

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１７３）

2015-04-18 11:48:45

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れの良い天気で気温も2-3℃まで上がって暖かくなるようです。明日も晴れて過ごしやすい週末になりました。

さて、今回は平成26年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「 $N \times N$ 個の電球が図1に示すように番号をつけてマス目上に並べられている。いま、番号順に電球の点灯と消灯を切り替える操作を行う。各電球の切り替え操作に伴い、その電球と同じ縦横、斜めのマス上の全ての電球の点灯と消灯も自動的に切り替わる（図2参照）。最初は全ての電球が消灯している状態から始め、全ての電球について切り替え操作を行った。

- (1) $N = 3$ のとき、最終的に点灯している電球の数を求めよ。
 (2) $N = 4$ のとき、最終的に点灯している電球の数を求めよ。

| | | | | |
|-------------------|-----|---|-----|----------------|
| 1 | 2 | 3 | ... | N |
| N+1 | N+2 | | | |
| 2N+1 | | | | |
| ⋮ | | | | |
| N ² -1 | | | | N ² |

図1

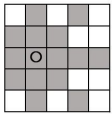


図2 ○のあるマス目の電球切り替え操作。
 グレーのマス目上の電球も同時に切り替わる。
 です。

マス目の大きさが、 $N \times N$ だと少し厄介そうですが（後で調べてみます）、問われているのは、 $N = 3$ と 4 の場合ですから、数え上げてしまうのが簡単そうです。

まず(1)の $N = 3$ のときは、 3×3 のマス目を描きます。そして、端のマスから順番にチェックを入れて、それに連動して点灯・消灯が切り替わるマスにもチェックしていきます。このとき、正の字で数えるのが良いでしょう。

全てのマス目（9個）について終わったら、各マス目の点灯・消灯の切り替わった回数を数え、それが奇数だったら点灯、偶数だったら消灯になります。

図3にその結果を示します。これから判るように、全てのマス目で奇数回切り替わっているので、点灯している電球数は9個になり、これが答えです。

| | | |
|---|---|---|
| 正 | 正 | 正 |
| 正 | 正 | 正 |
| 正 | 正 | 正 |

▲図3. $N = 3$ のとき、各マス目の切り替わり回数

次に(2)ですが、これも(1)と同じ方法で片付けましょう。 4×4 のマス目を描いて(1)と同じように調べた結果を図4に示します。

| | | | |
|----|----|----|----|
| 10 | 10 | 10 | 10 |
| 10 | 12 | 12 | 10 |
| 10 | 12 | 12 | 10 |
| 10 | 10 | 10 | 10 |

▲図4. $N = 4$ のとき、各マス目の切り替わり回数

これから判るように、全てのマス目が偶数回切り替わっているので、点灯している電球数は0個になり、これが答えです。

それでは、 $N \times N$ マスのときにはどのようなになるか調べてみましょう。

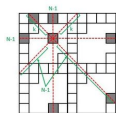
図2にあるように、○のあるマス目の電球を点灯・消灯すると、それに連動してグレーのマス目の電球が切り替わります。これは、グレーのマス目にある電球を点灯・消灯すれば、○のあるマス目の電球が切り替わるということです。つまり、○のあるマス目の電球を点灯・消灯したときに、○のあるマス目を含めてグレーのマス目の個数が奇数であれば、最終的に（全てのマス目の電球の切り替えが終わった）、グレーのマス目の電球は点灯することになります。（初期状態が消灯なので）

したがって、あるマス目の電球を点灯・消灯したとき、連動して切り替わる電球のマス目の個数を調べれば、最終的に点灯しているか消灯しているか判ることになります。

そこで、図5のような最外周から k 個内側にあるマス目について調べてみます。

そのマス目と連動しているマス目は、縦方向に $N-1$ 個、横方法に $N-1$ 個、斜め方向に $N-1+2k$ 個で、それに自分自身を加えて、合計 $3N+2k-2=3N+2(k-1)$ 個になります。つまり、 N が奇数のとき、 $3N+2(k-1)$ は奇数になるので、最終的に点灯することになります。（初期状態は全ての電球が消灯なので）

ところが、 $3N+2(k-1)$ が偶数か奇数かは、 k にかかわらず N によって決まるので、 N が奇数のとき全ての電球が点灯し、 N が偶数のとき全ての電球が消灯することになります。これは（1）の $N=3$ 、つまり、 N が奇数のとき、全ての電球が点灯と、（2）の $N=4$ 、つまり、 N が偶数のとき、全ての電球が消灯と一致します。



▲図5．最外周から内側に k 個目にあるマス目と連動しているマス目の個数

実際の試験のときは、前半のように数え上げる方法が見通しが良く安心感を持って対応できそうです。試験は制限時間があり、それが重要なポイントなので臨機応変に対応しましょう。