

中学生でも解ける東大大学院入試問題（４６）

2014-11-26 11:41:23

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日に続いて朝から雨で気温も  $10^{\circ}\text{C}$  と寒くなりました。しかし、明日は晴天で暖くなるようです。

さて、今回は平成21年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題です。

問題は、

「9つの文字 A A A A B B C C C を横一列に無作為に並べるとき、A A B C C C B A A のように左右対称な配列になる確率を求めよ。」  
です。

確率の問題です。確率を求めるためには、起こり得るすべての場合の数と、ある事象の起こる場合の数を求めて、後者を前者で割ればOKです。

初めに、起こり得るすべての場合の数を求めましょう。

まず、4個のAを区別して、それらをA1、A2、A3、A4とします。そして9個の空欄を考え、その中の4個の空欄にA1、A2、A3、A4を記入します。

A1を記入することができる空欄は9個あり、それ以降のA2については8個、A3については7個、A4については6個の記入可能な空欄があります。

つまり、9個の空欄にA1、A2、A3、A4、を記入する場合の数は、  
 $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$  通り (1)  
になります。

しかし、問題では4つのAは区別がないので、重複する場合を除く必要があります。（例えば、9個の空欄の左端から4個の空欄に、順にA1、A2、A3、A4を記入した場合とA4、A3、A2、A1と記入した場合は重複しています）

そこで、次は4個の空欄に順にA1、A2、A3、A4を記入することを考えます。A1を記入することができる空欄は4個あり、それ以降のA2については3個、A3については2個、A4については1個になり、これらの場合の数は  
 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  通り (2)  
になります。

ここでAの添字数を消して4つのAの区別をなくすと、4個の空欄のすべてにAが記入されていることになります。つまり、(2)の24通りが重複している場合の数です。

したがって、9個の空欄からAを記入する4個の空欄を選ぶ場合の数は、 $(1) \div (2)$  から、 $3024 \div 24 = 126$  通り (3)  
になります。

同様に、2個のBについては、Aの記入後、残っている5個の空欄から2個の空欄を選ぶことを考えればよいので、  
 $(5 \times 4) \div (2 \times 1) = 10$  通り (4)  
です。

さらに、3個のCについては、A、Bの記入後、残っている3個の空欄から3個の空欄を選ぶことを考えればよいので、  
 $(3 \times 2 \times 1) \div (3 \times 2 \times 1) = 1$  通り (5)  
です。

以上から、4個のA、2個のB、3個のCを並べる場合の数は、 $(3) \times (4) \times (5)$  から、  
 $126 \times 10 \times 1 = 1260$  通り  
になります。

次に、A A A A B B C C C を対称に並べる場合の数を計算します。AとBは偶数個なので9個の空欄の中央はCになります。

つまり、

☆☆☆☆C★★★★

という並び方になり、かつ、☆☆☆☆にはAが2個、BとCが1個ずつ記入されます。

さらに、☆☆☆☆が決まれば、★★★★も決まってしまう。（☆☆☆☆の左から記入した文字と★★★★の右から記入した文字が同じになります）

つまり、☆☆☆☆の4個の空欄にA 2個とB、C 1個ずつを記入する場合の数を計算すればOKで、先ほどと同じように、A、B、Cそれぞれについて、  
A:  $(4 \times 3) \div (2 \times 1) = 6$  通り  
B:  $(2 \times 1) \div 1 = 2$  通り

C:  $1 \div 1 = 1$  通り  
より、  
 $6 \times 2 \times 1 = 12$  通り  
になります。

最後に、(左右対称に並ぶ場合の数)  $\div$  (すべての場合の数) を計算すると、  
 $12 \div 1260 = 1/105$   
となり、これが答えの確率です。

上記の計算は、高校で勉強する「組合せ」の公式を使うと簡単にできます。また、その内容は、中学生以下を対象にしたジュニア数学オリンピックで取り上げられているので、興味のある人は勉強してみてください。(具体的にイメージし易い内容なので難しくはありません)

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校  
<http://caitakiyama.jimdo.com/>  
TEL 042-472-5533