中学生でも解ける東大大学院入試問題（１０６）

2015-02-02 13:30:53

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れていますが北風が吹いているので寒く感じます。今日は都立高校推薦入試の合格発表です。合格した受験生はおめでとうございます。残念な結果だった受験生は一般入試で合格しましょう。頑張ってください。

さて、今回は平成１６年度東大大学院工学系研究科システム量子工学の入試問題です。

問題は、
「２次方程式ｘ^2＋ｘ＋１＝０　の２つの解を、α、βとする。
（１）α^3＋β^3　を求めよ。
（２）｜α^3-β^3｜　を求めよ。」
です。　（ｘ^2はｘの２乗を表します）

与えられた２次方程式を解の公式で解いてα、βを求め、（１）（２）の式に代入して値を計算してもよいですが、２次方程式の解と係数の関係と対称式、交代式の性質を使って解くのが一般的でしょう。

まず、２次方程式の解と係数の関係から、
α＋β＝-１　　　　（１）
αβ＝１　　　　　　（２）
が成り立ちます。

一方、（１）の式は、
α^3＋β^3＝（α＋β）^3-３αβ（α＋β）　　　（３）
なので、（３）に（１）（２）を代入して、
α^3＋β^3＝（-１）^3-３・１・（-１）
　　　　＝-１＋３
　　　　＝２
となります。

次に（２）の式は、
｜α^3-β^3｜＝ｌ（α-β）（α^2＋αβ＋β^2）ｌ
　　　　　　＝ｌ√（（α＋β）^2-４αβ）・（（α＋β）^2-αβ）ｌ　　　（４）
なので、（４）に（１）（２）を代入して、
｜α^3-β^3｜＝ｌ√（-１）^2-４・１）・（（-１）^2-１ｌ
　　　　　　＝ｌ√（-３）・０ｌ
　　　　　　＝０
となります。

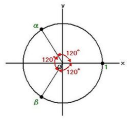
ここで根号のなかに負の数がありますが、これは虚数といって高校で勉強します。（与えられた２次方程式を解の公式で解いても、根号のなかが負の数になります）

もっと簡単な解き方は、
ｘ^3-１＝（ｘ-１）（ｘ^2＋ｘ＋１）　　　（５）
を利用する方法です。

α、βは（５）の２番目の（　）の解なので、
α^3-１＝（α-１）（α^2＋α＋１）
　　　＝（α-１）・０
　　　＝０
が成り立ち、したがって、
α^3＝１
です。

同様に、
β^3＝１
なので、
α^3＋β^3＝２
｜α^3-β^3｜＝０
と手早く答えを求めることができます。

中学数学の範囲を逸脱しますが、（５）の２番目の（　）の２次方程式（問題にある２次方程式）を円周等分方程式と言います。そして、その解は下図のように複素数平面上で原点Ｏを中心とする半径１の円に内接し、（１，０）を一つ頂点とする正三角形の残りの２つの頂点に対応していて、
α＝ｃｏｓ１２０°＋ｉｓｉｎ１２０°
β＝ｃｏｓ２４０°＋ｉｓｉｎ２４０°
と表すことができます。（ｃｏｓ、ｓｉｎは三角関数で、ｉは虚数単位で、ｉ＝√（-１）です）



▲図．複素数平面上での $x^2+x+1=0$ の解

一方、ド・モアブルの定理
$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
から、
$\alpha^2=\beta$
$\alpha^3=1$
になります。

つまり、
$\beta^3=(\alpha^2)^3$
$\quad=(\alpha^3)^2$
$\quad=1^2$
$\quad=1$
なので、
$\alpha^3+\beta^3=1+1$
$\quad=2$
$|\alpha^3-\beta^3|=|1-1|$
$\quad=0$
となります。

終わりのほうは高校で勉強する三角関数などを使いましたが、興味のある人は調べてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533