

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１２２）

2015-02-19 11:19:45

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と比べてぐつと暖かくなり、午後の気温は10℃を超すようです。2月も後半で大寒からおよそ1ヶ月ですから、これから段々暖かくなっていくのを実感できるでしょう。

さて、今回は平成23年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「正の実数  $x$  について、以下の等式を満たす  $x$  をそれぞれ求めよ。

(1)

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}$$

(2)

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

ここで、 $\dots$  は同じパターンが無限に続くことを意味する。」

連分数の問題です。(1)は4段（一番上の分数の分母が1段目です）なので、4段目から通分を繰り返して  $x$  の方程式を作っても解くことができますが、(2)は分数が無限に続くので通分することができないので工夫が必要です。

まず、(1)から片付けましょう。

$x$  は正の実数なので、

$$x = 1 + 1/x \quad (3)$$

とします。

ここで、(3)の右辺に(3)を代入します。すると、図1の式(4)を得ることができます。

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

▲図1. 式(4)

さらに(4)の右辺に(3)を代入すると、図2(式(5))のようになります。

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

▲図2. 式(5)

この操作をあと2回続けると、図3の式(6)を得ることができます。

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}$$

▲図3. 式(6)

ここで(6)と与えられた式を見比べると、これらは同じ式で、つまり(3)から(6)を導くことができるということです。したがって、与えられた式の  $x$  は、(3)の  $x$  と同じになります。

そこで、(3)を

$$x^2 - x + 1 = 0$$

と変形し、解の公式を使って解くと、

$$x = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

となり、 $x > 0$  なので、

$$x = (1 + \sqrt{5})/2$$

が答えになります。

次に(2)ですが、これも(1)と同様に解くことができます。

$$y = 2 + 1/y \quad (7)$$

と置いて、(7)の右辺に(7)を代入すると、図4(式(8))のようになります。

$$y = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+y}}$$

▲図4．式（8）

さらに同じ操作を3回続けると、図5の式（9）を得ることができます。

$$y = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+y}}}}}$$

▲図5．式（9）

図5から予想できるように、この操作を無限回繰り返した式が（2）で与えられた式の右辺の第2項と同じになります。

したがって、（7）を解いて  $y$  の値を求め、  
 $x = 1 + 1/y$  （10）  
 に代入すれば、 $x$  を求めることができます。

それでは、（7）を変形して、  
 $y^2 - 2y - 1 = 0$   
 とし、解の公式を使って、  
 $y = 1 \pm \sqrt{2}$   
 を求めます。

これを（10）に代入して、  
 $x = 1 + 1 / (1 \pm \sqrt{2})$   
 $= (2 \pm \sqrt{2}) / (1 \pm \sqrt{2})$  （複号同順）  
 $= \pm \sqrt{2}$   
 で、 $x > 0$  から  $x = \sqrt{2}$  が答えになります。

連分数はいろいろ面白い性質を持っていて、例えば、 $\sqrt{2}$  や  $\sqrt{3}$  などの無理数（2次の無理数＝整数係数の2次方程式の無理数解）については、「2次の無理数は循環連分数となり、逆に、循環連分数は2次の無理数である」といった定理があります。興味のある人は調べてみてください。