

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１４６）

2015-03-21 10:13:55

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日と比べて気温が下がりましたが寒いということはありません。明日は暖かさが戻ってくるようです。

さて、今回は平成２６年度東大大学院新領域創成科学研究科情報生命科学の入試問題です。

問題は、

「表が出る確率が p ($0 < p < 1$)、裏が出る確率が $(1 - p)$ のコインを独立に N 回 ($N > 1$) 投げ、得られる表と裏の列を考える。以下の間に、式の導出も含めて答えよ。

- (１) $N = 5$ とする。列「表表裏表裏」が得られる確率を求めよ。
- (２) 最初の l 個 ($0 \leq l \leq N$) がすべて表になる確率を求めよ。
- (３) 初めて裏がでるまでの、表の数を m とする。ただし、裏がひとつもない列では $m = N$ とする。 ($0 \leq m \leq N$)。 m の期待値を求めよ。
- (４) 表を n 個 ($0 \leq n \leq N$)、裏を $(N - n)$ 個持つ列が得られる確率 $P(n | N, p)$ を求めよ。
- (５) (４) において、 n の期待値を求めよ。
- (６) n と $\lambda = Np$ を固定し、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとると、(４) の確率分布 $P(n | N, p)$ はポアソン分布 $P(n | \lambda) = (1/n!) \lambda^n \cdot e^{-\lambda}$ に近づくことを示せ。必要であれば、等式 $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + x/N)^N = e^x$ を使ってよい。 ($N \rightarrow \infty$ のとき $(1 + x/N)^N \rightarrow e^x$ を表します) 」

(３) 以降は期待値とか極限が出て中学数学を逸脱していますが、取りあえず解いていきます。

まず(１)ですが、表と裏の出る確率がそれぞれ p と $(1 - p)$ なので、「表表裏表裏」となる確率 $P(1)$ は、

$$P(1) = p \cdot p \cdot (1 - p) \cdot p \cdot (1 - p) \\ = p^3 \cdot (1 - p)^2$$

になり、これが答えです。

次に(２)の最初の l 個がすべて表になる確率 $P(2)$ は、

$$P(2) = p \cdot p \cdot \dots \cdot p \quad [p \text{ が } l \text{ 個}] \\ = p^l$$

になり、これが答えです。

(３) の期待値というのは、例えば、くじを引くときの賞金などのように、その値をとる確率が与えられている変数に各々の確率を掛けて和をとったものです。

つまり、求める期待値 $E(3)$ は、

$$E(3) = 1 \cdot p + 2 \cdot p^2 + 3 \cdot p^3 + \dots + m \cdot p^m \quad (1)$$

になります。

(１) $\times p$ を作ると、

$$pE(3) = p^2 + 2 \cdot p^3 + 3 \cdot p^4 + \dots + (m - 1) p^m + m \cdot p^{(m+1)} \quad (2)$$

で、(１) - (２) から

$$(1 - p)E(3) = p + p^2 + p^3 + \dots + p^m - m p^{(m+1)} \\ = p(1 - p^m) / (1 - p) - m p^{(m+1)} \quad \leftarrow (\text{等比数列の和の公式を使いました}) \\ = p(1 - p^m - (1 - p)(m p^m)) / (1 - p) \\ = p(1 - (1 + m)p^m + m p^{(m+1)}) / (1 - p)$$

なので、

$$E(3) = p(1 - (1 + m)p^m + m p^{(m+1)}) / (1 - p)^2$$

となり、これが答えです。

(４) は表・裏が N 個並んだ列から n 個の表を選ぶ場合の数が、 $N! / n! (N - n)!$ になり、表が n 個出る確率は p^n 、裏が $(N - n)$ 個出る確率は $(1 - p)^{(N - n)}$ なので、求める確率 $P(n | N, p)$ は、

$$P(n | N, p) = N! / n! (N - n)! \cdot p^n \cdot (1 - p)^{(N - n)} \\ \text{になり、これが答えです。 (普通、 } NCn \cdot p^n \cdot (1 - p)^{(N - n)} \text{ と表します)}$$

(５) については総和の記号 Σ を使うと、求める期待値 $E(5)$ は、

$$E(5) = \Sigma k \cdot NCk \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(N - k)} \quad (k = 1 \text{ から } n) \\ = p \Sigma (N - 1) C(k - 1) \cdot p^{k - 1} \cdot (1 - p)^{(N - k)} \quad \leftarrow (r \cdot nCr = n \cdot (n - 1)C(r - 1) \text{ を使いました}) \\ = p \Sigma (N - 1) C(k - 1) \cdot p^{(k - 1)} \cdot (1 - p)^{(N - k)} \\ = n p \Sigma (N - 1) Ck \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(N - 1 - k)} \quad (k = 0 \text{ から } n - 1) \\ = n p (p + (1 - p))^{(N - 1)} \quad \leftarrow (\text{二項定理です}) \\ = n p$$

となり、これが答えです。

最後の(６)は、 $P(n | N, p)$ を次のように変形します。

$$P(n | N, p) = N! / (n! \cdot (N - n)! \cdot p^n \cdot (1 - p)^{(N - n)})$$

$$= N(N-1)(N-2) \cdots (N-n+1) p^n \cdot (1-p)^{(N-n)} \cdot 1/n! \quad (3)$$

ここで、(3)の前の部分を

$$N(N-1)(N-2) \cdots (N-n+1) p^n = N/N \cdot (N-1)/N \cdots (N-n+1)/N \cdot (Np)^n \\ = (1-1/N)(1-2/N) \cdots (1-(n-1)/N) \cdot (Np)^n$$

と変形します。

これに、与えられた式 $\lambda = Np$ を代入し、 $N \rightarrow \infty$ とすると、
 $N(N-1)(N-2) \cdots (N-n+1) p^n \rightarrow \lambda^n$
 となり、目標の式の一部が出てきました。

次に $(1-p)^{(N-n)}$ は、 $\lambda = Np$ から

$$(1-p)^{(N-n)} = (1-\lambda/N)^{(N-n)} \\ = (1+(-\lambda)/N)^N / (1+(-\lambda)/N)^n$$

と変形し、与えられた等式 $\lim_{N \rightarrow \infty} (1+x/N)^N = e^x$ ($N \rightarrow \infty$)を使って、
 $N \rightarrow \infty$ のとき、

$$(1-p)^{(N-n)} = (1+(-\lambda)/N)^N / (1+(-\lambda)/N)^n \rightarrow e^{(-\lambda)} / 1 = e^{(-\lambda)}$$

です。

以上から、 $N \rightarrow \infty$ のとき、

$$P(n | N, p) \rightarrow \lambda^n \cdot e^{(-\lambda)} \cdot 1/n! = 1/n! \cdot \lambda^n \cdot e^{(-\lambda)}$$

となることが判りました。

この問題は、よくある二項分布とポアソン分布の関係についてのもので、式を変形するパターンを知っていればそれほど難しくはありませんが、中学数学を大いに逸脱してしまいました。申し訳ありません。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
 TEL 042-472-5533