Tentamen SSY080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

27 oktober 2017 kl. 14.00-18.00 sal: SB

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Onsdag 15 november kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	Del A: Rätt svar ger 1p. Del B: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Krav för godkänt.

Del A	5 p	av tot 10 p
Del B	7 p	av tot 15 p

Betygsgränser.

Poäng	12-15	16-20	21-25
Betyg	3	4	5

Lycka till!

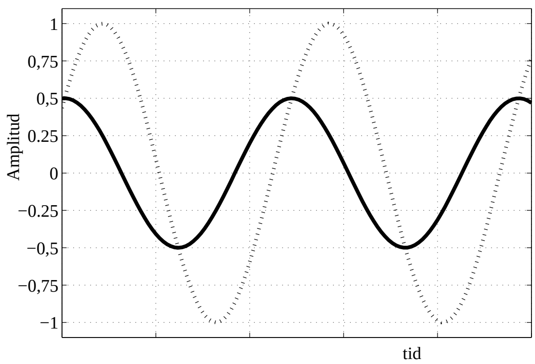
Del A. En poäng (*1p*) per A-uppgift. **Ange endast svar**. Inga uträkningar eller motsvarande kommer att beaktas.

A1. En samplingsutrustning som vi har tillgång till har ett minsta samplingsintervall på 10 μs. Vi tänker sampla signalen $y(t)$ som utgör utsignal från LTI-systemet $H(s)$ med signalen $x(t)$ som insignal. Vilken är den högsta frekvens signalen $x(t)$ får innehålla för att samplingsteoremet skall vara uppfyllt?

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC}, \qquad RC = 2 \cdot 10^{-6}\ s.$$

A2. I figur 1 visas insignal $x(t)$ (streckad linje) och utsignal $y(t)$ (heldragen linje) för en sinusformad signal som passerar igenom systemet $G(s)$. Vilken vinkelfrekvens har de sinusformade signalerna?

$$G(s) = \frac{s}{s+9}$$



Figur 1: Systemets in- och utsignal

A3. För en kontinuerlig periodisk signal gäller att $x(t) = x(t+T),\ \forall\ t$. Bestäm det minsta värdet på periodtiden T för signalen

$$x(t) = \pi\cos(21\omega_o t) + 0.1\cos(39\omega_o t)\ .$$

A4. En kontinuerlig och sinusformat signal $x(t)$ på 64 Hz samplas med 512 Hz och analyseras med en 32-punkters DFT (Diskret Fourier Transform, $X[k]$). För vilket/vilka värden på k antar $|X[k]|$ störst värde ?

A5. Ett diskret LTI-system har impulssvaret $h[n]$. Beräkna utsignalvärdet $y[n]$ för $n = 0$ som följer av insignalen $x[n]$ då
$x[n] = 1$ för $n = -2, 0, 1$ ($x[n] = 0$ för övrigt).
$h[n] = 1$ för $n = -1, 0$ och $h[n] = -1$ för $n = 1$ ($h[n] = 0$ för övrigt).

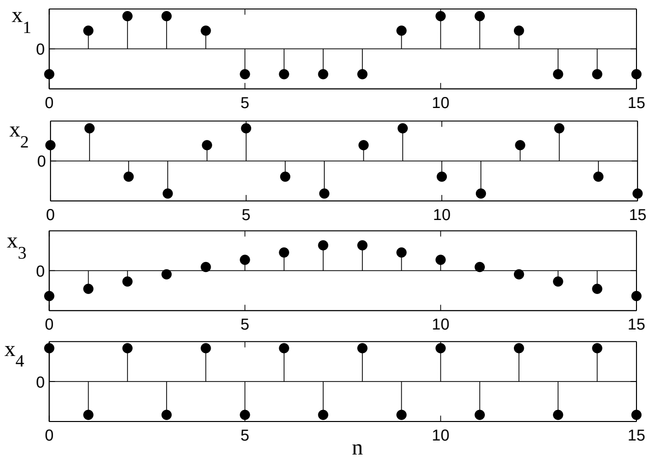
A6. Ett kontinuerligt system har impulssvaret

