

中学生でも解ける東大大学院入試問題（２５）

2014-10-29 12:04:50

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝方は冷え込みましたが、今は陽射しが強く20°近くと暖くなりました。天気図を見ると、東北地方の北半分より北側以外は全国的に高気圧に覆われていて、2、3日、良い天気が続くようです。

さて、今回は平成22年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試の数表に関する問題を取り上げます。

問題は、

「正の整数を次のように並べたとき、 $(I, J) = (101, 50)$ に入る数字は何か。」

	1	2	3	4	...
1	1	2	3	4	...
2	4	3	8	11	...
3	9	6	7	10	...
4	16	15	14	13	...
...

▲問題図

このような数表問題の基本は、特別なマス（例えば、1行目とか1列目など）に配置された数字の規則性を見つけることですが、この問題の場合、 I が偶数のときには、下のマスに進むとマスの数字が+1となり、 I が奇数のときには、下のマスに進むと-1となっているので、1行目または1列目に並んだ数の規則性を1つの式で表すことはできません。

とは言っても、 I が偶数か奇数で分ければよいだけの話で、

I が奇数のとき、

$$(n, 1) = n^2, \quad (n^2 \text{ は } n \text{ の } 2 \text{ 乗を表します}) \quad (1)$$

I が偶数のとき、

$$(n, 1) = (n-1)^2 + 1$$

と簡単に表すことができます。

ここでは、 $(I, J) = (101, 50)$ の数字を求めるので、 I が奇数なので、(1)を用いて、

$$\begin{aligned} (101, 1) &= 101^2 \\ &= 10201 \end{aligned}$$

となります。

一方、 $(101, 1)$ から下に49マス進むと、 $(101, 50)$ に到達しますが、このように、 I が奇数のとき、下に1マスに進むとマスの数字は-1となるので、 $(101, 1)$ から $(101, 50)$ に進む場合、マスの数字は、-49となります。

つまり、

$$\begin{aligned} (101, 50) &= 10201 - 49 \\ &= 10152 \end{aligned}$$

と判ります。

同じような方法ですが、図1のように、 $(I, J) = (1, 1)$ から $(100, 100)$ までの数字を並べてしまい、 $(101, 1)$ または $(1, 101)$ から数える方法を示します。

	1	2	3	...	100	101
1	1	2	3	...	100	101
2	4	3	8	...	100	101
3	9	6	7	...	100	101
...
100	10001	10000	10000	...	100	101

▲図1. 別の数え方

$I = 101$ なので、それより1だけ小さい正方形のマスの集まりを考えると、そのなかに数字が $100 \times 100 = 10000$ 個あることになります。

ここで、 10000 は、 $(100, 1)$ または $(1, 100)$ のどちらかになるのですが、 $I = 100$ の場合、 $(100, 1)$ から $(100, 100)$ を経由して $(1, 100)$ に到るまで数字が大きくなるので、 10000 は $(1, 100)$ になります。

すると、 $(1, 101)$ は 10001 で、そこから右に100マス進むと、 $(101, 101)$ に到るので、

$$\begin{aligned} (101, 101) &= 10001 + 100 \\ &= 10101 \end{aligned}$$

です。

さらに、 $(101, 101)$ から上に51マス進むと $(101, 50)$ に到着するので、

$$\begin{aligned} (101, 50) &= 10101 + 51 \\ &= 10152 \end{aligned}$$

と判ります。

さらに別の方法ですが、 $(1, 1)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(3, 3)$ 、・・・に並ぶ数字をピックアップすると、

1, 3, 7, 13, ... (2)

となりますが、これは規則性を持っていて、 (n, n) の数字は、

$$(n, n) = n^2 - n + 1$$

で表すことができます。(2) の階差数列が、2, 4, 6, ... となり、その和が $(n-1)n$ となるので、(2) の数列の n 番目の項は、 $1 + (n-1)n = n^2 - n + 1$ になります)

すると、

$$(101, 101) = 101^2 - 101 + 1 \\ = 10101$$

と2つ目の方法で示したものと一致し、これを使って解くこともできます。

他にもいろいろな解法があると思いますが、興味があれば考えてみてください。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533