Tentamen SSY080 *
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

28 Augusti 2019 kl. 14.00-18.00 sal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Torsdag 12 September kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	Del A: Rätt svar ger 1p. Del B: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Krav för godkänt.

Del A	5 p	av tot 10 p
Del B	7 p	av tot 15 p

Betygsgränser.

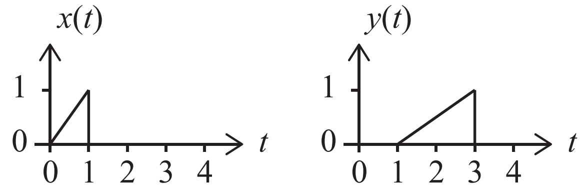
Poäng	12-15	16-20	21-25
Betyg	3	4	5

Lycka till!

* korrigerad version, se uppg. A3

Del A. En poäng (*1p*) per A-uppgift. **Ange endast svar**. Flera del A svar kan ges på samma blad. Inga uträkningar eller motsvarande kommer att beaktas.

A1. Studera signalerna i figur 1. Signalen $y(t)$ kan får genom manipulering av $x(t)$ enligt $y(t) = x(at + b)$. Bestäm de reella konstanterna a och b.



Figur 1: Två signaler, $x(t)$ och $y(t)$

A2. Bestäm den fundamentala perioden $N = N_o$ för den diskreta signalen

$$x[n] = e^{jn\Omega_o} \qquad \text{med} \;\; \Omega_o = \frac{5\pi}{13} \quad .$$

A3. Ett diskret system med impulssvaret $h[n]$ är i vila [1] innan det påverkas av insignalen $x[n]$. Hur många värden hos utsignalen $y[n]$ kommer att bli skilda från noll ($\neq 0$).

$x[n]$ och $h[n]$ ofullständigt angivna i orginaltesen. Uppgiften utgår.

A4. Beräkna Fouriertransformen till signalen

$$x(t) = \cos(t) \cdot \delta(t - \frac{\pi}{4}) \quad .$$

[1] Utsignalen $y[n] = 0$ för $n < 0$.

A5. Ett kontinuerligt och idealt lågpassfilter har ett impulssvar enligt

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t}, \forall\ t \quad \text{där} \quad \omega_b = \frac{16\pi}{3T}.$$

Vilken/vilka av följande tre insignaler passerar igenom filtret?

$$x_1(t) = 5\cos(\frac{2\pi}{T}t) \qquad\qquad x_2(t) = 8\sin(\frac{220}{4\pi T}t)$$

$$x_3(t) = -4\cos(\frac{3\pi^2}{2T}t)$$

Beskrivningen av $x_{1,2,3}(t)$ gäller $\forall\ t$ [2].

A6. Ett diskret LTI-system har överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)}$$

Bestäm utsignalen då insignalen är

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -3, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \\ 0, & \text{för övriga } n \end{cases}$$

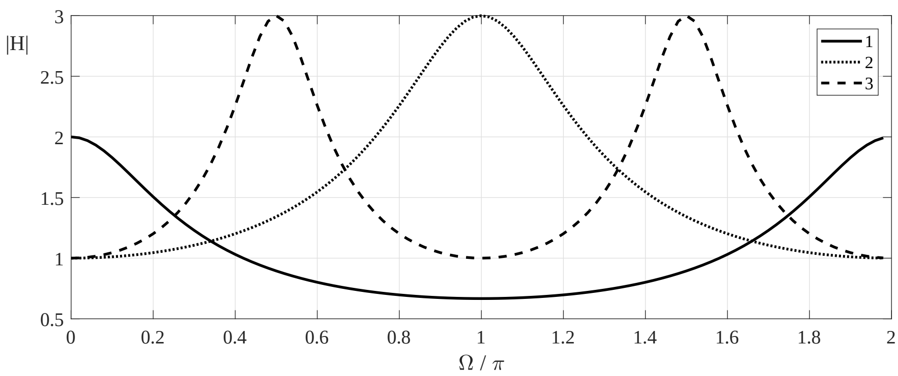
A7. Varför används ett *anti-aliasingfilter* i samband med sampling? Jo, man vill begränsa signalens
(i) Effekt (ii) Medelvärde (iii) Bandbredd (iv) Amplitud.
Välj rätt alternativ.

