

中学生でも解ける東大大学院入試問題（73）

2014-12-29 09:53:44

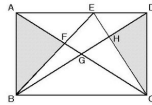
こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

予報通り雨になりました。気温も低く冷たい雨です。このような日は暖かくして勉強するのが一番です。受験生の皆さん、頑張ってください。

さて、今回は平成26年東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「辺ABの長さが6cm、辺BCの長さが9cmの長方形ABCDにおいて、三角形ABFと三角形CDHの面積の和が19cm<sup>2</sup>のとき、四角形EFGHの面積は何cm<sup>2</sup>か。」

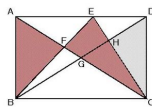


▲問題図

です。

都立高校入試問題に頻出する等積変形を使う問題で、都立入試と同じか、少し難しいくらいのもんです。

図1のように $\triangle ABF = \triangle EFC$ （ $\triangle ABF$ は三角形ABFの面積とします）となります。



▲図1.  $\triangle ABF = \triangle EFC$

と言うのは、 $\triangle AEB = \triangle AEC$ （等積変形、底辺AEと高さABが同じ）で、

$$\triangle ABF = \triangle AEB - \triangle AEF$$

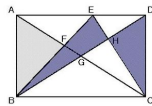
$$\triangle EFC = \triangle AEC - \triangle AEF$$

より、

$$\triangle ABF = \triangle EFC$$

となるわけです。

同様に、 $\triangle DCH = \triangle EHB$ です。（図2）



▲図2.  $\triangle DCH = \triangle EHB$

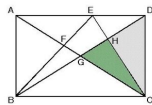
一方、図3のように、

$$\triangle CHG = \triangle CDG - \triangle CDH$$

で、 $\triangle CDG = 6 \times 9/2 \times 1/2 = 27/2$ なので、

$$\triangle CHG = 27/2 - \triangle CDH \quad (1)$$

になります。



▲図3.  $\triangle CHG = 27 - \triangle CDH$

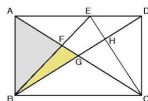
同様に、（図4）

$$\triangle BFG = \triangle ABG - \triangle ABF$$

で、 $\triangle ABG = 6 \times 9/2 \times 1/2 = 27/2$ なので、

$$\triangle BFG = 27/2 - \triangle ABF \quad (2)$$

です。



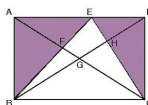
▲図4.  $\triangle BFG = 27 - \triangle ABF$

そこで、(1)と(2)を足し合わせると、  
 $\triangle CHG + \triangle BFG = 54 - (\triangle CDH + \triangle ABF)$   
 となり、仮定より、 $\triangle CDH + \triangle ABF = 19$ なので、  
 $\triangle CHG + \triangle BFG = 27 - 19 = 8$  (3)  
 となります。

最後に、  
 四角形EFGH =  $\triangle EBC - \triangle GBC - \triangle CHG - \triangle BFG$  (4)  
 なので、(4)に、  
 $\triangle EBC = 9 \times 6 \times 1/2 = 27$   
 $\triangle GBC = 9 \times 3 \times 1/2 = 27/2$   
 と(3)を代入して、  
 四角形EFGH =  $27 - 27/2 - 8$   
 $= 11/2$   
 と答えは  $11/2 \text{ cm}^2$  となります。

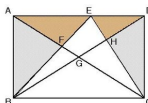
次に、等積変形を使わない解答を示します。

図5の紫色( $\triangle ABE + \triangle DCE$ )の面積が長方形ABCDの面積の1/2、つまり27です。



▲図5.  $\triangle ABE + \triangle DCE = 27$

一方、図6の橙色( $\triangle AEF + \triangle DEH$ )の面積は、紫色の面積から灰色の面積を引いたものになります。



▲図6.  $\triangle AEF + \triangle DEH$

ところが、灰色の面積は仮定より19なので、橙色の面積は、 $27 - 19 = 8$ です。

つまり、四角形EFGH =  $\triangle GAD - \text{橙色の面積} = 27/2 - 8 = 11/2 \text{ cm}^2$ となり、前の答えと同じになりました。

中3の受験生の皆さんは、等積変形をマスターしておいてください。