中学生でも解ける東大大学院入試問題（３４）

2014-11-09 10:15:11

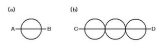
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝から小雨が降ったり止んだりしていますが、明日は晴れて暖かくなるようです。

さて、今回は平成２２年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題で、一筆書きに関するものです。

問題は、
「（１）下の（ａ）の図形を、点Ａを始点、点Ｂを終点として一筆書きする方法は何通りあるか。

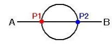
（２）下の（ｂ）の図形を、点Ｃを始点、点Ｄを終点として一筆書きする方法は何通りあるか。」



▲問題図

です。

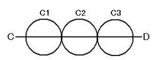
（１）は簡単で図１のように分岐点をＰ１、Ｐ２とすると、Ｐ１では経路を３通り、Ｐ２では２通り、戻ってきたＰ１で１通り選ぶことができるので、３×２×１＝６通りが正解になります。



▲図１．（１）の説明図

（２）についても同様に解こうとすると、初めの分岐点では３通り、次の分岐点では５通りとなるのですが、２番目の分岐点で右に進む３通りと左に戻る２通りで場合分けが必要になりそうです。そして、さらにそれが続くので場合分けするだけで疲れてしまいます。

そこで次のようにやってみましょう。まず、図２のように、○の中に１本の線がある図形をセルと呼び、始点Ｃから順にセル１、２、３とします。



▲図２．（２）の説明図

次に一つのセル１にある３つの経路のどれかを一番初めに通ることをｘ1、２回目に通ることをｘ2、３回目（最後）に通ることをｘ3とします。セル２、３についても同様に、ｙ1、ｙ2、ｙ3、とｚ1、ｚ2、ｚ3とします。

すると、ｘ1、ｙ1、ｚ1はそれぞれ３通り、ｘ2、ｙ2、ｚ2は２通り、ｘ3、ｙ3、ｚ3は１通りの経路があり、一方、３つのセルからなる図形を一筆書きするということは、上手く（一筆書きができるように）ｘ1、ｘ2、・・・、ｙ1、ｙ2・・・ｚ2、ｚ3のすべてを一つずつ並べることで、その場合の数は、並べ方にかかわらず、
３・３・３・２・２・２・１・１・１＝２１６通り
になります。

あとは、３つのセル間の進み方を勘定し、２１６通りにそれを乗じればＯＫです。

まず、３つのセル間の進み方を勘定するためには、３つのセルのグループ分けを考えると簡単です。ここで、セル内の３つの経路をすべて通った状態を「完成」と呼ぶことにしましょう。

グループ分けのルールは、始点Ｃ側のグループにあるセルがすべて完成したあとで、次のグループに進むことができ、それを繰り返すというものです。言い換えると、完成していないセルがある場合、次のグループに進めないということです。また、そのときグループ間の進み方は左端のグループから右端のグループに進む１通りになります。

一方、グループ内のセル間の進み方は、左端のセルから右端のセルに進み、次に右端のセルから左端のセルに進み、最後に左端のセルから右端のセルに進む（簡単に言うと、左端のセルから１往復半して右端のセルに到る）という１通りになります。

したがって、３つのセル間の進み方は、グループ分けの場合の数になります。

それでは、３つのセルのグループ分けの仕方を調べましょう。

（１）３つのセルを３つのグループに分ける場合、
グループ１：セル１、グループ２：セル２、グループ３：セル３
の１通り

（２）３つのセルを２つのグループに分ける場合、
グループ１：セル１、グループ２：セル２、セル３
グループ１：セル１、セル２、グループ２：セル３
の２通り

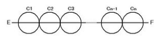
（３）３つのセルを１つのグループに分ける場合、
グループ１：セル１、セル２、セル３
の１通り

となり、３つのセルのグループ分けの場合の数は、４通りになります。

以上から、問（２）の答えは、２１６×４＝８６４通りになります。

それでは次に、セルがｎ個並んだときにどうなるかを調べてみましょう。

図３のように始点Ｅ、終点Ｆとして、その間にｎ個のセルが並んでいる場合を考えます。



▲図３．ｎ個のセルが並んだ場合

先ほどと同様に１つのセルを完成させる経路の場合の数は、３×２×１＝６通りなので、ｎ個のセルの場合は、6^n 通りになります。（6^n は６のｎ乗を表します）

あとは、ｎ個のセル間の進み方の場合の数を勘定するわけですが、先ほどと同じようにｎ個のセルを１からｎ個のグループに分ける場合の数を計算します。

そこで具体的なグループ分け方法ですが、ｎ個並んだセルの間に仕切りを入れることを考えればＯＫです。

例えば、ｎ個のセルをｎ個のグループに分けするためには、ｎ個並んだセルの（ｎ－１）個の隙間に仕切りを入れればよく、その場合の数は１通りです。これを組み合わせ記号を使って表すと、、
$${}_{n-1}C_{n-1} = (n-1)!/((n-1)!(n-1-(n-1))!)$$
$$= (n-1)!/((n-1)!\cdot 0!)$$
$$= 1$$
となります。（ｎＣｒは組み合わせを表す記号で、ｎ！はｎの階乗を表します）

次にｎ個のセルを（ｎ－１）個のグループに分ける場合の数は、
$${}_{n-1}C_{n-2} = (n-1)!/((n-2)!(n-1-(n-2))!)$$
$$= (n-1)!/((n-2)!\cdot 1!)$$
$$= n-1$$
となります。

これをｎ個のセルを１個のグループに分けるまで続け、それらの各々の場合の数を足し合わせたものが、ｎ個のセルのグループ分けの場合の数、つまり、ｎ個のセル間の進み方の場合の数で、それをＰとすると、
$$P = {}_{n-1}C_{n-1} + {}_{n-1}C_{n-2} + \cdots + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_0 \qquad (2)$$
となります。

さらに、（２）の左辺の各項は、$(1+x)^{n-1}$を展開したときの係数で、$x=1$とすると、
$$(1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$
$$= {}_{n-1}C_{n-1} + {}_{n-1}C_{n-2} + \cdots + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_0$$
となり、
$$P = 2^{n-1}$$
となります。

以上から、ｎ個のセルが並んだとき一筆書きをする方法は、
$$6^n \cdot P = 6^n \cdot 2^{n-1}$$
$$= 6 \cdot 12^{n-1}$$
になります。

ここで、先ほど求めたｎ＝１、３の場合をチェックしてみると、
ｎ＝１の場合、
$$6 \cdot 12^{1-1} = 6 \cdot 12^0$$
$$= 6 \cdot 1$$
$$= 6$$ 通り
ｎ＝３の場合、
$$6 \cdot 12^{3-1} = 6 \cdot 12^2$$
$$= 6 \cdot 144$$
$$= 864$$ 通り
と結果が一致しました。

後半のｎ個のセルの場合は、高校で勉強する「組み合わせ」を使っているので中学生には判らなかったと思いますが、グループ分けの仕方が仕切りの入れ方に対応するところが判ってもらえると嬉しいです。失礼しました。

[学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533