

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１６４）

2015-04-08 12:04:50

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

天気予報で寒くなるとは聞いていましたが、雪が降るとは驚きです。気温も 2°C と低いので体調を崩さぬよう気をつけてください。

さて、今回は平成23年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「ある専攻の修士課程には100名の学生が在籍している。そのうち日本人学生は70名、留学生は30名である。また、100名のうち男性は60名、留学生は男性より女性の方が多いことがわかっている。

（１）日本人学生の女性の人数がとりうる範囲を答えよ。

（２）100名のうち60名の学生が講義Aを履修しており、そのうち少なくとも半数は女性であることがわかっている。講義Aの履修生のうち日本人学生の人数がとりうる範囲を答えよ。」

です。

問題にある条件を等式、不等式で表し、それを解けば良さそうです。

それではまず、修士課程に在籍する100名の学生のなかで、日本人学生で男性の人数を a 、女性の人数を b 、留学生で男性の人数を c 、女性の人数を d とします。ここで、 a 、 b 、 c 、 $d \geq 0$ です。

すると、在籍する学生数は100名なので、

$$a + b + c + d = 100 \quad (1)$$

が成り立ちます。

また、日本人学生と留学生はそれぞれ70名および30名なので、

$$a + b = 70 \quad (2)$$

$$c + d = 30 \quad (3)$$

が成り立ちます。

さらに、男性は60名なので、

$$a + c = 60 \quad (4)$$

が成り立ちます。

最後に、留学生は男性より女性が多いので、

$$d > c \quad (5)$$

が成り立ちます。

以上の（１）から（５）を使って、答えを求めることになります。

まず、問（１）では、日本人学生の女性の人数のとりうる範囲が問われているので、 b の範囲を求めることになります。

そこで、（３）を

$$d = 30 - c$$

として、（５）に代入すると、

$$30 - c > c$$

$$c < 15$$

から、

$$0 \leq c < 15$$

$$0 \leq c \leq 14 \quad (6)$$

です。

また、（４）から

$$c = 60 - a$$

で、これを（６）に代入して、

$$0 \leq 60 - a < 15$$

から、

$$45 < a \leq 60$$

$$46 \leq a \leq 60 \quad (7)$$

です。

最後に、（２）から

$$a = 70 - b$$

で、これを（７）に代入して、

$$46 \leq 70 - b \leq 60$$

から、

$$10 \leq b \leq 24$$

となります。

したがって、日本人学生の女性の人数のとりうる範囲は、10名以上24名以下となり、これが答えです。

ここまでで、 a 、 b 、 c のとりうる範囲が判りましたが、 d のとりうる範囲も求めておくと、(3)から、 $c = 30 - d$
とし、これを(6)に代入して、 $0 \leq 30 - d \leq 14$
 $14 \leq d \leq 30$
となります。

ここで、それらをまとめると、
 $45 < a \leq 60$ (7)
 $10 \leq b \leq 24$ (8)
 $0 \leq c \leq 14$ (6)
 $14 \leq d \leq 30$ (9)
です。

次に問(2)に進みましょう。

講義Aを履修している日本人学生で男性の人数を a' 、女性の人数を b' 、留学生で男性の人数を c' 、女性の人数を d' とします。

ここで、
 $a' \leq 60$
 $b' \leq 24$
 $c' \leq 14$
 $d' \leq 30$
 $c' + d' \leq 30$ (10)
です。

講義Aを履修しているのは60名なので、
 $a' + b' + c' + d' = 60$ (11)
が成り立ちます。

また、講義Aを履修している60名のうち、少なくとも半数は女性なので、
 $b' + d' \geq 30$ (12)
が成り立ちます。

ここで初めに、日本人学生が最大になるときを調べます。

$b' \leq 24$ なので、 $b' = 24$ 、 $d' = 6$ のとき、(12)を満足し、かつ、日本人女性が最大になります。そのとき、講義Aを履修している男性の人数は、 $60 - 30 = 30$ 名になりますが、 $a' \leq 60$ なので、この30名がすべて日本人の男性学生であることが可能です。

つまり、講義Aを履修する日本人学生の最大値は、 $24 + 30 = 54$ 名になります。

次に、日本人学生が最小になるとき、つまり、留学生が最大になるときを調べます。

(10)から講義Aを履修する留学生の最大値は30名で、このとき、
 $c' + d' = 30$ (13)
です。

(13)から
 $d' = 30 - c'$
とし、これを(12)に代入すると、
 $b' + 30 - c' \geq 30$
 $b' \geq c'$
になります。

つまり、講義Aを履修する日本人女性が留学生男性より多いとき(12)を満足しますが、 $b' \leq 24$ 、 $c' \leq 14$ なので、それは可能です。

したがって、講義Aを履修する留学生の最大値は30名で、日本人学生の最小値は $60 - 30 = 30$ 名になります。

以上まとめると、講義Aの履修生のうち日本人学生がとりうる範囲は、30名以上54名以下になり、これが答えです。(コメントで指摘して頂いた間違いを訂正させていただきました。2016年7月10日)

問題の条件を立式したり、個々の変数の範囲を明確にすることで、問題攻略の見通しが良くなります。本問のような範

囲を求める問題に出会ったら試してみてください。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533