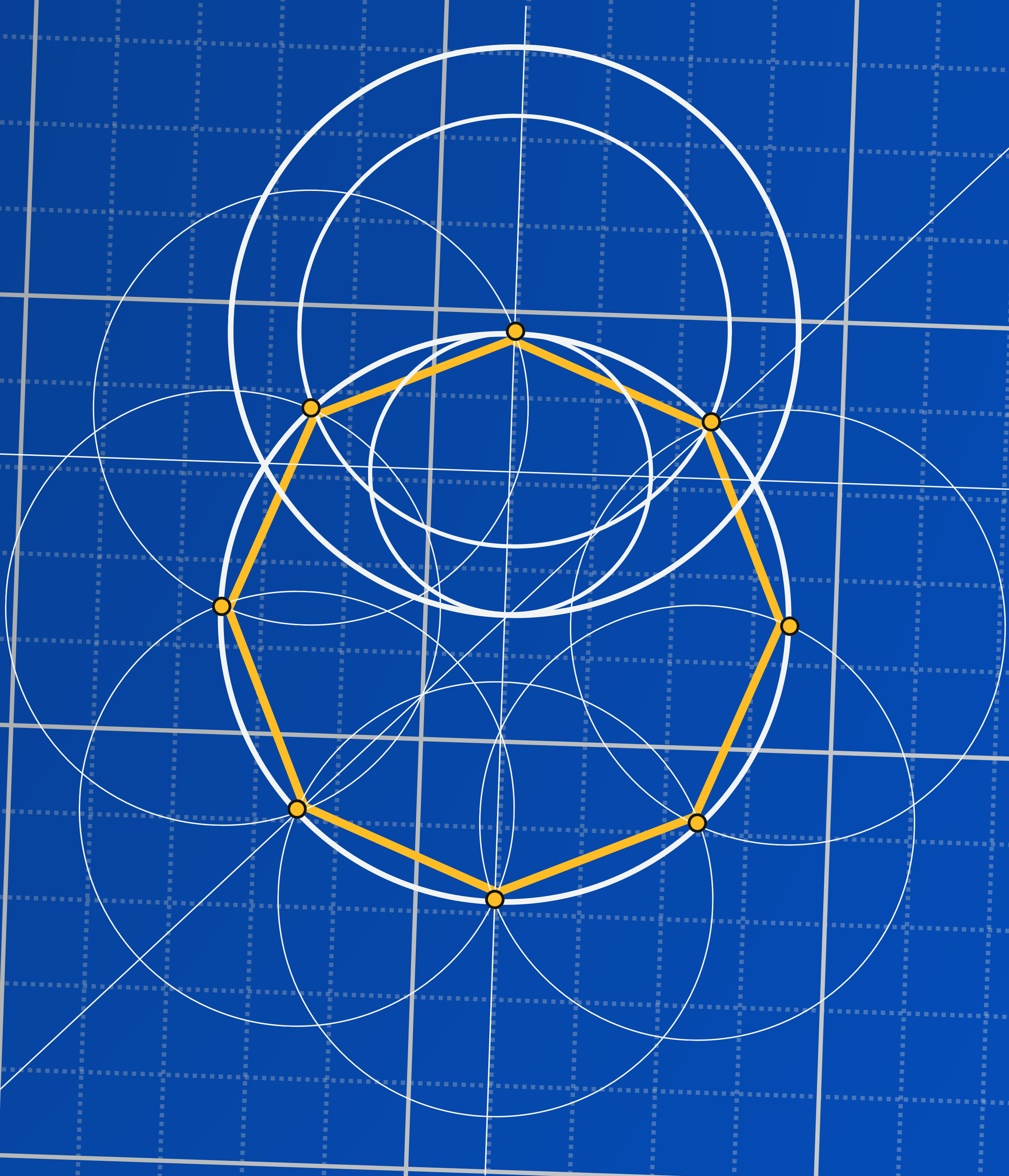


Matemática

e Construções para o 8º ano

EDITORA sen(o) SENTIDO

Uma teoria matemática não pode ser considerada completa até que você a torne tão clara que possa ser explicada para a primeira pessoa que encontrar na rua.

(David Hilbert, tradução dos autores)

EDITORA
sen(o)
SENTIDO

Matemática e Construções para o 8º ano

Disponível em: https://ime.unicamp.br/~speck/ma225/

Equipe Responsável

Douglas Felipe Speck (260138)
Giovana Falsarela Mantovani (260168)
João Vitor Bazeto da Silva (260198)
Kauan Sossi Cestarolli (238616)
Murilo Alberto Simião (246653)

Professor-Orientador

Giuliano Angelo Zugliani

Apresentação

Caro(a) aluno(a), seja bem vindo(a)! É uma alegria saber que este material poderá contribuir para seus estudos e aprofundamento no tema das Construções e Transformações Geométricas. Você terá contato com diferentes tipos de construções geométricas e será estimulado a (re)produzir suas próprias construções usando ferramentas matemáticas, como a régua, o compasso, o esquadro e o transferidor. Nas Transformações Geométricas, você será convidado a entender a Reflexão, Translação e Rotação, através de muitos exemplos e exercícios usando o plano cartesiano.

A fim de sanar dificuldades com conteúdos necessários para esse tema, foram criadas seções "Vamos relembrar", que podem ser lidas inicialmente e também utilizadas a qualquer momento para consulta. Os exercícios estão distribuídos em cada seção, de forma que você possa organizar seus estudos de forma satisfatória.

Este material foi escrito para a disciplina de Análise de Livros e Materiais Didáticos de Matemática (MA225), oferecida no 1° semestre de 2025 pelo Prof° Dr° Giuliano Angelo Zugliani. Recebemos, através de sorteio, o tema "Construções e Transformações Geométricas usando régua e compasso - 8° ano" e elencamos os tópicos conceituais e divisões estruturais (motivação, definição, exemplos e exercícios) que gostaríamos que o livro fosse composto. Depois, dividimos os tópicos conceituais em duas grandes áreas: Construções, que ficou sob a responsabilidade do Kauã e do Murilo, e Transformações, sob a responsabilidade do João e da Giovana. Toda a editoração foi organizada pelo Douglas.

Ao final do material você deverá ser capaz de:

- Construir, utilizando instrumento de desenho (EF08MA15): circunferências, triângulos, mediatrizes, retas paralelas, quadrados, trapézios, pentágonos e hexágonos (EF08MA16).
- Observar a construir simetrias, reflexões e rotações usando o plano cartesiano e instrumentos de desenho (EF08MA18).
- Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho (EF08MA18).

Aproveite seu material e, em caso de dúvidas, não hesite em conversar com um professor!

Com carinho,

Editora Sen(o) Sentido.

Conheça seu livro

Caro(a) aluno(a), seja bem vindo(a)! É uma alegria saber que este material poderá contribuir para seus estudos e aprofundamento no tema das Construções e Transformações Geométricas. Você terá contato com diferentes tipos de construções geométricas e será estimulado a (re)produzir suas próprias construções usando ferramentas matemáticas, como a régua, o compasso, o esquadro e o transferidor. Nas Transformações Geométricas, você será convidado a entender a Reflexão, Translação e Rotação, através de muitos exemplos e exercícios usando o plano cartesiano.

CONSTRUÇÃO

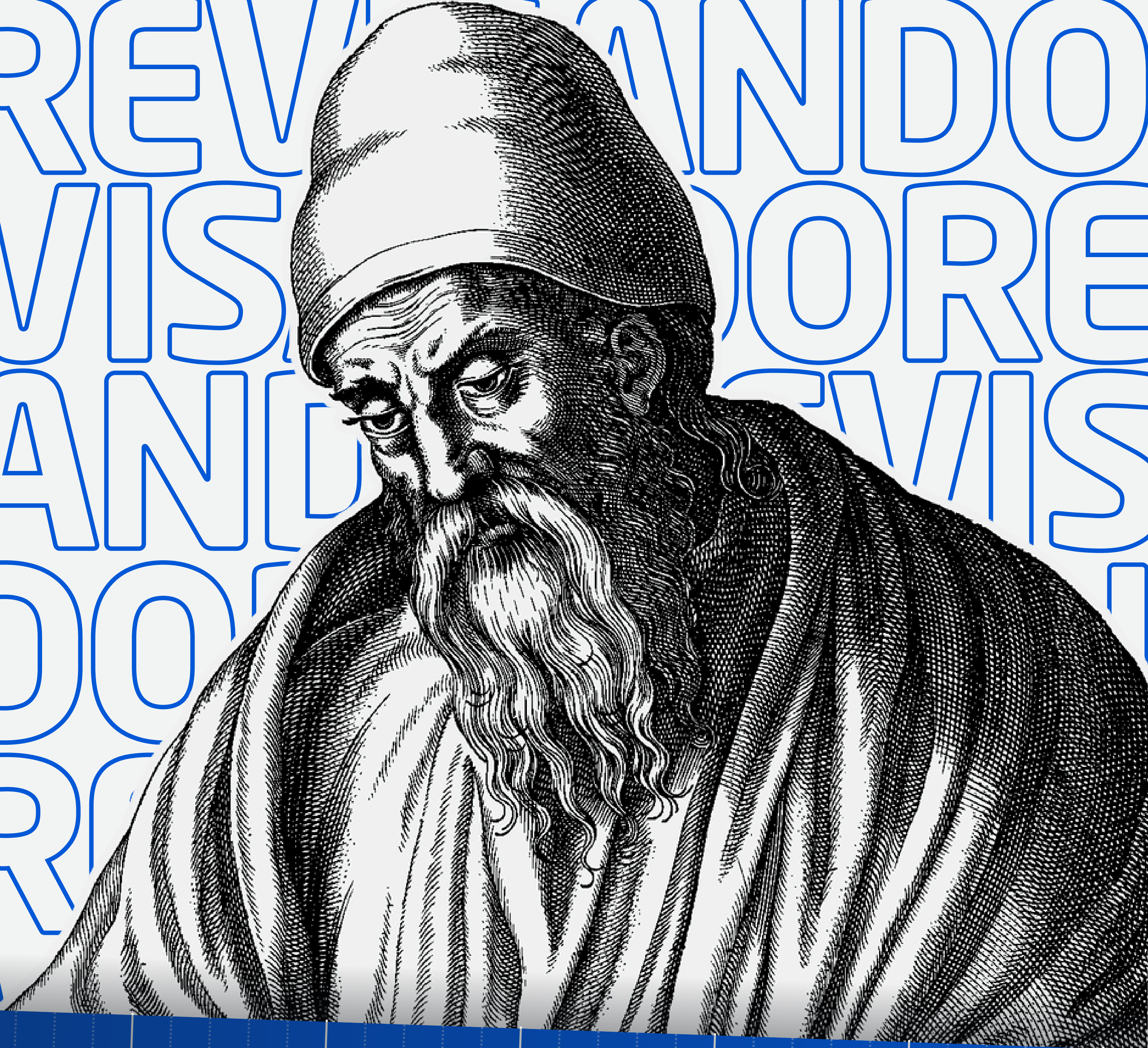
CURIOSIDADE

DEFINIÇÃO

EXERCÍCIO

OBSERVAÇÃO

Sumário



Entes Geométricos

Objetivos da Revisão:

1. Identificar e representar os Entes Geométricos Fundamentais: Ponto, Reta e Plano

2. Identificar e relacionar semirretas e segmentos de reta às suas retas diretrizes

3. Identificar, comparar, medir e classificar Ângulos

Entes Geométricos Fundamentais

Na Geometria, existem alguns conceitos que são tão básicos que não precisam (e nem podem) ser definidos. Eles são chamados de conceitos primitivos, ou entes geométricos fundamentais. Esses elementos não possuem definição. São eles: Ponto, Reta e Plano.

1. O Ponto

Neste momento, você pode imaginar o **ponto** como uma pequena marca, como aquela que aparece ao encostarmos levemente a ponta do lápis no papel, sem arrastar. Apesar de simples, o ponto é muito importante na Geometria, pois é a base para a construção de outros elementos, como retas e planos.

