中学生でも解ける東大大学院入試問題（８４）

2015-01-11 11:32:13

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

近くの「はなみずき広場」で獅子舞があって太鼓の音が聞こえてきます。風もなく晴れているので暖かく獅子舞見物日和です。

さて、今回は平成２４年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「次の連立方程式を解け。

ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄ＋ｅ＋ｆ＋ｇ＋ｈ＝８６
ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄ－ｅ－ｆ－ｇ－ｈ＝４９
ａ＋ｂ－ｃ－ｄ－ｅ－ｆ＋ｇ＋ｈ＝２３
ａ＋ｂ－ｃ－ｄ＋ｅ＋ｆ－ｇ－ｈ＝６４
ａ－ｂ－ｃ＋ｄ＋ｅ－ｆ－ｇ＋ｈ＝３
ａ－ｂ－ｃ＋ｄ－ｅ＋ｆ＋ｇ－ｈ＝１７
ａ－ｂ＋ｃ－ｄ－ｅ＋ｆ－ｇ＋ｈ＝９１
ａ－ｂ＋ｃ－ｄ＋ｅ－ｆ＋ｇ－ｈ＝１０５

以下の関係を用いると楽になるかもしれない。

上の連立方程式は以下のように書ける。

ａｉ1＋ｂｉ2＋ｃｉ3＋ｄｉ４＋ｅｉ5＋ｆｉ6＋ｇｉ7＋ｈｉ8＝ｊ

ここで、ベクトルｉｍ（ｍ＝１、２、・・・８）は次の関係を満たしている。

ｉｍ・ｉｎ＝０（ｍ≠ｎ）
ｉｍ・ｉｎ＝８（ｍ＝ｎ）」
です。　（注：ｉｍ、ｉｎ、ｊはベクトルを表しています）

親切な出題者が提示している関係には、中学で勉強しないベクトルが出てくるので、それに沿った解答はあとにしましょう。

問題の８元連立方程式の各項の係数は、１または－１だけでとても規則性がよいので、これは方程式の組合せによって簡単に解けそうです。

そこで表１のように、与えられた連立方程式を書き直します。この表では、係数が１のとき○、－１のとき×としています。

	a	b	c	d	e	f	g	h	
1	○	○	○	○	○	○	○	○	86
2	○	○	○	○	×	×	×	×	49
3	○	○	×	×	×	×	○	○	23
4	○	○	×	×	○	○	×	×	64
5	○	×	×	○	○	×	×	○	3
6	○	×	×	○	×	○	○	×	17
7	○	×	○	×	×	○	×	○	91
8	○	×	○	×	○	×	○	×	105

▲表．連立方程式を書き直しました

まず、１から８までの方程式をすべて足し合わせると、ｂからｈまでの各項の係数が０になることが判ります。（○と×の個数が同じ）

つまり、
８ａ＝８６＋４９＋２３＋６４＋３＋１７＋９１＋１０５
　　＝４３８
ａ＝２１９/4
です。

次に、１から４までの方程式を足し合わせると、ｃからｈまでの各項の係数が０になります。

したがって、
４ａ＋４ｂ＝８６＋４９＋２３＋６４
　　　　　＝２２２
で、ａ＝２１９/4を代入して、
ｂ＝3/4
です。

さらに、１、２、７、８の方程式を足し合わせると、ｂとｄからｈまでの各項の係数が０になるので、
４ａ＋４ｃ＝８６＋４９＋９１＋１０５

　　　　　＝３３１
で、ａ＝２１9/4を代入して、
ｃ＝２８
です。

以下同様に、
１、２、５、６の方程式を足し合わせ、
４ａ＋４ｄ＝８６＋４９＋３＋１７
　　　　　＝１５５
ｄ＝-１６

１、４、５、８の方程式を足し合わせ、
４ａ＋４ｅ＝８６＋６４＋３＋１０５
　　　　　＝２５８
ｅ＝３9/4

１、４、６，７の方程式を足し合わせ、
４ａ＋４ｆ＝８６＋６４＋１７＋９１
　　　　　＝２５８
ｆ＝３9/4

１、３、６、８の方程式を足し合わせ、
４ａ＋４ｇ＝８６＋２３＋１７＋１０５
　　　　　＝２３１
ｇ＝３

１、３、５、７の方程式を足し合わせ、
４ａ＋４ｈ＝８６＋２３＋３＋９１
　　　　　＝２０３
ｈ＝-４

となり、答えは、ａ＝２１9/4、ｂ＝3/4、ｃ＝２８、ｄ＝-１６、ｅ＝３9/4、ｆ＝３9/4、ｇ＝3、ｈ＝-４
となります。

それでは次に、出題者のガイドに従って、ベクトルを使って解きましょう。

問題にあるベクトルｉｍ　は、
ｉ1＝（１，１，１，１，１，１，１，１）
ｉ2＝（１，１，１，１，-１，-１，-１，-１）
ｉ3＝（１，１，-１，-１，-１，-１，１，１）
ｉ4＝（１，１，-１，-１，１，１，-１，-１）
ｉ5＝（１，-１，-１，１，１，-１，-１，１）
ｉ6＝（１，-１，-１，１，-１，１，１，-１）
ｉ7＝（１，-１，１，-１，-１，１，-１，１）
ｉ8＝（１，-１，１，-１，１，-１，１，-１）
と表せます。これは先程の表の○×に対応します。

