

中学生でも解ける東大大学院入試問題（９５）

2015-01-22 13:15:55

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と同様、雨が降り寒い日になりました。明日から天気は回復し、少し暖くなるようです。受験生の皆さんは暖かくして勉強してください。

さて、今回は平成２４年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「 6^{2011} を１００で割った余りを求めよ。」
です。（ 6^{2011} は 6 の 2011 乗を表します）

よく目にする問題で、累乗数の余りは必ず循環することを思い出せば簡単です。

実際に 6^1 、 6^2 、 6^3 、・・・の 100 で割った余りを計算してみましょう。

$6^1 \div 100 = 0$	・・・ 6
$6^2 \div 100 = 0$	・・・ 36
$6^3 \div 100 = 2$	・・・ 16
$6^4 \div 100 = 12$	・・・ 96
$6^5 \div 100 = 77$	・・・ 76
$6^6 \div 100 = 466$	・・・ 56
$6^7 \div 100 = 2799$	・・・ 36
$6^8 \div 100 = 16796$	・・・ 16
$6^9 \div 100 = 100776$	・・・ 96
・・・	

と余りが $36 \rightarrow 16 \rightarrow 96 \rightarrow 76 \rightarrow 56 \rightarrow 36 \rightarrow \dots$ と循環しています。

つまり、指数が 2 以上のとき、 6^{5n} 、 $6^{(5n+1)}$ 、 $6^{(5n+2)}$ 、 $6^{(5n+3)}$ および $6^{(5n+4)}$ を 100 で割った余りは、それぞれ、76、56、36、16、96 となります。

あとは、指数の 2011 を $5n + p$ で表したときの p を求めれば OK で、それは、

$$2011 = 5 \times 402 + 1$$

なので、 $p = 1$ となります。

つまり、 6^{2011} を 100 で割った余りは、 6^6 を 100 で割った余りと等しく 56 で、これが答えです。

この種類の問題は、上記のように累乗数の余りを実際に書き出して周期性を調べる方法や合同式、二項定理を使う方法があります。合同式は旧教育課程では扱わなかったのですが、新教育課程では「整数の性質」に登場します。興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533