# Tentamen ssy080
# Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

19 oktober 2011 kl. 08.30-12.30 sal: Hörsalsvägen

| | |
|---|---|
| Förfrågningar: | Ants Silberberg, tel. 1808 |
| Lösningar: | Anslås torsdag 20 oktober på institutionens anslagstavla, plan 5. |
| Resultat: | Rapporteras in i Ladok |
| Granskning: | Torsdag 3 nov kl. 12.15 - 13.20 , rum 3340 (Landahlsrummet) på plan 3, korridor parallell med Hörsalsvägen. |
| Bedömning: | En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng. |

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

| *Poäng* | 0-10 | 11-15 | 16-20 | 21-25 |
|---|---|---|---|---|
| *Betyg* | U | 3 | 4 | 5 |

Lycka till!

1. a) Ett system modifierar amplitudnivån på insignalen $x(t)$ och genererar utsignalen $y(t)$ enligt sambandet

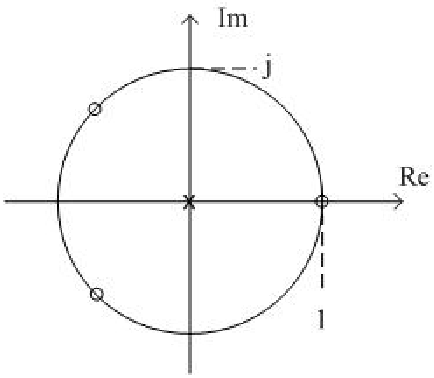
$$y(t) = 2x(t) + 2$$

Är systemet linjärt? Tydlig motivering krävs. *(2p)*

b) Ett diskret LTI-system har ett pol- nollställediagram enligt figur 1. En av dessa fyra insignaler kommer att släckas ut av systemet. Vilken? Klar motivering krävs. *(3p)*

$$x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi n}{3}) \qquad x_2[n] = \sin(\frac{\pi n}{4})$$

$$x_3[n] = \sin(\frac{3\pi n}{4}) \qquad x_4[n] = (-1)^n$$




Figur 1: Pol- nollställe digram.

2. Sambandet mellan insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$ hos ett kausalt och kontinuerligt LTI-system beskrivs med följande differentialekvation

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = x(t)$$

Beräkna systemets utsignal $y(t)$ för insignalen

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

*(5p)*

3. Ett diskret LTI-system har stegsvaret $y_s[n]$ enligt

$$y_s[n] = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$$

Beräkna systemets impulssvar. *(5p)*

4. En teknolog spelar in ljud från sin gitarr med en mikrofon och samplar ljudet i sin dator med samplingsintervallet $T_s = 0.5$ ms. Antalet insamlade sampelvärden är $N = 2^{11}$ vid varje samplingstillfälle. Ett antal diskreta signaler erhålls ($x[n], n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$). Ett försök görs att kontrollera stämningen av gitarrens tre tunnaste strängar som skall motsvara tonerna E (330 Hz), H (247 Hz) och G (196 Hz). Frekvenserna uppskattas genom att beräkna Diskret Fouriertransform [1] av de insamlade datasekvenserna, $X[k] = DFT\{x[n]\}$.

   (a) Vid vilket index $k$ förväntas $|X[k]|$ ha sitt största värde hos de tre tonerna E, H och G? *(4p)*

   (b) Vilken frekvensskillnad i Hz motsvarar två intilliggande värden i signalens DFT (alltså mellan $X[k]$ och $X[k+1]$) ? *(1p)*

[1] Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$ beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

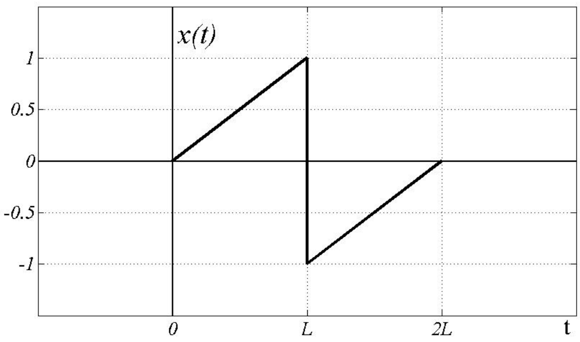
5. Enligt en tabell kan den periodiska signalen $x(t)$ tecknas med Fourierserien

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

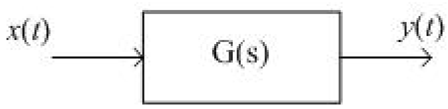
En period $(0 \leq t < 2L)$ av signalen visas i figur 2. $L = \pi \cdot 10^{-2}$ s. Signalen $x(t)$ utgör insignal till det kontinuerliga systemet med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{50s}{s^2 + 50s + 40000} \ .$$

enligt figur 3 Beräkna amplituden hos de tre sinusformade signalerna med lägst frekvens som ingår i systemets utsignal $y(t)$. *(5p)*




Figur 2: För $0 \leq t < 2L$ visas en period av $x(t)$ .




