Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

26 oktober 2012 kl. 14.00-18.00 sal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås måndag 29 okt. på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Måndag 12 nov. kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311. Plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare.
- Beta Mathematics Handbook.
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller datorutskrifter.

Betygsgränser

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. (a) Är signalen $x(t) = e^{j(13t+\pi)}$ periodisk? Beräkna i så fall signalens periodtid. *(2p)*

   (b) Beräkna värdet på summan *(1p)*

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{9}\right)(\delta[n] + \delta[n-3] + \delta[n-6])$$

   (c) Beräkna z-transformen till signalen *(2p)*

$$x[n] = u[n-2] * \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n].$$

2. Ett kontinuerligt LTI-system har stegsvaret

$$y_s(t) = e^{-6t}u(t)$$

   (a) Beräkna den insignal, $x(t)$, som ger upphov till utsignalen *(4p)*

$$y(t) = e^{-t}u(t).$$

   (b) Ta fram differentialekvationen som beskriver systemet. *(1p)*

3. Ett diskret och kausalt LTI-system beskrivs med differensekvationen

$$y[n] + 0.5y[n-1] = x[n] - 2.1x[n-1]$$

där $y[n]$ är systemets utsignal och $x[n]$ systemets insignal. Beräkna systemets utsignal för insignalen *(5p)*

$$x[n] = 0.8^n u[n].$$

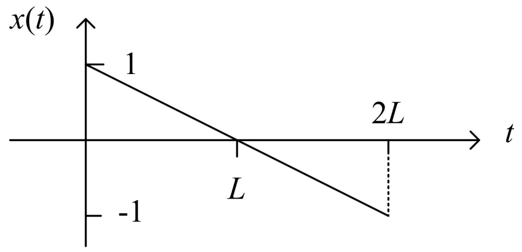
4. En kontinuerlig och periodisk signal $x(t)$ utgör insignal till ett linjärt LTI-system H. Systemet har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{sK}{s^2 + s160 + 600^2}.$$

Signalen $x(t)$ kan tecknas som en Fourierserie enligt

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right).$$

En period av signalen $x(t)$ visas i figur 1. $L = \pi/200$ s. Bestäm konstanten K i systemets överföringsfunktion $H(s)$ så att förstärkningen av den signal i Fourierserien som svarar mot index $n = 3$ får amplitudförstärkningen 10 (antag stationärtillstånd). *(5p)*

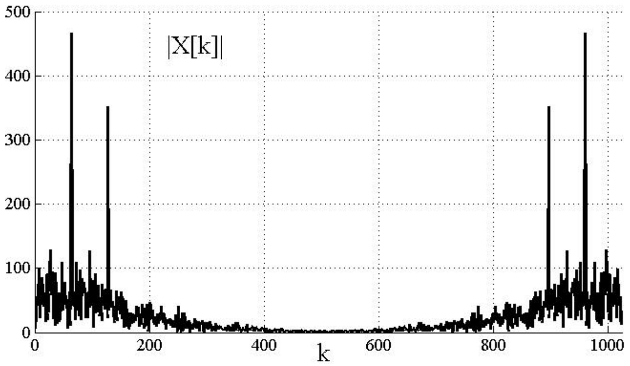


Figur 1: En period av signalen $x(t)$.

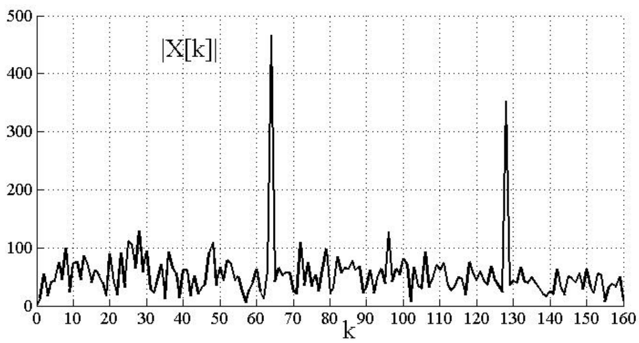
5. I ett sammanhang där en kontinuerlig signal $x(t)$ skall lågpassfiltreras genom ett filter (system) med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{\omega_o^6}{(s + \omega_o)^6}, \qquad \omega_o = 1800 \text{ r/s}$$

