中学生でも解ける東大大学院入試問題（１８４）

2015-04-30 12:11:18

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

曇っていて東久留米の予想最高気温は２３℃ということで、暑くもなく寒くもなく丁度いい塩梅です。明日以降も良い天気が続きますが、ＧＷの終わり頃、雨になるようです。

さて、今回は平成２５年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「当たりの出る確率がいつも1/3、はずれの出る確率がいつも2/3であるくじを引く。一回の挑戦において、はずれが出るまで引き続ける。このとき、次の問いに答えなさい。
（１）この挑戦をＮ回行ったとき、それまでに引いた当たりくじの総数とはずれくじの総数の比を求めよ。なお、Ｎは十分大きいものとする。
（２）当たりで１００円もらえ、はずれで１００円払うとすると、一回の挑戦で得られる金額の期待値を求めよ。　」
です。

手早く片付けるには、次のようにすると良いでしょう。

はずれの出る確率が2/3ということは、はずれが出るまでにくじを引く回数の期待値が、３/２＝１．５回ということなので、くじをＮ回引くと、１回目にはずれくじを引くのはN/２回、２回目にはずれくじを引くのはN/２回になります。

したがって、当たりくじの総数はN/２、はずれくじの総数はＮとなるので、それらの比は、N/２：Ｎ＝１：２となります。

続いて（２）も簡単に片付けると、「１回目にはずれ」と「１回目に当たり２回目にはずれ」という事象の起こる確率は、どちらも1/2なので、一回の挑戦で得られる金額の期待値は、(-１００)・1/2＋（１００-１００）・1/2＝-５０円となります。

以上のようにして、簡単に答えを求めることができますが、これからもう少し詳しく調べていきましょう。

まず（１）ですが、Nk回目（１≦Nk≦Ｎ）の挑戦ではずれが出たのがｎk回目とします。

すると、はずれが出る平均回数Ａは、
Ａ＝（ｎ1＋ｎ2＋・・・＋ｎN）/N
で、これが、はずれが出るまでにくじを引く回数の期待値３/２になります。

つまり、
Ａ＝３/2
ｎ1＋ｎ2＋・・・＋ｎN＝３/２・Ｎ
です。

次に、当たりくじの総数Ｂとすると、
Ｂ＝（ｎ1-１）＋（ｎ2-１）＋・・・＋（ｎN-１）
　＝ｎ1＋ｎ2＋・・・＋ｎN-Ｎ
　＝３/２N-Ｎ
　＝N/２
です。

一方、はずれくじの総数は、Ｎなので、当たりくじの総数とはずれくじの総数の比は、
N/２：Ｎ＝１：２
となり、これが答えです。

次に（２）です。

ｎ-１回続けて当たりが出て、ｎ回目にはずれが出る確率をｐ（ｎ）とすると、
ｐ（ｎ）＝（1/3）^(n-1)・２/３
　　　　＝２・（1/3）^n　　　　　（１）
です。

また、ｎ-１回続けて当たりが出て、ｎ回目にはずれが出るとき、得られる金額をｍ（ｎ）とすると、
ｍ（ｎ）＝１００（ｎ-１）-１００
　　　　＝１００ｎ-２００　　　　（２）
です。

したがって、得られる金額の期待値はＥは、
Ｅ＝ｍ（１）ｐ（１）＋ｍ（２）ｐ（２）＋・・・＋ｍ（ｋ）ｐ（ｋ）＋・・・
となります。

ここで、
Ｅ（ｋ）＝ｍ（１）ｐ（１）＋ｍ（２）ｐ（２）＋・・・＋ｍ（ｋ）ｐ（ｋ）
とすると、（１）、（２）から、
Ｅ（ｋ）＝（１００－２００）・２・（１／３）＋（１００・２－２００）・２・（１／３）^2＋・・・＋（１００・ｋ－２００）・２・（１／３）^k
　　＝２００／３・（１・１／３＋２・（１／３）^2＋・・・＋ｋ（１／３）^(k-1))
　　　－４００／３・（１／３＋（１／３）^2＋・・・＋（１／３）^(k-1))

　　＝２００／３・（（１－（１／３）^k/（１－１／３）^2－ｋ（１／３）^k/（１－１／３）
　　　－４００／３・（１－（１／３）^k）／（１－１／３）

　　＝２００／３・（９／４・（１－（１／３）^k－３／２・ｋ（１／３）^k
　　　－４００／３・（３／２・（１－（１／３）^k）

　　＝１５０（１－（１／３）^k－１００ｋ（１／３）^k－２００・（１－（１／３）^k）
　　＝－５０＋５０・（１／３）^k－１００ｋ（１／３）^k
となります。

ここで、ｋ→∞　とすると、（１／３）^k→０、ｋ（１／３）^k→０　なので、ｋ→∞　のとき、Ｅ（ｋ）→Ｅ＝－５０となり、一回の挑戦で得られる金額の期待値は、－５０円になり、これが答えです。

最後の計算で、等差数列の項と等比数列の項の積の数列の和の計算がありましたが、和をＳとして、等比数列を計算する要領で、両辺に公比を掛けてから辺々の差を取ると、等比数列にすることができます。

さらに、ｋ→∞のとき、ｋ（１／３）^k→０　は、整数倍より累乗のほうが支配的であることから判ると思いますが、正確に調べるためには、
（１／３）^k＝（１／（１＋２））^k
　　　≦１／（１＋２ｋ＋２ｋ（ｋ－１））
　　　＜１／２ｋ（ｋ－１）
から、
ｋ（１／３）^k＜１／２（ｋ－１）＝（１／ｋ）／（２－（２／ｋ））
とします。

ここで、ｋ→∞とすると、１／ｋ→０、２／ｋ→０で、
（１／ｋ）／（２－（２／ｋ））→０
となり、ｋ（１／３）^k＜（１／ｋ）／（２－（２／ｋ））なので、
ｋ（１／３）^k→０
となります。高校で勉強しますが、興味のある人は調べてみて下さい。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533