中学生でも解ける東大大学院入試問題（２００）

2015-08-11 09:11:16

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今の東久留米の気温は２６℃なのですが、湿度が９０％超と蒸し暑くなりました。受験生の皆さんは、暑さや勉強で疲れが溜まってきたかもしれませんが、もうひと踏ん張りして頑張りましょう。

さて、今回は平成２７年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「１５３は各桁の３乗の和も１５３となる。すなわち、１^3＋５^3＋３^3である。３７０も同様の性質をもつ。これら２つを除き、同様の性質をもち、各桁の数字がすべて異なる５００以下の３桁の自然数を２つ求めよ。」
です。

１から５００までの５００個の自然数について実際に計算してみれば答えは見つかりますが、それではあまりにも芸がないので、何か工夫して候補を絞り込むのが定跡でしょう。

まず、３桁の自然数Ｎを
Ｎ＝１００ａ＋１０ｂ＋ｃ　　　　　　　　　　（１）
とします。

ここで、Ｎ＝５００は、５^3＋０^3＋０^3＝１２５≠５００なので、
１≦ａ≦４　　ａは自然数　　　　　　　　（２）
です。

また、
Ｎ＝１００ａ＋１０ｂ＋ｃ＝ａ^3＋ｂ^3＋ｃ^3＜５００から
０≦ｂ、ｃ≦７　　ｂ、ｃは自然数　　　　（３）　←（７^3＝３４３、８^3＝５１２なので）
です。

これで候補の数は、４×８×８＝２５６個になりました。

さらに絞り込むため、
１００ａ＋１０ｂ＋ｃ＝ａ^3＋ｂ^3＋ｃ^3　　（４）
を利用しましょう。

（４）を
１００ａ－ａ^3＝ｂ^3－１０ｂ＋ｃ^3－ｃ　　（５）
と変形します。

そして、表１に示すように、１００ａ－ａ^3、ｂ^3－１０ｂ、ｃ^3－ｃ　の符号を含めた一の位の数を、それぞれＡ、Ｂ、Ｃとします。

a	100a-a^3	A	b	b^3-10b	B	c	c^3-c	C
			0	0	0	0	0	0
1	99	9	1	-9	-9	1	0	0
2	192	2	2	-12	-2	2	6	6
3	273	3	3	-3	-3	3	24	4
4	336	6	4	24	4	4	60	0
			5	75	5	5	120	0
			6	156	6	6	210	0
			7	273	3	7	336	6

▲表１．１００ａ－ａ^3、ｂ^3－１０ｂ、ｃ^3－ｃの一の位の数をＡ、Ｂ、Ｃとしました

ここで（５）の左辺の一の位の数Ａと右辺の一の位の数（Ｂ＋Ｃから求める）が等しくなる組合せを調べていきます。

まず、Ａ＝９のときを調べます。

Ｃ＝０とすると、Ｂは９、－１にならないので、この組合せに（５）を満足するものはありません。

Ｃ＝６とすると、Ｂ＝３で（５）を満足するので、（ａ，ｂ，ｃ）＝（１，７，２）（１，７，７）が候補になります。

Ｃ＝４とすると、Ｂ＝５で（５）を満足するので、（１，５，３）が候補になります。←（問題にある数で該当します）

続いて、Ａ＝２のときを調べます。

Ｃ＝０とすると、Ｂは２、－８にならないので、この組合せに（５）を満足するものはありません。

Ｃ＝６とすると、Ｂ＝６で（５）を満足するので、（ａ，ｂ，ｃ）＝（２，６，２）（２，６，７）が候補になります。

Ｃ＝４とすると、Ｂ＝－２で（５）を満足するので、（２，２，３）が候補になります。

さらに、Ａ＝３のときを調べます。

Ｃ＝０とすると、Ｂ＝３で（５）を満足するので、、（ａ，ｂ，ｃ）＝（３，７，０）（３，７，１）（３，７，４）（３，７，５）（３，７，６）が候補になります。

Ｃ＝６とすると、Ｂ＝-３で（５）を満足するので、（ａ，ｂ，ｃ）＝（３，３，２）（３，３，７）が候補になります。

Ｃ＝４とすると、Ｂは９、-１にならないので、この組合せに（５）を満足するものはありません。

最後にＡ＝６のときを調べます。

Ｃ＝０とすると、Ｂ＝６で（５）を満足するので、、（ａ，ｂ，ｃ）＝（４，６，４）が候補になります。

Ｃ＝６とすると、Ｂ＝０で（５）を満足するので、（ａ，ｂ，ｃ）＝（４，０，２）（４，０，７）が候補になります。

Ｃ＝４とすると、Ｂは２、-８にならないので、この組合せに（５）を満足するものはありません。

以上をまとめると、候補の数は、
１７２、１７７、１５３、２６２、２６７、２２３、３７０、３７１、３７４、３７５、３７６、３３２、３３７、４６４、４０２、４０７の１６個になりました。

さらに、これらから、問題に例示してある１５３と３７０、および各桁の数字がすべて異なっていない数を除くと、
１７２、２６７、３７１、３７４、３７５、３７６、４０２、４０７の８個のに絞り込むことができます。

これらの８個について各桁の３乗和を計算してもＯＫですが、ここではもう少し候補を絞るために、数のなかに７を含む場合を調べます。

もし、数のなかに７を含めば、７^3＝３４３なのですから、その数には６を含むことはありません。（７^3＋６^3＝３４３＋２１６＝５５９＞５００だから）かつ、その数は３４３以上になります。

すると候補は、
３７１、３７４、３７５、４０２、４０７の５個になりました。

ここで絞込みを諦めて、上の５個の数について、各桁の３乗和を計算すると、
３７１：３^3＋７^3＋１^3＝３７１　→○
３７４：３^3＋７^3＋４^3＝４３４　→不適
３７５：３^3＋７^3＋５^3＝４９５　→不適
４０２：４^3＋０^3＋２^3＝　７２　→不適
４０７：４^3＋０^3＋７^3＝４０７　→○
となり、３７１と４０７が答えになります。

問題の数のように、ｎ桁の数で各桁のｎ乗和が元の数と等しくなる数をナルシシスト数と言います。ネットで調べると、ナルシシスト数は、０を含めなければ８７個存在し、４桁では、１６３４、８２０８、９４７４がそれに当たるそうです。最大のものは３９桁だそうで、これは紙と鉛筆で計算するのは無理そうですが、４桁ならどうにかなるかも知れないので、興味のある人は挑戦してみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533