O ponto não possui nenhuma dimensão, isto é, não possui comprimento, largura nem altura. Para representar os pontos, usa-se pequenas bolinhas, nomeadas por letras maiúsculas do alfabeto, como **A**, **B**, **C**. Assim: ● **A**

2. A Linha

Você pode imaginar uma **linha** como o rastro deixado por um ponto em movimento. Pontos pertencentes a uma mesma linha são ditos **colineares**.

Quando se desenha uma linha, ela aparece como o caminho feito pelo lápis ao se mover sobre o papel, sem tirar a ponta da superfície.

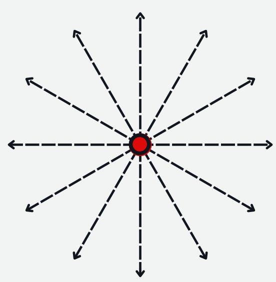
A linha possui apenas uma dimensão: o comprimento. Isso significa que ela não tem largura nem altura, apenas se estende em uma direção.

3. A Reta

A **reta** é uma linha infinita e contínua, que se estende sem fim em uma única direção. Ela é definida como a menor linha entre dois pontos. É comum nomear uma reta com uma letra minúscula do alfabeto, como **r**, **s** ou **t**, ou com dois de seus pontos entre parênteses, assim: **(AB)**

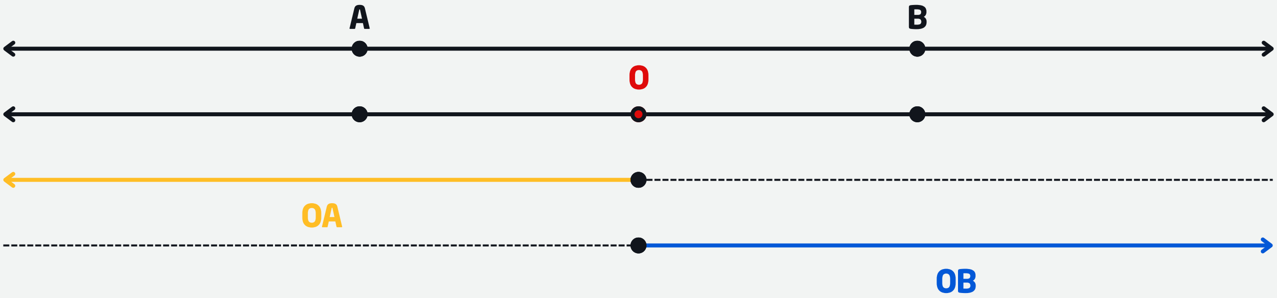
OBSERVAÇÃO

Quaisquer dois pontos distintos definem uma única reta.
Note, então, que por um único ponto, passam infinitas retas.



3.1. A Semirreta

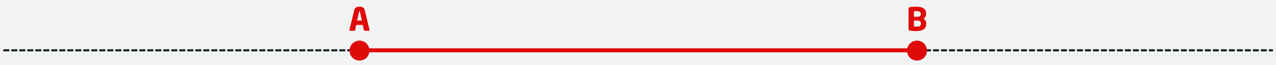
Toda reta pode ser dividida por um ponto, formando duas **semirretas**. Dessa forma, uma reta definida pelos pontos A e B pode ser dividida em um ponto O, entre A e B, formando as semirretas **[OA)** e **[OB)**, que são colineares entre si. A semirreta tem um ponto de origem e se estende infini-tamente em um único sentido.



3.2. O Segmento de Reta

O **segmento de reta** é uma parte de uma reta que é limitada por dois pontos, chamados de extremidades do segmento. O segmento é representado pelos nomes das suas extremidades. Por exemplo: o segmento **[AB]** é a parte da reta que começa no ponto A e termina no ponto B.

Diferente da reta e da semirreta, o segmento é finito e podemos medir seu comprimento. Dois segmentos são ditos congruentes se têm o mesmo comprimento. Por exemplo: **[AB] ≡ [CD]**.



Note que as extremidades do segmento também fazem parte do segmento.

A medida de um segmento **[AB]** é expressa por |**AB**|.

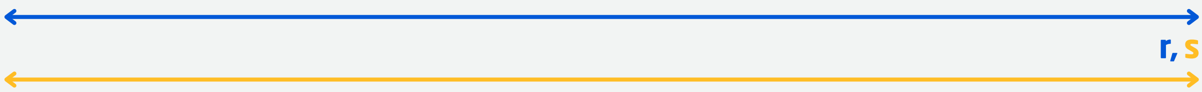
3.3. Posição relativa entre retas

Para duas retas quaisquer, define-se sua posição relativa com base no número de pontos que elas possuem em comum, isto é, com base no número de interseções entre as mesmas:

1. Se as retas se interceptam apenas uma vez, são chamadas de **concorrentes**.

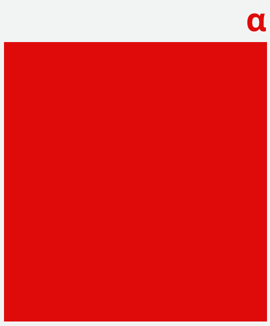
2. Se as retas se interceptam em todos os seus pontos, são chamadas de **coincidentes**.

3. Se as retas não têm pontos em comum, são chamadas de **paralelas**. Escreve-se **r // s**.



4. O Plano

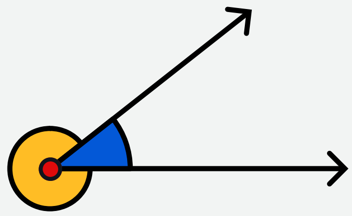
O plano é outro conceito primitivo da Geometria. Você pode imaginá-lo como uma grande folha de papel, lisa e sem ondulações, que se estende infinitamente em duas direções. Geralmente, planos são representados por retângulos e nomeados com uma letra do alfabeto grego (como α, β ou γ) para nomeá-lo.



Formas e Relações Fundamentais

A partir dos três entes fundamentais, é possível construir outros elementos igualmente importantes para a Geometria.

1. O Ângulo



O **ângulo** é a figura formada por duas semirretas que se originam de um mesmo ponto, que é chamado de **vértice** do ângulo. Note que um ângulo divide o plano em duas regiões, as quais são denominadas **interior** e **exterior** do ângulo.

O interior de um ângulo é a região formada pelos pontos que estão entre os pontos do ângulo. No caso de semirretas colineares, consideramos que:

1. se são coincidentes, então o interior é vazio e o exterior é congruente ao plano

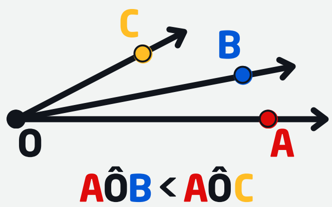
2. se não são coincidentes, então o interior e o exterior são congruentes e formam, cada um, um **semi-plano**, pois dividem o plano ao meio.

Analogamente, é possível chamar também de ângulo a **medida da abertura** entre as semirretas. É como dizer “ele bebeu três copos”, para se referir à medida de 3 copos.

Para representar um ângulo, usamos três letras maiúsculas. A letra do meio indica sempre o vértice do ângulo, a primeira letra representa um ponto da primeira semirreta e a terceira letra representa um ponto da segunda semirreta. Além disso, usamos o símbolo ∠ ou um acento circunflexo (^). Assim: **∠ABC** ou **AB̂C** ou ainda $\widehat{ABC}$.

1.1. Comparando ângulos

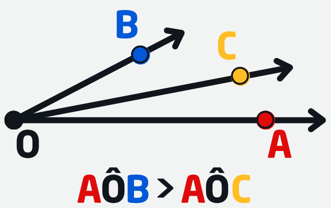
Os ângulos podem ser comparados sobrepondo seus vértices e uma de suas semirretas. Para dois ângulos AÔB e AÔC, dizemos que:

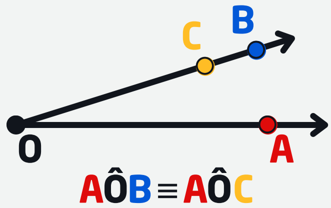


1. AÔB é menor que AÔC quando [OB) pertence ao interior de AÔC. Nesse caso, escrevemos AÔB < AÔC.

2. AÔB é maior que AÔC quando [OC) pertence ao interior de AÔB. Nesse caso, escrevemos AÔB > AÔC.

3. AÔB é congruente a AÔC quando B e C pertencem à mesma semirreta. Nesse caso, escrevemos AÔB ≡ AÔC.





1.2. Medindo ângulos

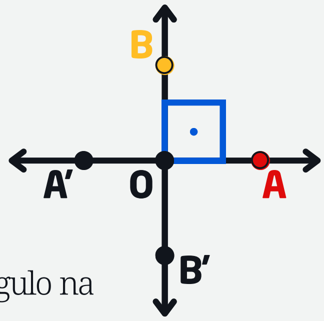
Há mais de uma forma de medir ângulos, mas todas elas utilizam como referência a ideia de **uma volta completa**. Na maioria das vezes, a unidade de medida é o **grau**. Convencionamos que uma volta completa equivale a 360º, portanto um grau equivale a $\frac{1}{360}$ de volta.

1.3. Classificando ângulos

Imagine duas retas concorrentes tais que os quatro ângulos formados pelas semirretas originadas de sua interseção são congruentes. As retas, nesse caso, são ditas perpendiculares e seus ângulos são chamados de ângulos retos.

DEFINIÇÃO

Um **ângulo reto** é o ângulo formado por retas perpendiculares e é correspondente a um quarto de volta ou 90º.



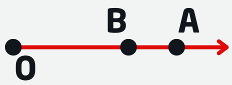
Note que na figura ao lado AÔB ≡ BÔA' ≡ A'ÔB' ≡ B'ÔA.

Para representar ângulos retos, usamos o símbolo ∟ e denotamos o ângulo na ilustração com um **quadrado marcado com um ponto**.

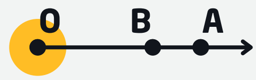
Também podemos escrever **(AA') ⊥ (BB')**, se (AA') é perpendicular a (BB').

A partir do ângulo reto, podemos definir os demais tipos de ângulo:

1. Dizemos que um ângulo é **nulo** quando suas semirretas são coincidentes (= 0º).



2. Dizemos que um ângulo é **pleno** quando suas semirretas coincidem após uma volta completa (= 360º).

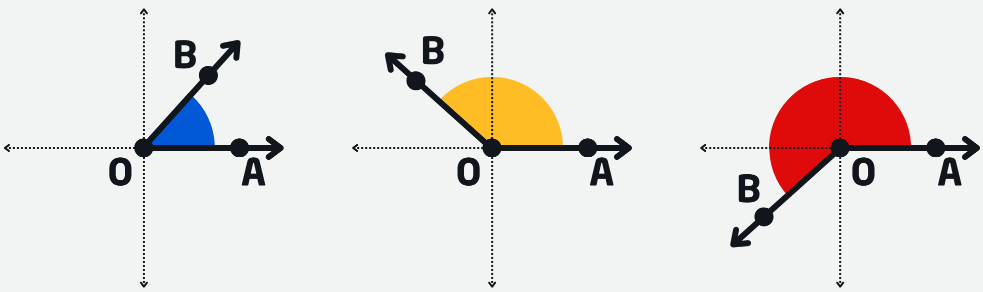


3. Dizemos que um ângulo é **raso** quando suas semirretas pertencem a uma mesma reta, mas não são coincidentes (= 180º). É congruente a dois ângulos retos.

4. Dizemos que um ângulo é **agudo** quando é menor que um ângulo reto (< 90º).

5. Dizemos que um ângulo é **obtuso** quando é maior que um ângulo reto (> 90º) e menor que um ângulo raso (< 180º).

6. Dizemos que um ângulo é **reentrante** quando é maior que um ângulo raso (> 180º) e menor que um ângulo pleno (< 360º).



OBSERVAÇÃO

Pela definição geométrica de ângulo, existem apenas ângulos de até meia-volta (nulos, agudos, retos, obtusos e rasos). Os demais são apenas uma extensão algébrica do conceito.

CAPÍTULO

um

construções com régua e compasso

Por que régua e compasso?

