

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１６８）

2015-04-12 11:08:02

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

晴れの良い天気になりましたが、明日は雨で寒くなるようです。来週の後半から暖かい陽気が続くようです。

さて、今回は平成 26 年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「 n 人がそれぞれ異なる一つの情報を持っている。彼らは電子メールをやり取りすることで、情報を互いに共有したい。送信者は、電子メールを送信する時点における自分の知っている全ての情報を電子メールに書くことができるが、一つの電子メールは一人の受信者（宛先）にしか送れない。最初に各自が持っている情報を n 人全員が共有するために、必要な最小の電子メールの送信数を求めよ。その際、どのように導出したかも記述せよ。」

です。

n 人のなかの誰か一人（代表者）にその他の全員が電子メールを送信し、代表者が他の全員に送信すれば、全員が全ての情報を共有できるので、必要な最小の電子メールの送信数は、（代表者以外の人が代表者に送信する電子メールの送信数）＋（代表者が代表者以外の人に送信する電子メール送信数）＝ $(n-1) + (n-1) = 2n-2$ （通）となります。

問題は、この $2n-2$ （通）より少ないメール数で全員が全ての情報を共有できないのかということです。

そこで、メールが 1 通ずつ順番に送信されていく状況を考えます。最終的に全員に全ての情報が共有されるわけですから、その過程で一人が全ての情報を持つ（代表者になる）状態が生じます。そこで、代表者ができた状態の前後に分けて調べていきます。

まず、代表者ができるまでのメールの送信数のなかで少なそうな方法は、前述したように、（a）代表者に他の全員がメールを送信する、（b）パケツリレーのように最初の人から次の人にメールを送信し、次の人がさらに次の人に送信することを繰り返し、最後に代表者が受信する、または、（a）と（b）の組合せで、どの場合もメール数は $n-1$ （通）になります。

ここで、 $n-2$ （通）のメールで一人が全ての情報を持つことができるかを調べてみます。

n 人で $n-2$ （通）のメールを送信するということは、少なくとも 2 人以上メールを送信しない人がいることとなります。

ここで、仮にそれが 2 人であるとしたとき、誰かが代表者になることが可能かを調べます。そのために、メールを送信しない 2 人のどちらかが代表者の場合とその 2 人以外が代表者の場合に分けて考えます。

・メールを送信しない 2 人のうちの一人が代表者である場合
代表者でない一人はメールを送信しないので、その人の情報を代表者は持っていません。つまり、メールを送信しない 2 人のうち一人が代表者であることはありません。

・メールを送信しない 2 人以外が代表者である場合
2 人はメールを送信しないので、代表者はその 2 人の情報を持っていません。つまり、メールを送信しない 2 人以上代表者がいることはありません。

以上は、メールを送信しない人が 3 人以上でも同様なので、 $n-2$ （通）のメールで代表者をつくることができないこととなります。つまり、代表者をつくるために必要な最小の電子メール送信数は、 $n-1$ （通）となります。

続いて、代表者が一人できた状態から、全員が全ての情報を共有する状態までを調べます。

まず、代表者が一人いて、全員が全ての情報を共有するまでに必要なメール送信数で少なそうなものを考えると、代表者が残りの全員にメールを送信する場合で、そのときのメール数は、 $n-1$ （通）となります。

そこで先程と同じように、 $n-2$ （通）のメールで全員が全ての情報を共有することができるかを調べるため、代表者が k 通のメールを送り、それ以外の人から $n-k-2$ （通）のメールを送る場合を考えます。

代表者は全ての情報を持っているので、代表者からメールを送信された k （人）は全ての情報を共有することになります。つまり、代表者を含めて $k+1$ （人）の人が全ての情報を持っています。

したがって、残りの $n-k-1$ （人）に $n-k-2$ （通）のメールで全ての情報を持たせることができるかを調べればよいこととなりますが、 $n-k-1$ （人）の各々が、1 通のメールを受信して全ての情報を持つことができるとしても、そのためには合わせて $n-k-1$ （通）のメールが必要です。つまり、 $n-k-2$ （通）のメールでは全員が全ての情報を共有することができません。

したがって、代表者が一人いて、全員が全ての情報を共有するまでに必要な最小の電子メールの送信数は、 $n-1$ （通）となります。

以上から、初期の状態から代表者ができるまでの最小のメール数が $n-1$ （通）で、一人の代表者ができて全員が全て

の情報を共有するまでに必要な最小のメール数が $n - 1$ (通) なので、初期の状態から全員が全ての情報を共有するまでに必要な最小の電子メールの送信数は、 $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$ (通) になり、これが答えです。

ごちゃごちゃした説明になってしまいましたが、説明の骨子は、初期状態から全ての情報を持った人が一人現れる状態までに必要な最小メール数と、全ての情報を持った人が現れた状態から最終状態までに必要な最小メール数を仮定して、それらより1通少ないメール数では上記の2つの状態をつくることができないことを説明することで、初めの仮定が最小のメール数であることを示しました。もっとすっきりした説明がありそうですが、知っている方がいればご教示ください。お願いします。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533