Semana da Estatística e PO com R

Otimização de portfólio em Marketing

Prof. Deoclides F. de Souza Filho

https://www.linkedin.com/in/deoclides/

Engenharia Eletrônica
1984

Mastère Avionique
1991

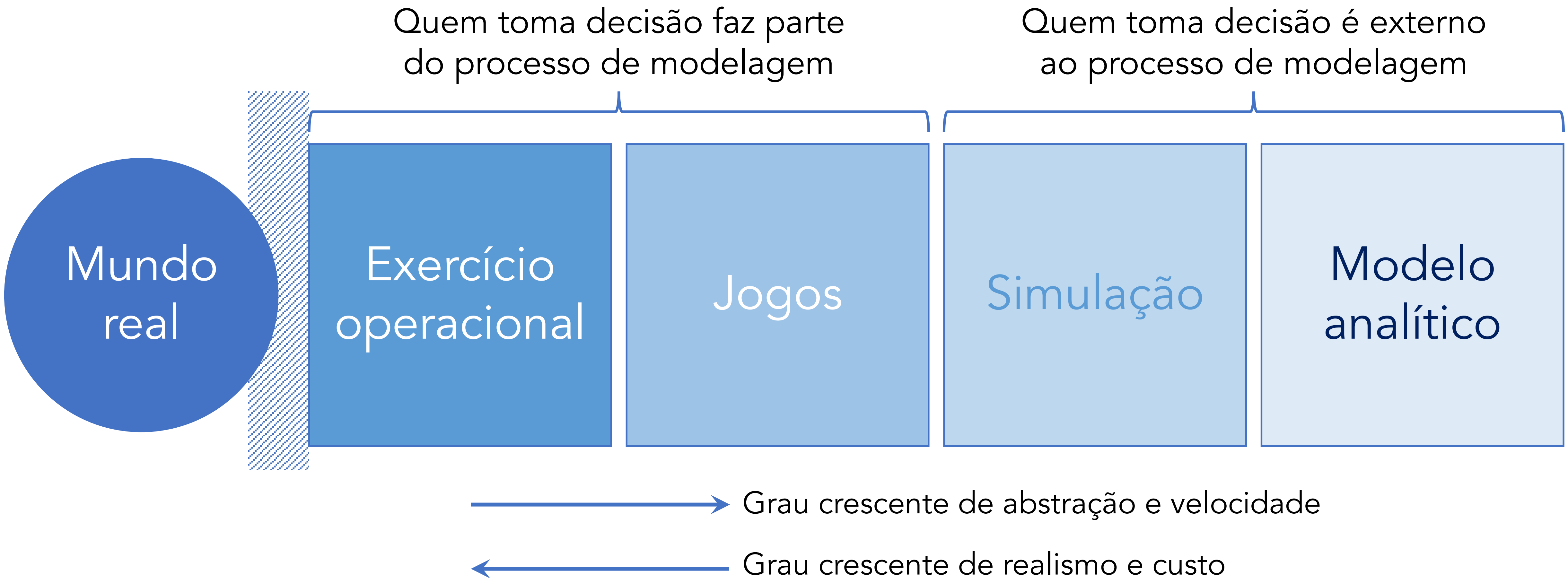
Mestrado
Computação Aplicada
1998

