

中学生でも解ける東大大学院入試問題（101）

2015-01-28 13:25:52

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

強い北風が吹いていて寒い日になりました。明日以降はもっと寒くなり、明後日は雪になるかもしれませんようです。受験生の皆さんは暖かくして勉強してください。

さて、今回は平成25年度東大大学院新領域科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「23100枚の同じ大きさの正方形の板がある。これらをすべて使い、重ねることなく、隙間なく敷き詰めて、縦M枚、横N枚の長方形を作るものとする。長方形の縦の長さが、横の長さより大きく、横の長さの2倍より小さい場合、MとNの組み合わせをすべて求めよ。

（参考： $\sqrt{23100} = 151.9868\dots$ ）」

です。

まず、問題に書かれている条件を立式しましょう。

$$MN = 23100 \quad (1)$$

$$2N > M > N \quad (2)$$

（M、Nは正の整数）

です。

（1）を見ると素因数分解したくなるので、

$$MN = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \quad (3) \quad (2^2 \text{は} 2 \text{の} 2 \text{乗を表します})$$

として、（2）（3）でMまたはNを絞り込む方針でいきましょう。（但し、M、Nの因数をすべて書き出しても、 $3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 72$ 通りなのですべての場合を調べる方法もあります）

初めに、（2）にNを掛けて、

$$2N^2 > MN > N^2$$

から、（3）を代入して、

$$2N^2 > 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11 > N^2 \quad (4)$$

を得ます。

ここで、（4）の右側の不等式から、

$$N^2 < 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$$

で、問題にある（参考： $\sqrt{23100} = 151.9868\dots$ ）を使って、

$$N \leq 151$$

となります。

次に、（4）の左側の不等式から、

$$2N^2 > 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$$

で、

$$\sqrt{2}N \geq 152$$

から

$$N \geq 108$$

です。

したがって、

$$108 < N \leq 152 \quad (5)$$

とNを絞り込むことができました。

あとは、23100の因数[2, 2, 3, 5, 5, 7, 11]を適当に組み合わせたNで（5）を満たすものを見つければOKです。

そこでNの因数の個数を調べてみましょう。

Nの因数が1個のとき、

$$2 \leq N \leq 11$$

なので、（5）を満たすNはありません。

Nの因数が2個のとき、

$$4 \leq N \leq 77$$

なので、（5）を満たすNはありません。

Nの因数が3個のとき、

$$12 \leq N \leq 385$$

なので、（5）を満たすNがある可能性があります。

Nの因数が4個のとき、

$$60 \leq N \leq 1925$$

なので、(5)を満たすNがある可能性があります。

Nの因数が5個のとき、

$$300 \leq N \leq 5775$$

なので、(5)を満たすNはありません。

Nの因数が6または7個のときは、それぞれ

$$2100 \leq N \leq 11550$$

および

$$N = 23100$$

なので、(5)を満たすNはありません。

つまり、Nの因数は、3または4個となります。

そこで、まずNの因数が3個のときを調べます。

因数に11があるとき、(5)から

$$10 \leq N/11 \leq 13 \quad (6)$$

となり、残りの因数[2, 2, 3, 5, 5, 7]のなかの2つの組み合わせで(6)を満たすのは、(2, 5)の組み合わせだけで、Nは、 $2 \times 5 \times 11 = 110$ です。

次に、因数に7があるとき、(5)から

$$16 \leq N/7 \leq 21 \quad (7)$$

となり、残りの因数[2, 2, 3, 5, 5, 11]のなかの2つの組み合わせで(7)を満たすものはありません。

因数に5、3または2があるときは、それぞれ

$$22 \leq N/5 \leq 30 \quad \text{残りの因数} [2, 2, 3, 5, 7, 11] \rightarrow (2, 11)$$

$$36 \leq N/3 \leq 50 \quad \text{残りの因数} [2, 2, 5, 5, 7, 11] \rightarrow \text{なし}$$

$$54 \leq N/2 \leq 76 \quad \text{残りの因数} [2, 3, 5, 5, 7, 11] \rightarrow (5, 11)$$

で、(5, 2, 11) (2, 5, 11)が条件を満たしますが、これらは前のNと同じです。

したがって、Nの因数が3個のとき、条件を満たすN(M)は、110(M=210)となります。

次にNの因数が4個のときを調べるのですが、その代わりにMの因数が3個のときを調べましょう。

(5)からMの変域は、

$$152 \leq M \leq 213 \quad (8)$$

になります。

まず、Mの因数に11があるとき、(8)から

$$14 \leq M/11 \leq 19 \quad (9)$$

となり、残りの因数[2, 2, 3, 5, 5, 7]のなかの2つの組み合わせで(9)を満たすのは、(2, 7)と(3, 5)の2組で、それぞれ、 $2 \times 7 \times 11 = 154$ 、および、 $3 \times 5 \times 11 = 165$ となります。

次に因数に7があるとき、(8)から

$$22 \leq M/7 \leq 30 \quad (10)$$

となり、残りの因数[2, 2, 3, 5, 5, 11]のなかの2つの組み合わせで(10)を満たすのは、(2, 11)(5, 5)ですが、前者は前のMと同じなので、新たなMは、 $5 \times 5 \times 7 = 175$ となります。

さらに因数に5、3または2があるとき、それぞれ、

$$31 \leq M/5 \leq 42 \quad \text{残りの因数} [2, 2, 3, 5, 7, 11] \rightarrow (3, 11) (5, 7)$$

$$51 \leq M/3 \leq 71 \quad \text{残りの因数} [2, 2, 5, 5, 7, 11] \rightarrow (5, 11)$$

$$76 \leq M/2 \leq 106 \quad \text{残りの因数} [2, 3, 5, 5, 7, 11] \rightarrow (7, 11)$$

となりますが、これらはすべて前のMと同じです。

したがって、Mの因数が3個のとき、つまり、Nの因数が4個のとき、条件を満たすM(N)は、154(N=150)、165(N=140)、175(N=132)の3通りになります。

以上をまとめると、条件を満たすM、Nの組み合わせ(M, N)は、

(210, 110) (175, 132) (165, 140) (154, 150)の4通りで、これらの組み合わせが答えになります。

少し力ずくと言った感じがしますが、スマートな解答があれば教えてください。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533