

中学生でも解ける東大大学院入試問題（75）

2014-12-31 11:10:18

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日は南風のため少し暖かかったのですが、今日は寒くなりました。夕方、雨も降るようですが、元旦は寒さが厳しくなるものの晴れになるようです。

さて、今回は平成26年度東大大学院創成科学研究科環境研究系海洋技術環境学の入試問題です。

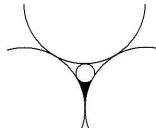
問題は、

「（1）半径  $a$  の大きな円が3個と、半径  $b$  の小さな円が1個、下図のようにそれぞれの円が他のすべての円と接するように描かれている。この時、 $b$  を  $a$  の式で表せ。



▲問題図（1）

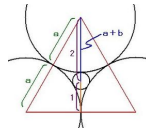
（2）下の図は、（1）で示した図のうち半径  $b$  の円の周辺を拡大したものである。黒く塗られた部分（大きな円2個と小さい円1個の円弧で囲まれた部分）の面積を、 $a$ 、 $b$  を用いた式で表せ。」



▲問題図（2）

です。

円の図形問題では、円の中心を通る補助線を引くと上手くいくことが多いです。この問題では、円が4個あるので、図1のようにそれらを結ぶ補助線を引きましょう。



▲図1．円の中心を結んだ補助線を引く

すると、外側の大きな円の中心を結んでできる赤い三角形は1辺の長さが  $2a$  の正三角形になり、また、正三角形の1つの頂点と小さな円の中心を結んだ線分の長さは、 $a+b$  になります。

さらに、三平方の定理から正三角形の1つの頂点から対辺に下ろした垂線の長さは、 $\sqrt{3}a$  になります。

一方、小さな円の中心は正三角形の重心になるので、正三角形の垂線の長さを  $2:1$  に内分します。

以上より、

$$\sqrt{3}a : a+b = 3 : 2$$

が成り立ち、これを整理して、

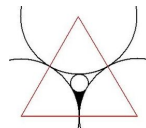
$$2\sqrt{3}a = 3(a+b)$$

から、

$$b = (2\sqrt{3} - 3)a/3$$

となります。

続いて、（2）を片付けましょう。これも（1）と同じように大きな円の中心を結んで正三角形を作ります。



▲図2．円の中心を結んで正三角形を作る

求める黒い領域の面積は、赤い正三角形の面積から小さい円の面積を引き、さらに大きい円の中心角が  $60^\circ$  の扇形の3つの面積（つまり、半円の面積）引き、最後に3で割って求めることができます。

式にすると、

求める面積 = (赤い正三角形の面積 - 小さい円の面積 - 大きい円の中心角が  $60^\circ$  の扇形の面積  $\times 3$ )  $\div 3$  です。

それでは、一つひとつ面積を計算しましょう。

まず、赤い正三角形の面積は、底辺  $2a$ 、高さ  $\sqrt{3}a$  なので  
青い正三角形の面積  $= \sqrt{3}a^2$  ( $a^2$  は、 $a$  の 2 乗を表します)  
です。

次に、小さい円の面積は、半径  $b$  なので、  
小さい円の面積  $= \pi b^2$   
です。

さらに、大きい円の中心角が  $60^\circ$  の扇形の面積は、大きい円の半径が  $a$  なので、  
大きい円の中心角が  $60^\circ$  の扇形の面積  $= \pi a^2 / 6$   
です。

以上を先程の式に代入して、  
求める面積  $= (\sqrt{3}a^2 - \pi b^2 - \pi a^2 / 6 \times 3) \div 3$   
 $= \{\sqrt{3}a^2 - \pi(a^2 / 2 + b^2)\} \times 1 / 3$   
となります。

円の図形問題では円の中心を通る補助線が正解の手掛かりになることが多いので覚えておくとい良いでしょう。

最後になりましたが、皆様、良いお年をお迎えください。

---

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校  
<http://caitakiyama.jimdo.com/>  
TEL 042-472-5533