Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

25 oktober 2008 kl. 08.30-12.30
Sal: Hörsalar på Hörsalsvägen

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås måndag 27 oktober på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Anslås måndag 10 november kl. 15.30 på institutionens anslagstavla, plan 5.
Granskning:	1: Onsdag 12 november kl. 12.30 - 13.30 , rum 5430. 2: Torsdag 13 november kl. 12.30 - 13.30 , rum 5430.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. a) Ett kontinuerlig LTI-system har frekvenssvaret

$$H(j\omega) = e^{-j2\omega} \ .$$

Beräkna systemets utsignal $y(t)$ om insignalen till systemet är $x(t) = u(t) - u(t-4)$. *(2p)*

b) Ett annat kontinuerlig LTI-system har impulssvaret

$$h(t) = e^{-2t}u(t) \ .$$

Beräkna

i) systemets utsignal $y(t)$ då insignalen $x(t) = e^{-t}u(t)$. *(2p)*

ii) vid vilken tidpunkt som utsignalen $y(t)$ når sitt maximala värde. *(1p)*

2. Överföringsfunktionen till ett kontinuerligt LTI-system tecknas $H(s)$. Systemet karakteriseras av att

- $H(s)$ har inga nollställen.
- $H(s)$ har två komplexa poler i $s = -50 \pm j800$.
- Beloppet av systemets frekvenssvar $\to 10$ då $\omega \to 0$.

Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då insignalen $x(t) = u(t)$ (systemets stegsvar). *(5p)*

3. Ett diskret och kausalt LTI-system beskrivs med differensekvationen

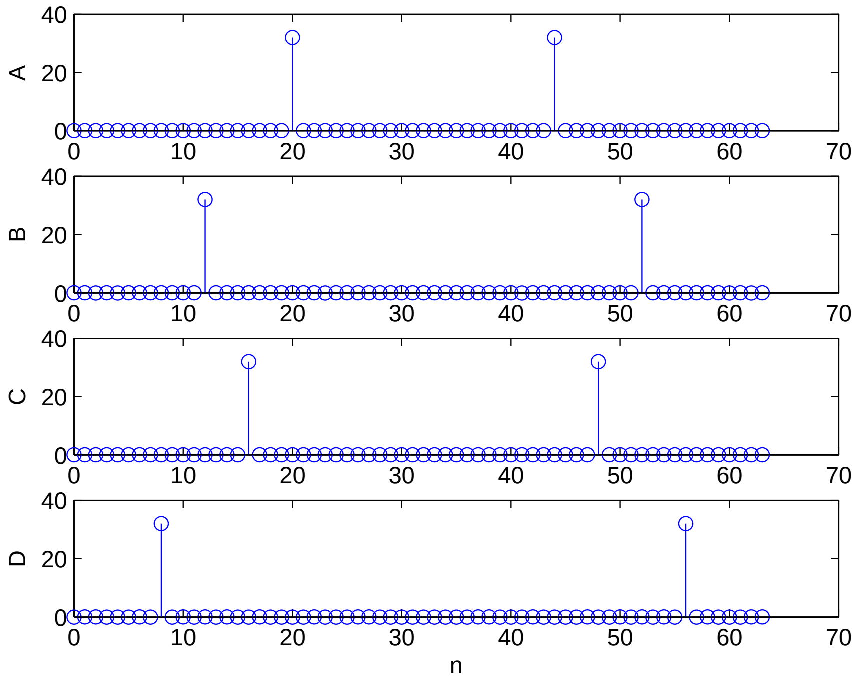
$$y[n] - 3.5y[n-1] + 1.5y[n-2] = 3x[n] - 4x[n-1]$$

där $y[n]$ är systemets utsignal och $x[n]$ dess insignal.

a) Beräkna systemets impulssvar (sök $y[n]$ för $x[n] = \delta[n]$). *(4p)*

b) Är systemet stabilt? Motivera ! *(1p)*

4. Fyra signaler på formen $x(t) = \cos(\omega t)$ där vinkelfrekvensen ω har olika värden samplas med samplingsfrekvensen $f_s = 100$ Hz. Antal sampel $N = 64$. Fyra diskreta signaler erhålls. Den Diskreta Fouriertransformen ($X[k]$) beräknas med hjälp av Matlabs `fft` rutin och absolutbeloppen av resultatet visas i figur 1 i blandad ordning.



Figur 1: $|X[k]|$ av de fyra samplade signalerna - i blandad ordning.

De fyra vinkelfrekvenserna ω till signalerna $x(t)$ är

i) $2\pi\cdot$ 12.5 rad/s

ii) $2\pi\cdot$ 25.0 rad/s

iii) $2\pi\cdot$ 68.75 rad/s

iv) $2\pi\cdot$ 81.25 rad/s

Vilken figur (A, B, C och D) hör ihop med vilken vinkelfrekvens (i, ii, iii och iv). Du måste motivera ditt svar. *(5p)*

