Tentamen SSY080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

24 augusti 2016 kl. 14.00-18.00 sal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Onsdag 14 september kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Betygsgränser .

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. (a) En sinusformat spänning $x(t) = 5\cos(692\ t)$ V utgör insignal till en elektrisk krets med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} \quad .$$

Beräkna utsignalen, spänningen $y(t)$, ifrån kretsen i stationärtillstånd (eventuella transienter har då klingat av och kan försummas). Värdet på konstanterna ges av kretsens komponentvärden där $R = 5.0$ kΩ och $C = \frac{1}{6}$ μF. *(3p)*

(b) Den kontinuerliga och sinusformade signalen $x(t) = A\sin(\omega t)$ med vinkelfrekvensen $\omega = 1000\pi$ rad/s samplas och bildar den diskreta sekvensen $x[n] = A\sin(\Omega n)$. Sampelintervallet $T_s = 50$ μs.

(i) Vilket värde får Ω ? *(1p)*

(i) Hur många sampelvärden erhålls för varje period i $x(t)$? *(1p)*

2. Ett diskret, stabilt och kausalt LTI-system beskrivs med överförings funktionen

$$H(z) = \frac{2z}{z - a} \quad .$$

Systemets insignal är $x[n] = u[n-1]$ och utsignalens värde vid $n = 3$ är $y[3] = 3.92$ då systemet inledningsvis är i vila (alltså $y[-1] = 0$).

(a) Beräkna värdet på parametern a. *(2p)*

(b) Ta fram det allmänna uttrycket för systemets utsignal $y[n]$. *(3p)*

3. Ett kontinuerligt LTI-system har impulssvaret

$$h(t) = (8 - 5e^{-4t})u(t) \ .$$

Beräkna utsignalen $y(t)$ då insignalen är *(5p)*

$$x(t) = e^{-8t}u(t) \ .$$

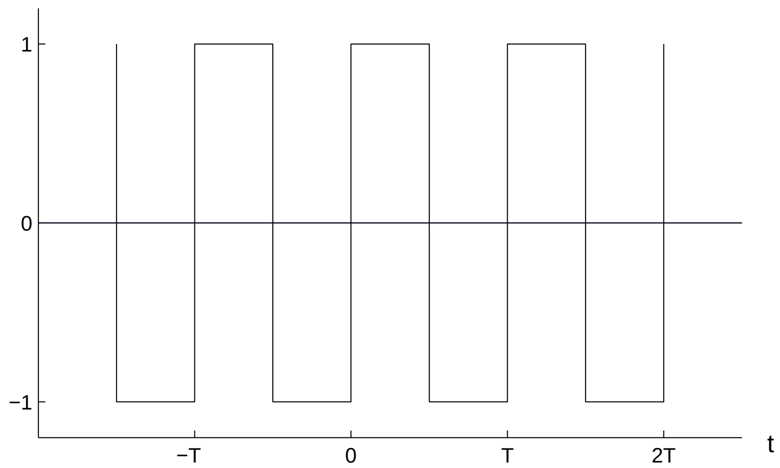
4. I kursens hemlab studerade vi en fyrkantssignal med periodtiden 2π s. De tre första nollskiljda Fourierseriekoefficienterna beräknades. Vi har nu en liknande periodisk signal, se figur 1. Det enda som skiljer är att priodtiden $T = 2\pi \cdot 10^{-2}$ s. Denna signal utgör insignal till ett system med frekvenssvaret

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{för} \quad |\omega| < 420 \text{ rad/s} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Beräkna medeleffekten hos utsignalen och medeleffekten hos insignalen samt jämför dessa två värden.
Medeleffekt för en kontinuerlig och periodisk signal kan beräknas som

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Du får hänvisa till de resultat som du kom fram till i hemlabben. Parsevals identitet (formel) kan användas. *(5p)*



Figur 1: Fyrkantsvåg

5. Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$ beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Fem diskreta signaler, $x_{1,2,3,4,5}[n]$, beskrivs nedan med sina numeriska värden. Para ihop var och en av dessa signaler med sin Diskreta Fouriertransform, $X_\alpha[k]$. Välj mellan de åtta olika alternativen i tabellen nedan, $X_{a,b,c,d,e,f,g,h}[k]$. Du måste motivera dina val! *(5p)*

i	$x_i[n]$	α	$X_\alpha[k]$
1	{1, 0, 0, 0 }	a	{0, -2j, 0, 2j }
2	{0, 1, 0, -1 }	b	$\{\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ 0\}$
3	{0, 1, 0, 1 }	c	{1, 0, 0, 0 }
4	$\{\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\}$	d	{1, 1, 1, 1}
5	{0, 1, 0, 0 }	e	{1, j, 0, -j, -1 }
		f	{2, 0, -2, 0 }
		g	{1, -j, -1, j }
		h	{0, 2j, 0, -2j, 0 }

