# 中学生でも解ける東大大学院入試問題（３９）

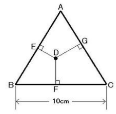
2014-11-18 12:17:39

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝は風があって寒かったのですが、だんだん風も収まってきて少し暖かく感じます。近くの滝山名店街ではイルミネーションの飾りつけをしてました。あっと言う間に入学試験になります。

さて、今回は平成２０年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

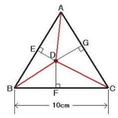
問題は、
「１辺の長さが１０ｃｍの正三角形ＡＢＣの内部において点Ｄをとり、この点Ｄから各辺に垂線を引き、垂線の足をそれぞれＥ、Ｆ、Ｇとする。ここで、点Ｄが正三角形ＡＢＣの内部を動き回る時、その垂線の長さの和ＤＥ＋ＤＦ＋ＤＧがとりうる値の範囲を求めよ。」




▲問題図

です。

この問題はよく見かけるもので、図１のように頂点Ａ、Ｂ、Ｃと点Ｄを結んで△ＡＢＣの内部に３つの三角形（△ＤＡＢ△、ＤＢＣ、△ＤＣＡ）を作れば、それらの面積の和が△ＡＢＣの面積と等しくなることを利用して簡単に解くことができます。




▲図１． ３つの三角形に分割

まず、△ＡＢＣの面積をＳ（△ＡＢＣ）とすると、△ＡＢＣは正三角形なので、底辺が１０ｃｍ、高さが５√３ｃｍとなり、Ｓ（△ＡＢＣ）は、
Ｓ（△ＡＢＣ）＝１０・５√３・１/２
　　　　　　　＝２５√３ｃｍ2
です。

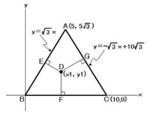
一方、△ＤＡＢ、△ＤＢＣ、△ＤＣＡの面積をそれぞれＳ（△ＤＡＢ）、Ｓ（△ＤＢＣ）、Ｓ（△ＤＣＡ）とすると、
Ｓ（△ＤＡＢ）＝１０・ＤＥ・１/２
　　　　　　　＝５・ＤＥ
Ｓ（△ＤＢＣ）＝１０・ＤＦ・１/２
　　　　　　　＝５・ＤＦ
Ｓ（△ＤＣＡ）＝１０・ＤＧ・１/２
　　　　　　　＝５・ＤＧ

ここで、Ｓ（△ＤＡＢ）＋Ｓ（△ＤＢＣ）＋Ｓ（△ＤＣＡ）＝Ｓ（△ＡＢＣ）より、
５・ＤＥ＋５・ＤＦ＋５・ＤＧ＝５（ＤＥ＋ＤＦ＋ＤＧ）＝２５√３

したがって、ＤＥ＋ＤＦ＋ＤＧ＝５√３ｃｍとなります。

それでは次に、直接ＤＥ、ＤＦ、ＤＧの長さを求める方法を調べてみましょう。

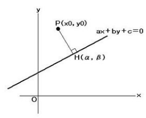
まず、図２のようにｘ-ｙ平面に頂点Ｂが原点、頂点Ｃがｘ軸上にあるように△ＡＢＣを置きます。△ＡＢＣは１辺の長さが１０ｃｍの正三角形ですから各頂点の座標は、
Ａ（５，５√３）
Ｂ（０，０）
Ｃ（１０，０）
とすることができます。さらに、点Ｄの座標を
Ｄ（ｘ1，ｙ1）
とします。




▲図２．△ＡＢＣをｘ-ｙ平面に置きます

すると、$DF = y1$　と簡単に表すことができますが、ＤＥとＤＧについては少し面倒で、直線ＡＢ、ＣＡの式が必要になります。そこで、直線ＡＢが点Ａ、Ｂ、直線ＣＡが点Ｃ、Ａを通る条件から、それらの直線の式を求めると、
直線ＡＢ：$y = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y = 0$　　（１）
直線ＣＡ：$y = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y - 10\sqrt{3} = 0$　　（２）
になります。

