Tentamen SSY080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

21 december 2016 kl. 14.00-18.00 sal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Tisdag 17 januari kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	Del A: Rätt svar ger 1p. Del B: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Krav för godkänt.

Del A	5 p	av tot 10 p
Del B	7 p	av tot 15 p

Betygsgränser.

Poäng	12-15	16-20	21-25
Betyg	3	4	5

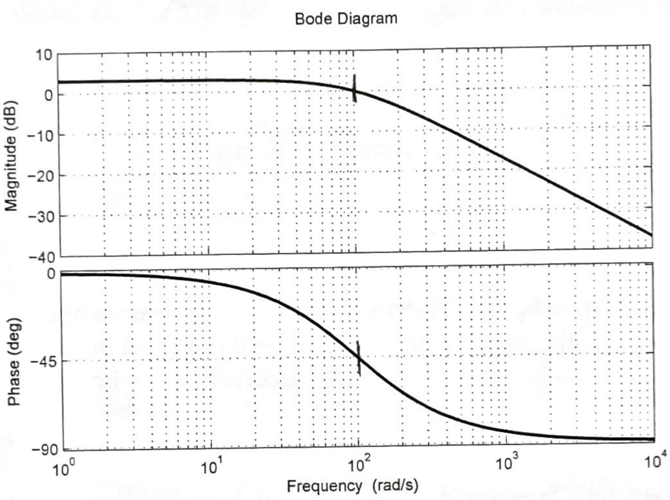
Lycka till!

Del A. En poäng (*1p*) per A-uppgift. **Ange endast svar**. Inga uträkningar eller motsvarande kommer att beaktas.

grafiskt? -Nej så

A1. Signalen $x(t) = \sin(100t)$ utgör insignal till ett kontinuerligt och kausalt LTI-system ($H_1(s)$) med ett frekvenssvar enligt figur 1. Teckna utsignalen $y(t)$ ifrån systemet i stationärtillstånd (eventuella transienter har då klingat av och kan försummas).

decibel



Kanske

$\log_{10} z = 100$

Figur 1: Frekvenssvar till system H_1

A2. En kontinuerlig och periodisk signal tecknas med en Fourierserie på komplex form. Grundvinkelfrekvensen är ω_o och Fourierkoefficienterna är

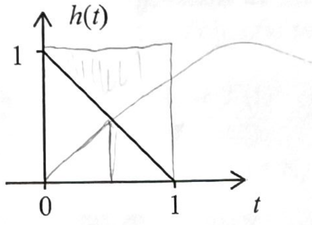
$$c_0 = 2 \qquad c_1 = -\frac{j}{4} \qquad c_{-1} = \frac{j}{4}$$

Troligtvis inte

Teckna signalens Fourierserie på amplitud-fas form[1].

[1] $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos(n\omega_o t + \phi_n)$

A3. Ett kontinuerligt och kausalt LTI-system har ett impulssvar $h(t)$ enligt figur 2. Beräkna utsignalens värde $y(t)$ vid $t = 0.5$ då insignalen är ett enhetssteg ($x(t) = u(t)$).



Figur 2: Impulssvar $h(t)$

A4. Den kontinuerliga signalen $x(t) = e^{-5t}u(t)$ samplas med sampelintervallet $T = 20$ ms och bildar den diskreta signalen $x[n]$. Första sampelvärdet tas vid $t = 0$. Beräkna z-transformen för $x[n]$. Ja

A5. Ett kausalt system med insignal $x[n]$ och utsignal $y[n]$ beskrivs med differensekvationen

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n] \quad .$$

Ja

Beräkna utsignalen $y[n]$ för insignalen $x[n] = \delta[n-1]$.

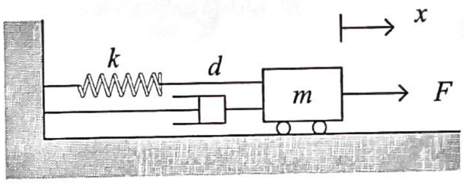
A6. Ett kontinuerligt system beskrivs med sambandet $y(t) = \cos(x(t))$ där $x(t)$ är insignal och $y(t)$ utsignal. Tre frågor: Ja
Är systemet linjärt? Är systemet tidsinvariant? Är systemet stabilt ?