$$h(t) = \delta(t) - 9e^{-9t}u(t) \quad .$$

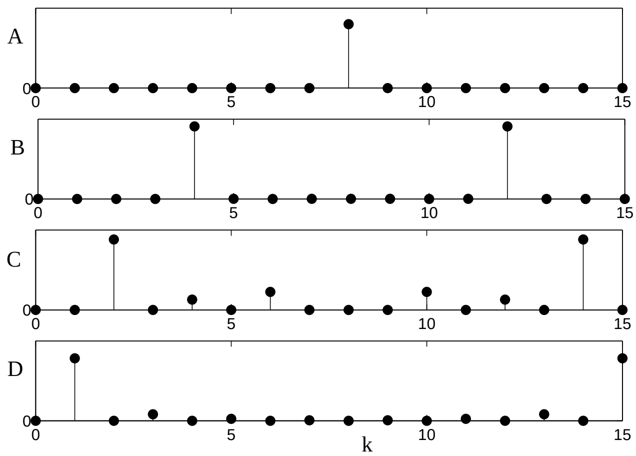
Teckna systemets frekvenssvar $H(j\omega)$ där $H(j\omega)$ också är Fouriertransfomen av impulssvaret.

A7. Fourierserien (CTFS) är en Fourierrepresentation som kan tecknas för en kontinuerlig periodisk signal. Den komplexa Fourierserien beskrivs med koeficienterna c_k. Ange vilken eller vilka av egenskaperna som gäller för c_k:
i) c_k är periodisk
ii) c_k är icke periodisk
iii) c_k är kontinuerlig i ω
iv) c_k är en diskret sekvens

A8. Fyra olika diskreta signaler $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ och $x_4[n]$ visas i figur 2. Varje signal har $N = 16$ värden. Absolutbeloppet av dessa signalers DFT ($|X[k]|$) visas i figur 3 men i blandad ordning. Para ihop varje signal med motsvarande DFT.



Figur 2: Fyra diskreta signaler



Figur 3: Fyra olika DFT som $|X[k]|$

A9. Ett stabilt och kausalt diskret system har överföringsfunktionen $H(z)$. I vårt fall består $H(z)$ av en kvot mellan polynom i z. Vårt $H(z)$ har flera poler och nollställen. Vad gäller då för polernas placering i det komplexa talplanet?

i) Polernas realdel > 0
ii) Polernas realdel < 0
iii) Polernas belopp > 1
iv) Polernas belopp < 1

A10. Då en kontinuerlig signal $x(t) = \sin(500\pi t)$ samplas med samplingsintervallet $T = 100$ μs erhålls en diskret signal som tecknas $x[n] = \sin(\Omega n)$. Vilket värde har Ω?

Del B. Fem poäng (*5p*) per B-uppgift. Fullständiga lösningar skall redovisas.

B11. När insignalen till ett kontinuerligt och kausalt system är

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad \text{blir utsignalen} \quad y(t) = e^{-2t}\cos(3t)u(t) \ .$$

Beräkna systemets impulssvar. *(5p)*

B12. Ett diskret LTI-system beskrivs med differensekvationen

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{7}{6}x[n-1] \ .$$

Beräkna systemets utsignal för insignalen *(5p)*

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \ .$$

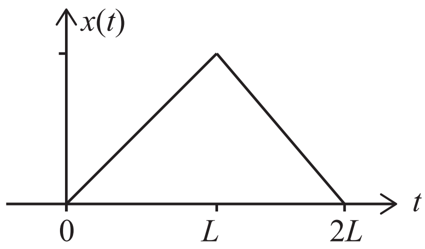
B13. En triangelformad, periodisk signal har Fourierserieutvecklingen

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

En period av signalen visas i figur 4. Signalen $x(t)$ utgör insignal till ett system H med impulssvaret

$$h(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t} \; .$$

Bestäm de värden på L för vilka utsignalen $y(t)$ ifrån systemet endast innehåller en sinusformad signal (grundtonen) utöver ett konstant värde som motsvarar medelvärdet. *(5p)*



