

# Tentamen ssy080

## Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

25 oktober 2008 kl. 08.30-12.30  
Sal: Hörsalar på Hörsalsvägen

Förfrågningar: Ants Silberberg, tel. 1808  
Lösningar: Anslås måndag 27 oktober på institutionens anslagstavla, plan 5.  
Resultat: Anslås måndag 10 november kl. 15.30 på institutionens anslagstavla, plan 5.  
Granskning: 1: Onsdag 12 november kl. 12.30 - 13.30 , rum 5430.  
2: Torsdag 13 november kl. 12.30 - 13.30 , rum 5430.  
Bedömning: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

<i>Poäng</i>	0-10	11-15	16-20	21-25
<i>Betyg</i>	U	3	4	5

Lycka till!

1. a) Ett kontinuerlig LTI-system har frekvenssvaret

$$H(j\omega) = e^{-j2\omega} .$$

Beräkna systemets utsignal  $y(t)$  om insignalen till systemet är  $x(t) = u(t) - u(t - 4)$  . (2p)

- b) Ett annat kontinuerlig LTI-system har impulssvaret

$$h(t) = e^{-2t}u(t) .$$

Beräkna

- i) systemets utsignal  $y(t)$  då insignalen  $x(t) = e^{-t}u(t)$  . (2p)
- ii) vid vilken tidpunkt som utsignalen  $y(t)$  når sitt maximala värde. (1p)

2. Överföringsfunktionen till ett kontinuerligt LTI-system tecknas  $H(s)$ . Systemet karakteriseras av att

- $H(s)$  har inga nollställen.
- $H(s)$  har två komplexa poler i  $s = -50 \pm j800$ .
- Beloppet av systemets frekvenssvar  $\rightarrow 10$  då  $\omega \rightarrow 0$ .

Beräkna systemets utsignal  $y(t)$  då insignalen  $x(t) = u(t)$  (systemets stegsvar). (5p)

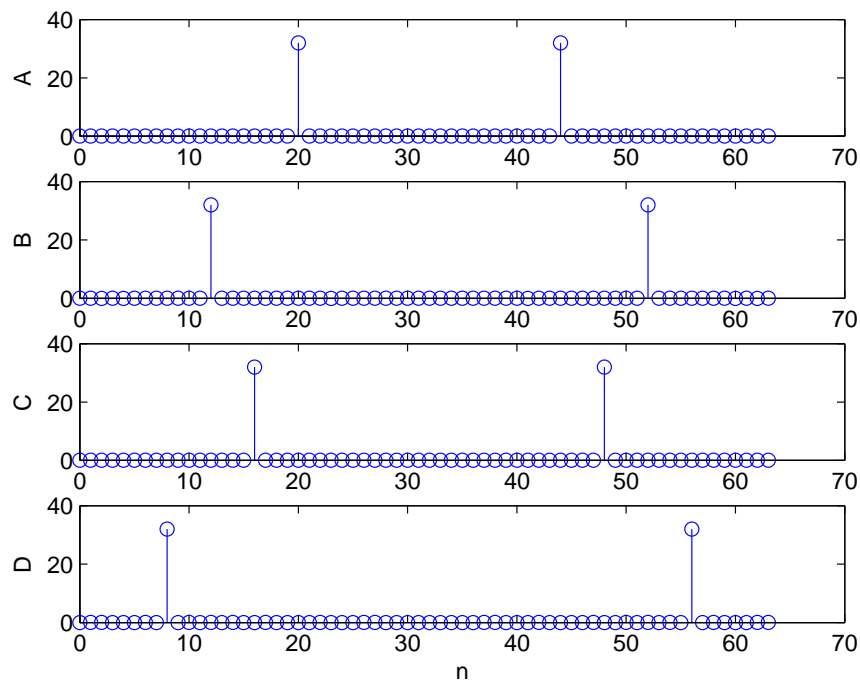
3. Ett diskret och kausalt LTI-system beskrivs med differensekvationen

$$y[n] - 3.5y[n-1] + 1.5y[n-2] = 3x[n] - 4x[n-1]$$

där  $y[n]$  är systemets utsignal och  $x[n]$  dess insignal.

- a) Beräkna systemets impulssvar (sök  $y[n]$  för  $x[n] = \delta[n]$ ). (4p)
- b) Är systemet stabilt? Motivera ! (1p)

4. Fyra signaler på formen  $x(t) = \cos(\omega t)$  där vinkelfrekvensen  $\omega$  har olika värden samplas med samplingsfrekvensen  $f_s = 100$  Hz. Antal sampel  $N = 64$ . Fyra diskreta signaler erhålls. Den Diskreta Fouriertransformen ( $X[k]$ ) beräknas med hjälp av Matlabs `fft` rutin och absolutbeloppen av resultatet visas i figur 1 i blandad ordning.



Figur 1:  $|X[k]|$  av de fyra samplade signalerna - i blandad ordning.

