中学生でも解ける東大大学院入試問題（５０）

2014-11-30 12:22:54

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝は晴れ間も見えたのですが、今はすっかり曇ってしまい、これから雨になるようです。

さて、今回は平成１８年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「ある長さの１本の棒をランダムに選んだ場所で切る。できた２本の棒のうち長い方を再びランダムに選んだ場所で切る。このようにしてできた３本の棒切れで三角形が構成できる確率はいくらか。棒の太さは考えないものとする。」
です。

３本の線分で三角形ができる条件は、２本の線分の長さの和が残りの１本の線分の長さより大きい、というものです。
式で表すと、３本の線分の長さをそれぞれ a、b、c とすると、
$a < b + c$
$b < c + a$
$c < a + b$
となり、これらを三角不等式と言います。

この三角不等式と問題の条件を表した不等式とを組み合わせて、それらの領域の面積比を計算すれば、それが答えの確率になりそうです。

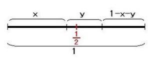
それでは問題の条件を式で表してみましょう。

棒の長さを L にしてもよいのですが、最終的に比を計算するので、ここでは棒の長さを１とします。

まず、１回目に棒を切ってできた２本の棒切れのうち、短い棒の長さを x とします。すると、
$0 < x \leqq 1/2$　　　（１）
が成り立ちます。

次に、２回目の切断では、１回目の切断でできた長い棒切れを切るので、$1-x$ の長さの棒切れを切ることになります。その切断でできる棒切れの長さを y とすると、
$0 < y < 1-x$　　　（２）
が成り立ちます。

以上の２回の切断でできた棒切れの長さは、図１のように、x、y、$1-x-y$ となります。

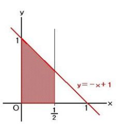


▲図１．切断した棒の長さ

ここで先ほどの三角不等式の登場です。図１に示したように、３本の棒切れの長さは、x、y、$1-x-y$ なので、それらを使って三角不等式を立式すると、
$x < y + 1 - x - y \Rightarrow x < 1/2$　　　（３）
$y < x + 1 - x - y \Rightarrow y < 1/2$　　　（４）
$1 - x - y < x + y \Rightarrow y > -x + 1/2$　　　（５）
となります。

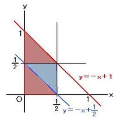
以上の（１）から（５）までの不等式で表される領域の面積を計算すればお仕舞いです。そのためにグラフを使います。

まず、（１）（２）で表される領域は、x と y が取り得る範囲を表していて、図２の赤色の部分になります。



▲図２．x、y の取り得る範囲

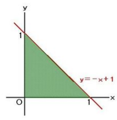
一方、（３）（４）（５）で表される領域は、３本の棒切れで三角形が構成できる範囲を表していて、図３の青色の部分になります。



▲図３． ３本の棒切れで三角形が構成できる範囲

これらの２つの領域の面積比が答えの確率になり、それは１/３となります。

ついでに、問題を少し変更して、「できた２本の棒のうち長い方を再びランダムに選んだ場所で切る。」を削除すると（⇒１本の棒をランダムに選んだ２ヶ所で切る）、これは（１）の条件が、
０＜ｘ＜１
に変わるので、ｘ、ｙの取り得る範囲は、図４の緑色の部分になります。



▲図４．棒をランダムに選んだ２ヶ所で切ったとき、ｘ、ｙの取り得る範囲

したがって、この場合、３本の棒切れで三角形が構成できる確率は、１/４となります。

さらに、「できた２本の棒のうち短い方を再びランダムに選んだ場所で切る。」に変更すると、２本の棒の長さの和が残りの１本より短くなるので、３本の棒切れで三角形が構成できる確率は０になるのですが、これはグラフ上で、ｘ、ｙが取り得る領域と三角形が構成できる領域とに共通部分がないことに対応します。

興味があれば、グラフを描いて調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533