

中学生でも解ける東大大学院入試問題（1 3 2）

2015-03-06 11:30:28

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

予報通り曇りになりました。これからしばらく曇りや雨で、気温も低めの日が続くようです。とは言っても、あと3週間足らずで桜も開花するので、暖かい日もすぐそこです。

さて、今回は平成15年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

$$\begin{cases} y < -x^2 + 6x - 6 \\ y > x^3 - 7x^2 + 10x \end{cases}$$

で囲まれる部分のうち（ x ， y ）がともに整数となる点の数を求めよ。ただし、 $x > 0$ とする。」です。（ x^2 は x の2乗を表します）

原点を頂点としない2次関数や3次関数を知っていれば、それらのグラフを描き、それらに囲まれる部分にある格子点を数えるという簡単な問題です。しかし、中学ではそれらを勉強しないので別な方法を調べてみましょう。

与えられた2つの不等式

$$y < -x^2 + 6x - 6 \quad (1)$$

$$y > x^3 - 7x^2 + 10x \quad (2)$$

から、

$$x^3 - 7x^2 + 10x < -x^2 + 6x - 6 \quad (3)$$

が得られます。

（3）を整理すると、

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 6 < 0 \quad (4)$$

となります。

ここで、 x は0より大きい整数なので、 $x = 1, 2, 3, \dots$ を（4）の左辺に代入すると、下表のようになります。

x	1	2	3	4	5	6	7
$x^3 - 6x^2 + 4x + 6$	5	-2	-9	-10	1	30	83

▲表：（4）の左辺に $x = 1, 2, 3, \dots$ を代入した結果

この表から、（4）が成り立つのは、 $x = 2, 3, 4$ のときと、その可能性があるのが $x \geq 8$ のとき、ということが判ります。

そこで、 $x \geq 8$ のとき（4）が成り立つか調べてみましょう。

$x \geq 8$ のとき、 $x^3 \geq 8x^2$ なので、（4）の左辺は、

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 4x + 6 &\geq 8x^2 - 6x^2 + 4x + 6 \\ &= 2x^2 + 4x + 6 \geq 0 \end{aligned}$$

となり、（4）は成り立ちません。

つまり、（4）が成り立つ x の値は、 $x = 2, 3, 4$ に限られるということです。

するとあとは簡単で、 $x = 2, 3, 4$ を（1）（2）の右辺に代入し、 y の取り得る値を調べて数えればOKです。

まず、 $x = 2$ のとき、（1）（2）から y の値は、それぞれ $y < 2$ 、および $y > 0$ となり、これらを満たす整数 y は1だけです。したがって、（ x ， y ）は、（2，1）の1個になります。

次に、 $x = 3$ のとき、 $y < 3$ 、 $y > -6$ で、（ x ， y ）は、（3，2）（3，1）（3，0）（3，-1）（3，-2）（3，-3）（3，-4）（3，-5）の8個になります。

最後に、 $x = 4$ のとき、 $y < 2$ 、 $y > -8$ で、（ x ， y ）は、（4，1）（4，0）（4，-1）（4，-2）（4，-3）（4，-4）（4，-5）（4，-6）（4，-7）の9個になります。

以上から、（1）（2）を満たす（ x ， y ）の点の数は、 $1 + 8 + 9 = 18$ 個になり、これが答えです。

興味のある人はグラフを描いて解く方法を調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533