De fyra vinkelfrekvenserna  $\omega$  till signalerna  $x(t)$  är

- i)  $2\pi \cdot 12.5$  rad/s
- ii)  $2\pi \cdot 25.0$  rad/s
- iii)  $2\pi \cdot 68.75$  rad/s
- iv)  $2\pi \cdot 81.25$  rad/s

Vilken figur (A, B, C och D) hör ihop med vilken vinkelfrekvens (i, ii, iii och iv). Du måste motivera ditt svar. (5p)

5. I kursens hemlab studerade vi en fyrkantssignal med periodtiden  $2\pi$  s. De tre första nollskiljda Fourierseriekoefficienterna beräknades. Vi har nu en liknande periodisk signal, se figur 2. Det enda som skiljer är att priodtiden  $T = 2\pi \cdot 10^{-2}$  s. Denna signal utgör insignal till ett system med frekvenssvaret

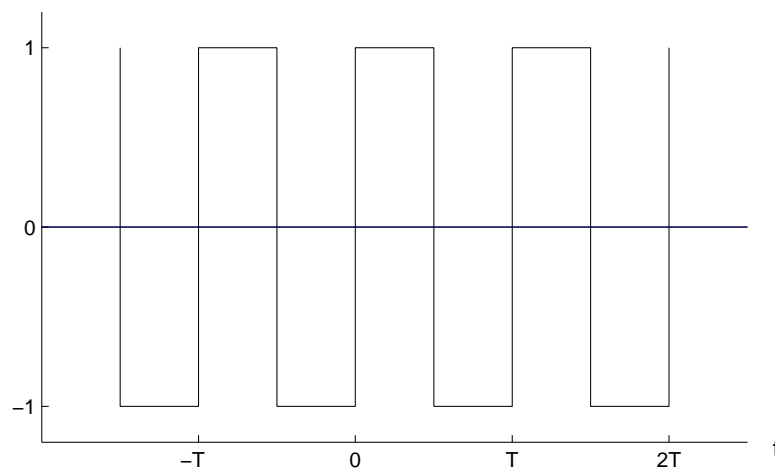
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{för } |\omega| < 420 \text{ rad/s} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Beräkna medeleffekten hos utsignalen och medeleffekten hos insignalen samt jämför dessa två värden.

Medeleffekt för en kontinuerlig och periodisk signal kan beräknas som

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Du får hänvisa till de resultat som du kom fram till i hemlabben. Parsevals identitet (formel) kan användas. (5p)



Figur 2: Fyrkantsvåg

# Tentamen ssy080

## Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

13 januari 2009 kl. 14.00-18.00, Sal: V

Förfrågningar: Ants Silberberg, tel. 1808  
Lösningar: Anslås onsdag 14 jan på institutionens anslagstavla, plan 5.  
Resultat: Rapporteras in i Ladok (anonyma tentor)  
Granskning: Onsdag 4 februari kl. 12.00 - 13.30 , rum 5430.  
Bedömning: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

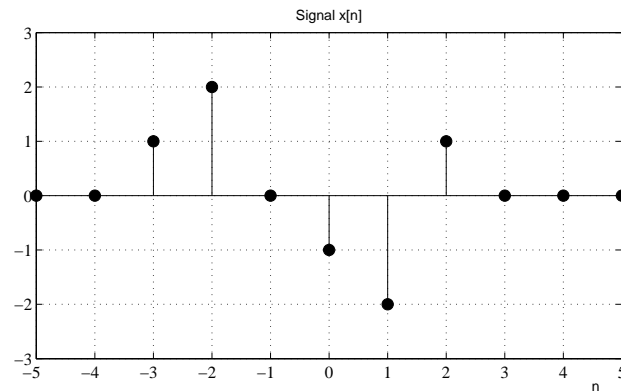
<i>Poäng</i>	0-10	11-15	16-20	21-25
<i>Betyg</i>	U	3	4	5

Lycka till!

1. a) Ett diskret LTI-system har impulssvaret

$$h[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n - 1] + 0.25\delta[n - 2] .$$

Beräkna systemets utsignal  $y[n]$  för insignalen  $x[n]$  som beskrivs i figur 2. De signalvärden som ej finns med i figuren är noll. (3p)



Figur 1: Insignal  $x[n]$

- b) Ett diskret system definieras av differensekvationen

$$y[n] = x[n]u[n].$$

Är systemet tidsinvariant? Motivera! (2p)

2. En kontinuerlig och periodisk signal  $x(t)$  kan beskrivas med en komplex Fouriersserie enligt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t}$$

där koefficienterna har följande värden

$$\begin{aligned} c_0 &= 2 & c_1 &= c_{-1} = 1 & c_2 &= c_{-2}^* = j0.5 \\ c_3 &= c_{-3}^* = j0.2 & c_4 &= c_{-4} = 0.4 & c_k &= 0, \text{ för övriga } k \end{aligned}$$

Signalen  $x(t)$  passerar ett system  $G(j\omega)$  med frekvenssvaret

$$G(j\omega) = 1 - H(j\omega)$$

där  $H(j\omega)$  är ett idealt lågpassfilter och beskrivs som

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{11\omega_o}{5} \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

- Beräkna utsignalens  $\{y(t)\}$  Fouriersseriekoefficienter. (2p)
- Beräkna kvoten mellan utsignalens medeleffekt och insignalens medeleffekt. (3p)

3. Två kontinuerliga LTI-system kaskadkopplas enligt figur 2. System  $H_1(s)$  karakteriseras av att

- $H_1(s)$  har inga nollställen.
- $H_1(s)$  har en reell pol i  $s = -3$ .
- Beloppet av systemets frekvenssvar  $\rightarrow \frac{2}{3}$  då  $\omega \rightarrow 0$ .

System  $H_2(s)$  har stegsvar  $y_{s2}(t)$  där

$$y_{s2}(t) = (6 - 5e^{-t})u(t)$$

Beräkna utsignalen  $y(t)$  då insignalen  $x(t) = \delta(t)$ . (5p)



Figur 2: Två kontinuerliga system

4. Ett diskret och kausalt LTI-system beskrivs med differensekvationen

$$y[n] - 1.2y[n-1] - 0.28y[n-2] = x[n] - 3x[n-1]$$

där  $y[n]$  är systemets utsignal och  $x[n]$  dess insignal.

