CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

ERE 103 Reglerteknik D
ERE 102 Reglerteknik D
Tentamen 2016-01-14

08.30 - 12.30 Hörsalar på Hörsalsvägen

Examinator: Jonas Fredriksson, tel 1359.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 7 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

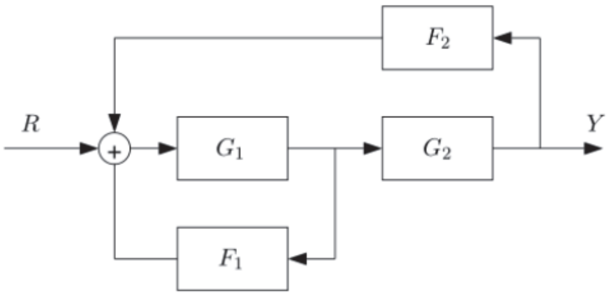
Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 3 och 4 januari kl 12-13 i rum EDIT 5220. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

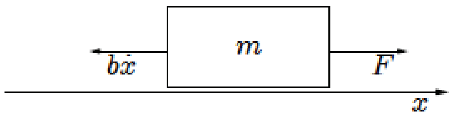
Uppgift 1.

a. Har systemen $G_1(s) = \frac{s-1}{s+1}$ och $G_2(s) = e^{-2s}$ samma amplitudkurva? Motivera ditt svar! (1 p)

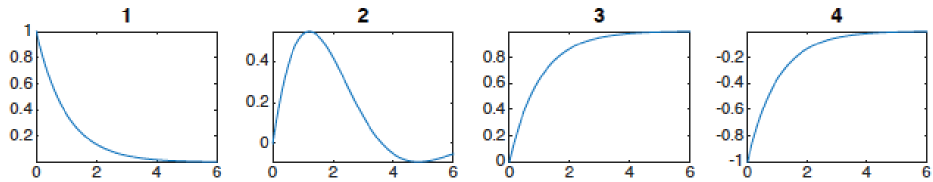
b. Ett reglersystem beskrivs av nedanstående blockdiagram. Ange överföringsfunktionen från R till Y. (*Notera att det är positiv återkoppling!*) (1 p)



c. Betrakta en massa där friktionen är proportionell mot hastigheten. Insignalen till systemet är en yttre kraft F som påverkar massan.

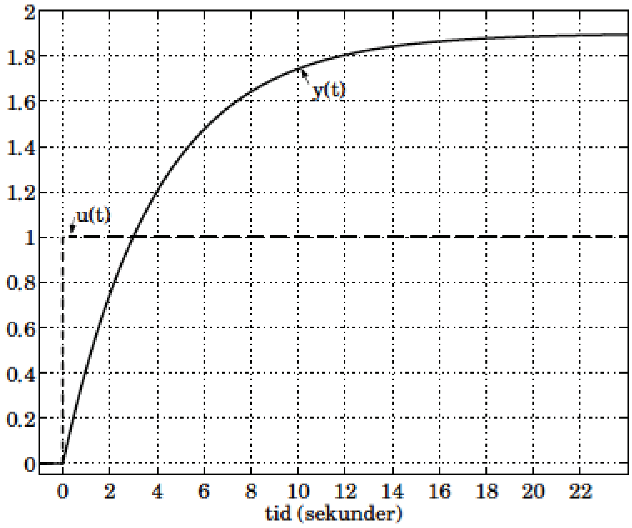


Viktfunktionen $g(t)$ kan användas för att beräkna utsignalen för godtycklig insignal. Då u är insignalen och y utsignalen så har vi att $y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$. Om vi betraktar hastigheten $\dot{x}$ som utsignal, vilken av följande viktfunktioner beskriver systemet ($m = 1$, $b = 1$):



Motivera ditt svar! (2 p)

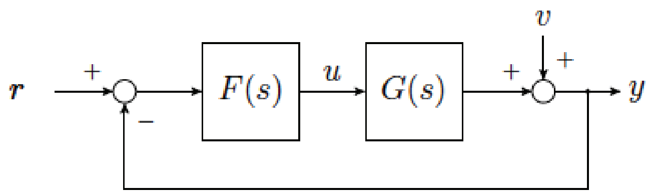
Uppgift 2.
I figuren nedan visas resultatet från ett stegsvarsexperiment på ett stabilt system $Y(s) = G(s)U(s)$.



