中学生でも解ける東大大学院入試問題（４４）

2014-11-23 12:41:09

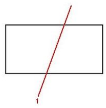
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と同様良い天気になりました。明日から下り坂で明後日には雨になるようです。

さて、今回は平成１９年度東大大学院工学系研究科システム量子工学入試問題です。

問題は、
「ある長方形をｎ本の直線でできるだけ多くの小片に分割する。その小片の数を求めよ。」
です。

問題の意味がピンとこない人は、まず図を描いてみましょう。この問題に限らず図を描いて考えてみることはたいへん大切です。いきなりｎ本の直線を描くとこんがらがってしまうので、図１のように、初めに１本の直線を描きます。



▲図１．直線を描き入れるく

図１から１本の直線を描き入れると長方形は２個の小片に分割されました。

さらに図２のように、もう１本描きいれると小片は４個になります。

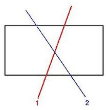
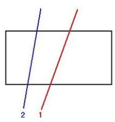


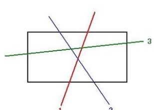
図２． ２本目の直線を描き入れる

ここで図３のように２本目の直線を長方形内部で１本目の直線と交わらないように描くと小片は３個になってしまい、問題の「できるだけ多くの小片に分割する」ことに反してしまいます。つまり、新たに直線を描くときは、前に描いた直線を交わるようにする必要があるということです。

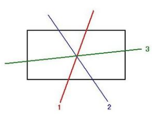


▲図３．許容されない直線の描き入れ方（１）

さらに図４のように３本目の直線を描き入れます。すると、小片は７個に分割されますが、図５のように１本目の直線と２本目の直線との交点を通るように３本目の直線を描き入れた場合、小片は６個になってしまい、問題の「できるだけ多くの小片に分割する」ことに反してしまいます。つまり、新たに直線を描くときには、前に描いた２本の直線の交点を通るように描いてはいけないということです。

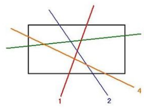


▲図４． ３本目の直線を描き入れる



▲図５．許容されない直線の描き入れ方（２）

さらに図６のように４本目の直線を描き入れてみましょう。すると、小片は１１個に分割されます。



▲図６． ４本目の直線を描き入れる

ここまでに判ったことをまとめると、
（１）長方形をできるだけ多くの小片に分割するためには、新たに描く直線は長方形内部で前の直線と交わらなければならない。かつ、前に描いた２本の直線の交点を通ってはならない。

これを言い換えると、ｎ本目の直線は長方形内部で（ｎ－１）個の交点を持ち、３本以上の直線が１点で交わってはいけない、と言うことです。

（２）１本の直線→　２個
　　　２本の直線→　４個
　　　３本の直線→　７個
　　　４本の直線→１１個
の小片に分割される。

ここまで調べるとあとは簡単で、（２）の数列からｎ本の直線で分割される小片の個数を予測してもよいですし、ｎ本目の直線を描くときにできる長方形内部の交点の個数から増加する小片の個数を利用する方法もあります。

それではまず、（２）の数列からｎ本の直線で分割される小片の個数を予測してみましょう。

直線が１本から２本になるとき、増加する小片の個数は２個です。また、２本から３本になるとき３個、３本から４本になるとき４個となっています。つまり、ｎ本目の直線を描くときｎ個の小片が増加することになります。

一方、１本の直線では小片が２個なので、ｎ本目の直線を描いたときの小片の個数をＰｎとすると、
Ｐｎ＝２＋（２＋３＋４＋・・・・＋ｎ）
となります。

ここで、（　）内の和の計算は、いつものように（　）の各項を逆さまに並べたものを足した、
（２＋３＋４＋・・・＋ｎ）＋（ｎ＋（ｎ－１）＋・・・＋２）
を考えて、前の（　）と後ろの（　）の１項目同士、２項目同士、・・・を足すと、
（ｎ＋２）＋（ｎ＋２）＋・・・＋（ｎ＋２）
と（ｎ＋２）が（ｎ－１）個できます。

つまり、
（２＋３＋４＋・・・・＋ｎ）＝（ｎ＋２）（ｎ－１）/2
で、
Ｐｎ＝２＋（ｎ＋２）（ｎ－１）/2
　　＝（ｎ^2＋ｎ＋２）/2　　　（ｎ^2はｎの２乗を表します）
となります。

次に、長方形内部の交点の個数を使う解法を示します。

ｎ本目の直線を描くとき、長方形内部に（ｎ－１）個の交点ができるので、ｎ本目の直線は長方形内部でｎ個に分割されます。これは小片の辺がｎ個増加したことで、すなわち小片がｎ個増加したことになります。あとは前の解答と同じで、１本の直線では小片が２個なので、ｎ本目の直線を描いたときの小片の個数をＱｎとすると、
Ｑｎ＝２＋（２＋３＋４＋・・・＋ｎ）
　　＝（ｎ^2＋ｎ＋２）/2
となり、前のＰｎと同じになりました。

以上のように、数学の問題でピンとこなかったら（ピンときても、）図を描いて考えてみる習慣をつけることが大切です。どんどん図を描きましょう。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533