中学生でも解ける東大大学院入試問題（１７７）

2015-04-23 13:06:43

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

天気図を見ると日本列島全体が高気圧に覆われていて日本中晴れマークです。おまけに大陸からの高気圧が連なっていて、暫く好天が続くようです。これで今までの日照不足も解消ですね。

さて、今回は平成２０年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、
「正多面体について、以下の設問に答えよ。ただし、正多面体の頂点の数（Ｘ）、辺の数（Ｙ）、面の数（Ｚ）との間には、Ｘ－Ｙ＋Ｚ＝２の関係があるものとする。

（１）正多面体をすべてあげよ。なお、解答に至る過程も示せ。
（２）（１）で求めたそれぞれの正多面体について頂点の数、辺の数、面の形状をそれぞれ求めよ。
（３）それぞれの正多面体が半径１の球に内接するとき、球の体積に最も近い正多面体はどれか。なお、理由も吹きせよ。」
です。

正多面体は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の５種類しかないことは中１で勉強します。
（１）ではそれらが５種類しかないことを説明する必要があるのですが、問題に「オイラーの多面体定理」が挙げてあるので、これを使うのが良いでしょう。

正多面体のすべての面は合同な正多角形なので、正多面体がＺ個の正Ｎ角形でできているとします。

すると、Ｚ個の正Ｎ角形では辺の数が合計ＺＮ（本）になりますが、２本の辺で正多面体の１本の辺になるので、
ＺＮ＝２Ｙ　　　　　　　　　（１）
が成り立ちます。

また、Ｘ個の頂点にそれぞれＭ（本）の辺が集まり、１本の辺は２個の頂点を結ぶので、
ＭＸ＝２Ｙ　　　　　　　　　（２）
が成り立ちます。

そこで、（１）（２）から、それぞれ、
Ｚ＝２Ｙ/Ｎ　　　　　　　　　（３）
Ｘ＝２Ｙ/Ｍ　　　　　　　　　（４）
として、（３）（４）を、Ｘ－Ｙ＋Ｚ＝２　に代入すると、
２Ｙ/Ｍ－Ｙ＋２Ｙ/Ｎ＝２
２/Ｍ＋２/Ｎ－１＝２/Ｙ　　　（５）
となります。

ここで、（５）の右辺は正なので、
２/Ｍ＋２/Ｎ－１＞０　　　　（６）
となり、（６）を変形して、
ＭＮ－２Ｍ－２Ｎ＜０
（Ｍ－２）（Ｎ－２）＜４　　　（７）
が成り立ちます。

ところが、Ｍ、Ｎは３以上の整数なので、（７）を満たすＭ、Ｎの組合せ（Ｍ，Ｎ）は、（３，３）（３，４）（３，５）（４，３）（５，３）になり、これらと（３）（４）（５）から、Ｘ、Ｙ、Ｚの組合せ（Ｘ，Ｙ，Ｚ）を求めると、
（３，３）のとき、（　４，　６，　４）→　正四面体
（３，４）のとき、（　８，１２，　６）→　正六面体
（３，５）のとき、（２０，３０，１２）→正十二面体
（４，３）のとき、（　６，１２，　８）→　正八面体
（５，３）のとき、（１２，３０，２０）→正二十面体
となり、正多面体は、上記の５種類です。

次は（２）です。

頂点の数はＸ、辺の数はＹ、面の形状はＮなので、（１）から、
正四面体　は、頂点の数：　４、辺の数：　６、面の形状：正三角形
正六面体　は、頂点の数：　８、辺の数：１２、面の形状：正四角形
正八面体　は、頂点の数：　６、辺の数：１２、面の形状：正三角形
正十二面体は、頂点の数：２０、辺の数：３０、面の形状：正五角形
正二十面体は、頂点の数：１２、辺の数：３０、面の形状：正三角形
となります。

最後に（３）ですが、半径１の球に内接する正多面体の体積を、５種類について求めれば良いわけですが、その計算は

恐ろしく大変です。

そこで、球の内側の面に取り付けたフックに引っ掛けて、球の内部に網を張ることをイメージすると、一番大きく網が張れるのはフックが多いとき、つまり、球に内接する頂点の数が多いときになりそうなので、球の体積に最も近い正多面体は、正十二角形になりそうです。

他に、正多面体の面をその対角線で三角形に分割して、正多面体表面にできる三角形の個数を比べても良さそうです。

その三角形の個数は、
正四面体:　　　１×４ ＝ ４個
正六面体:　　２×６ ＝ １２個
正八面体:　　　１×８ ＝ ８個
正十二面体: ３×１２ ＝ ３６個
正二十面体: １×２０ ＝ ２０個
なので、三角形の個数が一番多い、正十二面体が答えになりそうです。

実際、インターネットで半径１の球（体積３．１４）に内接する正多角形の体積を調べてみると、
正四面体　：０．５１
正六面体　：１．５４
正八面体　：１．３３
正十二面体：２．７９
正二十面体：２．５４
となっていて、確かに、正十二面体が正解なのですが、その理由を「頂点の数が一番多いから」などとしてＯＫなのか判りません。申し訳ありません。

正多面体が５種類しかないことを「オイラーの多面体定理」を使って説明しましたが、凸多面体の一つの頂点に集まる角度の和が３６０°未満であることを使っても（７）の不等式を導くことができます。興味のある人は調べてみてください。また、（３）の理由をご存知の方は教えていただけると有難いです。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533