

计算物理homework9

李明达 PB18020616^{1*}

摘要

这是计算物理第9次作业，作业题目是自设若干个随机分布（相同或不同分布，它们有相同或不同的和），通过Monte Carlo模拟，验证中心极限定理成立（ $N=2、5、10$ ）。

关键词

Monte Carlo模拟、中心极限定理

¹中国科学技术大学物理学院

*作者: dslmd@mail.ustc.edu.cn

1. 主要公式和算法

1.1 两个被抽函数以及主要公式

中心极限定理的内容是：对任意随机数列 A_n ，设其期待值为 μ ，方差为 σ^2 ，则当抽样数 $n \rightarrow \infty$ 时，有

$$\frac{\bar{A}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$$

在本题中，我用以下两个随机分布来验证中心极限定理：

1. $p_1(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$ ，其中 $x \in [-1,1]$

这个函数的平均值 $\mu = 0$ ，标准差 $\sigma = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1-x^2)x^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.447$

2. $p_2(x) = \frac{3}{4}\sqrt{1-|x|}$ ，其中 $x \in [-1,1]$

这个函数的平均值 $\mu = 0$ ，标准差 $\sigma = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{3}{4}\sqrt{1-|x|}x^2 dx} = 0.478$

由上述讨论可知，在抽样数 $n \rightarrow \infty$ 时，对这两个分布标准化以后会趋于正态分布： $\frac{\bar{A}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$ ，从而 $\bar{A}_n \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

两个函数的图像如图1所示。

接下来我们就对这两个分布取不同的 N ，看是否符合标准正态分布，从而验证中心极限定理。

1.2 算法

在这个作业中我写了两个函数：第一个是`p1_sampling(int seed, int N)`，它通过舍选抽样第一个函数 N 次，并存储到抽样结果“p1.2.txt”，“p1.5.txt”，“p1.10.txt”，文件末尾的数字分别指求平均的个数为2、5、10次，这里的 N 是总抽样次数；第一个是`p2_sampling(int seed, int N)`，它通过舍选抽样第一个函数 N 次，并存储到抽样结果“p2.2.txt”，“p2.5.txt”，“p2.10.txt”，文件

末尾的数字分别指求平均的个数为2、5、10次，这里的 N 是总抽样次数。

我取 $N=10000$ 和 $N=50000$ 来进行两次实验。共得到12个数据文件，画成12幅图，然后把这12幅图总结成2幅，分别对应第一个函数（图2）和第二个函数（图3）。

2. 实验结果和分析

2.1 第一个函数结果和分析

第一个函数的抽样结果和高斯函数的拟合结果如图2，可以看出在总抽样次数为10000次的时候，随着 N 的不断增大，和高斯分布拟合的越来越好。说明中心极限定理得以验证；而在总抽样次数为50000的时候，随着 N 的增大，函数的拟合结果比总数为10000时更好。这是因为大样本会让抽样更加精准。

2.2 第二个函数结果和分析

第二个函数的抽样结果和高斯函数的拟合结果如图3，可以看出在总数为10000和50000的情况下， $N=2$ 的时候，函数还残留了原本函数本身的模样。而随着 N 增大，变成5的时候，函数变得更像高斯函数了一些。而随着 N 增大变成10，可以看出函数已经非常像高斯分布了。这使得中心极限定理得以验证。

3. 总结

本次实验我自己构造了两个 $[-1,1]$ 的分布函数，由于函数样式略复杂，所以我使用舍选抽样的办法。从最后结果来看，该实验在 $N=2, 5, 10$ 的情况验证了中心极限定理。综上所述，实验完美完成。