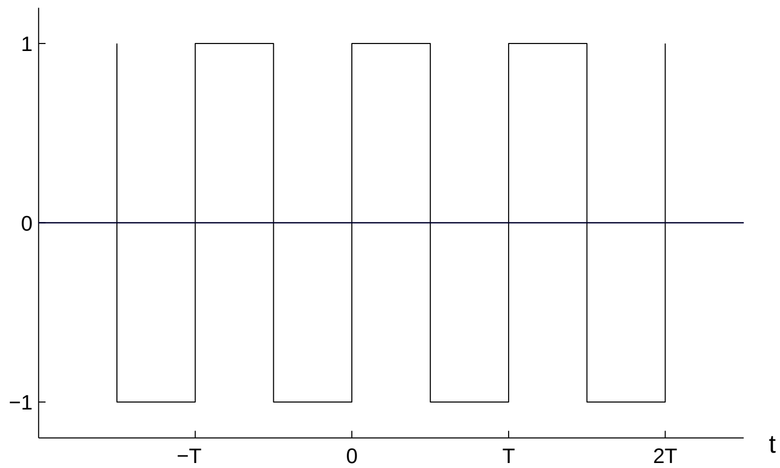
5. I kursens hemlab studerade vi en fyrkantssignal med periodtiden 2π s. De tre första nollskiljda Fourierseriekoefficienterna beräknades. Vi har nu en liknande periodisk signal, se figur 2. Det enda som skiljer är att priodtiden $T = 2\pi \cdot 10^{-2}$ s. Denna signal utgör insignal till ett system med frekvenssvaret

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{för } \ |\omega| < 420 \text{ rad/s} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Beräkna medeleffekten hos utsignalen och medeleffekten hos insignalen samt jämför dessa två värden.
Medeleffekt för en kontinuerlig och periodisk signal kan beräknas som

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Du får hänvisa till de resultat som du kom fram till i hemlabben. Parsevals identitet (formel) kan användas. *(5p)*



Figur 2: Fyrkantsvåg

Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

13 januari 2009 kl. 14.00-18.00, Sal: V

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås onsdag 14 jan på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok (anonyma tentor)
Granskning:	Onsdag 4 februari kl. 12.00 - 13.30 , rum 5430.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

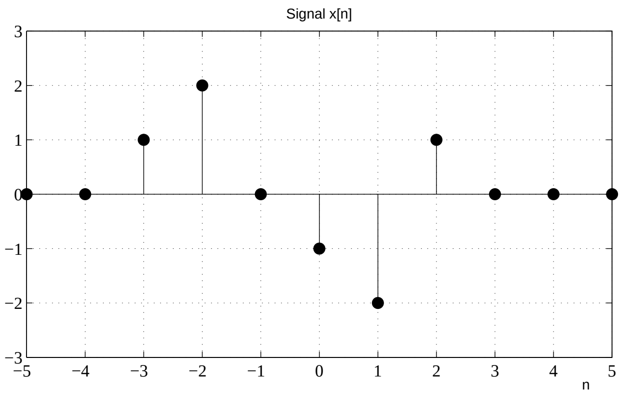
Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. a) Ett diskret LTI-system har impulssvaret

$$h[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.25\delta[n-2] \ .$$

Beräkna systemets utsignal $y[n]$ för insignalen $x[n]$ som beskrivs i figur 2. De signalvärden som ej finns med i figuren är noll. *(3p)*



Figur 1: Insignal $x[n]$

b) Ett diskret system definieras av differensekvationen

$$y[n] = x[n]u[n].$$

Är systemet tidsinvariant? Motivera! *(2p)*

2. En kontinuerlig och periodisk signal $x(t)$ kan beskrivas med en komplex Fourierserie enligt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t}$$

där koefficienterna har följande värden

$$\begin{array}{lll} c_0 = 2 & c_1 = c_{-1} = 1 & c_2 = c_{-2}^* = j0.5 \\ c_3 = c_{-3}^* = j0.2 & c_4 = c_{-4} = 0.4 & c_k = 0 \text{ , för övriga } k \end{array}$$

Signalen $x(t)$ passerar ett system $G(j\omega)$ med frekvenssvaret

$$G(j\omega) = 1 - H(j\omega)$$

där $H(j\omega)$ är ett idealt lågpassfilter och beskrivs som

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \dfrac{11\omega_o}{5} \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

a) Beräkna utsignalens $\{y(t)\}$ Fourierseriekoefficienter. *(2p)*

b) Beräkna kvoten mellan utsignalens medeleffekt och insignalens medeleffekt. *(3p)*

3. Två kontinuerliga LTI-system kaskadkopplas enligt figur 2.
System $H_1(s)$ karakteriseras av att

- $H_1(s)$ har inga nollställen.
- $H_1(s)$ har en reell pol i $s = -3$.
- Beloppet av systemets frekvenssvar $\to \frac{2}{3}$ då $\omega \to 0$.

System $H_2(s)$ har stegsvar $y_{s2}(t)$ där

$$y_{s2}(t) = (6 - 5e^{-t})u(t)$$

Beräkna utsignalen $y(t)$ då insignalen $x(t) = \delta(t)$. *(5p)*

Figur 2: Två kontinuerliga system

4. Ett diskret och kausalt LTI-system beskrivs med differensekvationen

$$y[n] - 1.2y[n-1] - 0.28y[n-2] = x[n] - 3x[n-1]$$

där $y[n]$ är systemets utsignal och $x[n]$ dess insignal.

