

中学生でも解ける東大大学院入試問題（３６）

2014-11-12 11:36:00

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今は雲っていますが、これから晴れてくるようで、気温も上がり過ごしやすいい日になるようです。

さて、今回は平成１８年度東大大学院工学系研究科システム量子工学入試問題です。

問題は、

「１０，０００円札を１００円玉、５０円玉、１０円玉の３種類のコインの組み合わせへ両替する方法は何通りあるか。１種類のコインまたは２種類のコインしか使わない場合も含めるものとする。」

です。

これは「両替問題」といって大学入試や数学オリンピックの日本予選にも出題された有名な問題です。

では早速調べていきましょう。

まず、１０，０００円を両替したときの１００円玉、５０円玉、１０円玉の個数をそれぞれ a 、 b 、 c として立式すると、

$$100a + 50b + 10c = 10000$$

となり、両辺を１０で割ると、

$$10a + 5b + c = 1000 \quad (a, b, c \text{ は負でない整数}) \quad (1)$$

となります。問題は、整数の不定方程式（１）を満たす a 、 b 、 c は何通りあるかということです。

変数が３つあるので難しそうですが、実は、（１）の左辺の $10a + 5b$ を１０００以下にして１０００に足りない分

を c で補えばよいので、問題は、

$$10a + 5b \leq 1000 \quad (2)$$

を満たす a 、 b は何通りあるかということになります。

まず、 a の範囲を調べましょう。（２）で $b = 0$ としたとき、

$$10a \leq 1000$$

より

$$a \leq 100$$

で、 $a \geq 0$ なので、

$$0 \leq a \leq 100$$

となります。

次に、 $a = k$ のとき、 b の範囲を調べると、

$$5b \leq 1000 - 10k$$

$$b \leq 200 - 2k$$

で、 $b \geq 0$ なので、

$$0 \leq b \leq 200 - 2k$$

となり、これを満たす整数 b は、

$$200 - 2k + 1 = 201 - 2k \quad (3)$$

となります。

ここで、 $0 \leq k \leq 100$ なので、（３）に k を０から１００まで代入し、それらの合計を求めればお仕舞いです。高校では数列の和の公式を勉強するので（３）の和を簡単に計算できますが、今回はそれを使わずに計算しましょう。

（３）に $k = 0, 1, 2, \dots, 100$ と代入していくと、

$$201, 199, 197, \dots, 1$$

という数列ができます。それらをすべて足し合わせたものを S とすると、（この S が答えになります）

$$S = 201 + 199 + 197 + \dots + 1 \quad (4)$$

となります。

次に（４）の右辺の各項を逆に並べて、

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 201 \quad (5)$$

を作ります。

そこで、（４）と（５）の右辺の第１項目同士、第２項目同士、 \dots 、と足し合わせると、

$$2S = 202 + 202 + 202 + \dots + 202 \quad (6)$$

となり、右辺の項数は１０１なので、（６）は、

$$2S = 202 \times 101$$

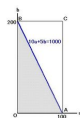
$$S = 10201$$

となります。

以上より、問題の両替する方法は、１０２０１通りとなります。

次に、これをグラフで調べてみましょう。

図1は、 a - b 平面に(2)の満たす領域(グレー)を示したグラフです。



▲図1. $10a + 5b \leq 1000$ を満たす領域

このグレーの領域の格子点の数が答えになります。 a 切片100、 b 切片200なので、長方形OACB内部(境界を含む)の格子点数は、 $201 \times 101 = 20301$ 個になります。

次に青線でしめした直線 $10a + 5b = 1000$ 上にある格子点数は、 $0 \leq a \leq 100$ のすべての整数について1つつ存在するので、101個になります。

すると、青線部の境界を含まないグレーの領域にある格子点の数は、
 $(20301 - 101) / 2 = 10100$ 個で、それに青線上の格子点を加えると、
 $10100 + 101 = 10201$ 個と先ほどの答えと一致しました。

今回の問題は、10,000円札を3種類の硬貨で両替するという簡単なものでしたが、例えば、5,000円札、2,000円札、1,000円札、500円玉、100円玉、50円玉、10円玉、5円玉、1円玉の最大9種類の紙幣、硬貨で両替する場合の計算量は膨大になり大変そうです。しかし、基本戦略は同じなので興味のある方は挑戦してみてください。(100円玉、50円玉、10円玉、5円玉、1円玉で始めて途中で止まっています)

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533