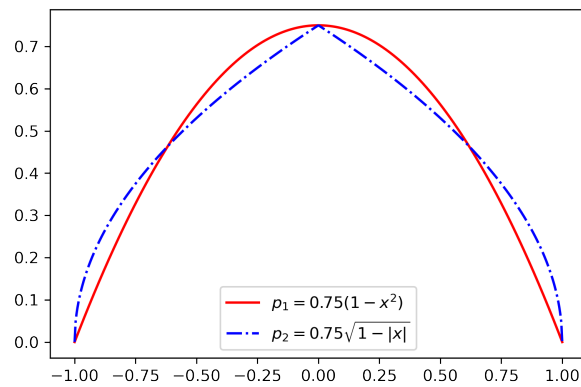


图 1. 两个函数的情况

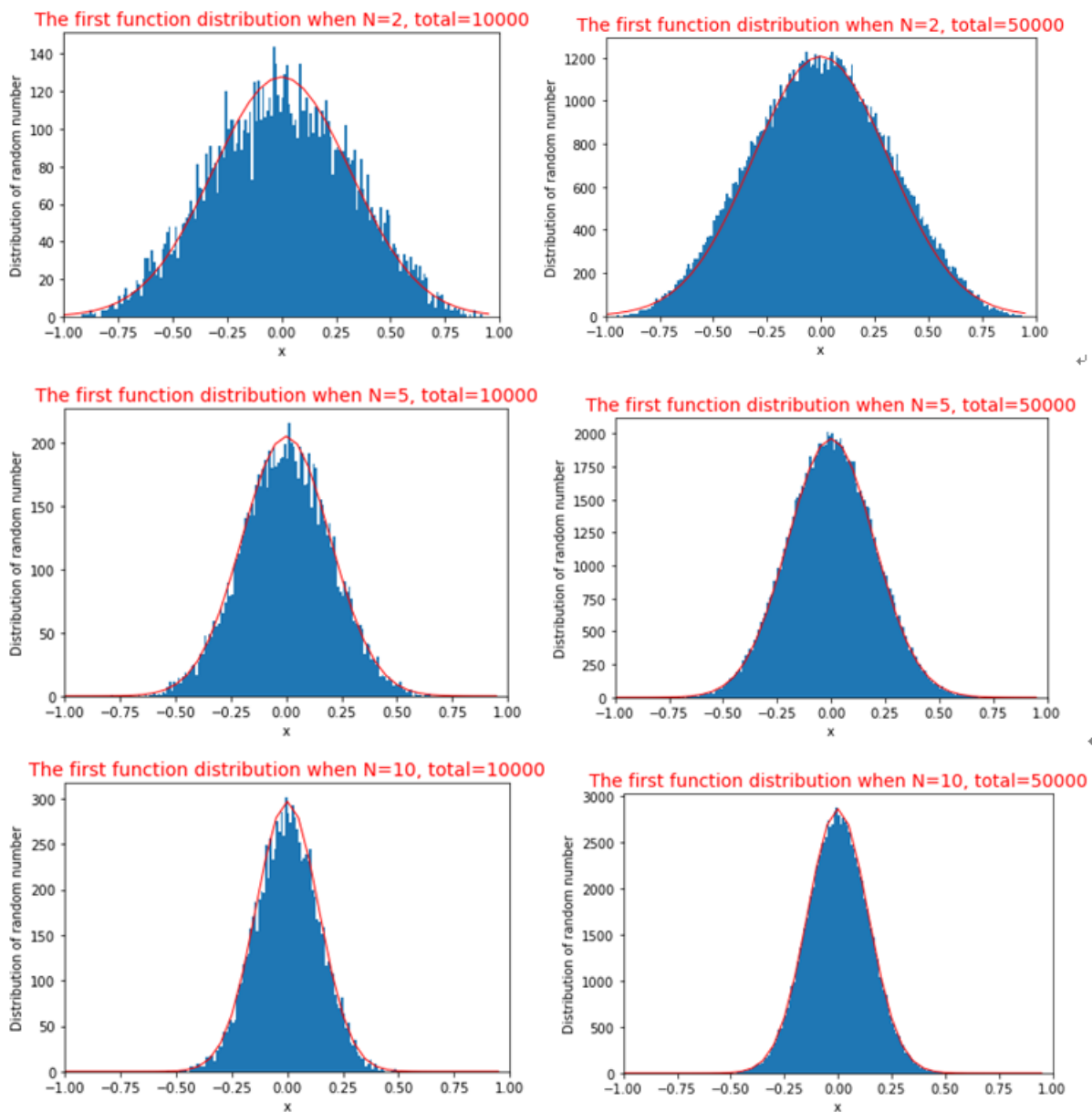
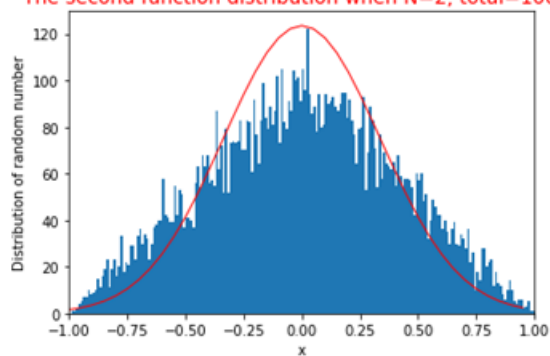
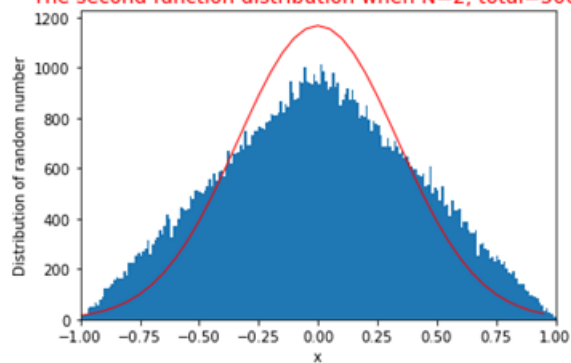


