

中学生でも解ける東大大学院入試問題（139）

2015-03-14 11:33:44

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

暖かく過ごしやすい天気になりました。明日は曇るようですが、暖かい日が続くようです。

さて、今回は平成26年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「魚の感染症検査を行う。検査結果と感染の有無の組み合わせは以下のように、それぞれ右側のカッコ内に示した確率で生じるものとする。

- a. 感染している魚が陽性となる (p)
- b. 感染している魚が陰性となる (1 - p)
- c. 感染していない魚が陽性となる (q)
- d. 感染していない魚が陰性となる (1 - q)

ある魚が確率 r で感染していることがわかっている。この魚を検査するとき、以下の確率を求めよ。

- (1) 検査結果が陽性となる確率
 - (2) 検査結果が陽性のとき、この魚が感染している確率
 - (3) 検査結果が陰性のとき、この魚が感染している確率
- です。

今回も「ベイズの定理」の問題で、これを使えば簡単に計算できます。

早速、(1) から初めましょう。

まず、以下のように事象を定めます。

- ・魚が感染しているという事象を A、
- ・魚が感染していないという事象を B
- ・検査結果が陽性という事象を E
- ・検査結果が陰性という事象を F

すると、それらの確率は、

$$\begin{aligned}P(A) &= r \\P(B) &= 1 - r \\P(E|A) &= p \\P(E|B) &= q \\P(F|A) &= 1 - p \\P(F|B) &= 1 - q\end{aligned}$$

となります。

したがって、検査結果が陽性になる確率 $P(1)$ は、
$$P(1) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) \\ = rp + (1 - r)q$$

です。

次に(2)です。検査結果が陽性で魚が感染している確率を $P(2)$ とすると、
$$P(2) = P(A|E) = P(A)P(E|A) / (P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B)) \\ = rp / (rp + (1 - r)q)$$

となります。

最後に(3)ですが、検査結果が陰性で魚が感染している確率を $P(3)$ とすると、
$$P(3) = P(A|F) = P(A)P(F|A) / (P(A)P(F|A) + P(B)P(F|B)) \\ = r(1 - p) / (r(1 - p) + (1 - r)(1 - q))$$

となります。

この解答が判り難い人には、魚の数を N 匹として計算すると良いかもしれません。

すると、

- ・感染している魚の数 Nr (匹)
 - ・感染していない魚の数 $N(1 - r)$ (匹)
 - ・感染していて検査結果が陽性になる魚の数 Nrp (匹)
 - ・感染していて検査結果が陰性になる魚の数 $Nr(1 - p)$ (匹)
 - ・感染してなくて検査結果が陽性になる魚の数 $N(1 - r)q$ (匹)
 - ・感染してなくて検査結果が陰性になる魚の数 $N(1 - r)(1 - q)$ (匹)
- となります。

これらを使うと、(1) の検査結果が陽性となる確率 $P(1)$ は、

$$\begin{aligned}
 P(1) &= ([\text{感染していて検査結果が陽性になる魚の数}] + [\text{感染してなくて検査結果が陽性になる魚の数}]) / [\text{魚の数}] \\
 &= (N r p + N (1 - r) q) / N \\
 &= r p + (1 - r) q
 \end{aligned}$$

です。

(2)の検査結果が陽性のとき、魚が感染している確率 $P(2)$ は、

$$\begin{aligned}
 P(2) &= [\text{感染していて検査結果が陽性になる魚の数}] / ([\text{感染していて検査結果が陽性になる魚の数}] + [\text{感染してなくて検査結果が陽性になる魚の数}]) \\
 &= N r p / (N r p + N (1 - r) q) \\
 &= r p / (r p + (1 - r) q)
 \end{aligned}$$

です。

(3)の検査結果が陰性のとき、魚が感染している確率 $P(3)$ は、

$$\begin{aligned}
 P(3) &= [\text{感染していて検査結果が陰性になる魚の数}] / ([\text{感染していて検査結果が陰性になる魚の数}] + [\text{感染してなくて検査結果が陰性になる魚の数}]) \\
 &= N r (1 - p) / (N r (1 - p) + N (1 - r) (1 - q)) \\
 &= r (1 - p) / (r (1 - p) + (1 - r) (1 - q))
 \end{aligned}$$

です。

確率のまま計算するのが判り難いとき、確率を具体的な数量に直して計算すると判りやすいので頭に入れておくの良いでしょう。