A8. Ett enhetssteg ($u(t)$) utgör insignal till ett kontinuerligt system (i vila) med överföringsfunktionen $H(s) = \dfrac{bs}{s+a}$ där $a > 0$ och $b > 0$.
Vid vilken tidpunkt når utsignalen värdet $\dfrac{b}{e}$?

[2] $\forall\ t$ betyder: för alla t

A9. Beloppen av frekvenssvaren till tre diskreta system visas i figur 2 i intervallet [3] $0 < \Omega < 2\pi$. Vilken av kurvorna {1,2,3} hör till systemet

$$y[n] + 0.5\,y[n-1] = 1.5\,x[n] \quad ?$$

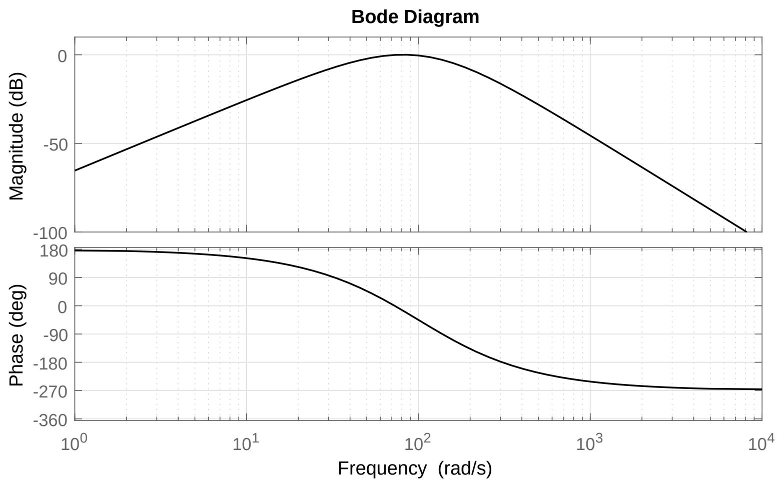


Figur 2: Beloppet av tre frekvenssvar $H_{1,2,3}(e^{j\Omega})$

[3] Notera att frekvensaxeln är graderad som Ω/π

A10. Ett kontinuerligt LTI-system med överföringsfunktionen $H(s)$ har ett Bodediagram enligt figur 3. Ange värdet på heltalsparametern n i överföringsfunktionen som ges av

$$H(s) = \frac{K\,s^2}{(s+100)^n} \quad , \qquad K > 0$$



Figur 3: Bodediagram för $H(s)$

Del B. Fem poäng (*5p*) per B-uppgift. Fullständiga lösningar skall redovisas.

B11. Ett kontinuerligt LTI-system har impulssvaret

$$h(t) = 10\, e^{-10t}\, u(t) \quad .$$

Beräkna systemets utsignal, $y(t)$, för $t > 0$ då insignalen är *(5p)*

$$x(t) = \cos(\omega_o t)\, u(t) \qquad \text{där} \;\; \omega_o = 4\pi \text{ rad/s}$$