图 2. 对第一个函数的抽样结果（蓝色）和与高斯函数（红色）的拟合。左边一列三图都是在抽样总数为10000个情况下的结果，右边一列三图都是50000个情况下的结果。上中下一共三列，分别是N=2、5、10的结果。

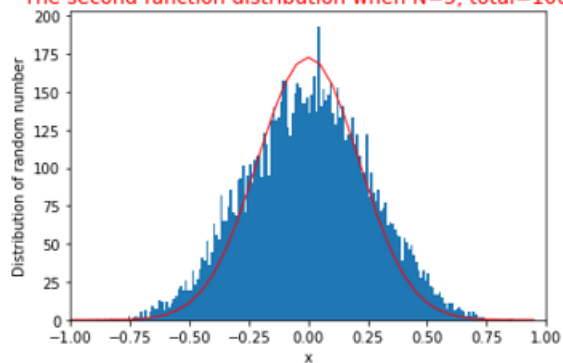
The second function distribution when $N=2$, total=10000



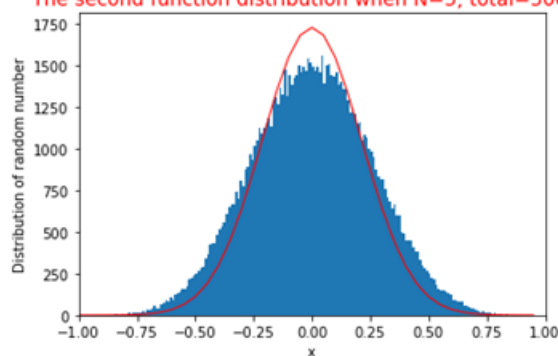
The second function distribution when $N=2$, total=50000



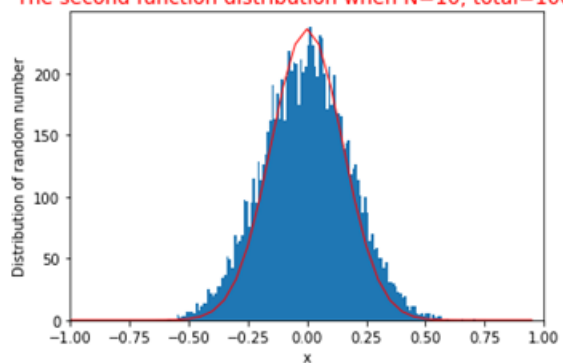
The second function distribution when $N=5$, total=10000



The second function distribution when $N=5$, total=50000



The second function distribution when $N=10$, total=10000



The second function distribution when $N=10$, total=50000

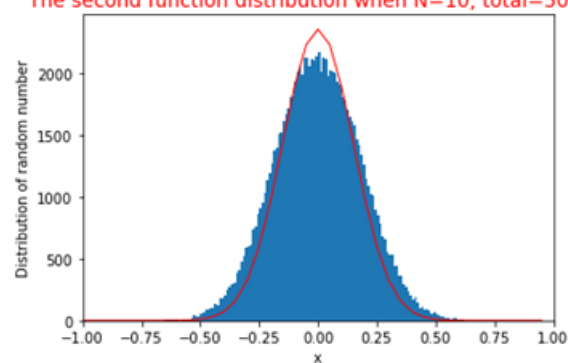


图 3. 对第二个函数的抽样结果（蓝色）和与高斯函数（红色）的拟合。左边一列三图都是在抽样总数为10000个情况下的结果，右边一列三图都是50000个情况下的结果。上中下一共三列，分别是 $N=2$ 、5、10的结果。