

中学生でも解ける東大大学院入試問題（100）

2015-01-27 12:59:38

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

雨の予報でしたが外れたようで、昨日と同様暖かくなりました。都立高校推薦入試の2日目受験生にとっても良かったですね。

さて、今回は平成24年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「A、B、Cの3人で試合を行う。1試合目は、A対Bで行い、次の試合からは、勝者が残りの1人と試合を行う。2回連続して勝てば優勝であり、誰かが優勝するまで繰り返す。A、B、Cのいずれも、各試合で勝つ確率が5割であるとする。

（1）4試合以内にAが優勝する確率を求めよ。

（2）Aが優勝する確率を求めよ。」

です。

大相撲などで行われる巴戦の問題です。例えば、3人で巴戦をした場合、各試合での勝つ確率が1/2のとき、計算上では、初めに待機した人が不利になることは有名な話です。

では、問題に取り掛かりましょう。

まず、（1）ですが、勝った人を順に並べ、最終的にAが優勝する場合を調べていきましょう。例えば、[A C B・・・]は、1試合目でAが勝ち、2試合目でC、3試合目でB、・・・、と勝ったことを示します。

1試合目はAとBが対戦するので、Aが勝つ場合とBが勝つ場合があり、それらで場合分けします。

（1試合目でAが勝つ場合）

Aが優勝するのは、

[A A] ← 2試合目でAが優勝

[A C B A A] ← 5試合目でAが優勝

[A C B A C B A A] ← 8試合目でAが優勝

[A C B A C B A C B A A] ← 11試合目でAが優勝

.....

です。

したがって、4試合以内にAが優勝するのは、[A A]のときだけで、その確率は、

$$(1/2)^2 = 1/4$$

になります。

（1試合目にBが勝つ場合）

Aが優勝するのは、

[B C A A] ← 4試合目にAが優勝

[B C A B C A A] ← 7試合目にAが優勝

[B C A B C A B C A A] ← 10試合目にAが優勝

[B C A B C A B C A B C A A] ← 13試合目にAが優勝

.....

です。

したがって、4試合以内にAが優勝するのは、[B C A A]のときだけで、その確率は、

$$(1/2)^4 = 1/16$$

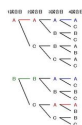
になります。

以上より、4試合以内にAが優勝する確率は、

$$1/4 + 1/16 = 5/16$$

になります。

これを樹形図を使って解く場合は、図のように優勝が決定するしないにかかわらずすべての場合を書き出します。



▲樹形図

樹形図から、2試合目までのすべての場合の数が4通りに対して、Aが連勝して優勝するのは1通りなので、2試合目でAが優勝する確率は1/4になります。

3 試合目までのすべての場合の数は 8 通りですが A は連勝していないので、A が優勝する確率は $0/8$ になります。

4 試合目までのすべての場合の数は 16 通りに対して、A が連勝するのは 3 通りありますが、そのうち 2 通りは、それ以前に A または B が優勝してしまっているため、結局、4 試合目で A が優勝する確率は、 $1/16$ になります。

したがって、4 試合以内に A が優勝する確率は、
 $1/4 + 0/8 + 1/16 = 5/16$
になります。

次に (2) です。

(1) の [] を眺めると、1 試合目に A が勝って A が優勝する場合は、[A A] 以外は、A C B を何回か繰り返したあと、A A がきて A が優勝する経過を辿ります。

つまり、A が優勝するのは、2、5、8、11、14 試合目、・・・となり、A が優勝する確率は、
 $(1/2)^2 + (1/2)^5 + (1/2)^8 + (1/2)^{11} + (1/2)^{14} + \dots$
となります。

ここで、
 $S = (1/2)^2 + (1/2)^5 + (1/2)^8 + (1/2)^{11} + (1/2)^{14} + \dots$
とすると、
 $(1/2)^3 \cdot S = (1/2)^5 + (1/2)^8 + (1/2)^{11} + (1/2)^{14} + \dots$
で、
 $S - (1/2)^3 \cdot S = (1/2)^2$
 $(1 - (1/2)^3) S = (1/2)^2$
 $7/8 \cdot S = 1/4$
 $S = 2/7$
になります。（等比数列の和の公式を導く手順です。高校で勉強します）

一方、1 試合目に B が勝って A が優勝する場合は、B C A を何回か繰り返したあと、A がきて A が優勝する経過を辿ります。

つまり、A が優勝するのは、4、7、10、13、16 試合目、・・・となり、A が優勝する確率は、
 $(1/2)^4 + (1/2)^7 + (1/2)^{10} + (1/2)^{13} + (1/2)^{16} + \dots$
となります。

ここで、
 $T = (1/2)^4 + (1/2)^7 + (1/2)^{10} + (1/2)^{13} + (1/2)^{16} + \dots$
とすると、上記と同じように、
 $T - (1/2)^3 \cdot T = (1/2)^4$
 $7/8 \cdot T = 1/16$
 $T = 1/14$
になります。

したがって、A が優勝する確率は、
 $S + T = 2/7 + 1/14$
 $= 5/14$
になります。

因みに、B の優勝確率は A と同じなので $5/14$ となるので、C の優勝確率は、
 $1 - 5/14 - 5/14 = 4/14 = 2/7$
になります。

他にもいろいろな解法があるので興味のある方は調べてみてください。