

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１８８）

2015-05-04 11:46:54

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

５日連続の夏日だそうで、今夜雨が降りますが朝には止んで、明日も夏日になるようです。

さて、今回は平成２２年度東大大学院工学系システム創成学の入試問題です。

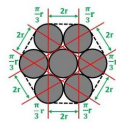
問題は、

「半径 r の円柱形の缶をひもで束ねることを考える。たとえば、２個の缶をひもで束ねると、図に示すようになる。７個の缶を束ねることができる最も短いひもの長さを求めよ。



です。

答えは、図１のように正六角形の中心と６個の頂点に缶の中心を配置した形で、それを束ねる最も短いひもの長さは、 $6 \times 2r + 2\pi r = (12 + 2\pi)r$ になります。

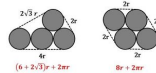


▲図１．７個の缶を最短のひもで束ねる配置

問題は、図１で示した配置のとき、ひもの長さが最短になるかということですが、ここでは、

- (１) ひもと接する隣り合わせの缶が接しているとき、ひもの長さが最短になる
 - (２) ひもと缶の接触部（弧、接点）の個数が最小のとき、ひもの長さが最短になる
- の２点を調べました。

初めに（１）ですが、まず図２のような４個の缶を並べたときを調べます。



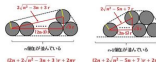
▲図２．４個の缶を並べた場合

図２の左側の配置は、一番左にある缶と上にある缶が接していません。そして、この配置でのひもの長さは、 $(6 + 2\sqrt{3})r + 2\pi r$ です。

一方、右側の配置は、左側の配置から一番左にある缶を上に移したもので、この配置でのひもの長さは、 $8r + 2\pi r$ です。

つまり、右側の配置のほうがひもの長さが短くなります。

そこで、図３のように、下に n 個の缶を並べた配置を調べます。



▲図３． n 個の缶を並べた場合

図３の左側の配置はひもの長さは、 $(2n + 2\sqrt{(n^2 - 3n + 3)})r + 2\pi r$ です。

一方、右側の配置は、左側の配置から一番左にある缶を上にある缶の横に接して置いたもので、この配置でのひもの長さは、 $(2n + 2\sqrt{(n^2 - 5n + 7)})r + 2\pi r$ です。

これらの２つの配置のひもの長さの差 D を計算すると、

$$D = (2n + 2\sqrt{(n^2 - 3n + 3)})r + 2\pi r - ((2n + 2\sqrt{(n^2 - 5n + 7)})r + 2\pi r) \\ = 2(\sqrt{(n^2 - 3n + 3)} - \sqrt{(n^2 - 5n + 7)})r$$

となり、

$$(n^2 - 3n + 3) - (n^2 - 5n + 7) = 2n - 4$$

から、 $n \geq 3$ で、 $D > 0$ です。

つまり、図３の右側の配置のほうが、左側の配置よりもひもの長さが短くなることがわかります。

そして、図３で行ったような缶の移動を繰り返すと、必要なひもの長さは短くなっていき、結局、ひもと接する隣り合

わせの缶が接しているときひもの長さが最短になることが判ります。

つぎに(2)ですが、隣り合う2個の缶を接するようにして缶を配置したとき、缶とひもの接触部の個数を m とすると、接触部間のひもの長さは $2r$ なので、ひもの合計の長さは、 $2mr + 2\pi r$ になります。

例えば、図4のように、7個の缶を一列に並べたとき、ひもと接する部分の個数は、列の両端の缶が1箇所、それ以外の5個の缶はそれぞれ2箇所で、 $m = 12$ になり、ひもの長さは、 $24r + 2\pi r$ です。



▲図4．7個の缶を一列に並べた配置

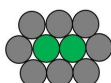
そこで図5のように、1つの缶がひもと1箇所接するように配置（例えば、俵積み）すると、接触部は7箇所になり、ひもの長さは、 $14r + 2\pi r$ になります。



▲図5．1つの缶がひもと1箇所接するような配置

さらに、缶とひもの接触部を減らすために、図1のように、正六角形の中央にある1個の缶を取り囲むように残りの6缶を配置し、中央の缶とひもが接しないようにすることができます。このとき、接触部は6箇所になり、ひもの長さは、 $12r + 2\pi r$ になります。

そこで、さらに接触部を減らすため2個の缶を取り囲むことを調べます。この場合は、図6に示すように取り囲む缶が8個必要になります。したがって、合計7個の缶、つまり、5個の缶で2個の缶を取り囲むことができないということが判ります。



▲図6．2個の缶を取り囲む場合

以上から、7個の缶を正六角形の中心と6個の頂点に配置したとき、缶とひもの接触部が最小の6箇所になり、そのとき、ひもの長さが、 $12r + 2\pi r$ で最短になることが判りました。

判りにくい説明かもしれませんが、もし、判りやすい説明をご存知の方は、是非、ご教示ください。