中学生でも解ける東大大学院入試問題（６１）

2014-12-14 11:07:12

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

気温が４℃と日向にいても寒く感じます。明後日は雨模様で少し暖かくなるようですが、これから寒さが厳しくなっていきます。特に受験生は風邪など引かぬよう気を付けてください。外出するときは、マスクを着用するのも良いかもしれません。また、手洗いの欠かさずに。

帰宅途中、はなみずき広場によって、「東京花祭り」を見物しました。夜７時頃でしたが、多くの観客がいて賑わっていました。

▲東京花祭り

さて、今回は平成２２年度東大大学院工学系研究科システム創成学の入試問題です。

問題は、
「今日は８月３１日である。日付の数字を連続させて正の整数をつくると、８３１となる。

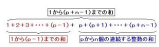
（１）８３１を２個以上の連続する正の整数の和として表す方法は何通りあるか。

（２）２個以上の連続する正の整数の和として表すことのできない数字をつくる日は１年に何日あるか。ただし、ない場合は０（ゼロ）日とせよ。なお、１月１日は１１を、２月１０日は２１０を、１０月１日は１０１をつくる。たとえば、１２３をつくる日付は１月２３日と１２月３日の２日あることに注意せよ。」

攻略のポイントが判り難い問題ですが、（１）については、取り敢えず、「２個以上の連続する正の整数の和」を立式しましょう。

そこで、連続する整数列の最小の整数をｐ、２個以上をｎ個（ｎ≧２）とすれば、ｐとｎで２個以上の連続する整数の和を表すことができそうです。

そこで、図に示すような整数列を作ると、ｐから連続するｎ個の整数の和は、１から（ｐ＋ｎ－１）までの整数の和と、１から（ｐ－１）までの整数の和との差として求めることが判ります。（高校で数列を勉強すると公式で計算できるようになります）



▲図．正の整数ｐから連続するｎ個の整数の和

まず、１から（ｐ＋ｎ－１）までの整数の和をＳ１とすると、
Ｓ１＝１＋２＋・・・＋（ｐ＋ｎ－１）　　（１）
となります。

ここで（１）の右辺の各項の順番を入れ替えて、
Ｓ１＝（ｐ＋ｎ－１）＋（ｐ＋ｎ－２）＋・・・＋２＋１　　（２）
を作り、（１）の右辺の第１項目と（２）の右辺の第１項目、第２項目と第２項目、・・・と足すと、
２Ｓ１＝（ｐ＋ｎ）＋（ｐ＋ｎ）＋・・・＋（ｐ＋ｎ）　　（３）
となります。ここで、（３）の右辺の項数は、（ｐ＋ｎ－１）なので、（３）の右辺は、
（ｐ＋ｎ）（ｐ＋ｎ－１）
となり、したがって、
Ｓ１＝（ｐ＋ｎ）（ｐ＋ｎ－１）/２
とＳ１を求めることができました。

同様に、１から（ｐ－１）までの整数の和をＳ２とすると、
Ｓ２＝（ｐ－１）ｐ/２
となります。

したがって、ｐから連続するｎ個の整数の和Ｓは、
Ｓ＝Ｓ１－Ｓ２
　＝（ｐ＋ｎ）（ｐ＋ｎ－１）/２－（ｐ－１）ｐ/２
　＝ｎ（ｎ＋２ｐ－１）/２　　（４）
となります。

問題では、Ｓ＝８３１なので、これを（４）に代入すると、
８３１＝ｎ（ｎ＋２ｐ－１）/２

となり、両辺に２を掛けて、
１６６２＝ｎ（ｎ＋２ｐ－１）　　　（５）
と立式できます。そして、問題は（５）を満たすｎとｐの組合せが何通りあるかということになります。

それでは、（５）を満足するｎ、ｐの組合せを調べていきましょう。

ｎは、ｎ≧２の整数で、ｐは、ｐ≧１の整数なので、（ｎ＋２ｐ－１）は、３以上の整数になります。つまり、（５）の右辺は、整数×整数で、かつ、それらは１６６２の因数でなければならないということです。

そうなると、１６６２を素因数分解するのが常套手段で、それは、
１６６２＝２×３×２７７
となります。

ここで、（ｎ＋２ｐ－１）をｍとし、
ｍ×ｎ＝２×３×２７７
となるｍ、ｎの組合せ（ｍ、ｎ）を調べると、（１，１６６２）、（２，８３１）、（３，５５４）、（６，２７７）、（２７７，６）、（５５４，３）、（８３１，２）、（１６６２，１）の８通りになります。

さらにこれらの組合せのなかで、ｎ≧２、ｍ≧３　の条件を満たす組合せは、（３，５５４）、（６，２７７）、（２７７，６）、（５５４，３）、（８３１，２）の５通りになります。

最後に、上記の５つの組合せについて、ｎ、ｐが存在するかを調べましょう。

（３，５５４）の場合:
ｎ＋２ｐ－１＝３、ｎ＝５５４から、ｐ＝－２７５で不適。

（６，２７７）の場合:
ｎ＋２ｐ－１＝６、ｎ＝２７７から、ｐ＝－１３５で不適。

（２７７，６）の場合:
ｎ＋２ｐ－１＝２７７、ｎ＝６から、ｐ＝１３６でＯＫ。

（５５４，３）の場合:
ｎ＋２ｐ－１＝５５４、ｎ＝３から、ｐ＝２７６でＯＫ。

（８３１，２）の場合:
ｎ＋２ｐ－１＝８３１、ｎ＝２から、ｐ＝４１５でＯＫ。
となります。

したがって、問題の「８３１を２個以上の連続する正の整数の和として表す方法」は、３通りになります。

実際にそれらを作ってみると、
（１３６，１３７，１３８，１３９，１４０，１４１）
（２７６，２７７，２７８）
（４１５，４１６）
で、それぞれ和は８３１になります。

このような少し取っ付き難い問題は、変数の取り方をいろいろ試してみて条件を立式することを考えてみてください。

（２）は次回調べていきます。式（４）から攻略することになると思いますが、興味があれば考えてみてください。

東久留米の学習塾 学研CAIスクール 東久留米滝山校
http://caitakiyama.jimdo.com/
TEL 042-472-5533