Figur 3: Systemet $G(s)$ .

# Tentamen ssy080
# Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

10 januari 2012 kl. 14.00-18.00 sal: V

| | |
|---|---|
| Förfrågningar: | Ants Silberberg, tel. 1808 |
| Lösningar: | Anslås onsdag 11 januari på institutionens anslagstavla, plan 5. |
| Resultat: | Rapporteras in i Ladok |
| Granskning: | Onsdag 25 jan kl. 12.00 - 13.00 , rum 3340 (Landahls-rummet) på plan 3, korridor parallell med Hörsalsvägen. |
| Bedömning: | En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng. |

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

| *Poäng* | 0-10 | 11-15 | 16-20 | 21-25 |
|---|---|---|---|---|
| *Betyg* | U | 3 | 4 | 5 |

Lycka till!

1. (a) Är den kontinuerliga signalen $x_1(t)$ periodisk?
   Ange i så fall signalens periodtid. *(1p)*

$$x_1(t) = u(t - 2\pi) - \frac{1}{2}, \quad \forall t$$

   (b) Är den diskreta signalen $x_2[n]$ periodisk?
   Ange i så fall signalens period. *(2p)*

$$x_2[n] = 3\cos\left(\frac{n\pi}{3} - 7\right), \quad \forall n$$

   (c) Ett diskret system definieras med ekvationen $y[n] = x[7n]$.
   Är systemet linjärt? Motivera! *(2p)*

2. I en elektrisk $RLC$-krets kan relationen mellan insignalen (spänningen $v(t)$) och utsignalen (spänningen $v_c(t)$ över en kapacitans $C$) beskrivas med differentialekvationen

$$LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v(t)$$

med numeriska värden $\frac{R}{L} = 139$ och $\frac{1}{LC} = 9680$ .

   (a) Betrakta den elektriska kretsen som ett system och beräkna dess överföringsfunktion. *(2p)*

   (b) Beräkna överföringsfunktionens poler och nollställen. *(1p)*

   (c) Beräkna systemets impulssvar. *(2p)*

De ingående numeriska värden som anger kretselementens storlek är angivna i Ohm ($R$), Farad ($C$) och Henry ($L$).

3. Ett diskret och kausalt system har följande impulssvar

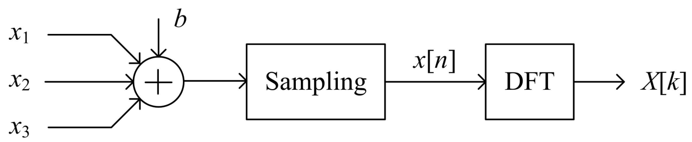
$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1].$$

   (a) Beräkna systemets överföringsfunktion. *(2p)*

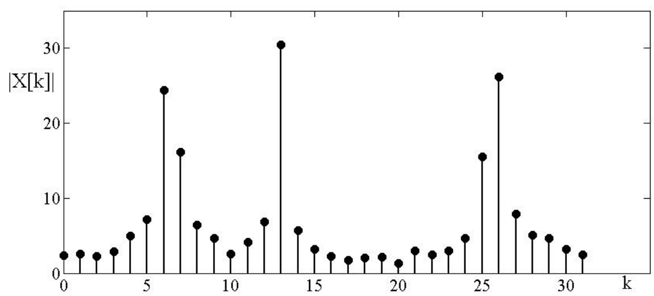
   (b) Ta fram den differensekvation som beskriver systemet. *(2p)*

