Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet

Tentamen på kursen TMV216/MMGD20: Linjär algebra

Den 14 Januari 2021 kl 14:00-18:00

Examinator: Jonathan Nilsson

Alla hjälpmedel är tillåtna, dock är ingen form av samarbete eller kommunikation tillåten. Denna tes har sex frågor. Maxpoäng är 60p. För godkänt krävs minst 30p.
För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida. Du har en extra halvtimme på dig efter tentans slut till att skanna in och ladda upp dina lösningar. Inlämningen ska bestå av en enda Pdf-fil innehållande alla lösningarna i ordning. Det är ditt eget ansvar att se till att detta fungerar.

---

1. För varje värde på parametern a, ange *antalet lösningar* till ekvationssystemet nedan. Motivera dina svar. [10p]

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + 2y + 2z = 3 \\ ax + ay + a^3 z = a^2 \end{cases}$$

Lösningsförslag

Addera $(-a)$ gånger den första raden till de två nedre raderna. Då fås det ekvivalenta systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (2-a)y + (2-a)z = 3-a \\ (a^3-a)z = a^2-a \end{cases}$$

Koefficientmatrisen har nu triangulär form, så dess determinant är produkten av diagonalelementen, alltså $1 \cdot (2-a) \cdot (a^3-a) = (a+1)a(a-1)(2-a)$. Systemet har en unik lösning då denna determinant är nollskild, alltså då a inte är något av talen $-1, 0, 1, 2$.

Den nedersta ekvationen kan skrivas $a(a-1)(a+1)z = a(a-1)$. Då $a = -1$ saknar därför ekvationsystemet lösning. När a är 0 eller 1 får den nedersta ekvationen formen $0z = 0$ vilket är sant för alla z, och x, y bestäms entydigt av z via de övre två ekvationerna, så systemet har oändligt många lösningar då $a \in \{0, 1\}$. Slutligen, då $a = 2$ blir den mellersta ekvationen $0y + 0z = 1$, så systemet saknar lösning.

Svar: Antalet lösningar till systemet är $\begin{cases} 0 & \text{när } a=-1 \text{ eller } a=2 \\ \infty & \text{när } a=0 \text{ eller } a=1 \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$

---

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Hitta alla 2×2-matriser X och Y som uppfyller de två matrisekvationerna $AX + 2X + A = I$ respektive $YA + 2Y = Y$. [10p]

Lösningsförslag

Vi löser först den första ekvationen algebraiskt:

$$AX + 2X + A = I \Leftrightarrow (A + 2I)X = I - A \Leftrightarrow X = (A + 2I)^{-1}(I - A)$$

Det finns alltså en unik lösning (förutsatt att inversen ovan existerar, vilket den gör). Vi får alltså

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$$

Den andra ekvationen kan skrivas om till $Y(A + I) = 0$, men här är $A + I$ inte inverterbar, så istället gör vi en ansats $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$. Nu kan $Y(A + I) = 0$ skrivas $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Multiplicerar vi ihop matriserna på vänstersidan ger detta upphov till fyra ekvationer, en för varje matrisposition:

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 = 0 \\ 2y_3 + 4y_4 = 0 \\ y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_3 + 2y_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_3 + 2y_4 = 0 \end{cases}$$

Vi inför $y_2 = s$ och $y_4 = t$ och får parameterlösningarna $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (-2s, s, -2t, t)$ där $s, t \in \mathbb{R}$. Mängden matriser som uppfyller ekvationen blir alltså

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2s & s \\ -2t & t \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

---

3. En ljusstråle ℓ : $(x, y, z) = (3, 6, -5) + t(-1, -1, 2)$ där $t \in \mathbb{R}$ faller in mot det speglande planet π : $2x + y + z = 4$. Hitta parameterformen för den speglade strålen ℓ'. *Tips: Börja med att hitta spegelbilden av* $(3, 6, -5)$ *i planet.* [10p]

Lösningsförslag

Vi söker först den punkt där strålen träffar planet. Punkterna på den första linjen kan skrivas $(3-t, 6-t, -5+2t)$, vilket tillhör planet då $2(3-t)+(6-t)+(-5+2t) = 4$ vilket ger $t = 3$ som motsvarar punkten $S : (0, 3, 1)$.

