

中学生でも解ける東大大学院入試問題（３１）

2014-11-05 11:55:16

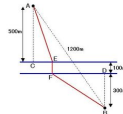
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

北風が吹いて曇り勝ちなので少し寒い日になりました。予報では明日、明後日は今日より暖かくなるようです。風邪など引かぬよう気を付けてください。

さて、今回の問題は平成２２年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題で川に橋をかけてその兩岸にある２つの地点を最短に結ぶ問題です。

問題は、

「図に示すように、Ａ地点とＢ地点の間に幅１００ｍの川がある。Ａ地点からＣ地点までの距離は５００ｍ、Ｂ地点からＤ地点までの距離は３００ｍ、Ａ地点とＢ地点の間の距離は１２００ｍである。この川に直交する橋ＥＦを、経路ＡＥＦＢが最短となるようにつくりたい。Ｃ地点からＥ地点までの距離を求めよ。」

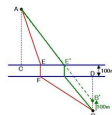


▲問題図

この問題は結構有名なもので、とんちのきいた答えには、斜めの橋を架ける（この場合、川に直交する橋とあるので△N Gです）や幅の広い橋を架ける（この場合、Ｅ地点が点だとすると△N Gですがどうなのでしょう）などがありますが、ここでは素直に橋を直線とします。

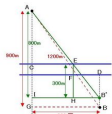
２つの点間の最短経路は直線になるのですが、障害物などの条件がある場合、その条件を満足する工夫をして直線を引きする必要があります。

この問題では、図１のようにＢ地点を川幅だけ（この場合、１００ｍ）川（Ｄ地点）に近づけ、その地点をＢ'とすると、ＡＢ'を結んだ直線と川のＡ側の境界線との交点がＥ地点となるといった具合です。



▲図１．作図によるＥ地点の求め方

それではＣ地点からＥ地点までの距離を計算しましょう。Ｂ地点をＤ地点に１００ｍ近づけたＢ'地点を含めた各地点間の距離を図２に示します。



▲図２．各地点間の距離

この図２で、△ＡＧＢに三平方の定理を適用してＧＢの距離を計算し、次に△Ｂ'ＡＩ～△Ｂ'ＥＨからＨＩ／Ｂ'Ｉを求め、先ほど計算したＧＢに乘じればＣ地点とＥ地点の距離を計算できます。

$$\begin{aligned} \text{それでは、まず、} AB &= 1200 \text{ m、} AG = 900 \text{ mから、} \\ GB^2 &= AB^2 - AG^2 \\ &= 1200^2 - 900^2 \\ &= 1440000 - 810000 \\ &= 630000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{より、} \\ GB &= 300\sqrt{7} \text{ m} \\ \text{となります。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{次に、} \triangle B'AI \sim \triangle B'EH \text{でその相似比は、} \\ EH/AI &= 300/800 \\ &= 3/8 \end{aligned}$$

です。

$$\begin{aligned} \text{つまり、} \\ HI/B'I &= (8 - 3)/8 \end{aligned}$$

$$= 5/8$$

で、これより、

$$\begin{aligned} HI &= GB \cdot HI/B'I \\ &= 300\sqrt{7} \cdot 5/8 \\ &= 375\sqrt{7}/2 \end{aligned}$$

となり、C地点からE地点までの距離は、 $375\sqrt{7}/2$ mとなります。

今日は午前中に用事があつて、あまり時間がないのでここでお仕舞いです。式を使った方法（残念ながら微分を使うので中学生では解けません）や位置によって川幅が変わる場合など紹介したかったのですがいずれまたということで。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533