中学生でも解ける東大大学院入試問題（５８）

2014-12-10 11:09:08

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日より少し暖かく感じたのですが気温は６℃とやはり寒い日でした。明日は雨模様で少し寒さが緩みますが、これから日増しに寒くなっていくので、体調に気を付けてしっかり勉強しましょう。

さて、今回は平成１８年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「立方体（正六面体）の８個の頂点から３個の頂点をランダムに選ぶとき、これら３個の頂点がつくる三角形が二等辺三角形となる確率を求めよ。」
です。

まず、立方体の８個の頂点から３個を選ぶ場合の数を勘定してみましょう。

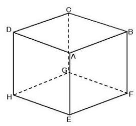
１個目の頂点の選び方は８通り　で、２個目は７通り、３個目は６通り　になり、合わせて８×７×６＝３３６通り　になりますが、これには選んだ順番が含まれています。つまり、１個目に頂点Ａ、２個目に頂点Ｂ、３個目に頂点Ｃを選んだ場合と１個目に頂点Ｃ、２個目に頂点Ａ、３個目に頂点Ｂなどと選んだ場合とが異なるものとして勘定されているということです。

ですから選ばれる順番が異なる場合を除く必要があります。そこで、○を３個並べて、選んだ３個の頂点を書き入れることを考えると、初めの○には３通り、２番目の○には２通り、最後の○には１通り　書き入れることが可能です。つまり、３個の頂点で順番が異なる場合の数は、３×２×１＝６通り　になります。

したがって、８個の頂点から３個の頂点を選ぶ場合の数は、３３６÷６＝５６通り　になるということです。（高校で「組合せ」を勉強すると、８個のなかから３個選ぶ場合の数を　８Ｃ３＝８×７×６／（３×２×１）＝５６通り　と簡単に計算することができます）

ということで高々５６通り　ですから、すべての三角形について、それが二等辺三角形であるか調べてもＯＫです。
（数え上げることができる場合、それをすることは有力な戦略だと思います）
しかし、ここでは少し工夫して解きましょう。

まず、図１のように立方体の各頂点に記号を付けます。

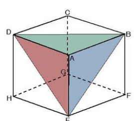


▲図１．立方体

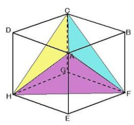
ここで、頂点Ａを二等辺三角形の頂点とする（頂点Ａを通る２辺の長さが等しい）二等辺三角形を調べます。

１辺の長さが１の立方体の８個の頂点を結んだ線分の長さの種類は、立方体の１辺の長さ１、立方体の面の対角線の長さ√２、立方体の対角線の長さ√３の３種類です。そして、１つの頂点、例えば、頂点Ａを通るものは、それぞれ３本、３本、１本になります。

つまり、頂点Ａを頂点とする二等辺三角形で、等しい辺の長さが１のものが３通り（図２）、√２のものが３通り（図３）あるということです。因みに、√３を等しい辺とする二等辺三角形はつくることができません。



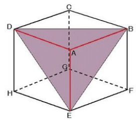
▲図２．頂点Ａを頂点とする等しい辺の長さが１の二等辺三角形



▲図３．頂点Ａを頂点とする等しい辺の長さが√２の二等辺三角形

以上から１つの頂点に対して、二等辺三角形が６通りあるので、立方体の８個の頂点では、６×８＝４８通り　としてしまいそうですが、それはいけません。図３の等しい辺の長さが√２の二等辺三角形については、実は正三角形になっていて、図３の場合の△ＡＦＨは、頂点Ａ、Ｆ、Ｈで重複して勘定されているからです。

そこで、図４に示すような、頂点Ａに対して立方体の辺で繋がってる（頂点Ａに隣接している）頂点を頂点とする正三角形ＢＤＥを考えます。



▲図４．頂点Ａに隣接している３頂点を頂点とする正三角形

立方体のある頂点に隣接する３個の頂点は１つだけ存在し、かつ、他の頂点に隣接する３個の頂点とは異なるので、それらを繋いでつくる正三角形は、立方体の１つの頂点に対して１つ存在することになります。つまり、１辺の長さが√２の正三角形は１×８＝８通り　あるということです。

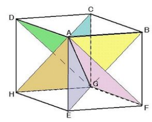
以上から、立方体の８個の頂点から３個の頂点を選び、それらが二等辺三角形になるのは、図２のような二等辺三角形が３×８＝２４通り、図４のような正三角形が１×８＝８通り　で、合わせて２４＋８＝３２通り　になります。

したがって、求める確率は、３２/５６＝４/７　となります。

次に、排反事象、つまり、二等辺三角形にならない場合の数を勘定して解いてみましょう。

先ほど述べたように、１辺１の長さの立方体の８個の頂点を結んでできる線分の長さは、１、√２、√３の３通りで、それぞれの本数は、１２本、１２本、４本となります。これらの３種類の長さを使って二等辺三角形ではない三角形（不等辺三角形）をつくるには、１、√２、√３の長さの線分を１本ずつ選ぶ必要があります。

そこで、図５のように立方体の対角線の長さ√３の線分を１辺とする不等辺三角形を調べると、１本の対角線に対して６通り　の不等辺三角形できることが判ります。



▲図５．立方体の対角線を１辺とする不等辺三角形

一方、立方体の対角線は４本あるので、不等辺三角形になる場合の数は、６×４＝２４通り　となります。

したがって、立方体の８個の頂点から３個選んでつくることができる三角形の場合の数、５６通り　から、不等辺三角形になる場合の数を減じると、それが二等辺三角形になる場合の数で、それは、５６－２４＝３２通り　となります。

このように場合の数や確率の問題では、排反事象を調べると簡単に勘定できる場合があるので、問題に取り掛かる前にちょっと頭を働かせてみるとよいかもしれません。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533