

计算物理homework2

李明达 PB18020616^{1*}

摘要

用16807产生器测试随机数序列中满足关系 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 的比重,并讨论Fibonacci延迟产生器中出现这种关系的比重。

关键词

16807产生器、Fibonacci延迟产生器、随机数检验

¹中国科学技术大学物理学院

*作者: dslmd@mail.ustc.edu.cn

1. 算法以及主要公式

对于一个理想的随机数发生器来说,满足关系 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 的等价情况一共有 $A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$,所以它的概率应该是 $1/6$ 。所以,我们主要测试我们的随机数发生器出现关系 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 比重相对于 $1/6$ 的偏离程度。

1.1 16807产生器

我们采用线性同余法

$$I_{n+1} = aI_n + b$$

$$x_n = I_n/m$$

并且取参数 m 为 int 型最大正整数 $2^{31}-1$,同时取 $b=0, a=16807$ 来产生随机数(即生成一个16807产生器),同时使用Schrage算法进行取模运算。

本实验中,我利用Schrage.16807_ratio(long int N)函数产生N个随机数,并且计算满足题意的比例,然后把这个比例返回。然后又通过void print_16807_ratio()生成多个满足 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 的比例,然后print到屏幕上。

1.2 Fibonacci产生器

我们取公式

$$I_n = I_{n-p} \otimes I_{n-q} \mod m$$

中的运算符为减法运算, $m=2^{31}-1$,若 I_n 为负数则加上 $m=2^{31}-1$,生成的随机数为 $x_n = I_n/m$ 。时,我们选取不同的 p 与 q ,测试斐波那契随机数产生器的效果。由于减法运算不存在溢出问题,故我们实际上不用考虑取模的运算。只需要根据需求,加上一个 $m=2^{31}-1$ 或不变。

本实验中,我采用的算法主要是带载减法产生器,因为这个比较简单,产生的效果也不错。

注意!!为了简单起见,我这里直接没有比较 x_n 而是直接比较其 m 倍,即 I_n !具体可见我的代码!

实验具体实现时,我写了lagged_fib_generater_ratio(int N, int p, int q)函数,这个函数通过Fibonacci延迟产生器来产生随机数,并在子程序中直接算出题中要求的ratio;随后我又通过print_fib_ratio()函数生成一系列Fibonacci产生器,以及带载减法产生器的随机数,并计算满足题意的比例,然后print到屏幕上。

1.3 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 关系的比重检验

在比较时,我创立了一个有50个元素的数组(之所以取50主要是为了方便后面的带载减法生成器),通过比较 I_0, I_1, I_2 来判断是否满足 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 。这种方法的好处是,不需要同时占用大量的资源,这会让整个程序运行的更好更快。

2. 实验结果

最终程序的运行结果如图1所示:我们接下来

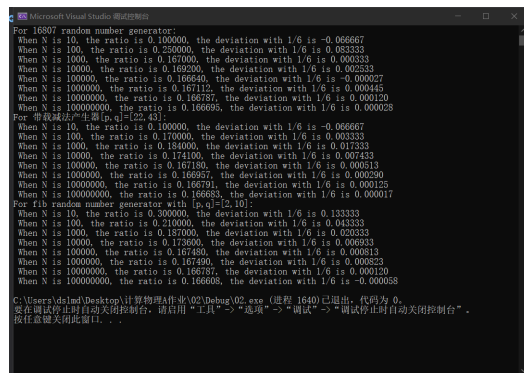


图1. 程序运行结果

逐个分析其情况:

2.1 16807产生器的结果

通过程序，我们能读出以下结果： For 16807 random number generator:

When N is 10, the ratio is 0.100000, the deviation with 1/6 is -0.066667

When N is 100, the ratio=0.250000, the deviation with 1/6 is 0.083333

When N is 1000, the ratio=0.167000, the deviation with 1/6 is 0.000333

When N is 10000, the ratio=0.169200, the deviation with 1/6 is 0.002533

When N is 100000, the ratio=0.166640, the deviation is -0.000027

When N is 1000000, the ratio=0.167112, the deviation is 0.000445

When N is 10000000, the ratio=0.166787, the deviation is 0.000120

When N is 100000000, the ratio=0.166695, the deviation is 0.000028

可以看出，随着N增大，16807随机数产生器满足 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 的比例相对于1/6的偏移越来越小。越来越趋近于1/6，并且误差近似服从 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 的分布。这与我们所想的预期符合。

