Tentamen SSY080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

31 Oktober 2019 kl. 08.30-12.30 sal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Onsdag 20 November kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), i korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	Del A: Rätt svar ger 1p. Del B: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Krav för godkänt.

Del A	5 p	av tot 10 p
Del B	7 p	av tot 15 p

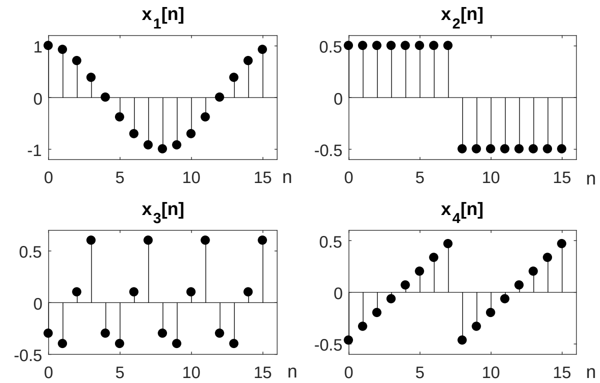
Betygsgränser.

Poäng	12-15	16-20	21-25
Betyg	3	4	5

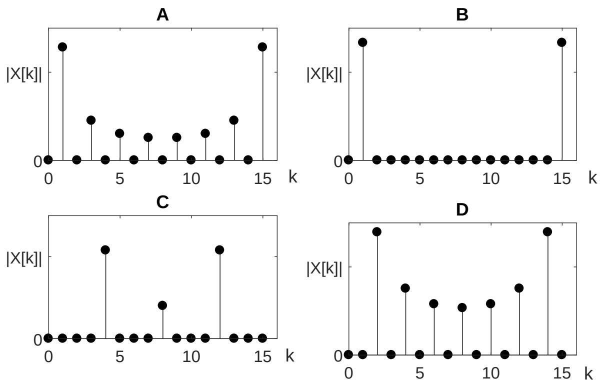
Lycka till!

Del A. En poäng (*1p*) per A-uppgift. **Ange endast svar**. Flera del A svar kan ges på samma blad. Inga uträkningar eller motsvarande kommer att beaktas.

A1. Fyra olika diskreta signaler visas i figur 1. De har alla längden $N = 16$. Signalernas Diskreta Fouriertransform (DFT) beräknas och presenteras som $|X[k]|$ i figur 2 men i blandad ordning. Para ihop signal (1,2,3,4) med motsvarande $|X[k]|$ (A, B, C, D).



Figur 1: Fyra diskreta signaler, $x_{1,2,3,4}[n]$



Figur 2: Beloppet av fyra DFT ($X[k]$)

A2. Ett diskret system har impulssvaret

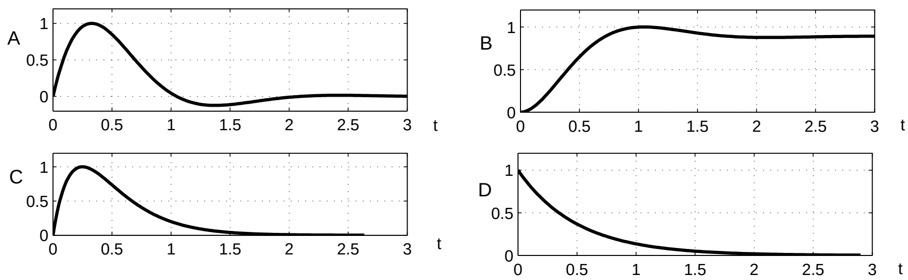
$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \quad .$$

Systemets stegsvar [1] tecknar vi med $y[n]$. Beräkna värdet på $y[4]$.

A3. Ett kontinuerligt och kausalt system har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{K}{(s+4)^2}$$

där K är en positiv konstant. Vilket utseende har impulssvar till systemet. Välj en variant ifrån figur 3.



Figur 3: Fyra olika impulssvar $h(t)$.

A4. En elektronisk förstärkare kan beskrivas med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s(s^2 + 4.0 \cdot 10^6)}{(s + 4.0 \cdot 10^3)^6} \quad .$$

En sinusformad spänning med olika vinkelfrekvens utgör insignal till förstärkaren. Vid en vinkelfrekvens märker man att utsignalen försvinner. Vid vilken vinkelfrekvens är det? (Bortse från $\omega = 0$).