次に、ｉｍ・in　の「・」の記号ですが、これは内積と言って、ベクトル（ａ，ｂ）と（ｃ，ｄ）の内積は、
（ａ，ｂ）・（ｃ，ｄ）＝ａｃ＋ｂｄ
と定義します。

例えば、
ｉ1・ｉ2＝1×1＋1×1＋1×1＋1×1＋1×（-１）＋1×（-１）＋1×（-１）
　　　　　＋1×（-１）
　　　　＝1＋1＋1＋1-１-１-１-１
　　　　＝0
ｉ3・ｉ3＝1×1＋1×1＋（-１）×（-１）＋（-１）×（-１）＋（-１）×（-１）
　　　　　＋（-１）×（-１）＋（-１）×（-１）＋1×1＋1×1
　　　　＝1＋1＋1＋1＋1＋1＋1＋1
　　　　＝8
で、これらの関係を
ｉｍ・ｉn＝0（m≠ｎ）
ｉｍ・ｉn＝8（m＝ｎ）
と表しています。

それでは連立方程式を解きましょう。

まず、連立方程式をｉ1からｉ8（上記したベクトルと同じ）のベクトルを使って表します。

ａｉ1＋ｂｉ2＋ｃｉ3＋ｄｉ４＋ｅｉ5＋ｆｉ6＋ｇｉ7＋ｈｉ8＝ｊ　　　（１）
ここで、ベクトルｊは、（８６，４９，２３，６４，３，１７，９１，１０５）です。

（１）とｉ1の内積をつくると、左辺は、
左辺＝（ａｉ1＋ｂｉ2＋ｃｉ3＋ｄｉ４＋ｅｉ5＋ｆｉ6＋ｇｉ7＋ｈｉ8）・ｉ1
　　＝ａｉ1・ｉ1＋ｂｉ2・ｉ1＋ｃｉ3・ｉ1＋ｄｉ4・ｉ1＋ｅｉ5・ｉ1＋ｆｉ6・ｉ1
　　　＋ｇｉ7・ｉ1＋ｈｉ8・ｉ1
　　＝ａｉ1・ｉ1
　　＝８ａ
となります。

一方、右辺は、
右辺＝（８６，４９，２３，６４，３，１７，９１，１０５）・（１，１，１，１，１，１，　　１，１）
　　＝８６＋４９＋２３＋６４＋３＋１７＋９１＋１０５
　　＝４２８
となります。

したがって、
８ａ＝４３８
ａ＝２１９/４
です。

同様に、（１）とｉ2の内積をつくると、左辺は、
左辺＝（ａｉ1＋ｂｉ2＋ｃｉ3＋ｄｉ４＋ｅｉ5＋ｆｉ6＋ｇｉ7＋ｈｉ8）・ｉ2
　　＝ａｉ1・ｉ2＋ｂｉ2・ｉ2＋ｃｉ3・ｉ2＋ｄｉ4・ｉ2＋ｅｉ5・ｉ2＋ｆｉ6・ｉ2
　　　＋ｇｉ7・ｉ2＋ｈｉ8・ｉ2
　　＝ｂｉ2・ｉ2
　　＝８ｂ

一方、右辺は、
右辺＝（８６，４９，２３，６４，３，１７，９１，１０５）・（１，１，１，１，-１，-　　１，-１，-１）
　　＝８６＋４９＋２３＋６４-３-１７-９１-１０５
　　＝６
となり、
８ｂ＝６
ｂ＝３/４
となります。

以下同様に、ｉ3、ｉ4、ｉ5、ｉ6、ｉ7、ｉ8との内積からそれぞれｃ、ｄ、ｅ、ｆ、ｇ、ｈの値を求めることができます。

この内積を使った方法は、中学で勉強する普通の２元連立方程式にも応用できます。

例えば、
２ｘ-ｙ＝1
５ｘ＋３ｙ＝１９
の場合、これらをベクトル（２，-１）、（５，３）を使って表すと、
ｘ（２，５）＋ｙ（-１，３）＝（１，１９）　　　（２）
になります。

そこで（２）とベクトル（３，１）との内積をつくると、左辺は、
左辺＝ｘ（２，５）・（３，１）＋ｙ（-１，３）・（３，１）
　　＝ｘ（２×３＋５×１）＋ｙ（（-１）×３＋３×１）
　　＝１１ｘ＋０ｙ
　　＝１１ｘ
です。

一方、右辺は、
右辺＝（１，１９）・（３，１）
　　＝１×３＋１９×１
　　＝２２
となるので、
１１ｘ＝２２
ｘ＝２
となります。

また、（２）とベクトル（５，-２）との内積をつくると、左辺は、
左辺＝ｘ（２，５）・（５，-２）＋ｙ（-１，３）・（５，-２）
　　＝ｘ（２×５＋５×（-２））＋ｙ（（-１）×５＋３×（-２））

$= 0x - 11y$
$= -11y$
です。

一方、右辺は、
右辺 $= (1, 19) \cdot (5, -2)$
$= 1 \times 5 + 19 \times (-2)$
$= 5 - 38$
$= -33$
となるので、
$-11y = -33$
$y = 3$
となり、以上より、$x = 2$、$y = 3$ が解になります。

２元連立方程式ならば、内積を使わず普通に加減法や代入法で解くのが簡単なようですが、内積を使う方法を覚えておくと役に立つこともあるかもしれません。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533