

中学生でも解ける東大大学院入試問題（13）

2014-10-10 12:28:57

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れて過ごしやすい日になりました。ノーベル文学賞の結果は残念でしたが、来年のお楽しみということですね。

さて、今日は平成18年度東大大学院工学系研究科システム量子工学入試で出題された推理算の問題です。

問題は、

「4つの整数A、B、C、D（ $A < B < C < D$ ）があり、それらの2つずつの和が、

24、29、35、36、42、47

であるとき、Dの値を求めよ」

です。

AからDまでの2つの和というのは、

$A + B$

$A + C$

$A + D$

$B + C$

$B + D$

$C + D$

の6つで、それらが24、29、35、36、42、47に対応するということです。

ここで、 $A < B < C < D$ という条件があるので、2数の和で最小および最大になるものは、それぞれ、 $A + B$ と $C + D$ であることは容易に判ります。つまり、

$A + B = 24$ (1)

$C + D = 47$ (2)

になる訳です。

次に2番目に小さい数を調べます。その候補は、 $A + C$ か $B + C$ になるのですが、 $A < B$ なので、

$A + C < B + C$

つまり、2番目に小さい数は $A + C$ で、

$A + C = 29$ (3)

と判ります。

同様に、2番目に大きい数を調べると、

$B + C < B + D$

から、 $B + D$ が2番目に大きい数で、

$B + D = 42$ (4)

です。

ここまでの結果を一旦まとめると、

$A + B = 24$ (1)

$A + C = 29$ (3)

$B + D = 42$ (4)

$C + D = 47$ (2)

で、不明なのが、 $A + D$ と $B + C$ の2数です。

そこで、(ア) $A + D = 35$ 、 $B + C = 36$ の場合と (イ) $A + D = 36$ 、 $B + C = 35$ の場合に分けて調べます。

(ア) $A + D = 35$ 、 $B + C = 36$ の場合

$A + D = 35$ (5)

$B + C = 36$ (6)

(5) - (1) より、

$D - B = 11$ (7)

(4) + (7) より、

$2D = 53$

したがって、

$D = 5\frac{3}{2}$

これは、Dが整数という条件に反するので不適当。

(イ) $A + D = 36$ 、 $B + C = 35$ の場合

$A + D = 36$ (8)

$B + C = 35$ (9)

(8) - (1) より、

$D - B = 12$ (10)

(4) + (10) より、
 $2D = 54$
 したがって、
 $D = 27$ (11)

(8)、(4)、(2) と (11) より、
 $A = 9$
 $B = 15$
 $C = 20$

これらは、(1)、(3)、(9) を満たすので、正解は、 $D = 27$ となります。

次に表を使って説明します。

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

▲表. 2数の和の大小関係

表では、右下に行くほど大きい数になり、1番左上の $A + B$ から出発して不等号の開いた方向に進むと、小さい数から順に大きい数に進んでいくことになります。

そこで、左上の $A + B$ を出発すると、そこからは左の $A + C$ に進む以外ありませんが、 $A + C$ からは右の $A + D$ と下の $B + C$ に進むことができます。つまり、 $A < B < C < D$ の条件から判る2数の和の大小関係は、
 $A + B < A + C < A + D$ 、 $B + C < B + D < C + D$
 ということで、 $A + D$ と $B + C$ との大小関係を決めることができません。

そのため、先に記した解答では、場合分けして計算することで調べました。その結果、 $A + D < B + C$ が不適当となったのは D が整数にならなかったため、これは、 A 、 B 、 C 、 D の偶奇性を調べればOKということです。

それでは、 A 、 B 、 C 、 D が偶数か奇数かを調べてみましょう。上記の(1)から(4)を再掲します。

$A + B = 24$ (1)
 $C + D = 47$ (2)
 $A + C = 29$ (3)
 $B + D = 42$ (4)

これらの(1)から(4)を満たす A 、 B 、 C 、 D の偶奇性は、

(ウ) A 、 B 、 D が偶数、 C が奇数

(エ) A 、 B 、 D が奇数、 C が偶数

の場合で、すると、(ウ)(エ)のどちらの場合も、 $A + D$ は偶数、 $B + C$ は奇数となります。

一方、 $A + D$ 、 $B + C$ は35、36に等しいので、 $A + D = 36$ 、 $B + C = 35$ ということが判ります。

明日から3連休ですが、後半は台風の影響で天気が悪そうなので、算数パズルも一興かもしれません。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533