

中学生でも解ける東大大学院入試問題（68）

2014-12-23 11:33:25

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日より気温は若干低いのですが、晴れていて良い天気です。暫く晴れの日が続き週末崩れるようですが、大晦日、元旦は晴れになるとT Vの天気予報で言っていました。先のことなので当たるか外れるか分かりませんが。

さて、今回は平成25年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「次の式に当てはまる整数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  を求めよ。

$$6 \div 11 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \times \frac{1}{c}$$

ただし、 $c > a > 0$  かつ  $c > b > 0$  である。」  
です。

整数の不定方程式では、1つの変数の候補を見つけ、それらの候補について場合分けして他の変数を見つけていきます。そして、本問のようなある分数を単位分数の和に直す問題では、単位分数の取り得る範囲を求め、変数の1つを絞り込むのが常套手段です。

まず、与式を整理すると、

$$6/11 = 1/a + 1/bc \quad (1)$$

となります。

ここで、 $1/a$  と  $1/bc$  とでどちらが大きい値を取るか調べます。条件にあるように、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  は正の整数 ( $a \geq 1$ 、 $b \geq 1$ 、 $c \geq 1$ ) で、 $c > a > 0$  なので、これに  $b$  を掛けると、

$$bc > a \quad bc \geq a$$

となるので、

$$1/a > 1/bc \quad (2)$$

です。

すると、(1) は、

$$6/11 = 1/a + 1/bc \leq 2/a$$

となり、

$$6/11 \leq 2/a$$

$$3/11 \leq 1/a \quad (3)$$

となります。

(3) を変形して、

$$a \leq 11/3 < 4$$

なので、 $a$  の候補は、1、2、3 となります。

あとは  $a$  について場合分けすればOKです。

$a = 1$  のとき、(1) は、

$$6/11 = 1 + 1/bc$$

$$1/bc = -5/11$$

より、これを満たす正の整数  $b$ 、 $c$  はなく、したがって、 $a \neq 1$  となります。

$a = 2$  のとき、(1) は、

$$6/11 = 1/2 + 1/bc$$

$$1/22 = 1/bc$$

より、

$$bc = 22$$

となります。これを満たす  $b$ 、 $c$  の組合せを  $(b, c)$  とすると、

$$(b, c) = (1, 22), (2, 11), (11, 2), (22, 1)$$

ですが、 $c > b$  より、 $(1, 22)$ 、 $(2, 11)$ 、すなわち、

$$b = 1, c = 22$$

と

$$b = 2, c = 11$$

になります。

$a = 3$  のとき、(1) は、

$$6/11 = 1/3 + 1/bc$$

$$7/33 = 1/bc$$

より、これを満たす正の整数  $b$ 、 $c$  はなく、したがって、 $a \neq 3$  となります。

以上をまとめると、

$$a = 2, b = 1, c = 22$$

と

$a = 2$ 、 $b = 2$ 、 $c = 1$  1  
が答えになります。

念のため、検算してみると、 $a = 2$ 、 $b = 1$ 、 $c = 2$  2 の場合、  
$$\begin{aligned} 1/2 + 1/1 \times 1/2 \ 2 &= 1 \ 1/2 \ 2 + 1/2 \ 2 \\ &= 1 \ 2/2 \ 2 \\ &= 6/1 \ 1 \end{aligned}$$

また、 $a = 2$ 、 $b = 2$ 、 $c = 1$  1 の場合、  
$$\begin{aligned} 1/2 + 1/2 \times 1/1 \ 1 &= 1 \ 1/2 \ 2 + 1/2 \ 2 \\ &= 1 \ 2/2 \ 2 \\ &= 6/1 \ 1 \end{aligned}$$

とどちらも与式を満たします。

このように整数の不定方程式の問題では、多くの場合、1つの変数の候補を有限個に絞ることができれば、あとは場合分けで解くことができます。その変数の絞り込みかたはいくつかのパターンがありますが、本間の絞り込みかたは代表的なパターンなので覚えておくとい良いでしょう。

---

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校

<http://caitakiyama.jimdo.com/>

TEL 042-472-5533