   (c) Är systemet stabilt? *(1p)*

4. En vetgirig teknolog undersöker hur den Diskreta Fouriertransformen (DFT) [1] ser ut för olika signaler. En lab-uppkoppling enligt figur 1 används. Signalerna $x_1(t)$, $x_2(t)$ och $x_3(t)$ är tre kontinuerliga sinusformade signaler med samma amplitud men med olika frekvens. De tre signalerna adderas ihop med ett svagt brus $b(t)$. Summan av dessa fyra signaler samplas och genererar den diskrea signalen $x[n]$. Sampelintervallet $T = 6.25$ ms och $N = 64$ sampel tas vid varje försök. DFT beräknas av den samplade signalen ($X[k]$=DFT$\{x[n]\}$) och därefter studeras plottar av $|X[k]|$ för $0 \le k \le \frac{N}{2} - 1$. Frekvensen hos signalerna $x_i(t)$ var alltid olika och varierades mellan följande nio värden: $\{16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144\}$ Hz. Ange vilka av dessa frekvenser som möjligen kan utgöra en av insignalerna till den samplade signal vars $|X[k]|$ visas i figur 2. God motivering krävs! *(5p)*




Figur 1: Lab-uppkoppling.




Figur 2: $|X[k]|$ från en signal $x[n]$.

[1] Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

5. Fourierserien för en periodisk och kontinuerlig signal $\hat{x}(t)$ kan tecknas på följande välbekanta form

$$\hat{x}(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t) \right) \ .$$

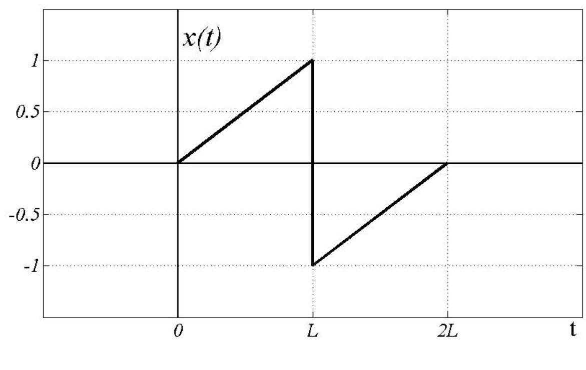
Enligt tabell kan Fourierserien för en viss periodisk signal $x(t)$ tecknas som

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \ .$$

En period ($0 \leq t < 2L$) av signalen visas i figur 3. $L = \frac{\pi}{10}$ s. Signalen $x(t)$ utgör insignal till ett kontinuerligt system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{400}{(s+20)^2}$$

enligt figur 4. Beräkna amplituden hos de tre sinusformade signalerna med lägst frekvens som ingår i systemets utsignal $y(t)$. *(5p)*




Figur 3: För $0 \leq t < 2L$ visas en period av $x(t)$ .


Figur 4: Systemet $G(s)$ .

# Tentamen ssy080
# Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

29 augusti 2012 kl. 08.30-12.30 sal: M

| | |
|---|---|
| Förfrågningar: | Ants Silberberg, tel. 1808 |
| Lösningar: | Anslås torsdag 30 aug. på institutionens anslagstavla, plan 5. |
| Resultat: | Rapporteras in i Ladok |
| Granskning: | Onsdag 19 sept. kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311. Plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen. |
| Bedömning: | En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng. |

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

| *Poäng* | 0-10 | 11-15 | 16-20 | 21-25 |
|---|---|---|---|---|
| *Betyg* | U | 3 | 4 | 5 |

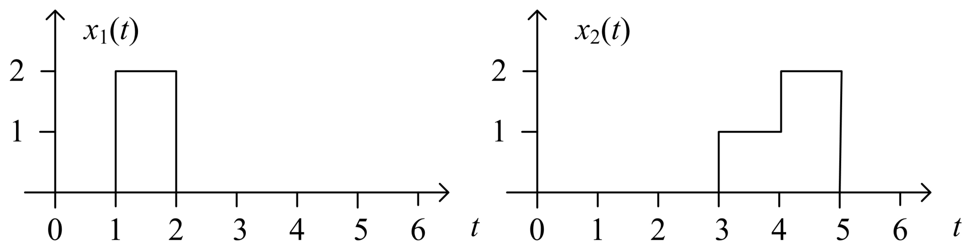
Lycka till!

1. Två signaler, $x_1(t)$ och $x_2(t)$, som finns beskrivna i figur 1 faltas med varandra och bildar en ny signal enligt $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

   (a) För vilka värden på $t$ är $y(t) \neq 0$ ? *(2p)*

   (b) För vilket/vilka värden på $t$ når $y(t)$ sitt största värde ? *(2p)*

   (c) Vilket är största värdet på signalen $y(t)$ ? *(1p)*




Figur 1: Två kontinuerliga signaler.

