

中学生でも解ける東大大学院入試問題（142）

2015-03-17 11:45:27

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れて気温が16℃ととても暖かい日になりました。明日から天気は崩れるようですが、暖かい日が続くようです。

さて、今回は平成25年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「並んで置かれた2つの袋があり、一方には白玉が2個と黒玉が8個、もう一方には白玉が6個と黒玉が4個入っている。最初の人が左側の袋から玉を1つ取り出したら白だった。2番目の人が右側の袋から玉を1つ取り出したら黒だった。一人が取り出す玉の数は1つだけで、一度取り出した玉は袋に戻さないものとする。このとき、次の問いに答えよ。

（1）3番目の人が左側の袋から玉を1つ取り出したとき、それが白玉である確率を求めよ。

（2）3番目の人が右側の袋から玉を1つ取り出したとき、それが白玉である確率を求めよ。」
です。

今回も確率の問題で、「ベイズの定理」を使います。

まず、白玉2個と黒玉8個が入っている袋をA、白玉6個と黒玉4個が入っている袋をBとします。

次に、Aが左側、Bが右側に置かれているという事象をX、Aが右側、Bが左側に置かれているという事象をY、最初の人が左側の袋から白玉と取り出し、2番目の人が右側から黒玉を取り出すという事象をEとします。

すると、それらの事象が起こる確率は、

$$P(X) = 1/2$$

$$P(Y) = 1/2$$

$$P(E|X) = 2/10 \times 4/10 = 2/25$$

$$P(E|Y) = 6/10 \times 8/10 = 12/25$$

になります。

したがって、最初の人がAから白玉を取り出し、2番目の人がBから黒玉を取り出す確率は、「ベイズの定理」より、

$$\begin{aligned} P(X|E) &= P(X) P(E|X) / (P(X) P(E|X) + P(Y) P(E|Y)) \\ &= (1/2 \cdot 2/25) / (1/2 \cdot 2/25 + 1/2 \cdot 12/25) \\ &= 1/7 \end{aligned}$$

です。

つまり、事象Eが起こったという条件のもとで、Aが左側（Bが右側）に置かれていた確率は1/7、Aが右側（Bが左側）に置かれていた確率は6/7となります。

そこで（1）の3番目の人が左側の袋から白玉を取り出す確率P（1）は、Aが左側（Bが右側）にあるとき、Aには白玉1個、黒玉8個が残っていて、Aが右側（Bが左側）にあるとき、Bには白玉5個、黒玉4個残っているの、

$$\begin{aligned} P(1) &= 1/7 \cdot 1/9 + 6/7 \cdot 5/9 \\ &= 31/63 \end{aligned}$$

となり、これが答えです。

続いて（2）の3番目の人が右側の袋から白玉を取り出す確率P（2）は、Aが左側（Bが右側）にあるとき、Bには白玉6個、黒玉3個残っていて、Aが右側（Bが左側）にあるとき、Aには白玉2個、黒玉7個残っているの、

$$\begin{aligned} P(2) &= 1/7 \cdot 6/9 + 6/7 \cdot 2/9 \\ &= 2/7 \end{aligned}$$

となり、これが答えです。

この問題では、最初の人が左側の袋から白玉、2番目の人が右側から黒玉を取り出すので、左側にB（白玉6個、黒玉4個）、右側にA（白玉2個、黒玉8個）が置かれている可能性が高いわけです。

そこで左側がB、右側がAとして、最初の人と2番目の人が、それぞれ左側（B）から白玉、右側（A）から黒玉を取り出したとすると、左側（B）の中には白玉5個、黒玉4個、右側（A）の中には白玉2個、黒玉7個が残っています。

この状態で、3番目の人が左（B）から白玉を取り出す確率は5/9、右側（A）から白玉を取り出す確率は2/9になります。

これらの確率と実際の確率を比べてみると、

$$5/9 (0.55) - 31/63 (0.49)$$

$$2/9 (0.22) - 2/7 (0.29)$$

となり、左側にB、右側にAと仮定した場合より、実際の確率は、左側から白玉を取り出す確率が小さくなり、右側から白玉を取り出す確率が大きくなります。

これは、左側にA、右側にBが置かれた可能性もあって、そのとき3番目の人が左側から白玉を取り出す確率が1/9

で、これは、左側にB、右側にAが置かれたときの確率（ $5/9$ ）より小さく、また、右側から白玉を取り出す確率が $6/9$ で、これは、左側にB、右側にAが置かれたときの確率（ $2/9$ ）より大きくなるのが原因です。

そして、左側にA、右側にBが置かれた可能性（確率）が $1/7$ で上記の計算式になるわけです。

このように調べてみるのも確率のリアリティを感じる方法のひとつかもしれません。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533