中学生でも解ける東大大学院入試問題（５１）

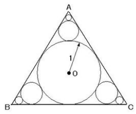
2014-12-02 11:47:52

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

予報では、寒気が到来し、風も強くとても寒くなるとのことでしたが、陽射しのおかげで室内が暖かく、覚悟していたより寒くありません。インフルエンザも増えてきたようなので、特に受験生の皆さんは十分気を付けてください。

さて、今回は平成１７年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「図のように、半径１の円Ｏが正三角形ＡＢＣに内接している。次々に小さな円を無数に三角形の頂点に向かって内接させてゆくとき、全ての円の円周の長さの和はいくらになるか。」



▲問題図

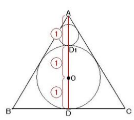
です。

問題に「小さな円を無数に三角形の頂点に向かって内接させてゆくとき、・・・」とありますが、これは高校で勉強する「極限」の計算が必要なので、ここでは無数を１０個（何個でもよいのですが）に変更しましょう。

また、３つの頂点に向かう１０個の内接円の円周の長さを計算するのですが、Ａに向かう１０個の内接円の円周の長さを計算し、それを３倍することにしましょう。

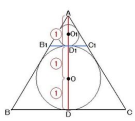
まず、図１のようにＡからＢＣに垂線を降ろしその足をＤとします。すると、正三角形の内接円の中心（内心）は、重心と一致するので（外心、垂心とも一致します）、
ＡＯ：ＯＤ＝２：１
になります。

また、Ｄと異なる円ＯとＡＤとの交点をD1とすると、ＯＤ＝ＯD1　なので、
ＡD1：D1Ｏ：ＯＤ＝１：１：１
になります。



▲図１．ＡからＢＣに垂線を降ろします

次に図２のように、D1を通りＢＣに平行な線分Ｂ1Ｃ1を引くと、△ＡＢ1Ｃ1と△ＡＢＣは相似で、その相似比は１/３となります。すると、円Ｏの半径が１ですから、円Ｏ1の半径は１/３となります。



▲図２．△ＡＢ1Ｃ1を作ります

さらに、円Ｏ2、円Ｏ3、・・・、円Ｏ10と同じ相似関係が繰り返されるので、ｋ番目の円Ｏkの半径Ｒkは、
Ｒk＝（１/３）^k （（１/３）^kは１/３のｋ乗を表します）
となります。

すると、円Ｏkの円周の長さＬｋは、
Ｌｋ＝２πＲｋ
　＝２π（１/３）^k
となり、これを使って円Ｏ1から円Ｏ10までの円周の和Ｌを計算すると、
Ｌ＝Ｌ1＋Ｌ2＋・・・＋Ｌ10
　＝２π（１/３＋（１/３）^2＋（１/３）^3＋・・・＋（１/３）^10)　　　　（１）
となります。

ここで（　　）内をＳとすると、
Ｓ＝１/３＋（１/３）^2＋（１/３）^3＋・・・＋（１/３）^10　　　　　　（２）

で、さらに、Ｓに１/３を掛けると、
１/３・Ｓ＝（１/３）^2＋（１/３）^3＋（１/３）^4＋・・・＋（１/３）^11　（３）
を得ます。

そこで、（２）から（３）を減じると、
Ｓ-　１/３・Ｓ＝２/３・Ｓ
　　　　　　＝１/３-　（１/３）^11
　　　　　　＝１/３・（１-　（１/３）^10）
から、
Ｓ＝１/２・（１-　（１/３）^10）
となり、これを（１）に代入して、
Ｌ＝π（１-　（１/３）^10）
となります。（等比数列の和や公式を導くときのテクニックです）

前述したように、１０個の内接円のグループがＡ、Ｂ、Ｃに向かって３組あるので、それら全ての円周の長さの和は３Ｌで、円Ｏの円周の長さ２πを合わせて、答えは、
３Ｌ＋２π＝３π（１-　（１/３）^10）＋２π
　　　　　＝π（５-　（１/３）^9）
となります。

ついでに無限の内接円の場合の答えは、内接円の円周の長さの和が
π（５-　（１/３）^(k-1)）
となり、ｋ→∞（無限大）とすると、（１/３）^(k-1)→０なので、
π（５-　（１/３）^(k-1)）→５π
になります。

次は、内接円を隙間に敷き詰めていったとき内接円の面積がどうなるか調べたいと思います。興味があれば計算してみて下さい。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533