中学生でも解ける東大大学院入試問題（９３）

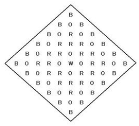
2015-01-20 11:34:14

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

少し風がありますが気温は９℃と過ごしやすい日になりました。しかし、明日から天気が崩れるようです。受験生の皆さんは最後の一踏ん張りです。頑張ってください。

さて、今回は平成２４年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「下図には“ＢＯＲＲＯＷ　ＯＲ ＲＯＢ”という文を綴るための文字が並んでいる。文字列を１文字ずつ順に進んでこの文を綴る異なる方法は何通りあるか。ただし、進み方は上下左右のみであり、斜めには進めない。」



▲問題図

です。

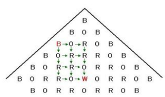
少し問題の意味が掴み難いかもしれませんが、そんなときには実際に鉛筆で図をなぞってみましょう。２、３例やってみると、問題のポイントがはっきりすることがあります。

この問題で実際に“ＢＯＲＲＯＷ　ＯＲ ＲＯＢ”をなぞってみると、“Ｂ”は図の最外周部だけにあって、一方、“W”が図の中心に一つしかないので、最外周部のいずれかの“Ｂ”から出発し図の中心に向かって移動して“ＢＯＲＲＯW”を綴ることが判ります。

またそれと反対に、後半の“ＯＲ ＲＯＢ”は、中心の“W”から出発して最外周部のいずれかの“Ｂ”に向かって移動することになります。

次に最外周部の“Ｂ”から中心の“W”への移動の仕方を調べてみましょう。

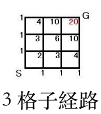
図１のように図の左上側の“Ｂ”から出発する場合、右または下への移動は可能ですが、左および上への移動はできません。



▲図１．“Ｂ”から“W”への移動

これは、左上側以外の“Ｂ”から出発する場合にも同様で、出発位置と可能な移動方向の関係は次のようになります。
右上側→左または下
左下側→右または上、
右下側→左または上、
真上　→下
真下　→上
真左　→右
真右　→左

これらのことから本問は、図２のような格子経路での最短経路数を求めるものと判ります。



▲図２．３×３格子経路の最短経路数

そこで、格子経路の最短経路数について簡単な例で調べてみましょう。

図２は、ＳからＧに向かって移動する例で、全ての格子点にＳからの最短経路数が示してあります。

例えば、Ｇに到着する直前は、一番右で上から２番目の格子点または右から２番目で一番上の格子点にいる必要がありますが、それらの格子点までのＳからの最短経路数はどちらも１０通りなので、ＳからＧまでの最短経路数は１０＋１０＝２０通りになります。

これは、次のように求めることもできます。

まず、右への移動を「→」、上への移動を「↑」とすれば、ＳからＧまで移動するために３個の「→」と３個の「↑」が必要で、最短経路数はその並べ方の場合の数になります。

そこで、３個の「→」を１列に並べ、その両端を含む４つの間隔に、「↑」を割り当てることを考えます。

このとき、
（１）３個の「↑」を１つのグループとする場合
（２）２個の「↑」と１個の「↑」の２つのグループとする場合
（３）１個の「↑」で３つのグループとする場合
の３種類に場合分けします。

（１）の場合、「→」が並んだ列で割り当てることができるのは４ヶ所なので４通りです。

（２）の場合、２個の「↑」のグループを割り当てることができるのは４通りで、続いて１個の「↑」を割り当てることができるのは３通りになるので、４×３＝１２通りになります。

（３）の場合、４ヶ所の割り当て可能な場所で、「↑」を割り当てない場所を決めることと同じなので４通りになります。

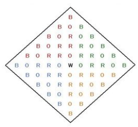
これらの（１）（２）（３）の場合を合計して、
４＋１２＋４＝２０通り
と計算することができます。

さらに、高校で勉強する「同じものを含む順列」を使うと簡単に計算することができます。

前と同じように、右への移動を「→」、上への移動を「↑」とすれば、ＳからＧへの最短経路数は、「→」を３個と「↑」を３個を１列に並べる順列に等しくなり、それは、
６！/（３！・３！）＝６・５・４・３・２・1/（３・２・１・３・２・１）＝２０通り
と計算できます。

では、そろそろ本問に戻りましょう。

まず、“Ｂ”から“Ｗ”に移動する経路は、問題図を図３のように４つに分けて、その一つについての経路を４倍して求めましょう。



▲図３．４つに分けます

ここでは、左上側の赤色部分の経路を調べます。「→」を右移動、「↓」を下移動とします。

真上の“Ｂ”から“Ｗ”へは、５個の「↓」を並べる場合の数なので、１通りです。

１つ左の“Ｂ”からは、４個の「↓」と１個の「→」を並べる場合の数なので、５通りです。

２つ左の“Ｂ”からは、３個の「↓」と２個の「→」を並べる場合の数なので、１０通りです。

３つ左の“Ｂ”からは、２個の「↓」と３個の「→」を並べる場合の数なので、１０通りです。

４つ左の“Ｂ”からは、１個の「↓」と４個の「→」を並べる場合の数なので、５通りです。

以上を合計すると、左上側の（赤色部分の）“Ｂ”から出発して中心の“Ｗ”に移動する経路数は、
１＋５＋１０＋１０＋５＝３１通り
です。

したがって、全領域からの経路数は、
３１×４＝１２４通り
になります。

次に、中心の“Ｗ”から最外周の“Ｂ”に移動する経路数は、その逆の最外周の“Ｂ”から中心の“Ｗ”に移動する経路数と等しいので、１２４通りになります。

したがって、求めるべき“ＢＯＲＲＯＷ　ＯＲ　ＲＯＢ”を綴る方法は、
１２４×１２４＝１５３７６通り
で、これが答えになります。

問題の意味が掴み難いときには、具体例を当てはめてみて問題を理解することが有効なので実践するとよいでしょう。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533