a) Beräkna systemets överföringsfunktion. *(2p)*

b) Beräkna systemets impulssvar (sök $y[n]$ för $x[n] = \delta[n]$). *(2p)*

c) Är systemet stabilt? Motivera ! *(1p)*

5. Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$ beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Fem diskreta signaler, $x_{1,2,3,4,5}[n]$, beskrivs nedan med sina numeriska värden. Para ihop var och en av dessa signaler med sin Diskreta Fouriertransform, $X_\alpha[k]$. Välj mellan de åtta olika alternativen i tabellen nedan, $X_{a,b,c,d,e,f,g,h}[k]$. Du måste motivera dina val! *(5p)*

i	$x_i[n]$	α	$X_\alpha[k]$
1	{1, 0, 0, 0 }	a	{0, -2j, 0, 2j }
2	{0, 1, 0, -1 }	b	$\{\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ 0\}$
3	{0, 1, 0, 1 }	c	{1, 0, 0, 0 }
4	$\{\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\}$	d	{1, 1, 1, 1}
5	{0, 1, 0, 0 }	e	{1, j, 0, -j, -1 }
		f	{2, 0, -2, 0 }
		g	{1, -j, -1, j }
		h	{0, 2j, 0, -2j, 0 }

Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

26 augusti 2009 kl. 08.30-12.30 sal: V

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås torsdag 27 aug. på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok (anonyma tentor)
Granskning:	Onsdag 9 sept. kl. 12.00 - 13.30 , rum 5430.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. Ett kontinuerligt system beskrivs av ekvationen

$$y(t) = \cos(0.5\pi t)x(t)$$

där $x(t)$ är systemets insignal och $y(t)$ är dess utsignal.

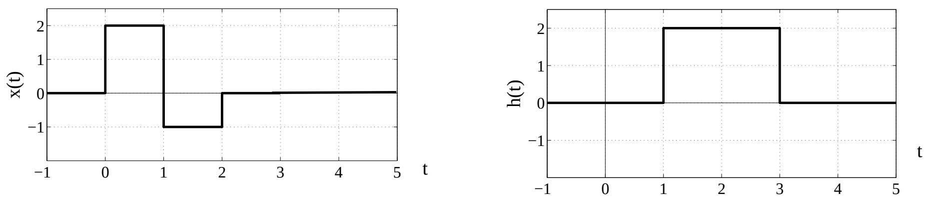
a) Beräkna systemet utsignal för $x(t) = \delta(t)$. *(1p)*

b) Beräkna systemet utsignal för $x(t) = \delta(t-1)$. *(1p)*

c) Är systemet tidsinvariant? Motivering krävs. *(1p)*

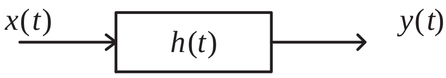
d) Är systemet linjärt? Motivering krävs. *(2p)*

2. Ett kontinuerligt LTI-system enligt figur 2 har en insignal $x(t)$ enligt figur 1(a) och ett impulssvar enligt figur 1(b). Beräkna systemets utsignal $y(t)$. De signalvärden som ej finns med i figurerna är noll. *(5p)*



(a) Insignal $x(t)$ (b) Impulssvar $h(t)$

Figur 1: Signaler

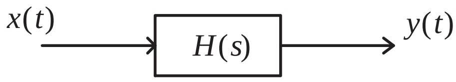


Figur 2: LTI-system

3. Ett kontinuerligt LTI-system enligt figur 3 har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{K}{A(s)}$$

där K är en reell konstant och $A(s)$ ett andra ordningens polynom. Rötterna till polynomet $A(s)$ är kända, de är $s_1 = 0$ och $s_2 = -1$. Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då insignalen $x(t) = e^{-t}u(t)$.
Låt $K = 1$.



Figur 3: System

4. Ett diskret system kan beskrivas med följande differensekvation

$$y[n] - 1.5y[n-1] + 0.5y[n-2] = x[n]$$

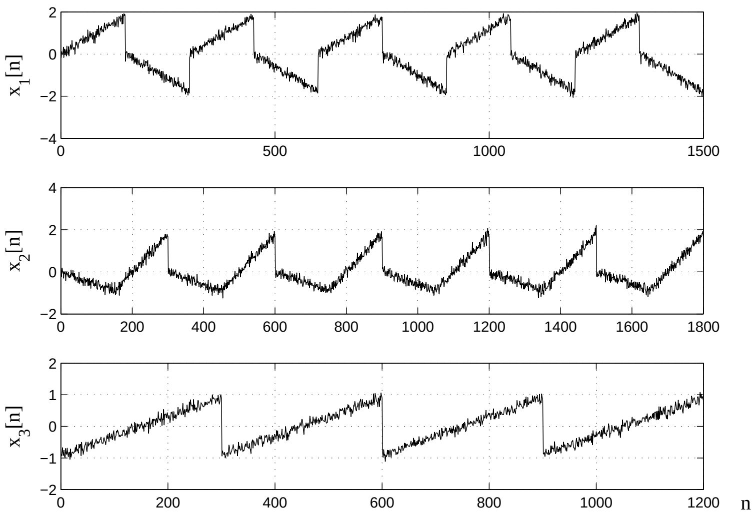
(a) Beräkna systemets impulssvar. *(3p)*

(b) Verifiera resultatet i (a) genom att lösa differensekvationen för n=0, 1, 2 och 3 då systemet befinner sig i vila. *(2p)*

