中学生でも解ける東大大学院入試問題（１１０）

2015-02-06 11:43:36

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

有り難いことに、昨夕に雪が止んだおかげで積雪もなく、雪かきせずに済みました。気温は７℃と低めなのですが、暖かく感じます。明日も良い天気のようです。

さて、今回は平成２６年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「Ｎが自然数で、１０００００≦N^2≦２５０００００のとき、N^2の上３桁を取り出した数は、いくつあるか。ただし、１００００００と１００２００１のように、上３桁が同じ数の場合は、重複してかぞえない。」
です。　（N^2はＮの２乗を表します）

N^2の変域は、１０００００の６桁から２５０００００の７桁までですが、N^2の上３桁の数を問題にしているので、N^2の変域を６桁の場合
１０００００≦N^2≦９９９９９９　（３１７≦N≦９９９）
と、７桁の場合
１００００００≦N^2≦２５０００００　（１０００≦N≦１５８１）
の２つに分けて調べましょう。そして、N^2の上３桁の数をM(N)としましょう。

初めに、１０００００≦N^2≦９９９９９９の場合ですが、N^2は６桁の数なので、N^2の上から３桁目は千の位になります。

つまり、（Ｎ＋１）^2がN^2より１０００大きい場合、M(N+1)はM(N)より１大きくなります。

また、（Ｎ＋１）^2がN^2より１０００より大きい場合、M(N+1)はM(N)より１以上大きくなり、（Ｎ＋１）^2がN^2より１０００より小さい場合、M(N+1)はM(N)より０または１大きくなります。

これらをまとめると、
（Ｎ＋１）^2－ N^2＝１０００のとき、
M(N+1)－ M(N)＝１

（Ｎ＋１）^2－ N^2＜１０００のとき、
M(N+1)－ M(N)＝０または１

（Ｎ＋１）^2－ N^2＞１０００のとき、
M(N+1)－ M(N)≧１
となります。

そこでまず、（Ｎ＋１）^2－ N^2＜１０００を調べましょう。不等式の左辺を因数分解して、
（Ｎ＋１）^2－ N^2＝２Ｎ＋１＜１０００
から、
N≦４９９
です。

つまり、３１７≦N≦４９９のＮについては、
M(N+1)－ M(N)＝０または１
となります。

ここで、３１７＾2＝１００４８９、４９９^2＝２４９００１から
M(317)＝１００
M(499)＝２４９
となり、M(N+1)－ M(N)＝０または１なので、M(N)は１００以上２４９以下のすべての整数を取ることになります。

したがって、３１７≦N≦４９９では、N^2の上３桁の数（M(N)）は、１５０個（＝２４９－ １００＋１）存在することになります。

次に、５００≦N≦９９９の場合です。ここで、
M(N+1)－ M(N)≧１
なので、
M(N+1)≠M(N)
が成り立ちます。

つまり、５００≦N≦９９９のすべてのＮについて、対応するM(N)はすべて異なる値を取るということです。

したがって、５００≦N≦９９９では、N^2の上３桁の数（M(N)）は、５００個（＝９９９－ ５００＋１）存在することになります。

最後に、１０００≦N≦１５８１の場合です。ここで、

M(1000)＝１００
M(1581)＝２４９
から、
１００≦M(N)≦２４９
となりますが、これは、３１７≦N≦４９９のとき、M(N)は１００以上２４９以下のすべての整数を取ることが判っているので、１０００≦N≦１５８１のM(N)はそれに含まれてしまいます。

以上をまとめると、
３１７≦N≦４９９　のとき、１５０個
５００≦N≦９９９　のとき、５００個
１０００≦N≦１５８１のとき、３１７≦N≦４９９に含まれる
となるので、N^2の上3桁を取り出した数は、１５０＋５００＝６５０個で、これが答えです。

６桁（または７桁）の数で上３桁の数を問題にしているので、１０００（または１００００）増えれば上３桁の数が１増えるという攻略ポイントが明確な問題です。目新しい問題に向かうときは攻略ポイントを意識して取り組むと、頭のなかにいろいろな引き出しができて良いでしょう。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533