[1] Systemets utsignal då insignalen är enhetssteget $u[n]$

A5. En kausal och diskret signal $x[n]$ har z-transformen

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + z^{-1}} \quad .$$

Beräkna signalen $x[n]$.

A6. Ett kontinuerligt och kausalt system har impulssvaret

$$h(t) = e^{-4(t-1)}u(t).$$

När når systemets stegsvar [2] halva sitt slutvärde?

A7. Ett kontinuerligt LTI-system med insignal $x(t) = \sin(5000\pi t)$ får en utsignal som kan tecknas $y(t) = A\sin(5000\pi t + \phi)$. Utsignalen är fördröjd 20μs jämfört med insignalen. Vilket värde har ϕ ?

A8. En reell sinusformad signal med frekvensen $f = 100$ Hz samplas. Sampelintervallet är $T = 6.25$ ms och $N = 800$ värden samplas in. Därefter beräknas den Diskreta Fouriertransformen $X[k]$. Vid vilka k-värden blir $|X[k]|$ markant störst?

A9. Den samplade signalen i problem A8 kan tecknas $x[n] = A\sin(\Omega n)$. Vilket värde har då Ω ?

A10. Se överföringsfunktionen $G(s)$ i uppgift A4. Vilken lutning har Bodediagrammets amplitudkarakteristik (Magnitude) vid mycket höga frekvenser?

[2] stegsvar är systemets utsignal då insignalen är ett enhetssteg

Del B. Fem poäng (*5p*) per B-uppgift. Fullständiga lösningar skall redovisas.

B11. Ett kontinuerligt och kausalt LTI-system har stegsvaret [3]

$$y(t) = (1.8 + 0.2e^{-50t} - 2.0e^{-10t})u(t) \quad .$$

Beräkna systemets impulssvar, $h(t)$. *(5p)*

B12. Ett diskreta LTI-system har impulssvaret

$$h[n] = (8(0.2)^n - 6(-0.8)^n)u[n] \quad .$$

Beräkna systemets utsignal $y[n]$ för insignalen *(5p)*

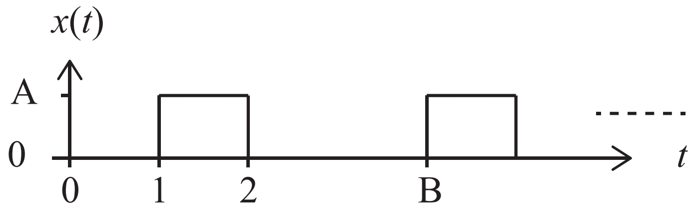
$$x[n] = 2(0.4)^n u[n] \quad .$$

[3] Systemets utsignal då insignalen är enhetssteget $u(t)$

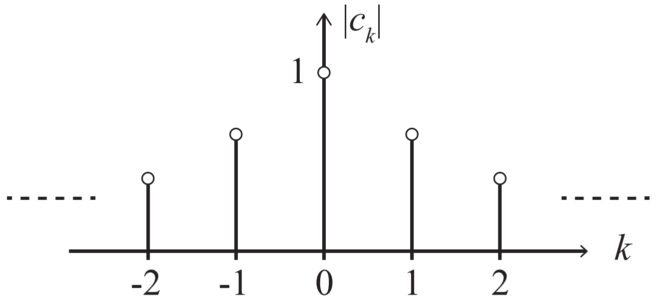
B13. En fyrkantspuls upprepas med jämna tidsintervall och bildar en periodisk signal $x(t)$. En del av signalen visas i figur 4. Signalen kan beskrivas med den komplexa Fourierserien enligt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{\pi}{2}t} \quad .$$

Beloppet av de centrala Fourierseriekoefficienterna visas i figur 5 där också värdet på $|c_0|$ finns angivet.
Beräkna värdet på konstanterna A och B i figur 4. *(5p)*



Figur 4: Del av periodisk signal $x(t)$.



Figur 5: De centrala Fourierseriekoefficienterna som $|c_k|$.

SSY080 - D3
2019-10-31

A1

$x_1[n]$ - B
<u>En</u> period sinusformad signal i intervallet $n = [0, N-1]$
$|X[k]|$ max vid $k=1$ och $N-1 = 15$

$x_2[n]$ - A
Också <u>en</u> period i intervallet $n = [0, N-1]$
Fyrkant ger övertoner vid udda k
$|X[k]|$max vid $k=1$ men bidrag också vid $k = 3, 5, 7$ ..

