

中学生でも解ける東大大学院入試問題（１５９）

2015-04-03 09:37:52

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

昨日の日中は少し風が吹いて桜の花びらが舞っていたのですが、今朝は風もなく立派に咲き誇っていました。もうしばらく楽しめそうです。

さて、今回は平成２１年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「 P と Q を以下のように決める。 P と Q は収束するものとする。

$$P = \sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + \cdots}}}}$$

$$Q = a + \frac{2}{a + \frac{2}{a + \frac{2}{\ddots}}}$$

$P = Q$ となるとき、 a の値を求めよ。ただし、 $a > 0$ とする。」
です。

昨日と同じような連続する根号と連分数の問題です。

まず、昨日と同様に、

$$P = \sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + \cdots}}}}$$

すると、

$$P^2 = 2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + \cdots}}}}$$

を得ますが、嬉しいことに、右辺の第２項目が P になっているので、

$$P^2 = 2 + 3P$$

とすることができます。

そして、これを整理して、

$$P^2 - 3P - 2 = 0 \quad (1)$$

を得ることができます。

次に Q ですが、

$$Q = a + \frac{2}{a + \frac{2}{a + \frac{2}{a + \frac{2}{\ddots}}}}$$

をよく見ると、右辺の第２項目の分母が Q になっているので、

$$Q = a + \frac{2}{Q}$$

とすることができます。

そして、これを整理して、

$$Q^2 - aQ - 2 = 0 \quad (2)$$

を得ることができます。

ここで、 $P = Q$ なので、(１)と(２)を比較して、 $a = 3$ となり、これが答えです。

実際に解の公式を使って(１)を解くと、

$$P = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

になり、 $P > 0$ なので、

$$P = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

です。

これを(２)の Q に代入すると、

$$\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right) \cdot a - 2 = 0$$

となり、これから

$$a = 3$$

になります。

完成した $P = Q$ の等式は次のようになりますが、左辺は２と３が連続する根号のなかにあり、右辺は２と３が連続する分数のなかにある形になっています。美しくちょっと神秘的な感じがですね。

$$\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + \cdots}}}} = 3 + \frac{2}{3 + \frac{2}{3 + \frac{2}{\ddots}}}$$

連分数や連続した根号の式には、いろいろ面白い性質があるので、興味のある人は調べてみて下さい。

[東久留米の学習塾](http://caitakiyama.jimdo.com/) 学研CAIスクール 東久留米滝山校
<http://caitakiyama.jimdo.com/>
TEL 042-472-5533