Engenheiro de Produção
7 anos

Sales Operations
Analytics Manager
22 anos

Professor
19 anos

Categorias de modelos

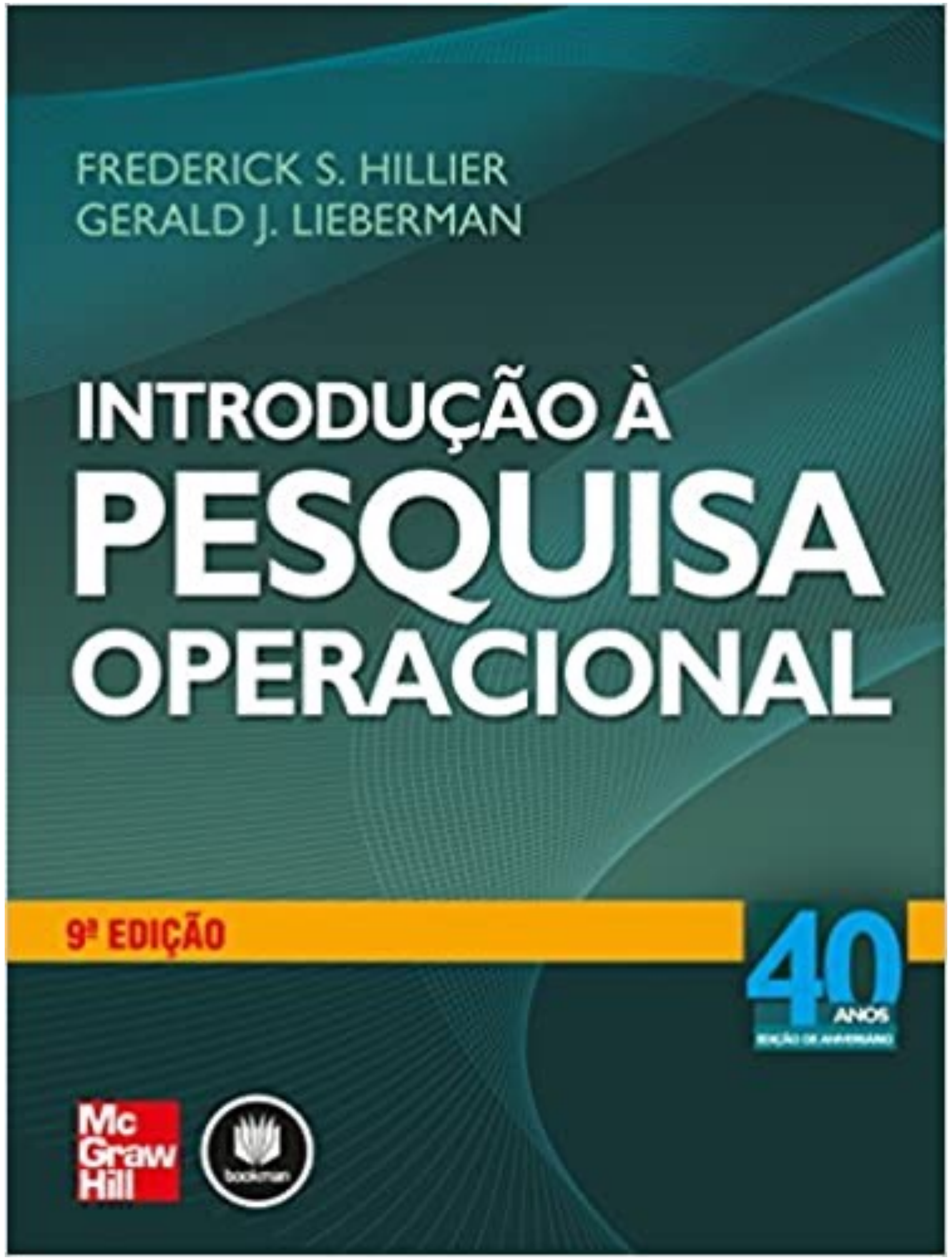


Fonte: *Applied Mathematical Programming* – Stephen P. Bradley, Arnold C. Hax, Thomas L. Magnanti – Addison-Wesley, 1977 – Capítulo 1

