

中学生でも解ける東大大学院入試問題（５４）

2014-12-05 10:25:40

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

現在の気温は8℃と低いのですが日向は暖かく感じます。明日からは一層気温が下がるようで、十分暖かくして勉強してください。

さて、昨日に続いて魔方陣の問題です。出典は、平成21年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題です。

問題は、

「図の4×4のマス目に1から16の数字を、縦、横、対角線の和がすべて同じになるように置く。このとき、A、Bを求めよ。」

4		15	B
5	11		
	7		12
A			13

▲問題図

です。

昨日の問題と違って、マス目に入れる数が1から16と決まっているので、それを利用して解きましょう。

4×4の魔方陣を4行または4列に分け、そこに配置された数の和を考えると、それらはすべて等しいので、各行および各列に配置された数の和は、4×4の魔方陣に配置された数の和の1/4になります。さらに対角線に配置された数の和もそれに等しくなります。

一方、4×4の16のマス目に、1から16の数が入るので、16のマス目の数の和は、1から16までの和になり、それは136です。つまり、各行、各列および各対角線に配置された数の和は、

$$136 \div 4 = 34$$

となります。

ここで、図1のように空欄のマスを文字を入れておきます。

4	a	15	B
5	11	b	c
d	7	e	12
A	f	g	13

▲図1．空欄のマスを文字を入れます

まず、左上から右下にかけての対角線上には3つの数が判っているので、

$$4 + 11 + e + 13 = 34$$

から、

$$e = 6$$

になります。

すると、上から3行目のdが、

$$d + 7 + 6 + 12 = 34$$

から、

$$d = 9$$

と判ります。

さらに、左端の列のAが、

$$4 + 5 + 9 + A = 34$$

から、

$$A = 16$$

と判ります。ここまでの結果を図2に示します。

4	a	15	B
5	11	b	c
9	7	6	12
16	f	g	13

▲図2．途中経過

いままでは、縦、横、対角線の数の和が34ということを利用して順調に空欄のマスを埋めることができましたが、図2を見ると、残りの縦、横、対角線には空欄のマスが2つあって、これまでのようにはいきません。

そこで残りの部分を方程式を作って解くというのも有力な方法になります。しかし、今回は別の方法で解きましょう。

マスに入れる数は1から16までと決まっているので、まだ使っていない数は、
1、2、3、8、10、14
の6つになります。

ここで、一番上の行に着目すると、
 $B + 15 + a + 4 = 34$

となるので、
 $B + a = 15$

になり、上に挙げた使っていない数から15を作ることができるのは、1と14の組み合わせしかありません。

同様に、右端の列に着目すると、
 $B + c + 12 + 13 = 34$

となるので、
 $B + c = 9$

になり、上に挙げた使っていない数から9を作ることができるのは、1と8の組合せしかありません。

したがって、

$$B = 1$$

$$a = 14$$

$$c = 8$$

と決まります。

問題はAとBを求めればよいので、答えは、 $A = 16$ 、 $B = 1$ になりますが、一応、すべてを求めて魔方陣を完成させましょう。

縦、横、対角線の数の和が34であることを使うと、左から2列目のf、右下から左上にかけての対角線のbは、

$$f = 2$$

$$b = 10$$

となり、最後に残った左から3列目のgは、

$$g = 3$$

となります。完成した魔方陣を図3に示します。

4	14	15	1
5	11	10	8
9	7	6	12
16	2	3	13

▲図3．完成した魔方陣

魔方陣の問題は、この2回で取り上げた内容で大体片付くと思います。（都立高校入試には出題されないと思いますが・・・）

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533