2. En kontinuerlig och periodisk signal $x(t)$ utgör insignal till ett linjärt system $H$. Systemets frekvenssvar kan tecknas

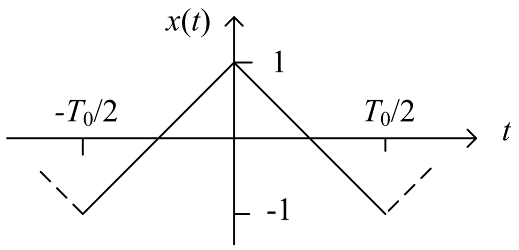
$$H(j\omega) = \frac{j\omega T_0/2\pi}{(j\omega T_0/2\pi)^2 + j\omega T_0/2\pi + 1}.$$

Systemets utsignal kan tecknas som en Fourierserie på amplitud-fas form enligt

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k).$$

Beräkna amplituderna $A_k$ och fasvinklarna $\theta_k$ för de tre första nollskiljda termerna i utsignalens Fourierserie. Insignalen är en triangelvåg enligt figur 2 med Fourierserien *(5p)*

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{8}{(k\pi)^2} \cos(k\omega_0 t).$$

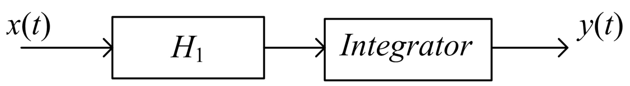



Figur 2: Signal $x(t)$.

3. Den kontinuerliga insignalen $x(t)$ passerar två system enligt figur 3. System $H_1$ beskrivs med differentialekvationen

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 3\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = 3x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

där $x(t)$ betecknar insignal och $y_1(t)$ utsignal till $H_1$. Systemet som är betecknat med $Integrator$ är en ideal integrator. Det systemet integrerar insignalen över tiden. Beräkna det seriekopplade systemets impulssvar. *(5p)*




Figur 3: Två seriekopplade system.

4. Ett diskret och kausalt system beskrivs med följande differensekvation (där $y[n]$ är utsignal och $x[n]$ insignal).

$$y[n] + \frac{1}{3}y[n-1] = 2x[n] + x[n-1].$$

Beräkna systemets utsignal $y[n]$ för insignalen

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1].$$

*(5p)*

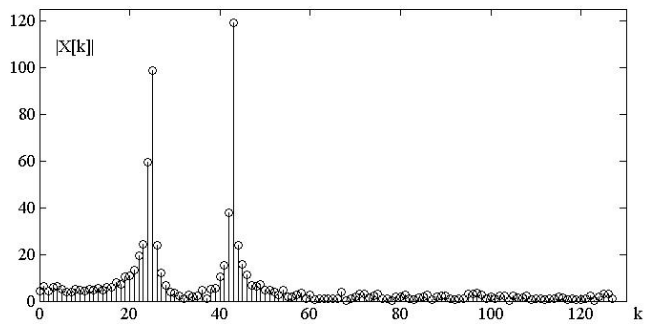
5. En tonvalstelefon avger sk. DTFM (Dual Tone Multiple-Frequency) signaler för varje knapp. Signalen består av två sinusar med frekvenser enligt nedanstående tabell. En knapptryckning genererar alltså signalen

$$x(t) = A\sin(2\pi f_1 t) + A\sin(2\pi f_2 t).$$

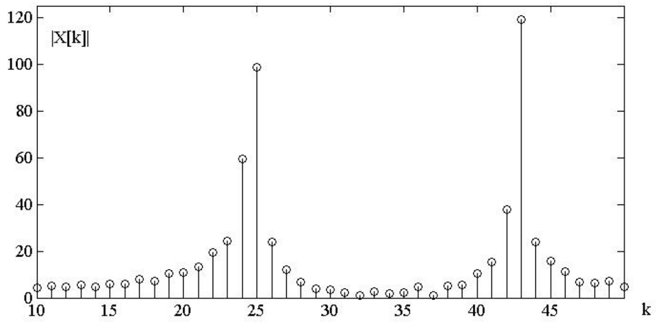
För tex. knapp 9 är $f_1 = 852$ Hz och $f_2 = 1477$ Hz. En D-teknolog har konstruerat en detektor som samplar den mottagna signalen med samplingsfrekvensen 8000 Hz. Därefter beräknas en 256-punkters DFT som beteknas $X[k]$. Utifrån beloppet av $X[k]$ bestäms sedan vilket knapp som tryckts ner. Figur 4 visar resultatet från en knapptryckning. Figur 5 visar samma $X[k]$ men något inzoomad. Vilken knapp har tryckts ner? Svaret skall motiveras väl för full poäng. *(5p)*

| Hz | 1209 | 1336 | 1477 |
|---|---|---|---|
| 697 | 1 | 2 | 3 |
| 770 | 4 | 5 | 6 |
| 852 | 7 | 8 | 9 |
| 941 | * | 0 | # |

Tabell 1: DTMF frekvenser.




