计算物理第8题

李明达 PB18020616[1]*

摘要

这是计算物理第8次作业，作业题目是用Monte Carlo方法计算如下定积分，并讨论有效数字位数。

$$\int_0^2 dx\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{9/10} dx \int_0^{4/5} dy \int_0^{9/10} dz \int_0^{2} du \int_0^{13/10} dv(6-x^2-y^2-z^2-u^2-v^2)$$

关键词

Monte Carlo方法计算定积分、中心极限定理

[1]中国科学技术大学物理学院 *作者: dslmd@mail.ustc.edu.cn

1. 数学公式和编程算法

1.1 数学

出于方便考虑，我们先做被积函数的图，并通过数学软件算出两个积分的理论值。我们先看第一个式子：

$$\int_0^2 dx\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

其图像如图1所示。通过理论的计算，我们可以得出，理论值为：2.689521

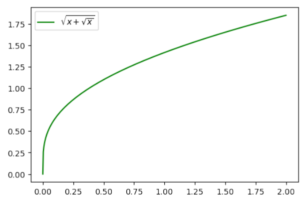


图 1. 第一个式子的被积函数图像

再来看第二个式子：

$$\int_0^{9/10} dx \int_0^{4/5} dy \int_0^{9/10} dz \int_0^{2} du \int_0^{13/10} dv(6-x^2-y^2-z^2-u^2-v^2)$$

遗憾的是这个函数由于维度太多所以在三维给不出图像。但通过理论的计算，我们可以得出，积分的理论值为：5.644080

画图的代码我放在了zip文件夹里，代码名称是plot and cal.ipynb

1.2 编程算法

利用第一次作业里的Schrage算法以及产生种子值的办法，我额外定义了两个函数：intergral_cal_1(int seed,long int N)用产生的随机数计算第一个定积分，而intergral_cal_2(int seed, int N)用产生的随机数计算第二个定积分。这两个函数采用讲义里提到的平均值法，利用中心极限定理来计算定积分。具体过程如下：

第一个函数：

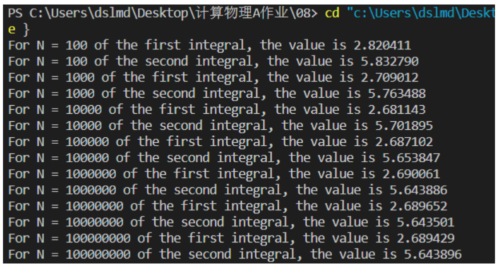
$$\int_0^2 f(x)dx = 2\times\langle f(x)\rangle = 2\frac{\Sigma_i f(x_i)}{N}$$

所以产生N个随机数并取平均之后，就可以得到所求的定积分了。

第二个函数同理，产生N个随机数取平均之后，乘以积分区域的大小，可以得到最终的定积分值。

2. 实验结果及处理

最后程序的输出结果如图2所示：



```
PS C:\Users\dslmd\Desktop\计算物理A作业\08> cd "c:\Users\dslmd\Deskt
e }
For N = 100 of the first integral, the value is 2.820411
For N = 100 of the second integral, the value is 5.832790
For N = 1000 of the first integral, the value is 2.709012
For N = 1000 of the second integral, the value is 5.763488
For N = 10000 of the first integral, the value is 2.681143
For N = 10000 of the second integral, the value is 5.701895
For N = 100000 of the first integral, the value is 2.687102
For N = 100000 of the second integral, the value is 5.653847
For N = 1000000 of the first integral, the value is 2.690061
For N = 1000000 of the second integral, the value is 5.643886
For N = 10000000 of the first integral, the value is 2.689652
For N = 10000000 of the second integral, the value is 5.643501
For N = 100000000 of the first integral, the value is 2.689429
For N = 100000000 of the second integral, the value is 5.643896
```

图 2. 实验结果

可以整理成下表：其中N是点的总数

lg(N)	第一个积分结果	第二个积分结果
2	2.820411	5.832790
3	2.709012	5.763488
4	2.681143	5.701895
5	2.687102	5.653847
6	2.690061	5.643886
7	2.689652	5.643501
8	2.689429	5.643896

3. 有效数字位数讨论

考虑到第一个积分的理论值为2.689521，第二个积分的理论值为5.644080

可得如下表：其中N是点的总数

lg(N)	积分误差绝对值1	积分误差绝对值2
2	0.130890	0.188710
3	0.019491	0.119408
4	0.008378	0.057815
5	0.002419	0.009767
6	0.000540	0.000194
7	0.000131	0.000579
8	0.000092	0.000184

可以看出，随着N增大，精度越来越高，有效数字位数再增加。

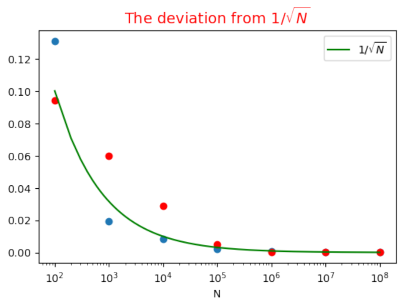


图 3. 计算结果与$1/\sqrt{N}$的偏移，其中蓝色的点是第一个积分的误差，其中红色的点是第二个积分的误差（注意这里把红色点的y值缩小了0.5倍，从而更好地体现趋势）

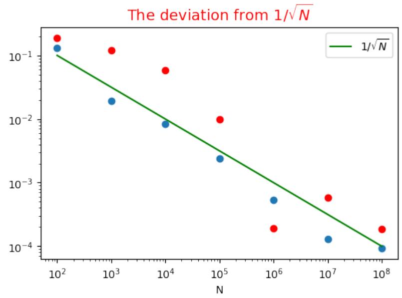


图 4. 计算结果与$1/\sqrt{N}$的偏移，其中蓝色的点是第一个积分的误差，其中红色的点是第二个积分的误差

可以从图3看出，基本按照$1/\sqrt{N}$的趋势减少。我们可以画出纵坐标y也是log的图，可以更好看出趋势。

通过图4可以看出，红色点和蓝色点的斜率基本上与绿线($1/\sqrt{N}$)的相同，说明这三个趋势只差一个因子。这非常好的说明了误差按照$1/\sqrt{N}$的趋势减小。

4. 结论

在本题中，我使用 Monte Carlo 积分方法计算了一维积分和五维积分：

$$\int_0^2 dx\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{9/10} dx \int_0^{4/5} dy \int_0^{9/10} dz \int_0^{2} du \int_0^{13/10} dv(6-x^2-y^2-z^2-u^2-v^2)$$

并且我发现有效数字位数随着N的增加而增加。为了进一步分析有效数字的位数，我通过与理论值对比，发现积分误差正比于$\frac{1}{\sqrt{N}}$，这与中心极限定理的预期完美吻合。

综上所述，本次实验完美完成！