

中学生でも解ける東大大学院入試問題（４３）

2014-11-22 10:48:43

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

３連休の初日の今日は風もなく晴天で、予報では最高気温が１９℃です。最終日の月曜日は少し曇るようですが、連休中は概ね暖かくなるようです。

さて、今回取り上げるのは、平成１９年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の試験問題で覆面算です。

問題は、

「以下の計算が成り立つとき、 $A \times D - B \times C$ を求めよ。ただし、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ は１から９までの自然数である。」

$$\begin{array}{r} B C A C \\ + B C D D \\ \hline C C B A \end{array}$$

▲問題図

以前にも覆面算を取り上げましたが、その解法のポイントは一番上位の桁または一の位に着目して数字を絞り込んでいくことです。

例えば本問の場合、足される数と足す数の千の位が両方ともＢで、その和が繰り上がりしていないことから、Ｂは１から４までの数字と絞り込むことができます。そして絞り込んだ数字ごとに場合分けして解いていきます。

また、方程式を作って解くこともできます。本問の場合、

$$(1000B + 100C + 10A + C) + (1000B + 100C + 10D + D) = 1000C + 100C + 10B + A$$

となり、これを整理すると、

$$1000(2B - C) + 100C + 10(A - B + D) + C + D - A = 0$$

となります。この式から各数字を決めていくこともできます。

しかし、今回は別の方法で解いてみましょう。

本問を見てちよつと不思議に思ったのが、要求されている答えが、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ の数字を決めるのではなく、 $A \times D - B \times C$ の値を求めることとなっていることです。

もし、上手く $A \times D$ や $B \times C$ を作ることができれば、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ を個別に求める必要はないのですが、与えられた計算式に掛け算がないのでちよつと難しそうです。

次に目に付くのは、足される数も足す数も $B C * *$ となっていることです。おまけに和が $C C * *$ となっているので、このあたりから簡単に $B$ 、 $C$ を決めることができそうです。

そういうことで、千と百の位に着目して解いていきましょう。

まず、百の位に着目すると、 $C$ と $C$ を足してその和の一の位が $C$ となっています。十の位から繰り上がる場合と繰り上がらない場合があるので、 $C$ と $C$ を足したときその和の一の位の数字が１増える場合（十の位から繰り上がる場合）と増えない（十の位から繰り上がらない場合）場合があります。

ここで $C$ は１から９までの数字なので、それらについて実際に $C + C$ を計算してみると、

$$1 + 1 \rightarrow 2 \quad \text{または、} 3$$

$$2 + 2 \rightarrow 4 \quad \text{または、} 5$$

$$3 + 3 \rightarrow 6 \quad \text{または、} 7$$

$$4 + 4 \rightarrow 8 \quad \text{または、} 9$$

$$5 + 5 \rightarrow 0 \quad \text{または、} 1$$

$$6 + 6 \rightarrow 2 \quad \text{または、} 3$$

$$7 + 7 \rightarrow 4 \quad \text{または、} 5$$

$$8 + 8 \rightarrow 6 \quad \text{または、} 7$$

$$9 + 9 \rightarrow 8 \quad \text{または、} 9$$

となります。（→より右の前の数字は十の位から繰り上がらない場合、後ろの数字は繰り上がる場合です）

この結果から、→の左の数字と右の数字で一致するのは $C = 9$ で十の位から繰り上がる場合だけで、 $C = 9$ と決めることができました。

すると、千の位は $B + B \rightarrow 9$ で百の位から１繰り上がってくるのですから、 $B + B = 8$ となり、 $B = 4$ と決まります。ここまでをまとめた計算式を図１に示します。

$$\begin{array}{r} 49A9 \\ +49DD \\ \hline 994A \end{array}$$

▲図１．途中結果

あとは $A$ と $D$ を決めればお仕舞いですが、それは簡単で、一の位に着目すると、 $9 + D$ は必ず繰り上がるので、十の位

の  $A + D$  は  $13$  となります。(百の位を調べたとき、十の位から繰り上がったことを思い出してください) つまり、 $A + D = 13$  (1)  
が成り立ちます。(ここから  $A$ 、 $D$  の組み合わせを場合分けしても OK です)

また、一の位に着目すると、 $9 + D = 10 + A$  になるので、整理すると、 $A - D = -1$  (2)  
が成り立ちます。

(1) と (2) から、 $A = 6$ 、 $D = 7$  と決めることができました。

以上をまとめると、 $A = 6$ 、 $B = 4$ 、 $C = 9$ 、 $D = 7$  となり、

$$\begin{aligned} A \times D - B \times C &= 6 \times 7 - 4 \times 9 \\ &= 42 - 36 \\ &= 6 \end{aligned}$$

が正解となります。

場合分けを使わないので、先の 2 つの方法より簡単に解くことができましたが、いつでも上手くいくわけではありません。数学では少々時間が掛かっても広範囲に適用できる解法テクニックを持っていることが必要です。それをマスターしてから簡単な解法を勉強して頭の中の引きだしを増やすのが良いでしょう。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校  
<http://caitakiyama.jimdo.com/>  
TEL 042-472-5533