

## 中学生でも解ける東大大学院入試問題（４２）

2014-11-21 11:41:31

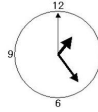
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と比べると大分暖かく感じます。今週末も同じくらいの気温になるようで助かります。

さて、今回は平成１７年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、

「図のように時針、分針、秒針がなめらかに動く時計において、３つの針が完全に一致するのは一日に何回か？」



▲問題図

（どうでもいいことですが、原本の時計の図にも３の文字がありません）

ちょうど中学校では期末試験の最中ですが、昨夜中２の塾生に試験の出来を尋ねたら、数学の試験で時計問題が出題されたことを教えてくれました。正確な文言は判らないのですが、その問題は、「時計の分針が時針を追い越すのは１日に何回か」といったもので解答は選択式だったそうです。

まず、その期末試験の問題から調べてみましょう。

本物の時計や「さんすうとけい」を使って実際に数えてみれば、すぐに正解が２２回と判ります。



▲「さんすうとけい」

とは言っても試験中に「さんすうとけい」を使えるわけでもないので、その代わりに頭の中で時計を想像して針をくるくる廻したりします。ところが、分針を２４回も廻さなければならないので、そのうち何回追い越したか判らなくなつて・・・、などという生徒もいたのではないのでしょうか。

では、どのように考えれば良いかというと、時針は１日に２回転、分針は１日に２４回転するので、時針を基準にすると分針は１日に  $24 - 2 = 22$  回転することになり、つまり、分針は時針を２２回追い越すことになります。

もし、判り難ければ陸上競技でトラックを走っているところを想像すると良いかもしれません。自分自身が遅いランナー（時針）で速いランナーＦ（分針）に追い越されます。自分が１周する間にＦが２周したとすると、１回追い越されなければなりません。さらに、自分が１周する間にＦが３周したなら２回追い越されます。つまり、自分が１周する間にＦがＮ周したならば、（ $N - 1$ ）回追い越されるということです。

この関係を利用して考えてみると、時針は１２時間で１回転するので、その間に分針は１２回転します。つまり、 $N = 12$  ということで、 $12 - 1 = 11$  回追い越されます。問題では１日に追い越される回数を問われているので、 $11 \times 2 = 22$  回となります。

それでは本題に戻りましょう。こちらは時針、分針、秒針と３つの針があつて期末試験の問題より複雑ですが、考え方は同じです。

期末試験の問題で示したように、時針と分針は１日に２２回重なります。これは、 $1/22$  日ごとに重なるということです。

次に、分針と秒針の関係を調べます。時針と分針の関係と同じで、分針は１日に２４回転して、秒針は１日に  $60$ （回転/時） $\times 24$ （時） $= 1440$  回転します。つまり、秒針は分針を  $1440 - 24 = 1416$  回重なります。これは、 $1/1416$  日ごとに重なるということです。

一方、時針、分針、秒針の３つの針が完全に一致するのは、時針と分針の２つの針が一致し、かつ、分針と秒針の２つの針が一致する場合です。

時針と分針の２つの針が一致するのが  $1/22$  日ごとなので、時針と分針が一致する時刻は、 $1/22$  日、 $2/22$  日、 $3/22$  日、・・・、 $20/22$  日、 $21/22$  日となります。

同様に、分針と秒針の２つの針が一致するのが  $1/1416$  日ごとなので、分針と秒針が一致する時刻は、 $1/1416$  日、 $2/1416$  日、・・・、 $1414/1416$  日、 $1415/1416$  日

となります。

したがって、3つの針が一致するのは、上の2つの時刻列のなかの等しい時刻の場合です。これを調べるためには、22と1416との最大公約数を求めればよく、それは2となり、3つの針が完全に一致するのは1日に2回となります。

ついでに時計問題でよく使われるテクニックを使った別解を示します。これは決まった期間に針が動く角度を調べる方法です。

時針は1時間に $360 \div 12 = 30^\circ$ 動くので、1分間に $30 \div 60 = 0.5^\circ$ 動きます。

また、分針は1分間に $360 \div 60 = 6^\circ$ 動きます。

つまり、時針と分針は、1分間に $6 - 0.5 = 5.5^\circ$ ずつ差が開いていくので、 $360 \div 5.5$ 分ごとに重なることになります。

同様に、秒針は1分間に $360^\circ$ 動くので、分針と秒針は、1分間に $360 - 6 = 354^\circ$ ずつ差が開いていくことになり、つまり、 $360 \div 354$ 分ごとに重なります。

したがって、3つの針が重なるのは、 $360/5.5 \cdot m = 360/354 \cdot n$  (1)  
となる整数 $m$ 、 $n$ を見つければよいことになります。

(1)の両辺を720で割って整理すると、  
 $708m = 11n$  (2)

ここで、708と11は互いに素なので、(2)を満たす最小の $m$ 、 $n$ は、 $m = 11$ 、 $n = 708$ で、 $360/5.5 \cdot 11 = 720$ 分 = 12時間ごとに3つの針が重なることになります。したがって、問題の答えは、3つの針が完全に一致するのは1日に2回です。

ところで、期末試験の問題を教えてくれた塾生はそれを正解していました。良かったです。期末試験は今日で終わります。ご苦労さまでした。中3生は入学試験勉強に邁進しましょう。