

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１４５）

2015-03-20 11:58:03

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と同様、曇りの天気ですが暖かく過ごしやすい日が続きます。暫くは雨も降らないようです。

さて、今回は平成２７年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「翌日の天気は当日の天気のみ依存しており、その遷移確率は以下の表で与えられるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

		翌日		
		晴れ	曇り	雨
当日	晴れ	1/2	1/2	0
	曇り	3/8	1/2	1/8
	雨	0	1/2	1/2

（１）ある日の天気が曇りであるとき、その後の天気が雨（翌日）、曇り（２日後）、晴れ（３日後）と移り変わる確率を求めよ。

（２）ある日の天気が曇りであるとき、２日後も曇りである確率を求めよ。

（３）十分に日数が経過したとき、晴れている確率を求めよ。」

単純マルコフ連鎖の問題です。

まず（１）からです。

当日の天気が曇りで翌日雨になる確率は $1/8$ 、雨から翌日曇りになる確率は $1/2$ 、曇りから翌日晴れになる確率は $3/8$ ですから、求める確率 $P(1)$ は、

$$P(1) = 1/8 \times 1/2 \times 3/8 \\ = 3/128$$

で、これが答えです。

次に（２）です。

当日の天気が曇りで２日後も曇りになる過程は、

（ａ）曇り→晴れ→曇り

（ｂ）曇り→曇り→曇り

（ｃ）曇り→雨→曇り

の３通りで、それぞれの確率を計算すると、

$$P(a) = 3/8 \times 1/2 = 3/16$$

$$P(b) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$$

$$P(c) = 1/8 \times 1/2 = 1/16$$

で、求める確率 $P(2)$ は、

$$P(2) = P(a) + P(b) + P(c) \\ = 3/16 + 1/4 + 1/16 \\ = 1/2$$

で、これが答えです。

最後に（３）ですが、漸化式を使って解いてみましょう。

そこで n 日後に晴れる確率を $S(n)$ 、曇りの確率を $C(n)$ 、雨の確率を $R(n)$ とすると、

$$S(n+1) = 1/2 S(n) + 3/8 C(n) \quad (1)$$

$$C(n+1) = 1/2 S(n) + 1/2 C(n) + 1/2 R(n) \quad (2)$$

$$R(n+1) = 1/8 C(n) + 1/2 R(n) \quad (3)$$

$$S(n) + C(n) + R(n) = 1 \quad (4)$$

が成り立ちます。

（４）から

$$R(n) = 1 - S(n) - C(n)$$

を（２）に代入して、

$$C(n+1) = 1/2 S(n) + 1/2 C(n) + 1/2 (1 - S(n) - C(n)) \\ = 1/2$$

なので、これから $C(n) = 1/2$ となります。

これを（１）に代入して、

$$S(n+1) = 1/2 S(n) + 3/8 \cdot 1/2 \\ = 1/2 S(n) + 3/16$$

となり、この特性方程式

$$x = 1/2 x + 3/16$$

を解くと、

$$x = 3/8$$

なので、

$$S(n+1) - 3/8 = 1/2 (S(n) - 3/8)$$

が成り立ちます。

したがって、

$$S(n) = (1/2)^n \cdot (S(0) - 3/8) + 3/8$$

なので、 $n \rightarrow \infty$ のとき $S(n) \rightarrow 3/8$ に収束します。

つまり、求める確率 $P(3)$ は、

$$P(3) = 3/8$$

となり、これが答えになります。

また、一般的な解法として、十分に日数が経過したときに成り立つ平衡方程式を使う方法があります。

ここで、晴れ、曇り、雨の確率をそれぞれ S 、 C 、 R とし、

$$S + C + R = 1 \quad (5)$$

$$S = 1/2 S + 3/8 C \quad (6)$$

$$C = 1/2 S + 1/2 C + 1/2 R \quad (7)$$

$$R = 1/8 C + 1/2 R \quad (8)$$

の連立方程式を解くことになります。

そこで (6) から

$$4S = 3C$$

$$S : C = 3 : 4 \quad (9)$$

(8) から

$$C = 4R$$

$$C : R = 4 : 1 \quad (10)$$

(9) (10) から

$$S : C : R = 3 : 4 : 1$$

で、

$$S = 3/8$$

$$C = 1/2$$

$$R = 1/8$$

とすると、これは (5) (7) を満たします。

したがって、求める確率 $P(3)$ は、

$$P(3) = 3/8$$

で、漸化式を使って求めたものと一致します。

既約エルゴード的マルコフ連鎖において、どのような初期状態から出発しても一定の状態に近づくというのが平衡方程式の成立条件です。興味のある人は調べてみてください。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533