Låt P : $(3, 6, -5)$ och låt Q vara spegelbilden av P i planet. Då kommer den speglade linjen att gå genom Q och S.

Vi beräknar nu punkten Q. Låt $n = (2, 1, 1)$ vara normalen till planet. Vi beräknar v=projektionen av $\overrightarrow{SP} = (3, 3, -6)$ på n (rita bild).

Vi får $v = \frac{(3,3,-6)\bullet(2,1,1)}{(2,1,1)\bullet(2,1,1)}(2, 1, 1) = \frac{1}{2}(2, 1, 1)$.

Nu blir $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - 2v = (3, 6, -5) - 2 \cdot \frac{1}{2}(2, 1, 1) = (3, 6, -5) - (2, 1, 1) = (1, 5, -6)$, så $Q : (1, 5, -6)$.

Till slut skriver vi ned parameterformen för linjen genom Q och S. En riktningsvektor mellan Q och S blir $\overrightarrow{QS} = (1, 5, -6) - (0, 3, 1) = (1, 2, -7)$. Parameterformen för den speglade strålen kan därför skrivas $\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{QS}$, alltså

$$\ell' : (x, y, z) = (1, 5, -6) + t(1, 2, -7), \quad t \in \mathbb{R}$$

4. För vart och ett av nedanstående påståenden, ange om det är sant eller falskt. Endast svaret räknas. Rätt svar ger 1p, fel svar ger -1p, inget svar eller tvetydigt svar ger 0p. Totalpoängen på uppgiften kan dock inte bli negativ. Sammanfatta dina svar tydligt i en tabell. [10p]

   (a) Matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.
   (b) $P : (1, -2, 3)$ och $Q : (3, 0, 1)$ ligger på samma sida om planet $x + y + z = 0$.
   (c) Om $\det(A) = 1$ så är A en ortogonal matris.
   (d) $\det(A) = \det(-A)$ för kvadratiska matriser A.
   (e) Om $\det(5I + A) = 0$ så har A har egenvärdet -5.
   (f) De tre vektorerna $\{(1, 1, 1), (2, 0, 2), (0, 3, 0)\}$ är linjärt beroende.
   (g) Avståndet mellan planen $\pi_1 : \ x + y - z = 5$ och $\pi_2 : \ x + y - z = 0$ är 5.
   (h) Låt P vara avbildningsmatrisen för projektion på ett plan. Då gäller $P^2 = P$.
   (i) Vektorerna $(u, v) = ((1, 3), (2, 5))$ är positivt orienterade.
   (j) Det finns vektorer i planet $x + 2y + 3z = 0$ som är vinkelräta mot $(1, 3, 5)$.

Lösningsförslag

Endast svaren räknas, men jag skrev ändå ett par korta motiveringar nedan.

(a) **Falskt**, egenrummet för egenvärdet 0 är bara 1-dimensionellt.
(b) **Sant**, bägge skalärprodukter med planets normal $(1, 1, 1)$ är positiva, så vinklarna mot normalvektorn är båda spetsiga.
(c) **Falskt**, t.ex. är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ett motexempel.
(d) **Falskt**, $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ för $n \times n$-matriser A.
(e) **Sant**, $\det(5I + A) = 0 \Leftrightarrow \det(-5I - A) = 0$.
(f) **Sant**, $-6(1, 1, 1) + 3(2, 0, 2) + 2(0, 3, 0) = (0, 0, 0)$.
(g) **Falskt**, vektorn $5(1, 1, -1)$ går vinkelrätt mellan planen så avståndet är $5\sqrt{3}$.
(h) **Sant**, projicerar man en vektor som redan ligger i planet hamnar den på sig själv, så att projicera två gånger är samma sak som att projicera en gång.
(i) **Falskt**, minsta vridningen som överför u på v är medurs, alltså i negativ riktning.
(j) **Sant**, alla vektorer i riktningen $(1, 2, 3) \times (1, 3, 5)$ uppfyller villkoret.

5. Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projicerar vektorer på planet $\pi : x + 2z = 0$ i riktningen $(1, 1, 1)$. Med andra ord så avbildar F punkten (x, y, z) på den punkt $(x, y, z) + t(1, 1, 1)$ som ligger i planet π. [10p]

   (a) Ange alla egenvärden och egenvektorer till F (endast svar krävs).

