

中学生でも解ける東大大学院入試問題 (130)

2015-03-04 11:43:05

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

まだ少し曇っていますが、今の気温が13℃で、これからさらに上がって17℃になるようです。春らしくなってきましたが、まだ寒い日も来るようなので体調に気を付けてお過ごしください。

さて、今回は平成26年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「毎年、A国ではその人口の α ($0 < \alpha < 1$) の割合の人がB国に移り、B国ではその人口の β ($0 < \beta < 1$) の割合の人がA国に移る。なお、人口の増減はこの移動のみによって起こり、A国の人口とB国の人口の和は常に一定であるとする。

(1) ある時点でA国の人口とB国の人口はそれぞれ X_0 と Y_0 であった。その時点から10年後のA国の人口を X 、 Y 、 α と β を用いて表せ。

(2) $\beta = 2\alpha$ のとき、無限年後におけるA国とB国の人口比率を求めよ。」
です。

漸化式の問題です。

まず、 n 年後のA国の人口を $X(n)$ 、B国の人口を $Y(n)$ として $n+1$ 年後のA国の人口 ($X(n+1)$) を考えると、A国からB国に $\alpha X(n)$ だけ出ていって、B国からA国に $\beta Y(n)$ だけ入ってくるので、

$$X(n+1) = (1 - \alpha) X(n) + \beta Y(n) \quad (1)$$

という関係式が成り立ちます。

一方、A国の人口とB国の人口の和は一定なので、

$$X(n) + Y(n) = X_0 + Y_0 \quad (2)$$

が成り立ちます。

(1) と (2) から $Y(n)$ を消去すると、

$$\begin{aligned} X(n+1) &= (1 - \alpha) X(n) + \beta (X_0 + Y_0 - X(n)) \\ &= (1 - \alpha - \beta) X(n) + \beta (X_0 + Y_0) \end{aligned} \quad (3)$$

となります。

ここで(3)の特性方程式

$$p = (1 - \alpha - \beta) p + \beta (X_0 + Y_0)$$

から、

$$p = \beta (X_0 + Y_0) / (\alpha + \beta)$$

とすると、(3)は、

$$X(n+1) - \beta (X_0 + Y_0) / (\alpha + \beta) = (1 - \alpha - \beta) (X(n) - \beta (X_0 + Y_0) / (\alpha + \beta)) \quad (4)$$

と変形でき、

$$X(n+1) - \beta (X_0 + Y_0) / (\alpha + \beta) = (1 - \alpha - \beta)^{n+1} (X(0) - \beta (X_0 + Y_0) / (\alpha + \beta)) \quad (5)$$

となります。($(1 - \alpha - \beta)^{n+1}$)は、 $(1 - \alpha - \beta)$ の $n+1$ 乗を表します

ここで、 $n+1 \rightarrow n$ 、 $X(0) = X_0$ とすると、

$$X(n) = (1 - \alpha - \beta)^n \cdot (\alpha X_0 - \beta Y_0) / (\alpha + \beta) + \beta (X_0 + Y_0) / (\alpha + \beta) \quad (6)$$

となり、 n 年後のA国の人口が判りました。

最後に(6)に $n=10$ を代入して、

$$X(10) = (1 - \alpha - \beta)^{10} \cdot (\alpha X_0 - \beta Y_0) / (\alpha + \beta) + \beta (X_0 + Y_0) / (\alpha + \beta)$$

が10年後のA国の人口になり、これが答えです。

次に(2)ですが、 $\beta = 2\alpha$ を(6)に代入すると、

$$\begin{aligned} X(n) &= (1 - 3\alpha)^n \cdot (\alpha X_0 - 2\alpha Y_0) / (\alpha + 2\alpha) + 2\alpha (X_0 + Y_0) / (\alpha + 2\alpha) \\ &= (1 - 3\alpha)^n \cdot (X_0 - 2Y_0) / 3 + 2 (X_0 + Y_0) / 3 \end{aligned} \quad (7)$$

となります。

ここで、 β の変域は、 $0 < \beta < 1$ なので、 $\beta = 2\alpha$ から、 $0 < 2\alpha < 1$ 、つまり、 $0 < \alpha < 1/2$ です。

すると、

$$-1/2 < 1 - 3\alpha < 1$$

なので、 $(1 - 3\alpha)^n$ は、 n を大きくすると($n \rightarrow \infty$)、 $(1 - 3\alpha)^n \rightarrow 0$ になります。

したがって、

$$X(\infty) \rightarrow 2 (X_0 + Y_0) / 3 \quad (8)$$

です。

また、 $X(\infty) + Y(\infty) = X_0 + Y_0$ なので、

$$Y(\infty) = X_0 + Y_0 - X(\infty)$$

で、これと (8) から、

$$Y(\infty) \rightarrow X_0 + Y_0 - \frac{2}{3} (X_0 + Y_0) / 3$$

$$= (X_0 + Y_0) / 3$$

となり、無限年後における A 国と B 国の人口比率 $X(\infty) : Y(\infty)$ は、

$$X(\infty) : Y(\infty) = \frac{2}{3} (X_0 + Y_0) / 3 : (X_0 + Y_0) / 3$$

$$= 2 : 1$$

となり、これが答えになります。

(2) は極限がでてきましたが、ここでは絶対値が 1 より小さい数を繰り返し掛けていくと 0 に近づいていくことです。電卓でやったことのある人も多いと思います。高校で勉強するので楽しみにしてください。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533