Tentamen SSY080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

23 augusti 2017 kl. 14.00-18.00 sal: SB

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Tisdag 12 september kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	Del A: Rätt svar ger 1p. Del B: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Krav för godkänt.

Del A	5 p	av tot 10 p
Del B	7 p	av tot 15 p

Betygsgränser.

Poäng	12-15	16-20	21-25
Betyg	3	4	5

Lycka till!

Del A. En poäng (*1p*) per A-uppgift. **Ange endast svar**. Inga uträkningar eller motsvarande kommer att beaktas.

A1. Ett diskret system där $x[n]$ är insignal och $y[n]$ utsignal beskrivs med differensekvationen $y[n] = x[n] + \sin(x[n-1])$. Tre frågor:
Är systemet linjärt? Är systemet tidsinvariant? Är systemet kausalt ?

A2. Beräkna Laplacetransformen till signalen $x(t) = \sin(t)\cos(t)u(t)$.

A3. z-transformen till den diskreta signalen $x[n]$ tecknas $X(z)$. Vilken z-transform har signalen $x[n] * x[n - n_o]$? (n_o är en heltalskonstant.)

A4. Ett stabilt, kausalt och kontinuerligt system har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{a}{s+b} \quad .$$

Om insignalen till systemet är $x(t) = \sin(t)$ blir, i stationärtillstånd, utsignalen $y(t) = \sqrt{2}\ \sin(t - \frac{\pi}{4})$. Beräkna konstanterna a och b.

A5. Ett diskret system med insignal $x[n]$ och utsignal $y[n]$ beskrivs med differensekvationen

$$y[n] = x[n] + x[n+2] + x[n-4] \quad .$$

Beräkna utsignalvärdet $y[3]$ för insignalen $x[n] = 2^{-n}u[n]$.

A6. Ett kontinuerligt system har impulssvaret

$$h(t) = (e^{-2t} + e^{-3t})u(t) \quad .$$

Teckna systemets differentialekvation med insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$.

A7. En kontinuerlig och periodisk signal tecknas

$$x(t) = 3\pi + \sqrt{2}\cos(\omega_o t + \frac{\pi}{3}) \quad .$$

Signalen kan också tecknas som en komplex Fourierserie enligt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \quad .$$

Beräkna koefficienterna c_k.

A8. Kontinuerlig tid Fouriertransform (CTFT) beräknas utifrån en kontinuerlig signal $x(t)$ och tecknas $X(j\omega)$. Vanligen är transformen komplexvärd. Ange vilken eller vilka av egenskaperna som gäller:
i) $X(j\omega)$ är periodisk
ii) $X(j\omega)$ är icke periodisk
iii) $X(j\omega)$ är kontinuerlig i ω
iv) $X(j\omega)$ är en diskret sekvens

A9. Beräkna Fourierseriekoefficienterna c_k i den komplexa Fourierserien till den periodiska signalen

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad .$$

A10. En kontinuerlig signal $x(t) = \sin(100\pi t) + \sin(300\pi t)$ samplas med samplingsintervallet $T = 4.0$ ms. Efter att ha utnyttjat metoden för perfekt rekonstruktion med ett idealt LP-filter erhålls signalen $x_r(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$. Vilka värden har ω_1 och ω_2?

Del B. Fem poäng (*5p*) per B-uppgift. Fullständiga lösningar skall redovisas.

B11. Ett kontinuerligt och kausalt system har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

Beräkna systemets impuls- och stegfunktionssvar. *(5p)*

B12. Ett diskret LTI-system beskrivs med differensekvationen

$$y[n] = -y[n-1] + y[n-2] + x[n] \ .$$

(a) Beräkna systemets överföringsfunktion. *(1p)*

(b) Beräkna systemets impulssvar. *(3p)*

(c) Är systemet stabilt? Motivera ! *(1p)*

B13. Med hjälp av två signalgeneratorer och en summatorkrets genereras en kontinuerlig signal $x(t)$ som motsvarar grundfrekvenserna hos de två tunnaste strängarna på en gitarr. Vi får signalen

$$x(t) = 10\sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + 10\sin(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

där $f_1 = 329.6$ Hz och $f_2 = 246.9$ Hz. Signalen samplas med sampelintervallet $T = 200\ \mu$s och genererar den diskreta signalen $x[n]$. Därefter beräknas $X[k]$ som är DFT [1] av $x[n]$. Hur många sampel krävs för att de två första topparna i plottar av $|X[k]|$, som svarar mot f_1 och f_2, skall ha en indexskillnad på minst 8, alltså $|k_1 - k_2| > 8$. *(5p)*

