中学生でも解ける東大大学院入試問題（１６９）

2015-04-13 12:28:43

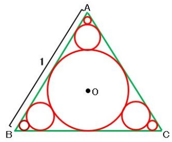
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

予報通り朝から雨になりました。明後日の水曜日までぐずついた雨模様が続くようです。

さて、今回は平成２４年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「一辺の長さが１の正三角形がある。まず、この正三角形に内接する円を描く。次に、描いた円と正三角形の二辺に接し、かつ、これまでより小さい円をすべて描く。この手続きを無限に繰り返すとき、すべての円の円周の和と正三角形の外周はどちらがどれだけ長いか答えよ。」
です。

まず初めに図を描きます。すると、図１のようになり、正三角形のなかにある円の円周の和（赤色線の和）と正三角形の外周（緑色線）とを比べればよいということです。

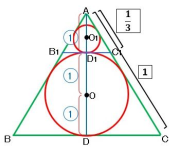


▲図１．問題を図にしました

図１の円Ｏの円周の長さは、一辺の長さが１の正三角形の高さが、√３/２で点Ｏが△ＡＢＣの重心であることから、√３/２×２/３＝√３/３と判ります。したがって、円Ｏの円周の長さは、√３π/３になります。

次に２、３、・・・番目の円ですが、それらの隣り合う円とその円に外接する正三角形との関係が相似なので、相似比を求めるのが良さそうです。

そこで、図２のように２番目に大きな円に外接する正三角形ＡＢ1Ｃ1と元の正三角形（△ＡＢＣ）との相似比を調べると、それは１/３になることが判ります。



▲図２．相似比を求めます

この相似関係は、円Ｏ1、Ｏ2、Ｏ3、・・・の隣り合う外接正三角形でも成り立ち、ここで、円Ｏの円周をＬ０（＝√３π/３）、すべての円の円周の和をＬとすると、
Ｌ＝Ｌ０＋３（１/３・Ｌ０＋（１/３）^2・Ｌ０＋（１/３）^3・Ｌ０＋・・・・）
　＝Ｌ０＋３Ｌ０（１/３＋（１/３）^2＋（１/３）^3＋・・・・）　　　　　（１）
となります。

ここで、（　　）の中を求めるために、まず、
Ｓn＝１/３＋（１/３）^2＋（１/３）^3＋・・・＋（１/３）^n　　　　　（２）
を計算します。

（２）から（２）×１/３を引いて、
Ｓn-　１/３Ｓｎ＝１/３-　（１/３）^(n+1)
とし、Ｓnについて解くと、
２/３・Ｓn＝１/３（１-　（１/３）^n）
から、
Ｓn＝１/２（１-　（１/３）^n）
を得ます。

ここで、ｎ→∞とすると、（１/３）^n→０なので、Ｓnの極限値は１/２になります。（←すみません、高校数学の範囲です）

つまり、（１）のＬは、
Ｌ＝Ｌ０＋３Ｌ０・１/２
　＝５/２・Ｌ０
で、Ｌ０＝√３π/３なので、
Ｌ＝５√３π/６（≒４．５３）

になります。

一方、正三角形ＡＢＣの外周は$1\times 3=3$なので、すべての円の円周の和が正三角形の外周より$5\sqrt{3}\pi/6-3$だけ長くなります。

隣り合う円の外接正三角形がお互いに相似であることから、すべての円の円周の和が、相似比を公比とする等比数列で表せることに気が付けば簡単な問題です。途中で高校で勉強する極限が出てきましたが、興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533