B12. Ett diskreta system beskrivs med differensekvationen

$$y[n] + 0.6\, y[n-1] - 0.16\, y[n-2] = x[n-1] + 0.5\, x[n-2] \quad .$$

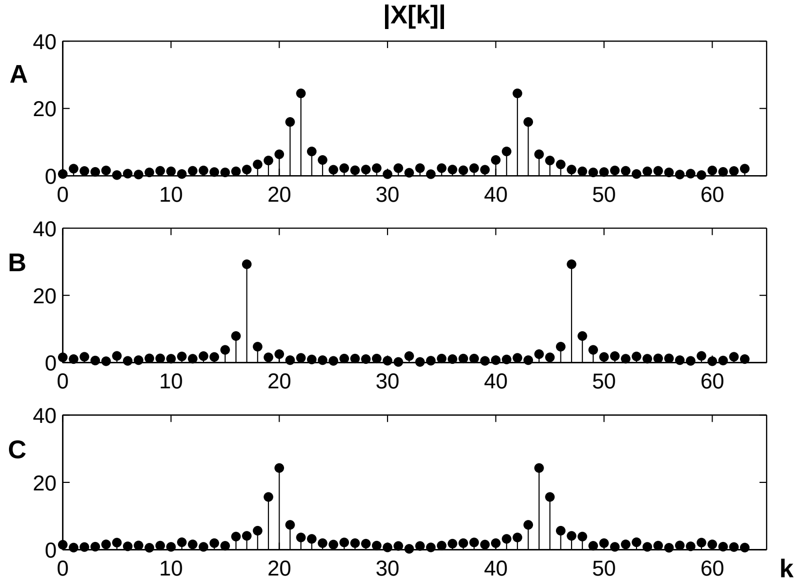
En kausal signal $x[n]$ [4] utgör insignal till systemet som då är i vila. Resultatet blir utsignalen

$$y[n] = (0.2^n - (-0.8)^n)\, u[n] \quad .$$

Beräkna insignalen $x[n]$. *(5p)*

[4] $x[n] = 0$ för $n < 0$

B13. Tre kontinuerliga signaler $x_1(t)$, $x_2(t)$ och $x_3(t)$ samplas. Sampelintervallet (tid mellan två intilliggande sampelvärden) är fast och satt till 1.25 ms. Alla tre signalerna består av en sinusformad signal där även något brus adderats. Sinussignalen i $x_1(t)$ har frekvensen 210 Hz. Sinussignalen i $x_2(t)$ har frekvensen 270 Hz och i $x_3(t)$ är den 555 Hz. 64 sampel tas från var och en av de tre signalerna. Därefter beräknas den Diskreta Fouriertransformen (DFT), som tecknas med $X[k]$, av de tre samplade signalerna. Absolutbeloppet av DFT-beräkningarna visas i figur 4 men i blandad ordning. Para ihop samplad signal med motsvarande $|X[k]|$ plot i figuren. Tydlig motivering krävs. *(5p)*



Figur 4: $|X[k]|$ från de tre samplade signalerna.

Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$ beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

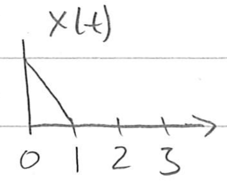
Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

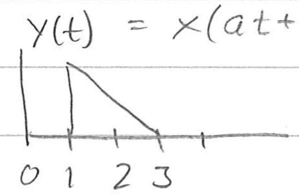
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Transformer, Signaler & System

D3, SS4080 2019-08-28

A1.





$x(0) \longleftrightarrow y(1)$ $\quad 0 = a \cdot 1 + b \quad a = -b$

$x(1) \longleftrightarrow y(3)$ $\quad 1 = a \cdot 3 + b \quad a = \frac{1}{2}$

$b = -\frac{1}{2}$

$$y(t) = x\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

A2.

$$x[n+N_0] = x[n] = e^{jn\Omega_0} \qquad j\ \Omega_0 = \frac{5\pi}{13}$$

$$x[n+N_0] = e^{j(n+N_0)\Omega_0} = \underbrace{e^{jn\Omega_0}}_{x[n]} \cdot \underbrace{e^{jN_0\Omega_0}}_{=1}$$

$$N_0 \cdot \Omega_0 = k \cdot 2\pi$$

$$N_0 = \frac{k\,2\pi}{\Omega_0} = \frac{k\,2\pi \cdot 13}{5\pi} = \frac{k\,26}{5}$$

N_0 minsta heltal för $k=5$ $\Rightarrow$ $N_0 = 26$

A3.

Uppgiften på tesen var ofullständigt formulerad.

Uppgiften utgår. Alla ges 1p.

