Tentamen SSY080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

1 November 2018 kl. 08.30-12.30 sal: Hörsalsvägen

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Torsdag 15 november kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	Del A: Rätt svar ger 1p. Del B: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Krav för godkänt.

Del A	5 p	av tot 10 p
Del B	7 p	av tot 15 p

Betygsgränser.

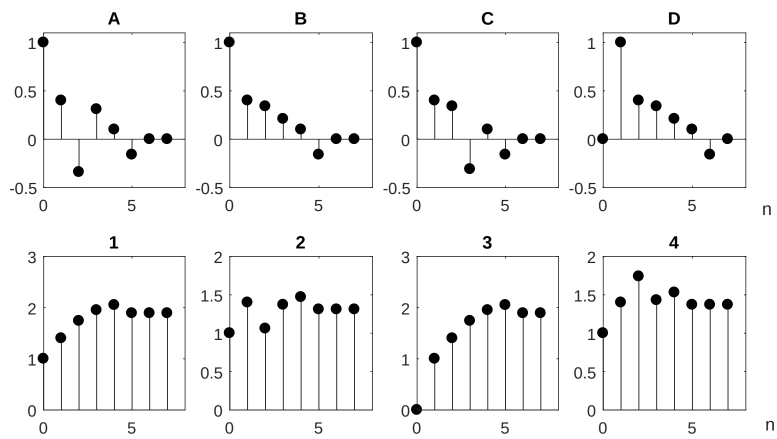
Poäng	12-15	16-20	21-25
Betyg	3	4	5

Lycka till!

Del A. En poäng (*1p*) per A-uppgift. **Ange endast svar**. Flera del A svar kan ges på samma blad. Inga uträkningar eller motsvarande kommer att beaktas.

A1. Beräkna z-transformen för signalen $x[n+2]u[n]$ då $x[n] = (0.5)^n$

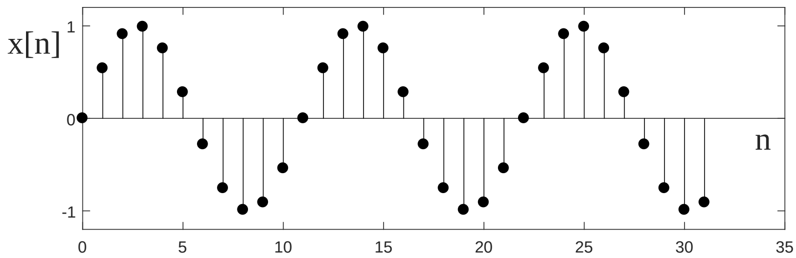
A2. Impulssvaren $h[n]$ från fyra olika diskreta system visas överst i figur 1. Övriga värden hos $h[n]$ som ej visas i figurerna är noll. Stegsvaren som representerar dessa fyra olika system visas nederst i samma figur men i blandad ordning. Para ihop impulssvaren (A,B,C,D) med motsvarande stegsvar (1,2,3,4).



Figur 1: Impulssvar och stegsvar från fyra diskreta system

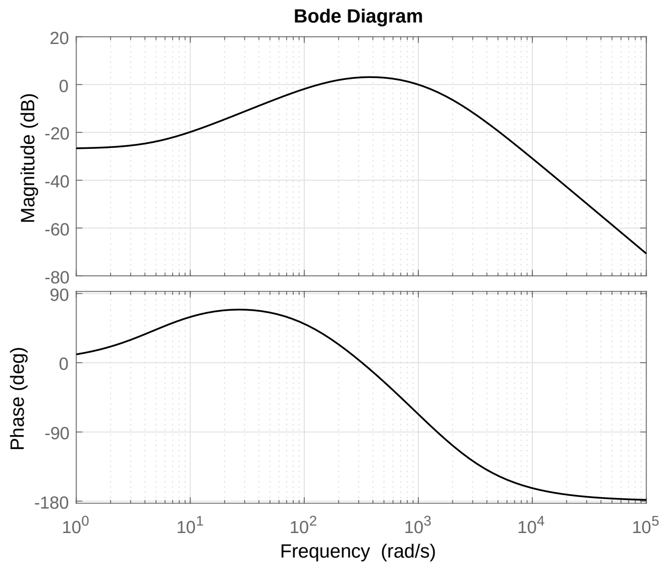
A3. Den kontinuerliga signalen $x(t) = e^{-5t}u(t)$ samplas med sampelintervallet $T = 20$ ms och bildar den diskreta signalen $x[n]$. Första sampelvärdet tas vid $t = 0$. Beräkna z-transformen för $x[n]$.