upptäcker man att den intressanta signalen $x(t)$ påverkas på ett oönskat sätt av källor i omgivningen som adderar sinusformade signaler till $x(t)$. Efter en frekvensanalys där källan till mätsignalen ges en låg förstärkning analyseras frekvensinnehållet i den totala signalen med Matlabs fft-rutin. Samplingsfrekvensen är $f_s = 800$ Hz och antal sampelvärden $N = 2^{10}$. Beloppet av hela signalens DFT ($X[k]$) visas i figur 2 och en inzoomad variant i figur 3. Man ser att $|X[k]|$ har distinkta toppar vid $k = 64,\ 128\ ,\ 896$ och 960. Utforma ett täljarpolynom till $G(s)$ som släcker ut de sinusformade signalerna som representeras av de tydliga topparna i signalens DFT (figur 2). *(5p)*



Figur 2: $|X[k]|$.



Figur 3: Inzoomad $|X[k]|$.

Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$ beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

18 januari 2013 kl. 14.00-18.00 sal: V

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås måndag 21 jan. på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Tisdag 5 feb. kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311. Plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare.
- Beta Mathematics Handbook.
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller datorutskrifter.

Betygsgränser

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. (a) Signalen $g(t)$ är kontinuerlig och saknar diskontinuiteter. Ange vad resultatet blir av följande tre operationer. Det räcker med att ange svaret.

   (i) $g(t) * \delta(t - t_o)$ *(1p)*

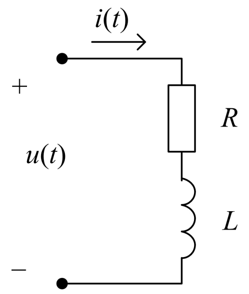
   (ii) $g(t)\delta(t - t_o)$ *(1p)*

   (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - t_o)\delta(\tau)d\tau$ *(1p)*

   (b) En spole och en resistor kopplas i serie enligt figur 1. Kretsen kan ses som ett system med insignalen $i(t)$ (ström) och utsignalen $u(t)$ (spänning). Enligt kretsanalysen ges sambandet mellan signalerna av ekvationen

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

   Visa att systemet är linjärt. *(2p)*



Figur 1: Elektrisk krets.

2. Då ett kontinuerligt LTI-system i vila påverkas av insignalen $x(t)$ blir systemets utsignal $y(t)$. Beräkna systemets impulssvar då *(5p)*

$$x(t) = \delta(t) - e^{-3t}u(t) \quad \text{och}$$
$$y(t) = (3e^{-5t} - e^{-3t})u(t) \quad .$$

3. En kontinuerlig och periodisk signal $x(t)$ utgör insignal till ett linjärt system H enligt figur 2. Systemets frekvenssvar kan tecknas

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_o}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

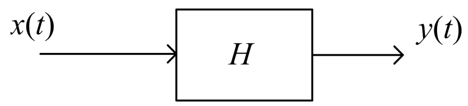
Signalen $x(t)$ kan tecknas som en komplex Fourierserie enligt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t}, \quad \text{där} \quad c_k = \frac{2}{k^2} \quad \text{för} \quad k \neq 0 \quad \text{och } c_0 = 0.$$

Signalens fundamentala period är T och parametern $\omega_c = \frac{7\pi}{T}$.

(a) Teckna Fourierserien för systemets utsignal $y(t)$. *(3p)*

(b) Beräkna medeleffekten hos systemets utsignal $y(t)$. *(2p)*



Figur 2: System H.

4. Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$ beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Den kontinuerliga signalen $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, där $x_1(t) = \cos(84\pi t)$ och $x_2(t) = \sin(210\pi t)$, samplas med samplingsintervallet $T_s = \frac{1}{336}$ s . Antal sampel $N = 64$. Nu erhålls den diskreta signalen $x[n] = x(nT_s)$, $n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. Därefter beräknas signalens DFT enligt sambandet ovan.