Você já parou para pensar como objetos do seu cotidiano, desde o design do seu celular até a arquitetura da sua escola, escondem segredos matemáticos milenares? Por trás de cada curva perfeita e ângulo preciso está uma história fascinante: a arte da construção geométrica com régua e compasso. Essa técnica, que parece simples, é a base de:

→ Design de produtos (como a tela do seu smartphone)

→ Arquitetura (dos estádios aos prédios contemporâneos)

→ Jogos e animações (onde cada pixel segue lógica geométrica)

→ Moda e arte urbana (nos padrões de tecidos e grafites)

Os antigos gregos usavam esses métodos para construir templos. Hoje, os mesmos princípios aparecem em tudo: do layout das redes sociais aos logotipos das marcas que você ama. E tudo começa com dois instrumentos básicos que cabem no seu estojo: a régua e o compasso; as ferramentas que transformam ideias abstratas em formas exatas. Hoje vamos aprender os primeiros passos dessa arte milenar e você vai poder construí-los nos seu próprio caderno.

CURIOSIDADE

Os antigos egípcios foram os pioneiros da geometria prática: eles usavam cordas com nós equidistantes e pedaços de osso como marcadores para medir terrenos após as cheias do Nilo. Esse método rudimentar, chamado "harpedonapta", permitia traçar ângulos precisos e auxiliou até mesmo na construção das pirâmides. A técnica era tão eficaz que até hoje usamos seu princípio básico em construções modernas.

1. A Régua

Você aprendeu que na geometria, há alguns elementos fundamentais. Em particular, viu que as retas compõem a maior parte das figuras planas que conheceu até aqui. A **régua** é uma ferramenta cuja principal função é traçar retas entre pontos.

Talvez, ao imaginar uma régua, a imagem que vem à sua mente é a da **régua graduada**, que possui marcações de medida de comprimento, normalmente em centímetros ou milímetros, permitindo que seja usada também para medir distâncias. No entanto, em sua origem a régua não possuía essas marcações, o que ainda a permite traçar retas, de forma que será explorada adiante nas construções.

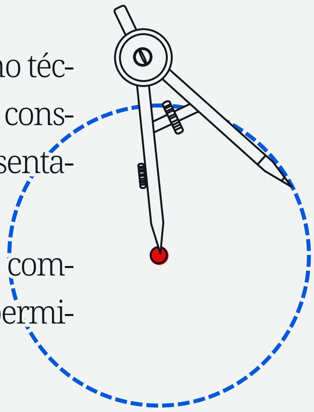
Ao longo deste material, você será introduzido a técnicas de construção geométrica que dependem exclusivamente de réguas não graduadas, portanto qualquer objeto reto será suficiente para realização das atividades.

2. O Compasso

Um **compasso** é um instrumento de desenho que traça uma linha mantendo uma distância fixa em relação a um ponto. Ele é formado por duas hastes articuladas: uma delas termina em uma

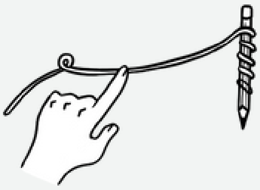
ponta seca (geralmente metálica), que serve para fixar o compasso em um ponto do papel, e a outra termina com uma ponta de grafite ou lápis, que faz o traço.

Para usar o compasso, a ponta seca é colocada sobre um ponto (digamos, um ponto **O**, de "Origem") e a outra haste é aberta até a medida de comprimento desejada. Girando a haste com o lápis ao redor do ponto fixo, forma-se uma **curva** na qual todos os pontos estão à mesma distância do ponto de origem.



O compasso é muito utilizado na geometria plana, mas também no desenho técnico (da arquitetura e engenharias, por exemplo) e em artes, pois permite construções precisas, medições e replicação de distâncias, conforme será apresentado mais à frente.

Perceba que, apesar de as construções deste material indicarem o uso de compasso, as atividades podem ser realizadas com qualquer ferramenta que permita traçar uma linha equidistante a um ponto. Alguns exemplos são:



compasso de cadarço e lápis

compasso de elásticos e canetas

3. Outras Ferramentas

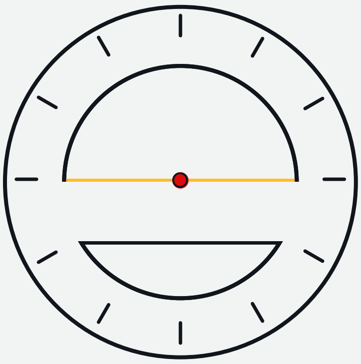
Ao longo deste material, você será introduzido a técnicas de construção geométrica que dependem exclusivamente de régua e compasso, de forma que, mesmo com recursos muito simples, é possível desenvolver todas as atividades. No entanto, há outras ferramentas amplamente utilizadas e que podem ser convenientes nas construções.

3.1. Transferidor

O **transferidor** é, tal como a régua graduada, um instrumento de medição. Da mesma forma que a régua mede o comprimento de segmentos, o transferidor mede a abertura de ângulos.

Geralmente o transferidor possui um formato circular ou semi-circular (metade de um círculo), com uma escala graduada que vai de 0° a 360° ou de 0° a 180°, respectivamente.

O transferidor tem uma marca central, chamada de **ponto de origem**, que deve ser posicionada sobre o vértice do ângulo que deseja-se medir. O transferidor deve ser girado sobre o ponto de origem de forma que a **linha de fé** seja alinhada a uma das semirretas do ângulo (seja para medi-lo ou traçá-lo).



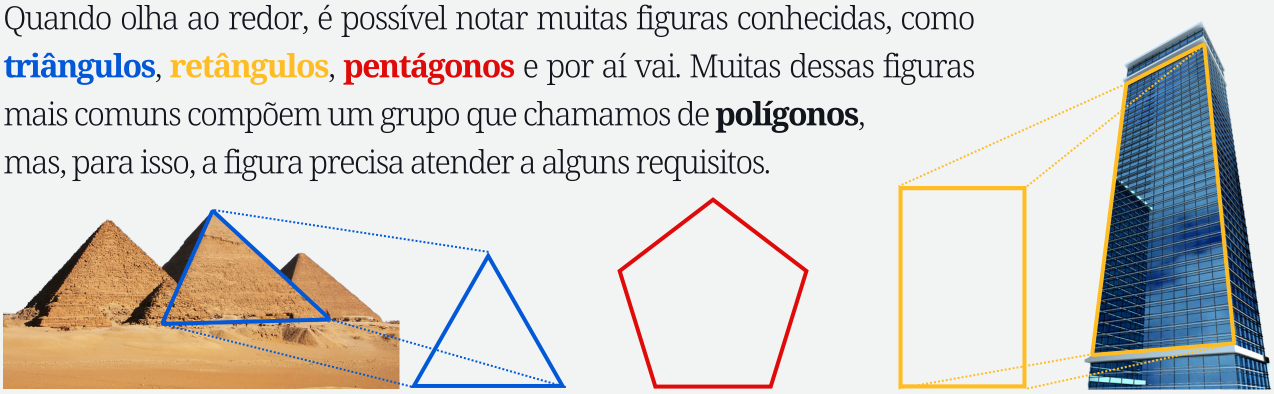
3.2. Esquadro

O **esquadro** é um instrumento de desenho e medição utilizado principalmente para traçar e verificar ângulos retos. São muito utilizados no desenho técnico, pois eliminam alguns passos de construção com régua e compasso, que serão discutidos em sequência.

Polígonos e outras formas geométricas

Você já reparou como as formas geométricas estão presentes em todos os aspectos do nosso dia a dia? Basta sair na rua para perceber: elas estão em uma simples placa de trânsito, nas fachadas dos prédios e até nos detalhes das calçadas. Das coisas mais comuns aos monumentos mais grandiosos, como a impressionante estrutura das pirâmides do Egito, as formas geométricas estão por toda parte, moldando o mundo ao nosso redor.

Quando olha ao redor, é possível notar muitas figuras conhecidas, como **triângulos**, **retângulos**, **pentágonos** e por aí vai. Muitas dessas figuras mais comuns compõem um grupo que chamamos de **polígonos**, mas, para isso, a figura precisa atender a alguns requisitos.



DEFINIÇÃO

Uma linha poligonal $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ é uma sequência finita de segmentos de reta consecutivos e não colineares, dois a dois.

As linhas poligonais (LP) podem ser classificadas de acordo com duas propriedades:

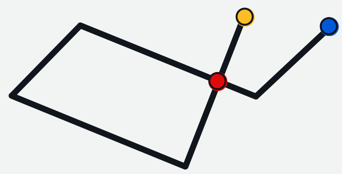
→ **fechadas**, se A_1 coincide com A_n ou **abertas**, do contrário.

→ **simples**, se a interseção de quaisquer dois segmentos não-consecutivos é vazia, ou **não-simples**, do contrário.

LP aberta e simples

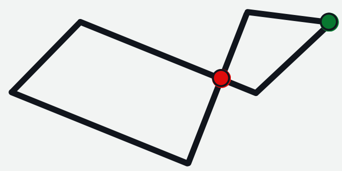
OBSERVAÇÃO

Uma forma de visualizar a segunda propriedade é que os segmentos das linhas poligonais simples nunca se cruzam.



LP aberta e não-simples

A partir da definição de linha poligonal, é possível definir formalmente o que são os chamados polígonos, tão importantes para a geometria.

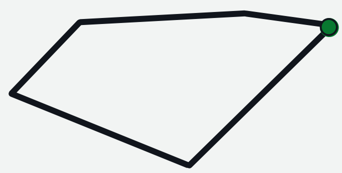


LP fechada e não-simples

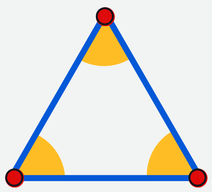
DEFINIÇÃO

Um **polígono** é uma linha poligonal fechada. O polígono divide o plano em duas regiões: interior e exterior. A união de um polígono com seu interior é chamada de **região poligonal**.

Polígonos são formados, portanto, por segmentos de reta e suas regiões poligonais são formadas por ângulos (especificamente, pela sobreposição de ângulos), mas possuem nomenclaturas específicas:



LP fechada e simples



Os segmentos que limitam o polígono são chamados de **arestas**. Suas extremidades, isto é, os pontos que conectam as arestas, são chamados de **vértices**.
Os ângulos formados pela extensão das arestas e que contêm a região poligonal são chamados de **ângulos internos**.

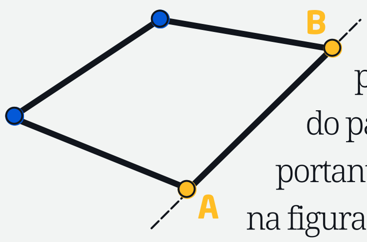
Nem toda figura geométrica é um polígono. Em particular, figuras que possuem curvas (ou seja, não são formadas apenas por segmentos de retas), não são polígonos. Por exemplo, um desenho de coração não é um polígono, mesmo que possua um "vértice".

Em alguns momentos, este material irá se referir a regiões poligonais como polígonos, visando simplificar a escrita. Note, por exemplo, que um polígono não possui área, mas sua região poligonal associada possui. Como cada polígono está associado a uma única região poligonal, é possível "extrapolar a notação" dessa forma.

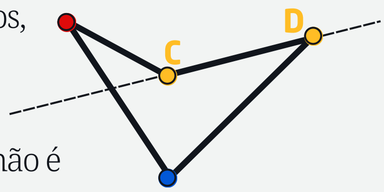
Classificando Polígonos

Você pode ter reparado que polígonos possuem sempre o mesmo número de arestas, vértices e ângulos. Esse número, que chamamos de **número de lados**, pode ser usado para classificar (e nomear) polígonos. Por exemplo: um polígono de 3 lados é um triângulo, um polígono de 4 lados é um quadrilátero e assim por diante.

Além do número de lados, um polígono pode ser classificado quanto à sua linha poligonal (simples ou não-simples) e quanto à sua região poligonal. Em relação à região poligonal, um polígono é dito **convexo** se, para toda reta determinada por dois de seus vértices consecutivos, todos os demais vértices estejam num mesmo lado da reta.



Por exemplo, na figura à esquerda, se tomar a reta **(AB)**, os demais pontos estão de um mesmo lado da reta. O mesmo pode ser observado para todos os pares de vértices consecutivos, portanto o polígono é convexo. Analogamente, na figura à direita, ao tomar a reta **(CD)**, os demais vértices ficam de lados diferentes da reta, portanto o polígono não é convexo. Quando não é convexo, o polígono é dito **côncavo**.



