

2015-05-02 11:11:44

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今日も良い天気になりました。天気図を見ると、たくさん的高気圧、低気圧、温暖前線、寒冷前線、停滞前線が日本列島の周りにあって、賑やかです。

さて、今回は平成20年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

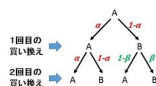
「A製品とB製品の所有者が、次のように製品を買い換えるものとする。A製品の所有者が、買い換えの際に、そのままA製品を選択する確率が α ($0 < \alpha < 1$)、B製品を選択する確率が $1 - \alpha$ 、B製品の所有者のうち、B製品を選択する確率が β ($0 < \beta < 1$)、A製品を選択する確率が $1 - \beta$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 初めにA製品を所有していた人が2回目の買い換え後にB製品を所有している確率を求めよ。
 (2) 初めにA製品を所有していた人がn回目の買い換え後にB製品を所有している確率を求めよ。」

です。

(2)を解いて、 $n = 2$ として(1)の答えを求めてもよいのですが、ここは順番に片付けていきましょう。

まず(1)です。A製品所有者のすべての買い換え過程を下図に示します。



▲図. A製品所有者のすべての買い換え過程

この図から判るように、A製品の所有者が2回目の買い換え後に、B製品を所有するのは、 $A \rightarrow A \rightarrow B$ 、または、 $A \rightarrow B \rightarrow B$ で、それぞれの確率pは、

$$p(A \rightarrow A \rightarrow B) = \alpha(1 - \alpha)$$

$$p(A \rightarrow B \rightarrow B) = (1 - \alpha)\beta$$

なので、初めにA製品を所有していた人が2回目の買い換え後にB製品を所有している確率Pは、

$$P = p(A \rightarrow A \rightarrow B) + p(A \rightarrow B \rightarrow B)$$

$$= \alpha(1 - \alpha) + (1 - \alpha)\beta$$

$$= (1 - \alpha)(\alpha + \beta)$$

で、これが答えになります。

次に(2)です。これは漸化式で解きましょう。

n回目の買い換え後にB製品を所有している確率を $p(n)$ とします。すると、 $n = 0$ 、つまり、初めにB製品を所有している確率は0なので、

$$p(0) = 0 \quad (1)$$

です。

また、 $n - 1$ 回目の買い換え後に、A製品を所有している確率は $1 - p(n - 1)$ 、B製品を所有している確率は $p(n - 1)$ なので、

$$p(n) = (1 - \alpha)(1 - p(n - 1)) + \beta p(n - 1) \\ = (\alpha + \beta - 1)p(n - 1) + (1 - \alpha) \quad (2)$$

が成り立ちます。

そこで、(2)を変形して、(特性方程式を使っても、気合で見つけてもどちらでもOKです)

$$p(n) - (1 - \alpha) / (2 - \alpha - \beta) = (\alpha + \beta - 1) (p(n - 1) - (1 - \alpha) / (2 - \alpha - \beta))$$

から、

$$p(n) = (\alpha + \beta - 1)^n (p(0) - (1 - \alpha) / (2 - \alpha - \beta)) + (1 - \alpha) / (2 - \alpha - \beta) \quad (3)$$

です。

ここで、(1)を(3)に代入して整理すると、

$$p(n) = -(\alpha + \beta - 1)^n (1 - \alpha) / (2 - \alpha - \beta) + (1 - \alpha) / (2 - \alpha - \beta) \\ = (1 - \alpha) (1 - (\alpha + \beta - 1)^n) / (2 - \alpha - \beta)$$

となり、これが答えになります。

試みに、 $p(2)$ を計算してみると、

$$p(2) = (1 - \alpha) (1 - (\alpha + \beta - 1)^2) / (2 - \alpha - \beta) \\ = (1 - \alpha) (1 - \alpha^2 - \beta^2 - 1 - 2\alpha\beta + 2\beta + 2\alpha) / (2 - \alpha - \beta) \\ = (1 - \alpha) (-\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta + 2\beta + 2\alpha) / (2 - \alpha - \beta) \\ = (1 - \alpha) (\alpha + \beta) (2 - \alpha - \beta) / (2 - \alpha - \beta) \\ = (1 - \alpha) (\alpha + \beta)$$

と先程の答えと一致しました。

今回は簡単な漸化式でしたが、複雑な漸化式もあるので、興味のある人は調べてみてください。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533