(a) Värdet $X[k]$ och $X[k-1]$ $(1 < k < N-1)$ representerear olika frekvenser. Vilken är skillnaden mellan dessa frekvenser i rad/s. *(1p)*

(b) Hur många distinkta toppar kan man se då man plottar $|X[k]|$? *(1p)*

(c) Ange de värden på index k där topparna i $|X[k]|$ infaller. *(2p)*

(d) Hur många sampelvärden per period tas av signal $x_1(t)$ resp. $x_2(t)$? *(1p)*

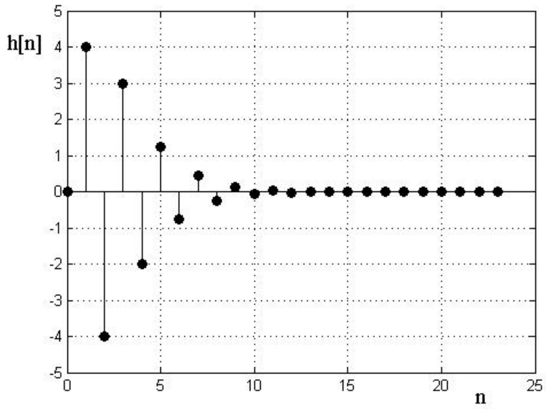
5. Ett diskret och kausalt system har följande överföringsfunktion:

$$Y(z) = \frac{4z}{z^2 + z + 0.25} \quad .$$

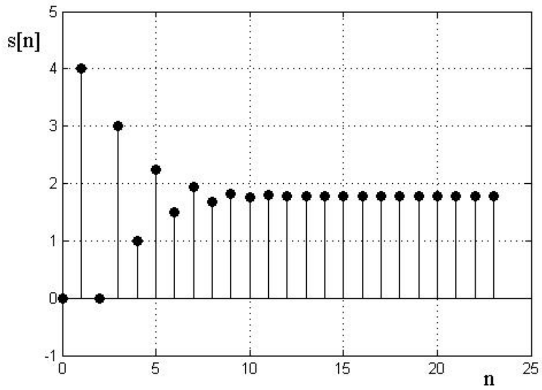
(a) Beräkna systemets impulssvar $h[n]$ *(2p)*

(b) Beräkna systemets stegsvar[1] $s[n]$ *(3p)*

Du kan jämföra dina resultat med plottar av impulssvaret $h[n]$ i figur 3 och stegsvaret $s[n]$ i figur 4.



Figur 3: Impulssvar.



Figur 4: Stegsvar.

[1] Hur man gör en korrekt ansats vid partialbråksuppdelning finns angivet i *Beta*, se *Partial fractions*.

Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

28 aug. 2013 kl. 14.00-18.00 sal: V

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås torsdag 29 aug. på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Fredag 13 sept. kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311. Plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare.
- Beta Mathematics Handbook.
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller datorutskrifter.

Betygsgränser

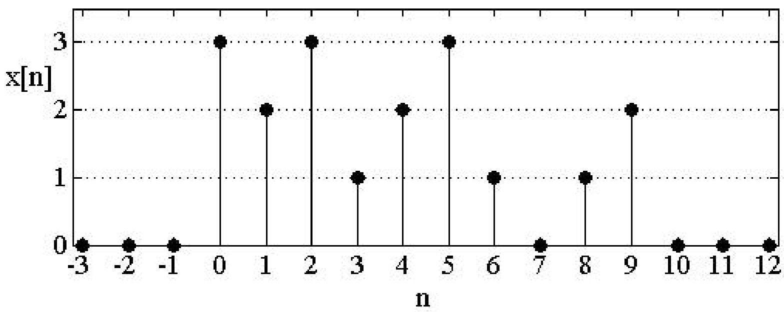
Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. (a) Är den kontinuerliga signalen $x(t)$ periodisk? Beräkna i så fall signalens fundamentala period. *(2p)*

$$x(t) = 2\cos(10\pi t + \pi/6) + 5\pi\cos(17\pi t - \pi/4)$$

(b) En diskret signal $v[n]$ erhålls genom sambandet $v[n] = x[1-2n]$. Utseendet hos signalen $x[n]$ ges av figur 1. Signalvärden som ej visas i figuren kan antas vara noll. Signalen $v[n]$ utgör sedan insignal till ett diskret system H med impulssvaret $h[n] = \delta[n-2]$. Beräkna utsignalen $y[n]$ från system H. *(3p)*



Figur 1: Diskret signal.

2. Frekvenssvaret till ett kontinuerligt andra ordningens system ges av [1]

$$H(j\omega) = \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega^2 + j\sqrt{2}\ \omega\omega_c}$$

där ω_c är en positiv reell konstant.

