Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

21 oktober 2009 kl. 14.00-18.00 lokal: Johanneberg

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås torsdag 22 okt. på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok (anonyma tentor).
Granskning:	Onsdag 6 nov. kl. 12.00 - 13.00 , rum 3315. Plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. Ett kontinuerligt system beskrivs av ekvationen

$$y(t) = x(t+1)\sin(\omega t + 1), \quad \text{med } \omega \neq 0$$

där $x(t)$ är systemets insignal och $y(t)$ är dess utsignal.

a) Är systemet tidsinvariant? Motivering krävs. *(2p)*

b) Är systemet linjärt? Motivering krävs. *(1p)*

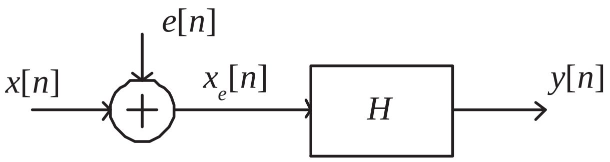
c) Är systemet kausalt? Motivering krävs. *(1p)*

d) Är systemet stabilt? Motivering krävs. *(1p)*

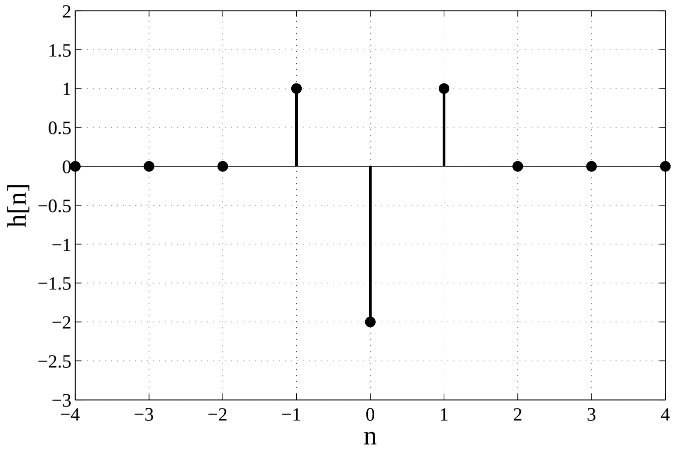
2. Det diskreta LTI-systemet H i figur 1 har ett impulssvar enligt figur 2. De signalvärden $h[n]$ som ej visas i figuren är noll. Systemet beskriver en variant på en kantdetektor där insignalen $x_e[n]$ till systemet utgörs av en summa av en känd signal $x[n]$ samt en möjlig störning $e[n]$.

a) Beräkna utsignalen $y[n]$ då insignalen $x[n]$ ser ut som i figur 3. De signalvärden $x[n]$ som ej visas i figuren är noll. Låt störsignalen $e[n] = 0, \ \forall n$. *(3p)*

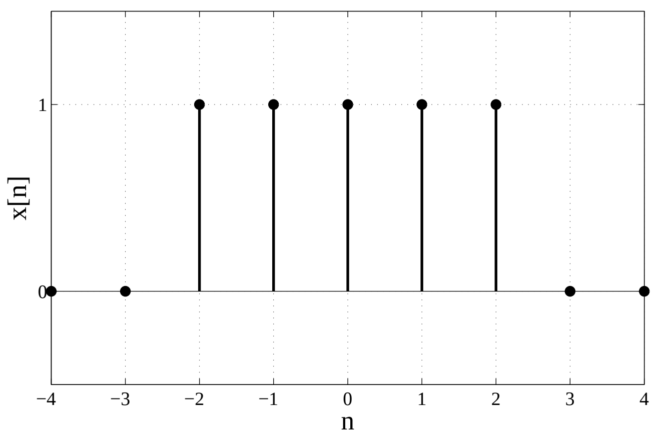
b) Upprepa delproblem a) ovan men låt nu störsignalen $e[n] = -\delta[n+1]$. *(2p)*



Figur 1: LTI-system (kantdetektor)



Figur 2: Impulssvar $h[n]$



Figur 3: Insignal $x[n]$

3. Två kontinuerliga LTI-system kopplas ihop enligt figur 4. System H_1 beskrivs med följande differentialekvation

$$\frac{dw(t)}{dt} + 6w(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

och system H_2 har impulssvaret

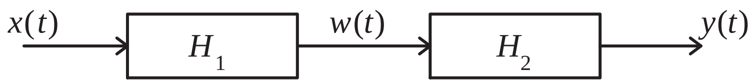
$$h_2(t) = e^{-10t}u(t) \quad .$$

Hela systemet har insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$.

a) Beräkna hela systemets frekvenssvar $H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$. *(1p)*

b) Beräkna hela systemets impulssvar $h(t)$. *(2p)*

c) Teckna differentialekvationen som beskriver sambandet mellan hela systemets utsignal $y(t)$ och dess insignal $x(t)$. *(2p)*



Figur 4: Kaskadkopplat system

4. Överföringsfunktionen till ett diskret och kausalt system tecknas som

$$H(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}$$

a) Beräkna systemets impulssvar. *(4p)*

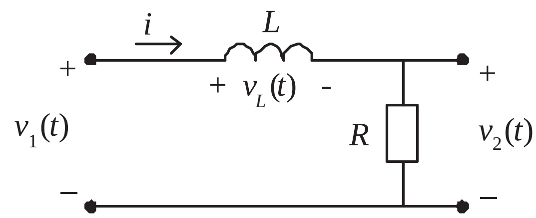
b) För vilka värden på konstanten a är systemet stabilt? *(1p)*