Figur 4: $|X[k]|$ för $0 \leq k \leq 128$.




Figur 5: $|X[k]|$ för $10 \leq k \leq 50$.

Transformer, Signaler & System för D3
SSY080 2011-10-19

1a) Icke linjärt

b) $X_3[n]$ släcks ut $\left(\Omega = \pm \frac{3\pi}{4}\right)$

2) $H(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+4)}$, $X(s) = \dfrac{1}{s+2}$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(s+4)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left( (t - \tfrac{1}{2}) e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-4t} \right) u(t)$$

3) $$Y_s(s) = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z-1}{z-\frac{1}{3}} - \frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{2}}\right)$$

$$Y_s(s) = \frac{z}{z-1}\cdot H(z) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{6}\cdot\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}$$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \left[ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

4a)

| | k | N−k |
|---|---|---|
| E | 338 | 1710 |
| H | 253 | 1795 |
| G | 201 | 1847 |

b) $\Delta f = \dfrac{f_s}{N} = 0{,}977\,\text{Hz}$

5) (Jämför "Hem-lab")

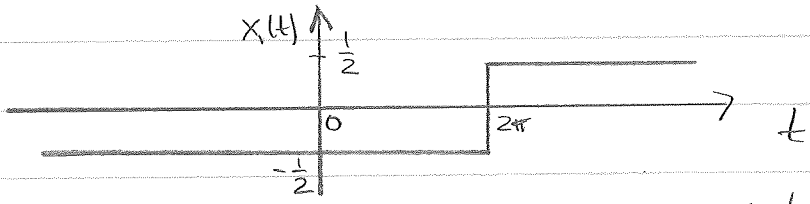
$$|B_1^Y| = |B_1^X| \cdot |G(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{2}{\pi}\cdot 0{,}164$$

$$|B_2^Y| = |B_2^X| \cdot |G(j\omega)|_{\omega=2\omega_0} = \frac{1}{\pi}\cdot 1$$

$$|B_3^Y| = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = \frac{2}{3\pi}\cdot 0{,}287$$

Transformer, Signaler o. System
SSY080 D3
2012-01-10

1 a) $x_1(t) = u(t-2\pi) - \frac{1}{2}$ , $\forall t$




Ej periodisk !

b) $x_2[n+N] = 3\cos\left(\frac{(n+N)\pi}{3} - 7\right) =$

$= 3\cos\left(\frac{n\pi}{3} - 7 + \frac{N\pi}{3}\right)$

Periodisk om $\frac{N\pi}{3} = 2\pi k \Rightarrow N = 6k$ (Låt $k=1$)

Periodisk med $N=6$

c) $y[n] = x[7n]$

| Insignal | Utsignal |
|---|---|
| $x_1[n]$ | $x_1[7n] = y_1[n]$ |
| $a_1 x_1[n]$ | $a_1 x_1[7n] = a_1 y_1[n]$ |
| $x_2[n]$ | $x_2[7n] = y_2[n]$ |
| $a_2 x_2[n]$ | $a_2 x_2[7n] = a_2 y_2[n]$ |
| $x_3[n] =$ $= a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$ | $y_3[n] = x_3[7n] = a_1 x_1[7n] + a_2 x_2[7n] =$ $= a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$ |

Linjärt? Ja !