(a) Beräkna systemets amplitud och faskarakteristik. *(3p)*

(b) Låt insignalen till systemet vara

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)\right) .$$

Beräkna systemets amplitud och faspåverkan på signalens två sinusformade signaldelar om $\omega_0 = 200\pi$ och $\omega_c = 600\pi$. *(2p)*

[1] $H(j\omega)$ utgör ett lågpassfilter av Butterworth typ.

3. Den kontinuerliga signalen $x(t) = 4\cos(20\pi t)$ samplas genom multiplikation med ett impulståg $p(t)$ enligt figur 2 där $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ och $T = 25$ ms. Det resulterande impulståget har Fouriertransformen $X_p(j\omega) = \mathcal{F}\{x_p(t)\}$.

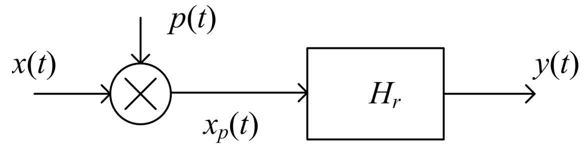
   (a) (i) Vilken är den första (lägsta) positiva frekvens ovanför 10 Hz för vilken $X_p(j\omega)$ är skild från noll.

   (ii) $x_p(t)$ filtreras i ett idealt lågpassfilter H_r. För vilka värden på detta filtrets brytfrekvens blir utsignalen rent sinusformig?

   (iii) $x_p(t)$ filtreras i ett idealt lågpassfilter H_r. För vilka värden på detta filtrets brytfrekvens blir utsignalen noll?

   (b) Upprepa frågorna i del (a) men nu med sampelintervallet $T = \dfrac{1}{12}$ s.

(5p)



Figur 2: System för sampling och rekonstruktion.

4. Ett kontinuerligt LTI-system beskrivs med differentialekvationen

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$$

där $y(t)$ är systemets utsignal och $x(t)$ dess insignal. Beräkna systemets utsignal för insignalen $x(t) = e^{-7t}u(t)$. Systemet saknar begynnelseenergi vid $t = 0$. *(5p)*

5. Ett diskret LTI-system har impulssvaret

$$h[n] = 0.2^{n-1}u[n-1] \quad .$$

Beräkna systemets utsignal $y[n]$ då insignalen $x[n]$ är ett fördröjt enhetssteg, $x[n] = u[n-1]$. *(5p)*

Transformer, Signaler & System, D3
SSY080 121026

1a)

$$x(t+T) = e^{j(13(t+T)+\pi)} = e^{j(13t+\pi)} \cdot e^{j13T} = x(t) \; ?$$

$$e^{j13T} = 1 \quad \text{om} \quad 13T = 2\pi \qquad T = \frac{2\pi}{13}$$

Periodisk ! med perioden $T = \frac{2\pi}{13}$

b)

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{9}\right)\left(\delta[n] + \delta[n-3] + \delta[n-6]\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{0 \cdot \pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{9}\right) =$$

$$= 0 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

c)

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

$$x_1[n] = u[n-2] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-1} \cdot z^{-2} = X_1(z)$$

$$x_2[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\frac{2}{3}} = X_2(z)$$

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = \frac{z \cdot z^{-2} \cdot z}{(z-1)(z-\frac{2}{3})} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)(z-\frac{2}{3})} = \frac{1}{z^2 - z \cdot \frac{5}{3} + \frac{2}{3}}$$

SSY080
121026

2. $y_s(t) = e^{-6t} \cdot u(t)$ Stegsvar

Laplace transf. $Y_s(s) = \frac{1}{s+6}$

Insignal $x'(t) = u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X'(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_s(s) = X'(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s} \cdot H(s)$$

$$H(s) = s \cdot Y_s(s) = \frac{s}{s+6}$$ Överf. funktion !