1a) $G(s) = \dfrac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \dfrac{sRC}{1 + sRC} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Frekv. svar} \\ s = j\omega \end{array} \right\} =$

$= G(j\omega) = \dfrac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

$R = 5{,}0 \text{ k}\Omega$

$C = \frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \text{ F}$

Insignal $x(t) = 5\cos(692t)$ V $\Rightarrow$ $\omega = 692$ r/s

Ampl. förändring $|G(j\omega)| = \dfrac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \approx 0{,}50$ ($\omega = 692$ r/s)

Fas försk. $\arg\{G(j\omega)\} = \arg\{j\omega RC\} - \text{atan}\{\omega RC\} =$

$= 90° - 30° = 60°$

Svar: $y(t) = |G(j\omega)| \cdot 5\cos(692t + \arg\{G(j\omega)\}) = \{\omega = 692 \text{ r/s}\} =$

$= 2{,}5\cos(692t + 60°)$ V

b) $x(t) = A\sin(\omega t)$ $\omega = 1000\pi$ r/s

Samplas: $x[n] = A\sin(\omega \cdot nT_s) = A\sin(\Omega n)$

i) $\Omega = \omega \cdot T_s = 1000\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0{,}05\pi =$
$= \pi/20$ rad/sampel

ii) En period $= 2\pi$, Sampel/period $= \dfrac{2\pi}{\pi/20} = 40$

Alt. En period: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $\dfrac{T}{T_s} = \dfrac{2\pi}{1000\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 40$

SSY080
160824

2. $H(z) = \frac{2z}{z-a} = 2\,\frac{1}{1-az^{-1}}$

Impulssvar $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = 2a^n \cdot u[n]$

a) Faltning ger $y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]\,x[n-k] = \{x[n] = u[n-1]\} =$

$= \sum_{k=0}^{n} h[k]\,u[n-1-k]$

$y[0] = h[0]\,u[-1] = 0$
$y[1] = h[0]\,u[0] + h[1]\,u[-1] = 2\cdot a^0 = 2$
$y[2] = h[0]\,u[1] + h[1]\,u[0] + h[2]\cdot u[-1] = 2 + 2a$
$y[3] = h[0]\cdot u[2] + h[1]\,u[1] + h[2]\,u[0] + h[3]\,u[-1] = 2 + 2a + 2a^2 =$
$= 3{,}92$

$2(a^2+a+1) = 3{,}92 \; ; \; a^2+a+1-\frac{3{,}92}{2} = 0 \; ; \; a^2+a-0{,}96 = 0$

$a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+0{,}96} = -0{,}5 \pm 1{,}1 = \begin{cases} -1{,}6 \\ +0{,}6 \end{cases}$

Stabilt system Pol till $H(z)$ innanför E.C. $\Rightarrow a = 0{,}6$

b) $X(z) = \frac{z}{z-1}\cdot z^{-1} = \frac{1}{z-1}$, $H(z) = \frac{2z}{z-a}$

$Y(z) = z\cdot\frac{2}{(z-1)(z-a)} = \{\text{P.B.U.}\} = z\left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-a}\right]$

$2 = A(z-a) + B(z-1)$
$z=1 \Rightarrow \; 2 = A(1-0{,}6) \Rightarrow A = \frac{2}{0{,}4} = 5$
$z=a=0{,}6 \;\; 2 = B(0{,}6-1) \Rightarrow B = -5$
$Y(z) = 5\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}6}\right)$

$\Rightarrow y[n] = 5\left(1-0{,}6^n\right)\cdot u[n]$

Kontroll:
$y[3] = 5\left(1-0{,}6^3\right) = 3{,}92$

OK!

