

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１１８）

2015-02-14 12:10:47

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

冷たい風が少し吹いていますが、陽射しは暖かく気温は 10°C を超し、明日はもっと暖かくなり過ごしやすくなるようです。

塾生も私立高校に合格し、今は都立高校入試に向け、頑張っています。都立高校を受験する皆さんはもう一息なので頑張ってください。

さて、今回は平成26年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

「赤、青、黄の3種類の同じ大きさの正方形の板を重ねることなく隙間なく並べて縦 N 枚、横 N 枚の正方形領域を作る。このとき、縦横に隣合う板の色が同じにならないようにする。また、各色の板が足りなくなることはない。以下の間に答えよ。

(1) $N=2$ のとき、並べ方の総数を求めよ。

(2) $N=3$ のとき、並べ方の総数を求めよ。」

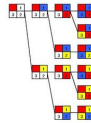
です。

(1) の $N=2$ のとき、隣合う板の色を気にしなければ、すべての場合の数が、 $3^4=81$ 通りなので、すべての場合を書き出しても、それほど苦労なく解けそうです。（ 3^4 は3の4乗を表します）

ところが、(2) の $N=3$ のときは、 $3^9=19683$ 通りになり、すべての場合を書き出すわけにはいかないので、工夫が必要です。

それでは、(1) から調べましょう。

まず、 2×2 の格子の左上を赤としてスタートします。その左は青または黄で、青のとき、その下は赤または黄になります。……と文章で説明するよりも図1の樹形図が判り易いですね。



▲図1. $N=2$ の場合の樹形図（左上が赤の場合）

つまり、左上を赤とした場合6通りの並べ方があり、左上を青または黄とした場合もそれぞれ6通りになるので、並べ方の総数は、 $6\times 3=18$ 通りになります。

別の方法として、排反事象を使うこともできます。

2×2 の格子に3色の板を並べるすべての場合の数は $3^4=81$ 通りで、これから同色の板が隣合う場合の数を差し引けば、隣合う板が同色にならない場合の数を求めることができます。

そこで、同色の板が隣合う場合を調べてみると、

(1) 隣合う2枚の板が同色で残りの2枚が別々の色

(2) 2組の隣合う2枚の板が同色

(3) 隣合う3枚の板が同色で残りの1枚が別々の色

(4) 隣合う4枚の板が同色

の4つの場合に分けることができます。

以上の(1)から(4)での 2×2 の格子の区分の仕方を図2に示します。



▲図2. 2×2 の格子の区分の仕方

続いて(1)から(4)の場合の数を調べます。

(1) の場合、 2×2 の格子で隣合う2格子の選び方は4通りです。また、隣合う2枚の板の色の選び方は3通りで、残りの板の色の選び方は2通りになるので、この場合の数は、 $4\times 3\times 2=24$ 通りになります。

(2) の場合、 2×2 の格子で2組の隣合う2格子の選び方は4通りです。また、2組の隣合う2枚の板の色の選び方

は3通りなので、この場合の数は、 $4 \times 3 = 12$ 通りになります。

(3)の場合、 2×2 の格子で隣合う3格子の選び方は4通りです。また、隣合う3枚の板の色の選び方は3通りで、残りの板の色の選び方は2通りになるので、この場合の数は、 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りになります。

(4)の場合、 2×2 の格子で隣合う4格子の選び方は1通りです。また、隣合う4枚の板の色の選び方は3通りなので、この場合の数は、 $1 \times 3 = 3$ 通りになります。

以上から、同色の板が隣合わせになる場合の数は、

$$24 + 12 + 24 + 3 = 63 \text{ 通り}$$

になり、すべての場合の数81通りからこれを差し引いて、

$$81 - 63 = 18 \text{ 通り}$$

が、隣合う板が同色にならない場合の数となります。

他にも解法があるので、(実際、(2)を調べるとき別の方法も示すつもりです)興味のある人は考えてみてください。

(2)については、長くなりそうなので次回(多分、明日)調べていきたいと思います。

[東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校](http://caitakiyama.jimdo.com/)

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533