a. Antag att systemet har överföringsfunktionen $G(s) = \frac{Ke^{-sL}}{1+sT}$. Använd stegsvaret ovan för att bestämma värdena på K, L och T. (1 p)

b. Man återkopplar systemet med styrlagen $u(t) = 10(y_{ref}(t) - y(t))$. Vad blir slutvärdet på utsignalen, $y(t)$, när referenssignalen $y_{ref}(t)$ är ett enhetssteg? (1 p)

Uppgift 3.
Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Processen som ska styras har följande överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{s+1}e^{-s/2}$$

Välj lämplig regulator till systemet och bestäm regulatorparametrarna så att nedanstående specifikationer uppfylls. (3 p)

1) Inga kvarstående fel efter stegformade processtörningar (v).

2) Systemets fasmarginal ska vara $\varphi = 45°$.

3) Överkorsningsfrekvensen får inte understiga $\omega_c = 2$ rad/s.

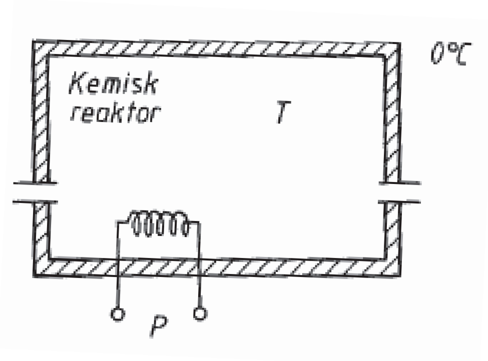
Uppgift 4.
I tanken nedan försiggår en kemisk reaktion där värme utvecklas. Den energi som bildas per tidsenhet, [J/s], är beroende av temperaturen enligt :

$$k_1 T^3$$

där T är reaktionstemperaturen [°C]. Värmeförlusterna till omgivningen per tidsenhet, [J/s], är proportionell mot temperaturskillnaden till omgivningen enligt:

$$k_2(T - T_0)$$

där T_0 är omgivningens temperatur, som kan antas vara 0 °C. Tanken är även försedd med ett styrdon, med vilken processen kan värmas upp eller kylas ned. Detta styrdon avger effekten P till tanken. Styrdonet kan modelleras som ett första ordningens system med en statisk förstärkning på 1 och en tidskonstant på τ s.



a. Ställ upp värmebalansekvationen för processen. Antag att $k_1 = 0.1$ och att $k_2 = 5$ och att värmekapaciteten hos de reagerande ämnena är $C = 100$ [J/°C]. (*Ledning: Enhetsanalys.*) (2 p)

b. Utöka modellen med att även inkludera styrdonsdynamiken. Formulera svaret som en olinjär tillståndsmodell, på formen $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$! (1 p)

c. Linjärisera modellen kring den stationära arbetspunkt, vid vilken reaktionen kan fortgå med konstant hastighet, då $P = 0$. (2 p)

d. Bestäm motsvarande överföringsfunktion $G(s)$ och visa att den motsvarar en instabil process. (2 p)

Uppgift 5.
Låt processen för ett system beskrivas av överföringsfunktionen

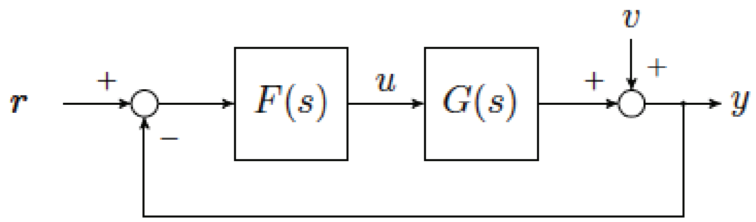
$$G(s) = \frac{s-6}{s^2+4s}$$

Avgör följande fall:

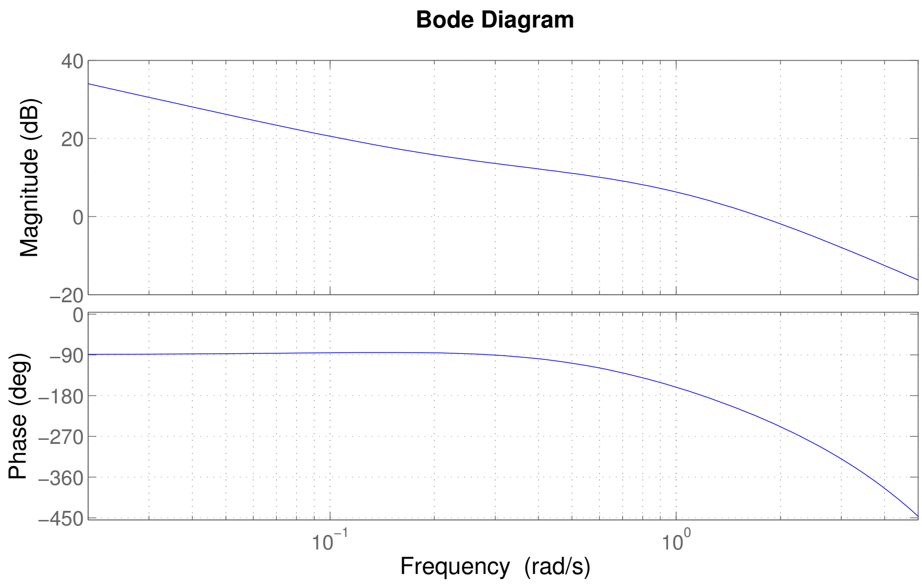
a. Kan en P-regulator, $F(s) = K_p$ användas för att stabilisera det återkopplade systemet? Om så är fallet ange för vilka värden på K_p som det återkopplade systemet är stabilt. (2 p)

b. Kan en I-regulator, $F(s) = K_i/s$ användas för att stabilisera det återkopplade systemet? Om så är fallet ange för vilka värden på K_i som det återkopplade systemet är stabilt. (2 p)

Uppgift 6.
Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Bodediagrammet för processen, $G(s)$, ges av:



a. Låt processen styras av en P-regulator, $F(s) = K_p$. Bestäm huruvida det är möjligt att stabilisera systemet med en P-regulator, och i så fall bestäm K_p så att fasmarginalen blir $40°$. (2 p)

b. Bestäm det kvarstående felet vid stegformade börvärdesändringar vid användandet av en P-regulator! (2 p)

Uppgift 7.
Ett system beskrivs av differentialekvationerna

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - 2x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 4x_2(t) + 3u(t), \end{aligned}$$

där som vanligt $u(t)$ är styrsignalen och utsignalen ges av $y(t) = x_2(t)$. Systemet skall regleras med tillståndsåterkoppling enligt

$$u(t) = -Lx(t) + K_r r(t),$$

där $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^T$ och $r(t)$ är en referenssignal.

a. Vilket krav på värden på återkopplingsvektorn L ger ett stabilt slutet system. (2 p)

b. Bestäm återkopplingsvektorn L så att slutna systemet från en dubbelpol i -2. (2 p)

c. Bestäm för det L som bestämdes i (b) förstärkningen K_r så att utsignalen stationärt är lika med referenssignalen. (2 p)

SLUT!

1. a) De har samma amplitudkurva.

$$|G_1(j\omega)| = \left|\frac{j\omega - 1}{j\omega + 1}\right| = \frac{|j\omega - 1|}{|j\omega + 1|} = \frac{\sqrt{\omega^2 + (-1)^2}}{\sqrt{\omega^2 + 1^2}} = 1$$

$$|G_2(j\omega)| = 1$$

b) $$Y = G_2 G_1 (R + F_2 Y + F_1 G_2^{-1} Y) =$$

$$= G_2 G_1 R + F_2 G_2 G_1 Y + F_1 G_1 Y$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_2 G_1}{1 - F_2 G_2 G_1 - F_1 G_1}$$

c) Överföringsfunktionen ges som

$$Y(s) = \frac{1}{ms + b} F(s)$$

med $(m = 1,\ b = 1) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s+1}$

Viktfunktionen ges som $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-t} \Rightarrow 1$$