- Beräkna systemets överföringsfunktion. (2p)
- Beräkna systemets impulssvar (sök  $y[n]$  för  $x[n] = \delta[n]$ ). (2p)
- Är systemet stabilt? Motivera ! (1p)

5. Diskret Fouriertransform (DFT)  $X[k]$  av signalen  $x[n]$  beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Fem diskreta signaler,  $x_{1,2,3,4,5}[n]$ , beskrivs nedan med sina numeriska värden. Para ihop var och en av dessa signaler med sin Diskreta Fouriertransform,  $X_\alpha[k]$ . Välj mellan de åtta olika alternativen i tabellen nedan,  $X_{a,b,c,d,e,f,g,h}[k]$ . Du måste motivera dina val! (5p)

$i$	$x_i[n]$	$\alpha$	$X_\alpha[k]$
1	$\{1, 0, 0, 0\}$	$a$	$\{0, -2j, 0, 2j\}$
2	$\{0, 1, 0, -1\}$	$b$	$\{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\}$
3	$\{0, 1, 0, 1\}$	$c$	$\{1, 0, 0, 0\}$
4	$\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$	$d$	$\{1, 1, 1, 1\}$
5	$\{0, 1, 0, 0\}$	$e$	$\{1, j, 0, -j, -1\}$
		$f$	$\{2, 0, -2, 0\}$
		$g$	$\{1, -j, -1, j\}$
		$h$	$\{0, 2j, 0, -2j, 0\}$



# Tentamen ssy080

## Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

26 augusti 2009 kl. 08.30-12.30 sal: V

Förfrågningar: Ants Silberberg, tel. 1808  
Lösningar: Anslås torsdag 27 aug. på institutionens anslagstavla, plan 5.  
Resultat: Rapporteras in i Ladok (anonyma tentor)  
Granskning: Onsdag 9 sept. kl. 12.00 - 13.30 , rum 5430.  
Bedömning: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

<i>Poäng</i>	0-10	11-15	16-20	21-25
<i>Betyg</i>	U	3	4	5

Lycka till!

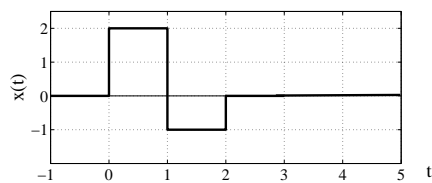
1. Ett kontinuerligt system beskrivs av ekvationen

$$y(t) = \cos(0.5\pi t)x(t)$$

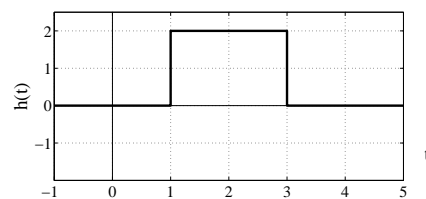
där  $x(t)$  är systemets insignal och  $y(t)$  är dess utsignal.

- a) Beräkna systemets utsignal för  $x(t) = \delta(t)$ . (1p)
- b) Beräkna systemets utsignal för  $x(t) = \delta(t - 1)$ . (1p)
- c) Är systemet tidsinvariant? Motivering krävs. (1p)
- d) Är systemet linjärt? Motivering krävs. (2p)

2. Ett kontinuerligt LTI-system enligt figur 2 har en insignal  $x(t)$  enligt figur 1(a) och ett impulssvar enligt figur 1(b). Beräkna systemets utsignal  $y(t)$ . De signalvärden som ej finns med i figurerna är noll. (5p)

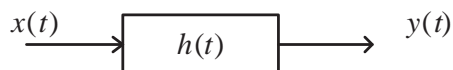


(a) Insignal  $x(t)$



(b) Impulssvar  $h(t)$

Figur 1: Signaler

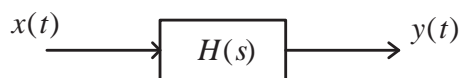


Figur 2: LTI-system

3. Ett kontinuerligt LTI-system enligt figur 3 har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{K}{A(s)}$$

där  $K$  är en reell konstant och  $A(s)$  ett andra ordningens polynom. Rötterna till polynomet  $A(s)$  är kända, de är  $s_1 = 0$  och  $s_2 = -1$ . Beräkna systemets utsignal  $y(t)$  då insignalen  $x(t) = e^{-t}u(t)$ . Låt  $K = 1$ .



Figur 3: System

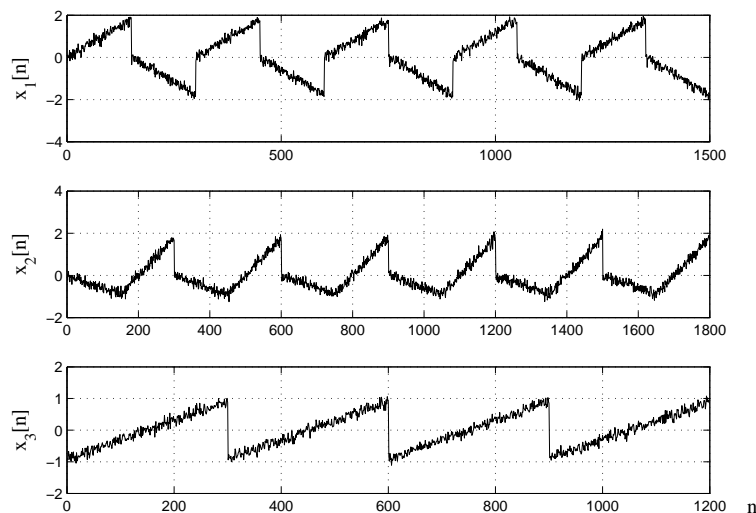
4. Ett diskret system kan beskrivas med följande differensekvation

