中学生でも解ける東大大学院入試問題（１４）

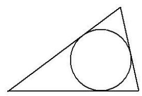
2014-10-11 11:45:45

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今日は晴れたり曇ったりで、明日も同じような天気になるようです。明後日からは台風の影響で雨になり、火曜日に東京に接近し激しい雨になるようです。気を付けましょう。

さて、今日の問題は平成１９年工学系研究科システム量子工学入試問題で図形に関するものです。大変簡単なものなので手短に片付けたいと思います。

問題は、
「円（面積Ａ）に外接する三角形（面積Ｂ）の辺の長さの合計を求めよ」

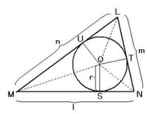


▲問題図

というものです。

受験した方は３０秒掛からずに解答を書き終えたと想像するくらい素直でひねりのない問題です。

説明のため、三角形の頂点などに記号を割り振ったものを図１に示します。



▲図１．説明図

そのまず、図形の問題で円が絡んでいるとき、多くの場合でポイントになるのは円の中心Ｏです。

この問題でも同様で、三角形の各辺と円Ｏの接点を結ぶ補助線を引くと、それらは三角形の各辺と直交します。つまり、三角形の各辺を底辺とした場合、接点とＯを結んだ線分の長さが高さとなる訳です。

そこで、三角形の各頂点とＯを結んで△ＯＬＭ、△ＯＭＮ、△ＯＮＬを作ると、それらの面積Ｓ（三角形）は、
Ｓ（△ＯＬＭ）＝ｎｒ/２
Ｓ（△ＯＭＮ）＝ｌｒ/２
Ｓ（△ＯＮＬ）＝ｍｒ/２
となり、それらの和が元の三角形（△ＬＭＮ）の面積Ｂになります。すなわち、
Ｂ＝ｎｒ/２＋ｌｒ/２＋ｍｒ/２
　＝（ｎ＋ｌ＋ｍ）ｒ/２　　（１）
が成り立ちます。

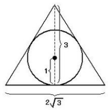
ここで、（ｎ＋ｌ＋ｍ）が求められている答え、つまり、「三角形の辺の長さの合計」なので、（１）から円Ｏの半径ｒを消去すればお仕舞いです。

そこで、円Ｏの面積がＡなので、
Ａ＝πｒ^2　　（ｒ^2はｒの２乗を表します）　（２）
が成り立ち、（２）から
ｒ＝√（Ａ/π）　　（３）
を得ます。

（３）を（１）に代入すると、
ｎ＋ｌ＋ｍ＝２Ｂ√（π/Ａ）　　（４）
「三角形の辺の長さの合計」を求めることができました。

ちょっと正三角形の場合を調べてみましょう。

図２のように、半径１の円に外接する正三角形の辺の長さは２√３、高さは３となります。（三平方の定理と円の中心Ｏが外接する正三角形の重心になることを使いました）



▲図２．半径１の円に外接する正三角形の場合

すると、
$A = \pi$
$B = 2\sqrt{3} \times 3 \times 1/2$
$= 3\sqrt{3}$
三角形の辺の長さの合計 $= 2\sqrt{3} \times 3$
$= 6\sqrt{3}$　　　　（５）
となります。

そこで、これらのＡ、Ｂを（４）の右辺に代入すると、
$2B\sqrt{(\pi/A)} = 2 \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{(\pi/\pi)}$
$= 6\sqrt{3}$
となり、（５）と一致しました。目出度し目出度しです。

では、良い週末をお過ごしください。

[学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533