

中学生でも解ける東大大学院入試問題（４１）

2014-11-20 12:04:01

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

かなり寒くなりました。気温は $11^{\circ}\text{C}$ で雨も降るかもしれません。明日から少し気温が上がるようですが、風邪など引かぬよう気をつけてください。

今回は平成21年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「1から1000までの自然数のうち3の倍数もしくは3がつく数はいくつあるか。」  
です。

1から1000までの自然数を全部調べて上げて答えに辿りつくことができます（多分その途中で何にか規則性が見つかって効率よく調べることができそうですが）、ここでは3の倍数の個数と3のつく数の個数を計算して、それらのうち重複するものを弾く方法でいきましょう。

まず、1000は3の倍数でもなく3のつく数でもないので、問題は1から999までの自然数を考えればOKです。  
（4桁の1000があると邪魔になるので）

そこで、3の倍数の個数は、

$$999 \div 3 = 333 \text{ 個}$$

になります。

次に、3のつく数の個数を勘定するのですが、3を1つ、2つ、3つ含む3通りの場合分けで計算する方法と、3のつく数の個数を3のつかない数の個数を全体（999個）から引いて計算する方法があります。ここでは後者を使います。

3のつかない数は、0、1、2、4、5、6、7、8、9の9個の数字から3つ選んで並べたもので、その個数は、 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 個

になります。しかし、このなかに「000」が含まれるので、1から999までのうち、3のつかない数の個数は、 $729 - 1 = 728$ 個  
になります。

したがって、3のつく数の個数は、

$$999 - 728 = 271 \text{ 個}$$

になります。

最後に、3の倍数で3のつく数を勘定します。ここは、3を何個含むかで場合分けするのがよいでしょう。

（１）3を3つ含む場合

この場合は、333だけなので1個です。

（２）3を2つ含む場合

この場合は、\*33、3\*3、33\*、の3通りがあつて、\*が0、6、9のとき3の倍数になるので、 $3 \times 3 = 9$ 個  
です。

（３）3を1つ含む場合

この場合は、\*☆3、\*3☆、3\*☆、の3通りあります。さらに、\*と☆が両方3の倍数（0、6、9）のいずれかの場合と、\*と☆の一方が3で割って1余る数（1、4、7）、他方が3で割って2余る数（2、5、8）との組み合わせた場合があります。

それらを計算すると、前者は、

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ 個}$$

で、

後者は、

$$3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54 \text{ 個}$$

になります。

以上から、

3の倍数もしくは3がつく数の個数

$$= 3 \text{ の倍数の個数 (333 個)}$$

$$+ 3 \text{ のつく数の個数 (271 個)}$$

$$- 3 \text{ の倍数で } 3 \text{ を } 3 \text{ つ含む数の個数 (1 個)}$$

$$- 3 \text{ の倍数で } 3 \text{ を } 2 \text{ つ含む数の個数 (9 個)}$$

$$- 3 \text{ の倍数で } 3 \text{ を } 1 \text{ つ含む数の個数 (27 + 54 個)}$$

$$= 513 \text{ 個}$$

になります。

他にもいろいろな解き方がありそうなので考えてみてください。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校  
<http://caitakiyama.jimdo.com/>  
TEL 042-472-5533