

中学生でも解ける東大大学院入試問題（２２）

2014-10-25 12:57:21

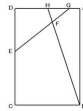
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今日も良い天気になりました。絶好の行楽日和です。天気図を見ると、大陸からの高気圧が続いていて、暫く晴れの日が続くようです。

昨日に続いて図形問題です。平成２１年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題ですが、都立高校入試問題レベルのように見えるものです。

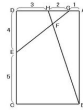
問題は、

「図に示す長方形ＡＢＣＤ中の四角形ＥＦＢＣの面積を求めよ。ただし、辺の長さは、 $AG = 1$ 、 $GH = 2$ 、 $HD = 3$ 、 $DE = 4$ 、 $EC = 5$ である。」



▲問題図

問題図に問題文中の辺の長さを書き入れたものを図１に示します。



▲図１．問題図に辺の長さを書き入れた図

一見して易しい問題で、求積する四角形ＥＦＢＣを三角形や台形に分割し、それぞれ面積を求めればお仕舞いです。そのとき、相似関係を使って所望の辺の長さを求めることになります。

四角形ＥＦＢＣの分割の仕方はいろいろありそうですが、ここでは図２に示すように、ＥからＣＢに平行な補助線を引きました。



▲図２．四角形ＥＦＢＣの分割

まず、 $\triangle BAH \sim \triangle BIJ$ なので、 $AH : IJ = BA : BI$ となり、 $AH = 3$ 、 $BA = 9$ 、 $BI = 5$ を代入して、 $IJ = 5/3$ と判り、さらに、 $EJ = EI - IJ = 6 - 5/3 = 13/3$ となります。

次に、ＦからＥＩ に垂線を降ろしその足をＫとすると、 FK は $\triangle FEJ$ で底辺を EJ としたときの高さになります。

そして、 $\triangle FEJ \sim \triangle FGH$ を利用すると、 $EJ : GH = FK : (4 - FK)$ が成り立つので、 $EJ = 13/3$ 、 $GH = 2$ 、を代入して、 $FK = 52/19$ となります。

これで四角形ＥＦＢＣを分割した、 $\triangle FEJ$ と台形ＣＢＪＥの面積を計算することができるようになりました。 $\triangle FEJ$ の面積 $S(\triangle FEJ)$ は、

$$S(\triangle FEJ) = \frac{1}{2} \cdot EJ \cdot FK \\ = \frac{1}{2} \cdot 13/3 \cdot 52/19 = 338/57$$

台形ＣＢＪＥの面積 S （台形ＣＢＪＥ）は、

$$S(\text{台形}CBJE) = \frac{1}{2} \cdot (EJ + CB) \cdot CE \\ = \frac{1}{2} \cdot (13/3 + 6) \cdot 5 \\ = \frac{1}{2} \cdot 31/3 \cdot 5 \\ = 155/6$$

従って、四角形ＥＦＢＣの面積 S （ $\square EFCB$ ）は、

$$S(\square EFCB) = S(\triangle FEJ) + S(\text{台形}CBJE) \\ = 338/57 + 155/6 \\ = 676/114 + 29945/114 \\ = 3621/114$$

$$= 1207/38$$

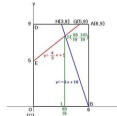
となります。

答えの数字が、あまり綺麗でないので他の解法で確かめてみましょう。

Cを原点、CBをx軸、CDをy軸とすると、四角形E F B CのE、B、Cの座標がそれぞれ、E (0, 5)、B (6, 0)、C (0, 0)となるので、Fの座標を求めれば四角形E F B Cの面積を計算することができます。

Fの座標は、直線EGと直線BHとの交点なので、それぞれの直線の式を連立させて解くことにより求めることができます。

また嬉しいことに、GとHの座標は簡単で、それぞれ、G (5, 9)、H (3, 9)となり、直線EGと直線BHの式は簡単に求めることができます。図3にその結果を示します。(よく判らない中3生はしっかり復習しておきましょう。都立高校入試に必ず出題されます。)



▲図3. Fの座標を求める

四角形E F B Cを台形E C L Fと△F L Bに分割してそれぞれの面積を計算すると、

$$\begin{aligned} S(\text{台形E C L F}) &= 1/2 \cdot (5 + 147/19) \cdot 65/19 \\ &= 1/2 \cdot 242/19 \cdot 65/19 \\ &= 15730 / (2 \cdot 19 \cdot 19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\triangle F L B) &= 1/2 \cdot (6 - 65/19) \cdot 147/19 \\ &= 1/2 \cdot 49/19 \cdot 147/19 \\ &= 7203 / (2 \cdot 19 \cdot 19) \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} S(\square E F B C) &= S(\text{台形E C L F}) + S(\triangle F L B) \\ &= (15730 + 7203) / (2 \cdot 19 \cdot 19) \\ &= 22933 / (2 \cdot 19 \cdot 19) \\ &= 1207/38 \end{aligned}$$

と前記した答えと一致しました。

大抵の場合、答えがスッキリしたものになると正解だと確信するのですが、昔の東大入試問題では、綺麗でない答えになって、受験生を疑心暗鬼にさせるものがありました。この問題もそれを踏襲しているのかも知れません。

いずれにしても、この問題は図形問題というより計算問題で、その点で都立高校入試問題より難しそうです。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533