2. a) Ur figur fås

$K = 1{,}9 \quad L = 0 \quad \text{och} \quad T = 4$

b) $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{F\cdot G}{1+FG}\cdot\frac{1}{s}$ (enhetssteg)

$= \lim_{s\to 0}\frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{L(0)}{1+L(0)} = \left[L(s) = \frac{10\cdot Ke^{-sL}}{1+sT}\right] =$

$= \left[L(0) = \frac{10K}{1} = 19\right] = \frac{19}{1+19} = \underline{\underline{\frac{19}{20}}}$

3. Specifikation 1 indikerar att vi behöver I-verkan i vår regulator, ty integralverkan finns ej i processen. Prova en PI-regulator.

Bestäm $\arg\{G(j\omega)\}$ för $\omega = \omega_c = 2$ rad/s

$\arg\{G(j\omega)\} = -\arctan\omega - \frac{\omega}{2}\cdot\frac{180}{\pi}$

$\arg\{G(j\omega_c)\} = -\arctan 2 - \frac{180}{\pi} \approx 120^\circ$

vi kan tillåta regulatorn att ha $180^\circ - \varphi_m - 120^\circ = 15^\circ$ fasvridning för $\omega = 2$ rad/s.

$F(s) = K_i\left(\frac{1+T_i s}{s}\right) \Rightarrow \arg\{F(j\omega)\} = \arctan T_i\omega - 90^\circ$

För $\omega = \omega_c = 2$ rad/s gäller alltså $\arctan 2T_i - 90^\circ = 15^\circ$

$\arctan 2T_i = 75^\circ \Rightarrow T_i = \underline{\underline{1{,}87}}$

$|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow |G(j\omega_c)|\cdot|F(j\omega_c)| = 1$

$|G(j\omega_c)| = \frac{10}{\sqrt{\omega_c^2+1}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

$|F(j\omega_c)| = \frac{K_i\sqrt{1+(T_i\omega_c)^2}}{\omega_c} = \frac{K_i\sqrt{1+(1{,}87\cdot 2)^2}}{2}$

$|F| = \frac{1}{|G|} \Rightarrow K_i = \frac{2\sqrt{5}}{10\sqrt{1+(1{,}87\cdot 2)^2}} = 0{,}12 \Rightarrow \underline{\underline{F(s) = 0{,}12\frac{(1+1{,}87s)}{s}}}$

4. Värmebalans:

a) $$C \frac{dT}{dt} = k_1 T^3 + P - k_2 T$$

$$100 \frac{dT}{dt} = 0{,}1 T^3 + P - 5T$$

b) Styrdonsdynamik

$$P(s) = \frac{1}{1+\tau s} U(s)$$

$$P(s) + \tau s P(s) = U(s)$$

$$\tau \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad \tau \frac{dP}{dt} = -P + u$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = 0{,}001 T^3 + P - 0{,}05 T \\ \dfrac{dP}{dt} = -\dfrac{1}{\tau} P + \dfrac{1}{\tau} u \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, u) \end{cases}$$

c) Linjärisera

Jämviktspunkt ($P_0 = 0$)

$$\begin{cases} 0 = 0{,}001 T^3 - 0{,}05 T \\ 0 = \frac{1}{\tau} u \end{cases}$$

$P_0 = 0$, $u_0 = 0$

$T_0 = \sqrt{50}$

$$T_0 (0{,}001 T_0^2 - 0{,}05) = 0$$

$T_0 = 0$ eller $T_0 = \sqrt{50}$

$x_1 = T$

$x_2 = P$

$u = u$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3 \cdot 0{,}001 T^2 - 0{,}05 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\tau} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{1}{\tau}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_0, u_0} = 0{,}1 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_0, u_0} = 1 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{x_0, u_0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_0, u_0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_0, u_0} = -\frac{1}{\tau} \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{x_0, u_0} = \frac{1}{\tau}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

d) $G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - 0{,}1 & -1 \\ 0 & s + \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\tau} & 1 \\ 0 & s - 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}{(s - 0{,}1)(s + \frac{1}{\tau})}$$

$$= \frac{\frac{1}{\tau}}{(s - 0{,}1)(s + \frac{1}{\tau})}$$

Poler i $-\frac{1}{\tau}$ och $0{,}1$ ← högra halvplanet.