A7. Ett mekanisk system beskrivs i figur 3 där en vagn med massan m är fastspänd i en stadig vägg med fjäderkonstanten k och dämparen d. Om vagnen påverkas av en kraft $F(t)$ påverkas dess position $x(t)$. Ange de värden på dämpkonstanten d som gör att positionen $x(t)$ inte har några oscillatoriska inslag [2] då vagnen påverkas av kraften $F(t) = 5.0u(t)$ N. Vagnen befinner sig i vila vid $t < 0$. Följande samband gäller:

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + d \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = F(t)$$

$mx''(t) + dx'(t) + kx(t) = F(t)$

$m = 10$ kg $\qquad k = 0.4$ N/m



Figur 3: Mekaniskt system

A8. Kontinuerlig tid Fouriertransform (CTFT) beräknas utifrån en kontinuerlig signal $x(t)$ och tecknas $X(j\omega)$. Vanligen är transformen komplexvärd. Ange vilken eller vilka av egenskaperna som gäller:
i) $X(j\omega)$ är en diskret sekvens
ii) $X(j\omega)$ är kontinuerlig i ω
iii) $X(j\omega)$ är periodisk
iv) $X(j\omega)$ är icke periodisk

A9. Täljaren $T(s)$ till överföringsfunktionen i ett stabilt och kontinuerligt notchfilter teckas

$$T(s) = s^4 + s^2 \cdot 500 + 40000 = (s^2 + 100)(s^2 + 400)$$

Vilken alternativt vilka vinkelfrekvenser släcks ut av filtret?

[2] Positionen $x(t)$ växer monotont till sitt slutvärde

A10. En kontinuerlig signal $x(t) = \sin(2\pi 24 \cdot 10^3 t)$ samplas med samplingsfrekvensen 40 kHz. Efter att ha utnyttjat metoden för perfekt rekonstruktion med ett idealt LP-filter erhålls signalen $x_1(t) = \sin(\omega t)$. Vilket värde har ω?

Ja

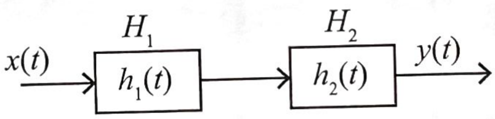
Del B. Fem poäng (*5p*) per B-uppgift. Fullständiga lösningar skall redovisas.

B11. Två kontinuerliga LTI-system är kopplade i serie enligt figur 4. Då insignalen är $x(t) = 0.6e^{-2t}u(t)$ blir utsignalen

$$y(t) = (2.0e^{-0.2t} - 3e^{-0.3t} + e^{-0.5t})u(t)$$

Impulssvaret till system H_2 är $h_2(t) = 0.5e^{-0.5t}u(t)$.

Beräkna impulssvaret $h_1(t)$ till system H_1. *(5p)*



Figur 4: Kontinuerliga system

B12. Ett diskret LTI-system beskrivs med differensekvationen

$$y[n] = 6x[n] - 0.5y[n-1] \; .$$

Beräkna systemets stegsvar. *(5p)*

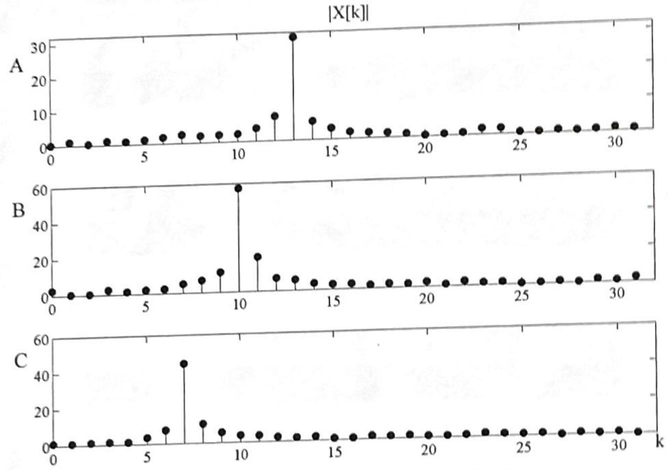
B13. Den kontinuerliga signalen $x(t)$ har sitt upphov från nätbrum i en förstärkare, alltså i huvudsak en sinusformad signal med frekvensen 50 Hz. Signalen $x(t)$ samplas och dess frekvensinnehåll analyseras genom att studera beloppet av den samplade signalens DFT (Diskret Fourier Transform, $X[k]$). Signalen $x(t)$ samplas tre gånger. Sampelintervallet (T) och längd på samplad signal (N) varieras enligt

(1) T=1.5 ms, N=96 ger signal $x_1[n]$

(2) T=1.6 ms, N=128 ger signal $x_2[n]$

(3) T=4.0 ms, N=64 ger signal $x_3[n]$

De 32 första värdena av de samplade signalernas DFT visas till belopp i figur 5, men i blandad ordning. Para ihop rätt signal (x_1, x_2, x_3) med rätt $|X[k]|$ (A,B,C). Tydlig motivering krävs. *(5p)*



Figur 5: $|X[k]|$ från de tre samplade signalerna.