$x_3[n]$ - C
Ser ut som <u>fem</u> upprepningar (perioder) i intervallet $n = [0, N-1]$
$|X[k]|$max vid $k=5$

$x_4[n]$ - D
Två upprepningar (perioder) i intervallet, $|X[k]|$max vid $k=2$

A2.

$h[n] = \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$

Insignal $x[n] = u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \ldots$

$y[n] = h[n] + h[n-1] + h[n-2] + h[n-3] + \ldots$

n	0	1	2	3	4	5	6			
$h[n]$	1		1	1						
$h[n-1]$		1		1	1					
$h[n-2]$			1		1	1				
$h[n-3]$				1		1	1			
$h[n-4]$					1		1	1		
$h[n-5]$						1		1	1	
							1		1	1

$y[n]$	1	1	2	3	3	3	3	.....

↑ $y[4] = 3$

SSY080 - D3

2019-10-31

A3 $H(s) = \frac{K}{(s+4)^2}$; $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = K \cdot t e^{-4t} \cdot u(t)$

$h(t)\big|_{t=0} = 0 \quad h(t)\big|_{t\to\infty} = 0 \quad h(t) \geq 0 \;\; \forall t$

Svar: d

A4. Sök nollställe till täljaren

Frekvenssvar: $s = j\omega$

$(j\omega)^2 + 4{,}0 \cdot 10^6 = 0$

$-\omega^2 + 4{,}0 \cdot 10^6 = 0$; $\omega = \sqrt{4{,}0 \cdot 10^6} = \pm 2 \cdot 10^3$

Svar: $\omega = 2 \cdot 10^3$ rad/s

A5. $X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + z^{-1}} = \frac{z^2 + 3z + 2}{z^2 + z} = \{\text{Faktorisera}\}$

$= \frac{(z+1)(z+2)}{z(z+1)} = \frac{z+2}{z} = 1 + 2 \cdot z^{-1}$

Invers z-transform ger $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

A6 $h(t) = e^{-4(t-1)} u(t) = e^{4} \cdot e^{-4t} \cdot u(t)$

$x(t) = u(t) \qquad y(t) = h(t) * u(t) = e^4 \int^{\infty} e^{-4\tau} u(t-\tau)\, d\tau =$

$= e^4 \int_0^t e^{-4\tau}\, d\tau = e^4 \left[\frac{e^{-4\tau}}{-4} \right]_0^t =$

$= \frac{e^4}{4}\left(1 - e^{-4t}\right)$, $t \geq 0$ Slutvärde $\frac{e^4}{4}$

Halva slutvärdet ger $e^{-4t} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{4t} = 2$

$4t = \ln 2$ och $\boxed{t = \frac{\ln 2}{4}}$

SSY080 - D3
2019-10-31

A7 $y(t) = A\,x(t-t_0) = A\sin(5000\pi(t-t_0)) =$

$= A\sin(5000\pi t - 5000\pi\cdot t_0)$

$\phi = -5000\pi\cdot t_0 = -5000\pi\cdot 20\cdot 10^{-6} = -0{,}1\pi = \frac{-\pi}{10}$

A8 $\frac{k}{N} = \frac{f}{f_s}$; $f_s = \frac{1}{T}$

$k = f\cdot T\cdot N = 100\cdot 6{,}25\cdot 10^{-3}\cdot 800 = 500$

Reell signal: Bidrag även i $N-k = 300$ (Aliasing!)

Svar: $k = 300$ och 500

A9. $x(t) = \sin(\omega t)$ samplas $t = n\cdot T$

$x[n] = \sin(\omega n T) = \sin(\omega T n) = \sin(\Omega n)$

$\Omega = \omega\cdot T = 2\pi f\cdot T = 2\pi\cdot 100\cdot 6{,}25\cdot 10^{-3} = 1{,}25\pi$

