

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１１２）

2015-02-08 11:30:12

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝は曇りでしたが昼前から雨が降り始め、今日も寒い日になりました。受験生の皆さんは体調に気を付けて勉強してください。

さて、今回は平成１５年度東大大学院工学系研究科環境海洋工学の入試問題です。

問題は、

「次の連立一次方程式を解き a 、 b 、 c 、 d を求めよ。

$$a - b + 2c + d = 9$$

$$2a + b - c + 3d = 6$$

$$a + 3b + 2c - 2d = 2$$

$$-3a + c + 4d = -3$$

です。

単なる４元１次連立方程式の問題で、何かトラップがあるのかなあと思つてしまいましたが、取り敢えず、消去法を使って普通に解いてみましょう。

初めに４つの式に番号を付けましょう。

$$a - b + 2c + d = 9 \quad (1)$$

$$2a + b - c + 3d = 6 \quad (2)$$

$$a + 3b + 2c - 2d = 2 \quad (3)$$

$$-3a + c + 4d = -3 \quad (4)$$

片っ端から文字を消去していきます。

(1) + (2) から、

$$3a + c + 4d = 15 \quad (5)$$

(4) - (5) から、

$$-6a = -18$$

$$a = 3 \quad (6)$$

(6) を (1) (3) (4) に代入し整理して、

$$-b + 2c + d = 6 \quad (7)$$

$$3b + 2c - 2d = -1 \quad (8)$$

$$c + 4d = 6 \quad (9)$$

(7) × 3 + (8) から、

$$8c + d = 17 \quad (10)$$

(9) - (10) × 4 から、

$$-31c = -62$$

$$c = 2 \quad (11)$$

(11) を (9) に代入し整理して、

$$d = 1 \quad (12)$$

(11) (12) を (7) に代入し整理して、

$$b = -1$$

したがって、 $a = 3$ 、 $b = -1$ 、 $c = 2$ 、 $d = 1$ が答えになります。

これでは面白くないので、行列を使った場合を調べてみましょう。この連立方程式を行列を使って表すと図１のようになります。（行列は高校で勉強していたのですが新教育課程からなくなりました）

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

▲図１．連立方程式を行列を使って表しました

ここで左側の４次行列に逆行列が存在すれば、左からそれを掛けて、簡単に a 、 b 、 c 、 d を求めることができます。

ところが４次行列の逆行列を計算するのは大変で、今回は「掃き出し法」を使って計算したのですが、やつと３回目に図２に示す正しい逆行列を求めることができました。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{13}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{13}{18} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

▲図2．逆行列を求めることができました

図2 から、

$$a = 1/6 \cdot (9 + 6 + 0 \cdot 2 - (-3)) = 3$$

$$b = 1/6 \cdot 2 \cdot (-13 \cdot 9 + 7 \cdot 6 + 14 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)) = -1$$

$$c = 1/18 \cdot 6 \cdot (53 \cdot 9 - 19 \cdot 6 + 24 \cdot 2 + 13 \cdot (-3)) = 2$$

$$d = 1/9 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 9 + 14 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 10 \cdot (-3)) = 1$$

となり、上記の答えと一致しました。

いずれにしても普通に消去法、代入法を使って解くのが簡単で、出題者の意図が判り難い問題でした。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533