   (b) Hitta avbildningsmatrisen för F med avseende på standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

   (c) Vi definierar en ny funktion $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ via $G(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - F(\mathbf{v})$. Hitta egenvärden och egenvektorer för G. Beskriv också den geometriska innebörden av G så tydligt som möjligt. *Tips: Använd resultatet i (a).*

Lösningsförslag

(a) Från den geometriska beskrivningen får vi direkt att alla vektorer $t(1, 1, 1)$ där $t \neq 0$ är egenvektorer med egenvärde 0, och alla vektorer i planet $x + 2z = 0$ (utom nollvektorn) är egenvektorer med egenvärde 1.

(b) Kolonnerna i avbildningsmatrisen är bilderna av basvektorerna. $(1, 0, 0) + t(1, 1, 1) \in \pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$ så $F(1, 0, 0) = \frac{1}{3}(2, -1, -1)$. Vidare är $F(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ eftersom $(0, 1, 0)$ redan ligger i π. Och $(0, 0, 1) + t(1, 1, 1) \in \pi \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$ så $F(0, 0, 1) = \frac{1}{3}(-2, -2, 1)$. Därför blir avbildningsmatrisen

$$[F] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) **Egenvärden och egenvektorer**: Med hjälp av (a) ser vi att $G(1, 1, 1) = (1, 1, 1) - F(1, 1, 1) = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$, så alla nollskilda vektorer $t(1, 1, 1)$ är egenvektorer med egenvärde 1 för G.

Om u är en vektor i planet π har vi också enligt $(a) : G(u) = u - F(u) = u - u = 0$. Alltså blir alla nollskilda vektorer i planet π egenvektorer med egenvärde 0. Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer till G, så det kan inte finnas flera.

Geometriskt: Från informationen om egenvektorer och egenvärden ser vi att avbildningen G betyder (icke vinkelrät) projektion av rummets punkter på linjen $t(1, 1, 1)$. Punkter projiceras på linjen i riktningar parallella med planet π (rita en bild).

6. För varje $n \geq 1$ definierar vi en $n \times n$-matris A_n enligt [10p]

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ 3 & 2 & -1 & & & \\ & 3 & 2 & -1 & & \\ & & 3 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrisen har alltså 2:or på diagonalen, 3:or ett steg under diagonalen, -1:or ett steg över diagonalen, och nollor på alla andra positioner.

Beräkna determinanten $D_n = \det(A_n)$ för varje $n \geq 1$.

Tips: Börja med att hitta ett rekursivt samband för D_n och uttryck detta samband med hjälp av en 2×2-matris.

Lösningsförslag

Vi utvecklar D_n längs rad 1. Den första $(n-1) \times (n-1)$-underdeterminanten som uppkommer är D_{n-1}, och den andra utvecklar vi längs kolonn 1. Då får vi $D_n = 2D_{n-1} + 3D_{n-2}$. Vidare får vi att $D_1 = 3$ och $D_2 = 7$. Detta ger en väldefinierad talföljd D_n som kan skrivas på matrisform som

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix} \quad \text{för alla } n > 2$$

Varje matrismultiplikation förskjuter alltså följden ett steg, så förskjuter vi startvärdena $n-1$ steg får vi $\begin{bmatrix} D_{n+1} \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ för $n \geq 1$.

Härnäst söker vi egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$, så egenvärdena är 3 och -1. Genom att lösa systemet $(3I - A)X = 0$ finner vi att egenvektorer till $\lambda = 3$ blir $t(3,1)$, och genom att lösa $(-I - A)X = 0$ finner vi att egenvektorer till egenvärdet -1 är $t(1,-1)$.

Nu kan matrispotensen beräknas med diagonalisering. Ännu lättare blir det om vi börjar med att skriva $(7,2)$ som en linjärkombination av egenvektorer. Koefficienterna får man via ett ekvationssystem. Vi får $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{9}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Då blir

$$\begin{bmatrix} D_{n+1} \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \left(\frac{9}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{9}{4} 3^{n-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}(-1)^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Enligt nedersta positionen har vi alltså

$$D_n = \frac{9}{4} 3^{n-1} - \frac{1}{4}(-1)^{n-1} = \frac{1}{4}(3^{n+1} + (-1)^n) \quad \text{för varje } n \geq 1.$$