

中学生でも解ける東大大学院入試問題（128）

2015-03-02 13:01:08

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

風がありますが晴れて良い天気になりました。今日は都立高校の合格発表日で、今年度の高校受験も終わりといったところです。この1年間で上手くいったところ、上手くいかなかったところを考えて来年度に活かしていきたいと思います。

さて、今回は平成23年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「A、B 2つのチームが試合をして、先に4勝したチームが優勝とする。各試合において、AがBに勝つ確率は $\frac{3}{5}$ で、引き分けはないものとする。

（1）4試合目でAが優勝する確率を求めよ。

（2）6試合目で優勝が決まる確率を求めよ。」
です。

反復試行の確率の問題です。

まず（1）は、Aが4連勝するということなので、AがBに勝つ確率 $\frac{3}{5}$ を4回掛ければOKです。

つまり、

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$$

が答えになります。

次に（2）ですが、6試合目に優勝が決まるのは、

（ア）5試合目までにAが3勝2敗で6試合目にAが勝つ場合

（イ）5試合目までにAが2勝3敗で6試合目にBが勝つ場合
です。

（ア）の場合の5試合目までのAの勝敗を、Aが勝ったとき○、Aが負けたとき●で表すと、

[○○●●]

[○○●○] [○○●○]

[○●○○] [○●○○] [○●○○]

[●○○○] [●○○○] [●○○○] [●○○○]

の10通りになり、それぞれの確率はすべて同じで、

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

なので、（ア）の確率は、

$$10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{648}{3125}$$

になります。

同様に（イ）の場合の5試合目までのAの勝敗を表すと、

[○○●●] [○○●●] [○●○○] [○●○○]

[●○○○] [●○○○] [●○○○]

[●○○○] [●○○○]

[●●○○]

の10通りになり、それぞれの確率はすべて同じで、

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

なので、（イ）の確率は、

$$10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{288}{3125}$$

になります。

したがって、6試合目で優勝が決まる確率は、

$$\frac{648}{3125} + \frac{288}{3125} = \frac{936}{3125}$$

で、これが答えになります。

また、組合せの記号を使うと、（ア）、（イ）の確率はそれぞれ、

$${}^5C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = (5 \cdot 4 \cdot 3) / (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

および

$${}^5C_2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = (5 \cdot 4) / (2 \cdot 1) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

と簡単に計算することができます。

このようなn試合目で優勝が決まる確率は、n-1試合目までで王手が掛かっている状況を考えて計算します。このテクニックを覚えておきましょう。