中学生でも解ける東大大学院入試問題（１６）

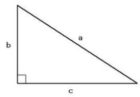
2014-10-16 12:35:38

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

秋らしい過ごしやすい日になりました。そして、今週末は良い天気になるようです。

さて、今回は平成２３年東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。中３生は、三平方の定理を勉強する頃ですが、それに関連するものです。

問題は、
「斜辺の長さがａ、他の２辺の長さがｂ、ｃの直角三角形について、ｂ、ｃのどちらか一方は必ず偶数であることを証明せよ。ただし、ａ、ｂ、ｃは自然数である。」



▲問題図

早速取り掛かりましょう。

まず三平方の定理から、
ａ^2＝ｂ^2＋ｃ^2　　　（１）　（ａ^2 等は、ａの２乗を表します）
が成り立つので、問題は、「（１）が成り立つとき、ｂまたはｃは偶数であることを証明せよ。ただし、ａ、ｂ、ｃは自然数である」と言い換えることができます。

次に、「どちらか一方は必ず偶数である」ことを証明せよとあるので、「どちらも偶数ではない⇔両方とも奇数」と仮定して矛盾を導く証明法（背理法）を使うと簡単なので、
ｂ＝２ｍ＋１
ｃ＝２ｎ＋１　　（ｍ、ｎは整数）　　（２）
と仮定して進めましょう。

（１）の左辺＝（２ｍ＋１）^2＋（２ｎ＋１）^2
＝４ｍ^2＋４ｍ＋１＋４ｎ^2＋４ｎ＋１
＝４（ｍ^2＋ｎ^2＋ｍ＋ｎ）＋２　　　（３）

（３）は、ｂ^2＋ｃ^2　が「４の倍数に２を加えた数」であることを表しています。

一方、ａ＝４ｐ＋ｑ　（ｐは整数、ｑ＝０，１，２，３）とすると、
ａ^2＝（４ｐ＋ｑ）^2
となり、ｑ＝０、１、２、３のそれぞれの場合を調べると、

ｑ＝０の場合、
ａ^2＝４（４ｐ^2）　（←４の倍数）

ｑ＝１の場合、
ａ^2＝４（４ｐ^2＋２ｐ）＋１　（←４の倍数＋１）

ｑ＝２の場合、
ａ^2＝４（４ｐ^2＋４ｐ＋１）　（←４の倍数）

ｑ＝３の場合、
ａ^2＝４（４ｐ^2＋６ｐ＋２）＋１　（←４の倍数＋１）
となります。

つまり、ａ^2　は、「４の倍数」または「４の倍数に１を加えた数」以外になりえないことを示しています。（平方剰余と言います）

以上から、ａ^2　は、「４の倍数」または「４の倍数に１を加えた数」であるのに対して、ｂ^2＋ｃ^2　は、「４の倍数に２を加えた数」になるので、（１）は成り立ちません。

このようなことが起こったのは、（２）の仮定が誤っていたからで、ｂ、ｃの両方が奇数であることはあり得ないことになります。つまり、ｂ、ｃのどちらか一方は必ず偶数になることになります。（これで証明が終わりです）

そこで、この解答を合同式を使って表してみましょう。

まず、任意の自然数ｎについて以下が成り立ちます。
ｎ≡０（ｍｏｄ４）のとき、ｎ^2≡０（ｍｏｄ４）
ｎ≡１（ｍｏｄ４）のとき、ｎ^2≡１（ｍｏｄ４）

ｎ≡２（ｍｏｄ４）のとき、ｎ^2≡４≡０（ｍｏｄ４）
ｎ≡３（ｍｏｄ４）のとき、ｎ^2≡９≡１（ｍｏｄ４）

ここで、ｂ、ｃがどちらも偶数でないと仮定すると、
ｂ^2≡１（ｍｏｄ４）
ｃ^2≡１（ｍｏｄ４）
なので、
ｂ^2＋ｃ^2≡１＋１≡２（ｍｏｄ４）

一方、
ａ^2≡０または１（ｍｏｄ４）
なので、これは、
ａ^2＝ｂ^2＋ｃ^2
であることに矛盾します。したがって、ｂ、ｃのどちらか一方は必ず偶数になることになります。

ついでに合同式の法を３とした場合を調べてみましょう。先ほどと同じように任意のｎについての平方剰余を調べます。

ｎ≡０（ｍｏｄ３）のとき、ｎ^2≡０（ｍｏｄ３）
ｎ≡１（ｍｏｄ３）のとき、ｎ^2≡１（ｍｏｄ３）
ｎ≡２（ｍｏｄ３）のとき、ｎ^2≡４≡１（ｍｏｄ３）

このことから、
ａ^2≡０または１（ｍｏｄ３）
で、ａ^2＝ｂ^2＋ｃ^2　が成り立つならば、
ｂ^2＋ｃ^2≡２（ｍｏｄ３）
は、ありえないことになります。

つまり、
ｂ^2≡１　かつ、ｃ^2≡１（ｍｏｄ３）ではない、すなわち、ｂまたはｃのどちらか一方が３の倍数であることを示しています。

以上のように合同式は便利な道具なので使い方に慣れておくと良いでしょう。

[学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533