Ny utsignal $y(t) = e^{-t} \cdot u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{1}{s+1}$

Sök insignal $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{s+6}{(s+1)s} = \{\text{P.B.U.}\} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$s+6 = A(s+1) + B \cdot s \qquad \begin{array}{ll} s^1: & 1 = A+B \\ s^0: & 6 = A \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} A = 6 \\ B = -5 \end{array}$$

$$X(s) = \frac{6}{s} - \frac{5}{s+1} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} x(t) = \left(6 - 5e^{-t}\right) u(t)$$

b/ $H(s) = \frac{s}{s+6} = \frac{Y(s)}{X(s)}$

$$Y(s)(s+6) = s\,X(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

SSY080
121026

3. $y[n] + 0{,}5\,y[n-1] = x[n] - 2{,}1\,x[n-1]$

z - transformera

$$Y(z) + 0{,}5 \cdot z^{-1} Y(z) = X(z) - 2{,}1\, z^{-1} X(z)$$

$$Y(z)(1 + 0{,}5 z^{-1}) = X(z)(1 - 2{,}1 z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2{,}1 z^{-1}}{1 + 0{,}5 z^{-1}} = \frac{z - 2{,}1}{z + 0{,}5}$$

$$x[n] = 0{,}8^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{z}{z - 0{,}8}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z(z - 2{,}1)}{(z+0{,}5)(z-0{,}8)} = z \cdot \underbrace{\frac{z - 2{,}1}{(z+0{,}5)(z-0{,}8)}}_{\text{P.B.U.}}$$

$$\frac{z - 2{,}1}{(z+0{,}5)(z-0{,}8)} = \frac{A}{z+0{,}5} + \frac{B}{z-0{,}8}$$

$$z - 2{,}1 = A(z-0{,}8) + B(z+0{,}5)$$

$$\left.\begin{array}{lll} z^1: & 1 = A + B & B = 1 - A \\ z^0: & -2{,}1 = -0{,}8A + 0{,}5B & -2{,}1 = -0{,}8A + 0{,}5(1-A) \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 2 \\ B = -1 \end{array}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z+0{,}5} - \frac{z}{z-0{,}8}$$

Inv. z-transf.

$$y[n] = \left[2 \cdot (-0{,}5)^n - (0{,}8)^n\right] u[n]$$

SSY080
121026

4.

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{\pi} \cdot 200 = 200 \text{ r/s}$$

Frekv. svar $\quad H(s)\Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \dfrac{j\omega K}{600^2 - \omega^2 + j\omega 160}$

Krav vid $\omega = 3 \cdot \omega_0 \quad (n=3)$

$$\left| H(j\omega)\Big|_{\omega = 3\omega_0} \right| = 10$$

$$3\omega_0 = 600 \text{ r/s}$$

$$|H(j3\omega_0)| = \frac{3\omega_0 \cdot K}{\sqrt{(600^2 - 600^2)^2 + (3\omega_0 160)^2}} =$$

$$= \frac{3\omega_0 K}{3\omega_0 160} = 10 \quad \Rightarrow K = 1600$$

Svar: $K = 1600$

SSY080
121026

5. $f_s = 800$ Hz
$N = 2^{10} = 1024$

$|X[k]|$ med "toppar" vid $k_1 = 64$ och $N-64 = 960$ svarar mot en reell sinusformad signal med frekvensen $f_1 = \frac{k_1}{N} \cdot f_s = \frac{64}{1024} \cdot 800 = 50$ Hz
("Nätverksbrum?")

$|X[k]|$ med "toppar" vid $k_2 = 128$ och $N-128 = 896$ svarar mot en reell sinusformad signal med frekvensen $f_2 = \frac{k_2}{N} \cdot f_s = \frac{128}{1024} \cdot 800 = 100$ Hz
("1:a övertonen till nätverksbrum?")

$G(s)$ med frekvenssvar $G(s)\big|_{s=j\omega} = G(j\omega)$ skall släcka ut $\omega_1 = 2\pi f_1$ och $\omega_2 = 2\pi f_2$

Täljarpolynom $T(j\omega)$ skall ha komplexkonjugerade nollställen $T(j\omega) = (j\omega - j\omega_1)(j\omega + j\omega_1)(j\omega - j\omega_2)(j\omega + j\omega_2)$

