

# 中学生でも解ける東大大学院入試問題（6 4）

2014-12-18 12:03:47

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

天気図を見ると多数の等圧線が日本列島を南北に走っているのですが、風は昨日に比べて収まってきました。昨日は名古屋も雪だそうで、この冬は東京も大雪になりそうです。

さて、今回は平成17年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、

「袋の中に1から12までの数字が一つずつ書かれた12枚のカードが入っている。A、B、Cの3人が袋の中のカードをそれぞれ3枚ずつ、計9枚取り出した。このとき、Bが引いた3枚目のカードは、Aの3枚目のカードよりも4大きく、Cの3枚目のカードよりも2小さい数字であった。

下の表は、3人がそれぞれ取り出したカードの一部を記入したものである。Bが引いた3枚のカードに書かれた数字をすべて答えよ。」

です。

▼問題の表

	1枚目	2枚目	3枚目	合計
A	5			19
B				21
C		8		21

まず、問題の表の空欄に変数を割り当て、それらを使って与えられた条件を立式しましょう。表1に変数を割り当てたものを示します。

▼表1. 変数の割り当て

	1枚目	2枚目	3枚目	合計
A	5	p	q	19
B	r	s	t	21
C	u	8	v	21

それでは、与えられた条件を立式します。

まず、表1からAの3枚のカードの合計は19なので、

$$5 + p + q = 19$$

$$p + q = 14 \quad (1)$$

で、同様に、B、Cについても、

$$r + s + t = 21 \quad (2)$$

$$u + 8 + v = 21$$

$$u + v = 13 \quad (3)$$

となります。

次に、「Bが引いた3枚目のカードは、Aの3枚目のカードよりも4大きく」から

$$t - q = 4 \quad (4)$$

で、さらに、「Bが引いた3枚目のカードは、Cの3枚目のカードよりも2小さい」から

$$v - t = 2 \quad (5)$$

となります。

そしてもう一つ大切な条件があつて、それは、「1から12までの数字が一つずつ書かれた12枚のカード」で、これはカードに書かれた数字に重複はないということです。つまり、問題の表に既に5と8があるので、p、q、・・・の変数は、残りの《1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12》に対応するということです。

ここで、これまでに得られた条件をまとめます。

(0) p、q、r、s、t、u、v は、《1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12》のどれかに対応

$$(1) \quad p + q = 14$$

$$(2) \quad r + s + t = 21$$

$$(3) \quad u + v = 13$$

$$(4) \quad t - q = 4$$

$$(5) \quad v - t = 2$$

条件(0)から(5)を眺めると、(0)、(4)、(5)からq、t、vの候補を絞ることができそうです。(もちろん(0)、(1)、(4)からp、q、tの候補を絞り込むこともできますが、(1)が和なので候補が多くなりそうです)

(0)と(1)を満たすq、tの組合せを(q, t)として(以下同様)、

(q, t) = (7, 11)、(6, 10)、(3, 7)、(2, 6)

となります。

続いて、(t, v)は、

(t, v) = (10, 12)、(9, 11)、(7, 9)、(4, 6)、(2, 4)、(1, 3)

です。

ここで、 $(q, t)$  と  $(t, v)$  に共通する  $t$  に着目すると、 $(q, t) = (7, 11)$  の場合、 $t = 11$  なのですが、 $(t, v)$  の候補のなかに  $t = 11$  となるものがないことから、 $(q, t) \neq (7, 11)$  であることが判ります。

同様に調べていくと、結局、可能性のある候補は、

$(q, t) = (6, 10)$  に対して、 $(t, v) = (10, 12)$

$(q, t) = (3, 7)$  に対して、 $(t, v) = (7, 9)$

の2つになり、これらをまとめると、

$(q, t, v) = (6, 10, 12)$  または  $(3, 7, 9)$

となります。

ここまでで、 $q$  の候補が2つに絞られたので、(1) を使って、 $p$  の候補を調べましょう。

$(q, t, v) = (6, 10, 12)$  のとき ( $\Rightarrow$  残りの数字  $\langle 1, 2, 3, 4, 7, 9, 11 \rangle$ )、(1) より、

$(p, q) = (8, 6)$  となりますが、8 は残りの数字にないので、これは不適です。

$(q, t, v) = (3, 7, 9)$  のとき ( $\Rightarrow$  残りの数字  $\langle 1, 2, 4, 6, 10, 11, 12 \rangle$ )、(1) より、

$(p, q) = (11, 3)$  となり、これはOKです。

まとめると、

$(p, q, t, v) = (11, 3, 7, 9)$

まで明らかになりました。

次は、 $(p, q, t, v) = (11, 3, 7, 9)$  のとき ( $\Rightarrow$  残りの数字  $\langle 1, 2, 4, 6, 10, 12 \rangle$ ) のとき、(3) より、 $(u, v) = (4, 9)$  となり、これはOKです。

まとめると、 $(p, q, t, u, v) = (11, 3, 7, 4, 9)$  で、残りの数字は、 $\langle 1, 2, 6, 10, 12 \rangle$  です。

最後に、(2) に  $t = 7$  を代入すると、

$(6) \ r + s = 14$

で、残りの数字  $\langle 1, 2, 6, 10, 12 \rangle$  から (6) を満たす組合せ  $(r, s)$  は、 $(2, 12)$ 、 $(12, 2)$  だけです。

したがって、全ての変数の組合せは、

$(p, q, r, s, t, u, v) = (11, 3, 2, 12, 7, 4, 9)$

または、 $(11, 3, 12, 2, 7, 4, 9)$

と判りました。

求められているのは、「B が引いた 3 枚のカードに書かれた数字をすべて答えよ」ですから、答えは、「2、7、12」となります。

この問題のように、使える数字が重複を許さない場合、数字が決まる度にどんどん簡単になっていくので、問題をよく読んで、(0) のような条件を見逃さないようにしましょう。

---

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533