

2018-04-13 14:15:26

こんにちは。東久留米市の学習塾塾長です。

今回は、平成30年度東大大学院新領域創成科学研究科環境学研究系海洋技術環境学の入試問題です。

問題は、

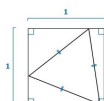
「1辺の長さが1の正方形に内接する正三角形を考える。

（1）上述の正三角形の面積が最大となる場合を図示せよ。

（2）最大となる面積を求めよ。」

です。

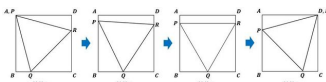
図1のように、問題の図を描きましょう。



▲図1．問題の図を描きました

図1の正方形に内接している正三角形の面積を最大にするということです。

そこで図2のように、正三角形の一つの頂点を、正方形の辺上に沿って少しずつ動かしてみましょう。



▲図2．正三角形の一つの頂点を正方形の辺上に沿って少しずつ動かしました

正方形の頂点をA、B、C、D、正三角形の頂点をP、Q、Rとします。

状態1はPがAと一致している場合、状態2はP A < R Dの場合、状態3はP A = R Dの場合、状態4はRがDと一致している状態で、この後同様な動きを繰り返します。

ここで、各状態での正三角形の辺の長さP Rに注目すると、

（状態1のP R）=（状態4のP R）>（状態2のP R）>（状態3のP R）= 1

で、つまり、状態1や4のように正三角形の一つの頂点が正方形の頂点と一致するとき、正三角形の面積は最大になります。

以上から、図3が答えです。



▲図3．（1）の答えです

続いて（2）です。

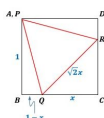
図4のようにQ C = x と置くと、

$$\begin{aligned} AQ^2 &= AB^2 + BQ^2 \\ &= 1^2 + (1-x)^2 \\ &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} QR^2 &= QC^2 + CR^2 \\ &= x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

になります。



▲図4．Q C = x と置きました

△P Q Rは正三角形なので、

$$AQ^2 = QR^2$$

ですから、

$$x^2 - 2x + 2 = 2x^2$$

が成り立ちます。

これを整理すると、

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

になり、これを解いて、

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

です。

ここで、

$$x \geq 0 \rightarrow x = \sqrt{3} - 1$$

から、

$$\begin{aligned} \text{(正三角形の最大面積)} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - 2\sqrt{3}) \\ &= 2\sqrt{3} - 3 \end{aligned}$$

で、これが答えです。

楽しい問題です。

学研CAIスクール 東久留米滝山校

<https://caitakiyama.jimdo.com/>