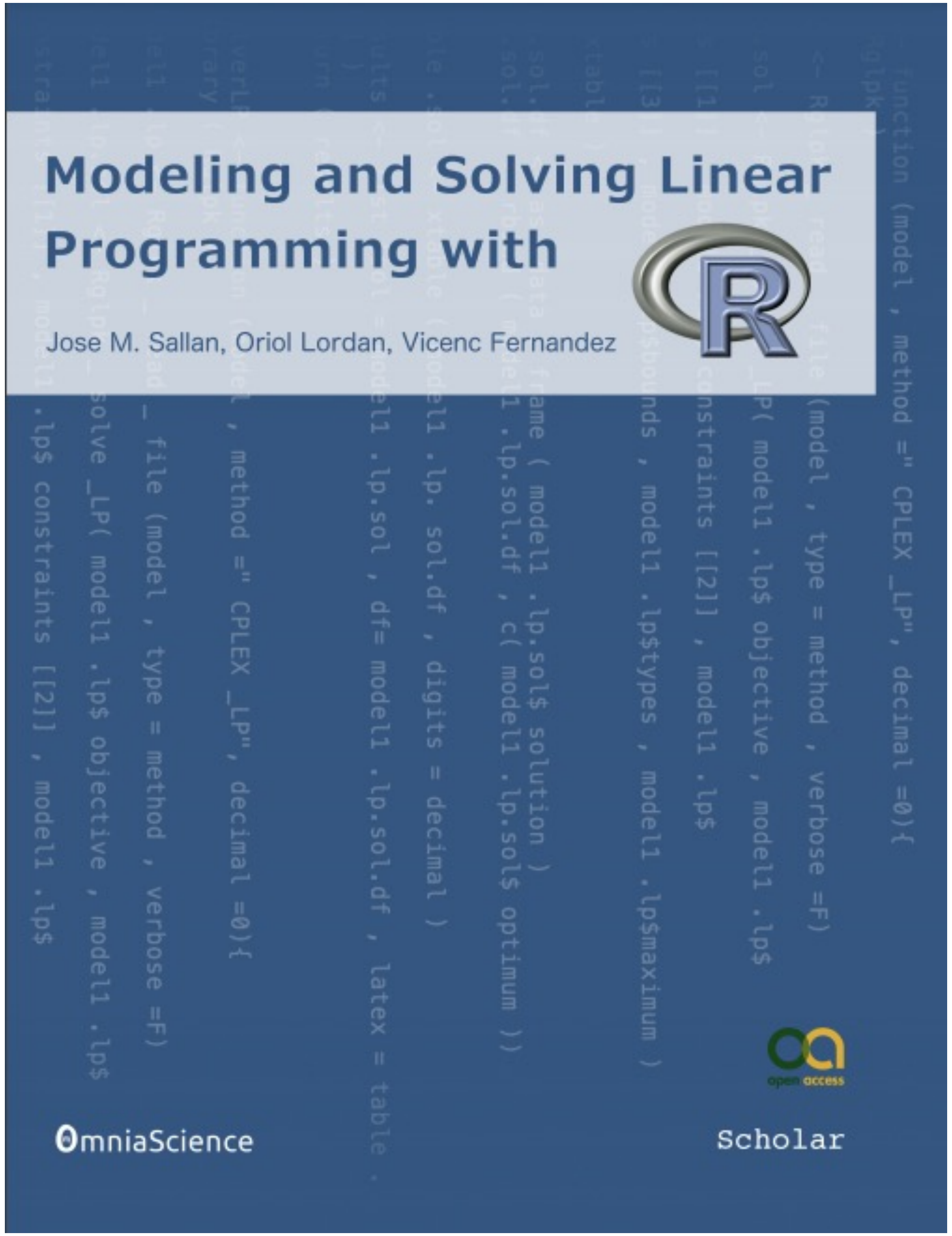
Classificação dos modelos analíticos e de simulação

	Avaliação de Estratégia	Geração de Estratégia
Certeza	Simulação determinística Modelos econométricos Sistemas de equações simultâneas Modelos de entrada-saída	Programação linear Teoria dos grafos Programação inteira Programação não linear Teoria de controle
Incerteza	Simulação de Monte Carlo Modelos econométricos Processos estocásticos Teoria das filas Teoria da confiabilidade	Teoria da decisão Programação dinâmica Teoria do estoque Programação estocástica Teoria do controle estocástico

Fonte: *Applied Mathematical Programming* – Stephen P. Bradley, Arnold C. Hax, Thomas L. Magnanti – Addison-Wesley, 1977 – Capítulo 1



5 capítulos
321/968 páginas
33% do conteúdo



https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/78335/Modeling+and+Solving+Linear+Programming+with+R.pdf?sequence=1

Programação Linear

Técnica para a otimização de uma função objetivo, que é linear, sujeita a restrições representadas por equações e inequações lineares.