$$y[n] - 1.5y[n-1] + 0.5y[n-2] = x[n]$$

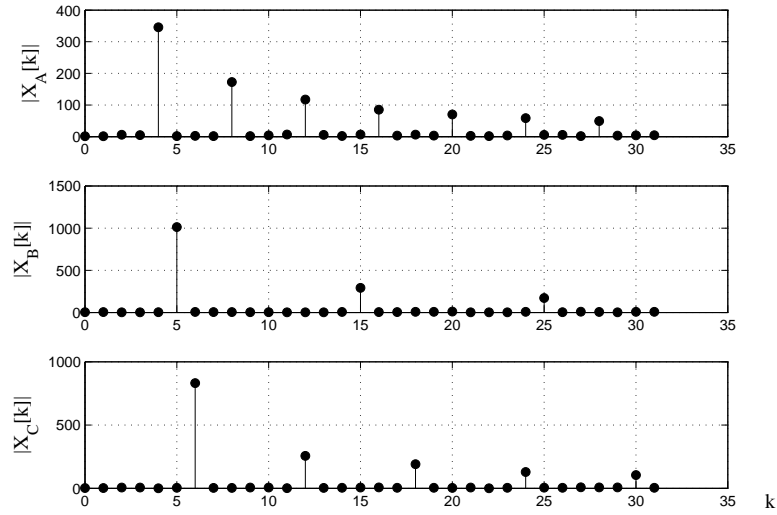
- (a) Beräkna systemets impulssvar. (3p)
- (b) Verifiera resultatet i (a) genom att lösa differensekvationen för  $n=0, 1, 2$  och  $3$  då systemet befinner sig i vila. (2p)

5. En gammal (och lite brusig) funktionsgenerator kan leverera signaler (elektrisk spänning) med olika vågformer. Tre olika signaler från funktionsgeneratoren studeras, alla med samma periodtid  $T=50$  ms. De tre signalerna samplas där olika många sampel tas för varje signal,  $N=1200$ ,  $1500$  och  $1800$ . De samplade signalerna visas i sin helhet som Matlab-plottar i figur 4. Därefter beräknas signalernas Fouriertransform (DFT) med hjälp av `fft` i Matlab. Figur 5 visar absolutbeloppet av de 32 st första värdena av de tre samplade signalernas DFT men i blandad ordning  $|X_A[k]|$ ,  $|X_B[k]|$  och  $|X_C[k]|$ .

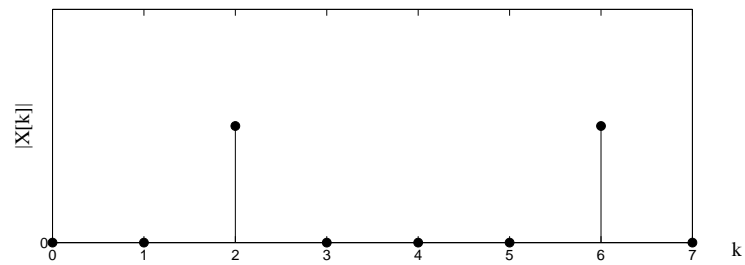
- Para ihop de samplade signalerna  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  och  $x_3[n]$  i figur 4 med rätt DFT  $|X_A[k]|$ ,  $|X_B[k]|$  och  $|X_C[k]|$  i figur 5. Dina svar måste motiveras. (3p)
- Så en allmän DFT fråga. Den kontinuerliga signalen  $x(t) = \cos(\omega t)$  samplas. Den samplade signalens vinkelfrekvensen är  $\omega = 480\pi$  r/s och antalet sampel  $N = 8$ . Då erhålls den diskreta signalen  $x[n] = x(nT_s)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Därefter beräknas signalens DFT ( $X[k]$ ) och figur 6 visar det principiella utseendet hos  $|X[k]|$ . Vilken samplingsfrekvens har använts? (2p)



Figur 4: Tre samplade signaler (hela signalen visas)



Figur 5: Absolutbelopp av de tre olika signalernas DFT ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 31$ )



Figur 6: Absolutbelopp av signalens DFT ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$ )

1a/  $y(t) = x(t-2) = u(t-2) - u(t-6)$

1b/ i)  $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ , för  $t \geq 0$   
 $y(t) = 0$ , för  $t < 0$

ii)  $t = \ln 2$  [s]

2/  $y(t) = 10 \left[ 1 - e^{-50t} \left( \cos 800t + \frac{1}{16} \sin 800t \right) \right] u(t)$   
 $y'(t) = -y(t)$  också en möjlighet

3/  $y[n] = (2 \cdot 3^n + 0.5^n) u[n]$

Instabilt, Pol utanför enhetscirkeln.