Polígonos também podem ser classificados quanto à sua congruência: um polígono é dito **equilátero** quando todas as suas arestas são congruentes; da mesma forma, é dito **equiângulo** se seus todos os seus ângulos são congruentes. Polígonos convexos, equiláteros e equiângulos são chamados de **polígonos regulares**.

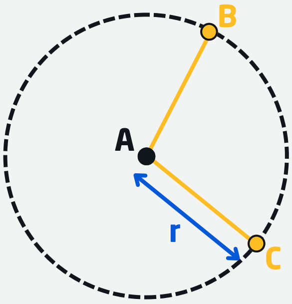
Círculo e Circunferência

Mesmo não sendo um polígono, há uma figura muito importante para a geometria e que será especialmente útil nas construções feitas adiante: a **Circunferência**.

DEFINIÇÃO

Sejam A um ponto e r um número positivo. Uma **circunferência de centro A e raio r** é a linha formada por todos os pontos cuja distância até o ponto A é igual a r. Nota-se $\circ_{(A,r)}$.

Perceba que o conceito de circunferência pode ser perfeitamente ilustrado com a utilização de um compasso: fixando a ponta seca sobre o ponto A, traça-se uma circunferência ao redor do mesmo.

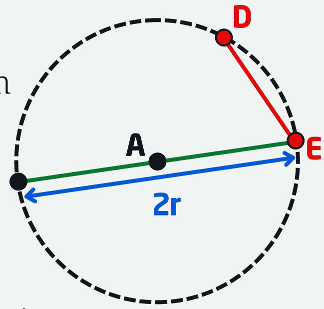


Sejam B e C pontos da circunferência de centro A e raio r. Os segmentos AB e AC são ditos raios da circunferência. Note que **[AB]** (que é um segmento) é **um raio**, enquanto a medida **r** (que é um número) é **o raio**.

Além disso, para pontos D e E da circunferência, o segmento **[DE]** é dito uma **corda**. Em particular, uma corda que passa pela origem da circunferência é dita **um diâmetro** e possui medida **2r** (que é **o diâmetro**).

Duas circunferências são ditas **concêntricas** se possuem o mesmo centro.

A região dos pontos que ficam a uma distância menor que o raio da origem é chamada de **interior** da circunferência. A união de uma circunferência e seu interior é chamada de **círculo** (ou disco).



Triângulos

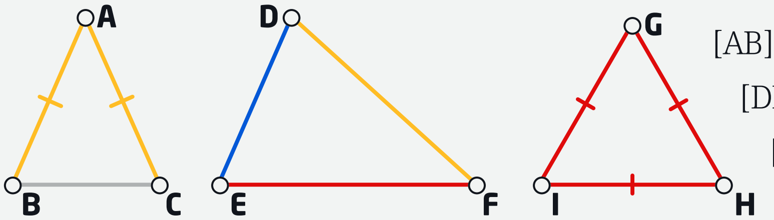
Com três pontos não-colineares, você pode traçar um triângulo, que será muito importante adiante. Perceba que todo triângulo é convexo, pois para cada dois pontos formando uma reta, há apenas um único ponto diferente (que certamente estará do mesmo lado da reta que ele próprio).

Triângulos podem ser classificados de acordo quanto às medidas de seus lados e ângulos. Quanto aos seus lados, avalia-se a congruência entre os mesmos:

→ Um triângulo é dito **isósceles** se, e somente se, possui um par de lados congruentes.

→ Um triângulo é dito **escaleno** se, e somente se, não é isósceles, isto é, se seus lados não são congruentes entre si.

→ Em particular, se um triângulo possui três lados congruentes, é chamado de **equilátero**.



$[AB] \equiv [AC]$

$[DE] \not\equiv [EF], [EF] \not\equiv [DF], [DF] \not\equiv [DE]$

$[GH] \equiv [HI] \equiv [GI]$

isósceles

escaleno

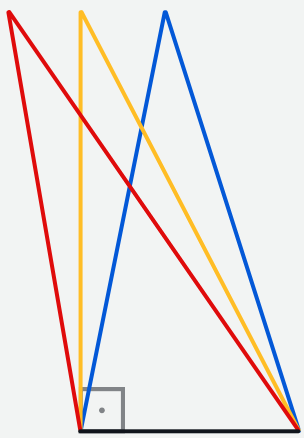
equilátero (logo, isósceles)

Quanto à medida de seus ângulos, avalia-se o ângulo de maior medida:

→ Um triângulo é dito **acutângulo** se seu maior ângulo interno é agudo.

→ Um triângulo é dito **retângulo** se seu maior ângulo interno é reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**, enquanto os demais lados são chamados de **catetos**.

→ Um triângulo é dito **obtusângulo** se seu maior ângulo interno é obtuso.



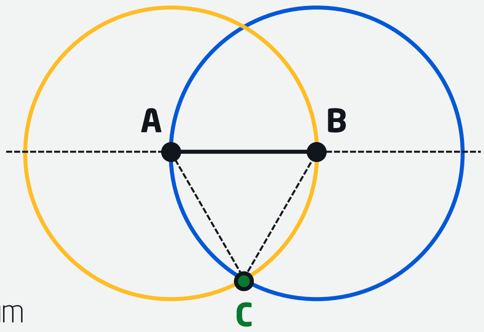
CONSTRUÇÃO 1: TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Você quer construir um triângulo equilátero de lado **m**. Sobre uma reta qualquer, delimite um segmento **[AB]** de comprimento **m**.

Trace a **circunferência** $\circ_{(B,m)}$.

Note que ela contém o ponto A.

Trace a **circunferência** $\circ_{(A,m)}$.



Marque o ponto **C** de interseção entre as circunferências. Note que **[AC]** é um raio de $\circ_{(A,m)}$, logo mede **m**. Analogamente, **[BC]** é um raio de $\circ_{(B,m)}$, logo mede **m**.

Veja que os pontos ABC não são colineares, portanto formam um triângulo . Como **[AB] ≡ [BC] ≡ [AC]**, o triângulo é equilátero. ∎

Partindo da construção de um triângulo equilátero, é possível realizar outras construções consideradas elementares. Você pode começar traçando algumas retas:

CONSTRUÇÃO 2: RETA PERPENDICULAR

Você quer construir a reta perpendicular a uma reta **r** que passa sobre um ponto **P**.

Trace uma **circunferência** de centro **P** e que intersecte **r**.

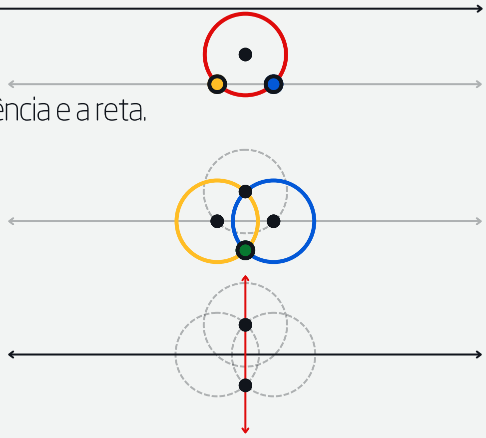
Marque as intersecções **A** e **B** que se formaram entre a circunferência e a reta.

Trace as circunferências $\circ_{(A,|AP|)}$ e $\circ_{(B,|BP|)}$.

Note que as circunferências se intersectam em **P**, além de um outro ponto **Q**. Trace a reta **(PQ)**.

É possível demonstrar que a reta **(PQ)** é perpendicular a **(AB) = r**, porém isso foge da proposta deste material, então, caso deseje, pode consultar o apêndice I.

Dessa forma, **(PQ) ⊥ (AB)**. ∎



Perceba que para que a construção funcione, é necessário que o ponto **P** esteja fora da reta. Caso **P** esteja sobre a reta, as circunferências $\circ_{(A,AP)}$ e $\circ_{(B,BP)}$ terão apenas um ponto em comum (que é **P**), de forma que não é possíver traçar uma reta (pois um ponto sozinho não define uma reta).

EXERCÍCIO

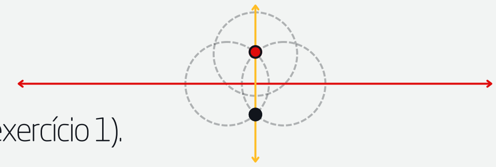
Construa a reta perpendicular a **r** que passa sobre um ponto **P** pertencente a **r**.

Sabendo construir retas perpendiculares, é possível construir, também, retas paralelas. Veja: é verdade que, em um plano, para toda reta **r** e todo ponto **P** fora dessa reta, existe uma única reta **s // r** que passa por **P**.

CONSTRUÇÃO 3: RETA PARALELA

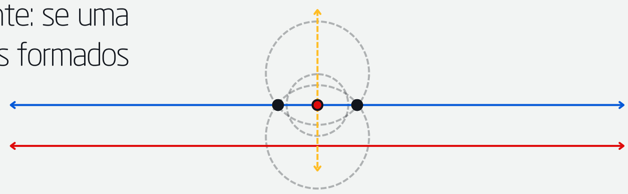
Você quer construir a reta paralela a uma reta **r** que passa sobre um ponto **P**.

Trace a reta **s** ⊥ **r** e que passa sobre **P** (você aprendeu a fazer isso na construção anterior).



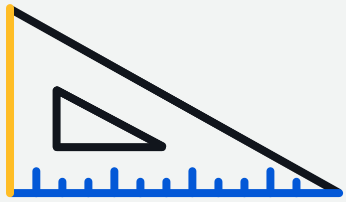
Trace a reta **t** ⊥ **s** e que passa sobre **P** (esse foi o resultado do exercício 1).

Retas paralelas possuem uma propriedade importante: se uma reta é concorrente a duas retas paralelas, os ângulos formados são congruentes.



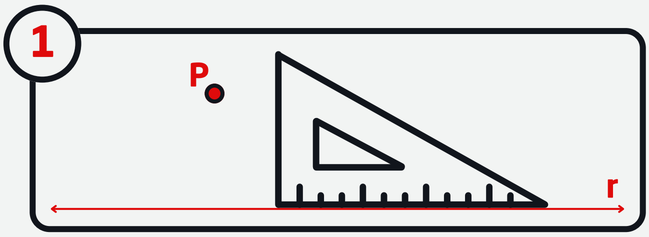
Logo, se **s** ⊥ **r** e **s** ⊥ **t**, então **r** // **t**. ∎

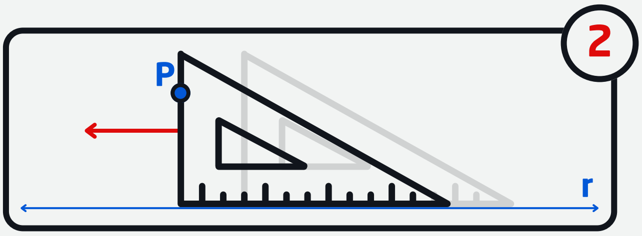
Retas paralelas e perpendiculares são parte importante para a maioria das construções geométricas deste capítulo e são essenciais para as transformações geométricas que serão apresentadas em seguida, onde você terá que traçar inúmeras delas. Pensando nisso, apesar de possível, não é eficiente construir retas usando apenas régua e compasso e será conveniente utilizar uma ferramenta nova: o **esquadro**!