SSY080

2019-08-28

A4

$$x(t) = \cos(t)\cdot\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

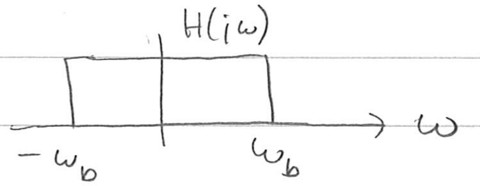
$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Alltså: vårt $x(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\omega\frac{\pi}{4}}$

A5

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t} \xleftrightarrow{FT} H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_b \\ 0, & |\omega| > \omega_b \end{cases}$$



$$\omega_b = \frac{16\pi}{3T}$$

Signal frekvenser: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_2 = \frac{220}{4\pi T}$, $\omega_3 = \frac{3\pi^2}{2T}$

Jämför

x_1: $\frac{\omega_1}{\omega_b} = \frac{2\pi\, 3T}{T\cdot 16\pi} = \frac{6}{16} < 1$ Passerar

x_2: $\frac{\omega_2}{\omega_b} = \frac{220\; 3T}{4\pi T\cdot 16\pi} = \frac{220\cdot 3}{4\cdot 16\cdot \pi^2} \approx 1{,}04 > 1$ Passerar ej

x_3: $\frac{\omega_3}{\omega_b} = \frac{3\pi^2\cdot 3T}{2T\cdot 16\pi} = \frac{9\pi}{32} \approx 0{,}88 < 1$ Passerar

SS4080
2019-08-28

A6.

$$H(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)} = \frac{z}{z^2-3z+2}$$

$$x[n] = \delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} = \frac{z^2-3z+2}{z^2}$$

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{z}{z^2-3z+2} \cdot \frac{z^2-3z+2}{z^2} = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \delta[n-1]$$

A7 Begränsa signalens (iii) Bandbredd.

A8

$$H(s) = \frac{bs}{s+a} \quad ; \quad x(t) = u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = X(s)\cdot H(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{bs}{s+a} = \frac{b}{s+a}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = be^{-at}\cdot u(t) = \frac{b}{e}$$

$$\frac{b}{e} = be^{-at} \Rightarrow e^{-1} = e^{-at} \Rightarrow at = 1$$

Svar: $t = \frac{1}{a}$

SSY080
2019-08-28

Å9 $y[n] + 0,5\,y[n-1] = 1,5\,x[n]$

$Y(z)\left(1 + 0,5\,z^{-1}\right) = 1,5\,X(z)$

$H(z) = \dfrac{1,5}{1+0,5z^{-1}}$

Frekvenssvar: $z = e^{j\Omega}$

$H(e^{j\Omega}) = \dfrac{1,5}{1+0,5e^{-j\Omega}}$

Stämmer med

$H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=0} = \dfrac{1,5}{1+0,5} = 1$ 2, 3

$H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\pi} = \dfrac{1,5}{1+0,5e^{-j\pi}} = \dfrac{1,5}{1-0,5} = 3$ 2

Svar: Kurva nr 2

A10 $H(s) = \dfrac{Ks^2}{(s+100)^n}$; $H(j\omega) = \dfrac{-K\omega^2}{(j\omega+100)^n}$

Låga frekvenser $\omega \ll 100$ $|H(j\omega)|$ stiger med ω^2
+40dB/dekad

Höga frekvenser $\omega \gg 100$ $|H(j\omega)|$ sjunker med -60 dB/dekad
som svarar mot $\dfrac{1}{\omega^3}$

Då måste $n = 2+3 = 5$

Fas ändras från 180 till $-270°$ vilket är
$180 + 270 = n \cdot 90° \Rightarrow n = 5$

