中学生でも解ける東大大学院入試問題（３０）

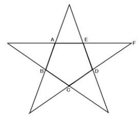
2014-11-04 12:46:30

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

風が少しありますが、晴れていて日向は暖かい日になりました。どうやら台風２０号は南の海上を北東に抜けていくようでひと安心ですが、台風が近づきそうな地域の方は十分注意してください。

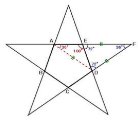
さて、今回は平成２３年東大大学院工学系研究科システム創成学入試の正五角形についての問題を取り上げます。

問題は、
「図に示すように、一辺の長さ１の正五角形ＡＢＣＤＥの各辺を延長して作った星型がある。直線ＡＥとＣＤの交点をＦとするとき、線分ＥＦの長さを求めよ。」



▲問題図

理系東大大学院受験者であれば一辺の長さが１の正五角形の対角線の長さが、（１＋√５）/２になることは知っていて、すぐさま解答欄にそれを書き込んだと思いますが、ここでは少し詳しく調べてみましょう。



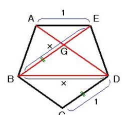
▲図１．線分ＥＦが対角線の長さになる理由

図１に示すように、△ＥＦＤにおいて、∠ＦＥＤ＝∠ＦＤＥ＝７２°なので、△ＥＦＤはは二等辺三角形で、
頂角∠ＤＦＥ＝３６°　　（１）
ＥＦ＝ＤＦ　　　　　　　（２）
となります。

一方、△ＥＡＤにおいて、ＥＡ＝ＥＤ（正五角形の一辺）なので、△ＥＡＤも二等辺三角形で、その頂角は正五角形の内角なので１０８°、したがって
底角∠ＤＡＥ＝３６°　　（３）
になります。

すると、△ＤＡＦにおいて（１）（３）から、∠ＤＦＡ（∠ＤＦＥ）＝∠ＤＡＦ（∠ＤＡＥ）＝３６°なので、△ＤＡＦは二等辺三角形になります。したがって、
ＤＡ＝ＤＦ　　　　　　　（４）
となり、（２）（３）からＥＦ＝ＤＡ、つまりＥＦの長さが正五角形の対角線の長さに等しいことが判りました。

次に一辺の長さが１の正五角形の対角線の長さを求めます。



▲図２．一辺の長さ１の正五角形の対角線の長さ

図２のようにＡＤ、ＢＥおよびＢＤに補助線を引き、対角線の長さをｘとします。すると、
ＢＥ＝ＢＤ＝ｘ　　　　（５）

また、四角形ＢＣＤＧは平行四辺形なので、
ＢＧ＝１　　　　　　　（６）

△ＧＡＣ∽△ＧＤＢなので、
ＡＥ：ＧＥ＝ＢＤ：ＧＢ
より、
ＧＥ・ＢＤ＝ＡＥ・ＧＢ　　（７）

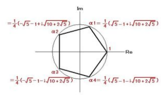
ここで、（５）（６）から、ＧＥ＝ＢＥ－ＢＧ＝ｘ－１、ＢＤ＝ｘ、ＡＥ＝１、ＧＢ＝１を（７）に代入して、
（ｘ－１）ｘ＝１
これを整理して、

$x^2-x-1=0$　　　　　　（８）　（ｘ^2　はｘの２乗を表します）

（８）を解の公式で解くと、
$x=(1\pm\sqrt{5})/2$

$x>0$ なので、
$x=(1+\sqrt{5})/2$
と対角線の長さが、$(1+\sqrt{5})/2$　と計算できました。

次に円分方程式を使った方法を調べてみましょう。複素数の領域では、１のｎ乗根がｎ個存在し、単位円に内接する正ｎ角形の頂点によって表されます。例えば、正五角形の場合、図３のように単位円の周上に頂点が存在し、これらが１の５乗根に対応しているということです。



▲図３．正五角形と１の５乗根

そこで１の５乗根を満たす方程式を立式し、この根を求めることにより、正五角形の対角線の長さを求めてみましょう。

まず、１の５乗根を満たす方程式は、
$x^5=1$
$x^5-1=0$　　　　（９）
です。

これを因数分解すると、
$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$　　（１０）
となります。

（１０）の左辺の１番目の因数 $x-1=0$ が、図３の一番右側の頂点に対応します。また、２番目の因数 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$　を円分方程式と呼び、この４次方程式の根が正五角形の一番右側の頂点以外の４つの頂点に対応します。

では、円分方程式
$x^4+x^3+x^2+x+1=0$　　　　（１１）
を解きましょう。

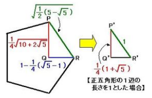
この４次方程式は相反方程式といって、$x\neq 0$ なので、x^2 で除することにより、２次方程式に変換できます。早速、（１１）を x^2 で割ると、
$x^2+x+1+1/x+1/x^2=0$　　（１２）

ここで、
$t=x+1/x$　　　　　　　　（１３）
と置くと、（１２）は、
$t^2+t-1=0$　　　　　　　（１４）
となります。

（１４）を解の公式で解くと、
$t=(-1\pm\sqrt{5})/2$　　　　　（１５）
となり、（１５）を（１３）に戻すと、
$x^2-1/2(-1+\sqrt{5})x+1=0$　　　（１６）
$x^2+1/2(1+\sqrt{5})x+1=0$　　　（１７）
の２つの２次方程式を得ます。

これらの（１６）（１７）を解の公式で解くと、
$x=1/4(\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})$
$1/4(-\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{(10-2\sqrt{5})})$
と４つの根を求めることができました。これらを複素平面上に表したものが図３になります。

図３の複素平面では、例えば、$\alpha 1=1/4(\sqrt{5}-1+i\sqrt{(10+2\sqrt{5})})$ の場合、Ｒｅ軸（実軸）の値が、$1/4(\sqrt{5}-1)$ になり、Ｉｍ軸（虚軸）の値が、$1/4\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$ になります。そこで、図４のように正五角形なかの△ＰＱＲを考えます。



▲図４．正五角形の一辺を斜辺にもつ三角形

正五角形の各頂点は単位円上にあるので、ＱＰとＱＲの長さは、
ＱＰ＝1/4√（１０＋２√５）　　（１８）
ＱＲ＝1-　1/4（√5-　1）　　（１９）
となり、△ＰＱＲは直角三角形なので、三平方の定理により、
ＰＲ^2＝ＱＰ^2＋ＱＲ^2（２０）
が成り立ちます。

（１８）（１９）を（２０）に代入して、
ＰＲ^2＝1/2（5-√5）
ＰＲ＝√（1/2（5-√5）　　（２１）
と計算できます。

最後に、△ＰＱＲと相似でＰ’Ｒ’＝１（正五角形の一辺に対応します）となる△Ｐ’Ｑ’Ｒ’を考えて、Ｐ’Ｑ’の長さを求めれば、それは一辺の長さ１の正五角形の対角線の長さの1/2になります。それでは、比例式をつくると、
ＰＲ：Ｐ’Ｒ’＝ＰＱ：Ｐ’Ｑ’　　（２２）

（１８）（２１）、Ｐ’Ｒ’＝１を（２２）に代入して、
Ｐ’Ｑ’＝1/4（１＋√５）
となります。

そして、Ｐ’Ｑ’の長さは、一辺１の正五角形の対角線の長さの1/2なので、正五角形の対角線の長さは、1/2（１＋√５）と計算できました。

図形で求める方法と比べて円分方程式の方法は複素数がでてきて難しく感じるかもしれませんが、いろいろ面白い分野なので興味があれば勉強してみてください。

学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533