4/ i) D ii) < iii) A iv) B

5/ Insignalens medel effekt  $\bar{P}_x = 1$

Ut signalens — u —  $\bar{P}_y = 0.9006$

Ut signalens <sup>modell</sup> effekt är  $\frac{\bar{P}_y}{\bar{P}_x} \cdot 100\% = 90.06\%$  av  
 insignalens medel effekt

1/a

Superposition ger

$$y[n] = h[n+3] + 2h[n+2] - h[n] - 2h[n-1] + h[n-2]$$

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h[n+3]$		1	0,5	0,25								
$2h[n+2]$			2	1	0,5							
$-h[n]$					-1	-0,5	-0,25					
$-2h[n-1]$						-2	-1	-0,5				
$h[n-2]$							1	0,5	0,25			
$\sum \Rightarrow y[n]$		1	2,5	1,25	-0,5	-2,5	-0,25	0	0,25			

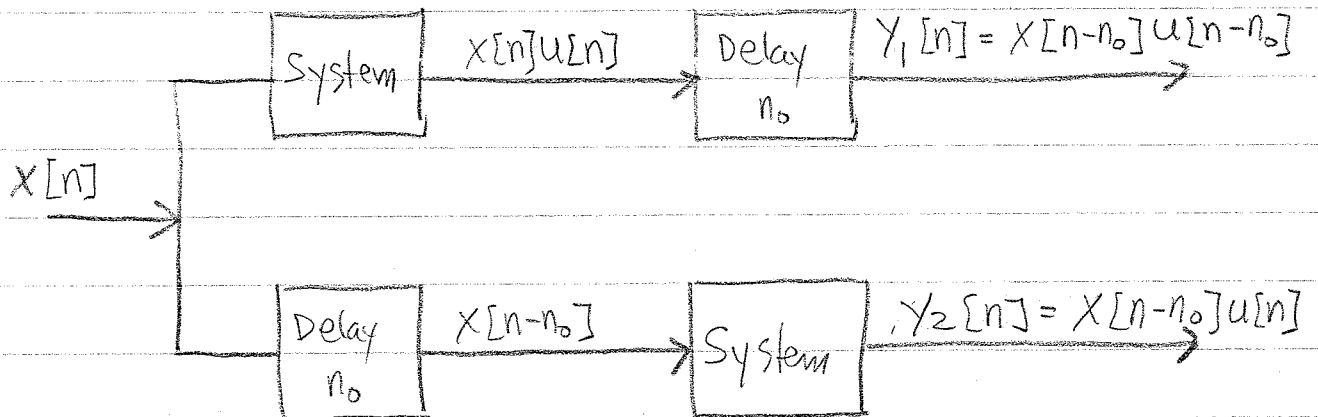
SVas:  $y[n] =$

$$\begin{aligned}
 &\delta[n+3] + \\
 &+ 2,5 \delta[n+2] + \\
 &+ 1,25 \delta[n+1] \\
 &- 0,5 \delta[n] - \\
 &- 2,5 \delta[n-1] - \\
 &- 0,25 \delta[n-2] + \\
 &+ 0,25 \delta[n-4]
 \end{aligned}$$

1b/

$$Y[n] = X[n] u[n]$$

Test



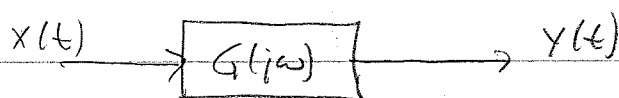
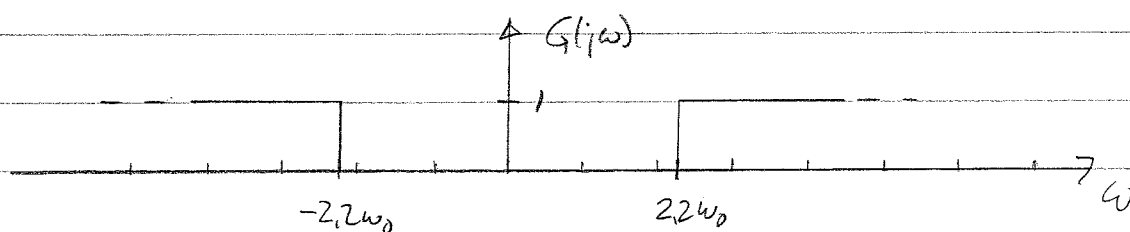
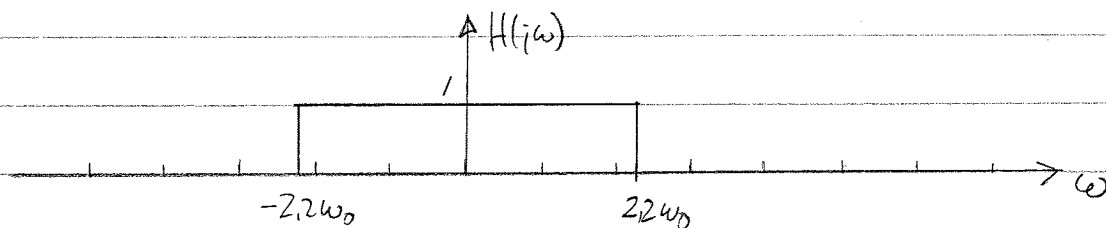
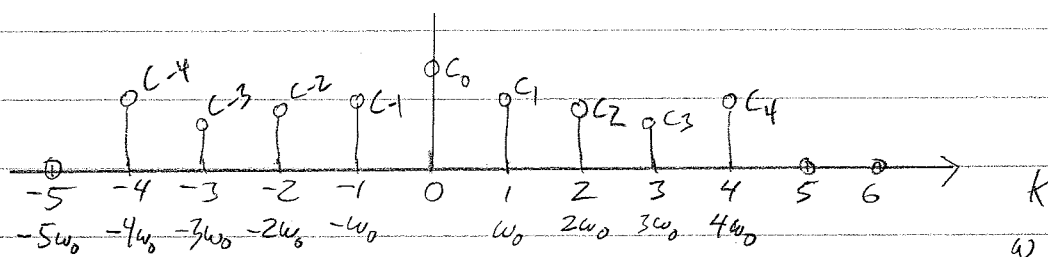
$$Y_1[n] \neq Y_2[n]$$

