中学生でも解ける東大大学院入試問題（５７）

2014-12-09 11:21:46

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

中３の受験生は、学校での最終面談で志望校を決める時期です。現状の実力より高いレベルの志望校を選んだ人はもとより、実力相応校を選んだ人も頑張って勉強してください。これからの３ヶ月で身に付ける学力は、高校やその後の上級学校での基礎になるので、とても大切です。寒い日が続きますが体調に気を付けて、あとひと踏ん張りです。

さて、今回は平成１７年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「Ｎ個の区画に無作為にｋ個の種をまくとき、２個以上まかれる区画がない確率を求めよ。ただし、Ｎ＞ｋとする。」
です。

確率を求める問題では、すべての事象の場合の数と対象の事象の場合の数を求めて計算します。この問題では、２個以上まかれる区画がない確率を求めるので、Ｎ個の区画にｋ個の種をまくときの場合の数とＮ個の区画のなかからｋ個の区画を選び、そこに種を１つずつまくときの場合の数を求めて、後者を前者で割れば答えの確率を求めることができます。

初めに、Ｎ個の区画にｋ個の種をまくときの場合の数を求めましょう。

まず、（ｋ＋Ｎ－１）個の○を並べたものを考え、それらの○から（Ｎ－１）個選んで、そこに仕切りを入れます。そして、仕切りの入っていない○にｋ個の種を入れて、２つの仕切りにはさまれた種をＮ個の区画に割り振り、Ｎ個の区画にｋ個の種をまくことにします。

つまり、（ｋ＋Ｎ－１）個から（Ｎ－１）個を選ぶ場合の数が、Ｎ個の区画にｋ個の種をまくときの場合の数になるということです。

そこで、（ｋ＋Ｎ－１）個のボールから（Ｎ－１）個のボールを選ぶ場合を考えます。まず、１個目のボールの選び方は、（ｋ＋Ｎ－１）通りで、２個目のボールの選び方は、（ｋ＋Ｎ－２）通りになります。

同様に３個目、４個目、・・・、（Ｎ－２）個目、（Ｎ－１）個目は、それぞれ、（ｋ＋Ｎ－３）通り、（ｋ＋Ｎ－４）通り、・・・、（ｋ＋２）通り、（ｋ＋１）通りになります。

したがってボールの選び方は、
（ｋ＋Ｎ－１）（ｋ＋Ｎ－２）・・・（ｋ＋２）（ｋ＋１）
＝（ｋ＋Ｎ－１）！/ｋ！　　　　（１）
となります。。（ｋ！はｋの階乗を表し、ｋ（ｋ－１）・・・２・１です）

ところが、この場合、例えば、１回目に選んだボールと２回目に選んだボールを入れ換えたものを別のものとしているので、それらの重複を除く必要があります。

そこで（Ｎ－１）個の選ばれたボールにそれぞれ名前を付けて並べることを考えます。すると、１個目のボール選び方は（Ｎ－１）通り、２個目のボール選び方は（Ｎ－２）通り、・・・、（Ｎ－２）番目のボールの選び方は２通り、（Ｎ－１）番目のボール選び方は１通りとなるので、その場合の数は、
（Ｎ－１）（Ｎ－２）・・・２・１
＝（Ｎ－１）！　　　　　（２）
となります。

したがって、（ｋ＋Ｎ－１）個のボールから（Ｎ－１）個のボールを選ぶ場合の数は、（１）を（２）で割って、
（ｋ＋Ｎ－１）！/（ｋ！（Ｎ－１）！）
＝（Ｎ＋ｋ－１）！/（ｋ！（Ｎ－１）！）　　（３）
になります。

つまり、（３）がＮ個の区画にｋ個の種をまくときの場合の数になります。

次に、Ｎ個の区画のなかからｋ個の区画を選び、そこに種を１つずつまくときの場合の数を求めますが、これはＮ個の区画からｋ個の区画を選ぶ場合の数と同じです。

まず、１つ目の区画の選び方は、Ｎ通りになります。

２つ目の区画の選び方は、１つ目で選ばれた区画を除くので、（Ｎ－１）通りになります。

３つ目、４つ目、・・・、ｋ番目の区画の選び方は、それぞれ（Ｎ－２）、（Ｎ－３）、・・・、（Ｎ－ｋ）通りなので、それらを合わせると、
Ｎ（Ｎ－１）・・・（Ｎ－ｋ）
＝Ｎ！/（Ｎ－ｋ）！　通り　　　（４）
になります

ところが、ここでも、例えば、１つ目の区画と２つ目の区画を入れ換えたものを別のものと勘定しているので、その重複を除く必要があります。

そこで先ほどと同じように、ｋ個の選ばれた区画にそれぞれ名前を付けて並べることを考えます。すると、１番目の選び方はｋ通り、２番目の選び方は（ｋ－１）通り、・・・、（ｋ－１）番目の選び方は２通り、ｋ番目の選び方は１通りとなるので、その場合の数は、
ｋ（ｋ－１）・・・２・１
＝ｋ！　　　　　　（５）
となります。

したがって、Ｎ個の区画からｋ個の区画を選ぶ場合の数は、（４）を（５）で割って、
Ｎ！／（（Ｎ－ｋ）！ｋ！）　　　（６）
となります。

以上で、Ｎ個の区画にｋ個の種をまくときの場合の数（３）とＮ個の区画のなかからｋ個の区画を選び、そこに種を１つずつまくときの場合の数（６）を求めることができました。

つまり、求める確率は、（６）を（３）で割って、
Ｎ！（Ｎ－１）！／（（Ｎ－ｋ）！（Ｎ＋ｋ－１）！）
となります。

実は、前半のＮ個の区画にｋ個の種をまく場合の数は、Ｎ個の区画から重複を許してｋ個の区画を選ぶ場合の数で、重複組合せの記号Ｈを使って、
ＮＨｋ＝N+k-1Ｃｋ
＝（Ｎ＋ｋ－１）！／（ｋ！（Ｎ－１）！）　　（←（３）です）
となります。

また、後半のＮ個の区画からｋ個の区画を選ぶ場合の数は、組合せの記号Ｃを使って、
ＮＣｋ＝Ｎ！／（ｋ！（Ｎ－ｋ）！　　（←（６）です）
となります。

高校で「順列・組合せ」を勉強すると簡単に解けるようになりますから、中３の受験生の皆さんは高校の数学を楽しみにしていてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533