A4. Signalen $x(t) = \sin(\omega t)$ samplas med sampelintervallet T och bildar den diskreta signalen $x[n] = \sin(\Omega n)$ som visas i figur 2. Vilket värde har Ω ?

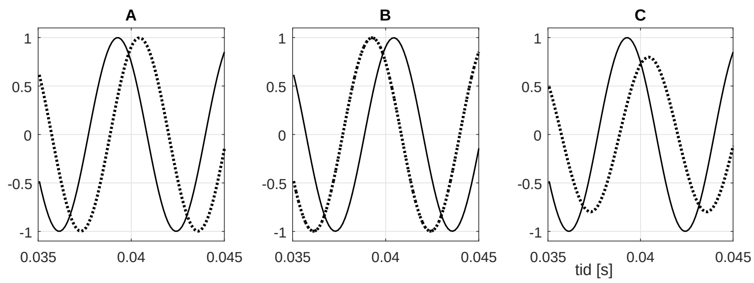


Figur 2: Diskret signal $x[n]$

A5. Ett kontinuerligt LTI-system $H(s)$ har ett frekvenssvar enligt Bode-diagrammet i figur 3. En kontinuerlig sinusformat signal utgör insignal till systemet. Signalens periodtid är $\frac{\pi}{500}$ s. Tre olika par av insignal (heldragen) och utsignal (streckad) från ett LTI-system visas i figur 4. Vilken av dem (A,B,C) svarar mot vårt system $H(s)$?



Figur 3: Frekvenssvar till $H(s)$



Figur 4: Tre insignal(-)/utsignal($\cdots$) par

A6. En kontinuerlig sinusformad signal $x(t) = A\sin(\omega t)$ bildar insignal till ett LTI-system med överföringsfunktionen

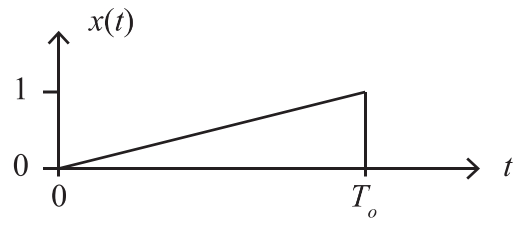
$$G(s) = \frac{K}{s+5}$$

där A och K är konstanter. Vid vinkelfrekvensen $\omega = 100$ rad/s är utsignalens amplitud $=8$. Vilken amplitud får utsignalen om vinkelfrekvensen ökar till $\omega = 1000$ rad/s ?

A7. En period av en kontinuerlig periodisk signal visas i figur 5. Signalens Fourierserie kan tecknas som

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Vilken är signalens fundamentala period T_o?



Figur 5: En period av $x(t)$

A8. Signalen $x(t) = \cos(\omega t)$ samplas med sampelintervallet $T = \frac{\pi}{60}$ s och bildar den diskreta signalen $x[n]$. Fyra olika vinkelfrekvenser ω används enligt nedan och fyra diskreta signaler bildas.

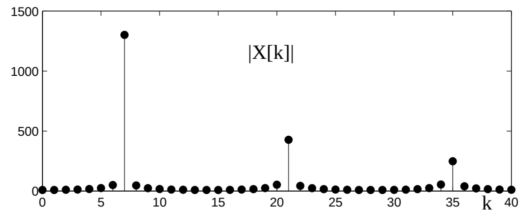
k	1	2	3	4
ω [rad/s]	$\omega_1 = 10$	$\omega_2 = 50$	$\omega_3 = 70$	$\omega_4 = 170$
Signal	$x_1[n]$	$x_2[n]$	$x_3[n]$	$x_4[n]$

Är någon/några av signalerna $x_k[n]$ lika $(k = 1, 2, 3, 4)$?

