中学生でも解ける東大大学院入試問題（１０５）

2015-02-01 12:01:25

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

冷たい風が強く寒い日になりましたが、今日から２月で寒い時期もあと一ヶ月です。受験生の皆さんは体調に気を付けて頑張ってください。

さて、今回は平成２５年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「Ｎを２以上、かつ、７００以下の整数とする。N^2-　1が２８０の倍数であるようなＮは何個あるか。」
です。

合同式を使ったり、N^2-　1＝（N-　1）（Ｎ＋1）、２８０＝２^3×５×７から、N-　1とＮ＋１が５、７、３５の倍数になることを使って解く方法がありますが、今回は別の解き方を調べてみましょう。

Ｎ^2-　1が２８０の倍数であるということは、
Ｎ^2-　1＝２８０ｋ　　（ｋは正の整数）　　（１）
と表せます。

ここで、（１）を変形して、
Ｎ^2＝２８０ｋ＋１
とすると、N^2の一の位が１であることが判ります。

ある数を２乗して一の位が１になるのは、ある数の一の位が１または９のときなので、
Ｎ＝１００ｐ＋１０ｑ＋１
または、
Ｎ＝１００ｐ＋１０ｑ＋９
　＝１００ｐ＋１０（ｑ＋１）-　1
と表せます。ここで、ｐ、ｑは整数で、２≦N≦７００から、０≦ｐ≦６、０≦ｑ≦９です。

まず、Ｎ＝１００ｐ＋１０ｑ＋１のときを調べます。

ここで、
Ｍ＝１０ｐ＋ｑ　　（０≦M≦６９、Mは整数）
とすると、
Ｎ＝１０Ｍ＋１
で、
Ｎ^2-　1＝（１０Ｍ＋１）^2-　1
　　　＝１００M^2＋２０Ｍ
　　　＝２０Ｍ（５Ｍ＋１）
となります。

これが２８０の倍数なので、Ｍ（５Ｍ＋１）は１４の倍数になります。

Mが７の倍数で奇数のとき、５Ｍ＋１は偶数になるので、Ｍ（５Ｍ＋１）は１４の倍数になり、Mが７の倍数で偶数のとき、Mが１４の倍数になるので、Ｍ（５Ｍ＋１）は１４の倍数になります。

同様に、５Ｍ＋１が７の倍数で奇数のとき、Mは偶数になるので、Ｍ（５Ｍ＋１）は１４の倍数になり、５Ｍ＋１が７の倍数で偶数のとき、５Ｍ＋１は１４の倍数になるので、Ｍ（５Ｍ＋１）は１４の倍数になります。

つまり、Mまたは５Ｍ＋１が７の倍数であれば、Ｍ（５Ｍ＋１）は１４の倍数になるということで、Ｍ（５Ｍ＋１）が１４の倍数になるMは、Mまたは５Ｍ＋１が７の倍数となる場合を調べればよいことになります。

そこでまず、Mが７の倍数になる場合ですが、それは０≦M≦６９なので、Ｍ＝７，１４，２１，２８，３５，４２，４９，５６，６３　の９個になります。（それぞれに対応するＮは、７１，１４１，２１１，２８１，３５１，４２１，４９１，５６１，６３１です）

次に５Ｍ＋１が７の倍数になる場合は、Mが
Ｍ＝７ｋ＋４　　（０≦ｋ≦９、ｋは整数）
となるときで、Ｍ＝４，１１，１８，２５，３２，３９，４６，５３，６０，６７の１０個になります。（それぞれに対応するＮは、４１，１１１，１８１，２５１，３２１，３９１，４６１，５３１，６０１，６７１です）

続いて、Ｎ＝１００ｐ＋１０ｑ＋９のときを調べます。

ここで、
Ｍ＝１０ｐ＋ｑ＋１　　（１≦M≦７０、Mは整数）
とすると、
Ｎ＝１０M-　1
で、

Ｎ^2－１＝（１０Ｍ－１）^2－１
　　＝１００Ｍ^2－２０Ｍ
　　＝２０Ｍ（５Ｍ－１）
となります。

これが２８０の倍数なので、Ｍ（５Ｍ－１）は１４の倍数になります。

先程と同じように、Ｍまたは５Ｍ－１が７の倍数である場合を調べればＯＫです。

まず、Ｍが７の倍数になる場合ですが、それは１≦Ｍ≦７０なので、Ｍ＝７，１４，２１，２８，３５，４２，４９，５６，６３，７０の１０個になります。（それぞれに対応するＮは、６９，１３９，２０９，２７９，３４９，４１９，４８９，５５９，６２９，６９９です）

次に５Ｍ－１が７の倍数になる場合は、Ｍが
Ｍ＝７ｋ＋３　　（０≦ｋ≦９、ｋは整数）
となるときで、Ｍ＝３，１０，１７，２４，３１，３８，４５，５２，５９，６６の１０個になります。（それぞれに対応するＮは、２９，９９，１６９，２３９，３０９，３７９，４４９，５１９，５８９，６５９です）

以上をまとめると、２≦Ｎ≦７００でＮ^2－１が２８０の倍数になるのは、９＋１０＋１０＋１０＝３９個でこれが答えになります。

初めに書きましたが、合同式や因数分解、素因数分解など使った解き方もありますので、興味のある方は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533