Um algoritmo de programação linear encontra o ponto onde a função objetivo tem o seu valor máximo (ou mínimo), se tal ponto existir.

Seja

x_j = variável de decisão para a *j*-ésima variável
c_j = coeficiente de lucro (ou de custo) para a *j*-ésima variável
Z = função a ser maximizada (ou minimizada)

Maximizar $\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n \quad$ para n variáveis

Para as restrições

a_{ij} = coeficiente da *j*-ésima variável na *i*-ésima restrição
b_i = limitação da capacidade da *i*-ésima restrição

Assim, para m restrições

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m
\end{gathered}
$$

Maximizar	$Z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$	função objetivo
sujeito a	$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$	restrições do problema
	$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	restrições de não-negatividade

Maximizar $\quad [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

sujeito a $\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

para n variáveis e m restrições

Forma canônica

MAX $\quad Z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$

sujeito a $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

MIN $\quad Z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$

sujeito a $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

Forma padrão

OTIM $\quad Z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$

sujeito a $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

Forma necessária para aplicar o método Simplex

Método Simplex

George B. Dantzig

Em 1947, Dantzig, que trabalhava em um grupo de pesquisa da Força Área dos Estados Unidos conhecido como Projeto SCOOP (*Scientific Computation Of Optimum Programs*), desenvolveu o método simplex para resolver problemas de programação linear.

Passos do Método Simplex

1. **Formular o problema.** Isto é, escrever a função objetivo e a restrições.
2. **Converter as inequações em equações.** Isto é feito adicionando-se uma variável de folga para cada inequação.
3. **Construir a tabela inicial do simplex.** Escrever a função objetivo na última linha.
4. **O valor mais negativo na última linha identifica a coluna pivô.**
5. **Calcular as razões mínimas. A menor razão identifica a linha. O elemento na intersecção da coluna identificada no passo 4 e a linha identificada neste passo é o elemento pivô.** As razões são calculadas dividindo-se a coluna mais à direita pela coluna identificada no passo 4. Uma razão que seja zero, negativa ou que tenha zero no denominador é ignorada.
6. **Realizar o pivoteamento para fazer com que todos os outros valores nesta coluna sejam zero.**
7. **Quando não há mais valores negativos na última linha, o algoritmo finaliza; se não, começa-se de novo do passo 4.**
8. **Ler a respostas.** Obter as variáveis usando as colunas com 1s e 0s. Todas as demais variáveis são zero. O valor máximo que se está buscando surge no canto inferior direito da tabela.

Exemplo

- Uma pequena empresa vende dois produtos, Produto 1 e Produto 2.
- Cada tonelada do Produto 1 consome 30 horas de trabalho e cada tonelada do Produto 2 consome 20 horas de trabalho.
- A empresa tem um máximo de 2700 horas de trabalho disponíveis para o período considerado.
- Com relação às horas de máquina utilizadas, cada tonelada dos Produtos 1 e 2 consomem, respectivamente, 5 e 10 horas de máquina. Há 850 horas de máquina disponíveis.
- Cada tonelada do Produto 1 gera 20 M$ de lucro, enquanto o Produto 2 gera 60 M$ para cada tonelada vendida.
- Por razões técnicas, a empresa precisa produzir um mínimo de 95 toneladas no total dos dois produtos.
- Precisamos saber quantas toneladas do Produto 1 e do Produto 2 devem ser produzidas para maximizar o lucro total.