A9. Vilken kontinuerlig signal $x(t)$ har Fouriertransformen

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < a \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

A10. En periodisk kontinuerlig signal $x(t) = x(t + T_o)$ som liknar en fyrkantsvåg samplas med samplingsvinkelfrekvensen 1000 rad/s. Antal sampel $N = 2^{11}$. Beloppet av signalens DFT ($|X[k]|$) för $k = 0$ till 40 visas i figur 6. Ingen aliasing (vikning) förekommer. Vilken är signalens fundamentala period T_o?



Figur 6: Del av signalens DFT som $|X[k]|$

Del B. Fem poäng (*5p*) per B-uppgift. Fullständiga lösningar skall redovisas.

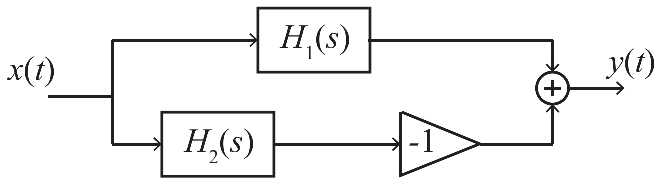
B11. Ett kontinuerligt LTI-system $H(s)$ beskrivs med differentialekvationen

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) \quad .$$

(a) Systemet befinner sig i vila. Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då insignalen är *(4p)*

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \quad .$$

(b) Om systemet realiseras enligt figur 7 och $H_1(s) = \dfrac{2}{s+1}$.
Vad är då $H_2(s)$? *(1p)*



Figur 7: Sammansatt system.

B12. Ett diskret LTI-system $H(z)$ beskrivs med differensekvationen

$$y[n] + y[n-1] + 0.16y[n-2] = x[n-1] + 0.32x[n-2].$$

(a) Systemet befinner sig i vila. Beräkna systemets utsignal $y[n]$ då insignalen är *(4p)*

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad .$$

(b) Vad blir $y[0]$? *(1p)*
(Kan användas för att snabbkontrollera resultatet)

B13. En kontinuerlig och periodisk signal kan beskrivas enligt ekvation 1. Signalen kan även tecknas som en Fourierserie enligt ekvation 2.

a) Vilken grundvinkelfrekvens har signalen $x(t)$? *(1p)*

b) Beräkna Fourierseriekoefficienten c_0 . *(1p)*

c) Beräkna övriga Fourierseriekoefficienter c_k. *(3p)*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t-4n) - u(t-4n-1) \tag{1}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{2}$$

SSY080 , D3

2018-11-01

A1 $x[n] = (0{,}5)^n$

$x[n+2] = (0{,}5)^{n+2} = 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^n$

$x[n+2]u[n] = 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^n u[n]$

$X(z) = \mathcal{Z}\{0{,}5^2 \cdot 0{,}5^n \cdot u[n]\} =$

$= 0{,}5^2 \, \mathcal{Z}\{0{,}5^n \cdot u[n]\} = 0{,}25 \cdot \frac{z}{z-0{,}5}$

A2. Stegsvar: $s[n]$, Impulssvar: $h[n]$

$s[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]$ ger

A - 2
B - 1
C - 4
D - 3

A3. $x(t) = e^{-5t} u(t)$, $T = 20\,ms$

$x[n] = x(nT) = e^{-5T \cdot n} \cdot u[n] = \{5 \cdot T = 0{,}1\}$

$= (e^{-0{,}1})^n \cdot u[n]$

z-transformera

$X(z) = \frac{z}{z - e^{-0{,}1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{e^{0{,}1}}}$

A4. En period om 2π uppdelad i
$N=11$ st intervall (delar)

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{11}$$

A5. Periodtid $T = \frac{\pi}{500}$ s

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} \cdot 500 = 1000 \text{ rad/s}$$

Magnitude $= 0$dB vid 1000 rad/s ($0\text{dB} \triangleq 1$ ggr)
Phase $\approx -70°$ (negativ $\Rightarrow$ "fördröjning")

