

# 计算物理homework5

李明达 PB18020616<sup>1\*</sup>

## 摘要

这是计算物理第五题作业，作业题目是对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在 (x, y) 平面上投影的几率分布函数。并由此验证Marsaglia抽样方法，确为球面上均匀分布的随机抽样。

## 关键词

Marsaglia抽样方法

<sup>1</sup>中国科学技术大学物理学院

\*作者: dslmd@mail.ustc.edu.cn

## 1. 主要公式和算法

### 1.1 主要公式

根据第三题作业我们知道，均匀单位球上点的分布是：

$$P(\theta, \phi) = \frac{\sin\theta}{4\pi}$$

再有球坐标变换

$$x = \sin\theta\cos\phi$$

$$y = \sin\theta\sin\phi$$

可得

$$\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

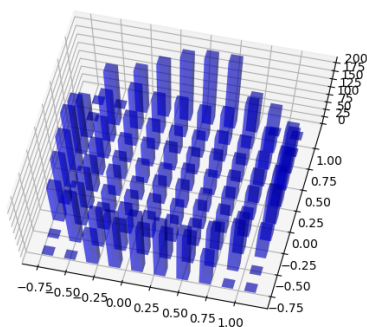


图 1. 由(x, y)平面上投影的几率分布函数验证Marsaglia抽样方法，角度1

所以可以得到xy平面上的概率密度(考虑上下表面所以乘2)：

$$p(x, y) = 2 * p(\theta, \phi) \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(x, y)}$$

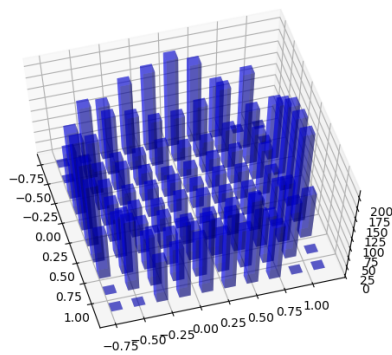


图 2. 由(x, y)平面上投影的几率分布函数验证Marsaglia抽样方法，角度2

即：

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

在抽样的时候，我采用Marsaglia抽样方法，具体公式如下：

$$x = 2u\sqrt{1-r^2}$$

$$y = 2v\sqrt{1-r^2}$$

$$z = 1 - 2r^2$$

### 1.2 算法——Marsaglia抽样方法

我通过Sphere\_RandN\_Marsaglia\_xy 来实现Marsaglia抽样方法，一共产生N个球表面的点，并将其xyz值写入文件“x.txt”，“y.txt”，“z.txt”中，最后我们通过python画图。

### 1.3 检验

检验的办法，是通过看xy平面上的频数分布是否与理论值相同。

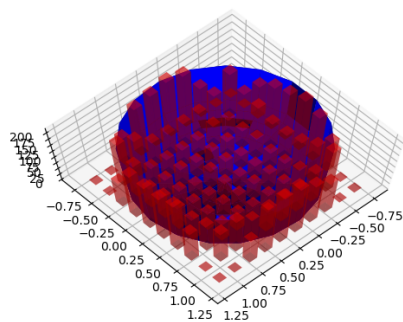


图 3. 由(x, y)平面上投影的几率分布函数验证Marsaglia抽样方法，蓝色表面是理论值，红色分布是模拟值，角度1

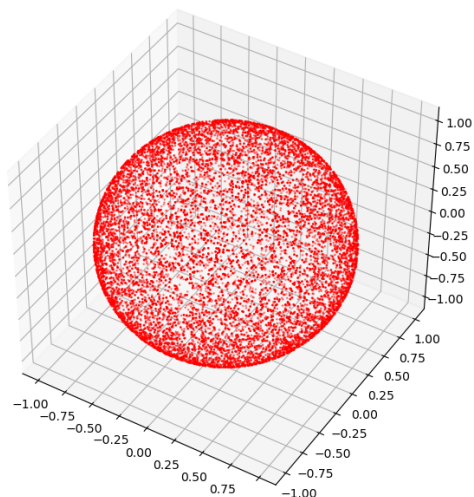


图 5. 由3D图来验证Marsaglia抽样方法

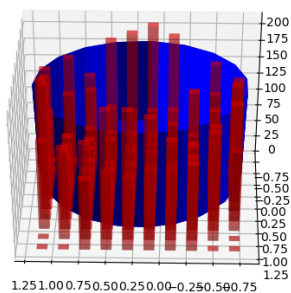


图 4. 由(x, y)平面上投影的几率分布函数验证Marsaglia抽样方法，蓝色表面是理论值，红色分布是模拟值，角度2

但为了可信性，我也用3D图和xy, yz, zx投影图来检验一下Marsaglia抽样方法。

## 2. 计算结果及分析讨论

### 2.1 由(x, y)平面上投影的几率分布函数验证Marsaglia抽样方法

如图1, 2, 3, 4可以看出，实验模拟值和理论值符合的不错。说明可以验证Marsaglia抽样方法

### 2.2 用3D图 和xy, yz, zx投影图来检验Marsaglia抽样方法

#### 2.2.1 3D图

从图5可以看出，在球面上分布的非常均匀。

#### 2.2.2 xy,yz,zx投影图

从图6, 7, 8可以看出，在xy,yz,zx的投影图上

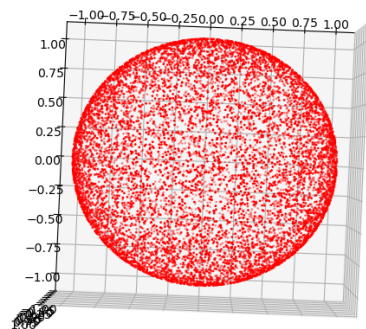


图 6. 由(x, y)平面上投影的散点分布验证Marsaglia抽样方法

分布的非常均匀。

## 3. 结论

在本题中我们计算了球面均匀分布点在 (x,y) 平面投影的概率密度函数 $p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 并提出了一种直接抽样方法生成该概率密度分布，并对其正确性进行了模拟检验。

同时我们xy投影图比较实验与理论的结果，发现比较符合；最后我们又通过3D散点图，xy, yz, zx散点图证明了Marsaglia 抽样方法的正确性。由此得到的启示是，对一个给定概率密度函数的抽样，通过坐标变换可以提供我们新的抽样方法。

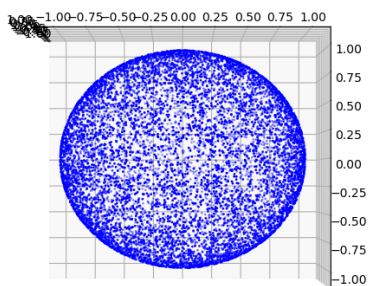


图 7. 由(y, z)平面上投影的散点分布验证Marsaglia抽样方法

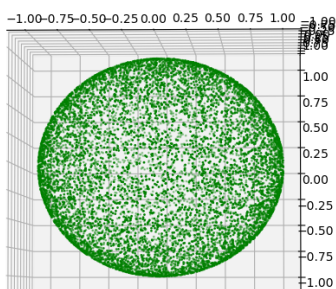


图 8. 由(z, x)平面上投影的散点分布验证Marsaglia抽样方法