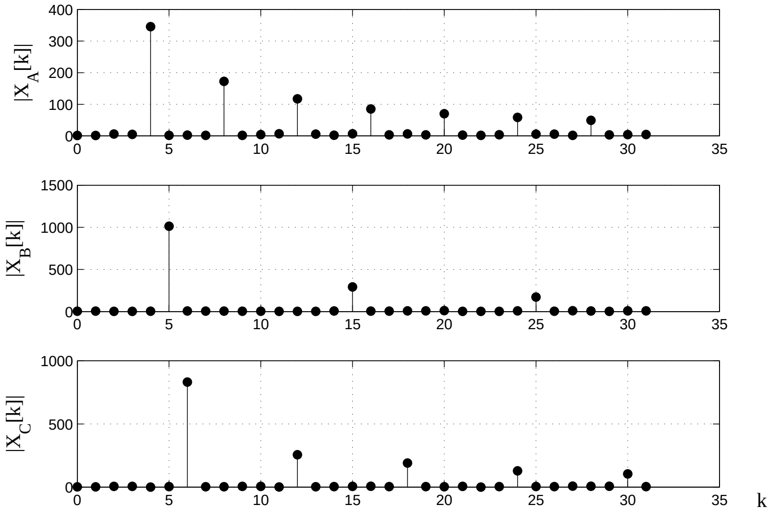
5. En gammal (och lite brusig) funktionsgenerator kan leverera signaler (elektrisk spänning) med olika vågformer. Tre olika signaler från funktionsgeneratorn studeras, alla med samma periodtid T=50 ms. De tre signalerna samplas där olika många sampel tas för varje signal, N=1200, 1500 och 1800. De samplade signalerna visas i sin helhet som Matlab-plottar i figur 4. Därefter beräknas signalernas Fouriertransform (DFT) med hjälp av `fft` i Matlab. Figur 5 visar absolutbeloppet av de 32 st första värdena av de tre samplade signalernas DFT men i blandad ordning $|X_A[k]|, |X_B[k]|$ och $|X_C[k]|$.

   a) Para ihop de samplade signalerna $x_1[n], x_2[n]$ och $x_3[n]$ i figur 4 med rätt DFT $|X_A[k]|, |X_B[k]|$ och $|X_C[k]|$ i figur 5. Dina svar måste motiveras. *(3p)*

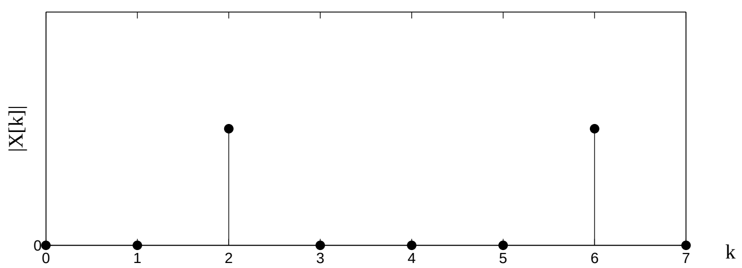
   b) Så en allmän DFT fråga. Den kontinuerliga signalen $x(t) = \cos(\omega t)$ samplas. Den samplade signalens vinkelfrekvensen är $\omega = 480\pi$ r/s och antalet sampel $N = 8$. Då erhålls den diskreta signalen $x[n] = x(nT_s),\ n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. Därefter beräknas signalens DFT ($X[k]$) och figur 6 visar det principiella utseendet hos $|X[k]|$. Vilken samplingsfrekvens har använts? *(2p)*



Figur 4: Tre samplade signaler (hela signalen visas)



Figur 5: Absolutbelopp av de tre olika signalernas DFT ($k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 31$)



Figur 6: Absolutbelopp av signalens DFT ($k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 7$)

SSY080 081025

1a) $y(t) = x(t-2) = u(t-2) - u(t-6)$

1b) i) $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, för $t \geq 0$

$y(t) = 0$, för $t < 0$

ii) $t = \ln 2$ [s]

2) $y(t) = 10\left[1 - e^{-50t}\left(\cos 800t + \frac{1}{16}\sin 800t\right)\right] u(t)$

$y'(t) = -y(t)$ också en möjlighet

3) $y[n] = \left(2 \cdot 3^n + 0{,}5^n\right) u[n]$

Instabilt. Pol utanför enhetscirkeln.

4) i) D ii) C iii) A iv) B

5) Insignalens medeleffekt $\bar{P}_x = 1$

Utsignalens —"— $\bar{P}_y = 0{,}9006$

Utsignalens medeleffekt är $\frac{\bar{P}_y}{\bar{P}_x} \cdot 100\% = 90{,}06\%$ av insignalens medeleffekt

Transformer
Signaler & System D3
SSY080 090113

1/ a)

Superposition ger $y[n] = h[n+3] + 2h[n+2] -$
$- h[n] - 2h[n-1] + h[n-2]$

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h[n+3]$		1	0,5	0,25								
$2h[n+2]$			2	1	0,5							
$-h[n]$					-1	-0,5	-0,25					
$-2h[n-1]$						-2	-1	-0,5				
$h[n-2]$							1	0,5	0,25			
$\Sigma \Rightarrow y[n]$		1	2,5	1,25	-0,5	-2,5	-0,25	0	0,25			

Svar: $y[n] = \delta[n+3] +$
$+ 2{,}5\,\delta[n+2] +$
$+ 1{,}25\,\delta[n+1]$
$- 0{,}5\,\delta[n] -$
$- 2{,}5\,\delta[n-1] -$
$- 0{,}25\,\delta[n-2] +$
$+ 0{,}25\,\delta[n-4]$