SSY080 D3
16-12-21

1. $x(t) = \sin(100t)$, $\omega = 100$ r/s

Enligt Bodediagram $|H_1(j\omega)|_{\omega=100} = 0\text{dB} \triangleq 1$ ggr

$\arg\{H_1(j\omega)\}_{\omega=100} = -45^\circ$

$y(t) = \sin(100t - 45^\circ)$

2. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 n} = 2 + \left(-\frac{j}{4}\right) e^{j\omega_0 t} + \frac{j}{4} e^{-j\omega_0 t} =$

$= 2 + \frac{1}{4} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{4} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega_0 t} =$

$= 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{e^{j(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}}{2} =$

$= 2 + \frac{1}{2}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

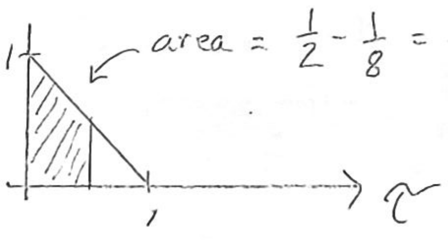
3. $y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau =$

$= \{t = 0{,}5\} = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, u\left(\tfrac{1}{2} - \tau\right) d\tau =$

$= \int_0^{0{,}5} h(\tau)\, d\tau = \int_0^{0{,}5} (1-\tau)\, d\tau =$

$= \left[\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^{0{,}5} = 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Fås även direkt ur figur



4. $x(t) = e^{-5t} u(t)$ Samplas $t = nT$

$T = 20$ ms

$$x[n] = e^{-5 \cdot Tn} u[n] = e^{(-0,1)n} = \left(\frac{1}{e^{0,1}}\right)^n$$

Z-transf. $$X(z) = \frac{z}{z - e^{-0,1}} = \frac{1}{1 - e^{-0,1} \cdot z^{-1}}$$

5. $y[n] - \frac{1}{4} y[n-1] = x[n]$ Z-transf.

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right) = X(z) \quad , \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow X(z) = z^{-1}$$

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

6. $y(t) = \cos(x(t))$

Linjärt? Nej
Tidsinv.? Ja
Stabilt? Ja

In	Ut
x_1	$\cos(x_1)$
x_2	$\cos(x_2)$
$x_3 = x_1 + x_2$	$\cos(x_1 + x_2) \neq \cos(x_1) + \cos(x_2)$. Ej Linjärt

SSY080 D3
2016-12-21

7. $F(t)$ insignal ; $x(t)$ utsignal
Laplacetransf.

$m = 10$ kg
$k = 0{,}4$ N/m

$$(ms^2 + ds + k)X(s) = F(s)$$

Överföringsfkn: $H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+ds+k} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}}$

Inga oscillatoriska inslag ⇒ inga cos eller sin termer i stegsvaret ⇒ $H(s)$ har reella poler !

$$s^2 + \frac{d}{10}s + \frac{0{,}4}{10} = 0 \quad ; \quad s_{1,2} = -\frac{d}{20} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{d^2}{400} - \frac{0{,}4}{10}}_{\geq 0}}$$

$$\frac{d^2}{400} \geq \frac{0{,}4}{10} \quad ; \quad d^2 \geq \frac{0{,}4 \cdot 400}{10} = 16$$

$$\therefore \; d \geq 4 \;\; Ns/m$$

8. ii) $X(j\omega)$ är kontinuerlig i ω
iv) $X(j\omega)$ är icke periodisk

9.
$$s^2 + 100 = 0 \Rightarrow s = \sqrt{-100} = \pm j10 = \sigma_1 \pm j\omega_1 \; (\sigma_1 = 0)$$
$$s^2 + 400 = 0 \Rightarrow s = \sqrt{-400} = \pm j20 = \sigma_2 \pm j\omega_2 \; (\sigma_2 = 0)$$