Vilket ger $T(s) = (s - j\omega_1)(s + j\omega_1)(s - j\omega_2)(s + j\omega_2) =$
$= (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)$

$$T(s) = s^4 + s^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2 =$$

$$= s^4 + s^2(2\pi)^2 \cdot 12500 + (2\pi)^4 \cdot 25 \cdot 10^6$$

Transformer, Signaler & System
D3 SS4080 130118

1a) i) $g(t-t_0)$

ii) $g(t_0)\,\delta(t-t_0)$

iii) $g(-t_0)$

b) $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t)$

Insignal	Utsignal
$i_1(t)$	$L\dfrac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) = u_1(t)$
$i_2(t)$	$L\dfrac{di_2(t)}{dt} + Ri_2(t) = u_2(t)$
$ai_1(t)$	$L\dfrac{d}{dt}(ai_1(t)) + Rai_1(t) = au_1(t)$
$ai_1(t) + bi_2(t)$	$L\dfrac{d}{dt}(ai_1(t) + Rai_1(t) +$
	$+L\dfrac{d}{dt}(bi_2(t) + Rbi_2(t) =$

$= au_1(t) + bu_2(t)$

Superposition!

Systemet är linjärt

SSY080

130118

2/

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = \delta(t) - e^{-3t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} 1 - \frac{1}{s+3} = \frac{s+3-1}{s+3} = \overbrace{\frac{s+2}{s+3}}^{X(s)}$$

$$y(t) = \left(3e^{-5t} - e^{-3t}\right)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{3}{s+5} - \frac{1}{s+3} = Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{3(s+3) - (s+5)}{(s+5)(s+3)} = \frac{3s+9-s-5}{(s+5)(s+3)} = \frac{2(s+2)}{(s+5)(s+3)}$$

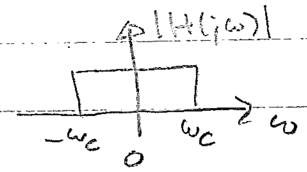
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2\cancel{(s+2)}}{(s+5)\cancel{(s+3)}} \cdot \frac{\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s+2)}} = \frac{2}{s+5}$$

Impulssvar $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 2e^{-5t} \cdot u(t)$

SSY080
130118

3/

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



$|H(j\omega)| = 1$, $\arg\{H(j\omega)\} = -\omega t_0$ för $|\omega| \le \omega_c$

$\omega_c = \frac{7\pi}{T} = \frac{7\pi}{2\pi} \cdot \omega_0 =$
$= 3{,}5\,\omega_0$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

a/ $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$c_0 = 0$
$c_k = \frac{2}{k^2}, \quad k \neq 0$

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = \sum_{k=-3}^{3} 2\pi e^{-j\omega t_0} c_k \delta(\omega - k\omega_0) =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-3}^{3} \cdot c_k e^{-jk\omega_0 t_0} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{3} c_k^y e^{+jk\omega_0 t} \quad \text{med } c_k^y = c_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}$$

b/ Medeleffekt $$\overline{P}_y = \frac{1}{T} \int_T |y(t)|^2 dt = \sum_{k=-3}^{3} |c_k^y|^2 =$$

$$= \left\{ \omega_c = \frac{7\pi}{T} = \frac{7\pi}{2\pi} \cdot \omega_0 = 3{,}5\,\omega_0 \right\} = \sum_{k=-3}^{3} |c_k^y|^2 = \{c_0 = 0\}$$

$$= 2\left(\frac{2}{1}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{9}\right)^2 = 8 + \frac{1}{2} + \frac{8}{81} = 8{,}56$$

SSY080

130118

4/

$$x(t) = \cos(f_1 \cdot 2\pi t) + \cos(f_2 \cdot 2\pi t)$$

$$f_1 = 42 \text{ Hz} \quad , \quad f_2 = 105 \text{ Hz}$$

$$f_s = \frac{1}{T_s} = 336 \text{ Hz}$$ (samplings frekvens)

a/ $$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{336}{64} = 5{,}25 \text{ Hz}$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta f = 10.5\pi \text{ rad/s}$$

b/ En reell sinusformad signal ger två "toppar" i DFT. Vi har två sinusformade signaler

Svar: 4 st

c/ $$\frac{k}{N} = \frac{f}{f_s} \; ; \; k_1 = N \cdot \frac{f_1}{f_s} = 64 \cdot \frac{42}{336} = 8$$