$\therefore$  is time-invariant



FS

2/


 $G(j\omega)$  släpper endast igenom frekvenser  $|\omega| > 2.2\omega_0$ 

FS-koeff till  $y(t)$  blir då  $\begin{cases} C_3, C_{-3}, C_4 \text{ och } C_{-4} \\ \text{övriga } C_k = 0 \end{cases}$ 

Medel effekt  $P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$

$$P_x = |C_0|^2 + 2|C_1|^2 + 2|C_2|^2 + 2|C_3|^2 + 2|C_4|^2 = 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0.5^2 + 2 \cdot 0.2^2 + 2 \cdot 0.4^2 = 6.9$$

$$P_y = 2|C_3|^2 + 2|C_4|^2 = 2 \cdot 0.2^2 + 2 \cdot 0.4^2 = 0.4$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{0.4}{6.9} \approx 0.058$$

SSY 080

090113

$$3/ \quad H_1(s) = \frac{K}{s+3} \quad H(s) \Big|_{\substack{s=j\omega \\ \omega \rightarrow 0}} = \frac{K}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow K=2$$

$$H_1(s) = \frac{2}{s+3}$$

$$\text{Stegsvar: } \frac{1}{s} \cdot H_2(s) = \mathcal{L}\{(6-5e^{-t})u(t)\} = \frac{6}{s} - \frac{5}{s+1} =$$

$$= \frac{6(s+1)-5s}{s(s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+6}{s+1} \Rightarrow H_2(s) = \frac{s+6}{s+1}$$

$$\text{Hela systemet } Y(s) = H_1(s)H_2(s)X(s) \quad ; \quad X(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} = 1$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+3)} \cdot \frac{(s+6)}{(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$2(s+6) = A(s+3) + B(s+1)$$

$$s^1: 2 = A+B$$

$$10 = 2A$$

$$s^0: 12 = 3A+B$$

$$A=5, B=-3$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{s+3}$$

Inv. Laplacetransf. ger

$$y(t) = (5e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)$$

SSY 080

090113

4/

$$y[n] - 1,2y[n-1] - 0,28y[n-2] = x[n] - 3x[n-1]$$

z-transformera

$$a) \quad Y(z) - 1,2Y(z)z^{-1} - 0,28Y(z)z^{-2} = X(z) - 3X(z)z^{-1}$$

$$Y(z)(1 - 1,2z^{-1} - 0,28z^{-2}) = X(z)(1 - 3z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - 1,2z^{-1} - 0,28z^{-2}} = \frac{z(z-3)}{z^2 - 1,2z - 0,28}$$

$$b) \quad \text{Impulssvar } h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = y[n]$$

$$\text{Sök poler: } z_{1,2} = 0,6 \pm \sqrt{0,6^2 + 0,28} = 0,6 \pm 0,8 = \begin{cases} 1,4 \\ -0,2 \end{cases}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-3}{(z-1,4)(z+0,2)} = \frac{A}{z-1,4} + \frac{B}{z+0,2}$$

$$z-3 = A(z+0,2) + B(z-1,4)$$

$$z^1: 1 = A + B$$

$$z^0: -3 = 0,2A - 1,4B$$

$$-0,2 = -0,2A - 0,2B$$

$$-3 = 0,2A - 1,4B$$

$$-3,2 = -1,6B$$

$$\Rightarrow B = 2, A = -1$$

$$H(z) = z \frac{z}{z+0,2} - \frac{z}{z-1,4} = z \cdot \frac{1}{1+0,2z^{-1}} - \frac{1}{1-1,4z^{-1}}$$

Inv. z-transf.

$$y[n] = h[n] = \left[ 2 \cdot (-0,2)^n - (1,4)^n \right] u[n]$$

</ Pol utanför enhetscirkeln ( $z=1,4$ )  $\Rightarrow$  Instabilt

Se info på sidan innan

5/ Notera

i)  $N=4$  för alla  $x_i[n]$ , då måste även  $X[k]$  ha  $N=4$

Uteslut:  $X_h$  och  $X_e$  med  $N=5$

$$\text{ii)} \quad X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$x_1[n]: \quad \sum_{n=0}^3 x_1[n] = 1 \Rightarrow X[0] = 1 \quad c, d, g \quad \text{OK}$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot n} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot n} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$\circ \circ \quad x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_d[k]$$

(Impuls ger bidrag vid alla frekvenser)

$$x_2[n]: \quad \sum_{n=0}^3 x_2[n] = 0 = X[0]$$

$$\circ \circ \quad x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_a[k]$$

$$x_3[n]: \quad \sum_{n=0}^3 x_3[n] = 2 = X[0] \quad \circ \circ \quad x_3[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_f[k]$$

$$x_4[n]: \quad \sum_{n=0}^3 x_4[n] = 1 = X[0] \quad c, g \text{ möjliga}$$

OBS!  $x_4[n]$  en konstant signal - (DC)