SSY080
160824

3. $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

$$h(t) = (8 - 5e^{-4t})u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = \frac{8}{s} - \frac{5}{s+4} = \frac{8(s+4) - 5s}{s(s+4)} =$$

$$= \frac{3s+32}{s(s+4)}$$

$$x(t) = e^{-8t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+8}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{3s+32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+8}$$

$$3s + 32 = A(s+4)(s+8) + Bs(s+8) + Cs(s+4)$$

$$s=0 \Rightarrow 32 = A \cdot 4 \cdot 8 \Rightarrow A = 1$$
$$s=-4 \Rightarrow -12+32 = B(-4)\cdot 4 \Rightarrow B = -\frac{5}{4}$$
$$s=-8 \Rightarrow -24+32 = C(-8)(-4) \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s+4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+8}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(1 - \frac{5}{4}e^{-4t} + \frac{1}{4}e^{-8t}\right)u(t)$$

SSY080
160824

4. Fourierserie cosinus/sinus form (enl. Lab & Beta)

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t\right)$$

Vår fyrkants $x(t)$ har medelvärdet noll och är udda, $x(t) = -x(-t)$ $\Rightarrow A_0 = 0$, $A_n = 0$ för $n = 1,2,3,\ldots$

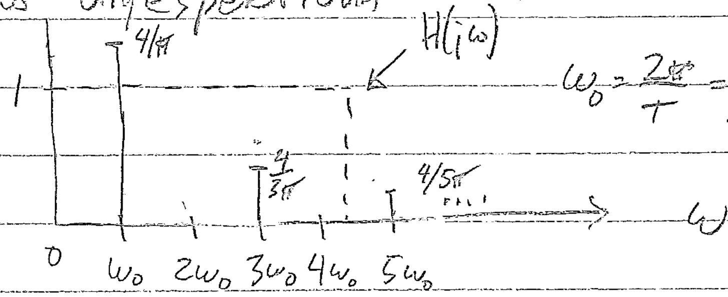
De tre första (nollskilda) Fourierserie koeff. enligt lab

$$B_1 = \frac{4}{\pi}\ ;\ B_3 = \frac{4}{3\pi}\ ;\ B_5 = \frac{4}{5\pi}$$ och är oberoende av ω_0.

Parsevals formel (Beta): $\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^2 + B_n^2\right)$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T 1 \cdot dt = \frac{1}{T}\left[t\right]_0^T = 1 \quad \text{(Medeleffekt)}$$

Signalens linjespektrum



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^{-2}} = 100 \text{ r/s}$$

Signaler med frekv. ω_0 och $3\omega_0$ passerar $H(j\omega)$

$$P_y = \frac{1}{2}\left(B_1^2 + B_3^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right) = 0{,}9006$$

Insignalens effekt $P_x = 1$

Utsignalens —"— $P_y = 0{,}9006$

Utsignalens effekt är $\frac{P_y}{P_x} \cdot 100\,\% = 90{,}06\,\%$ av insignalens effekt

Se info på sidan innan

5/ Notera

i) $N=4$ för alla $x_i[n]$, Då måste även $X[k]$ ha $N=4$

Uteslut: X_b och X_e med $N=5$

ii) $X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$

$x_1[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_1[n] = 1 \Rightarrow X[0] = 1$ c, d, g OK

$X[1] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot n} = 1+0+0+0 = 1$

$X[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot n} = 1+0+0+0 = 1$

$\therefore \quad x_1[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_d[k]$

(Impuls ger bidrag vid alla frekvenser)

$x_2[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_2[n] = 0 = X[0]$

$\therefore \quad x_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_a[k]$

$x_3[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_3[n] = 2 = X[0]$ $\therefore \quad x_3[n] \longleftrightarrow X_f[k]$

$x_4[n]$: $\sum_{n=0}^{3} x_4[n] = 1 = X[0]$ c, g möjliga

OBS! $x_4[n]$ en konstant signal - (DC)

$X[k] \neq 0$ endast för $k=0$

$x_4[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_c[k]$

SSY080
160824

Uppg 5

$x_5[n]$; $\sum_{n=0}^{3} x_5[n] = 1$ c, d, g möjliga men endast g kvar

Dessutom
$x_5[n]$ en fördröjd impuls ($x_1[n]$)

Då borde $|DFT\{x_1[n]\}| = |DFT\{x_5[n]\}|$

vilket också stämmer på $X_g[k]$

Svar:

Signal	DFT
$x_1[n]$	$X_d[k]$
$x_2[n]$	$X_a[k]$
$x_3[n]$	$X_f[k]$
$x_4[n]$	$X_c[k]$
$x_5[n]$	$X_g[k]$