

# 中学生でも解ける東大大学院入試問題（140）

2015-03-15 10:28:38

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

気温が7℃と寒くなりました。明日は、気温は上がるようですが雨が振るようです。

さて、今回は平成26年度新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「100枚の宝くじがあり、それぞれの番号が1～100まで振られている。このうちどれか1枚が1等、その前後の番号が2等とする。A)ランダムに10枚買う場合と、B)連番で10枚買う場合で、それぞれ以下の値を求めよ。ただし、100番の次は1番、1番の前は100番とみなす。例えば1等が100番の場合、2等は99番と1番になる。「B)連番で10枚買う場合」も同様である。

- (1) いずれかの賞が当たる確率  
(2) すべての賞が当たる確率」  
です。

今回も確率の問題です。

まず、(1)のA)ランダムに10枚買う場合から始めましょう。

「いずれかの賞が当たる」とあるので、すべてはずれくじを買う確率（余事象）を求めて、全体の確率1から引くのが簡単です。

すべてはずれくじを買う場合の数は、はずれくじ97枚から10枚を買うことなので、 $97 \times 96 \times \cdots \times 88$ を、10枚の買う順番の重複している場合の数 $10 \times 9 \times \cdots \times 1$ で割ったものになります。（高校ではこれを ${}_{97}C_{10}$ と表します）

つまり、

すべてはずれくじを買う場合の数 =  $(97 \times 96 \times \cdots \times 88) / (10 \times 9 \times \cdots \times 1)$ （通り）  
です。

一方、100枚の宝くじから10枚買う場合の数は、上と同様に、

100枚の宝くじから10枚買う場合の数 =  $(100 \times 99 \times \cdots \times 91) / (10 \times 9 \times \cdots \times 1)$ （通り）  
です。

これらから、すべてはずれくじを買う確率 $P'(1A)$ は、

$$\begin{aligned} P'(1A) &= (97 \times 96 \times \cdots \times 88) / (10 \times 9 \times \cdots \times 1) \div (100 \times 99 \times \cdots \times 91) / (10 \times 9 \times \cdots \times 1) \\ &= (90 \times 89 \times 88) / (100 \times 99 \times 98) \\ &= 178/245 \end{aligned}$$

となります。

したがって、いずれかの賞が当たる確率 $P(1A)$ は、

$$\begin{aligned} P(1A) &= 1 - P'(1A) \\ &= 1 - 178/245 \\ &= 67/245 \end{aligned}$$

となり、これが答えです。

確率の乗法定理を使うと、1枚目、2枚目、3枚目、・・・、10枚目に買ったくじが連続うしてはずれていく確率は、それぞれ $97/100$ 、 $96/99$ 、 $95/98$ 、・・・、 $88/91$ で、これらの積 $97/100 \times 96/99 \times 95/98 \times \cdots \times 88/91$ が10枚はずれる確率になります。

次に(1)のB)連番で10枚買う場合です。

これも余事象を調べるのが簡単です。

連番の10枚のなかに1等があれば当たりになり、さらに連番の両隣が1等のときも2等が当たりになります。

つまり、連番の10枚とその両隣のいずれかが1等になるとき、当たりになるということです。

したがって、はずれになるのは、1等が $100 - 12 = 88$ 枚のなかにある場合で、その確率 $P'(1B)$ は、

$$\begin{aligned} P'(1B) &= 88/100 \\ &= 22/25 \end{aligned}$$

で、いずれかの賞が当たる確率 $P(1B)$ は、

$$\begin{aligned} P(1B) &= 1 - P'(1B) \\ &= 1 - 22/25 \\ &= 3/25 \end{aligned}$$

で、これが答えです。

これは連番で買う10枚の先頭が取り得る範囲を調べてもOKです。

100枚のうち3枚続けて当たりくじがあるので、すべてはずれになるのは、連番の先頭が、当たりくじ番号が大きい側の1番目から小さい側の10番目までにあるときです。

つまり、連番の先頭が、 $3 + 9 = 12$ 枚以外になるときで、それは $100 - 12 = 88$ 枚のなかにあるときなので、その確率 $P'(1B)$ は、

$$P'(1B) = 88/100 \\ = 2/5$$

となります。

続いて(2)に進みます。

まず(2)のA)ランダムに10枚買う場合です。

10枚買ってすべての賞が当たるのは、3枚当たって7枚はずれということなので、この場合の数は、 $(9 \times 9 \times 6 \times \dots \times 9 \times 1) / (7 \times 6 \times \dots \times 1)$  (通り) になります。

一方、すべての場合の数は、 $(100 \times 99 \times \dots \times 91) / (10 \times 9 \times \dots \times 1)$  (通り) なので、求める確率 $P(2A)$ は、

$$P(2A) = (9 \times 9 \times 6 \times \dots \times 9 \times 1) / (7 \times 6 \times \dots \times 1) \div (100 \times 99 \times \dots \times 91) / (10 \times 9 \times \dots \times 1) \\ = (10 \times 9 \times 8) / (100 \times 99 \times 98) \\ = 2/695$$

で、これが答えです。

次に(2)のB)連番で10枚買う場合です。

連番10枚の両端を除いたなかに1等があれば、つまり、 $10 - 2 = 8$ 枚のなかに1等があれば、すべての賞が当たることになるので、すべての賞が当たる確率 $P(2B)$ は、

$$P(2B) = 8/100 \\ = 2/25$$

で、これが答えです。

条件付確率ではない単純な問題でしたが、連番の取り扱い方を頭にいられておくとういでしょう。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533