Svar: $\Omega = 1{,}25\pi$

A10. Täljarpolynom ordn. $M = 3$

Nämnarpolynom ordn. $N = 6$

Lutning $\{\omega \to \infty\}$ $(M-N)\cdot 20\,dB/$ dekad $=$

$= -60\,dB/$ dekad

B11 $y(t) = \left(1{,}8 + 0{,}2e^{-50t} - 2{,}0e^{-10t}\right)u(t)$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1{,}8}{s} + \frac{0{,}2}{s+50} - \frac{2}{s+10} =$$

$$= \frac{1{,}8(s+50)(s+10) + 0{,}2s(s+10) - 2s(s+50)}{s(s+50)(s+10)} =$$

$$= \frac{s^2(1{,}8 + 0{,}2 - 2) + s(60 \cdot 1{,}8 + 0{,}2 \cdot 10 - 2 \cdot 50) + (1{,}8 \cdot 500)}{s(s+50)(s+10)}$$

$$= \frac{10s + 900}{s(s+50)(s+10)} = \frac{1}{s} \cdot H(s) \quad \text{ty } X(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = \frac{10s + 900}{(s+50)(s+10)} = \frac{A}{s+50} + \frac{B}{s+10}$$

$$10s + 900 = A(s+10) + B(s+50)$$

$s = -10 \Rightarrow \quad -100 + 900 = B \cdot 40 \Rightarrow B = \frac{800}{40} = 20$

$s = -50 \Rightarrow \quad -500 + 900 = A(-40) \Rightarrow A = -\frac{400}{40} = -10$

$$H(s) = \frac{20}{s+10} - \frac{10}{s+50}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \left(20e^{-10t} - 10e^{-50t}\right)u(t)$$

Kan även beräknas som $h(t) = \frac{d}{dt}\{y(t)\}$

SSY080 - D3
2019-10-31

B12

$$h[n] = \left(8(0{,}2)^n - 6(-0{,}8)^n\right) u[n]$$

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = 8 \cdot \frac{z}{z-0{,}2} - 6\frac{z}{z+0{,}8} =$$

$$= z\left(\frac{8(z+0{,}8) - 6(z-0{,}2)}{(z-0{,}2)(z+0{,}8)}\right) = z\,\frac{2z+7{,}6}{(z-0{,}2)(z+0{,}8)}$$

$$x[n] = 2(0{,}4)^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = 2\,\frac{z}{z-0{,}4}$$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = z\left(\frac{2z(2z+7{,}6)}{(z-0{,}4)(z-0{,}2)(z+0{,}8)}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2(2z^2+7{,}6z)}{(z-0{,}4)(z-0{,}2)(z+0{,}8)} = \frac{A}{z-0{,}4} + \frac{B}{z-0{,}2} + \frac{C}{z+0{,}8}$$

$$2(2z^2+7{,}6z) = A(z-0{,}2)(z+0{,}8) + B(z-0{,}4)(z+0{,}8) + C(z-0{,}4)(z-0{,}2)$$

$$z=0{,}4 \Rightarrow 2(2\cdot 0{,}4^2 + 7{,}6\cdot 0{,}4) = A(0{,}2)(1{,}2) \Rightarrow A = 6{,}72/0{,}24 = 28$$

$$z=0{,}2 \Rightarrow 2(2\cdot 0{,}2^2 + 7{,}6\cdot 0{,}2) = B(-0{,}2)(1) \Rightarrow B = 3{,}2/-0{,}2 = -16$$

$$z=-0{,}8 \Rightarrow 2(2\cdot 0{,}8^2 - 7{,}6\cdot 0{,}8) = C(-1{,}2)(-1) \Rightarrow C = -9{,}6/1{,}2 = -8$$

$$Y(z) = 28\cdot\frac{z}{z-0{,}4} - 16\frac{z}{z-0{,}2} - 8\frac{z}{z+0{,}8}$$

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \left[28(0{,}4)^n - 16(0{,}2)^n - 8(-0{,}8)^n\right]u[n]$$

SSY080 - D3
2019-10-31

B13

Komplex Fourierserie

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad ; \text{ vi har } \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \left(\text{integration över en period} \right)$$

T_0 : signalens fundamentala period $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$T_0 = B - 1$

$k=0$ $$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt = \frac{1}{B-1} \int_1^2 A\, dt =$$

$$= \frac{A}{B-1} = 1 \quad \left(\text{signalens medelvärde} \right)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow B - 1 = \frac{2\pi \cdot 2}{\pi} = 4$$

$A = B - 1 = 4$

Svar: $A = 4$

$B = 5$