# 中学生でも解ける東大大学院入試問題（１７１）

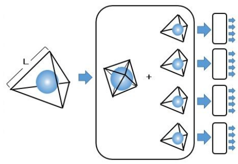
2015-04-15 11:54:03

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝から晴れて良い天気になりました。午後には雷雨などあるようですが、長い時間に渡って雨が降ることはないようです。

さて、今回は平成２７年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「図のように１つの辺の長さが“Ｌ”の正四面体に内接球を作り、残りの空間に体積が最大となる正四面体を新たに作る（最大体積の正四面体が複数作成可能な場合は複数の正四面体を作成する）。新たに作成した正四面体全てに内接球を作り、それぞれの正四面体の残りの空間には体積が最大となる正四面体を作る。この作業を無限に続けて作られる全ての球の体積の総和を求めよ。

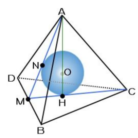



」

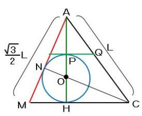
です。

先日の正三角形に内接円を作っていく問題と同様に、最初の正四面体とそこから新たに作成した正四面体との相似比を求める方法が良さそうです。

そこで、図１に示す正四面体とその内接球を考え、それの平面ＡＣＭでの切り口を図２に示します。




▲図１．正四面体と内接球




▲図２．平面ＡＣＭでの切り口

まず、内接球の半径を求めます。

Ｈは、△ＣＢＤの重心なので、$CH:HM=2:1$ で、$CM=\sqrt{3}L/2$ から、$CH=\sqrt{3}L/3$ です。

すると、三平方の定理から、$AC^2=AH^2+CH^2$ が成り立ち、$AC=L$、$CH=\sqrt{3}L/3$ を代入して、$AH=\sqrt{6}L/3$ となります。

ここで、$OH=OP=r$、　$OA=OC=a$ とすると、
$r+a=\sqrt{6}L/3$
$a^2=r^2+(\sqrt{3}L/3)^2$
が成り立ち、これを解いて、
$r=\sqrt{6}L/12$
と内接球の半径を求めることができました。

つぎは、元の正四面体と新たな正四面体の相似比を求めます。そのためには、$AH:AP$ を求めればＯＫです。

そこで、
$AH:AP=\sqrt{6}L/3:(\sqrt{6}L/3-2r)$
$\quad=\sqrt{6}L/3:(\sqrt{6}L/3-2\sqrt{6}L/12)$
$\quad=\sqrt{6}L/3:\sqrt{6}L/6$
$\quad=2:1$
から、相似比が $1/2$ となります。

続いて、最初の正四面体の内接球の体積 $V0$ を求めておきましょう。

その半径は、r＝√６ L/１２なので、
V０＝４/３・π・r^3
　＝４/３・π・√６/２８８・L^3
　＝√６π/２１６・L^3
です。

以上で準備完了です。そこで、問われている全ての内接球の体積の総和Vとすると、
V＝V０＋４V１＋４^2V２＋・・・・＋４^kVk＋・・・
です。

ところが、V０とV１、V２、・・・、Vkの関係は、それらの相似比が１/２なので、
V１＝（１/２）^3V０
　＝１/８V０
V２＝（１/８）^2V０
　　・・・
Vk＝（１/８）^kV０
なので、
V＝V０＋４・１/８・V０＋４^2・（１/８）^2V０＋・・・＋４^k・（１/８）^kV０＋・・・
　＝V０（１＋１/２＋（１/２）^2＋・・・＋（１/２）^k＋・・・）
となります。

ここで、
Sn＝１＋１/２＋（１/２）^2＋・・・＋（１/２）^n
と置くと、
Sn＝２（１-（１/２）^n）
となり、n→∞のとき、Sn→２ですから、V＝２V０になります。

最後に、V０＝√６π/２１６・L^3　を代入して、V＝２√６π/２１６・L^3＝√６π/１０８・L^3となります。

以上から、全ての内接球の体積の総和は、√６π/１０８・L^3　で、これが答えになります。

今回も高校で勉強する極限がでてきました（すみません）。興味のある人は調べてみてください。

---

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533