中学生でも解ける東大大学院入試問題（１８）

2014-10-21 12:15:49

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

細かい雨が降ったり止んだりしていますが、これから降水確率は下がるようです。しかし、明日も雨で、風向きが南から北に変わり寒くなるようです。風邪など引かぬよう気を付けてください。

今回は、平成２３年度東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題を取り上げます。

問題は、
「ｎは任意の正の整数とする。ｎ^100を１０進数で表したとき、取り得る一の位の数字をすべて求めよ。」（ｎ^100はｎの１００乗を表します）
というものです。

この問題は、一昨日紹介した平成２２年度同入試問題の「ｎ^321－１が１０の整数倍となるような１０００以下の正の整数の個数を求めよ。」と同類のもので、そこで記したように、累乗数の余りや下位桁の数を求める問題に対しては、累乗数の余りが循環することを利用するのが解法テクニックになります。

それでは早速取り掛かりましょう。まず、
ｎ＝１０ｍ＋ｒ　（ｍ≧０、０≦ｒ≦９、ｍ、ｒは整数）
と表します。

すると、
ｎ^100＝（１０ｍ＋ｒ）^100
となり、右辺を二項展開すると、
（１０ｍ＋ｒ）^100＝100Ｃ100・（１０ｍ）^100＋100Ｃ99・（１０ｍ）^99・ｒ＋100Ｃ98・（１０ｍ）^98・ｒ^2＋・・・＋100Ｃ1・（１０ｍ）・ｒ^99＋100Ｃ0・ｒ^100
となります。

ここで、ａＣｂ　の記号は高校の「組み合わせ」で勉強するもので、二項展開の係数になるので二項係数とも呼ばれ、
ａＣｂ＝ａ！/（ｂ！（ａ－ｂ）！）
を表します。

ところが、ここでは、この二項係数が重要なわけではなく、上記の二項展開式の右辺の最後の項以外は、１０の因数を持つ、つまり、一の位の数字には関係ないということを示したいだけです。

例えば、
（１０ｍ＋ｒ）^100＝（１０ｍ＋ｒ）（１０ｍ＋ｒ）^99
＝１０ｍ（１０ｍ＋ｒ）^99＋ｒ（１０ｍ＋ｒ）^99
と変形すると、右辺の第１項は１０の倍数なので、左辺を１０で割った余りは、右辺の第２項を１０で割った余りに等しくなり、さらに、（１０ｍ＋ｒ）^99を変形すると、
ｒ（１０ｍ＋ｒ）^99＝ｒ（１０ｍ＋ｒ）（１０ｍ＋ｒ）^98
＝ｒ・１０ｍ（１０ｍ＋ｒ）^98＋ｒ^2（１０ｍ＋ｒ）^98
となり、右辺の第１項は１０の倍数なので、左辺を１０で割った余りは、右辺の第２項を１０で割った余りと等しくなります。これを続けていくと、（１０ｍ＋ｒ）^100を１０で割った余りは、ｒ^100を１０で割った余りと等しくなることが判ります。

以上をまとめると、「ｎ^100の一の位の数は、ｎ＝１０ｍ＋ｒ（ｍ≧０、０≦ｒ≦９、ｍ、ｒは整数）としたとき、ｒ^100の一の位の数と等しい」ということです。

これで簡単になりました。ここで、前回使った表を再掲します。

【10を法としたときのrのk乗の値（k＝1～9】

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
r^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
r^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
r^5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^6	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
r^7	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
r^8	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
r^9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

▲ｒ^kを１０で割ったときの余り

表で判るように、ｒを１０で割った余りは、ｒ^5、ｒ^9を１０で割った余りと等しく、かつ、その性質は循環しているので、ｒを１０で割った余りは、ｒ^(4q+1)（ｑ≧０、ｑは整数）を１０で割った余りと等しくなります。

つまり、
ｒ^100＝ｒ^(4・24＋1）・ｒ^3
なので、ｒ^100を１０で割った余りは、ｒ・ｒ^3＝ｒ^4を１０で割った余りと等しいことになります。

そこで、上記の表のｒ^4を見ると、左から「０、１、６、１、６、５、６、１、６、１」となっていて、これからｎ^100の取り得る一の位の数字は、「０、１、５、６」となります。

以上を合同式で表すと、

$n^{100} \equiv (n^5)^{20}$
$\equiv n^{20}$
$\equiv (n^5)^4$
$\equiv n^4 \pmod{10}$
となります。

繰り返しになりますが、累乗数の余りや下位桁の数を求める問題に対しては、累乗数の余りが循環する性質を利用することをしっかり覚えておきましょう。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533