$X[k] \neq 0$  endast för  $k=0$

$$x_4[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_c[k]$$

/ förb 5

$$x_5[n]: \sum_{n=0}^3 x_5[n] = 1$$

c, d, g möjlige men  
endast g kvar

Dessutom

$x_5[n]$  en fördröjd impuls ( $x_1[n]$ )

$$\text{Då borde } |DFT\{x_1[n]\}| = |DFT\{x_5[n]\}|$$

vilket också stämmer på  $X_g[k]$

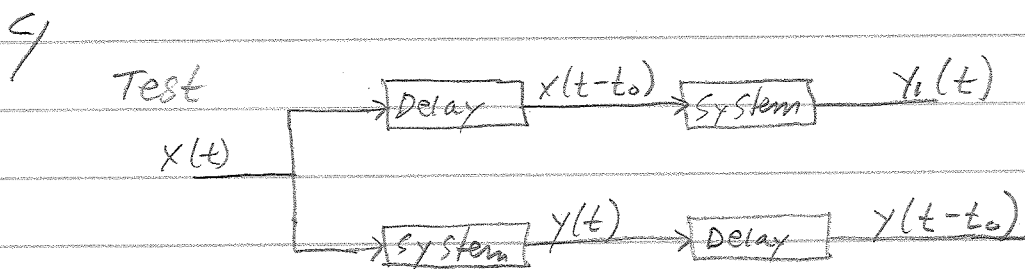
Svar:

Signal	DFT
$x_1[n]$	$X_d[k]$
$x_2[n]$	$X_a[k]$
$x_3[n]$	$X_f[k]$
$x_4[n]$	$X_c[k]$
$x_5[n]$	$X_g[k]$

1.  $y(t) = \cos(0,5\pi t) x(t)$

a)  $x(t) = \delta(t)$   
 $y(t) = \cos(0,5\pi t) \delta(t) = \cos(0) \delta(t) = \delta(t)$

b)  $x(t) = \delta(t-1)$   
 $y(t) = \cos(0,5\pi t) \delta(t-1) = \cos(0,5\pi \cdot 1) \delta(t-1) = 0$

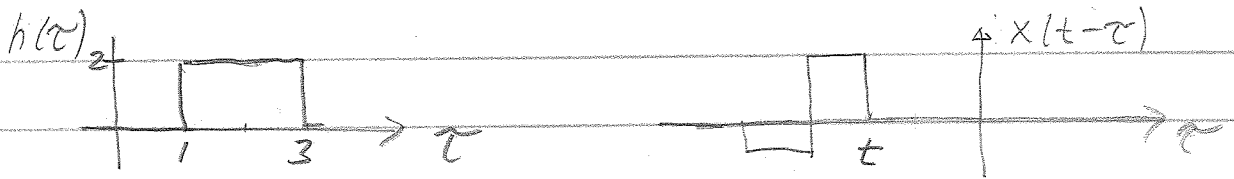


Tidsinvariant om  $y_1(t) = y(t-t_0)$   
 Enligt a) och b) är så inte fallet  
 Systemet ej tidsinvariant

Insignal	Utsignal
$x_1(t)$	$y_1(t) = \cos(0,5\pi t) x_1(t)$
$x_2(t)$	$y_2(t) = \cos(0,5\pi t) x_2(t)$
$a x_1(t)$	$\cos(0,5\pi t) a x_1(t) = a y_1(t)$
$a x_1(t) + b x_2(t)$	$\cos(0,5\pi t) (a x_1(t) + b x_2(t)) =$ $a \cos(0,5\pi t) x_1(t) + b \cos(0,5\pi t) x_2(t) =$ $= a y_1(t) + b y_2(t)$

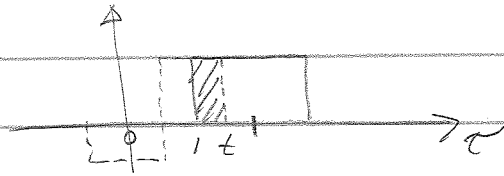
Superposition gäller!  
 Systemet är linjärt.

2/  $y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) x(t-\tau) d\tau$  Faltung!  
"Grafisk" lösning.



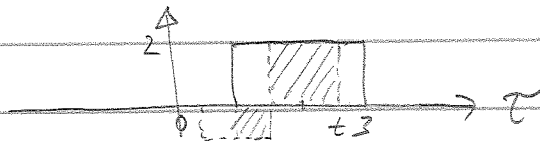
$t < 1$   $h(\tau) x(t-\tau) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

$1 < t < 2$



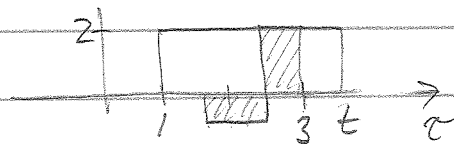
$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) x(t-\tau) d\tau$  växer linjärt från  
0 till 4  $y(t) = 2 \cdot 2(t-1)$

$2 < t < 3$



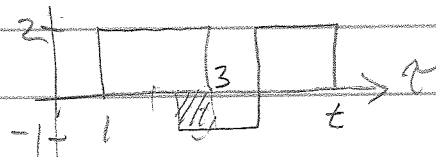
$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) x(t-\tau) d\tau$  Linjär minskning från  
4 till  $4-2=2$   $y(t) = 4 - 2(t-1) = 4 - 2(t-2)$

