

中学生でも解ける東大大学院入試問題（70）

2014-12-26 09:23:55

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今日から冬期講習が始まるので午前中から塾生・講習生が来塾します。教室掃除を終えて一息しているところです。

さて、今回は平成26年度東大工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「多項式 $P(x)$ を $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ で割ったときの余りが $2x + 1$ であり、また、 $P(x)$ を $x^3 + 4x^2 - 15x - 18$ で割ったときの余りが $2x^2 - x - 4$ である。

このとき、 $P(x)$ を $x^3 - 19x + 30$ で割ったときの余りを求めよ。」

です。（ x^3 は x の3乗を表します）

整式の除法の問題です。まず、問題に書いてあることを立式しましょう。

初めの条件、「多項式 $P(x)$ を $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ で割ったときの余りが $2x + 1$ 」は、この商を $Q1(x)$ とすると、

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - 13x + 10) Q1(x) + 2x + 1 \quad (1)$$

になります。

2番目の条件、「 $P(x)$ を $x^3 + 4x^2 - 15x - 18$ で割ったときの余りが $2x^2 - x - 4$ 」は、この商を $Q2(x)$ とすると、

$$P(x) = (x^3 + 4x^2 - 15x - 18) Q2(x) + 2x^2 - x - 4 \quad (2)$$

です。

最後に問題の「 $P(x)$ を $x^3 - 19x + 30$ で割ったときの余り」については、商を $Q3(x)$ 、余りを $R(x)$ とすると、

$$P(x) = (x^3 - 19x + 30) Q3(x) + R(x) \quad (3)$$

となります。

ここで、 $R(x)$ は、 $P(x)$ を3次式で割った余りなので、その次数は2次になり、

$$R(x) = ax^2 + bx + c \quad (4)$$

となります。

これで問題に書いてあることを式にすることができました。あとはこれらの式をいじって $R(x)$ を決定すればOKです。

それでは、(1)、(2)、(3)を変形しましょう。それぞれ商と積をなしている多項式が因数分解できそうです。

実際、(1)、(2)、(3)はそれぞれ、

$$P(x) = (x + 5)(x - 1)(x - 2) Q1(x) + 2x + 1 \quad (5)$$

$$P(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 3) Q2(x) + 2x^2 - x - 4 \quad (6)$$

$$P(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3) Q3(x) + R(x) \quad (7)$$

と変形できます。

ここまでくればあとは簡単で、(5)、(6)、(7)に、 $x = -5$ 、 2 、 3 を代入すると、

$$P(-5) = R(-5) = -9 \quad (8)$$

$$P(2) = R(2) = 5 \quad (9)$$

$$P(3) = R(3) = 11 \quad (10)$$

となります。

そして、(4)より、

$$R(-5) = 25a - 5b + c \quad (11)$$

$$R(2) = 4a + 2b + c \quad (12)$$

$$R(3) = 9a + 3b + c \quad (13)$$

なので、これらと(8)、(9)、(10)より、

$$25a - 5b + c = -9$$

$$4a + 2b + c = 5$$

$$9a + 3b + c = 11$$

と3元の連立方程式になりました。

これを解くと、 $a = 23/28$ 、 $b = 53/28$ 、 $c = -29/14$ となるので、求める余り $R(x)$ は、

$$R(x) = 23/28 \cdot x^2 + 53/28 \cdot x - 29/14$$

になります。

3次式の因数分解が難しく感じる人もいるかと思いますが、適当な x を代入してみて多項式が0になるものを探す因数定理が役に立つので覚えておくとうれいでしょう。

TEL 042-472-5533