

中学生でも解ける東大大学院入試問題（136）

2015-03-10 13:11:55

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れたり、曇ったり、雨が降ったり、そして晴れたりと忙しい天気です。気温は13℃と暖かくなり、しばらく同じような天気が続くようです。

さて、今回は平成22年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「箱Aには黒い玉が4つ、箱Bには白い玉が4つ入っている。それぞれの箱から同時かつ無作為に玉を1つ選び、入れ替える。この操作を3回繰り返した後、箱Aに白い玉が2つ入っている確率を求めよ。」

です。

昨日の問題に似ていますが、本問では、玉の入れ替え操作が3回なので場合分けして計算するほうが簡単そうです。

初期状態では、箱Aに黒い玉4個、箱Bに白い玉4個（以下、このような状態を $[\bullet\bullet\bullet\bullet/\circ\circ\circ\circ]$ と表します）入っているので、1回目の操作では、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ になります。

次に2回目の操作では、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\bullet\circ/\circ\circ\circ\circ]$ 、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ 、 $[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ の3つの状態に変わります。

これらの3つの状態に変わる確率を調べると、

$[\bullet\bullet\bullet\circ/\circ\circ\circ\circ]$ になるのは、箱Aから白い玉、箱Bから黒い玉を選んだ場合なので、 $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$ です。

$[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ になるのは、箱Aから黒い玉、箱Bから黒い玉、または、箱Aから白い玉、箱Bから白い玉を選んだ場合なので、 $3/4 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot 3/4 = 3/8$ です。

$[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ になるのは、箱Aから黒い玉、箱Bから白い玉を選んだ場合なので、 $3/4 \cdot 3/4 = 9/16$ です。

続いて3回目の操作です。2回目の操作後の3つの状態について調べていきます。

まず、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\circ\circ\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ で、その確率は1です。

次に、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\bullet\circ/\circ\circ\circ\circ]$ 、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ 、 $[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ の3つの状態に変わります。

これらの3つの状態に変わる確率を調べると、

$[\bullet\bullet\bullet\circ/\circ\circ\circ\circ]$ になるのは、箱Aから白い玉、箱Bから黒い玉を選んだ場合なので、 $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$ です。

$[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ になるのは、箱Aから黒い玉、箱Bから黒い玉、または、箱Aから白い玉、箱Bから白い玉を選んだ場合なので、 $3/4 \cdot 1/4 + 3/4 \cdot 1/4 = 3/8$ です。

$[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ になるのは、箱Aから黒い玉、箱Bから白い玉を選んだ場合なので、 $3/4 \cdot 3/4 = 9/16$ です。

したがって、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\circ\circ\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ という3回の操作によって、箱Aに白い玉が2つ入っている確率は、 $1 \cdot 3/8 \cdot 9/16 = 27/128$ になります。

さらに、残りの $[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ から変化するのは、 $[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ 、 $[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ $[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ の3つの状態です。

これらの3つの状態に変わる確率を調べると、

$[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ になるのは、箱Aから白い玉、箱Bから黒い玉を選んだ場合なので、 $2/4 \cdot 2/4 = 1/4$ です。

$[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ になるのは、箱Aから黒い玉、箱Bから黒い玉、または、箱Aから白い玉、箱Bから白い玉を選んだ場合なので、 $2/4 \cdot 2/4 + 2/4 \cdot 2/4 = 1/2$ です。

$[\bullet\circ\circ\circ/\bullet\bullet\bullet\circ]$ になるのは、箱Aから黒い玉、箱Bから白い玉を選んだ場合なので、 $2/4 \cdot 2/4 = 1/4$ です。

したがって、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\circ\circ\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ] \rightarrow [\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ] \rightarrow [\bullet\circ\circ\circ/\bullet\bullet\bullet\circ]$ という3回の操作によって、箱Aに白い玉が2つ入っている確率は、 $1 \cdot 9/16 \cdot 1/2 = 9/32$ になります。

以上から、3回の操作によって、箱Aに白い玉が2つ入っている確率は、 $27/128 + 9/32 = 63/128$ となり、これが答えになります。下図に3回の操作による箱A、Bの状態の変化をまとめました。（クリックすると大きくなります）

▲図．箱A、Bの状態変化

漸化式での解法も調べてみたのですが、複雑になりすぎて、give upです。

ちなみに、 n 回目の操作後、 $[\bullet\bullet\bullet\bullet/\circ\circ\circ\circ]$ 、 $[\bullet\bullet\bullet\circ/\bullet\circ\circ\circ]$ 、 $[\bullet\bullet\circ\circ/\bullet\bullet\circ\circ]$ 、 $[\bullet\circ\circ\circ/\bullet\bullet\bullet\circ]$ 、 $[\circ\circ\circ\circ/\bullet\bullet\bullet\bullet]$ になる確率をそれぞれ $P(n)$ 、 $Q(n)$ 、 $R(n)$ 、 $S(n)$ 、 $T(n)$ とすると、
 $P(n) + Q(n) + R(n) + S(n) + T(n) = 1$
 $P(0) = 1$ 、 $Q(0) = R(0) = S(0) = T(0) = 0$
 $P(1) = 0$ 、 $Q(1) = 1$ 、 $R(1) = S(1) = T(1) = 0$

$P(n) = 1/16 \cdot Q(n-1)$
 $Q(n) = P(n-1) + 3/8 \cdot Q(n-1) + 1/4 \cdot R(n-1)$
 $R(n) = 9/16 \cdot Q(n-1) + 1/2 \cdot R(n-1) + 9/16 \cdot S(n-1)$
 $S(n) = 1/4 \cdot R(n-1) + 3/8 \cdot S(n-1) + T(n-1)$
 $T(n) = 1/16 \cdot S(n-1)$
 となります。