Exemplo

Variáveis de decisão

$x_1 = número\ de\ toneladas\ produzidas\ e\ vendidas\ do\ Produto\ 1$
$x_2 = número\ de\ toneladas\ produzidas\ e\ vendidas\ do\ Produto 2$

Maximizar $Z = 20x_1 + 60x_2$

Sujeito a (ht) $30x_1 + 20x_2 \leq 2700$

(hm) $5x_1 + 10x_2 \leq 850$

(pm) $x_1 + x_2 \geq 95$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

$$\underset{\boldsymbol{c}}{\begin{bmatrix} 20 & 60 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 5 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \underset{\boldsymbol{b}}{\begin{bmatrix} \leq 2700 \\ \leq 850 \\ \geq 95 \end{bmatrix}}$$

Maximizar $Z = 20x_1 + 60x_2$

Sujeito a (ht) $30x_1 + 20x_2 + s_1 = 2700$

(hm) $5x_1 + 10x_2 + s_2 = 850$

(pm) $x_1 + x_2 - s_3 = 95$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

Solvers para programação linear no R

CRAN Task View: Optimization and Mathematical Programming
https://cran.r-project.org/web/views/Optimization.html

lpSolve

- Solver para LP (Linear Programming), ILP (Integer Linear Programming) e MILP (Mixed Integer Linear Programming)
- Mais rápido
- https://cran.r-project.org/web/packages/lpSolve/lpSolve.pdf
- https://github.com/gaborcsardi/lpSolve

linprog

- Solver para LP (Linear Programming)
- Não é otimizado para velocidade
- Resultados com mais detalhes
- https://cran.r-project.org/web/packages/linprog/linprog.pdf

Demonstração no RStudio

Exemplo de Problema de Marketing

- Os clientes não estão mais seguindo o modelo tradicional de canais quando realizam o seu processo de compra.
- Eles estão navegando através dos canais na tentativa de extrair o máximo de valor de uma empresa, seus competidores e possíveis substitutos.
- Eles tiram proveito do que é oferecido pelos canais com alta audiência em busca de conselhos e informação, mas compram em outro canal mais barato, tudo graças às informações disponíveis imediatamente através das redes sociais.
- Antigamente, uma diretora de marketing só tinha que alocar o seu orçamento entre a mídia tradicional e a mídia impressa.
- Agora, ela tem que alocar o orçamento entre SEO, AdWords, Facebook e outras mídias sociais a fim de engajar o cliente constantemente.
- Então, a grande questão é:

Como o time de marketing otimiza a alocação do orçamento para obter o melhor retorno do investimento?

Exemplo de Problema de Marketing

- Suponha que você, como membro do time de marketing, tem a tarefa de recomendar a alocação do orçamento de propaganda entre TV, Mídia Impressa (catálogos, painéis, aeroportos etc.), SEO, AdWords, Facebook e Mobile.

- Para estas alocações assume-se que o departamento de marketing fez as análises e mediu as respectivas taxas de conversão. Digamos que foram obtidos os seguintes retornos sobre o investimento (ROI) para cada campanha como segue:

TV	Mídia Impressa	Mobile	SEO + AdWords	Facebook
7%	3%	15%	12%	5%

Exemplo de Problema de Marketing

A partir da análise de multicanal e da experiência passada, a diretoria de marketing definiu os itens abaixo como parte da sua estratégia de marketing:

1. Produção e transmissão das propagandas de TV custam no mínimo $500K.
2. Mídia Impressa não pode custar mais do que 5% do orçamento.
3. Mobile e SEO + AdWords juntos devem custar pelo menos 50% do orçamento, e os custos de SEO + AdWords não podem ser maiores do que 2,5 vezes o custo em Mobile.
4. O custo de conteúdo e propaganda no Mobile deve estar entre $300K e $900K.
5. Propaganda no Facebook não pode exceder 15% da despesa com marketing.
6. O custo da agência para o marketing com Facebook é no mínimo $100K.

Exemplo de Problema de Marketing

- Sabe-se que para $1 gasto em cada canal atinge-se o seguinte número de clientes por canal:

TV	Mídia Impressa	Mobile	SEO + AdWords	Facebook
2	0,3	1,8	0,9	2

- O orçamento total de marketing não pode exceder $5 milhões.

- Há aproximadamente 2,5 milhões de clientes no mercado alvo.