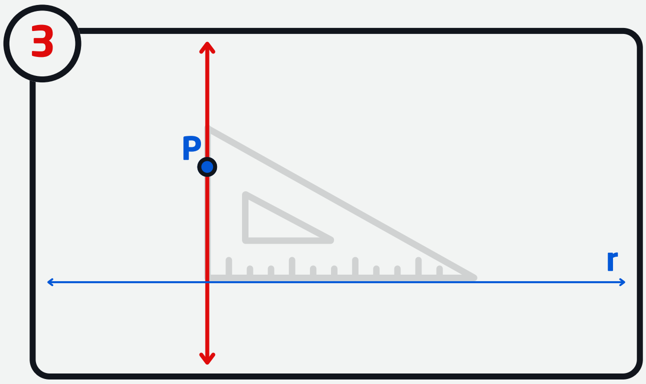


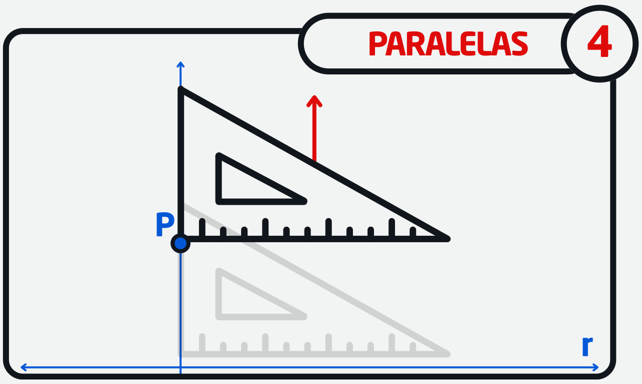
O esquadro é um instrumento em formato de triângulo retângulo, o que quer dizer que ele pos-sui um ângulo reto (o que já traz uma pista sobre sua utilização). Um dos catetos do triângulo possui medidas de comprimento, como em uma régua, e é chamado de **graduada**. O outro cateto, sem medidas, é chamado de **perpendicular**.

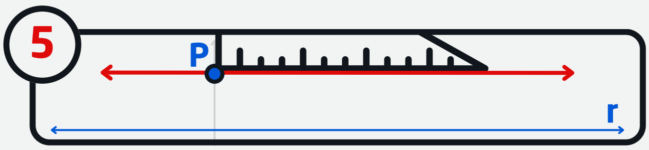
Seja **r** uma reta qualquer e **P** um ponto fora da reta sobre o qual deseja-se construir uma reta perpendicular a **r** usando régua e esquadro.











OBSERVAÇÃO

No passo 3, você pode usar uma régua fixa ao invés de traçar a reta.

Voltando à construção da reta perpendicular, você pode reparar que sempre são traçados dois pontos sobre a reta original e é a partir deles que se constrói a reta perpendicular. Note que, qualquer que seja o raio das circunferências traçadas sobre esses pontos, as intersecções das mesmas parece formar uma reta. E de fato formam!

DEFINIÇÃO

Sejam **A** e **B** pontos distintos. Uma **mediatriz** é a reta formada por todos os pontos equidistantes a **A** e **B**. Analogamente, diz-se que a mediatriz de **A** e **B** é mediatriz do segmento **[AB]**.

Se todo ponto equidistante a **A** e **B** pertence à mediatriz, então é possível concluir algumas coisas:

(1) A mediatriz de **[AB]** é única.

(2) O ponto médio de **[AB]** , isto é, o ponto M tal que **[AM]** $\equiv$ **[BM]**, pertence à mediatriz por definição.

(3) A reta perpendicular que passa pelo ponto médio **M** de **[AB]** é composta por pontos equidistantes a **A** e **B** (vide Apêndice II), portanto é mediatriz do segmento **[AB]**.

CONSTRUÇÃO 4: MEDIATRIZ

Você quer construir a mediatriz **m** de um segmento **[AB]**.

Trace as circunferências $\circ_{(A,|AB|)}$ e $\circ_{(B,|AB|)}$. Trace as intersecções **P** e **Q**.

Conforme apresentado na construção 2, **(PQ)** $\perp$ **(AB)**. Como **[AP]** $\equiv$ **[BP]**, a reta **(PQ)** é mediatriz de **[AB]**. ∎

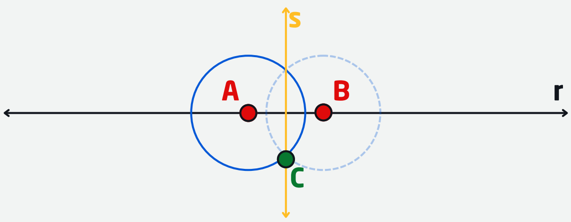
CONSTRUÇÃO 5: TRIÂNGULO ISÓSCELES

Você quer construir um triângulo isósceles com lados congruentes de medida **j** e terceiro lado de medida **k**.

Considere um ponto **A** que será um vértice do triângulo. Trace sobre ele uma reta **r** qualquer.

Trace um ponto **B** sobre a reta tal que **|AB| = k**. Trace a mediatriz **s** de **[AB]**. Trace $\circ_{(A,j)}$. Trace o ponto **C** sobre uma intersecção de $\circ_{(A,j)}$ e **s**.

Note que **|AC| = |BC| = j** pois **s** é mediatriz. Portanto, △**ABC** é isósceles e possui as medidas **j** e **k**. ∎



Quadriláteros

Com quatro pontos não-colineares, você pode traçar um quadrilátero. Diferente dos triângulos, quadriláteros (e todos os polígonos a partir daqui) podem ser côncavos ou convexos. Além disso, possuem um novo tipo de elemento: diagonais.

DEFINIÇÃO

Seja $P=P_1P_2...P_n$ um polígono. Chama-se **diagonal de P** todo segmento de reta com extremidades em vértices não consecutivos de **P**. Isso é, todo segmento P_jP_k que não é uma aresta.

Note que para cada vértice de um polígono de **n** lados, há **(n-3)** diagonais possíveis (subtrai-se o próprio vértice e seus vértices adjacentes). Assim, parece razoável dizer que o polígono possui **n(n-3)** diagonais ao todo, certo? No entanto, note que ao multiplicar pelo número total de vértices você conta cada diagonal duas vezes: uma a partir de cada extremidade. Portanto, um polígono de **n** lados possui $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2-3n}{2}$ diagonais.

Perceba também que, traçando diagonais, dividimos as regiões poligonais em regiões menores e, ultimamente, em regiões triangulares.

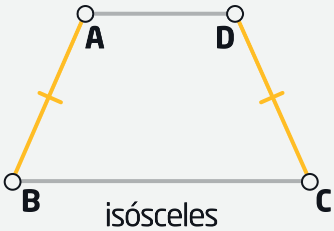
Quadriláteros podem ser classificados quanto às medidas de seus lados e ângulos e ao paralelismo de seus lados. A respeito do paralelismo de seus lados:

DEFINIÇÃO

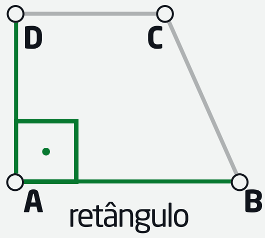
Seja ABCD um quadrilátero. ABCD é dito um **trapézio** se **AB // CD ou AD // BC**.

Há dois casos particulares de trapézio que possuem nomes próprios: o trapézio é dito **isósceles** se possui lados não paralelos congruentes e **retângulo** quando possui um ângulo reto.

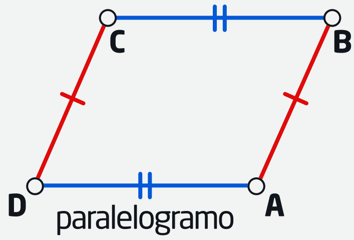
Além disso, note que apenas um par de lados precisa ser paralelo, mas ambos podem ser:



isósceles



retângulo



paralelogramo

DEFINIÇÃO

Seja ABCD um quadrilátero. ABCD é dito um **paralelogramo** se **AB // CD e AD // BC**.

OBSERVAÇÃO

Perceba que o paralelogramo é um caso particular do trapézio, isto é, todo paralelogramo é um trapézio e, portanto, herda suas propriedades.

Uma característica importante do paralelogramo é que seus lados opostos, além de paralelos, são congruentes entre si.

A respeito das medidas de seus ângulos, avalia-se a congruência entre eles:

DEFINIÇÃO

Seja ABCD um quadrilátero. ABCD é dito um **retângulo** se todos os seus ângulos internos são congruentes, isto é, $\angle DAC \equiv \angle ABC \equiv \angle BCD \equiv \angle CDA$.

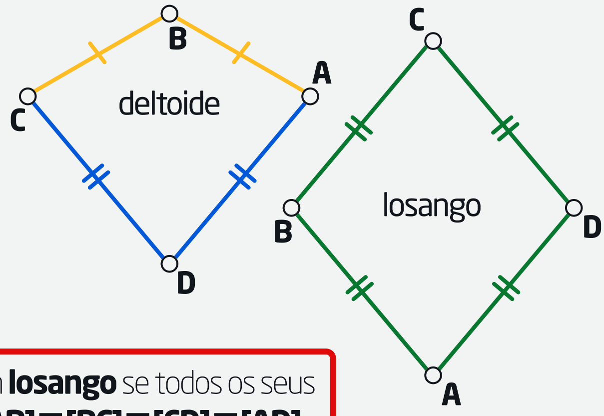
OBSERVAÇÃO

Perceba que o retângulo é um caso particular do paralelogramo, isto é, todo retângulo é um paralelogramo e, portanto, herda suas propriedades.

A respeito das medidas de seus lados, avalia-se também a congruência entre eles. Como dito acima, paralelogramos possuem lados opostos congruentes entre si, mas há outras categorias:

DEFINIÇÃO

Seja ABCD um quadrilátero. ABCD é dito um **deltoide** se possui dois pares de lados adjacentes congruentes entre si, isto é, se **[AB]≡[BC]** e **[CD]≡[AD]** ou **[AB]≡[AD]** e **[BC]≡[CD]**.



DEFINIÇÃO

Seja ABCD um quadrilátero. ABCD é dito um **losango** se todos os seus lados são congruentes entre si, isto é, se **[AB]≡[BC]≡[CD]≡[AD]**.

Como nos casos anteriores, percebe-se que as categorias vão ficando cada vez mais "específicas", de forma que algumas possuem características em comum. Em particular, o losango é quadrilátero que é, simultaneamente, um paralelogramo (pois lados opostos são congruentes entre si) e um deltoide (pois lados adjacentes são congruentes entre si). Por isso, herda as características de ambos. Por exemplo: como todo losango é um paralelogramo, então seus lados opostos são paralelos entre si.

CURIOSIDADE

Deltoides também são chamados de **pipas**, em referência ao brinquedo de mesmo nome.

Por fim, existe um caso muito particular de quadrilátero que você já deve conhecer bem:

DEFINIÇÃO

Seja ABCD um quadrilátero. ABCD é dito um **quadrado** se todos os seus ângulos internos são congruentes entre si e todos os seus lados são congruentes entre si.

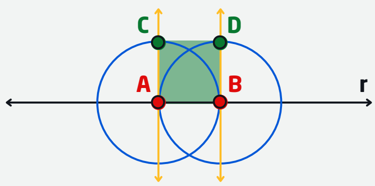
Veja que o quadrado é, essencialmente, um losango retângulo e, portanto, herda todas as características destacadas até aqui.

CONSTRUÇÃO 6: QUADRADO

Queremos construir um quadrado de lado **k**.

Considere um ponto **A** que será um vértice do quadrado. Trace sobre ele uma reta **r** qualquer.

Trace um ponto **B** sobre a reta tal que **|AB| = k**. Trace as retas **s** e **t** perpendiculares a **r** sobre **A** e **B**, respectivamente.



Trace $\circ_{(A,\ k)}$ e $\circ_{(B,\ k)}$. Trace também a intersecção **C** de $\circ_{(A,\ k)}$ com a reta **s**. Por fim, trace a intersecção **D** de $\circ_{(B,\ k)}$ com a reta **t**.

Veja que **AC≡AB≡BD**, então os triângulos △**CAB** e △**BDC** são congruentes (vide apêndice III), portanto **ABCD** é um quadrado. ∎

Outros quadriláteros podem ser construídos de maneira análoga, usando suas propriedades como guias. Por exemplo: imagine que você quer construir um trapézio **ABCD** tal que **AB ∥ CD** e **(AD)⊥(AB)** com medidas: $|\mathbf{AB}|$ = **10 cm**, $|\mathbf{BC}|$ = **5 cm**, $|\mathbf{AD}|$ = **4 cm**. Nesse caso, você poderia seguir os seguintes passos para construir uma figura geometricamente perfeita:

1. Trace o segmento **[AB]** sobre uma reta qualquer (com medida igual a 10 cm).
2. Trace $\circ_{(B,5)}$. Por definição, o ponto **C** pertence a essa circunferência.
3. Trace $\circ_{(A,4)}$. Por definição, o ponto **D** pertence a essa circunferência.
4. Trace a reta perpendicular a **(AB)** sobre o ponto **A**. Como **(AD)⊥(AB)**, então a intersecção dessa reta com $\circ_{(A,4)}$ é o ponto **D**.
5. Trace a reta paralela a **(AB)** sobre **D**. Como **(AB)∥(CD)**, então a intersecção dessa reta com $\circ_{(B,5)}$ é o ponto **C**.

