中学生でも解ける東大大学院入試問題（１１５）

2015-02-11 11:15:40

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

現在の気温は５℃ですが、これから上がって午後３時ころには１１℃になるようです。明日も暖かいようで嬉しいことです。

さて、今回は平成２６年度東大大学院新領域創成科学研究科環境研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「袋の中に同じ大きさの球が９個入っている。それぞれの球には１から９までのいずれかの整数が書かれており、同じ数の書かれた球はない。この袋から無作為にＮ個の球を取り出し、取り出した順番に並べて数を作る。例えば、Ｎ＝２のとき、最初に取り出した球に書かれた数字が１、次に取り出した球に書かれた数字が２のときは１２という数ができる。

（１）Ｎ＝２のとき、できた数字が６の倍数となっている確率を求めよ。
（２）Ｎ＝３のとき、できた数字が６の倍数となっている確率を求めよ。　」
です。

（１）については、７２本に枝分かれした樹形図を描けばよいので力ずくで解けそうですが、（２）については、５０４本の樹形図なので少し難しそうです。そこで、樹形図を使わない方法を調べましょう。

初めに（１）です。

２個の球を取り出して２桁の数を作りますが、このとき作られる数は、１２から９８までの整数になります。この範囲に含まれる６の倍数を数え上げればよいので、早速それを書き出してみると、
１２、１８、２４、３０、３６、４２、４８、５４、６０、６６、７２、７８、８４、９０、９６
になります。

しかし、球に書かれている数は、１から９まで１つずつなので、上の数列から０が含まれている数と１桁目と２桁目が同じ数を除きます。

すると、
１２、１８、２４、３６、４２、４８、５４、７２、７８、８４、９６
の１１通りになり、すべての場合の数が９×８＝７２通りなので、求める答えは、１１/７２になります。

続いて（２）です。

（１）と同じように１２３から９８７までの６の倍数を書き出して調べてもよいのですが、１から９８７までの６の倍数が、１４８個あるので大変そうです。

そこで６の倍数を、３の倍数であり、かつ、偶数と考えて、まず、３の倍数になる数の組合せを調べます。

３桁の数が３の倍数になるためには、各桁の数の和が３の倍数になることで、この問題では３個の数の和の最小値と最大値は、それぞれ、１＋２＋３＝６および９＋８＋７＝２４なので、６から２４までの３の倍数を調べればＯＫです。

それでは、それらの組合せを数が重複しないように調べて書き出します。

（ア）各桁の和が６になる組合せ
（１，２，３）

（イ）各桁の和が９になる組合せ
（１，２，６）（１，３，５）（２，３，４）

（ウ）各桁の和が１２になる組合せ
（１，２，９）（１，３，８）（１，４，７）（１，５，６）（２，３，７）（２，４，６）（３，４，５）

（エ）各桁の和が１５になる組合せ
（１，５，９）（１，６，８）（２，４，９）（２，５，８）（２，６，７）（３，４，８）（４，５，６）

（オ）各桁の和が１８になる組合せ
（１，８，９）（２，７，９）（３，６，９）（３，７，８）（４，５，９）（４，６，８）（５，６，７）

（カ）各桁の和が２１になる組合せ
（４，８，９）（５，７，９）（６，７，８）

（キ）各桁の和が２４になる組合せ
（７，８，９）
となります。

上に挙げた3個の数の組合せで、偶数を含まないものは6の倍数になりません。

１個の偶数を含むものは、それを1桁目に置いて残りの2個の奇数を2桁目または3桁目に置けばよいので2通りの6の倍数を作ることができます。

同様に、2個の偶数を含むものは4通りの6の倍数を作ることができ、3個の偶数を含むものは6通りの6の倍数を作ることができます。

そこで、すべての組合せについて偶数の含まれる個数で分類すると、
偶数を含まない組合せ　→　　３個
偶数を1個含む組合せ　→　１４個
偶数を2個含む組合せ　→　１０個
偶数を3個含む組合せ　→　　２個
となります。

したがって、6の倍数の個数は、
３×０＋１４×２＋１０×４＋２×６＝８０個
となり、すべての場合の数は、９×８×７＝５０４通りなので、求める答えは、８０/５０４＝１０/６３となります。

別解として、１２３から９８７までの6の倍数の個数から不適当なもの（例えば、１４４や１５０など）の個数を差し引いて適当なものの個数を求める方法を調べます。

まず、１２３から９８７までの6の倍数の個数は、
９８７÷6＝１６４・・・3
１２３÷6＝２０・・・3
なので、１４４個になります。

次に、この１４４個のなかから不適当なものを除いていくのですが、不適当なものは、
（あ）0を含む数
（い）同じ数字を2個以上含む数
ですが、さらに（あ）を
（あ-１）1桁目に0がある数
（あ-２）1桁目に0がない数
に分けて調べます。

まず、（あ-１）ですが、これは１２３から９８７までの6と１０の最小公倍数（３０）の倍数なので、その個数は、
９８７÷３０＝３２・・・２７
１２３÷３０＝４・・・3
から、３２-４＝２８個になります。

次に（あ-２）ですが、2桁目が0、1桁目と3桁目の和が3の倍数で、かつ、偶数という数になります。これを“Ａ０Ｂ”と表すと、Ａ＋Ｂが3の倍数、Ｂは偶数となります。このＡ、Ｂの組合せを（Ａ，Ｂ）とすると、（このとき、Ａ＝１の場合、“Ａ０Ｂ”＜１２３になることに注意してください）
（Ａ，Ｂ）＝（２，４）（３，６）（４，２）（４，８）（５，４）（７，２）（７，８）（８，４）（９，６）
の9個になります。

続いて、（い）です。同じ数字を2個以上含む6の倍数を“ＡＡＢ”、“ＡＢＢ”、“ＢＡＢ”と表します。ここで、Ｂは偶数でＡ＝Ｂでも構いません。

まず、“ＡＡＢ”の場合、２Ａ＋Ｂが3の倍数で、
Ｂ＝２のとき、２Ａ＝１、４、７、１０、１３、１６→Ａ＝２、５、８で、3個

Ｂ＝４のとき、２Ａ＝２、５、８、１１、１４、１７→Ａ＝１、４、７ですが、１１４＜１２３なので2個

Ｂ＝６のとき、２Ａ＝３、６、９、１２、１５、１８→Ａ＝３，６，９で、3個

Ｂ＝８のとき、２Ａ＝１，４，７，１０，１３，１６→Ａ＝２，５，８で、3個
となり、合計１１個です。

次に“ＡＢＢ”の場合、Ａ＋２Ｂが3の倍数で、
Ｂ＝２のとき、Ａ＝２、５、８で、3個

Ｂ＝４のとき、Ａ＝１、４、７で、3個

Ｂ＝６のとき、Ａ＝３、６、９で、3個

Ｂ＝８のとき、Ａ＝２、５、７で、3個
となりますが、3個が同じ数が“ＡＡＢ”と重複するので、合計8個です。

最後に“ＢＡＢ”の場合ですが、これは“ＡＢＢ”の個数と同じなので、８個です。

以上から不適切な数の個数の合計は、
２８＋９＋１１＋８＋８＝６４個
となり、適当な数の個数は、１４４-６４＝８０個となり、前述の答えと一致しました。

（２）については思ったより手間が掛かりました。もっとスマートな解法があるのかもしれません。知っていられる方がいましたら教えてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533