SSY080
2019-08-28

B11

$$h(t) = 10e^{-10t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = \frac{10}{s+10}$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad ; \omega_0 = 4\pi \text{ r/s}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{10}{s+10} \cdot \frac{s}{s^2+\omega_0^2} = \frac{A}{s+10} + \frac{Bs+C}{s^2+\omega_0^2}$$

$$10s = A(s^2+\omega_0^2) + \overbrace{(Bs+C)(s+10)}^{Bs^2+(10B+C)s+10C}$$

$$\begin{array}{l|l|l} s^2: \quad 0 = A+B & A=-B & 0 = A(\omega_0^2+10^2)+10^2 \\ s^1: \quad 10 = 10B+C & C = 10(1-B) & A = -\frac{100}{\omega_0^2+100} = -B \\ s^0: \quad 0 = A\omega_0^2+10C & 0 = A\omega_0^2+10^2(1+A) & \end{array}$$

$$C = 10\left(1-\frac{100}{\omega_0^2+100}\right) \approx 6{,}12 \qquad B \approx 0{,}388$$

$$Y(t) = Ae^{-10t} + B\frac{s}{s^2+\omega_0^2} + \frac{C}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} =$$

$$= \left[-0{,}388\left(e^{-10t} - \cos\omega_0 t\right) + 0{,}487 \sin\omega_0 t\right] u(t)$$

Kan skrivas om som

$$B\cos(\omega_0 t) + \frac{C}{\omega_0}(\sin\omega_0 t) = \sqrt{B^2+\left(\frac{C}{\omega_0}\right)^2} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

med $\varphi = \arcsin\frac{B}{\sqrt{B^2+\left(\frac{C}{\omega_0}\right)^2}} = 38{,}5^\circ$

och $y(t) = \left[0{,}623 \cdot \sin\left(\omega_0 t + 38{,}5^\circ\right) - 0{,}388 \cdot e^{-10t}\right] u(t)$

SSY080
2019-08-28

B12. $y[n] + 0{,}6\,y[n-1] - 0{,}16\,y[n-2] = x[n-1] + 0{,}5\,x[n-2]$

z-transf.

$$Y(z)\left(1 + 0{,}6z^{-1} - 0{,}16z^{-2}\right) = X(z)\left(z^{-1} + 0{,}5z^{-2}\right)$$

$$H(z) = \frac{z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}{1 + 0{,}6z^{-1} - 0{,}16z^{-2}} = \frac{z + 0{,}5}{z^2 + 0{,}6z - 0{,}16} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Poler: $z_{1,2} = -0{,}3 \pm \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}16} = -0{,}3 \pm 0{,}5 = \begin{cases} 0{,}2 \\ -0{,}8 \end{cases}$

$$H(z) = \frac{z + 0{,}5}{(z - 0{,}2)(z + 0{,}8)}$$

$y[n] = \left[0{,}2^n - (-0{,}8)^n\right] u[n]$ z-transf.

$$Y(z) = \frac{z}{z - 0{,}2} - \frac{z}{z + 0{,}8} = z \cdot \frac{z + 0{,}8 - z + 0{,}2}{(z - 0{,}2)(z + 0{,}8)}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{z}{(z - 0{,}2)(z + 0{,}8)} \cdot \frac{(z - 2)(z + 0{,}8)}{(z + 0{,}5)} =$$

$$= \frac{z}{z + 0{,}5}$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = (-0{,}5)^n\, u[n]$$

SSY080
2019-08-28

B13

$T = 1{,}25$ ms $\quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}25 \cdot 10^{-3}} = 800 \cdot 2\pi$ rad/s

$f_s = 800$ Hz

$$\frac{f}{f_s} = \frac{k}{N} \Rightarrow k = \frac{f}{f_s} \cdot N \qquad N = 64$$

X_1: $f = 210$ Hz $\quad k = \frac{210}{800} \cdot 64 = 16{,}8 \approx \underline{17} \quad N-k \approx \underline{47}$

X_2: $f = 270$ Hz $\quad k = \frac{270}{800} \cdot 64 = 21{,}6 \approx \underline{22} \quad N-k \approx \underline{42}$

X_3: $f = 555$ Hz $\quad k = \frac{555}{800} \cdot 64 \approx 44.4 \approx \underline{44} \quad N-k \approx \underline{20}$.

OBS! Aliasing.

Jämför k och N-k värden med "toppar" i $|X[k]|$ figur.

			<u>k</u>
Svar:	X_1 —	B	[22, 42]
	X_2 —	A	[17, 47]
	X_3 —	C	[20, 44]