中学生でも解ける東大大学院入試問題（２９）

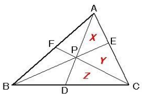
2014-11-02 12:30:19

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

天気図を見ると日本列島の周りに３つほど低気圧があり、おまけに台風２０号が北上していて悪天候になりそうですが、ここ暫くは雨は降らないようです。天気予報も複雑です。

さて、今回は平成２３年東大大学院工学系研究科システム創成学入試問題で、図形に関するものです。

問題は、
「図に示すように、△ＡＢＣの内部に１点Ｐをとり、ＡＰの延長とＢＣの交点をＤとし、ＢＰの延長とＣＡの交点をＥとし、ＣＰの延長とＡＢの交点をＦとする。△ＡＰＥ、△ＥＰＣ、△ＣＰＤの面積を、それぞれＸ、Ｙ、Ｚとするとき、△ＡＢＣの面積をＸ、Ｙ、Ｚを用いて表せ。」

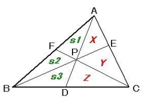


▲問題図

です。

この問題を見て「チエバの定理」を思い起こした人はかなり図形好きですね。「チエバの定理」は、問題図の三角形で、
ＢＤ/ＤＣ・ＣＥ/ＥＡ・ＡＦ/ＦＢ＝１
が成り立つというものです。覚えやすい式なので頭に入れておいても損はないでしょう。

しかし、この「チエバの定理」を知らなくても心配には及びません。図１に示すように△ＡＦＰ、△ＢＦＰ、△ＢＤＰの面積をそれぞれｓ1、ｓ2、ｓ3として立式する方針で正解できます。



▲図１． ｓ1、ｓ2、ｓ3を置く

まず、△ＡＢＣの面積をＳとすると、
Ｓ＝Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＋ｓ1＋ｓ2＋ｓ3　　　（１）
となります。

一方、
　Ｘ：Ｙ＝（ｓ1＋ｓ2）：（Ｚ＋ｓ3）　　　（２）
Ｚ：ｓ3＝（Ｘ＋Ｙ）：（ｓ1＋ｓ2）　　　（３）
ｓ1：ｓ2＝（Ｘ＋Ｙ）：（Ｚ＋ｓ3）　　　（４）
が成り立ち、（２）（３）（４）からｓ1、ｓ2、ｓ3を求めて、（１）に代入すればお仕舞いです。

計算しやすいように、（２）（３）（４）を分数で表すと、
Ｘ/Ｙ＝（ｓ1＋ｓ2）/（Ｚ＋ｓ3）　　　（５）
Ｚ/ｓ3＝（Ｘ＋Ｙ）/（ｓ1＋ｓ2）　　　（６）
ｓ1/ｓ2＝（Ｘ＋Ｙ）/（Ｚ＋ｓ3）　　　（７）
となり、（５）と（６）の両辺を掛けると、
Ｘ/Ｙ・Ｚ/ｓ3＝（ｓ1＋ｓ2）/（Ｚ＋ｓ3）・（Ｘ＋Ｙ）/（ｓ1＋ｓ2）
ＸＺ/（Ｙｓ3）＝（Ｘ＋Ｙ）/（Ｚ＋ｓ3）
とｓ3をＸ、Ｙ、Ｚで表すことができそうです。

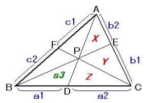
続けると、
ＸＺ（Ｚ＋ｓ3）＝（Ｘ＋Ｙ）Ｙｓ3
（Ｙ（Ｘ＋Ｙ）－ＸＺ）ｓ3＝ＸＺ^2
ｓ3＝ＸＺ^2/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2)　　　（８）
となりました。