Outros Polígonos

Não deve ser surpresa para você que triângulos e quadriláteros não representam a totalidade de polígonos existentes. De fato, existem infinitos polígonos, dos mais diversos tipos. Por isso, é comum ater-se aos mais comuns ou mais notáveis. A maioria dos materiais foca nos polígonos regulares. Em particular, este material trabalha com polígonos construtíveis (com régua e compasso).

Como dito anteriormente, polígonos podem ser decompostos em triângulos, o que facilita bastante suas construções. Além disso, alguns polígonos regulares (não todos) possuem construções específicas, como o octógono regular, que é a ilustração da capa.

CURIOSIDADE

Para saber se um polígono regular é construtível, usa-se o **Teorema de Gauss-Wantzel**, que estabelece um critério associado ao número de lados do polígono.

Por exemplo, um hexágono regular é construtível, mas um heptágono regular não é (há uma forma aproximada, mas não uma forma exata de construção).

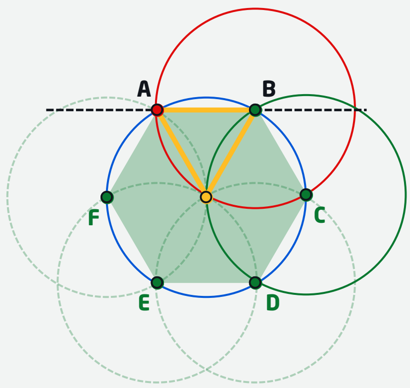
CONSTRUÇÃO 7: HEXÁGONO REGULAR

Você quer construir um hexágono regular com lados de medida **k**.

Considere um ponto **A** que será um vértice do hexágono. Trace um triângulo △**ABO** equilátero de lado **k** a partir de **A**.

Trace $\circ_{(O,k)}$. Note que **A** e **B** pertencem a $\circ_{(O,k)}$.

Trace $\circ_{(B,k)}$. Note que **A** é uma intersecção de $\circ_{(B,k)}$ e $\circ_{(O,k)}$. Trace a outra intersecção **C**. Trace a circunferência $\circ_{(C,k)}$ e marque sua inter-secção **D** com $\circ_{(O,k)}$. Repita o processo para obter os pontos **E** e **F**.



Como os segmentos adjacentes pertencem, dois a dois, a circunferências, eles são todos congruentes. Como todos os pontos pertencem a uma mesma circunferência, formam triângulos congruentes entre si, logo os ângulos entre os segmentos são congruentes.

Portanto, como **ABCDEF** é equilátero e equiangular, ⬡**ABCDEF** é um hexágono regular. ∎

EXERCÍCIO

Construa um hexágono regular com lados de medida igual a 3 cm. A partir dele, construa um dodecágono (um polígono de 12 lados) regular.

Exercícios do Capítulo

1. Construa um triângulo equilátero de lado igual a 3 cm.
2. Construa o ponto médio de um segmento dado.
3. Construa um quadrado com lados de 5 cm.
4. Construa um triângulo com lados de 3 cm, 5 cm e 7 cm.
5. Construa um paralelogramo com ângulos de 60° e lados de 3 cm e 5 cm.
6. Construa uma figura composta por um quadrado com triângulos equiláteros sobre seus lados.
7. Construa um octógono regular.
8. **DESAFIO** Construa um pentágono regular.

0.5 cm

Plano Cartesiano

Objetivos da Revisão:

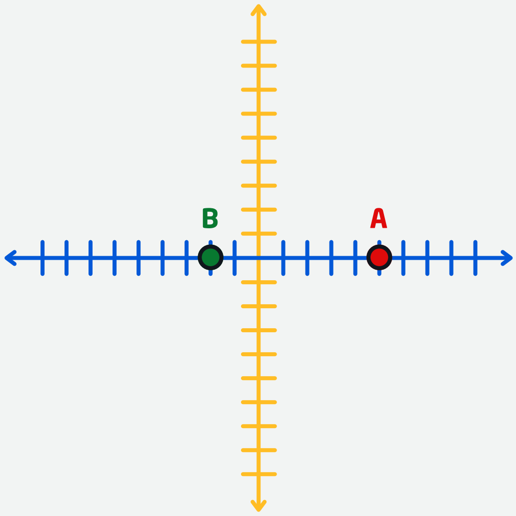
1. Compreender o sistema de coordenadas cartesianas.
2. Identificar os quadrantes do plano cartesiano.

Sistema de Coordenadas Cartesianas

Para localizar qualquer ponto em um plano utilizamos o sistema de coordenadas cartesianas, formado por duas retas numéricas perpendiculares. A reta horizontal é chamada de **eixo das abscissas (ou eixo x)**, e a reta vertical é chamada de **eixo das ordenadas (ou eixo y)**. Esses eixos se cruzam em um ponto denominado **origem**, geralmente representado pela letra **O**.

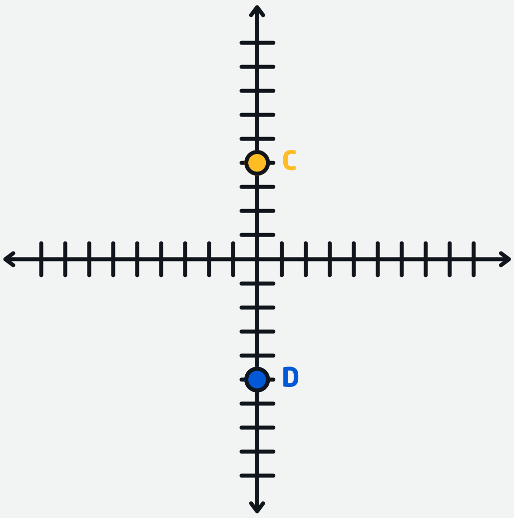
A partir da origem, marcamos em cada eixo uma unidade de medida (como 1 cm), que deve ser a mesma em ambos os eixos para garantir proporcionalidade nas representações. No eixo das abscissas, os valores aumentam da esquerda para a direita, sendo positivos (+) à direita da origem e negativos (-) à esquerda. Já no eixo das ordenadas os valores crescem de baixo para cima, sendo positivos (+) acima da origem e negativos (-) abaixo.

Por convenção internacional, a posição de qualquer ponto no plano é indicada por um par ordenado **(x, y)**, em que o primeiro número representa a abscissa (posição no eixo x) e o segundo a ordenada (posição no eixo y), escritos entre parênteses e separados por vírgula.



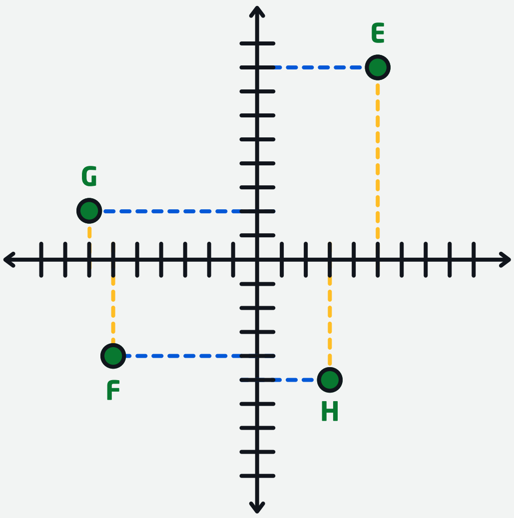
Vamos agora observar juntos o plano cartesiano ao lado. O primeiro passo é identificar a origem, que é o ponto **(0, 0)**, onde os dois eixos, o horizontal e o vertical se cruzam. A partir desse ponto central, começamos nosso deslocamento horizontalmente pelo eixo x, até chegarmos ao valor da abscisa do ponto que queremos localizar. Por exemplo, para encontrar o ponto **A = (5, 0)**, andamos 5 unidades para a direita da origem. Já para encontrar o ponto **B = (-2, 0)**, vamos 2 unidades para a esquerda.

Perceba que como a ordenada desses dois pontos é zero, não fazemos nenhum movimento para cima ou para baixo e por isso eles ficam exatamente sobre o eixo x.



Vamos continuar explorando o plano cartesiano, mas agora observando os pontos que estão sobre o eixo y. Assim como antes, começamos pela origem, porém como a abscissa dos pontos é zero, não faremos nenhum deslocamento para a direita ou para a esquerda. Em vez disso, vamos nos mover verticalmente ao longo do eixo y, subindo ou descendo de acordo com o valor da ordenada. Por exemplo, para localizar o ponto **C = (0, 4)**, partimos da origem e subimos 4 unidades. Já para encontrar o ponto **D = (0, -5)**, descemos 5 unidades a partir da origem.

Agora que já entendemos como funciona o sistema de coordenadas, vamos localizar mais alguns pontos no plano cartesiano. Observe as imagens abaixo e acompanhe o passo a passo:



Para o ponto **E = (5, 8)**: Começamos na origem (0, 0), nos deslocamos 5 unidades à direita no eixo x (porque a abscissa é 5) e, a partir daí, nos deslocamos 8 unidades para cima no eixo y (pois a ordenada é 8).

Para o ponto **F = (-6, -4)**: Partindo da origem, nos deslocamos 6 unidades à esquerda no eixo x (abscissa negativa) e depois descemos 8 unidades no eixo y (ordenada também negativa).

Para o ponto **G = (-7, 2)**: Da origem, nos movemos 7 unidades à esquerda no eixo x, pois a abscissa é negativa, e 2 unidades acima no eixo y, pois a ordenada é positiva.

Para o ponto **H = (3, -5)**: Começamos novamente na origem, avançamos 3 unidades à direita no eixo x, pois a abscissa é positiva, e 5 unidades abaixo no eixo y, pois a ordenada é negativa.

Quadrantes no Plano Cartesiano

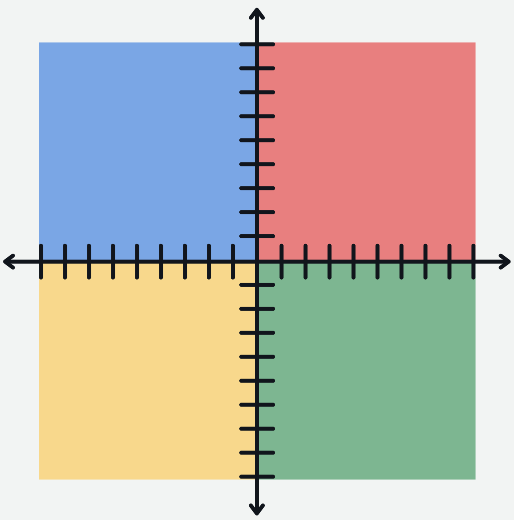
Os eixos **x** e **y** também dividem o plano em quatro regiões chamadas de **quadrantes**. Eles são numerados no sentido anti-horário e permitem analisar rapidamente as coordenadas de um ponto e entender sua posição no plano:

1° Quadrante: Fica no canto superior direito do plano. Tanto a abscissa quanto a ordenada são positivas. Contém, por exemplo, o ponto **E = (5, 8)**.

2° Quadrante: Fica no canto superior esquerdo do plano. A abscissa é negativa e a ordenada é positiva. Contém, por exemplo, o ponto **G = (-7, 2)**.

3° Quadrante: Fica no canto inferior esquerdo do plano. Tanto a abscissa quanto a ordenada são negativas. Contém, por exemplo, o ponto **F = (-6, -4)**.