Svar: A

A6.
$$G(s) = \frac{K}{s+5} \;;\; G(j\omega) = \frac{K}{j\omega+5} = \frac{K/5}{1+j\frac{\omega}{5}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{5}\right)^2}} \approx \frac{K}{5} \cdot \frac{5}{\omega} \text{ för } \omega \gg 5$$

$$\frac{|G(j1000)|}{|G(j100)|} \approx \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$

Alt: $|G(j\omega)|$ faller med 20dB/dekad för $\omega \gg \omega_0 = 5$

och $20 \, {}^{10}\log\left\{\frac{|G(j1000)|}{|G(j100)|}\right\} = -20$

$${}^{10}\log\left\{\frac{|G(j1000)|}{|G(j100)|}\right\} = -1 \Rightarrow \frac{|G(j1000)|}{|G(j100)|} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

Svar: $\frac{8}{10} = 0{,}8$

A7. $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ eller allmänt

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{L} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} \cdot L = 2L$$

A8. $x(t) = \cos(\omega t)$, $T = \frac{\pi}{60} \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 120$ rad/s

$\omega_1 = 10 < \frac{\omega_s}{2}$ Ingen aliasing $\Omega_1 = \omega_1 T = \frac{\pi}{6}$

$\omega_2 = 50 < \frac{\omega_s}{2}$ Ingen aliasing $\Omega_2 = \omega_2 T = \frac{5\pi}{6}$

$\omega_3 = 70 > \frac{\omega_s}{2}$ Aliasing $\Omega_3 = \omega_3 T = \frac{7\pi}{6}$

Notera $\omega_s - \omega_3 = 120 - 70 = 50 = \omega_2$

$\omega_4 = 170 > \frac{\omega_s}{2}$ Aliasing $\omega_4 = \omega_s + \omega_2$ $\Omega_4 = (\omega_s + \omega_2)T =$
$= 2\pi + \Omega_2$

$x[n] = \cos(\Omega n)$ Undersöks

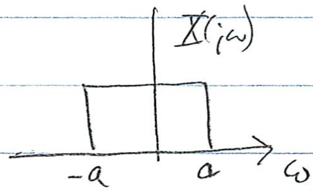
$x_2[n]$ och $x_4[n]$ lika ty $\Omega_4 = 2\pi + \Omega_2$

$x_2[n] = (1, -0{,}866, 0{,}5, 0, -0{,}5, 0{,}866, \ldots)$

$x_3[n] = (1, -0{,}866, 0{,}5, 0, -0{,}5, 0{,}866, \ldots$

Svar: $x_2[n]$, $x_3[n]$ och $x_4[n]$ är lika

A9. $X(j\omega) = \begin{cases} 1 & , \ |\omega| < a \\ 0 & , \ \text{annars} \end{cases}$



Tabell ger $x(t) = FT^{-1}\{X(j\omega)\} =$

$$= \frac{\sin(at)}{\pi t} = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{\sin(at)}{at} =$$

$$= \frac{a}{\pi} \operatorname{sinc}(at)$$

A10. $\omega_s = 1000$ rad/s

$N = 2^{11} = 2048$

$k = 7$ (ur figur, ger grundvinkelfrekvens ω_0)

$$\omega_0 = \frac{k}{N} \cdot \omega_s$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi \cdot N}{k \cdot \omega_s} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 2048}{7 \cdot 1000} \approx 1{,}84 \text{ s}$$

B11. $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$

Laplacetransf. $Y(s)(s^2+4s+3) = X(s)(s+5)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+3} = \dots = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$$

a) $x(t) = e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s+2}$

$$Y(s) = H(s)\cdot X(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+2}$$

$$s+5 = A(s+3)(s+2) + B(s+1)(s+2) + C(s+1)(s+3)$$

$s=-1$; $4 = A(2)(1) \Rightarrow A = 2$

$s=-3$; $2 = B(-2)(-1) \Rightarrow B = 1$

$s=-2$: $3 = C(-1)(1) \Rightarrow C = -3$

$Y(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+3} - \frac{3}{s+2}$ Inv. Laplacetransf.

