）、半径をｒとすると、円の中心から３点Ａ、Ｂ、Ｃまでの距離の２乗がｒの２乗に等しいことから、
（４-ｘ0）^2＋（-１-ｙ0）^2＋（３-ｚ0）^2＝ｒ^2　　　　（３）
（１１-ｘ0）^2＋（０-ｙ0）^2＋（３-ｚ0）^2＝ｒ^2　　　　（４）
（３-ｘ0）^2＋（６-ｙ0）^2＋（-５-ｚ0）^2＝ｒ^2　　　　（５）
が成り立ちます。

さらに、（ｘ0，ｙ0，ｚ0）が平面（２）上にあることから、
４ｘ0-２８ｙ0-２５ｚ0＝-３１　　　　（６）
が成り立ちます。

そこで、（３）（４）（５）（６）の連立方程式を解くと、
ｘ0＝７
ｙ0＝３
ｚ0＝-１
ｒ＝√４１
となり、求める円の面積Ｓは、
Ｓ＝πｒ^2
　＝４１π
と計算できます。（途中の計算を省略しましたが、１次の連立方程式なので難しくありません）

初めの三平方の定理を使った方法では、高校で勉強する、空間での２点間の距離の計算を使いますが、これは三平方の定理を２回使うだけ（つまり、直方体の対角線の長さの計算）なので中学生でも理解できると思います。その後の、ベクトルや空間での平面の式については、興味のある人は調べてみて下さい。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533