

中学生でも解ける東大大学院入試問題（12）

2014-10-09 13:12:25

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

曇りがちの天気になりました。台風が続いて東京には体育の日あたりに近づいてくるようなので、気をつけましょう。

さて、今回も東京大学大学院入試問題を取り上げます。問題は、平成21年度工学系研究科システム創成学で出題された整数の不定方程式に関するものです。

問題は、

「関係式

$$lmn = 2l + m + n, \quad l \geq m \geq n$$

を満たす正の整数（ l, m, n ）の組を全て求めよ」
です。

整数の不定方程式では、変数を取り得る範囲を有限個に限定して、あとは片っ端に調べていけば正解に辿り着けます。

それでは、与式のじっくり眺めましょう。すると、

$$l \geq m \geq n \quad (1)$$

なので、

$$m = n = 1 \quad (2)$$

のとき、

$$lmn = 2l + m + n \quad (3)$$

の右辺も左辺も最大になることに気が付きます。

しかし、ここで（2）を（3）の左辺に代入してみても、

$$l^3 \geq lm n \\ = 2l + m + n \quad (l^3 \text{ は、} l \text{ の} 3 \text{ 乗を表します})$$

となって、右辺の上限を明確にできません。（実際はこんな手順を踏みませんが）

では、（2）を（3）の右辺に代入してみると、

$$lmn = 2l + m + n \\ \leq 4l$$

となり、続いて両辺を l （ $l > 0$ ）で除して、

$$m n \leq 4 \quad (4)$$

を得ます。

この（4）はGoodな関係式で、正の整数 m, n の積が4以下ということを表しています。すると、（4）を満たす m, n の組み合わせ（ m, n ）は、 $m \geq n$ に注意して、

（4, 1）
（3, 1）
（2, 1）
（2, 2）
（1, 1）

になります。

これらを（3）に片っ端に代入して調べると、

（4, 1） $\rightarrow l = 5/2$ ×
（3, 1） $\rightarrow l = 4$
（2, 1） \rightarrow 不能 ×
（2, 2） $\rightarrow l = 2$
（1, 1） $\rightarrow l = -2$ ×

となり、 l, m, n の組み合わせ（ l, m, n ）は、

（4, 3, 1）
（2, 2, 2）

の2組と正解に辿り着くことができました。

このように整数の不定方程式では、変数の取り得る範囲を限定して調べ尽くすテクニックを覚えておきましょう。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533