

计算物理homework4

李明达 PB18020616^{1*}

摘要

这是计算物理第四次作业，作业题目是在设pdf函数满足关系式

$$p'(x) = p(x) \frac{x-d}{ax^2+bx+c}$$

请找到其中的一种函数，讨论性质并给出抽样方法。

关键词

抽样法，常微分方程

¹中国科学技术大学物理学院

*作者: dslmd@mail.ustc.edu.cn

1. 数学上的分析与算法

首先通过Mathematica软件，我们试了一下在11.3的版本下，这个函数不能给出解析解。而我的能力也给不出解析解。所以我采用数学上的分析。

1.1 数学上的分析

对于题目所述表达式

$$p'(x) = p(x) \frac{x-d}{ax^2+bx+c}$$

首先要求解球面上按照面积均匀分布的概率密度函数。

1.1.1 d的任意性，可取d=0

我们做以下变换： $(x-d) \rightarrow x$ ，于是题目的式子会变成

$$p'(x) = p(x) \frac{x}{ax^2+(b+2da)x+(bd+ad^2+c)}$$

所以可以看出d的作用在此处只是让 x 偏移，因此可以不失普遍性地假设 $d=0$ 。

1.1.2 a的范围

可以由微分方程解出

$$p(x) = \exp\left(\int dx \frac{x-d}{ax^2+bx+c}\right)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时， $p(x)$ 必须收敛，所以此时

$$p(x) \rightarrow \exp\left(\frac{1}{a} \int \frac{1}{x} dx\right) = |x|^{\frac{1}{a}}$$

可以推断出 $-1 < a < 0$ ，所以，当自变量的取值范围不受限制是，必须要求 $-1 < a < 0$ 成立。

1.1.3 $b^2 - 4ac$ 的范围

我们同时注意到，当 $-1 < a < 0$ 时，如果 $b^2 - 4ac > 0$ ，则会出现两个奇点（两个解）

接下来需要研究 $p(x)$ 在奇点附近的积分性质。当我们更仔细地研究时，会发现第二项在柯西积分的意义下必定在一个奇点处发散，因为其在两个奇点处的左极限异号，并且在奇点附近，第二项的积分式的分母趋近于零，从而积分值在一个奇点处趋向于正无穷大，另一个奇点处趋向于负无穷大，其中一个必定会使 E 指数趋向于无穷大，所以我们需要条件是 $b^2 - 4ac < 0$ 。

1.2 算法：抽样方法

我准备采用 $a = -0.5, b = 0, c = -0.5, d = 0$ ，之所以取 $b = 0$ 是为了计算的简单。我们可以解出

$$p(x) = \frac{A}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

所以我们可以采用直接抽样法。

$$\xi(x) = \int p(x) dx = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

所以最后

$$x = \tan\left(\pi\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\right)$$

2. 计算结果及分析

根据上述算法，可以得到抽样统计频数图如图1-4所示。可见随机抽样得到的频数分布（蓝色分布）与理论预测（红线）符合得相当好，可见这样的直接抽样方法是合理的。

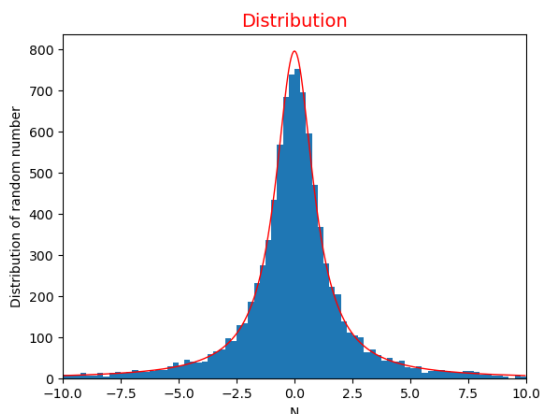


图 1. 函数 $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 的分布图。蓝色统计分布是随机数的结果，红色是理论上函数的分布图，测试1

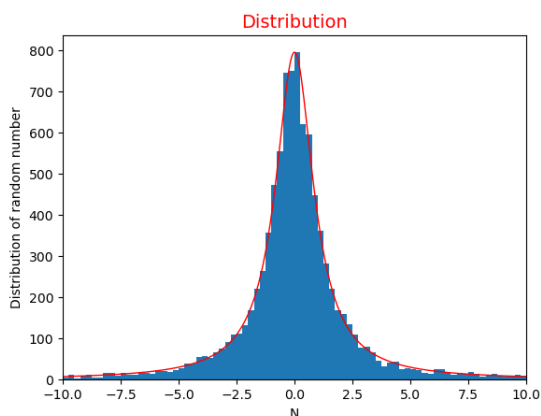


图 2. 函数 $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 的分布图。蓝色统计分布是随机数的结果，红色是理论上函数的分布图，测试2

3. 结论

符合题意中定义的概率密度函数有无穷个，只要满足

$$-1 < a < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

即可。

本次实验采用直接抽样方法。

我在这些无穷个函数中挑选了一个相对比较简单函数进行模拟，本次推导得到的概率的函数是

$$x = \tan(\pi(\xi - \frac{1}{2}))$$

，最终的结果如图1-4所示，可以看出与理论符合得很好，说明本次实验完美结束！

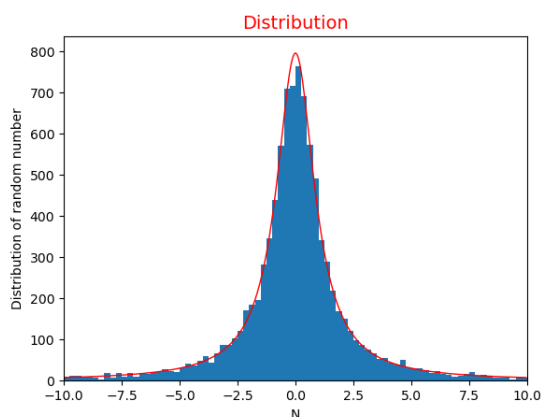


图 3. 函数 $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 的分布图。蓝色统计分布是随机数的结果，红色是理论上函数的分布图，测试3

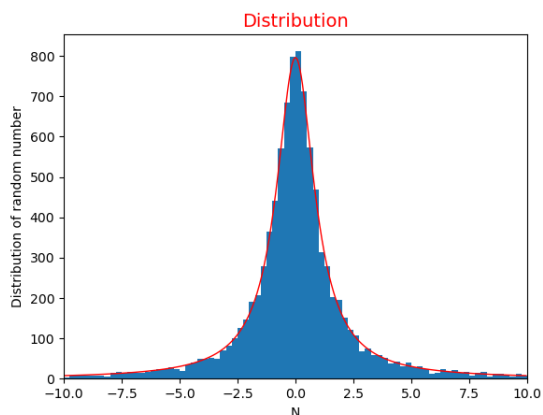


图 4. 函数 $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 的分布图。蓝色统计分布是随机数的结果，红色是理论上函数的分布图，测试4