

中学生でも解ける東大大学院入試問題（141）

2015-03-16 12:04:45

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今は晴れていますが、夕方から雨になるようです。明日以降も晴れたり雨になったり安定しない天気のようにですが、暖かい日が続くようです。

今回は平成18年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、

「3人がチームとなって行う帽子の色当てゲームを考える。3人はそれぞれ赤色または白色のどちらかの帽子をランダムにかぶせられる。自分の帽子の色は見えない。他のふたりの帽子の色は見えるが、それを言葉やサインで伝えることはできないものとする。3人は同時に自分の色が何であるかにつき、赤、白、パスのどれかを答える。パスは正解ではないが、間違いでもないものとする。勝敗の基準を次とする。3人のうち少なくともひとりが正解し、かつ、間違えた者がひとりもないならばそのチームの勝ちとする。さて、3人はどのように解答するか戦略をあらかじめ相談しておくことができる。この戦略によってチームとして勝つ確率をどのように上げられるか考えてみよう。

（1）3人がそれぞれランダムに赤、白、パスのどれかを答えるとしたら、このときチームの勝つ確率はいくらか。

（2）簡単に思いつく戦略として、3人のうちふたりはパスと答え、ひとりは常に赤と答える戦略が考えられる。このときチームが勝つ確率は $1/2$ である。これよりも優れた戦略として、3人が互いに他のふたりの帽子の色を見て、もしふたりの帽子の色が異なっていればパスと答え、ふたりの帽子の色が同じであれば、自分の帽子の色についてそれと違う方の色を答えるという戦略がある。このときにチームが勝つ確率はいくらか。」

長い問題文ですが難しいことを言っているわけではないので、しっかり読んで問題の意味を理解することが大切です。判り難ければ、具体的に図を描いて考えてみると良いでしょう。

まず、（1）ですが、3人がランダムに答えるとき、各人は、赤、白、パスの3通りの答えがありますから、3人の答え方の場合の数は、 $3 \times 3 \times 3 = 27$ （通り）になります。

そのときチームが勝つのは、帽子の色が当たったとき、パスをPとすると、3人の答えが以下の場合の7通りになります。

したがって、チームが勝つ確率は、
[チームが勝つ場合の数] / [すべての場合の数] = $7/27$
になり、これが答えです。

続いて（2）に進む前に、問題にある「3人のうちふたりはパスと答え、ひとりは常に赤と答える戦略が考えられる。このときチームの勝つ確率は $1/2$ である」を調べてみましょう。

パスと答える2人は負けないので、赤と答えるひとりが正解すれば、チームは勝つことになります。赤と答える人が赤色の帽子をかぶっている確率は $1/2$ なので、チームが勝つ確率は $1/2$ となるということです。

それでは（2）に戻ります。

ここで、3人の帽子のかぶり方を考えてみると、それは、
・3人の帽子の色がすべて同じ場合
・2人の帽子の色が同じで1人だけ異なっている場合
に分けることができます。

そこで3人の帽子の色がすべて同じ場合、3人の答えはすべて間違いになりチームは負けになります。そして、このときの場合の数は、[帽子の色が赤色か白色か] = 2（通り）です。

次に2人の帽子の色が同じで1人だけ異なっている場合、帽子の色が同じ2人はパスと答え、帽子の色が異なっている1人は正解するので、チームは勝ちになります。このときの場合の数は、[帽子の色が異なる1人の選び方] × [帽子の色が赤色か白色か] = $3 \times 2 = 6$ （通り）です。

したがって、チームが勝つ確率は、
[チームが勝つ場合の数] / ([チームが勝つ場合の数] + [チームが負ける場合の数]) = $6 / (6 + 2) = 3/4$
になり、これが答えになります。

今回は当該事象の起こる場合の数を使って確率を計算しましたが、確率の乗法定理を使って求めることもできます。興味のある方は調べてみてください。