

中学生でも解ける東大大学院入試問題（94）

2015-01-21 11:35:31

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

外気温が3℃で雪が降っています。インフルエンザで学級閉鎖も増えているようです。寒い日は暖かくして勉強しましょう。

さて、今回は平成23年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「黒い球と白い球が合計5個、左から右に一列に並んでいる。

黒い球同士は隣り合って並んでいない。

黒と白の配列は非対称になっている。

黒い球に-1点、白い球に+1点を与え、奇数番目の球の点数の合計から偶数番目の球の点数の合計を引くと1点になる。

以上の条件を満たす球の色の配列をすべて示せ。」

です。

黒または白の球を5個並べるわけですから、その配列の場合の数は、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ 通りで、この程度の樹形図ならそれほど手間なく書くことができます。

その樹形図を見ながら、与えられた3つの条件に合致するか否かを調べれば正解できます。

ところが、7個の球を並べるとすると、その配列の場合の数は128通りになり、樹形図を書くのは大変そうです。

と言うことで、ここでは樹形図を使わずに解いてみましょう。

まず、与えられた3つの条件を使って、黒球と白球の個数を絞り込みます。

1番目の条件「黒い球同士は隣り合って並んでいない」から導きだせる必要条件は、「5個の球の内、黒球は3個以下」ということでしょう。

2番目の条件「黒と白の配列は非対称になっている」から導きだせる必要条件は、「5個全部黒球または白球ではない」ということでしょう。

この2つの必要条件から、黒球の個数が1、2または3個と絞り込み、さらに場合分けして調べていってもOKですが、それより残りの3番目の条件が一番厳しそうなので、それを使うのが良さそうです。

そこで、3番目の条件を使うため、奇数番目が白球3個、白球2個黒球1個、白球1個黒球2個、黒球3個、偶数番目が白球2個、白球1個黒球1個、黒球2個とした場合の（奇数番目の合計点数-偶数番目の合計点数）を計算してみます。その結果を表1に示します。

奇数番目	白3	白2黒1	白1黒2	黒3
偶数番目	白2	白1黒1	黒2	黒3
白2	+3点	+1点	-1点	-3点
白1黒1	+2点	+1点	-1点	-3点
黒2	0点	+2点	-1点	-3点
黒3	-3点	-2点	-1点	+3点

▲表1. 3番目の条件

表1から（奇数番目の合計点数-偶数番目の合計点数）=+1となるのは、

- (1) 奇数番目：白球3個、偶数番目：白球2個
- (2) 奇数番目：白球2個黒球1個、偶数番目：白球1個黒球1個
- (3) 奇数番目：白球1個黒球2個、偶数番目：黒球2個

の3つの場合であることが判ります。

ところが(1)は2番目の条件「黒と白の配列は非対称になっている」に反するので不適となり、(3)は1番目の条件「黒い球同士は隣り合って並んでいない」に反するので、これも不適となります。

そこで残った(2)をさらに調べていきましょう。

まず2番目の条件については、偶数番目に白球と黒球を割り当てるのですからその配列は非対称になり、2番目の条件はクリアします。

次に1番目の条件については、中央（左から3番目）に黒球があった場合、2番目または4番目に黒球が割り当てられるので不適です。

さらに奇数番目の黒球が1番目にあるとき偶数番目の黒球は4番目、奇数番目の黒球が5番目にあるとき偶数番目の黒球は2番目になります。

以上をまとめると、

●○○●●

○●○○●

の配列が答えになります。

ついでに球が7個の場合を調べてみましょう。先程と同様、表2をつくりました。

奇数番目	白4	白3黒1	白2黒2	白1黒3	黒4
偶数番目	+4点	+2点	0点	-2点	-4点
白3	+3点	+1点	-1点	-3点	-5点
白2黒1	+1点	+3点	+1点	-1点	-3点
白1黒2	-1点	+5点	+3点	+1点	-1点
黒3	-3点	+7点	+5点	+3点	+1点

▲表2：球が7個の場合

表2から（奇数番目の合計点数- 偶数番目の合計点数）= +1 となるのは、

- (4) 奇数番目：白球4個、偶数番目：白球3個
- (5) 奇数番目：白球3個黒球1個、偶数番目：白球2個黒球1個
- (6) 奇数番目：白球2個黒球2個、偶数番目：白球1個黒球2個
- (7) 奇数番目：白球1個黒球3個、偶数番目：黒球3個

の4つの場合ですが、(4)は2番目の条件、(6)(7)は1番目の条件に反するので、残りは(5)になります。

(5)では、奇数番目と偶数番目に黒球を1個ずつ割り当てるので2番目の条件はクリアします。

そこで、1番目の条件に注意して配列をつくると、

●○○●○○  
●○○○○●  
○○●○○●  
○●○○●○  
○●○○○○  
○○○●○○

の6つの配列が答えになります。

都立高校入試の「場合の数・確率」の問題では、大きな樹形図にはならないので、抜けがないようにしっかり樹形図を書くようにしましょう。さらに、数学好きの人は樹形図を使わない絞り込み方法を考えてみると面白いと思います。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533