

中学生でも解ける東大大学院入試問題（176つづき）

2015-04-22 12:21:02

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日に続いて晴れて過ごしやすくなりました。この良い天気は暫く続くようで、GWも行楽日和だそうで、旅行など計画されている方は良かったですね。

さて、今回は前回に続いて、平成18年度東大大学院新領域創成科学研究科情報生命科学の入試問題の（4）からです。

問題は、

「集合AとBの和集合、積集合、差集合をそれぞれ、 $A \cup B$ 、 $A \cap B$ 、 $A - B$ であらわす。また集合Aの補集合を $A'$ 、集合Aの元の個数を $n(A)$ であらわす。

- （1）差集合 $A - B$ をそれ以外の記号を用いてあらわせ。
- （2） $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ を証明せよ。
- （3） $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を証明せよ。
- （4） $A \cap (B' \cap C)'$ を展開せよ。
- （5）集合演算におけるド・モルガンの法則を書け。」

です。（集合Aの補集合はAの上添え字Cとなっていますが、ここでは $A'$ としました）

早速（4）から始めましょう。

- （5）でド・モルガンの法則が出てきますが、それを使って（4）の右にある（ ）を変形すると、  
 $(B' \cap C)' = B'' \cup C'$   
 $= B \cup C'$

となります。

すると、（4）の式は、

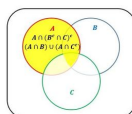
$$A \cap (B' \cup C)' = A \cap (B \cup C')$$

となり、これを（3）の式を使って変形すると、

$$A \cap (B \cup C') = (A \cap B) \cup (A \cap C')$$

となり、これが答えです。

これをベン図で表すと、下図の黄色領域になります。



▲図. 黄色領域が $A \cap (B' \cap C)'$ です

次に（5）ですが、ド・モルガンの法則は下記の通りです。

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' & \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' & \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

東大大学院入試では珍しい集合の問題でした。集合は、群（環、体）や無限の話などに繋がっていくのでたいへん大切な分野です。興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533