2.2 Fibonacci延迟产生器的结果

这里面包括两个部分：

1.对于带载减法产生器[p,q]=[22,43]:

When N is 10, the ratio is 0.100000, the deviation with 1/6 is -0.066667

When N is 100, the ratio is 0.170000, the deviation with 1/6 is 0.003333

When N is 1000, the ratio is 0.184000, the deviation with 1/6 is 0.017333

When N is 10000, the ratio= 0.174100, the deviation with 1/6 is 0.007433

When N is 100000, the ratio=0.167180, the deviation with 1/6 is 0.000513

When N is 1000000, the ratio= 0.166957, the deviation is 0.000290

When N is 10000000, the ratio= 0.166791, the deviation is 0.000125

When N is 100000000, the ratio= 0.166683, the deviation is 0.000017

2.对于Fibonacci随机数产生器，我们取[p,q]=[2,10]:

When N is 10, the ratio is 0.300000, the deviation with 1/6 is 0.133333 When N is 100, the ratio is 0.210000, the deviation with 1/6 is 0.043333 When N is 1000, the ratio is 0.187000, the deviation with 1/6 is 0.020333 When N is 10000, the ratio is 0.173600, the deviation with 1/6 is 0.006933 When N is 100000, the ratio is 0.167480, the deviation with 1/6 is 0.000813 When N is 1000000, the ratio is 0.167490, the deviation with 1/6 is 0.000823 When N is 10000000, the ratio is 0.166787, the deviation with 1/6 is 0.000120 When N is 100000000, the ratio is 0.166608, the deviation is -0.000058

可以看出，随着N增大，这两个随机数产生器的偏移越来越小。近似服从 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 的分布。这也印证了 $1/\sqrt{N}$ 的普适性。

2.3 误差结果概览图

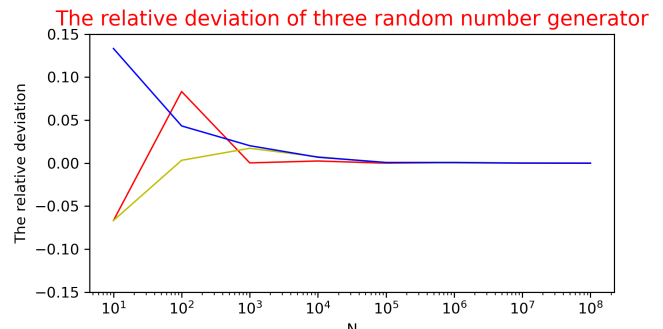


图 2. 误差结果概览图。其中红色代表16807随机数发生器，黄色代表带载减法产生器，蓝色代表[p,q]=[2,10]的Fibonacci随机数产生器

可以看出，在N比较小的情况下，三个随机数产生器满足 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 的比例偏移1/6的都比较大（约为0.1左右），而当N增大时，满足 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 的比例都会趋向于1/6，最终几乎与1/6相等，并且误差都正比于 $1/\sqrt{N}$ 。

3. 结论

总体来说，本次实验非常成功！我首先用16807产生器测试随机数序列中满足关系 $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ 的比重，随着N的增大，这个比重不断接近1/6。其次，我通过模拟Fibonacci延迟产生器以及更复杂的带载减法产生器，得出了相同的结果，并且三者 $N = 10^8$ 的时候，其相对偏移误差都在 10^{-5} 10^{-4} 的量级，这也完美印证了 $1/\sqrt{N}$ 的普遍性。

斐波那契随机数产生器在提高数据的周期性和独立性方面有重要意义。另一方面，在 p, q 的选取我也得到了一些心得，这个 p, q 的选取并非越复杂越好，我们用相对简单的 2,10 反而得到了最优异的测试效果。不过，实验具有随机性，这个需要从解

析的方式更进一步的研究和探讨，不过这个就超出了本实验的范畴。

总体来说，本次实验圆满结束，并且我从这个实验学到了很多。