中学生でも解ける東大大学院入試問題（１４８）

2015-03-23 11:31:47

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

雲の多い天気で、寒くはありませんが暖かいということもありません。このような陽気が今週の半ばまで続いて、その後気温も上がるようです。お花見の季節の到来です。

さて、今回は平成２５年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「整数ｘ、ｙ、ｚがあり、それぞれ０からＮまでの数値をランダムにとるものとする。ただしＮは０より大きな整数である。
ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2≦Ｎ^2　となる確率をＰ（Ｎ）と表す時、
（１）Ｐ（１）を求めよ。
（２）Ｐ（３）を求めよ。
（３）Ｎが無限大の時のＰ（Ｎ）を求めよ。　」
です。

早速（１）に取り掛かりましょう。

ｘ、ｙ、ｚはそれぞれ０からＮまでの整数なので、ｘ、ｙ、ｚの取り得る整数のすべての場合の数は、（Ｎ＋１）（Ｎ＋１）（Ｎ＋１）＝（Ｎ＋１）^3　になります。

つまり、Ｎ＝１のとき、すべての場合の数は、２^3＝８通りになります。

あとは、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2≦１　を満たす整数ｘ、ｙ、ｚの組合せ（ｘ，ｙ，ｚ）を調べればお仕舞いです。

まず、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝０のとき、これを満たすのは、（０，０，０）の１通りです。

次に、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝１のとき、これを満たすのは、（１，０，０）（０，１，０）（０，０，１）の３通りです。

したがって、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2≦１　を満たす整数ｘ、ｙ、ｚの組合せは４通りで、求める確率Ｐ（１）＝　４/８＝１/２となり、これが答えです。

次に（２）です。

（１）と同様に、ｘ、ｙ、ｚの取り得る整数のすべての場合の数は、４^3＝６４通りです。

次に、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2≦９　を満たすｘ、ｙ、ｚの組合せを調べます。

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝０のとき、これを満たすのは（０，０，０）→１通り

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝１のとき、（１，０，０）（０，１，０）（０，０，１）→３通り

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝２のとき、（１，１，０）（１，０，１）（０，１，１）の→３通り

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝３のとき、（１，１，１）→１通り

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝４のとき、（２，０，０）（０，２，０）（０，０，２）→３通り

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝５のとき、（２，１，０）（２，０，１）（１，２，０）（１，０，２）（０，２，１）（０，１，２）→６通り

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝６のとき、（２，１，１）（１，２，１）（１，１，２）→３通り

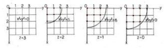
ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝７のとき、０通り

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝８のとき、（２，２，０）（２，０，２）（０，２，２）→３通り

ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝９のとき、（３，０，０）（０，３，０）（０，０，３）（２，２，１）（２，１，２）（１，２，２）→６通り

以上から、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2≦９を持たす整数ｘ、ｙ、ｚの組合せは２９通りで、求める確率Ｐ（３）＝２９/６４となり、これが答えです。

ここでは、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝０～９までを一つずつ数え上げましたが、左辺が球を表す式であることを知っていれば、下図に示すように、ｚ＝０、１、２，３での断面に含まれるｘ、ｙの格子点を数えることで求めることができます。



▲図．ｚ＝０、１、２、３での断面図

最後の（３）は、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2＝Ｎ^2 が半径Ｎの球を表すことを使います。ここでは、ｘ、ｙ、ｚ≧０なので、８分の１球を表し、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2≦Ｎ^2　を満たすｘ、ｙ、ｚの組合せの数は、８分の１球内部にある格子点の数になります。

ここで、その格子点を中心にする一辺の長さが１の立方体を考えます。

１つの立方体には１つの格子点が含まれるので、立方体の体積の和が格子点数になり、８分の１球のなかのすべての立方体の体積の和は、Ｎが大きくなると、８分の１球の体積に近づきます。

つまり、Ｎ→∞では、８分の１球内にある格子点数は８分の１球の体積になり、その体積は、４/３・π・Ｎ^3・１/８＝１/６・π・Ｎ^3　です。

一方、ｘ^2＋ｙ^2＋ｚ^2≦Ｎ^2　を満たす整数ｘ、ｙ、ｚ（０≦ｘ，ｙ，ｚ≦Ｎ）のすべての場合の数は、（Ｎ＋１）^3　なので、Ｎが無限大の時のＰ（Ｎ）は、
Ｐ（Ｎ）＝１/６・π・Ｎ^3/（Ｎ＋１）^3
　　　　＝π/６・（１/（１＋１/Ｎ））^3
　　　　→π/６
となり、これが答えです。

今回で手持ちの確率の問題がほとんど終わったので次回から違う分野の問題を取り上げたいと思います。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533