

中学生でも解ける東大大学院入試問題（104）

2015-01-31 12:01:55

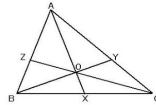
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今日は自宅の雪かきをしなければと思っていたのですが、ほとんど融けていてその必要もないようです。とは言っても、滑りやすいところもあるので転ばないように注意しましょう。

さて、今回は平成16年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

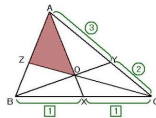
問題は、

「 $\triangle ABC$ の面積を S とする。 $BX:XC=1:1$ 、 $CY:YA=2:3$ のとき、 $\triangle OAZ$ を S で表せ。」です。



▲問題図

まず、図1のように与えられた条件などを書き込みましょう。Xは辺BCを1:1に、Yは辺CAを2:3に内分しています。このことからチェバの定理を思い出せば簡単です。



▲図1．与えられた条件を書き込みました

チェバの定理から、

$$\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$$

が成り立ち、これに $BX/CX=1$ 、 $CY/AY=2/3$ を代入すると、

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{3}{2}$$

となります。

したがって、 $\triangle OAZ : \triangle OBZ = 3 : 2$ から

$$\triangle OAB = \frac{5}{3} \cdot \triangle OAZ \quad (1)$$

となります。

一方、 $\triangle OAC = \triangle OAB$ で、これと(1)から

$$\triangle OAC = \frac{5}{3} \cdot \triangle OAZ$$

で、

$$\begin{aligned} \triangle ACZ &= \triangle OAC + \triangle OAZ \\ &= \frac{8}{3} \cdot \triangle OAZ \end{aligned} \quad (2)$$

です。

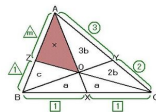
ここで、 $\triangle ACZ = \frac{3}{5} \cdot S$ なので、(2)から、

$$\frac{8}{3} \cdot \triangle OAZ = \frac{3}{5} \cdot S$$

$$\triangle OAZ = \frac{9}{40} \cdot S$$

となり、これが答えです。

もし、チェバの定理を思い出さなければ、図2に示すように $\triangle ABC$ 内の小さな三角形の面積を x 、 a 、 b 、 c 、 $AZ: BZ = m:1$ とし、それらの方程式を解いて答えを求めます。



▲図2．方程式を使って解きます

まず、 $\triangle ABC$ の面積は S なので、

$$S = x + 2a + 5b + c \quad (3)$$

です。

$$\triangle ABX : \triangle ACX = 1 : 1$$

から、

$$x + a + c = a + 5b$$

$$x - 5b + c = 0 \quad (4)$$

です。

$$\triangle B A Y : \triangle B C Y = 3 : 2$$

から、

$$2(x + 3b + c) = 3(2a + 2b) \\ x - 3a + c = 0 \quad (5)$$

です。

$$\triangle A C Z : \triangle B C Z = m : 1$$

から、

$$x + 5b = m(2a + c) \quad (6)$$

です。

$$\text{さらに、} \triangle O A Z : \triangle O B Z = m : 1$$

から、

$$x = mc \quad (7)$$

です。

ここで、まず、(4) (5) から、

$$5b = 3a \quad (8)$$

を得ます。

次に、(6) (7) から、

$$5b = 2ma$$

で、これと(8) から

$$m = 3/2 \quad (\leftarrow \text{チェバの定理です}) \quad (9)$$

となります。

さらに、(5) から

$$x + c = 3a$$

で、

(7) (9) から

$$x = 3/2 \cdot c$$

なので、

$$x = 9/5 \cdot a \quad (10)$$

$$c = 6/5 \cdot a \quad (11)$$

です。

そこで、(8) (10) (11) を(3) に代入して、

$$S = 9/5 \cdot a + 2a + 3a + 6/5 \cdot a \\ = 8a$$

から、

$$a = S/8 \quad (12)$$

となります。

最後に、(12) を(10) に代入して、

$$x = 9/5 \cdot S/8$$

$$= 9/40 \cdot S$$

とチェバの定理を使った答えと一致しました。

後半の式での解法はもっとスマートにできるかもしれませんが、やはりチェバの定理を使うのが手っ取り早そうです。チェバの定理を覚えておくとよいでしょう。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533