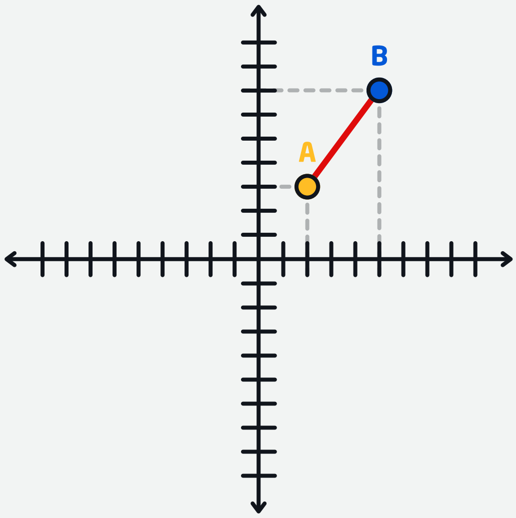
4° Quadrante: Fica no canto inferior direito do plano. A abscissa é positiva e a ordenada é negativa. Contém, por exemplo, o ponto **H = (3, -5)**.



Segmentos e Figuras no Plano Cartesiano

Agora que você já domina a localização precisa de pontos no sistema de coordenadas cartesianas, é hora de dar vida ao plano conectando esses pontos! Desenhar segmentos de reta e figuras geométricas é um passo natural e essencial para representar formas, desde as mais simples até polígonos complexos. Vamos explorar esse processo de forma clara e prática.

Um segmento de reta, essencialmente, conecta dois pontos distintos. Imagine que você precisa desenhar o segmento que delimitado pelos pontos **A = (2, 3)** e **B = (5, 7)**. Primeiro, você utiliza suas habilidades recém-adquiridas para marcar cada ponto com precisão, como na imagem ao lado.



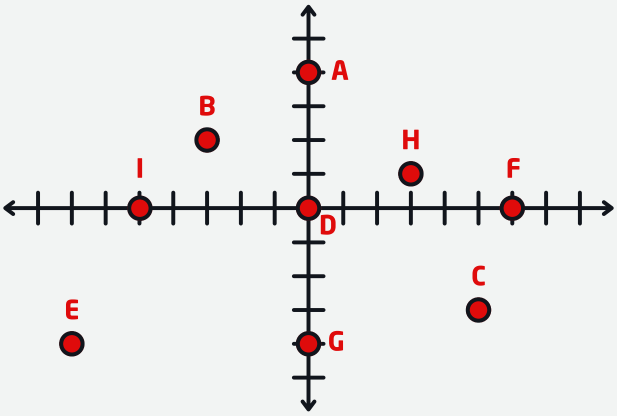
Com ambos os pontos marcados, basta traçar uma linha reta entre eles usando uma régua. Este é o seu segmento de reta **[AB]**.

No caso de figuras geométricas compostas por múltiplos segmentos, é importante se atentar: a sequência em que você conecta os pontos determina completamente a forma final.

Por que dominar essa habilidade é tão importante? As aplicações são vastas e fundamentais: ela é a base para representar graficamente funções matemáticas, transformando equações abstratas em linhas, curvas (como retas e parábolas) e formas visíveis no plano; e é o cerne da geometria analítica, onde problemas clássicos de geometria (cálculo de áreas, propriedades de figuras) são resolvidos algebricamente através das coordenadas.

Exercícios de Revisão

1. Observe os pontos traçados na figura:



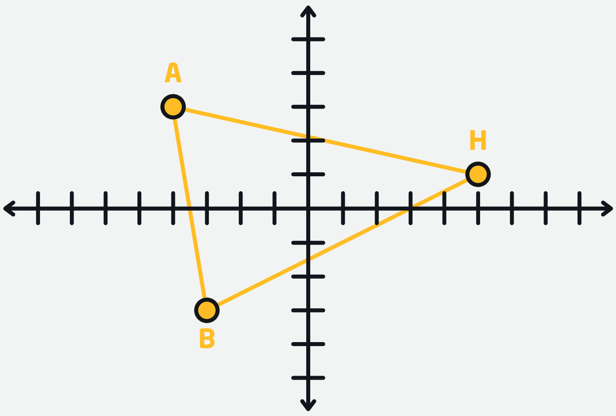
a) Quais são suas coordenadas?

b) Em quais quadrantes estão?

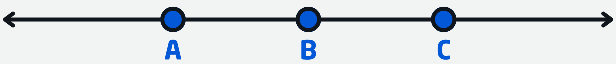
c) Trace os segmentos [CF], [GI], [IE], [EG], [BD], [DH], [HA] e [AB].

2. Durante as aulas de robótica, um robô inicia em um ponto no plano cartesiano, na posição **(2, 3)**. Ele se move 4 unidades para a direita e depois 5 unidades para baixo. Qual é a nova posição do robô?

3. Na figura abaixo, quais as coordenadas dos vértices do triângulo $\triangle ABC$?



4. Observe a reta numérica abaixo:



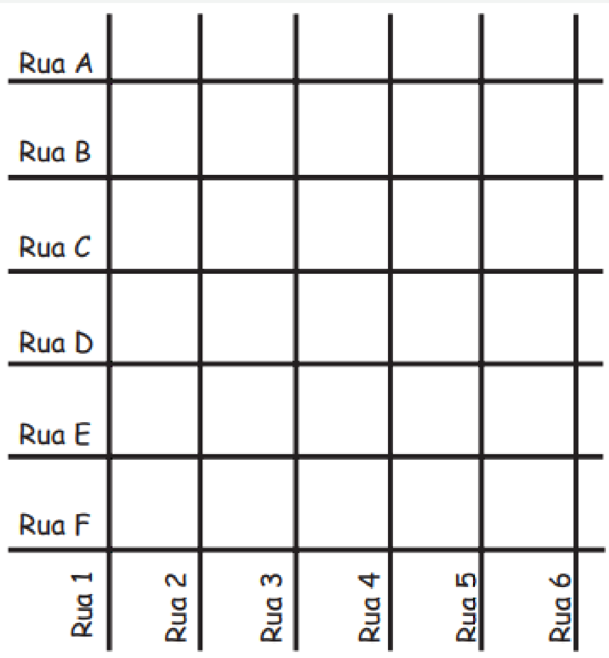
a) Sabendo que A = (2, 0) e C = (0, 8), qual é o comprimento do segmento [AB] se o ponto B é o ponto médio de A e C?

b) Se o ponto D estiver localizado a 7 unidades à direita de B, qual a medida do segmento [BD]?

5. Em uma malha quadriculada, construa um sistema de coordenadas e nele desenhe o octógono de vértices A = (6, 8), B = (8, 2), C = (6, 24), D = (0, 26), E = (26, 24), F = (28, 2), G = (26, 8) e H = (0, 10).

6. Considere um segmento [AB] de coordenadas A = (-1, 2) e B = (3, -1). Ao multiplicarmos por 3 as coordenadas dos pontos A e B, obtemos os pontos A' e B', respectivamente. Utilize uma régua para medir os segmentos de reta [AB] e [A'B'] e compare as medidas obtidas. O que podemos afirmar em relação a essas medidas?

7. (ENEM 2016) Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na [esquina da] rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na [esquina da] rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na [esquina da] rua 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende às pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C

b) 4 e C

c) 4 e D

d) 4 e E

e) 5 e C

8. Em um sistema de coordenadas, desenhe o quadrado que tem centro na origem e lados de 6 unidades paralelos aos eixos coordenados. Quais são as coordenadas dos vértices do quadrado?

9. **DESAFIO** Duas escolas, a Escola Buriti e a Escola Pequi, estão localizadas nos pontos (10, 10) e (50, 40) em um mapa representado por um plano cartesiano. Para atender melhor à região, uma nova escola será construída exatamente no ponto médio entre as duas escolas existentes. Qual será a coordenada da nova escola?

CURIOSIDADE

À primeira vista, pode parecer irreal considerar cidades como sistemas de coordenadas cartesianas, mas essa é a realidade de alguns lugares do Brasil e do Mundo. O município de Rio Claro (SP), por exemplo, foi planejado: suas ruas formam uma malha quadriculada e são numeradas a partir da antiga Estação Ferroviária, hoje atual Secretaria de Turismo.

CAPÍTULO

dois

transformações geométricas

Transformações Geométricas no Plano

Já reparou como algumas coisas parecem ter um lado que é "cópia" do outro? Como as asas de uma borboleta, as folhas de uma planta ou até o desenho do seu celular? Essa característica de objetos que possuem partes congruentes é chamada de simetria e será o tema deste capítulo.

Na matemática, chamamos de **transformação** uma relação entre objetos de um mesmo tipo. Isto é, é como uma “máquina” que recebe um objeto e libera outro do mesmo tipo. Por exemplo: quando calculamos o dobro de um número, estamos realizando uma transformação, que recebe um objeto do “tipo” número e libera um objeto, também, do “tipo” número. No entanto, quando calculamos a área de um retângulo, não é uma transformação, pois o primeiro objeto é uma figura e o segundo é um número. Dizemos que uma transformação “leva” um objeto ao outro.

Transformações são particularmente importantes no estudo da Geometria, pois usualmente queremos construir figuras a partir de outras figuras. Ou, sendo mais rigorosos, transformar um conjunto de pontos em outro conjunto de pontos.

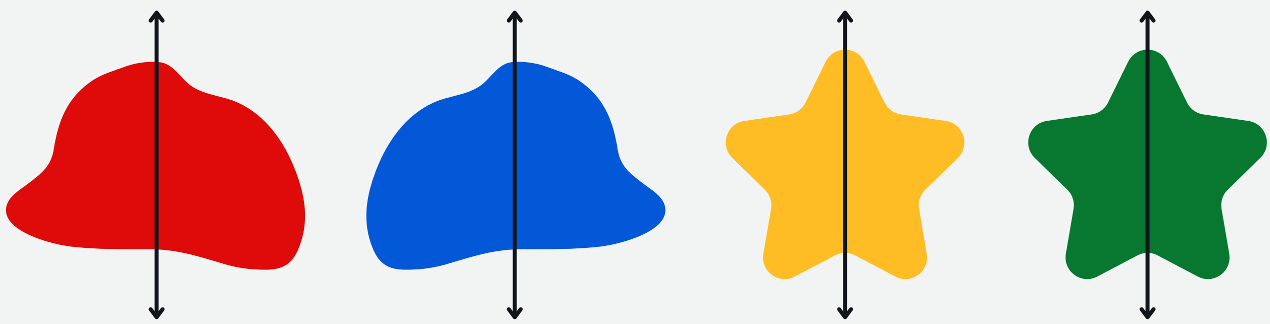
OBSERVAÇÃO

A definição formal de transformação é mais rigorosa e depende de conceitos que você terá contato apenas no Ensino Médio, mas, por agora, essa é mais que suficiente.

Transformações são particularmente importantes no estudo da Geometria, pois usualmente queremos construir figuras a partir de outras figuras. Ou, sendo mais rigorosos, transformar um conjunto de pontos em outro conjunto de pontos.

Simetrias

A **Simetria** é a propriedade geométrica de um objeto que é invariante em relação a uma transformação, ou seja, que não é alterado pela transformação. Por exemplo: se refletirmos **a imagem da esquerda** ao redor do eixo destacado, **sua forma é alterada**; mas se refletirmos **a imagem da direita** ao redor do mesmo eixo, **sua forma não é alterada**. Sendo assim, a imagem da direita possui simetria em relação à reflexão, mas a da esquerda não possui.



A Simetria está por toda parte! Não só na Matemática, mas também:

- → **Nas Artes:** Em pinturas, esculturas e desenhos que usam repetições harmoniosas.
- → **Na Natureza:** Nas flores, nos animais, nos flocos de neve.

→ **Nas Construções:** Em edifícios, pontes e monumentos planejados para serem equilibrados e belos.

Na geometria plana, há dois principais tipos de transformação: as **isometrias** e as **homotetias**.

DEFINIÇÃO

Uma isometria é uma transformação geométrica que preserva as distâncias entre os pontos, isto é, preserva a forma e o tamanho dos objetos transformados.

As isometrias são as transformações mais comuns e serão o foco deste material. Veja que, por definição, você pode "inventar" uma isometria, mas toda isometria pode ser decomposta em três tipos de isometrias elementares: reflexão, rotação e translação.

Isometrias também são chamadas de congruências, justamente pois geram figuras congruentes entre si. Por exemplo: rotacionar um segmento [AB] ao redor de um ponto resulta em um segmento [A'B'] de mesmo comprimento e, portanto, [AB] ≡ [A'B'].