次に、（５）を変形して、
ｓ1＋ｓ2＝Ｘ/Ｙ・（Ｚ＋ｓ3）
ｓ1＋ｓ2＋ｓ3＝Ｘ/Ｙ・（Ｚ＋ｓ3）＋ｓ3
　　　　　　＝ＸＺ/Ｙ＋（Ｘ/Ｙ＋１）ｓ3
　　　　　　＝ＸＺ/Ｙ＋（Ｘ＋Ｙ）/Ｙ・ｓ3　　　（９）
として、（９）に（８）を代入します。

ｓ1＋ｓ2＋ｓ3＝ＸＺ/Ｙ＋（Ｘ＋Ｙ）/Ｙ・ＸＺ^2/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2）
＝ＸＺ/Ｙ・（１＋（Ｘ＋Ｙ）・Ｚ/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2）
＝ＸＺ/Ｙ・（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2＋（Ｘ＋Ｙ）Ｚ）/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2）
＝ＸＺ/Ｙ・Ｙ（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2）
＝ＸＺ（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2)　　　　（１０）
と少し綺麗な式になりました。

最後に、（１０）を（１）に代入して、
Ｓ＝Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＋ＸＺ（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2）
＝（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）（１＋ＸＺ/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2）
＝（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2＋ＸＺ）/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2）
＝（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）（Ｘ＋Ｙ）Ｙ/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2)
と正解に辿りつきました。

先ほど紹介した「チエバの定理」を使ってもそれほど楽になるというわけではないのですが、それもやってみましょう。簡単にするために線分の長さを図２のように置きます。



▲図２．「チエバの定理」を利用した解

「チエバの定理」より、
ａ1/ａ2・ｂ1/ｂ2・ｃ1/ｃ2＝１　　　　（１１）

ここで、ｂ1/ｂ2＝Ｙ/Ｘなので、（１１）は、
ａ1/ａ2・ｃ1/ｃ2＝Ｘ/Ｙ　　　　（１２）

ここで、Ａ＝ａ1/ａ2、Ｃ＝ｃ1/ｃ2とすると、（１２）は、
ＡＣ＝Ｘ/Ｙ　　　　（１３）

一方、△ＡＢＣの面積をＳとすると、
Ｓ＝（ａ1＋ａ2）/ａ2・（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）
＝ａ1/ａ2・（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）＋Ｘ＋Ｙ＋Ｚ
＝（Ａ＋１）（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）　　　　（１４）
となり、つまりＡをＸ、Ｙ、Ｚで表せばＯＫとなります。

そこで、△ＢＤＰの面積をｓ3と置くと、
ａ1/ａ2＝Ａ
＝ｓ3/Ｚ　　　　（１５）
ｃ1/ｃ2＝Ｃ
＝（Ｘ＋Ｙ）/（Ｚ＋ｓ3)　　　　（１６）

（１３）からＣ＝Ｘ/ＡＹ、（１５）からｓ3＝ＡＺを（１６）に代入して、
Ｘ/ＡＹ＝（Ｘ＋Ｙ）/（Ｚ（１＋Ａ））

これをＡについて整理して、
Ａ（（Ｘ＋Ｙ）Ｙ－ＸＺ）＝ＸＺ
Ａ＝ＸＺ/（（Ｘ＋Ｙ）Ｙ－ＸＺ）　　　　（１７）
とＡをＸ、Ｙ、Ｚで表すことができました。

最後に（１７）を（１４）に代入して、
Ｓ＝（ＸＺ/（（Ｘ＋Ｙ）Ｙ－ＸＺ）＋１）・（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）
＝（ＸＺ＋（Ｘ＋Ｙ）Ｙ－ＸＺ）/（（Ｘ＋Ｙ）Ｙ－ＸＺ）・（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）
＝（Ｘ＋Ｙ＋Ｚ）（Ｘ＋Ｙ）Ｙ/（ＸＹ－ＸＺ＋Ｙ^2)
と前の答えと同じになりました。

シンプルな問題の割りに結構面倒な計算でしたが、もっと簡単に解く方法があるのかもしれません。興味があれば調べてみてください。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533