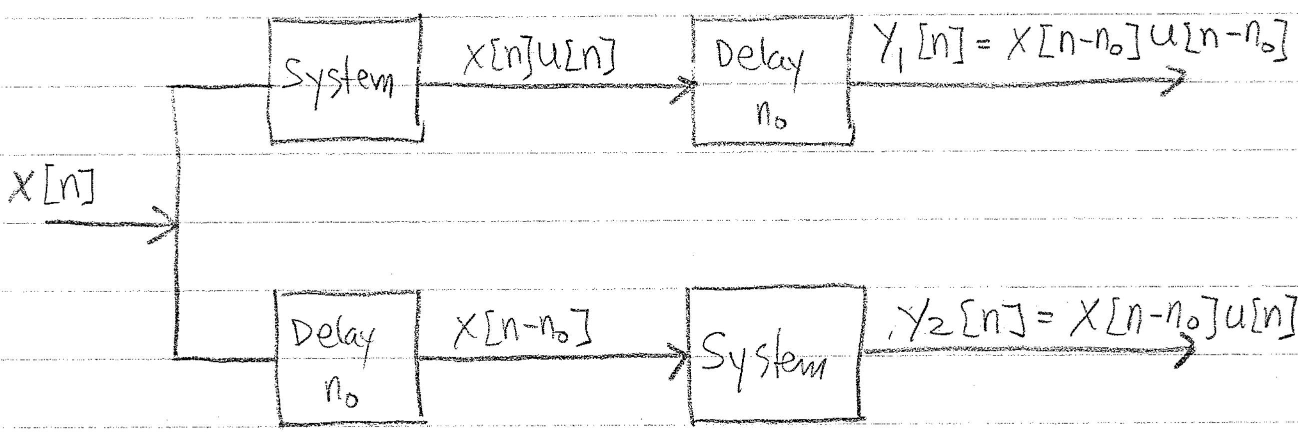
SSY 080

090113

1b/

$$y[n] = x[n]\,u[n]$$

Test



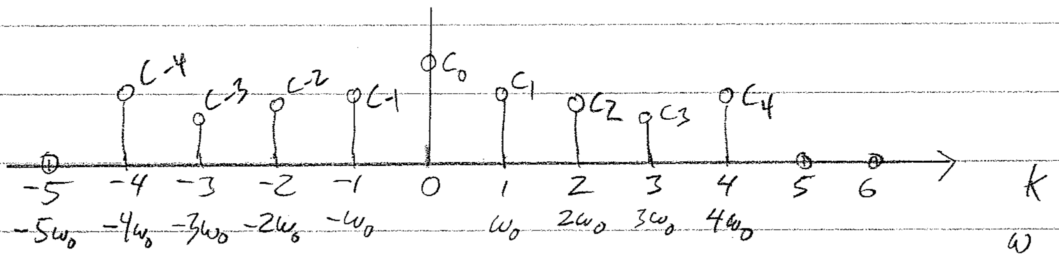
$$y_1[n] \neq y_2[n]$$

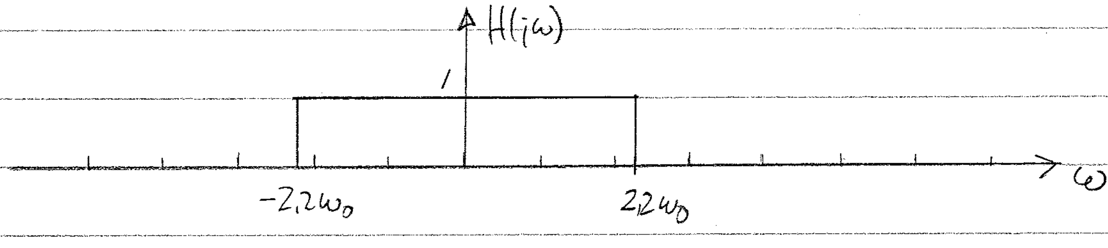
Ej tidsinvariant

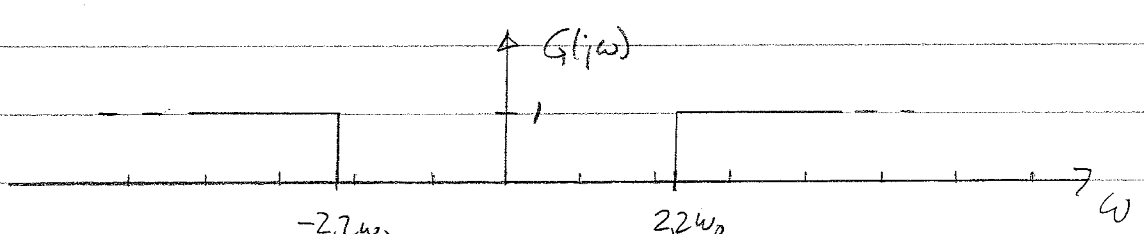
SSY 080
090113

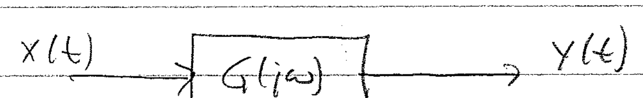
FS

2)









$G(j\omega)$ släpper endast igenom frekvenser $|\omega| > 2{,}2\,\omega_0$

FS-koeff till $y(t)$ blir då $\begin{cases} c_3,\ c_{-3},\ c_4 \text{ och } c_{-4} \\ \text{övriga } c_k = 0 \end{cases}$