SS4080

2012-01-10

2) $$\frac{d^2 V_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}V_c(t) = \frac{1}{LC}V(t)$$

Laplace transf.

$$s^2 V_c(s) + s\frac{R}{L}V_c(s) + \frac{1}{LC}V_c(s) = \frac{1}{LC}V(s)$$

a) $$H(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{9680}{s^2 + s\,139 + 9680}$$

b) Nollställe: inga

Poler: $s^2 + s\,139 + 9680 = 0$ ; $S_{1,2} = -\frac{139}{2} \pm \sqrt{\frac{139}{2} - 9680}$

$$s_{1,2} = -69{,}5 \pm j\,69{,}64$$

c) Kvadratkomplettera

$$H(s) = \frac{9680}{(s+69{,}5)^2 + 9680 - 69{,}5^2} =$$

$$= \frac{9680}{(s+69{,}5)^2 + 4849{,}75} = \frac{9680 \cdot \frac{69{,}64}{69{,}64}}{(s+69{,}5)^2 + 69{,}64^2}$$

Impulssvar: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} =$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9680}{69{,}64} \cdot \frac{69{,}64}{(s+69{,}5)^2 + 69{,}64^2}\right\} = 139e^{-69{,}5t}\sin(69{,}64t)$$

för $t \geq 0$

SS4080

2012-01-10

3/ $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] =$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad \text{Z-transformera!}$$

a/

$$\hat{=} \quad H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} + 2\,\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \cdot z^{-1} = \frac{z(z-\frac{1}{2}) + 2(z-\frac{1}{3})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{2}{3}}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

b/ $H(z) = Y(z) / X(z)$

$$Y(z)\left(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right) = X(z)\left(1 + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}\right)$$

Inv. z-transf.

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + \frac{3}{2}x[n-1] - \frac{2}{3}x[n-2]$$

c/ Stabilt? Ja!

Ty kausalt system samt poler till $H(z)$ ligger innanför enhetscirkeln $|z_1| = \frac{1}{2} < 1$

$|z_2| = \frac{1}{3} < 1$

SSY080

2012-01-10

4. Samplingsintervall $T = 6,25$ ms

$\Rightarrow$ samplingsfrekvens $f_s = \frac{1}{T} = 160$ Hz

DFT, $N = 64$ punker $X[k]$, $0 \le k\ N-1$

Index $k$ motsvarar frekvensen $f_k = \frac{k}{N} \cdot f_s$

Vilket k-värde motsvarar de angivna frekvenserna

| f [Hz] | "k" $\frac{f}{f_s} \cdot N$ | "N-k" | I figur? |
|---|---|---|---|
| 16 | 6,4 | 57,6 | Ja |
| 32 | 12,8 | 51,2 | Ja |
| 48 | 19,2 | 44,8 | Nej |
| 64 | 25,6 | 38,4 | Ja |
| 80 | 32 | 32 Nej | $= f_s/2$ ej i fig men tre toppar $\neq f_s/2$ finns |
| 96 | 38,4 | 25,6 | Ja |
| 112 | 44,8 | 19,2 | Nej |
| 128 | 51,2 | 12,8 | Ja |
| 144 | 57,6 | 6,4 | Ja |

De frekvenser med ett inringat "k"-värde kan finnas med i insignalen som samplas. Vid närmaste heltalsvärde till "k" har då $|X[k]|$ ett högt värde (en "topp").

SS4080

2012-01-10

5. $\hat{x}(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t) \right) =$

$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n \frac{\pi}{L} t) \Rightarrow A_n = 0, \forall n$

$B_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$B_1 = \frac{2}{\pi}, \; B_2 = \frac{-1}{\pi}, \; B_3 = \frac{2}{3\pi}$ $\qquad \omega_0 = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{2L}$

$T = 2L = \frac{2\pi}{10}$ s

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 10$ r/s

Systemets frekvenssvar

$$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{400}{(j\omega + 20)^2}$$

Amplitudkarakteristik: $|G(j\omega)| = \dfrac{400}{\omega^2 + 20^2}$

Amplitud hos utsignal (tre lägsta frekvenserna)

$\boxed{n=1}$ $\quad \omega = \omega_0 = 10$

$$B_1^Y = |B_1| \cdot |G(j\omega_0)| = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{400}{10^2 + 20^2} = \frac{2}{\pi} \cdot 0{,}8 = \frac{8}{5\pi} \approx 0{,}509$$

$\boxed{n=2}$ $\quad \omega = 2\omega_0 = 20$

$$B_2^Y = |B_2| |G(j2\omega_0)| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{400}{20^2 + 20^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}159$$

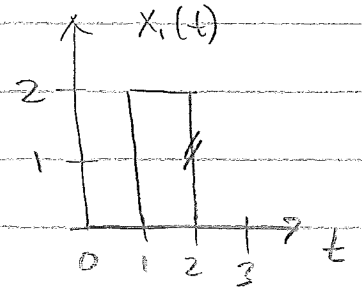
$\boxed{n=3}$ $\quad \omega = 3\omega_0 = 30$

