

中学生でも解ける東大大学院入試問題（３７）

2014-11-14 12:18:56

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

朝晩は冷え込みますが日中は陽が射して暖かいです。日曜日まで良い天気が続くようです。

さて、今回は平成２１年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題を取り上げます。

問題は、

「分数において、分子に４個の数字の掛け算を、分母に３個の数字の掛け算をおこない、その結果が１になるとする。

$$\frac{\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square}{\square \cdot \square \cdot \square} = 1$$

このとき、分子と分母に２、４、８、１６、３２、６４、１２８の７個の数字を１回だけ使うことを考える。この場合の４個と３個の組み合わせについて全てとめよ。」

与えられた数字が２の累乗になっているので、気が抜けてしまうほど易しそうです。まず、それらを 2^n ので表すと、

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

$$16 = 2^4$$

$$32 = 2^5$$

$$64 = 2^6$$

$$128 = 2^7$$

となります。

つまり、分子と分母の数は、それぞれ、 2^m および 2^n と表すことができ、その分数の値が１になるのですから、 $m = n$ となるということです。

さらに、 $m + n = 1 + 2 + \dots + 7 = 28$ なので、 $m = n = 14$ でなければなりません。

以上より、１、２、３、４、５、６、７から選んだ３つの数字の和が１４となる組み合わせを見つければ、それでお仕舞いです。

では、片っ端から調べていきましょう。

まず、３つの数のなかに１がある場合、２から７のなかから２つ選んで、その和が１３になる組み合わせは、（１，６，７）です。

次に、２がある場合、３から７のなかから２つ選んで、その和が１２になる組み合わせは、（２，５，７）

で、

さらに、３がある場合、４から７のなかから２つ選んで、その和が１１になる組み合わせは、（３，４，７）、（３，５，６）

です。

一方、４または５がある場合、５から７のなかから２つ選んで、その和が１０になる組み合わせはなく、６または７がある場合は、３つの数の組み合わせが作れません。

以上より、条件を満たす組み合わせは、

（１，６，７）、（２，５，７）、（３，４，７）、（３，５，６）

の４通りになります。

つまり、問題の答えは、

$$2^1 \cdot 2^6 \cdot 2^7 = 4 \cdot 8 \cdot 128 = 4096$$

$$2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^7 = 4 \cdot 16 \cdot 128 = 8192$$

$$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^7 = 8 \cdot 16 \cdot 128 = 16384$$

$$2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 8 \cdot 32 \cdot 64 = 16384$$

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^7 = 16 \cdot 8 \cdot 128 = 16384$$

となります。

他にいろいろな解き方や絞込みの方法を試してみたのですが、上記のものが一番簡潔そうでした。類題で面白そうなものがあれば紹介したいと思います。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533

