

中学生でも解ける東大大学院入試問題（５９つづき）

2014-12-12 11:26:45

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

気温が 11°C と少し暖かく、今は曇りですが、これから晴れてくるようです。ところが日曜日には冬将軍が到来し、一段と寒くなるようです。受験生の皆さんは暖かくして勉強してください。

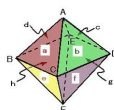
さて、今回は昨日の問題の続きです。平成 20 年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題、
「以下の問題にすべて答えよ。」

（１）正八面体の各面に $1 \sim 8$ の数字を 1 つずつ書き込んでできる八面体さいころは何種類できるか。ただし回転して同一になるものは同じとみなす。

（２）その中で、どの頂点についても、そこに会する 4 面につけられた数字の和が同一になるようなものがあるか。もしあれば、そのような配列の一例を示せ。」

の（２）です。（問題文のなかの「会する」の意味は、広辞苑によると、「出あう。いつしよになる。」ということで、例文には、「二つの川は平野部で会する」が挙げてあります）

まず、図 1 のように、正八面体の頂点と面に記号をつけます。（面の a 、 b 、 c 、 \dots は、書き込まれる数字になります）



▲図 1．正八面体の頂点と面に記号をつけます

「どの頂点についても、そこに会する 4 面につけられた数字の和が同一の値になる」というのを立式します。

頂点 A に会する 4 面につけられた数字の和は、

$$a + b + c + d$$

で、頂点 B に会する 4 面につけられた数字の和は、

$$a + d + e + h$$

となります。

以下同様に、

$$\text{頂点 C: } a + b + e + f$$

$$\text{頂点 D: } b + c + f + g$$

$$\text{頂点 E: } c + d + g + h$$

$$\text{頂点 F: } e + f + g + h$$

となります。

これら 6 つの式の値が同一になるとし、その値を S とすると、

$$S = a + b + c + d$$

$$= a + d + e + h$$

$$= a + b + e + f$$

$$= b + c + f + g$$

$$= c + d + g + h$$

$$= e + f + g + h$$

ですから、

$$6S = a + b + c + d$$

$$+ a + d + e + h$$

$$+ a + b + e + f$$

$$+ b + c + f + g$$

$$+ c + d + g + h$$

$$+ e + f + g + h$$

$$= 3(a + b + c + d + e + f + g + h)$$

が成り立ちます。ここで、 a から h は、1 から 8 ですから、

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 36$$

です。

したがって、

$$6S = 3 \times 36$$

$$S = 18$$

と判ります。

つまり、問題は、「正八面体のどの頂点についても、そこに会する 4 面につけられた数字の和が 18 になるようなもの

があるか」ということで、これは、「1から8までの数字をそれぞれ3回使って、4個の数字の和が18となるそれぞれ異なる6つの組を作ることができるか」と言い換えることができます。

そこで1から8までの数字で、それらの4個の和が18になるものを調べた結果を表1に示します。（4個の数字のなかに8があるとき、残りの3個の数字の和が10になる組合せを見つけたらといった具合に調べ上げていけばOKです）

▲表1. 4個の数字の和が18になる組合せ

1	2	3	4	5	6	7	8
○	○					○	○
○		○		○	○		○
○			○	○	○	○	○
○		○	○	○	○		○
○	○			○	○		○
○			○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○		○

表1の各行が、ある頂点对応し、その行に○が記されている数字が、その頂点に会する4面につけられた数字を表します。そして、それらは8行あるので、このなかから1つの数字を3回含むように6行を選び、それらを各頂点に割り当てれば所望の正八面体が完成します。

そこで、じっくり表1を眺めると、2つの行を組み合わせると1から8までの数字が1回ずつ現れる組合せがあることが判ります。つまり、8行から1つの数字を3回含むように6行選ぶ代わりに、1から8までの数字を1回ずつ含む2行を見つけて、8行のなかからそれらを取り除いて6行を求めればOKです。

表2に1から8までの数字を1回ずつ含む2行の組合せを示します。（同じ色の2つの行がその組合せになります）

▲表2. 1から8までの数字を1回ずつ含む2行の組合せ

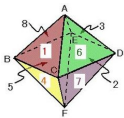
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○

表2を使って最後の仕上げです。ここで気を付けなければならないことが、図1の正八面体の6面を構成する6つの三角形では、頂点Aと頂点F、頂点Bと頂点D、頂点Cと頂点Eを含むものがないということです。これは、表2の3組ある同じ色の2行に頂点Aと頂点F、頂点Bと頂点D、頂点Cと頂点Eを割り当てることができないということです。

それを踏まえて表2の各行に各頂点を割り当てましょう。まず、除外する2行をアとクにします。（エとオにすると一つの面に2つの数字を割り当てることになり上手くいきませんが、その他の2行の組合せは大丈夫です）

次に、さいころの1の目を△ABCにつけましょう。つまり、イ→頂点A、ウ→頂点B、エ→頂点Cとするわけです。

すると、頂点Aと頂点Fは面を共有できないので、キ→頂点Fとなり、同様に、カ→頂点D、オ→頂点Eと決めることができます。図2に、完成した正八面体さいころの一例を示します。



▲図2. 完成した正八面体さいころ例

図や表を使って解くと判りやすいのですが、この問題では一例を示せばよいので（1分間くらい）試行錯誤して答えを見つけてしまうのが手っ取り早いかもしれません。また、もっと簡単な解き方もありそうなので、興味があれば考えてみてください。