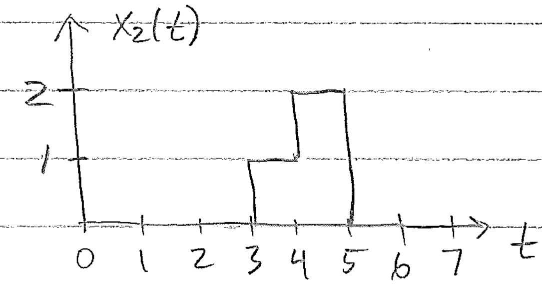
$$B_3^Y = |B_3| |G(j3\omega_0)| = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{400}{20^2 + 30^2} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{4}{13} \approx 0{,}065$$

Transformer, Signaler & System

SSY080 D3 120829

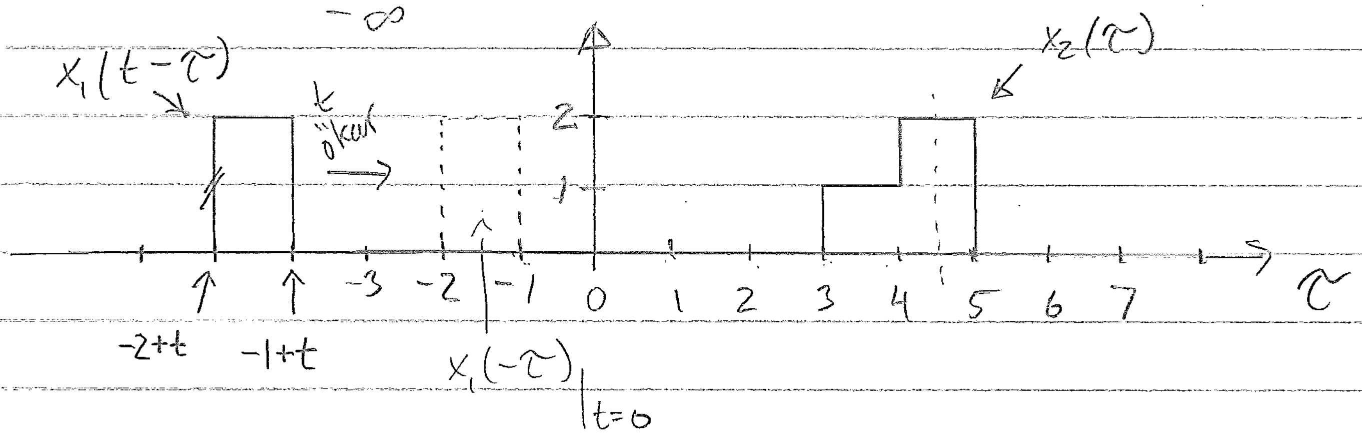
1.




$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau$$




Överlap börjar då $\tau = -1+t = 3 \Rightarrow t = 4$

Övelap avslutas då $\tau = -2+t = 5 \Rightarrow t = 7$

Överlap som ger max $x_1(t) * x_2(t)$ : $\tau = -1+t = 5 \Rightarrow t = 6$

$$\text{Max} \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau \Big|_{t=6} = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

Svar: a) $4 < t < 7$

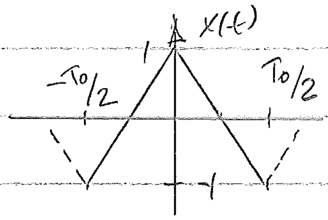
b) $t = 6$   c) 4

SSY080

120829

2.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega \frac{T_0}{2\pi}}{\left(j\omega \frac{T_0}{2\pi}\right)^2 + j\omega \frac{T_0}{2\pi} + 1}$$




Periodtid : $T = T_0$

Grundvinkelfrekv. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|H(jk\omega_0)| = \frac{k}{\sqrt{(1-k^2)^2 + k^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^4-k^2}}$$