Även $N-8 = 56$

$$k_2 = N \cdot \frac{f_2}{f_s} = 64 \cdot \frac{105}{336} = 20$$

Även $N-20 = 44$

Svar: "Toppar" vid $k = 8, 20, 44$ och 56

d/ Antal sampel per period $= \dfrac{\text{Signalens periodtid}}{\text{Sampelintervall}}$

$$x_1: \; \frac{T_1}{T_s} = \frac{f_s}{f_1} = \frac{336}{42} = 8$$

$$x_2: \; \frac{T_2}{T_s} = \frac{f_s}{f_2} = \frac{336}{105} = 3{,}2$$

SSY080
130118

5/ $Y(z) = \frac{4z}{z^2 + z + 0{,}25} = \ldots = \frac{4z}{(z+0{,}5)^2} = H(z)$

OBS! $Y(z)$ är överföringsfunktionen, vanligen $H(z)$.

a/ Från Beta: $\frac{az}{(z-a)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} na^n u[n]$

Låt $a = -0{,}5$

$$H(z) = \frac{1}{a} \cdot \frac{4a \cdot z}{(z-a)^2} = \frac{4}{a} \cdot \frac{az}{(z-a)^2}$$

och $h[n] = \frac{4}{-0{,}5} \cdot n \cdot (-0{,}5)^n u[n] = -8n(-0{,}5)^n u[n]$

b/ Stegsvar $s[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S(z)$

Insignal $u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-1}$

$$S(z) = \frac{z}{z-1} \cdot H(z) = z \cdot \frac{4z}{(z-1)(z+0{,}5)^2}$$

$$\frac{S(z)}{z} = \frac{4z}{(z-1)(z+0{,}5)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z+0{,}5)} + \frac{C}{(z+0{,}5)^2}$$

$$4z = A(z+0{,}5)^2 + B(z-1)(z+0{,}5) + C(z-1)$$

z^2: $0 = A + B$
z^1: $4 = A - 0{,}5B + C$
z^0: $0 = 0{,}25A - 0{,}5B - C$

Lös ekv. systemet

$\Rightarrow A = -B = \frac{16}{9}$

$C = \frac{4}{3}$

SSY080
130118

/ forts 5

$$S(z) = \frac{16}{9}\cdot\frac{z}{z-1} - \frac{16}{9}\cdot\frac{z}{z+0{,}5} + \underbrace{\frac{4}{3}\cdot\frac{z}{(z+0{,}5)^2}}_{\frac{4}{3(-0{,}5)}\cdot\frac{(-0{,}5)z}{(z-(-0{,}5))^2}}$$

Inverstransformera!

$$s[n] = \frac{16}{9}\cdot u[n] - \frac{16}{9}(-0{,}5)^n u[n] + \frac{4}{3(-0{,}5)}\cdot n(-0{,}5)^n\cdot u[n]$$

$$s[n] = \left[\frac{16}{9}\left(1-(-0{,}5)^n\right) - \frac{8}{3}\cdot n(-0{,}5)^n\right]u[n]$$

$$s[n] = \frac{8}{9}\left[2\left(1-(-0{,}5)^n\right) - 3n(-0{,}5)^n\right]u[n]$$

SSY080 130828 D3

1a) Periodisk? Ja! $T = 2\,s$

b) $y[n] = v[n-2] = \ldots, 0, 0, 2, 0, \underline{\underline{3}}, 1, 2, 0, 0, \ldots$

$\uparrow n=0$

2a) $$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}}$$

$$\arg\{H(j\omega)\} = -\arctan\left\{\frac{\sqrt{2}\,\frac{\omega}{\omega_c}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right\}$$

3) a) i) 30 Hz

ii) $10 < f_c < 30$ Hz

iii) $f_c < 10$ Hz

b) i) 14 Hz

ii) $2 < f_c < 10$ Hz

iii) $f_c < 2$ Hz

4) $$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+5)}}_{H(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(s+7)}}_{X(s)} = \ldots = \frac{1}{24}\left[\frac{1}{s+1} - 3\frac{1}{s+5} + 2\frac{1}{s+7}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{24}\left(e^{-t} - 3e^{-5t} + 2e^{-7t}\right) u(t)$$

5) $$y[n] = 5\,\delta[n] + \left(\frac{5}{4} - \frac{25}{4}\cdot 0{,}2^n\right) u[n]$$

Alt: $$y[n] = \left(\frac{5}{4} - \frac{25}{4}\cdot 0{,}2^n\right) u[n-2]$$