5

$$G(s) = \frac{s-6}{s^2+4s}$$

a) Kan $F(s) = K_p$ stabilisera processen?

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{F(s)\cdot G(s)}{1+G(s)F(s)}$$

K.E. ges av $1 + L(s) = 0$

$$1 + \frac{K_p(s-6)}{s^2+4s} = 0$$

$$s^2 + (4+K_p)s - 6K_p = 0$$

Nödvändigt (och tillräckligt villkor) att $4 + K_p > 0$ och $-6K_p > 0$

$K_p < 0$ och $K_p > -4 \Rightarrow -6 < K_p < 0$ stabilisera processen

b) $F(s) = \frac{K_i}{s} \Rightarrow L(s) = \frac{K_i(s-6)}{s(s^2+4s)}$

K.E. ges av $1 + L(s) = 0$

$$s(s^2+4s) + K_i(s-6) = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + K_i s - 6K_i = 0$$

Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccc}
s^3 & 1 & K_i & \\
s^2 & 4 & -6K_i & \\
s^1 & \frac{4K_i+6K_i}{4} = \frac{10}{4}K_i & 0 & \\
s^0 & -6K_i & &
\end{array}$$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{10}{4}K_i > 0 \\ -6K_i < 0\end{array}\right\}$ motstridigt krav.

Går ej!

6. a) Med en P-regulator $F(s) = K_p$ kan vi flytta amplitudkurvan så att vi kan stabilisera systemet.
Ur bodediagrammet får vi att vid fasvridningen $-180°$ är amplituden ca 4 dB = 1,58
Om P-regulatorn har förstärkningen $< \frac{1}{1,58}$ så kommer slutna systemet att vara stabilt. Eftersom en P-regulator inte påverkar fasen, så kan vi direkt designa en regulator.
För fasmarginal $40°$ så gäller processen ska fasvrida $-140°$ och detta sker vi ca 0,8 rad/s.
Ur bodediagram får vi att förstärkningen (amplituden) måste sänkas till 0 dB, ty $|L(j0,8)| = 1$ (0 dB), vid 0,8 rad/s. Detta åstadkommer genom att välja

$$K_p = \frac{1}{|G(j0,8)|} = \frac{1}{8\text{ dB}} = \frac{1}{2,51} \approx \underline{\underline{0,39}}.$$

b) Ur bodediagram ser vi att för låga frekvenser går $L(j\omega) \to \infty$ då $\omega \to 0$

Kvarstående felet $e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \ldots$

$$= \frac{1}{1 + L(0)} = \underline{\underline{0}}$$

7.

a) $$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Slutna systemets poler ges som $\det(sI-(A-BL))=0$ vid tillståndsåterkoppling.

$$(sI-(A-BL)) = \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}\right] =$$

$$= \left[\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3l_1 & 3l_2 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1+3l_1 & s-4+3l_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-(A-BL)) = (s+2)(s-4+3l_2) + 1+3l_1 = 0$$

$$s^2 + (3l_2 - 4 + 2)s + 1 + 3l_1 - 8 + 6l_2 = 0$$

stabilt om

$$3l_2 - 2 > 0 \quad \text{och} \quad 3l_1 + 6l_2 - 7 > 0$$

$$\underline{l_2 > \frac{2}{3} \qquad l_1 > \frac{7+6l_2}{3}}$$

b) Dubbelpol i $-2 \Rightarrow (s+2)^2 = s^2+4s+4$

Identifiering av koefficienter ger

$$3l_2 - 2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{l_2 = 2}}$$

$$3l_1 + 6l_2 - 7 = 4 \Rightarrow 3l_1 = 11 - 6l_2 \Rightarrow \underline{\underline{l_1 = -\frac{1}{3}}}$$

c) $$K_r = \frac{1}{C(-A+BL)^{-1}B} =$$

$$C(-A+BL)^{-1}B = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 6\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 10\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}}{18} =$$

$$= \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

$$K_r = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = \underline{\underline{-3}}$$