

中学生でも解ける東大大学院入試問題（９１）

2015-01-18 12:22:44

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

近くの地域センターで餅つきがあるようで白などが置いてありました。底冷えする寒い日ですが、餅つきすれば直ぐに温まるでしょうから、今日は餅つき日和でしょう。

さて、今回は平成２３年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「１から９まで書かれたカードが $N$ 枚ずつ、合計 $9N$ 枚ある。ただし $N$ は１以上の整数である。任意に２枚抜き出したカードに書かれた数字の合計が１０になる確率を求めよ。」

です。

確率の問題です。場合の数・確率の問題は樹形図を描いて対応できますが、本問ではカードの枚数が $9N$ 枚と変数になっているので、樹形図に描ききることができません。そのため“・・・”などを使って表すのですが、今回は、確率の加法・乗法定理を使いましょう。

まず、１から９までの数字で２つの組合せが１０になる組合せは、１と９、２と８、３と７、４と６、５と５、６と４、７と３、８と２、９と１です。

ここで注意したいのは、５と５の組合せで、例えば、 $N = 1$ の場合、抜き出した２枚のカードの両方に５が書かれていることはないということです。

と言うことで、 $N = 1$ と $N \geq 2$ に場合分けして調べていきましょう。

（１） $N = 1$ の場合

例えば、１枚目のカードが１のとき２枚目のカードが９であれば、和が１０になります。さらに、和が１０となる組合せは８通りあるので、求める確率は、

$$(1/9 \cdot 1/8) \cdot 8 = 1/9$$

です。

（２） $N \geq 2$ の場合

１枚目のカードが１である確率は、

$$N/9N = 1/9$$

で、

２枚目のカードが９である確率は、

$$N/(9N - 1)$$

です。

つまり、１枚目カードが１で２枚目カードが９である確率は、

$$1/9 \cdot N/(9N - 1) = N/9(9N - 1)$$

になります。

１枚目と２枚目のカードの数字が、２と８、３と７、４と６、６と４、７と３、８と２、９と１の場合も同様なので、５以外の数字で、１枚目と２枚目のカードの数字の和が１０となる確率は、

$$N/9(9N - 1) \cdot 8 = 8N/9(9N - 1) \quad (1)$$

となります。

一方、１枚目のカードが５である確率は、

$$N/9N = 1/9$$

で、

２枚目のカードも５である確率は、

$$(N - 1)/(9N - 1)$$

です。

つまり、１枚目と２枚目のカードが両方５である確率は、

$$1/9 \cdot (N - 1)/(9N - 1) = (N - 1)/9(9N - 1) \quad (2)$$

となります。

以上より、求める確率は（１）と（２）の和なので、

$$8N/9(9N - 1) + (N - 1)/9(9N - 1)$$

$$= (9N - 1)/9(9N - 1)$$

$$= 1/9$$

となります。

以上の結果をまとめると、 $N = 1$ の場合でも、 $N \geq 2$ の場合でも、求める確率は $1/9$ となります。

蛇足になりますが、（１）（２）を変形してそれらの極限を調べると、 $N$ が大きくなると、５以外の数字で、１枚目と２枚目のカードの数字の和が１０になる確率は小さくなり、１枚目と２枚目のカードの数字が両方５で和が１０になる

確率は大きくなることが判ります。

さらに、それらの和は、 $N$ に依存せず、 $1/9$ と一定というのですから面白いものです。

今年の都立高校入試の大問1の小問7は、「資料の整理」から出題されるのか、「場合の数・確率」から出題されるのか判りませんが、これらの単元に自信のない受験生はしっかり見直ししておきましょう。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533