Medeleffekt $P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$

$$P_x = |c_0|^2 + 2|c_1|^2 + 2|c_2|^2 + 2|c_3|^2 + 2|c_4|^2 =$$
$$= 4 + 2\cdot 1 + 2\cdot 0{,}5^2 + 2\cdot 0{,}2^2 + 2\cdot 0{,}4^2 = 6{,}9$$

$$P_y = 2|c_3|^2 + 2|c_4|^2 = 2\cdot 0{,}2^2 + 2\cdot 0{,}4^2 = 0{,}4$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{0{,}4}{6{,}9} \approx 0{,}058$$

3/ $H_1(s) = \dfrac{K}{s+3}$ $\quad H(s)\Big|_{\substack{s=j\omega \\ \omega\to 0}} = \dfrac{K}{3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow K=2$

$H_1(s) = \dfrac{2}{s+3}$

Stegsvar: $\dfrac{1}{s}\cdot H_2(s) = \mathcal{L}\{(6-5e^{-t})u(t)\} = \dfrac{6}{s} - \dfrac{5}{s+1} =$

$= \dfrac{6(s+1)-5s}{s(s+1)} = \dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{s+6}{s+1} \Rightarrow H_2(s) = \dfrac{s+6}{s+1}$

Hela systemet $Y(s) = H_1(s)H_2(s)X(s)$; $X(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

$Y(s) = \dfrac{2}{(s+3)}\dfrac{(s+6)}{(s+1)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+3}$

$2(s+6) = A(s+3) + B(s+1)$ | $s^1:\ 2 = A+B$
 $s^0:\ 12 = 3A+B$ | $10 = 2A$
 $A=5,\ B=-3$

$Y(s) = \dfrac{5}{s+1} - \dfrac{3}{s+3}$

Inv. Laplacetransf. ger

$y(t) = (5e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)$

SSY080
090113

4/ $y[n] - 1{,}2\,y[n-1] - 0{,}28\,y[n-2] = x[n] - 3x[n-1]$

z-transformera

a/ $Y(z) - 1{,}2\,Y(z)z^{-1} - 0{,}28\,Y(z)z^{-2} = X(z) - 3X(z)z^{-1}$

$Y(z)(1 - 1{,}2z^{-1} - 0{,}28z^{-2}) = X(z)(1-3z^{-1})$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-3z^{-1}}{1-1{,}2z^{-1}-0{,}28z^{-2}} = \frac{z(z-3)}{z^2-1{,}2z-0{,}28}$$

b/ Impulssvar $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = y[n]$

Sök poler: $z_{1,2} = 0{,}6 \pm \sqrt{0{,}6^2+0{,}28} = 0{,}6 \pm 0{,}8 = \begin{cases} 1{,}4 \\ -0{,}2 \end{cases}$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-3}{(z-1{,}4)(z+0{,}2)} = \frac{A}{z-1{,}4} + \frac{B}{z+0{,}2}$$

$z-3 = A(z+0{,}2) + B(z-1{,}4)$

$z^1: \quad 1 = A + B$

$z^0: \quad -3 = 0{,}2A - 1{,}4B$

$$\begin{aligned} -0{,}2 &= -0{,}2A - 0{,}2B \\ -3 &= 0{,}2A - 1{,}4B \\ \hline -3{,}2 &= -1{,}6B \end{aligned}$$

$\Rightarrow B = 2,\ A = -1$

$$H(z) = 2\frac{z}{z+0{,}2} - \frac{z}{z-1{,}4} = 2\cdot\frac{1}{1+0{,}2z^{-1}} - \frac{1}{1-1{,}4z^{-1}}$$

Inv. z-transf.

$$y[n] = h[n] = \left[2\cdot(-0{,}2)^n - (1{,}4)^n\right]u[n]$$

c/ Pol utanför enhetscirkeln ($z=1{,}4$) $\Rightarrow$ Instabilt

Se info på sidan innan

5/ Notera

i) $N=4$ för alla $x_i[n]$, Då måste även $X[k]$ ha $N=4$

Utesluter: X_h och X_e med $N=5$

ii) $X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$

$x_1[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_1[n] = 1 \Rightarrow X[0]=1$ c, d, g OK

$$X[1] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot n} = 1+0+0+0 = 1$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot n} = 1+0+0+0 = 1$$

$\therefore \quad x_1[n] \xleftrightarrow{DFT} X_d[k]$

(Impuls ger bidrag vid alla frekvenser)

$x_2[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_2[n] = 0 = X[0]$

$\therefore \quad x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_a[k]$

$x_3[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_3[n] = 2 = X[0]$ $\therefore \quad x_3[n] \longleftrightarrow X_f[k]$

$x_4[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_4[n] = 1 = X[0]$ c, g möjliga

OBS! $x_4[n]$ en konstant signal - (DC)

$X[k] \neq 0$ endast för $k=0$

$x_4[n] \xleftrightarrow{DFT} X_c[k]$

/forts 5

$x_5[n]$; $\sum_{n=0}^{3} x_5[n] = 1$ c,d,g möjliga men endast g kvar

Dessutom

$x_5[n]$ en fördröjd impuls ($x_1[n]$)

