中学生でも解ける東大大学院入試問題（３５）

2014-11-11 11:42:19

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝から雨模様で、昨日に比べて寒くなりましたが、明日は天気が回復して少し暖かくなるようです。

さて、今回は平成１８年度東大大学院工学系研究科システム量子工学入試問題です。

問題は、
「ｓは下式のように３つの異なる正の数　ｘ、ｙ、ｚ　およびそれらの３つの逆数１/ｘ、１/ｙ、１/ｚ　の和で表わされる。ｓの取り得る範囲を求めよ。
ｓ＝ｘ＋ｙ＋ｚ＋１/ｘ＋１/ｙ＋１/ｚ　」
です。

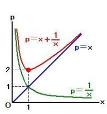
高校生であれば、相加相乗平均
（ａ＋ｂ）/２≧√ａｂ
を使って、
ｓ＝ｘ＋１/ｘ＋ｙ＋１/ｙ＋ｚ＋１/ｚ
　≧２√（ｘ・１/ｘ）＋２√（ｙ・１/ｙ）＋２√（ｚ・１/ｚ）
　＝２＋２＋２
　＝６
また、ｘ＝ｙ＝ｚ＝１　のとき等号が成り立つので、ｓ≧６と簡単に正解できると思います。

この相加相乗平均を使わないのであれば、ｘ、ｙ、ｚ＞０なので、
ｓ＝　（√ｘ）^2＋１/（√ｘ）^2
　＋（√ｙ）^2＋１/（√ｙ）^2
　＋（√ｚ）^2＋１/（√ｚ）^2
　＝　（√ｘ－１/√ｘ）^2＋２
　　＋（√ｙ－１/√ｙ）^2＋２
　　＋（√ｚ－１/√ｚ）^2＋２
　＝　（√ｘ－１/√ｘ）^2＋（√ｙ－１/√ｙ）^2＋（√ｚ－１/√ｚ）^2＋６
と変形して、
（√ｘ－１/√ｘ）^2≧０
（√ｙ－１/√ｙ）^2≧０
（√ｚ－１/√ｚ）^2≧０
なので、
ｓ≧６　（等号は、ｘ＝ｙ＝ｚ＝１のとき成り立つ）
とします。

ここで、
ｓ＝　（√ｘ＋１/√ｘ）^2－２
　　＋（√ｙ＋１/√ｙ）^2－２
　　＋（√ｚ＋１/√ｚ）^2－２
　≧－６
と変形しても正しいのですが、このとき、
√ｘ＋１/√ｘ＝０
√ｙ＋１/√ｙ＝０
√ｚ＋１/√ｚ＝０
が成り立つ正の数ｘ、ｙ、ｚが存在しないので、ｓ≧－６の等号を成立させるｘ、ｙ、ｚはありません。

次に、グラフを使って調べてみましょう。ｘ、ｙ、ｚと変数が３つあると面倒なので、ｘについての関数
ｐ＝ｘ＋１/ｘ　　（１）
を調べます。

（１）の第１項は原点を通る傾き１の直線を表し、第２項は比例係数１の双曲線を表します。図１に示すように、（１）はこの直線と双曲線の和になります。



▲図１．ｐ＝ｘ＋１/ｘのグラフ

直線のグラフ ｐ＝ｘ　と双曲線ｐ＝１/ｘが交わる点は、
ｘ＝１/ｘ
から、
ｘ＝１
となり、交点の座標は、（１，１）で、ｐの値は２になります。

そこで、 $p \geqq 2$ を調べるために、 $p-2$ を計算すると、

$$p-2 = x+1/x-2$$
$$= (x^2-2x+1)/x$$
$$= (x-1)^2/x$$

で、 $x>0$ より、

$p-2 \geqq 0$　（等号は、 $x=1$ のとき成り立つ）

となるので、 p の最小値は 2 ということが判ります。

また、 $p/2 \geqq 1$ を示してもＯＫです。

さらに別の方法として次のようにすることもできます。

p の最小値が 2 となるためには、 $x>1$ の範囲で直線 $p=x$ の増加量が双曲線 $p=1/x$ の減少量より大きくならなければならず、また、 $x<1$ の範囲で直線 $p=x$ の増加量が双曲線 $p=1/x$ の減少量より小さくなくてはなりません。

そこで、 $x1>1$ となる x 1を取り、 x が 1 から x 1まで変化したときの直線と双曲線の変化の割合を計算してみましょう。

直線 $p=x$ の場合、 1 から x 1までの変化の割合は、

$(p(x1)-p(1))/(x1-1) = (x1-1)/(x1-1) = 1$

となり、一方、双曲線 $p=1/x$ の場合は、

$$(p(x1)-p(1))/(x1-1) = (1/x1-1)/(x1-1)$$
$$= (1-x1)/(x1(x1-1))$$
$$= -1/x1$$

です。

ここで、 $x1>1$ なので、 $1+(-1/x1)>0$ となり、 $x>1$ の範囲では、直線の増加量が双曲線の減少量より大きくなります。

次に先ほどと同様に、 $x2<1$ となる x 2をとり、 x が x 2から 1 まで変化したときの直線と双曲線の変化の割合を計算します。

直線 $p=x$ の場合、 x 2から 1 までの変化の割合は、

$(p(1)-p(x2))/(1-x2) = (1-x2)/(1-x2) = 1$

となり、一方、双曲線の場合は、

$$(p(1)-p(x2))/(1-x2) = (1-1/x2)/(1-x2)$$
$$= (x2-1)/(x2(1-x2))$$
$$= -1/x2$$

です。

ここで、 $0<x2<1$ なので、 $1+(-1/x2)<0$ となり、 $0<x<1$ の範囲では、直線の増加量が双曲線の減少量より小さくなります。

以上のことから、 $x=1$ で $p=x+1/x$ は最小値 2 を取ることが判ります。

これをもっと簡単に調べるテクニックが、高校で勉強する微分という方法で、（１）を微分して、

$p' = 1-1/x^2$

$x>1$ のとき、 $p'>1$　なので p は単調増加

$x<1$ のとき、 $p'<1$　なので p は単調減少

となり、 $x=1$ で p は最小値を持つことになります。（高校で勉強してください）

いくつか解法を書きましたが、初めの相加相乗平均を使うのが一番簡潔ですね。中学生でも相加相乗平均の証明はできるので、覚えておいてもよいでしょう。また、以前取り上げた「コーシー・シュワルツの不等式」からも導出できます。気が向いたら試してみてください。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533