

中学生でも解ける東大大学院入試問題（62）

2014-12-16 11:54:15

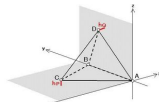
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

霰が降るほど冷え込んでいます。明日から少しずつ気温は上がるようですが、寒い日が続くので、特に受験生の皆さんは、風邪など引かぬよう気を付けてください。

さて、今回は平成23年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「辺の長さ1の正四面体 $ABCD$ の辺 AB が図のように y 軸上にあるものとする。頂点 C から xy 平面に下ろした垂線の足と頂点 C の距離を h_P 、頂点 D から yz 平面に下ろした垂線の足と頂点 D の距離を h_Q とする。 $h_P = h_Q$ のとき、 h_P の長さを求めよ。」

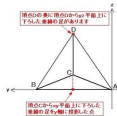


▲問題図

繰り返しになりますが、立体図形問題のポイントは、都合の良い面を見つけて平面図形問題に変換することです。

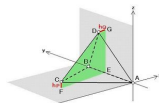
その観点から考えると、この問題の場合、都合の良い面は、頂点 C 、頂点 C から xy 平面に下ろした垂線の足、頂点 D 、頂点 D から yz 平面に下ろした垂線の足の4点を含む面になりそうなのですが、それらの4点が同一平面上にあるかを確認しなければなりません。

そこで、この正四角錐を x 軸の負の方向から眺めてみます。すると、図1のように辺 CD は xz 平面に平行で、かつ、頂点 C 、 D からそれぞれ xy 平面、 yz 平面の下ろした垂線も xz 平面に平行になるので、それらの4点が同一平面上にあることが判ります。



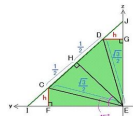
▲図1. x 軸の負の方向から見た投影図

ということで、図2の緑色の面 $CDGEF$ を調べれば正解に辿りつけそうです。



▲図2. 面 $CDGEF$ を選びました

早速、図3に面 $CDGEF$ を描きました。（ここで、 $h_P = h_Q = h$ としました）



▲図3. 面 $CDGEF$

EC と ED は、それぞれ合同な正三角形 ABC 、 ABD の高さになり、2つの正三角形の辺の長さは1なので、 $EC = ED = \sqrt{3}/2$ です。

また、 CD は正四角錐 $ABCD$ の辺なので、 $CD = 1$ です。

さらに、頂点 E から IJ に下ろした垂線の足を H とすると、 $\triangle EHC \cong \triangle EHD$ より、 $CH = DH$ なので、 $CH = DH = 1/2 CD = 1/2$ となります。

次に、 $\triangle CFH \cong \triangle DGJ$ 、 $\triangle ECF \cong \triangle EDG$ から、

$$EI = EJ$$

なので、 $\triangle EIJ$ は直角二等辺三角形で、
 $\angle EIJ = \angle EJI = 45^\circ$
 で、 $\triangle CFI$ も直角二等辺三角形です。

さらに、 $\triangle EHI$ を考えると、 $\angle EIH = 45^\circ$ から、 $\angle HEI = 45^\circ$ となり、 $\triangle EHI$ も直角二等辺三角形になります。
 （簡単にまとめると、直角二等辺三角形がたくさんあるということです）

それでは、仕上げて掛かりましょう。

$\triangle ECH$ に三平方の定理を使うと、
 $EC^2 = EH^2 + CH^2$ （ EC^2 は EC の 2 乗を表します）
 が成り立ちます。

$EC = \sqrt{3}/2$ 、 $CH = 1/2$ を代入して、
 $EH = \sqrt{2}/2$
 となります。

$\triangle EHI$ は二等辺三角形で、 $EH = IH$ なので、
 $IH = \sqrt{2}/2$
 です。

一方、 $\triangle CFI$ は直角二等辺三角形なので、
 $CI = \sqrt{2}CF = \sqrt{2}h$
 で、
 $IH = CI + CH$
 が成り立ち、 $IH = \sqrt{2}/2$ 、 $CI = \sqrt{2}h$ 、 $CH = 1/2$ を代入して、
 $\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}h + 1/2$
 $h = (2 - \sqrt{2})/4$
 となり、答えの hP の長さは、 $(2 - \sqrt{2})/4$ となります。

今回の問題での、1 つ目のハードルは（この問題の場合、ハードルは 1 つしかないと思いますが）、図 1 が思い浮かぶかでしょう。柱体や円錐、四角錐は頭の中でイメージし易いのですが、正四面体はそれらに比べて少し難しそうです。そのために、実際に厚紙で正四面体を作って、いろいろな角度から眺めると良いでしょう。

私自身、中学生のとき、正四面体、正八面体、正十二面体、正二十面体を作りましたが、今は至れり尽くせりで、教科書（中 1）の巻末に立体製作用の台紙がついています。是非、それを活用して立体模型を作ってみましょう。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
 TEL 042-472-5533