Då borde $|DFT\{x_1[n]\}| = |DFT\{x_5[n]\}|$

vilket också stämmer på $X_g[k]$

Svar:

Signal	DFT
$x_1[n]$	$X_d[k]$
$x_2[n]$	$X_a[k]$
$x_3[n]$	$X_f[k]$
$x_4[n]$	$X_c[k]$
$x_5[n]$	$X_g[k]$

Transformer, Signaler & System
090826
SSY080

1. $y(t) = \cos(0{,}5\pi t)\, x(t)$

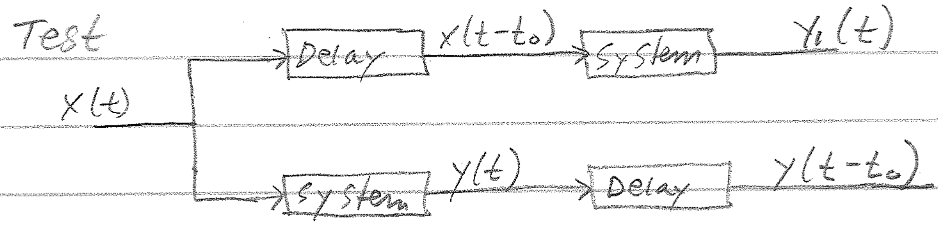
a) $x(t) = \delta(t)$

$y(t) = \cos(0{,}5\pi t)\,\delta(t) = \cos(0)\,\delta(t) = \delta(t)$

b) $x(t) = \delta(t-1)$

$y(t) = \cos(0{,}5\pi t)\,\delta(t-1) = \cos(0{,}5\pi \cdot 1)\,\delta(t-1) = 0$

c)



Tidsinvariant om $y_1(t) = y(t-t_0)$

Enligt a) och b) är så inte fallet

Systemet ej tidsinvariant

d)

Insignal	Utsignal
$x_1(t)$	$y_1(t) = \cos(0{,}5\pi t)\, x_1(t)$
$x_2(t)$	$y_2(t) = \cos(0{,}5\pi t)\, x_2(t)$
$a x_1(t)$	$\cos(0{,}5\pi t)\, a x_1(t) = a y_1(t)$
$a x_1(t) + b x_2(t)$	$\cos(0{,}5\pi t)\left(a x_1(t) + b x_2(t)\right) =$
	$a\cos(0{,}5\pi t)\, x_1(t) + b\cos(0{,}5\pi t)\, x_2(t) =$
	$= a y_1(t) + b y_2(t)$

Superposition gäller!

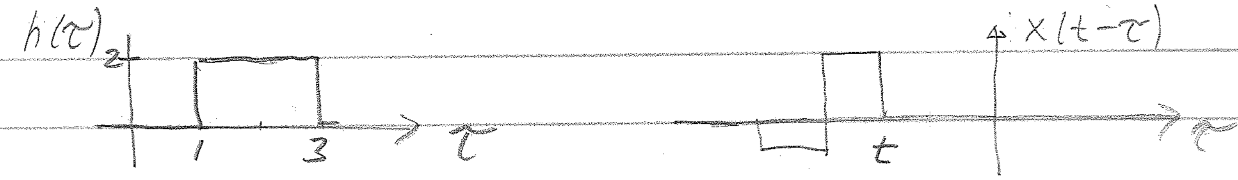
Systemet är linjärt.

SS4080

090826

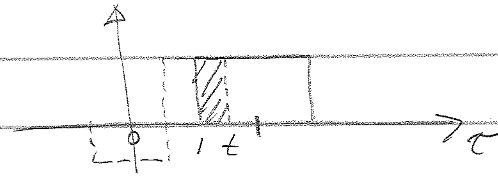
2/ $y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$ Faltning!

"Grafisk" lösn.



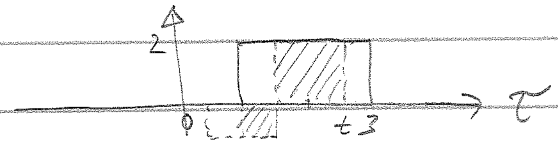
$\boxed{t < 1}$ $h(\tau)x(t-\tau) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

$\boxed{1 < t < 2}$



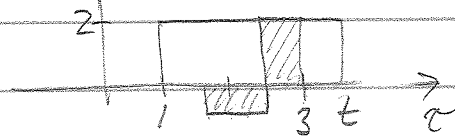
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$ växer linjärt från 0 till 4 | $y(t) = 2\cdot 2(t-1)$

$\boxed{2 < t < 3}$



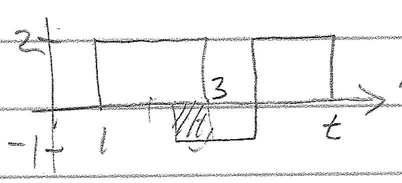
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$ Linjär minskning från 4 till $4-2=2$ | $y(t) = 4-2(t-1-1) = 4-2(t-2)$

$\boxed{3 < t < 4}$



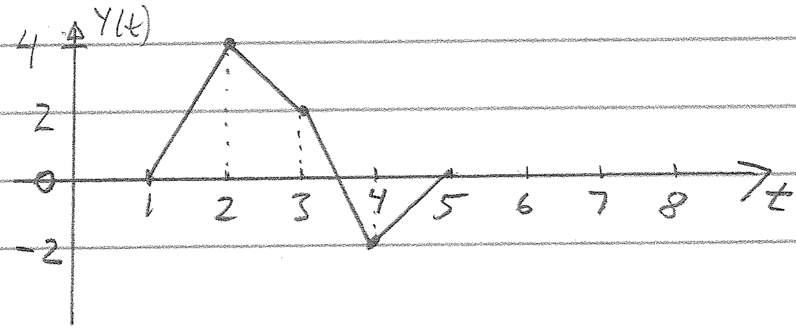
$y(t) = -2+4(3-(t-1)) = 4(4-t)-2$

$\boxed{4 < t < 5}$



$y(t) = -2(3-(t-2)) = -2(5-t)$

$t > 5$ $y(t) = 0$



SSY 080

090826

3/ , sätt $K=1$.

