中学生でも解ける東大大学院入試問題（１８１）

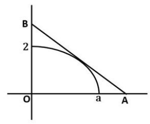
2015-04-27 12:41:13

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

全国的に気温が高いようで、東久留米市の気温も２５℃で夏日になりました。天気図を見ると、太平洋側に元気がよさそうな高気圧があり、まるで夏の様相です。

さて、今回は平成１６年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題で、前回に続き楕円の問題です。

問題は、
「図において線分ＡＢは楕円ｘ^2/ａ^2＋ｙ^2/４＝１の接線である。但し、ａは正の定数である。三角形ＯＡＢの面積の最小値を求めよ。

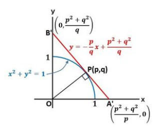


▲問題図　」

です。

前回の問題と同じように、円の接線Ａ’Ｂ’で、三角形ＯＡ’Ｂ’の面積を最小にするものを調べて、最後に、ｘ、ｙ軸方向に、それぞれ、ａ倍、２倍すればＯＫです。

下図に、半径１の円にＰ（ｐ，ｑ）で接する直線を示しました。ここで、△ＯＡ’Ｂ’の面積が最小になる接線Ａ’Ｂ’を調べます。



▲図．半径１の円と接線Ａ’Ｂ’

接線Ａ’Ｂ’は線分ＯＰ（傾きｑ/ｐ）と直交するので、接線Ａ’Ｂ’の傾きは、-　ｐ/ｑになります。また、接点Ｐは半径１の円周上にあるので、ｐ^2＋ｑ^2＝１　が成り立ちます。

以上から、接線Ａ’Ｂ’の式は、
ｙ＝-　ｐ/ｑ・ｘ＋（ｐ^2＋ｑ^2）/ｐ
となり、Ａ’とＢ’の座標は、
Ａ’（（ｐ^2＋ｑ^2）/ｐ，０）＝（１/ｐ，０）
Ｂ’（０，（ｐ^2＋ｑ^2）/ｑ）＝（０，１/ｑ）
です。

すると、△ＯＡ’Ｂ’の面積Ｓは、
Ｓ＝１/２・１/ｐ・１/ｑ
　＝１/２ｐｑ　　　　　　　　（１）
です。

ここで、
ｑ＝√（１-　ｐ^2）　　　　　　　（２）
を（１）に代入すると、
Ｓ＝１/２・１/（ｐ√（１-　ｐ^2））
となり、Ｓが最小となるのは、ｐ√（１-　ｐ^2）が最大になるときです。

そこで、
Ｔ＝ｐ√（１-　ｐ^2）
　＝√（ｐ^2-　ｐ^4)
　＝√(-　（ｐ^2-　１/２）^2＋１/４）
とすると、ｐ^2＝１/２、つまり、ｐ＝√２/２のとき、Ｔは最大になります。

また、ｐ＝√２/２と（２）から、
ｑ＝√２/２
です。

したがって、△ＯＡ’Ｂ’の面積が最小になるときのＡ’、Ｂ’は、それＲぞれ、Ａ’（√２/２，０）、Ｂ’（０，√２/２）となります。

最後に、ｘ、ｙ軸方向にそれぞれａ、２倍すると、
Ａ’（√２/２，０）→Ａ（√２ａ/２，０）
Ｂ’（０，√２/２）→Ｂ（０，√２）
となります。

以上から、△ＯＡＢの面積の最小値は、１/２・√２ａ/２・√２＝ａ/２　となり、これが答えです。

２回続けて楕円が関係する最大最小問題を取り上げましたが、初めに円を使って最大最小となる条件を求めておいて、最後にｘ座標をａ倍、ｙ座標をｂ倍して楕円に変換するテクニックを頭に入れておくと良いでしょう。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533