Figur 4: En period av $x(t)$

Transformer
Signaler & System
SSY080 171027

A1 $f < \frac{f_s}{2} = 50\ \text{kHz}$

A2 $|G(j\omega)| = \frac{1}{2}$ för $\omega = 3\sqrt{3}$ rad/s

A3 $T = \frac{2\pi}{3\omega_0}$ s

A4 $k = 4$ och 28

A5 $y[0] = 2$

A6 $H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 9}$

A7 c_k ii) icke periodisk
iv) en diskret sekvens

A8 x_1 – C x_3 – D
x_2 – B x_4 – A

A9 iv) Polernas belopp < 1

A10 $\Omega = \omega T = 0{,}05\pi$ rad

SSY080
171027

B11 $x(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+1}$

$$y(t) = e^{-2t}\cos(3t)\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+2)^2+9} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+13}$$

$$H(s) = \frac{s^2+4s+13-4s-13+3s+2}{s^2+4s+13} = 1+\frac{-s-11}{(s+2)^2+9}$$

$$H(s) = 1-\frac{s+11}{(s+2)^2+9} = 1-\frac{s+2+9}{(s+2)^2+9} =$$

$$= 1-\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - 3\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

Impulssvar:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \delta(t) - e^{-2t}(\cos 3t + 3\sin 3t)\,u(t)$$

SSY080
171027

B12 $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{7}{6}x[n-1]$

Z-transf.

$$Y(z)\left(1-0{,}5z^{-1}\right) = X(z)\left(1+\frac{7}{6}z^{-1}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{7}{6}z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{z+\frac{7}{6}}{z-0{,}5}$$

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{\left(z+\frac{7}{6}\right)z}{(z-0{,}5)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+\frac{7}{6}}{(z-0{,}5)\left(z+\frac{1}{3}\right)} = \{\text{P.B.U}\} = \frac{A}{z-0{,}5} + \frac{B}{z+\frac{1}{3}}$$

$$z+\frac{7}{6} = A\left(z+\frac{1}{3}\right) + B(z-0{,}5)$$

$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{7}{6} = A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right);\quad \frac{10}{6} = A\left(\frac{5}{6}\right) \Rightarrow A = 2$

$z = -1/3 \Rightarrow -\frac{1}{3}+\frac{7}{6} = B\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right);\quad 5/6 = B\left(-\frac{5}{6}\right) \Rightarrow B = -1$

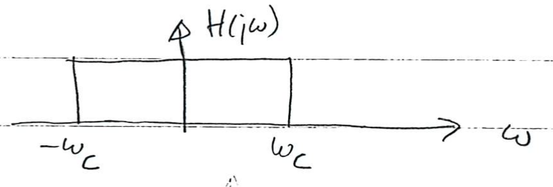
$$Y(z) = 2\cdot\frac{z}{z-0{,}5} - \frac{z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)u[n]$$

SSY080
171027

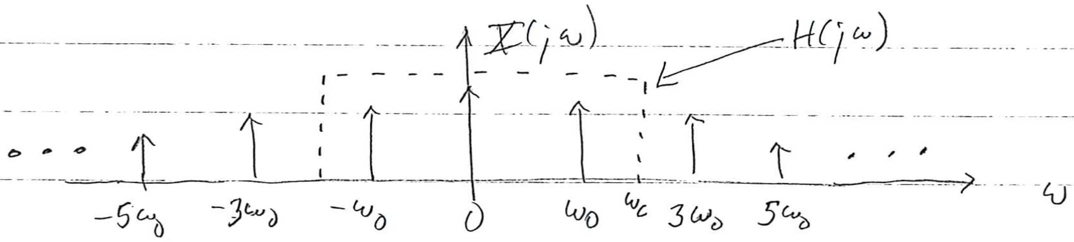
B13

$$h(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 100\pi \\ 0, & |\omega| > 100\pi \end{cases}$$



$\omega_c = 100\pi$

Fourierserien: Endast grundton + DC-värde skall passera $H(j\omega)$



$$\omega_0 < \omega_c < 3\omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{L} \quad , \quad \omega_c = 100\pi$$

$\omega_0 < \omega_c$	$3\omega_0 > \omega_c$
$\frac{\pi}{L} < 100\pi$	$\omega_0 > \frac{\omega_c}{3}$
$L > \frac{1}{100}$	$\frac{\pi}{L} > \frac{100\pi}{3}$
	$L < \frac{3}{100}$

Svar: $\frac{1}{100} < L < \frac{3}{100}$ [s]