$$y(t) = \left(2e^{-t} + e^{-3t} - 3e^{-2t}\right)u(t)$$

b) $H(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+3}$

$s+5 = D(s+3) + E(s+1)$ $s=-1$: $4 = D\cdot 2 \Rightarrow D = 2$

$s=-3$; $2 = E(-2) \Rightarrow E = -1$

$$H(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+3} = H_1(s) - H_2(s)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s+3}$$

B12, $y[n] + y[n-1] + 0{,}16\,y[n-2] = x[n-1] + 0{,}32\,x[n-2]$

z-transformera

$$Y(z)\left(1 + z^{-1} + 0{,}16\,z^{-2}\right) = X(z)\left(z^{-1} + 0{,}32\,z^{-2}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} + 0{,}32\,z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0{,}16\,z^{-2}} = \frac{z + 0{,}32}{z^2 + z + 0{,}16}$$

a) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{z}{z+0{,}5}$

Poler till $H(z)$ $\quad z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 0{,}16} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}09} = \begin{cases} -0{,}2 \\ -0{,}8 \end{cases}$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{(z+0{,}32)\,z}{(z+0{,}2)(z+0{,}8)(z+0{,}5)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z - 0{,}32}{(z+0{,}2)(z+0{,}8)(z+0{,}5)} = \frac{A}{z+0{,}2} + \frac{B}{z+0{,}8} + \frac{C}{z+0{,}5}$$

$$z + 0{,}32 = A(z+0{,}8)(z+0{,}5) + B(z+0{,}2)(z+0{,}5) + C(z+0{,}2)(z+0{,}8)$$

$z = -0{,}2:\quad 0{,}12 = A(0{,}6)(0{,}3) \qquad A = \frac{0{,}12}{0{,}6 \cdot 0{,}3} = \frac{12}{6 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

$z = -0{,}8:\quad -0{,}48 = B(-0{,}6)(-0{,}3) \qquad B = \frac{-0{,}48}{0{,}6 \cdot 0{,}3} = -\frac{48}{18} = -\frac{8}{3}$

$z = -0{,}5:\quad -0{,}18 = C(-0{,}3)(0{,}3) \qquad C = \frac{0{,}18}{0{,}3 \cdot 0{,}3} = \frac{18}{9} = 2$

$$Y(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z+0{,}2} - \frac{8}{3}\,\frac{z}{z+0{,}8} + 2\,\frac{z}{z+0{,}5}$$

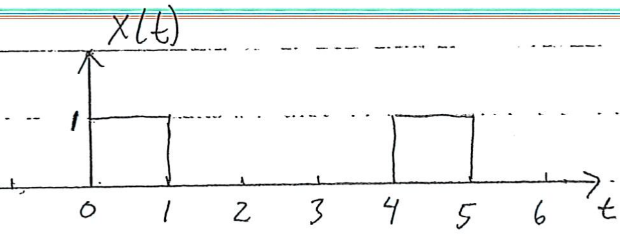
$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \left(\frac{2}{3} \cdot (-0{,}2)^n - \frac{8}{3}(-0{,}8)^n + 2(-0{,}5)^n\right) u[n]$$

b) $y[0] = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} + 2 = 0$

Stämmer! Se diff.ekv vid $n=0$ med $y[n-1] = y[n-2] = 0$

och $x[n-1] = x[n-2] = 0$

B13. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t-4n) - u(t-4n-1)$



a) Periodtid $T = 4$ s

Grundvinkelfrekv. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ r/s

c) $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4}\int_0^1 e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\frac{1}{(-jk\omega_0)}\left[e^{-jk\omega_0} - 1\right] =$$

$$= \frac{j\,2}{k\cdot 4\cdot \pi}\left[e^{-jk\frac{\pi}{2}} - 1\right] = \frac{j}{2k\pi}\left[e^{-j\frac{k\pi}{2}} - 1\right] \quad k \neq 0$$

b) Studera $k=0$ separat

$$c_0 = \frac{1}{4}\int_0^1 1\, dt = \frac{1}{4}\left[t\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$