中学生でも解ける東大大学院入試問題（１９７）

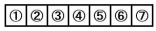
2015-08-08 10:08:18

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

室外は少し涼しい風が吹いて、昨日までの暑さも幾分和らぎましたが、室内はとても蒸し暑く感じます。ひと雨ありそうな天気です。

さて、今回は平成２７年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「カウンター形式のバーに、下図のように７つの席（１、２、３、４、５、６、７）が並んでいる。このバーに客が一人ずつ訪れ、最後にすべての席が埋まると考える。客は席を等確率で選ぶとする。客は、可能な限り、すでに埋まっている席の隣には座らない。
　また、客は、来店時に両隣に人がいない席に座れたときに満足となり、すでに埋まっている席の隣にしか座れない場合は不満足となる。



▲問題図

以下の問いに答えよ。

（１）満足な客が不満足な客より多くなるような着席順は全部で何通りあるか。
（２）着席順は全部で何通りあるか。
（３）最初の客が１の席に座る場合、無作為に座る場合と比較して、満足な客は何人増えると期待できるか。」
です。

長い問題文ですが、その内容は電車・バスの着席の仕方など世間でよく見られることなのでイメージし易いと思います。着席ルールのポイントは、「客は、可能な限り、すでに埋まっている席の隣には座らない」ということです。

まず（１）ですが、図１のように、１番目から４番目の客が奇数の席に座った場合、満足な客が最大値の４人となり、満足な客が不満足な客より多くなります。

一方、１番目から３番目の客が一人でも偶数の席に座った場合、４番目の客は両隣に人がいない席に座ることはできず、満足な客が不満足な客より少なくなります。

▲図１．４人が奇数の席に座ると満足な客は４人、３人のうち１人でも偶数の席に座ると満足な客は３人

以上から、満足な客が不満足な客より多くなるような着席順は、１番目から４番目の客が奇数の席に座り、５番目から７番目の客が偶数の席に座る場合となります。

この着席順の場合の数は、１番目の客は４つの奇数の席から選ぶので４通り、２番目の客は３つの奇数の席から選ぶので３通り、３番目の客は２つの席から選ぶので２通り、４番目の客は１つの奇数の席から選ぶので１通りで、１番目から４番目の客の着席順の場合の数は、４×３×２×１＝２４通りです。

一方、５番目の客は残った３つの席から選ぶので３通り、６番目の客は２つの席から選ぶので２通り、７番目の客は１つの席から選ぶので１通りで、５番目から７番目の客の着席順の場合の数は、３×２×１＝６通りです。

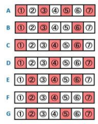
したがって、満足な客が不満足な客より多くなるような着席順の場合の数は、２４×６＝１４４通りになります。（高校で勉強する順列の記号ｗ使えば、4Ｐ4×3Ｐ3＝４・３・２・１・３・２・１＝１４４　です）

続いて（２）です。上記したように、着席ルールのポイントは、、「客は、可能な限り、すでに埋まっている席の隣には座らない」ということなので、どのような着席順でも１番目から３番目までの客は必ず満足な客になります。

そこで、１番目から３番目までの客の座る席を調べてみましょう。

まず１番目から３番目の客が全員奇数の席に座ると、４番目の客は必然的に奇数の席に座ることになります。この場合の着席順の場合の数は、（１）から１４４通りになります。

次に１番目から３番目の客のうち１人以上が偶数の席に座る場合の着席パターンを調べると、図２のＢからＧまでの６通りであることが判ります。



▲図２．１番目から３（４）番目の客が着席する席のパターン

そこで、ＢからＧのいずれの場合についても、１番目から３番目の客が３つの席から選ぶことから、その着席順の場合の数は３×２×１＝６通りで、４番目から７番目の客は残った４つの席から選ぶことから、その着席順の場合の数は４×３×２×１＝２４通りになり、各々の着席順の場合の数は、６×２４＝１４４通りになります。

以上から、
Ａ　　：１４４通り
Ｂ～Ｇ：１４４×６＝８６４通り
なので、求める着席順の場合の数は、１４４＋８６４＝１００８通りになります。

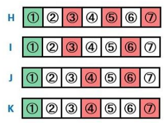
最後に（３）です。

１番目の客が無作為に座る場合の満足な客の期待値を計算しましょう。

（２）から、Ａの場合は満足な客が４人になり、ＢからＧの場合は満足な客が３人になります。

また、Ａの起こる確率は１４４/１００８＝1/7で、ＢからＧの起こる確率は８６４/１００８＝6/7なので、この場合の満足な客の期待値は、４×1/7＋3×6/7＝２２/7（人）となります。

次に１番目の客が１に座った場合の着席パターンを図３に示します。



▲図３．１番目の客が１に座った場合の２番目から３（４）番目の客の着席パターン

Ｈは、２番目から３番目の客が奇数の席に座る場合で、このとき４番目の客は必然的に残った奇数の席に座ることになり、満足な客は４人になります。

一方、ＩからＫは、２番目から３番目の客の少なくとも１人が偶数の席に座る場合で、満足な客は３人になります。

また、Ｈの着席順の場合の数は、３×２×１×３×２×１＝３６通りで、ＩからＫの着席順の場合の数はいずれの場合も、２×１×４×３×２×１＝４８通りなので、１番目の客が１に座った場合の着席順の場合の数は、３６＋４８×３＝１８０通りになります。

するとＨが起こる確率は３６/１８０＝1/5で、ＩからＫが起こる確率は１４４/１８０＝4/5となるので、満足な客の期待値は、４×1/5＋３×4/5＝１６/5（人）となります。

以上から、期待できる満足な客の増加数は、１６/5－２２/7＝１１２/３５－１１０/３５＝2/３５（人）になります。

期待値は高校で勉強しますが、それは、「ある確率変数Ｘがｘ1、ｘ2、・・・、ｘnのどれか１つの値を必ずとり、それらの値をとる確率がそれぞれｐ1、ｐ2、・・・、ｐnであるとき、期待値Ｅ＝ｘ1ｐ1＋ｘ2ｐ2＋・・・＋ｘnｐn」ということです。興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533