中学生でも解ける東大大学院入試問題（２６）

2014-10-30 12:44:49

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨夜１０時頃に帰宅するときはそれほど寒くなかったのですが、今朝はたいへん冷え込みました。天気図では、高気圧が日本列島を広く覆っていますが、明日から天気は崩れ模様のようです。

今回は、平成１８年東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題を取り上げます。

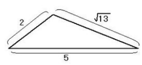
問題は、
「３辺の長さがそれぞれ　２、√１３（ルート１３）、５の三角形の面積を求めよ。」
です。

三角形の合同条件の１つに、「３組の辺がそれぞれ等しい」というものがあることから判るように、３辺の長さが与えられると、三角形は決定します。つまり、その面積がひとつに定まるということです。

まず、与えられた条件で三角形ができるのかを調べみましょう。３辺の長さが与えられたとき、三角形ができるための条件は、
（１番長い辺の長さ）＜（残り２辺の長さの和）　　（１）
です。

問題で与えられた√１３は、約３．６なので、１番長い辺の長さは５、残りの２辺の長さの和は、２＋√１３≒２＋３．６＝５．６となって、確かに（１）を満たします。

そこで、図１に与えられた三角形を示します。

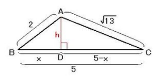


▲図１．与えられた三角形

図１の三角形の面積を求める方法はいくつかありますが、それらの「根っこ」は同じなので、それほど面白いものではありませんが、（i）三平方の定理を使う方法、（ii）ヘロンの公式を使う方法、（iii）余弦定理を使う方法、の３つを紹介します。

（i）三平方の定理を使う方法
ご存知のように、三角形の面積は、（底辺）×（高さ）÷２　ですから、三角形の１つの頂点からその対辺に垂線を降ろせば、その垂線の長さが高さになるので、三角形の面積を計算することができます。

そこで、１つの頂点（Ａ）から対辺（ＢＣ）に垂線を降ろし、その垂線の足をＤとした場合を図２に示します。



▲図２．三平方の定理を使う方法

図２で、ＢＤ＝ｘとすると、ＣＤ＝５－ｘになります。また、ＡＤ＝ｈとして、△ＡＢＤに三平方の定理を適用すると、
ｘ^2＋ｈ^2＝２^2
＝４　　　　（２）　（ｘ^２はｘの２乗を表します）

次に、△ＡＣＤに三平方の定理を適用すると、
（５－ｘ）^2＋ｈ^2＝（√１３）^2
　　　　＝１３　　　　（３）

ここで、（２）（３）からｈを求めればＯＫです。

（３）－（２）でｈ^2を消去すると、
（５－ｘ）^2－ｘ^2＝１３－４
２５－１０ｘ＋ｘ^2－ｘ^2＝９
１０ｘ＝１６
ｘ＝８/５　　　　（４）

（４）を（２）に代入して、
（８/５）^2＋ｈ^2＝４
ｈ^2＝４－６４/２５
　　＝３６/２５
ｈ＝±６/５

$h>0$ より、
$h=6/5$　　　　　（５）

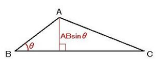
△ＡＢＣの面積をＳとすると、
$S=1/2\cdot BC\cdot h$
$\quad =1/2\cdot 5\cdot 6/5$
$\quad =3$
と面積が求まりました。

次に、（ii）ヘロンの公式を使う方法です。ヘロンの公式は、三角形の各辺の長さを　a、b、c とし、$s=(a+b+c)/2$ とすると、その三角形の面積Ｔは、
$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
となるというものです。簡単で覚えやすい公式です。（あまり使うことはありませんでしたが）

では、２、$\sqrt{13}$、５の場合を計算してみましょう。まず、
$s=(2+\sqrt{13}+5)/2$
$\quad =(7+\sqrt{13})/2$

与えられた三角形の面積をＳとすると、
$S=\sqrt{((7+\sqrt{13})/2\cdot((7+\sqrt{13})/2-2)\cdot((7+\sqrt{13})/2-\sqrt{13})\cdot((7+\sqrt{13})/2-5))}$
$\quad =\sqrt{((7+\sqrt{13})/2\cdot(3+\sqrt{13})/2\cdot(7-\sqrt{13})/2\cdot(-3+\sqrt{13})/2)}$
$\quad =\sqrt{((7+\sqrt{13})/2\cdot(7-\sqrt{13})/2\cdot(3+\sqrt{13})/2\cdot(-3+\sqrt{13})/2)}$
$\quad =\sqrt{((49-13)/4\cdot(13-9)/4)}$
$\quad =\sqrt{(36/4\cdot 4/4)}$
$\quad =\sqrt{9}$
$\quad =3$
と先ほどの答えと同じになりました。

最後に、（iii）余弦定理を使う方法です。図３のように$\angle ABC=\theta$とします。



▲図３．余弦定理を使う方法

すると、△ＡＢＣの面積Ｓは、
$S=1/2\cdot BC\cdot AB\cdot \sin\theta$　　（６）
となり、また、余弦定理から
$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\theta$　　（７）
が成り立ちます。

ここで、（７）と
$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$　　　（８）
を使って、$\sin\theta$を求め、（６）に代入すれば、Ｓが計算できます。

早速、（７）にＡＢ＝２、ＢＣ＝５、ＢＣ＝$\sqrt{13}$を代入すると、
$(\sqrt{13})^2=2^2+5^2-2\cdot 2\cdot 5\cdot\cos\theta$
$13=4+25-20\cos\theta$
$20\cos\theta=16$
$\cos\theta=16/20$
$\quad\quad =4/5$　　　　　（９）

（９）を（８）に代入して、
$(\sin\theta)^2+(4/5)^2=1$
$(\sin\theta)^2=1-16/25$
$\quad\quad\quad =9/25$
$\sin\theta>0$ より、
$\sin\theta=3/5$　　　　（１０）

（１０）とＡＢ＝２、ＢＣ＝５を（６）に代入して、
$S=1/2\cdot 5\cdot 2\cdot 3/5$
$\quad =3$
となります。

この他にも、外接円の半径を使う方法（$S=abc/(4R)$、Ｒは外接円の半径）などあるので興味があれば調べてみてください。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533