DEFINIÇÃO

Uma homotetia é uma transformação geométrica que amplia ou reduz objetos transformados por um fator fixo, preservando a proporção dos mesmos.

As homotetias são também bastante comuns e correspondem à ampliação ou redução uniforme de uma figura. Essa "uniformidade" quer dizer que preservam as proporções. Por exemplo: a **primeira** e a **segunda** figura representam uma homotetia, pois são semelhantes entre si; mas a **terceira** e **quarta** figura não representam uma homotetia, pois a transformação muda a proporção entre os lados da figura.

Isometrias também são chamadas de congruências, justamente pois geram figuras congruentes entre si. Por exemplo: rotacionar um segmento [AB] ao redor de um ponto resulta em um segmento [A'B'] de mesmo comprimento e, portanto, [AB] ≡ [A'B'].

Neste material, as transformações geométricas serão apresentadas em duas perspectivas: uma geométrica, isto é, como construí-las com régua e compasso; e uma analítica, avaliando as transformações em um sistema de coordenadas cartesianas.

Reflexão e Simetria de Reflexão

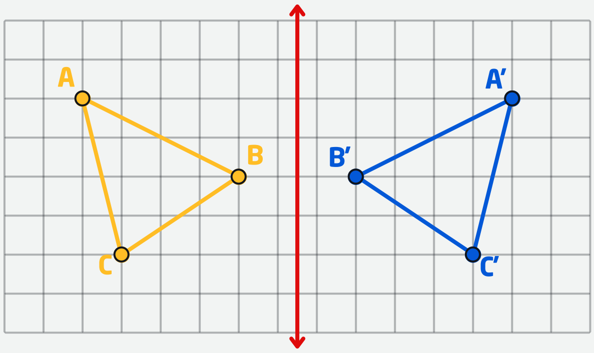
A **reflexão** é uma transformação que desloca uma figura em relação a um ponto ou reta. Se ocorre em relação a um ponto, é chamada de reflexão central, enquanto em relação a uma reta é chamada de reflexão axial.

A reflexão central pode ser, como veremos adiante, interpretada como uma combinação de duas reflexões axiais ou como um caso particular de rotação, então vamos nos ater à reflexão axial.

DEFINIÇÃO

Uma reflexão sobre uma reta **r** é uma transformação que leva um ponto A em um ponto A′ de forma que a distância de **A** e **r** é igual à distância de **A′** e **r** e **(AA′) ⊥ r**.

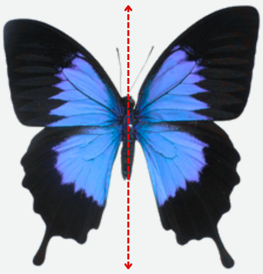
Dessa forma, uma reflexão é um tipo de transformação que "espelha" uma **figura** em relação a uma linha reta, chamada de **eixo de reflexão**. O resultado é uma **figura congruente** à original, mas invertida, como se fosse vista no espelho.



Na figura ao lado, o triângulo **A'B'C'** foi obtido do triângulo **ABC** por meio da reflexão em relação à reta **r** indicada. Dizemos que esses dois triângulos são simétricos em relação à reta **r**, que é o eixo de reflexão ou eixo de simetria, e que o triângulo **A'B'C'** é a imagem do triângulo **ABC**.

Cada ponto da figura possui um ponto correspondente na figura refletida. Por exemplo: **A** e **A'** são simétricos entre si com relação a **r**.

A **simetria de reflexão** ocorre quando uma figura pode ser dividida por um eixo em duas partes congruentes, como se uma fosse o espelho da outra. Essa divisão funciona como um espelho, ou seja, tudo que está de um lado é refletido no outro, mantendo a mesma forma e tamanho.



Um exemplo claro disso na natureza são algumas espécies de borboletas. Se traçarmos um eixo vertical passando bem no centro do corpo da borboleta, percebemos que as asas do lado esquerdo e do lado direito têm o mesmo formato e tamanho, apenas em posições opostas. Ou seja, uma asa é o reflexo da outra, indicando que a borboleta possui simetria de reflexão em relação a esse eixo vertical, como ilustrado na figura.

Um exemplo impressionante é o Taj Mahal, uma construção muito conhecida no mundo todo. Ele fica na cidade de Agra, na Índia, e foi construído no século XVII pelo imperador Shah Jahan, como uma homenagem à sua esposa Aryumand Banu Begam. Foram necessários 22 anos de trabalho e cerca de 20 mil operários para construir essa impressionante obra.

Se traçarmos uma linha vertical no meio do Taj Mahal, é possível observar que os lados esquerdo e direito são praticamente idênticos! É como se um lado fosse o reflexo no espelho do outro, um exemplo clássico de simetria em relação a um eixo vertical.

Reflexão em torno de uma reta horizontal

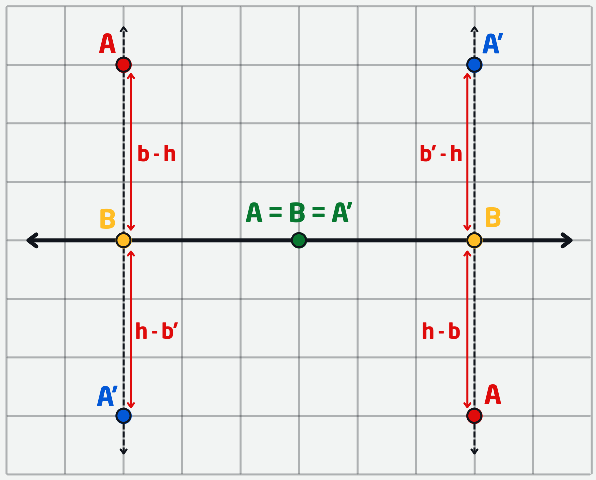
Quando uma reflexão ocorre em relação a uma reta horizontal, isto é, uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas, é possível determinar analiticamente a posição dos pontos da figura resultante:

1. Uma reta horizontal tem pontos da forma **(x, h)**, onde h é um valor constante.

2. Então para cada ponto **A = (a, b)** podemos traçar um ponto **B = (a, h)** sobre a reta de forma que **(AB)** é perpendicular ao eixo de reflexão.

3. Sobre a reta **(AB)** é possível traçar um ponto **A' = (a, b')** que esteja à mesma distância do eixo de simetria.

4. Veja que **[AB] ≡ [A'B]**, então $\mathbf{h = \frac{b + b'}{2}}$.



Note que, em particular, se o ponto está sobre a reta, então **b' = b**. Além disso, se a reta horizontal é o próprio eixo das abscissas, então **h = 0**, logo **b' = -b**.

EXERCÍCIO

Prove que a última afirmação é verdadeira: mostre que, se h = 0, então b' = -b. Depois desenhe três pontos e suas reflexões sobre o eixo das abscissas.

Reflexão em torno de uma reta vertical

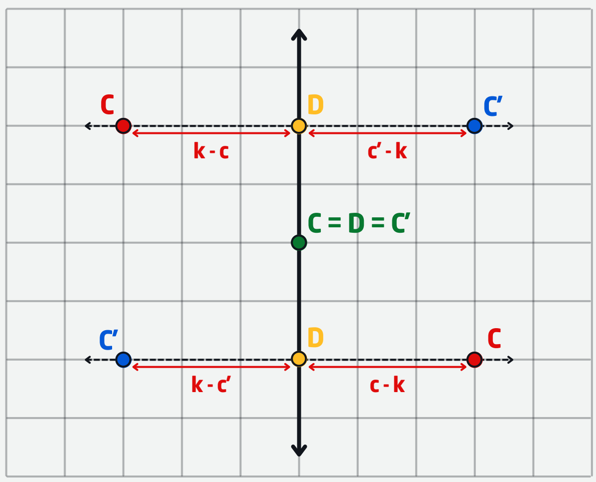
Quando uma reflexão ocorre em relação a uma reta vertical, isto é, uma reta perpendicular ao eixo das abscissas, o procedimento para determinar analiticamente a posição dos pontos da figura é análogo, porém trocando as coordenadas:

1. Uma reta vertical tem pontos da forma **(k, y)**, onde **k** é um valor constante.

2. Então para cada ponto **C = (c, d)** podemos traçar um ponto **D = (k, d)** sobre a reta de forma que **(CD)** é perpendicular ao eixo de reflexão.

3. Sobre a reta **(CD)** é possível traçar um ponto **C' = (c', d)** que esteja à mesma distância do eixo de simetria.

4. Veja que **[CD] ≡ [C'D]**, então $\mathbf{k = \frac{c + c'}{2}}$.



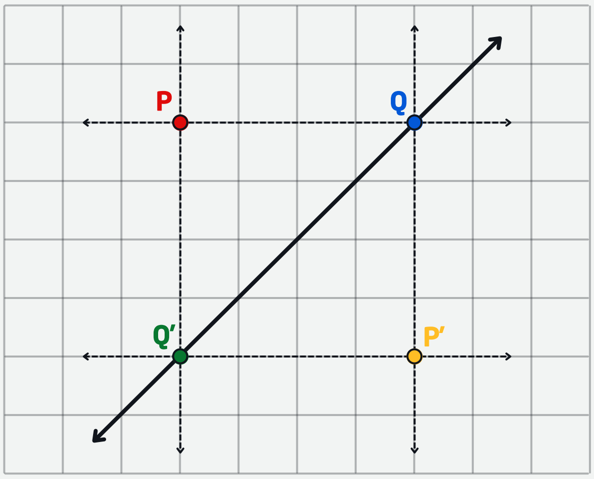
Note que, em particular, se o ponto está sobre a reta, então **c' = c**. Além disso, se a reta vertical é o próprio eixo das ordenadas, então **k = 0**, logo **c' = -c**.

Reflexão em torno da reta bissetriz dos quadrantes ímpares

A reta bissetriz dos quadrantes ímpares é o conjunto dos pontos que possuem a forma **r : (m, m)**, ou seja, cujas coordenadas horizontal e vertical são iguais. Para determinar analiticamente a posi-ção dos pontos em uma reflexão desse tipo, o procedimento é simples:

1. Para cada ponto **P** = **(a, b)**, podemos traçar uma reta da forma **s : (x, b)** e uma reta da forma **t : (a, y)**. Veja que são retas perpendiculares aos eixos coordenados e entre si.

2. Veja que a reta **s** cruza a reta **r** em **Q** = **(b, b)**, assim como a reta **t** cruza a reta **r** em **Q'** = **(a, a)**. Trace **s'** $\perp$ **s** em **Q** e **t'** $\perp$ **t** em **Q'**. Note que **s'** é da forma **(b, y)** e **t'** é da forma **(x, a)**.



3. Veja que as retas **s'** e **t'** se interceptam em **P'** = **(b, a)**.

4. Veja que os triângulos **QPQ'** e **Q'P'Q** possuem um lado comum e dois pares de lados congruentes entre si, portanto são congruentes. Sendo assim, suas alturas em relação a **[QQ']** são congruentes entre si, logo **P** e **P'** estão à mesma distância de **r**.

5. Ou seja: o ponto **P'** é reflexo de **P**. Portanto, para um ponto **P** = **(a, b)**, sua reflexão em torno da reta bissetriz dos quadrantes ímpares é um ponto **P'** = **(b, a)**, isto é, um ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são invertidas.

EXERCÍCIO

Determine as coordenadas da reflexão de um ponto **P = (a, b)** em torno da reta bissetriz dos quadrantes **pares**, que é da forma **r : (m, -m)**.

Reflexão Central

A reflexão em torno de um ponto utiliza a mesma noção de pontos equidistantes, mas ao invés de usar uma reta, o referencial é um ponto **O**, chamado de **centro de reflexão**. Assim, cada ponto **A** é levado em um ponto **A'** da reta **(OA)** tal que **[AO]** $\equiv$ **[A'O]**.

A reflexão central pode ser interpretada como uma composição de duas reflexões em torno de retas perpendiculares que se cruzam em **O**. Isso vale para qualquer par de retas perpendiculares entre si, mas a demonstração vai além do escopo deste material (vide Apêndice III), então vamos nos ater a um par de retas perpendiculares aos eixos coordenados: