

中学生でも解ける東大大学院入試問題（162）

2015-04-06 10:30:20

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今日は春期講習の最終日です。新学年の予習をした塾生、いままでの復習をした塾生、春休みの宿題をした塾生など各自自分に合った勉強ができたと思います。新学期も楽しく勉強していきましょう。

さて、今回は平成21年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「半径 r の球を考える。これが x - y 平面 ($z = 0$) と交わる円の半径を a 、 y - z 平面 ($x = 0$) と交わる円の半径を b 、 z - x 平面 ($y = 0$) と交わる円の半径を c とするとき、座標の原点と球の中心との距離を求めよ。」

です。

これは、高校で勉強する球や円の方程式を知らないと解けませんが、それらは綺麗な式で、次のようになります。

・球の方程式は、球の中心座標を (x_0, y_0, z_0) 、半径を r とすると、

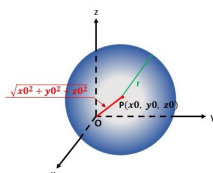
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (1)$$

・円の方程式は、円の中心座標を (x_0, y_0) 、半径を r とすると、

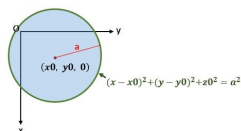
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

です。

さて問題ですが、図1のように、 $P(x_0, y_0, z_0)$ を中心として、半径 r の球があるとき、 x - y 平面による球の切り口は、図2に示すように、半径 a の円になります。



▲図1．中心座標 (x_0, y_0, z_0) 、半径 r の球



▲図2．球の x - y 平面での切り口

同様に、 y - z 平面と z - x 平面による球の切り口は、それぞれ、半径 b および c の円になります。

このとき、座標の原点 (O) と球の中心 (P) との距離、つまり、 $\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}$ を r 、 a 、 b 、 c で表せばそれが答えになります。

そこでまず、 x - y 平面での切り口である円の方程式は、球の方程式 (1) に $z = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (0 - z_0)^2 &= r^2 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 - z_0^2 \end{aligned} \quad (2)$$

となります。

ところが、その円の半径は a なので、(2) から

$$\begin{aligned} r^2 - z_0^2 &= a^2 \\ z_0^2 &= r^2 - a^2 \end{aligned} \quad (3)$$

です。

同様に、 y - z 平面での切り口である円の方程式は、球の方程式 (1) に $x = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} (0 - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= r^2 \\ (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= r^2 - x_0^2 \end{aligned}$$

となり、これが半径 b の円になるので、

$$\begin{aligned} r^2 - x_0^2 &= b^2 \\ x_0^2 &= r^2 - b^2 \end{aligned} \quad (4)$$

で、 z - x 平面での切り口である円の方程式は、球の方程式 (1) に $y = 0$ を代入して、

$$(x - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 - y_0^2$$

となり、これが半径 c の円になるので、

$$r^2 - y_0^2 = c^2$$

$$y_0^2 = r^2 - c^2 \quad (5)$$

です。

したがって、原点 O と球の中心 $P(x_0, y_0, z_0)$ との距離 L は、

$$L = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

に、(3) (4) (5) を代入して、

$$L = \sqrt{(r^2 - b^2 + r^2 - c^2 + r^2 - a^2)}$$

$$= \sqrt{3r^2 - a^2 - b^2 - c^2}$$

となり、これが答えになります。

本問は、球や円の方程式の知識が必要で中学数学を逸脱していますが、興味のある人は、平面図形や空間図形の式を調べてみて下さい。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533