Exemplo de Problema de Marketing

Variáveis de Decisão:

- Orçamento para TV = x_1
- Orçamento para Mídia Impressa = x_2
- Orçamento para Mobile = x_3
- Orçamento para SEO + AdWords = x_4
- Orçamento para Facebook = x_5

Exemplo de Problema de Marketing

Função Objetivo:

O nosso objetivo é maximizar o retorno sobre o investimento (ROI), que pode ser expresso matematicamente por:

Lembre-se que foram obtidos os seguintes retornos sobre o investimento (ROI) para cada campanha:

TV	Mídia Impressa	Mobile	SEO + AdWords	Facebook
7%	3%	15%	12%	5%

$$z = 0{,}07x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}15x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}05x_5$$

Exemplo de Problema de Marketing

x_1: TV
x_2: Mídia Impressa
x_3: Mobile
x_4: SEO + AdWords
x_5: Facebook

Restrições:

1. O orçamento total não pode exceder $5milhões

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 5000K$$

2. O custo da propaganda na TV é de no mínimo $500K

$$\Rightarrow x_1 \geq 500K$$

3. Mídia Impressa não pode custar mais do que 5% do orçamento

$$\Rightarrow x_2 \leq 0{,}05(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$
$$\Rightarrow -0{,}05x_1 + 0{,}95x_2 - 0{,}05x_3 - 0{,}05x_4 - 005x_5 \leq 0$$

4. Mobile e SEO + AdWords juntos devem custar pelo menos 50% do orçamento

$$\Rightarrow x_3 + x_4 \geq 0{,}5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$
$$\Rightarrow 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 - 0{,}5x_4 + 0{,}5x_5 \leq 0$$

5. Os custos de SEO + AdWords não podem ser maiores do que 2,5 vezes o custo em Mobile

$$\Rightarrow x_4 \leq 2{,}5x_3 \Rightarrow -2{,}5x_3 + x_4 \leq 0$$

Exemplo de Problema de Marketing

x_1: TV
x_2: Mídia Impressa
x_3: Mobile
x_4: SEO + AdWords
x_5: Facebook

Restrições:

6. O custo de conteúdo e propaganda no Mobile deve estar entre \$300K e \$900K

$$\Rightarrow x_3 \geq 300K$$

7. O custo de conteúdo e propaganda no Mobile deve estar entre \$300K e \$900K

$$\Rightarrow x_3 \leq 900K$$

8. Propaganda no Facebook não pode exceder 15% da despesa com marketing

$$\Rightarrow x_5 \leq 0{,}15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \Rightarrow -0{,}15x_1 - 0{,}15x_2 - 0{,}15x_3 - 0{,}15x_4 + 0{,}85x_5 \leq 0$$

9. O custo para o marketing com Facebook é no mínimo \$100K

$$\Rightarrow x_5 \geq 100K$$

10. Para atingir 2,5 milhões de clientes

TV	Mídia Impressa	Mobile	SEO + AdWords	Facebook
2	0,3	1,8	0,9	2

$$\Rightarrow 2x_1 + 0{,}3x_2 + 1{,}8x_3 + 0{,}9x_4 + 2x_5 \leq 2500K$$

Exemplo de Problema de Marketing

x_1: TV
x_2: Mídia Impressa
x_3: Mobile
x_4: SEO + AdWords
x_5: Facebook

$$\text{Maximizar} \quad \overset{\boldsymbol{c}}{\begin{bmatrix} 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}05 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{sujeito a} \quad \underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}05 & 0{,}95 & -0{,}05 & -0{,}05 & -0{,}05 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -2{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}15 & -0{,}15 & -0{,}15 & -0{,}15 & 0{,}85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0{,}3 & 1{,}8 & 0{,}9 & 2 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \underset{\boldsymbol{b}}{\begin{bmatrix} \leq 5000 \\ \geq 500 \\ \leq 0 \\ \leq 0 \\ \leq 0 \\ \geq 300 \\ \leq 900 \\ \leq 0 \\ \geq 100 \\ \leq 2500 \end{bmatrix}}$$

Demonstração no RStudio

Obrigado!

Apresentação e scripts do R disponíveis em:
https://github.com/dsouzafi/cpo-ppl