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\begin{matrix} x(t) \\ X(s) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(s) \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) \\ Y(s) \end{matrix}$$

$$x(t) = e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

Inverstransformera Partialbråksuppdela

$$\frac{1}{s\,(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$1 = A(s+1)^2 + Bs(s+1) + sC = A(s^2+2s+1) + B(s^2+s) + sC$$

$s^2: \quad 0 = A+B$	$A=1, \quad B=-1$
$s^1: \quad 0 = 2A+B+C$	$C = -2A-B = -2+1 = -1$
$s^0: \quad 1 = A$	

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = u(t) - e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) =$$

$$= \left[1 - e^{-t}(1+t)\right]u(t)$$

SSY080
090826

4) a)

$$y[n] - 1{,}5\,y[n-1] + 0{,}5\,y[n-2] = x[n]$$

z-transformera: $Y(z) - 1{,}5\,z^{-1}Y(z) + 0{,}5\,z^{-2}Y(z) = X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-1{,}5z+0{,}5}$$

Rötter till nämnaren $z_{1,2} = 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}75^2 - 0{,}5} = 0{,}75 \pm 0{,}25 = \begin{cases} 1 \\ 0{,}5 \end{cases}$

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

Insignal $x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{z} X(z) = 1$

Utsignal (impulssvar) $Y(z) = H(z)X(z) = H(z)$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0{,}5)} = \left\{\begin{matrix}\text{Partialbråks-}\\ \text{uppdela}\end{matrix}\right\} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0{,}5}$$

$$z = A(z-0{,}5) + B(z-1) \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} z^1: & 1 = A + B & (1) \\ z^0: & 0 = -0{,}5A - B & (2) \end{matrix}$$

$(1)+(2)$: $1 = 0{,}5A \Rightarrow A = 2$, $B = -1$

$$Y(z) = 2\frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-0{,}5} = 2\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}$$

Inv. transf. $y[n] = h[n] = 2u[n] - 0{,}5^n u[n] = (2 - 0{,}5^n)\,u[n]$

SSY080
090826

Differens ekv.

4 b)

$$y[n] = x[n] + 1{,}5\, y[n-1] - 0{,}5\, y[n-2]$$

$$x[n] = \delta[n] \qquad (y[-1] = y[-2] = 0)$$

n	y[n]	
0	$1+0+0 =$	1
1	$0 + 1{,}5 \cdot 1 + 0 =$	$1{,}5$
2	$0 + 1{,}5 \cdot 1{,}5 - 0{,}5 \cdot 1 =$	$1{,}75$
3	$0 + 1{,}5 \cdot 1{,}75 - 0{,}5 \cdot 1{,}5 =$	$1{,}875$

y[n] på sluten form

n	$y[n] = (2 - 0{,}5^n)\, u[n]$	
0	$2 - 1 =$	1
1	$2 - 0{,}5^1 =$	$1{,}5$
2	$2 - 0{,}5^2 =$	$1{,}75$
3	$2 - 0{,}5^3 =$	$1{,}875$

OK!

SSY080
090826

5 a/ Studera signalerna $x_1[n]$, $x_2[n]$ och $x_3[n]$ i figuren. De är periodiska.

Signal	Antal hela perioder i intervallet
$x_1[n]$	5
$x_2[n]$	6
$x_3[n]$	4

Jämför uppbyggnad av en Fourierserie

$X[k]$ ger högt värde vid anpassning till komplex sinusformad signal $e^{j\frac{2\pi}{N}n\cdot k}$. Här svarar k mot antal perioder i intervallet med N värden ($n=0,1,\dots,N-1$)

Alltså $x_1[n] \triangleq X_B[k]$, $x_2[n] \triangleq X_C[k]$, $x_3[n] \triangleq X_A[k]$

b/ Dominerande bidrag hos $|X[k]|$ för $k=2$ och $k=N-2=6$
$N=8$

Möjliga "graderingar" av frekvensaxeln till $X[k]$

0	1	2	3	$N-1$	(N)	k
0	$\Delta\omega$	$2\Delta\omega$	$3\Delta\omega$	$(N-1)\Delta\omega$	ω_s	ω r/s
0	Δf	$2\Delta f$	$3\Delta f$	$(N-1)\Delta f$	f_s	f Hz

$k=2$: $2\Delta\omega = 480\pi$ r/s $\Rightarrow \omega_s = N\Delta\omega_0 = 8\cdot\frac{480\pi}{2} = 1920\pi$ r/s $=$
$= 960\cdot 2\pi$ r/s $\Rightarrow f_s = 960$ Hz

(Andra lösningsvägar finns!)