$\omega = 10$ och 20 rad/s släcks ut

10. $x(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ med $f_1 = 24$ kHz
$f_s = 40$ kHz $\quad f > \frac{1}{2}f_s \Rightarrow$ Aliasing !
Rekonstruktion ger $f = f_s - f_1 = 16$ kHz
$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 16 \cdot 10^3 = 32\pi \cdot 10^3$ rad/s

SSY080 D3

2016-12-21

B11 $x(t) \rightarrow \boxed{H_1} \rightarrow \boxed{H_2} \rightarrow y(t)$

$$Y(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot X(s)$$

$$x(t) = 0{,}6 \cdot e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{0.6}{s+2}$$

$$h_2(t) = 0{,}5 e^{-0{,}5t} \cdot u(t) \longleftrightarrow H_2(s) = \frac{0{,}5}{s+0{,}5}$$

$$y(t) = \left(2{,}0 \cdot e^{-0{,}2t} - 3e^{-0{,}3t} + 1 \cdot e^{-0{,}5t}\right) u(t)$$

Laplace $Y(s) = \frac{2}{s+0{,}2} - \frac{3}{s+0{,}3} + \frac{1}{s+0{,}5} =$

$$= \frac{2(s+0{,}3)(s+0{,}5) - 3(s+0{,}2)(s+0{,}5) + (s+0{,}2)(s+0{,}3)}{(s+0{,}2)(s+0{,}3)(s+0{,}5)} =$$

$$= \ldots = \frac{0{,}06}{(s+0{,}2)(s+0{,}3)(s+0{,}5)}$$

$$H_1(s) = \frac{Y(s)}{H_2(s) X(s)} = \frac{0{,}06\,(s+2)\,\cancel{(s+0{,}5)}}{(s+0{,}2)(s+0{,}3)\cancel{(s+0{,}5)} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5} =$$

$$= \frac{0.2\,(s+2)}{(s+0{,}2)(s+0{,}3)} = \{P.B.U.\} = \frac{A}{(s+0{,}2)} + \frac{B}{(s+0{,}3)} =$$

$$= \ldots = \frac{3{,}6}{s+0{,}2} - \frac{3{,}4}{s+0{,}3}$$

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_1(s)\} = \left(3{,}6 \cdot e^{-0{,}2t} - 3{,}4 e^{-0{,}3t}\right) u(t)$$

SSY080 D3
2016-12-21

B12 $y[n] = 6x[n] - 0{,}5\,y[n-1]$

$$y[n] + 0{,}5\,y[n-1] = 6x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)\left(1+0{,}5z^{-1}\right) = 6X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{6}{1+0{,}5z^{-1}} = \frac{6z}{z+0{,}5}$$

$$x[n] = u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = z \cdot \underbrace{\frac{6z}{(z+0{,}5)(z-1)}}_{\text{P.B.U.}}$$

$$\frac{6z}{(z+0{,}5)(z-1)} = \frac{A}{z+0{,}5} + \frac{B}{z-1}$$

$$6z = A(z-1) + B(z+0{,}5)$$

z^0: $0 = -A + 0{,}5B$
z^1: $6 = A + B$

$6 = 1{,}5B \Rightarrow B = 4$
$A = 2$

$$Y(z) = 2\frac{z}{z+0{,}5} + 4\frac{z}{z-1}$$

Inv. z-transform

$$y[n] = \left(4 + 2(-0{,}5)^n\right) \cdot u[n] =$$

$$= 2\left(2 + (-0{,}5)^n\right) u[n]$$

SSY080 D3
16-12-21

B 13.

$$DFT\{x[n]\} = X[k]$$

$x[n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$
$X[k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Frekvensupplösning hos DFT : $\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT}$

$$k \cdot \Delta f = f \Rightarrow \frac{f}{f_s} = \frac{k}{N}$$

$$f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow k = \frac{f}{f_s} \cdot N = f \cdot T \cdot N$$

Vilket k-värde svarar mot 50 Hz ?

(1) $T = 1{,}5 \text{ ms}$, $N = 96 \Rightarrow k = 50 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 96 \approx 7{,}2$

(2) $T = 1{,}6 \text{ ms}$, $N = 128 \Rightarrow k = 50 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 128 = 10{,}2$

(3) $T = 4{,}0 \text{ ms}$, $N = 64 \Rightarrow k = 50 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 64 \approx 12{,}8$

Svar: $x_1[n]$ — C
$x_2[n]$ — B
$x_3[n]$ — A