中学生でも解ける東大大学院入試問題（５６）

2014-12-07 12:16:30

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

寒い日が続きます。受験生の皆さんには体調に気を付けて勉強に頑張ってください。

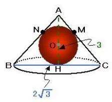
さて、今回は平成２３年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題で、昨日に続いて立体図形に内接する球に関するものです。

問題は、
「底面の円の半径が√３、高さが３の円錐に内接する球がある。円錐の体積と球の体積の比を求めよ。」

円錐の体積は、底面積×高さ×１/３で求めることができます。問題では底面の円の半径と円錐の高さが与えられているので、円錐の体積は簡単に計算できます。

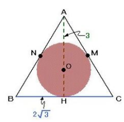
したがって、円錐に内接する球の体積、つまり球の半径を求めればＯＫということです。

まず、図１に見取り図を示します。



▲図１．見取り図

立体図形では考え難いので考えやすい平面を選ぶのですが、これは図２のように、頂点Ａと底面の円の中心Ｈを通る平面がよいでしょう。すると、球Ｏの半径と図２の円Ｏの半径は一致するので、円Ｏの半径を求めれば球の体積を計算することができます。



▲図２．頂点ＡとＨを通る平面で切った断面図

あとは、円の中心Ｏと接点（Ｈ、Ｎ、Ｍ）を結んだ線分が△ＡＢＣの各辺と直交するので、そこに三平方の定理を使うなりして、円の半径を求めればお仕舞いです。

ここでは、まずＡＢ（ＡＣ）の長さを求めましょう。△ＡＢＨは直角三角形なので、三平方の定理により、
ＡＢ^2＝ＡＨ^2＋ＢＨ^2　　（ＡＢ^2はＡＢの長さの２乗を表します）
　　＝３^2＋（√３）^2
　　＝９＋３
　　＝１２
より、
ＡＢ＝２√３
となり、△ＡＢＣは一辺の長さが２√３の正三角形と判ります。

すると、円Ｏの中心Ｏは△ＡＢＣの重心と一致するので、
ＡＨ：ＯＨ＝３：１
です。

したがって、ＡＨ＝３から、ＯＨ＝１と円Ｏの半径を求めることができました。

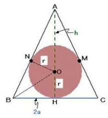
最後に、円錐と球の体積を計算しましょう。

円錐の体積Ｖ1は、
Ｖ1＝１/３・（√３）^2・π・３
　＝３π
です。

一方、球の体積Ｖ2は、
Ｖ2＝４/３・１^3・π
＝４/３・π
なので、円錐と球の体積比Ｖ1：Ｖ2は、
Ｖ1：Ｖ2＝３π：４/３・π
　　　＝９：４
になります。

この問題では、円錐の断面が正三角形だったので内接する球の半径を簡単に求めることができましたが、円錐の断面が正三角形にならない場合を調べてみましょう。

図３のように底面の円の半径 a（直径 $2a$）、円錐の高さ h、内接する球の半径 r とします。



▲図３．円錐の断面が正三角形でない場合

初めに、三平方の定理を使って、ＡＢを求めると、
$AB^2 = AH^2 + BH^2$
$= h^2 + a^2$
より、
$AB = \sqrt{(h^2 + a^2)}$
です。

ここで、△ＡＯＮに着目して三平方の定理を使うと、
$AO^2 = AN^2 + ON^2$　　　（１）
が成り立ちます。

一方、
$AO = AH - OH$
$\quad = h - r$
から、
$AO^2 = (h - r)^2$　　　（２）

$AN = AB - BN$
$\quad = AB - BH$
$\quad = \sqrt{(h^2 + a^2)} - a$
から、
$AN^2 = (\sqrt{(h^2 + a^2)} - a)^2$　　　（３）

$ON = r^2$　　　（４）
です。

これらの（２）（３）（４）を（１）代入すると、
$(h - r)^2 = (\sqrt{(h^2 + a^2)} - a)^2 + r^2$
となり、これを整理して r について解くと、
$r = a(\sqrt{(h^2 + a^2)} - a)/h$　　　（５）
と内接する球の半径 r を求めることができます。

試しに本問での条件、$a = \sqrt{3}$、$h = 3$ を（５）に代入してみると
$r = \sqrt{3}(\sqrt{(3^2 + (\sqrt{3})^2)} - \sqrt{3})/3$
$\quad = \sqrt{3}(2\sqrt{3} - \sqrt{3})/3$
$\quad = 1$
と内接する球の半径は１となり、先ほどのものと一致します。

他にもいろいろな解き方があるので調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533