

中学生でも解ける東大大学院入試問題（98）

2015-01-25 12:32:41

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

風がなく陽射しがあるので日向は暖かく過ごしやすい日になりました。しかし、明日から天気は下り坂で、週の後半は寒さが厳しくなるようです。受験生の皆さんは暖かくして頑張ってください。

さて、今回は平成24年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「 $(n+2)!$ - $n!$ が 11^6 で割り切れるような最小の自然数 n を求めよ。」
です。（ 11^6 は 11 の 6 乗を表します）

“!”（階乗）は高校で勉強する記号で、 $n!$ は、 1 から n までの掛け算、つまり、
 $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
のことです。

すると、問題のなかの式は、

$$\begin{aligned}(n+2)! - n! &= (n+2)(n+1)n! - n! \\ &= n!((n+2)(n+1) - 1) \\ &= n!(n^2 + 3n + 1)\end{aligned}$$

となり、 $n!(n^2 + 3n + 1)$ が 11^6 で割り切れるような最小の自然数 n を求めるということになります。

仮に、 $n^2 + 3n + 1$ の因数に 11 がない場合、 $n!$ が 11^6 の倍数、つまり、因数として 6 個の 11 を持つことになります。

そこでまず、 $n!$ が 11 の因数を 6 個持ち、かつ、 n が最小の自然数になる場合を調べます。

11 は素数なので、 $n!$ が因数として 11 を 6 個持つのは、 11 、 22 、 33 、 44 、 55 、 66 を因数として持つ場合で、 n が最小の自然数になるのは、 $n = 66$ の場合です。

したがって、 $n!(n^2 + 3n + 1)$ が 11^6 で割り切れる最小の自然数 n は、 $n \leq 66$ であることが判りました。

次に、 $n^2 + 3n + 1$ の因数に 11 がある場合を調べます。

まず、 $n \leq 66$ から、

$$\begin{aligned}n^2 + 3n + 1 &\leq 66^2 + 3 \cdot 66 + 1 \\ &= 4555 \\ &< 11^4\end{aligned}$$

となり、仮に、 $n^2 + 3n + 1$ に因数として 11 があつたとしても、それは最大 3 個になります。

そこで、 $n^2 + 3n + 1$ に因数として 11 が 3 個ある場合、すなわち、

$$\begin{aligned}n^2 + 3n + 1 &= m \cdot 11^3 \\ &= 1331m \quad (m \text{ は自然数})\end{aligned}\tag{1}$$

と表される場合を調べます。

この場合、 $n!$ にある因数 11 は 3 個（ 11 、 22 、 33 の 3 個）になるので、
 $34 \leq n \leq 43$ (2)

となります。

そこで、(1) (2) から、

$$1259 \leq 1331m \leq 1979$$

となり、

$$m = 1$$

となります。

これを (1) に代入すると、

$$n^2 + 3n + 1 = 1331$$

で、これを整理して、

$$n^2 + 3n - 1330 = 0 \tag{3}$$

となります。

つまり、この n の 2 次方程式が自然数の解を持てば、 $n^2 + 3n + 1$ は因数として 11 を 3 個持つことになります。

実際に (3) を解の公式を使って解くと、

$$\begin{aligned}n &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1330)}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 73}{2} \\ &= -38, 35\end{aligned}$$

で、 $n \geq 1$ なので、 $n = 35$ となります。

すなわち、 n が35のとき、 $n!$ は、11、22、33という3個の11の倍数を持ち、 $n^2 + 3n + 1$ は、 $1331 = 11^3$ と因数11を3個持つので、 $n! (n^2 + 3n + 1)$ は因数として11を6個、つまり、 11^6 で割り切れることとなります。

以上より、求める答えは $n = 35$ となります。

もっとスマートな解法がありそうな気もするので考えてみます。興味のある方は考えてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533