

中学生でも解ける東大大学院入試問題 (1 1 4)

2015-02-10 13:11:54

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今日は私立高校の入学試験日なので、寒さが厳しいとはいえ、昨日より暖かくなって良かったです。受験生の皆さんは今まで蓄えた力を思う存分発揮してください。

さて、今回は平成16年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「 $(x + y + z)^6$ における x^2yz^3 の係数を求めよ。」
です。 (x^2 は x の2乗を表します)

多項定理($(a + b + c + \dots)^n$ の展開式の一般項は、 $n! / (p! q! r! \dots) a^p b^q c^r \dots$ 、 $p + q + r + \dots = n$ 、 $p, q, r, \dots \geq 0$)を知っていれば簡単に、答えは、

$$\frac{6!}{2!1!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 60$$

になります。

これを知らない場合は、実際に与式を展開すれば良いのですが、このとき係数を求める項の x 、 y 、 z の次数が大きくないので、展開中に現れる高次数の項を消しながら計算すると効率的です。

例えば、係数を求める項の y の次数が1ですから、展開中に現れる y^2 以上を持つ項は求める係数に関係ありません。

そこで、与式を次のように変形します。

$$\begin{aligned}(x + y + z)^6 &= (y + (x + z))^6 \\ &= (y^2 + 2y(x + z) + (x + z)^2)^3\end{aligned}$$

ここで、右辺の y^2 の項は求める係数に関係ないので、

$(2y(x + z) + (x + z)^2)^3$ (1)
における係数を求めれば良いことになります。

さらに、(1)を展開すると、($A = x + z$ としました)

$$(1) = (4y^2A^2 + 4yA^3 + A^4)(2yA + A^2)$$

となり、上記と同様、 $4y^2A^2$ の項は関係ないので、

$$(4yA^3 + A^4)(2yA + A^2) \quad (2)$$

の係数を求めます。

さらに、(2)を展開すると、

$$\begin{aligned}(2) &= 8y^2A^4 + 2yA^5 + 4yA^5 + A^6 \\ &= 8y^2A^4 + 6yA^5 + A^6\end{aligned}$$

となり、 $8y^2A^4$ と A^6 は関係ないので、

$$6yA^5 \quad (3)$$

の係数を求めればOKです。

次に、 x 、 z を含む項に進みます。

まず、 $A = x + z$ から、

$$\begin{aligned}A^5 &= (x + z)^5 \\ &= (x^2 + 2xz + z^2)^2(x + z) \\ &= (x^4 + 4x^2z^2 + z^4 + 4x^3z + 4xz^3 + 2x^2z^2)(x + z) \\ &= (x^4 + 4x^3z + 6x^2z^2 + 4xz^3 + z^4)(x + z)\end{aligned}$$

となります。

ここで、係数を求める項の x の次数は2、 z の次数は3なので、 x^3 、 z^4 以上を持つ項は関係ないので、それらの項を取り除くと、

$$(6x^2z^2 + 4xz^3)(x + z) \quad (4)$$

となり、(4)の係数を求めれば良いことになります。

さらに、(4)を展開して、

$$\begin{aligned}(4) &= 6x^3z^2 + 4x^2z^3 + 6x^2z^3 + 4xz^4 \\ &= 6x^3z^2 + 10x^2z^3 + 4xz^4 \quad (5)\end{aligned}$$

となります。

ここで、(5)から x^3 、 z^4 以上を持つ項を取り除くと、

$$10x^2z^3 \quad (6)$$

になります。

最後に、(3)と(6)から、 x^2yz^3 の項は、

$$6y(10x^2z^3) = 60x^2yz^3$$

となり、その係数は60で、多項定理を使って求めた係数と一致しました。

多項定理を使うと一瞬で計算できますが、この場合、与式を展開して不要な項を消していく方法でも2、3分で計算できます。ただし、次数が大きい場合は大変そうなので、多項定理を覚えておくか、二項定理などから導き出せるようにしておくのが良いかもしれません。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533