

计算物理homework3

李明达 PB18020616^{1*}

摘要

这是计算物理第三次作业，作业题目是在球坐标系 (ρ, θ, ϕ) 下产生球面上均匀分布的随机坐标点，给出其直接抽样方法。

关键词

直接抽样法

¹中国科学技术大学物理学院

*作者: dslmd@mail.ustc.edu.cn

1. 原理与算法

1.1 原理

首先需要求解球面上按照面积均匀分布的概率密度函数。当分布是按照面积均匀分布式，概率分布函数为

$$F(\theta, \phi) = \frac{\int \int \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi} = \frac{\phi(1 - \cos\theta)}{4\pi} = P(\theta)P(\phi)$$

其中

$$P(\theta) = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

$$P(\phi) = \frac{\phi}{2\pi}$$

可见, θ, ϕ 彼此独立, 于是只要分别产生这两个分布对应的随机变量即可。由直接抽样法:

第一个分布可以直接由 $[0,1]$ 内的随机数乘 2π 得到;

第二个分布为:

$$\xi(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin(u)}{2} du = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$$

对其取反函数得到:

$$\theta = \arccos(1 - 2\xi)$$

于是我们对球坐标球面产生了一堆随机数。

1.2 算法

为了实现算法, 我们引用homework1中用到的Schrage算法, 然后进行改造: `phi.RandN(int seed, int N)` 用于产生N个随机数, 并把随机数转换成 ϕ , 并写入文件; 而 `theta.RandN(int seed, int N)` 产生N个随机数, 并把随机数转换成 θ , 并写入文件。详见我的code.c源文件。这两个函数不能同时调用, 否则会产生一定程度的关联 (因为同一时间Seed值相同), 这个会在后面讨论。

2. 计算结果及分析

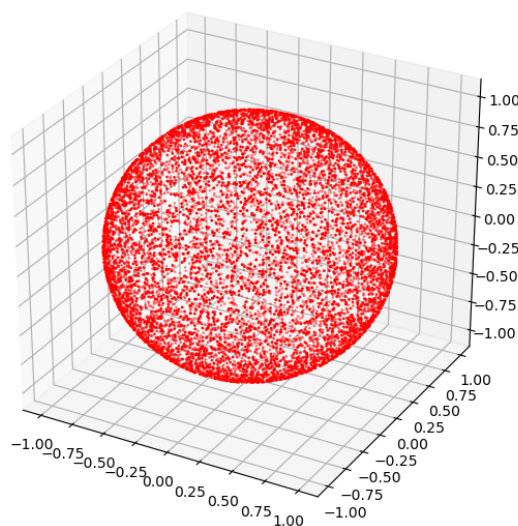


图 1. 取10000个点搞出来的分布图, 角度1

我们取球的半径为1.

图1而图2是我产生的10000个点的分布图, 图3和图4是我产生的50000个点的分布图, 可以看到球面上均匀分布的随机点列, 说明随机性很好。

3. 总结以及讨论

3.1 总结

对于一个分布问题的直接抽样, 我们首先应该明确这个问题的定义, 本题中的均匀分布应该理解为按照球面面积的均匀分布, 然后我们通过求反函数的方法, 编程计算。最终得到了图1, 2, 3, 4所示的好结果。不过我在编程的时候也试了一下让两个程序同时产生随机数, 我把我的思考放在了下面讨论。

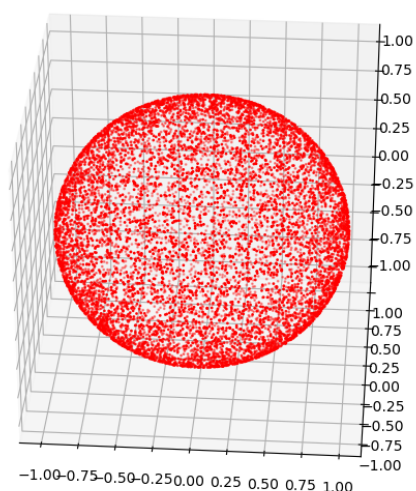


图 2. 取10000个点搞出来的分布图，角度2

如果发生了两个随机数“同时”运行，则他们之间不再互相独立。

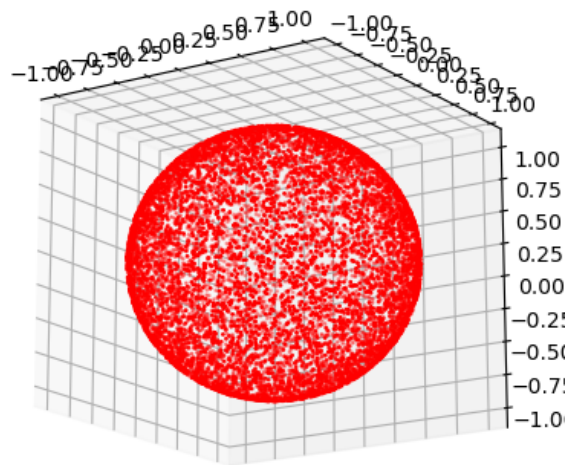


图 4. 取50000个点搞出来的分布图，角度2

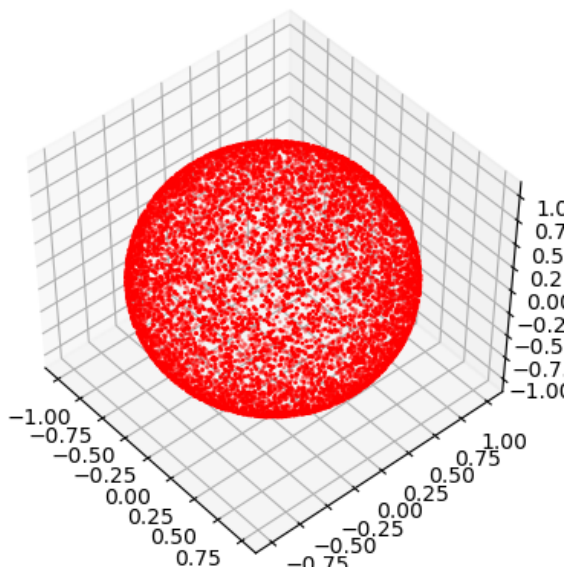


图 3. 取50000个点搞出来的分布图，角度1

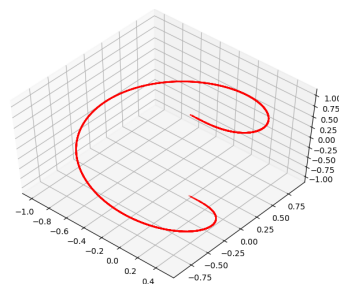


图 5. 当phi_RandN(int seed, int N)和theta_RandN(int seed, int N)这两个函数同时运行，随机数有关联的时候，分布图角度1

3.2 讨论

我在编程的时候，尝试让phi_RandN(int seed, int N)和theta_RandN(int seed, int N)这两个函数同时运行，由于时间相同，Seed种子值相同，所以产生的随机数有关联，画出了图5，图6所示的样子：

这再一次告诉我们，计算机所用的随机数发生器取决于其种子值，虽然前面作业里我们检验了他们的独立性都还可以，但是在程序快速运行的时候，

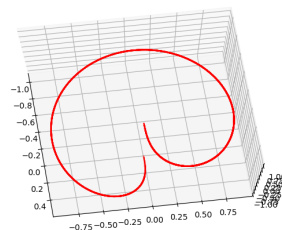


图 6. 当phi_RandN(int seed, int N)和theta_RandN(int seed, int N)这两个函数同时运行，随机数有关联的时候，分布图角度2