$3 < t < 4$



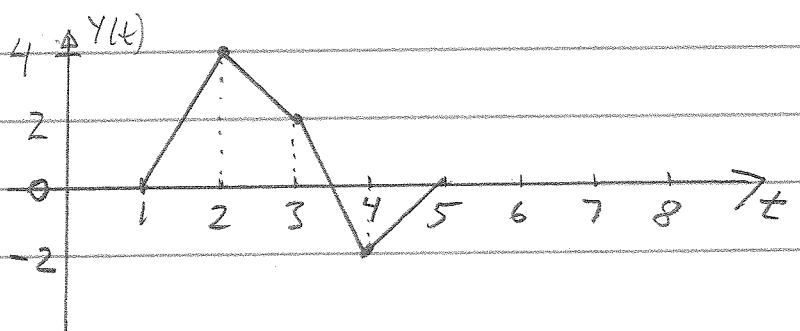
$y(t) = -2 + 4(3-(t-1)) = 4(4-t) - 2$

$4 < t < 5$



$y(t) = -2(3-(t-2)) = -2(5-t)$

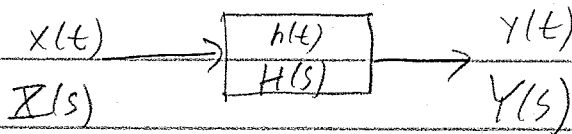
$t > 5$   $y(t) = 0$



3/

, sött  $K=1$ .

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



$$x(t) = e^{-t} u(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

Inverstransformera

Partialbröksuppdelning

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

$$1 = A(s+1)^2 + Bs(s+1) + sC = A(s^2+2s+1) + B(s^2+s) + sC$$

$$s^2: 0 = A+B$$

$$A=1, B=-1$$

$$s^1: 0 = 2A+B+C$$

$$C = -2A - B = -2 + 1 = -1$$

$$s^0: 1 = A$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = u(t) - e^{-t} u(t) - te^{-t} u(t) =$$

$$= [1 - e^{-t}(1+t)] u(t)$$



4

a/

$$y[n] - 1,5y[n-1] + 0,5y[n-2] = x[n]$$

$$z\text{-transformera: } Y(z) - 1,5z^{-1}Y(z) + 0,5z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1,5z + 0,5}$$

$$\text{Rötter till nämnaren } z_{1,2} = 0,75 \pm \sqrt{0,75^2 - 0,5} = 0,75 \pm 0,25 = \begin{cases} 1 \\ 0,5 \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$\text{Insignal } x(t) = \delta(t) \xrightarrow{z} X(z) = 1$$

$$\text{Utsignal (impulssvar) } Y(z) = H(z)X(z) = H(z)$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Partialbröks-} \\ \text{uppdelning} \end{array} \right\} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

$$z = A(z-0,5) + B(z-1) \quad \left| \begin{array}{l} z^1: 1 = A+B \\ z^0: 0 = -0,5A-B \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$(1)+(2): 1 = 0,5A \Rightarrow A=2, B=-1$$

$$Y(z) = z \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} = 2 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0,5z^{-1}}$$

$$\text{Inv. trans. } y[n] = h[n] = 2u[n] - 0,5^n u[n] = (2-0,5^n)u[n]$$

Differens ekv.

4 b,

$$y[n] = x[n] + 1,5y[n-1] - 0,5y[n-2]$$

$$x[n] = \delta[n]$$

$$(y[-1] = y[-2] = 0)$$

n	y[n]
0	$1 + 0 + 0 = 1$
1	$0 + 1,5 \cdot 1 + 0 = 1,5$
2	$0 + 1,5 \cdot 1,5 - 0,5 \cdot 1 = 1,75$
3	$0 + 1,5 \cdot 1,75 - 0,5 \cdot 1,5 = 1,875$

y[n] på sluten form

n	$y[n] = (2 - 0,5^n) u[n]$
0	$2 - 1 = 1$
1	$2 - 0,5^1 = 1,5$
2	$2 - 0,5^2 = 1,75$
3	$2 - 0,5^3 = 1,875$

OK

5 a/ Studera signalerna  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  och  $x_3[n]$  i figuren.  
De är periodiska.

Signal	Antal hela perioder i intervallet
$x_1[n]$	5
$x_2[n]$	6
$x_3[n]$	4

Jämför uppbyggnad av en Fourierserie

$X[k]$  ger högt värde vid anpassning till komplex sinusformad signal  $e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$ . Här svarar  $k$  mot antal perioder i intervallet med  $N$  värden ( $n=0,1,\dots,N-1$ )

Alltså  $x_1[n] \triangleq X_B[k]$ ,  $x_2[n] \triangleq X_C[k]$ ,  $x_3[n] \triangleq X_A[k]$

b/ Dominerande bidrag hos  $|X[k]|$  för  $k=2$  och  $k=N-2=6$   
 $N=8$

Möjliga "graderingar" av frekvensaxeln till  $X[k]$

0	1	2	3		$N-1$	(N)	k
0	$\Delta\omega$	$2\Delta\omega$	$3\Delta\omega$		$(N-1)\Delta\omega$	$\omega_s$	$\omega$ rad/s
0	$\Delta f$	$2\Delta f$	$3\Delta f$		$(N-1)\Delta f$	$f_s$	f Hz

$$k=2: 2\Delta\omega = 480\pi \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_s = N\Delta\omega_0 = 8 \cdot \frac{480\pi}{2} = 1920\pi \text{ rad/s} = 960 \cdot 2\pi \text{ rad/s} \Rightarrow f_s = 960 \text{ Hz}$$

(Andra lösningsvägar finns!)