[1] Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$ beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

A1

Linjärt ?	Nej
Tidsinvariant ?	Ja
Kausalt ?	Ja

A2 $X(s) = \dfrac{1}{s^2+4}$

A3. $\mathcal{Z}\{x[n] * x[n-n_0]\} = z^{-n_0} X^2(z)$

A4. $a = 2$, $b = 1$

A5. $y[3] = \dfrac{5}{32}$

A6. $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\dfrac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 2\dfrac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$

A7. $c_0 = 3\pi$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{3}}$, $c_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{3}} = c_1^*$

övriga $c_k = 0$

A8. ii och iii gäller ($X(i\omega)$ icke periodisk och kontinuerlig i ω)

A9. $c_k = \dfrac{1}{T}$ $\forall k$

A10. 100π r/s och 200π r/s

SSY080
17 08 23

B11

$$H(s) = \frac{3}{s^2+3s+3} \qquad \text{Poler } s_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-3}$$

Komplexa! Kvadrat-kompletera

$$H(s) = \frac{3}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + 3 - \frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{3}{(s+1,5)^2+0,75} = \frac{3}{\sqrt{0,75}} \cdot \frac{\sqrt{0,75}}{(s+1,5)^2+\left(\sqrt{0,75}\right)^2}$$

Impulssvar $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \dots = 2\sqrt{3}\, e^{-1,5t} \sin(0,866t)\, u(t)$

Stegsvar: $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$ Insignal $x(t) = u(t)$
$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{s^2+3s+3} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+3s+3}$$

$$3 = A(s^2+3s+3) + s(Bs+C)$$

s^0: $3 = A \cdot 3 \Rightarrow A = 1$

s^1: $0 = 3A + C \Rightarrow C = -3$

s^2: $0 = A + B \Rightarrow B = -1$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+3}{(s+1,5)^2+0,75} = \frac{1}{s} - \frac{s+1,5+1,5}{(s+1,5)^2+0,75}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1,5}{(s+1,5)^2+\left(\sqrt{0,75}\right)^2} - \frac{1,5}{\sqrt{0,75}} \cdot \frac{\sqrt{0,75}}{(s+1,5)^2+\left(\sqrt{0,75}\right)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left[1 - e^{-1,5t}\left\{\cos(0,866t) - \sqrt{3}\sin(0,866t)\right\}\right] u(t)$$

SSY080
170823

B12 $y[n] = -y[n-1] + y[n-2] + x[n]$

$$y[n] + y[n-1] - y[n-2] = x[n]$$

z - transf.

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)\left(1 + z^{-1} - z^{-2}\right) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + z - 1}$$

Poler: $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \begin{cases} 0,618 \\ -1,618 \end{cases}$

PBU: $\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{(z - 0,618)(z + 1,618)} = \frac{A}{z - 0,618} + \frac{B}{z + 1,618}$

$A = \frac{0,618}{0,618 + 1,618} = 0,276 \quad B = \frac{-1,618}{-1,618 - 0,618} = 0,724$

$$H(z) = 0,276 \frac{z}{z - 0,618} + 0,724 \frac{z}{z + 1,618}$$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \left\{0,276\,(0,618)^n + 0,724\,(-1,618)^n\right\} u[n]$$

Instabilt ty kausalt system och pol utanför enhetscirkeln.

SSY080
170823

B13 $f_1 = 329{,}6$ Hz
$f_2 = 246{,}9$ Hz

Samplingsfrekvens $f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{200\mu s} = 5000$ Hz

Frekvensupplösning

$\Delta f = \frac{f_s}{N}$ svarar mot $(k+1)-k$ i

index hos DFT

$f_1 \curvearrowright k_1$ i DFT
$f_2 \curvearrowright k_2$ i DFT

$k_1 - k_2 > 8$

$$8 \cdot \Delta f < f_1 - f_2$$

$$8 \cdot \frac{f_s}{N} < f_1 - f_2$$

$$N > 8 \frac{f_s}{f_1 - f_2} = \frac{8 \cdot 5000}{329.6 - 246.9} \approx 484$$

Svar: $N > 484$