

中学生でも解ける東大大学院入試問題（174）

2015-04-19 11:04:13

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

曇りの天気で気温は 20°C に届かず、少し肌寒い日になりました。東久留米市議会選挙が始まり賑やかな1週間の始まりです。

さて、今回は平成21年度東大大学院新領域創成科学研究科情報生命科学の入試問題です。

問題は、

「次の問題の解法を考えよう。

「 n (≥ 5) 個の自然数から合計値が3の倍数になるように、重複なく3個を選択する」

ただし、すべての組合せを調べずに、各自然数は高々1回調べようにしたい。

以下の問いに答えよ。

(1) $n = 4$ の場合、条件を満たす3個を選択できない場合があることを示せ。

(2) $n \geq 7$ の場合、条件を満たす3個を選択できることを示せ。

(3) $n = 5$ および $n = 6$ の場合、条件を満たす3個を選択できることを示せ。

(4) 上の2つの性質を利用して、各自然数を高々1回だけ調べ、条件を満たす解を求めるアルゴリズムを設計せよ。

」
です。

選択した3個の自然数の和が、3の倍数になるようにするわけですから、各自然数を3で割った余りを調べるのが自然です。

早速、(1)に取り掛かりましょう。

まず、4個の自然数を3で割った余りは、0、1、2のいずれかになり、これらの余りの和が3の倍数であれば、元の自然数の和は3の倍数になります。

ここでは4個の自然数から3個を選び、それらの和が3の倍数になるか否かを調べるので、余りの0、1、2をどのように組み合わせると、それらの和が3の倍数になるのかを調べます。

すると、次の2つの場合が3の倍数になることが判ります。

(a) 同じ余りが3個あり、残りは任意の場合 → それらの和は3の倍数

(b) 余り0、1、2が一つずつあり、残りは任意の場合 → それらの和は3の倍数

したがって、もし3の倍数にならない場合があるならば、上記の2つの場合以外なので、それは、同じ余りが2個のものが2組となります。

実際に、この場合、3の倍数にならないことを確かめます。

そのため、余りを r_1 、 r_2 ($r_1 \neq r_2$ 、 r_1 、 $r_2 = 0$ 、1または2) とすると、3個の自然数の余りの和は、 $R_1 = 2r_1 + r_2$ または、 $R_2 = r_1 + 2r_2$ となります。

そこで、 R_1 と R_2 を実際に計算してみると、

$r_1 = 0$ のとき、 $R_1 = 1$ または 2 、 $R_2 = 2$ または 4

$r_1 = 1$ のとき、 $R_1 = 2$ または 4 、 $R_2 = 1$ または 5

$r_1 = 2$ にちき、 $R_1 = 4$ または 5 、 $R_2 = 2$ または 4

となり、 R_1 、 R_2 とも3の倍数にはなりません。

以上より、4個の自然数を3で割った余りが2個ずつ2組である場合、条件を満たす3個を選択できません。

次に(2)です。

まず、7個以上の自然数の余りに0、1、2がすべて含まれる場合、(b)からその自然数の和は3の倍数になります。

また、0、1、2の余りのうちいずれかがない場合、残りの2つの余りになるもので、個数の多いほうが、少なくとも4個以上となり、これは(a)から、3の倍数になる3個の自然数を選択することができます。

したがって、 $n \geq 7$ の場合、条件を満たす3個を選択することができます。

続いて(3)です。

$n = 5$ および 6 の場合、(2)と同じように、それらの自然数の余りに0、1、2がすべて含まれる場合、(b)からその自然数の和は3の倍数になります。

また、0、1、2の余りのうちいずれかがない場合、残りの2つの余りになるもので、個数の多いほうが、少なくとも3個以上となり、これは(a)から、3の倍数になる3個の自然数を選択することができます。

したがって、 $n = 5$ および 6 の場合、条件を満たす 3 個を選択することができます。

最後に (4) のアルゴリズムの設計ですが、 5 個以上の自然数を 3 で割った余りで分類し、余りが 0 、 1 、 2 になるものがある場合、それらから 1 個ずつ自然数を選択した組合せと、 1 つの余りに 3 個以上ある場合、それらの自然数の組合せが、条件を満たす解になります。

具体的なアルゴリズム（フローチャートなど）ですが（これがこの問題のポイントだと思うのですが）、残念ながら詳しくないので、スキップさせてください。（少し勉強してから紹介します）

早速、ネットでフローチャートの書き方を復習（ 30 年ぶりくらい）しているのですが、一昔前であれば、本屋で探さなければならなかったのが、今は自席のまま多数の関連資料を調べることができて便利な世の中になったのが実感します。

ところで、少し気になるのが、(4) の「上の 2 つの性質を利用して、・・・」というところで、何か根本的なところで間違えているのかも知れません。何かご存知の方はご教示ください。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533