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8}{(k\pi)^2} \cos(k\omega_0 t)$$

$$\arg\{H(jk\omega_0)\} = 90^\circ - \arctan\left\{\frac{k}{1-k^2}\right\}$$

Filtret (systemet) H påverkar amplitud och fas hos varje sinusformad signal i x(t) enligt

$$y(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \underbrace{\frac{8}{(k\pi)^2} \cdot |H(jk\omega_0)|}_{A_k} \cos\Big(k\omega_0 t + \underbrace{\arg\{H(jk\omega_0)\}}_{\theta_k}\Big)$$

| k | ω | $A_k$ | $\theta_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\omega_0$ | $\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{8}{\pi^2}$ | $90^\circ - \arctan(\text{"}\infty\text{"}) = 0$ |
| 3 | $3\omega_0$ | $\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3}{\sqrt{1+3^4-3^2}} \simeq \frac{8}{\pi^2} \cdot 0{,}039$ | $90^\circ - \arctan\left(\frac{3}{-8}\right) = -69{,}4^\circ$ |
| 5 | $5\omega_0$ | $\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{1+5^4-5^2}} \simeq \frac{8}{\pi^2} \cdot 8{,}2 \cdot 10^{-3}$ | $90^\circ - \arctan\left(\frac{5}{-24}\right) = -78{,}2^\circ$ |

3. $$\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + 3\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = 3x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

Laplacetransformera!

$$s^2 Y_1(s) + 3sY_1(s) + 2Y_1(s) = 3X(s) + sX(s)$$

$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \ldots = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$\mathcal{L}\{\text{"Integrator"}\} = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = X(s)\cdot H_1(s)\cdot\frac{1}{s}$$ Impulssvar $\Rightarrow x(t) = \delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) = 1$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$ (P.B.U.)

$$s+3 = A\underbrace{(s+1)(s+2)}_{s^2+3s+2} + Bs(s+2) + Cs(s+1)$$

$s^0$: $3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$

$s^1$: $1 = 3A + 2B + C$

$s^2$: $0 = A + B + C \Rightarrow C = -A - B$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 3A + 2B - A - B \\ 1 + A - 3A = B \ ; \ B = 1 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -2 \ ; \\ C = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$

$$Y(s) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$ Inv. Laplace ger

$$h(t) = y(t) = \left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$ [Impulssvar!]

Alt: $h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_1(s)\}$

$$h(t) = \int_0^t h_1(\tau)\,d\tau$$

554080
120829

4.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] + \frac{1}{3} y[n-1] = 2x[n] + x[n-1]$$ , z-transformera!

$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{3} z^{-1}\right) = X(z)\left(2 + z^{-1}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{2z+1}{z + \frac{1}{3}}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \cdot z^{-1} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{2z+1}{\left(z + \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2z+1}{\left(z^2 - \frac{z}{6} - \frac{1}{6}\right)}$$

Teckna $\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{2z+1}{z\left(z + \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$ Partialbråksuppdela

$$\frac{2z+1}{z\left(z + \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z + \frac{1}{3}} + \frac{C}{z - \frac{1}{2}}$$

$$2z+1 = A\left(z^2 - z \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + Bz\left(z - \frac{1}{2}\right) + Cz\left(z + \frac{1}{3}\right)$$

| | | |
|---|---|---|
| $z^0$: $1 = A\left(-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow A = -6$ | | $A = -6$ |
| $z^1$: $2 = -\frac{1}{6}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C$ | $2 = 1 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}(6-B)$ | $B = 1{,}2$ |
| $z^2$: $0 = A + B + C$ | $C = -A - B = 6 - B$ | $C = 4{,}8$ |

$$Y(z) = -6 + 1{,}2 \frac{z}{z + 1/3} + 4{,}8 \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

Invers z-transf. $y[n] = -6\delta[n] + \left[1{,}2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 4{,}8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$

5. Samplingsfrekvens $f_s = 8000$ Hz

$\omega_s = 2\pi f_s$ r/s

$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{1}{f_s}$ sampelintervall

DFT : $N = 256$ punkter $X[k]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$

Index $k$ motsvarar frekvensen

$f_k = \frac{k}{N} \cdot f_s$

Ur figurer ser vi att två k-värden ger höga $|X[k]|$

$k = 25 \Rightarrow f_{25} = \frac{25}{256} \cdot 8000 = 781$ Hz

$k = 43 \Rightarrow f_{43} = \frac{43}{256} \cdot 8000 = 1344$ Hz

Frekvensupplösning i DFT : $\Delta f = \frac{f_s}{N} = 31{,}25$ Hz

Från tabellen ser vi att bästa överens-stämmelse fås för knapp $\underline{\underline{\text{"5"}}}$.

(781 ligger i intervallet $770 \pm \Delta f$
1344 —"— —"— $1336 \pm \Delta f$)