中学生でも解ける東大大学院入試問題（１７８）

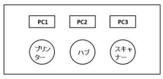
2015-04-24 12:07:33

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

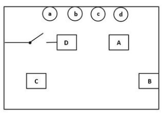
毎日良い天気が続きます。気温も連日２０℃超で、来週には夏日がありそうな勢いです。今日の天気予報では、ＧＷの前半は好天で、後半は不安定な天気になると言っていたので、出かける方は前半が良いかもしれません。

さて、今回は平成２４年度東大大学院新領域創成科学研究科海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、
「下図のように、パソコン（ＰＣ）が３台と、プリンター、ＬＡＮ用ハブ、スキャナーの外付け機器が各１台ずつある。３台のＰＣとも各外付け機器に接続したい。このとき、交点を作らないで各ＰＣとも各外付け機器を結ぶ線を引くことは可能か。可能でなければ最も少ない交点はいくつか。下図中に結線を描いて示せ。



（２）ａ、ｂ、ｃ、ｄの４人が図の位置に立っている。ａはＡ、ｂはＢ、ｃはＣ、ｄはＤに行くとする。外側の境界線を越えずにａ、ｂ、ｃ、ｄが、それぞれの目的地Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄに誰も他の３名通り道を横切らずに到達することは可能か。可能でなければ最も少ない交点の数はいくつか。下図中に通り道を描いて示せ。但しＤと境界線の間にはゲートがあり、一人しか通れないとする。



」

です。

（１）の３台のＰＣそれぞれを３種類の外付け機器に接続する仕方は、完全二部グラフＫ3，3で、これは平面グラフではないので、交点を作らないで結線することはできません。

ここで、完全二部グラフというのは、頂点が２つのグループに分かれていて、異なるグループの頂点間だけに辺が引かれていて、かつ、異なるグループの頂点間にはすべての辺が引かれているグラフです。

（１）の場合では、３台のＰＣが一つのグループで、３種類の外付け機器がもう一つのグループなので、二部グラフで、さらに、各ＰＣからすべての外付け機器に接続するので、完全グラフになります。また、Ｋ3,3の３, ３は、それぞれのグループに属する頂点の数を表しています。

この完全二部グラフＫ3,3が平面グラフ（交点を作らないで結線できる）でないことを示すには、オイラーの定理を使います。

オイラーの定理は、連結な平面グラフの頂点の個数Ｖ、辺の本数Ｅ、面の個数Ｆとすると、
Ｖ－ Ｅ＋Ｆ＝２　　　　　　（１）
が成り立つ、というものです。

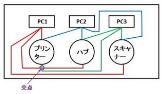
まず、平面二部グラフが平面グラフだとすると、その１個の面は２つのグループから同数の頂点を持つので、辺の本数は偶数本、つまり、各面には４本以上の辺が境界として使われます。

また、１本の辺は、２個の面の境界として使われるので、
２Ｅ≧４Ｆ　　　　　　（２）
が成り立ちます。

そこで、（１）と（２）から、
２Ｅ≧４（２－ Ｖ＋Ｅ）
Ｅ≦２Ｖ－ ４　　　　　　（３）
となります。

もし、平面グラフならば(３）を満たさなければなりませんが、Ｋ3,3は、Ｖ＝６、Ｅ＝９で（３）を満たしていないので、平面グラフではありません。

図１の解答例に示したように、最も少ない交点数は１個です。



▲図１．（１）の解答例

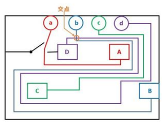
続いて（２）です。

外側の境界線に接しているｂとＢに注目します。もし、ｂがゲートを通ってＢに到達するとすれば、ａは必ずＢの通り道を横切らなくてはなりません。

また、ｂがＡとＤの間、または、Ａの右側を通り、かつ、Ｃの左側を通ってＢに到達するとすれば、ｄは必ずＢの通り道を横切らなくてはなりません。

したがって、ａ、ｂ、ｃ、ｄが、それぞれの目的地Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄに誰も他の３名の通り道を横切らずに到達することは不可能です。

図２の解答例に示したように、最も少ない交点数は１個です。



▲図２．（２）の解答例

（１）で使ったオイラーの定理は、前回の多面体定理と同じように証明できます。興味のある人は調べてみて下さい。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533