中学生でも解ける東大大学院入試問題(167)

2015-04-11 13:09:33

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

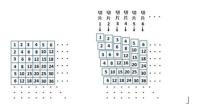
午前中は小雨が降っていましたが、昼過ぎには雨は上がって段々晴れてきました。明日も晴れで少し暖かくなるようです。

さて、今回は平成24年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、

「まず下図左のように整数を並べ、その後、下図右のように左上から切片に分割していくことを考える。すると、切片 n に書かれている数の和は n^3 になる。

一方、1 からnまでn個の整数の三乗の和は、 Σ [k=l \rightarrow n] k ^3 = a n + b n ^2 + c n ^3 + d n ^4 で表される。図を利用して、a、b、c、d を求めよ。



です。

1からnまでの整数の三乗の和は、

 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 1/4 \cdot n^2 (n+1)^2$

なので、右辺を展開して問題の式と係数を比較すれば、 α 、b、c、d を求めることができますが、ここでは問題に書かれている図を利用して、 α 、b、c、d を求めよということですので、それに従いましょう。

問題のなかに、右図のように左図を切片に分割すると、切片 n に書かれている数の和は n^3 になるとあるので、三乗の和は左図のすべての数の和となります。つまり、左図のすべての数の和を計算すればよいということです。

そこで、左図の1、2、3、・・・、n行目を順番に調べていくと、

```
1行目: 1+2+3+\cdot\cdot\cdot+n = 1/2\cdot n (n+1) 2行目: 2+4+6+\cdot\cdot\cdot+2 n = 2(1+2+3+\cdot\cdot\cdot+n)=2\cdot1/2\cdot n (n+1) = 3(1+2+3+\cdot\cdot\cdot+n)=3\cdot1/2\cdot n (n+1)
```

n 行目: n + 2 n + 3 n + ・・・+ n ・ n = n (1 + 2 + 3 + ・・・+ n) = n ・ 1/2 ・ n (n + 1) となります。

続いて、上の各式の右辺を和を作ると、

```
\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + 2 \cdot 1/2 \cdot n \cdot (n+1) + 3 \cdot 1/2 \cdot n \cdot (n+1) + \cdots + n \cdot 1/2 \cdot n \cdot (n+1)
= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (1+2+3+\cdots+n)
```

 $= 1/2 \cdot n (n+1) \cdot 1/2 \cdot n (n+1)$

 $= 1/4 \cdot (n^4 + 2 n^3 + n^2)$

 $= 1/4 \cdot n^4 + 1/2 \cdot n^2 + 1/4 \cdot n^2$

となり、これが 1 から n までの整数の三乗の和になるので、 $\alpha=0$ 、 b=1/4 、 c=1/2 、 d=1/4 で、これが答えになります。

自然数の累乗の和については、一乗和 1/2・n (n+1) と二乗和 1/6・n (n+1) (2 n+1) は覚えている人 (高校生) が多いと思います。、三乗和の (1/2・n (n+1) 2 は、一乗和の二乗で簡単なので、ついでに覚えておくと良いでしょう。

ところが、四乗和となると、1/3 0・n (n+1) (2 n+1) (3 n^2+3 n-1) と途中まで二乗和に似ているのですが最後の(3 n^2+3 n-1) が厄介で、ここは導出方法を頭に入れておけば良いと思います。

その導出方法は簡単で、例えば四乗和を求める場合、(k+1) ^5- k ^5=5 k ^4+10 k ^3+10 k ^2+5 k +1 に、k=1、2、3、・・・、nを代入して辺々を加えて導きます。興味のある人は計算してみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校

http://caitakiyama.jimdo.com/

TEL 042-472-5533