中学生でも解ける東大大学院入試問題（９７）

2015-01-24 13:11:42

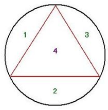
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝は雲が多かったのですが昼過ぎから晴れてきました。少し寒く感じますが、明日は今日より気温が上がるようです。

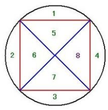
さて、今回は平成２２年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「１）円に内接する正三角形の全ての頂点を直線で結んで分割される円の領域の数を求めよ。
正方形、正五角形の場合も同様に求めよ。
２）円に内接する任意の六角形の全ての頂点を直線で結んで分割される領域の最大数を求めよ。」
です。

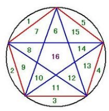
これはレオ・モーザーの円分割問題ですが、六角形程度であれば実際に図を描いて分割される領域を数えれば簡単です。図１から図４に正三角形、正方形、正五角形および六角形の場合を示します。



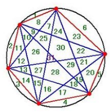
▲図１．正三角形の場合の分割数



▲図２．正方形の場合の分割数



▲図３．正五角形の場合の分割数



▲図４．六角形の場合の最大分割数

以上の４つの図から、
正三角形の場合⇒４
正方形の場合　⇒８
正五角形の場合⇒１６
六角形の場合　⇒３１
が答えになります。

ここで、正三角形、正方形、正五角形について、それらの頂点数をｎとした場合、分割数ｓｎは、
ｓｎ＝２^(n-1)　　（１）　　（２^(n-1)　は２のｎ－１乗を表します）
となるので、六角形では（１）にｎ＝６を代入し、
ｓｎ＝３２
としてしまいそうですが、これは間違いなので注意しましょう。

そこでｎ角形での最大分割数Ｓｎとｎの関係を調べてみましょう。

弦同士がお互いに交わらない弦によって、円は（弦の数＋１）個に分割され、弦同士が交点をもつ場合は、１交点につき分割数が１つ増加します。

つまり、最大分割数Ｓｎは、

$S_n = ($弦の数$+1) + ($交点の数$)$
になり、弦の数と交点の数をｎで表せば出来上がりです。

そこでまず、弦の数については、ｎ個の頂点から２点を選んで結んだ線分の数ですから、

$${}_nC_2 = n(n-1)/(2\cdot 1)$$
$$= n(n-1)/2$$

です。（高校で勉強する組合せを使いました）

次に、交点の数については、ｎ個の頂点から４点を選び２本の対角線を引くことで１個の頂点ができるので、

$${}_nC_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)/(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)/24$$

となります。

したがって、

$$S_n = n(n-1)/2 + 1 + n(n-1)(n-2)(n-3)/24$$
$$= (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)/24$$

になります。

$n = 3$、4、5、6で確かめてみると、

$S_3 = 4$
$S_4 = 8$
$S_5 = 16$
$S_6 = 31$

と図から求めた分割数と一致しました。

S_nを求めるには、頂点がｎからｎ＋１に増えたときの分割数の増分$S_{n+1} - S_n$を調べて漸化式を解く方法もあります。興味のある方は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533