それでは、直線（$ax + by + c = 0$）と点（$x0,\ y0$）との距離の関係を調べましょう。図３のように点Ｐから直線に降ろした垂線の足をＨ（$\alpha,\ \beta$）とします。




▲図３．点と直線との距離

$PH^2 = (\alpha - x0)^2 + (\beta - y0)^2$　　（３）
$a\alpha + b\beta + c = 0$　　（４）
が成り立ちます。（x^2　はｘの２乗を表します）

また、直線とＰＨは直交するので、（直交する２つの直線の傾きの積は、-１になります）
$(\beta - y0) / (\alpha - x0) = b / a$
となり、ここで、
$(\alpha - x0) / a = (\beta - y0) / b = k$
とすると、
$\alpha = ak + x0$　　（５）
$\beta = bk + y0$　　（６）
となります。

そこで、（５）（６）を（４）に代入すると、
$a(ak + x0) + b(bk + y0) + c = 0$
$a^2 \cdot k + a \cdot x0 + b^2 \cdot k + b \cdot y0 + c = 0$
$k(a^2 + b^2) = -a \cdot x0 - b \cdot y0 - c$
より、
$k = -(a \cdot x0 + b \cdot y0 + c) / (a^2 + b^2)$　　（７）
となり、（３）（５）（６）（７）から、
$PH^2 = (a^2 + b^2)k^2$
$\quad = (a \cdot x0 + b \cdot y0 + c)^2 / (a^2 + b^2)$
$PH = |a \cdot x0 + b \cdot y0 + c| / \sqrt{a^2 + b^2}$　　（８）
と、点と直線との距離を計算する式を得ることができました。

これで準備完了です。それでは、ＤＥ、ＤＧを計算しましょう。

まず、辺ＡＢとＤとの距離ＤＥは、（１）（８）を使って、
$DE = |\sqrt{3}x1 - y1| / \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}$
$\quad = |\sqrt{3}x1 - y1| / \sqrt{4}$
$\quad = |\sqrt{3}x1 - y1| / 2$
です。

次にＤＧは、（２）（８）を使って、
$DG = |\sqrt{3}x1 + y1 - 10\sqrt{3}| / \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}$
$\quad = |\sqrt{3}x1 + y1 - 10\sqrt{3}| / 2$
となります。

すると、ＤＥ＋ＤＦ＋ＤＧは、
$DE + DF + DG = |\sqrt{3}x1 - y1| / 2$
$\quad + y1$
$\quad + |\sqrt{3}x1 + y1 - 10\sqrt{3}| / 2$　　（９）
となります。

ここで、点Ｄの範囲は、△ＡＢＣ内なので、
$y1 \leqq \sqrt{3}x1 \Leftrightarrow \sqrt{3}x1 - y1 \geqq 0$

$y_1 \leqq -\sqrt{3}x_1 + 10\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x_1 + y_1 - 10\sqrt{3} \leqq 0$
となり、これらの不等式を使って（９）の絶対値記号を外すと、

$$
\begin{aligned}
DE+DF+DG &= (\sqrt{3}x_1 - y_1)/2 \\
&\quad + y_1 \\
&\quad - (\sqrt{3}x_1 + y_1 - 10\sqrt{3})/2 \\
&= 1/2\,(\sqrt{3}x_1 - y_1 + 2y_1 - \sqrt{3}x_1 - y_1 + 10\sqrt{3}) \\
&= 1/2 \cdot 10\sqrt{3} \\
&= 5\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

と前の答えと一致しました。

先の面積を使う解法のほうが簡潔ですが、２つ目の解法のような解析的方法は、いわゆる「ひらめき」が不要で、ただ式の計算をすればよいので簡単です。身につけておくと役に立つでしょう。

---

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533