5. En elektrisk krets består av en induktans och en resistans i serie enligt figur 5. Insignalen $v_1(t)$ är en spänning i Volt och visas i figur 6. (Spänningen $v_1(t)$ alstras av en spänningsgenerator.) Spänningen över resistansen $v_2(t)$ betraktas som systemets utsignal. Eftersom insignalen är kontinuerlig och periodisk kan den beskrivas med en Fourierserie enligt

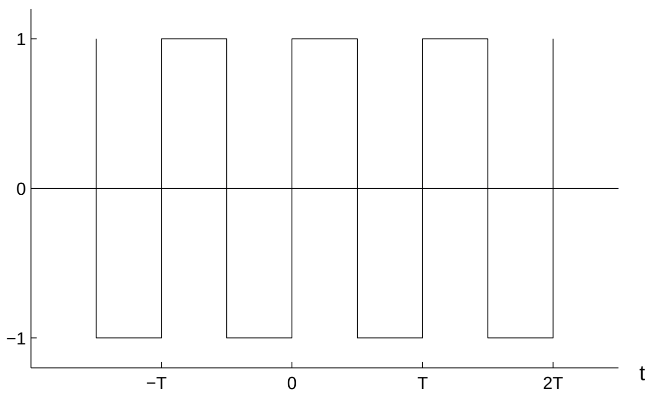
$$v_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Kravet är att amplituden på de fyra första sinusformade signalerna i insignalen får ej minska med mer än 20% då kretsen passeras. Med andra ord, om utsignalens Fourierseriekoefficienter betecknas med c_k' skall $|c_k'| \geq 0.8|c_k|$ för de fyra första nollskilda Fourierseriekoefficienterna. Beräkna möjliga värden på induktansen L. $R = 70\ \Omega$. Insignalens periodtid $T = 2\pi \cdot 10^{-3}$ s. Kretsekvationer:

$$v_1(t) = v_L(t) + v_2(t), \qquad v_2(t) = i(t)R, \qquad v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



Figur 5: LC-krets



Figur 6: Fyrkantssignal, $v_1(t)$.

Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

12 januari 2010 kl. 14.00-18.00 lokal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås onsdag 13 jan. på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok (anonyma tentor).
Granskning:	Måndag 25 jan. kl. 12.30 - 13.30 , rum 3315. Plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

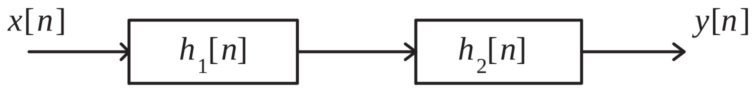
Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

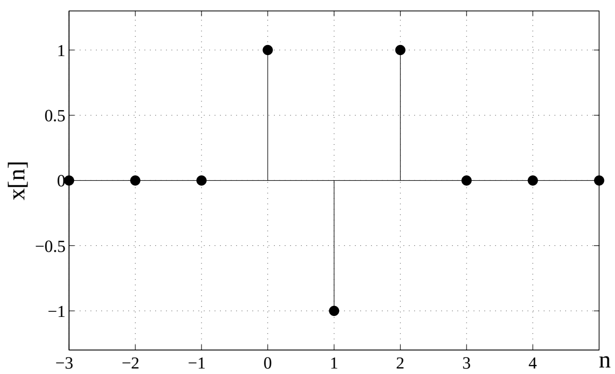
1. Två diskreta LTI-system är sammankopplade enligt figur 1. Impulssvaren till de två systemen ges av

$$h_1[n] = \delta[n-2] \ , \qquad\qquad h_2[n] = a^n(u[n] - u[n-4]) \ .$$

Beräkna utsignalen $y[n]$ för insignalen $x[n]$ enligt figur 2. De signalvärden som ej finns med i figuren är noll. *(5p)*



Figur 1: Två diskreta LTI-system



Figur 2: Insignal $x[n]$

2. Stegsvaret till ett kontinuerligt LTI-system har följande utseende

$$y_s(t) = (7 - 8.4e^{-2t} + 1.4e^{-12t})u(t) \ .$$

a) Beräkna systemets impulssvar. *(3p)*

b) Ange poler och nollställen till systemets överföringsfunktion. *(1p)*

c) Vilken maximal förstärkning har systemets frekvenssvar? *(1p)*

3. Ett kausalt och diskret LTI-system kan beskrivas med följande överföringsfunktion

$$H(z) = \frac{1 + \frac{7}{6}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \ .$$

Beräkna systemets utsignal $y[n]$ då insignalen är *(5p)*

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \ .$$

4. En hemmabyggd signalgenerator kan leverera olika kontinuerliga signaler. Signalernas frekvensinnehåll är dock alltid $< 10\pi$ r/s. Dessa signaler samplas för vidare behandling i ett diskret system.

   a) Ange ett lämpligt värde/intervall för val av samplingsfrekvens. Motivering krävs. *(2p)*

   b) Antag att den kontinuerliga signalen vid ett tillfälle är

   $$x(t) = \cos(2\pi(0.4)t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi(0.45)t) \ .$$

   Beräkna hur länge denna signal behöver samplas för att man tydligt skall kunna detektera de två sinusformade komponenterna i signalen x. Frekvensanalys görs med hjälp av en DFT ($X[k]$) beräkning. Med tydligt menas att $|X[k_1]|$ och $|X[k_2]|$ är två tydliga toppar i beloppet av signalens DFT och skillnaden mellan index k_1 och index k_2 är minst 10. Välj samplingsfrekvens enligt uppgift a). *(3p)*

5. Ett kontinuerligt system har frekvenssvaret

$$H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega T}{2\pi}}{(j\frac{\omega T}{2\pi})^2 + j\frac{\omega T}{2\pi} + 1}$$

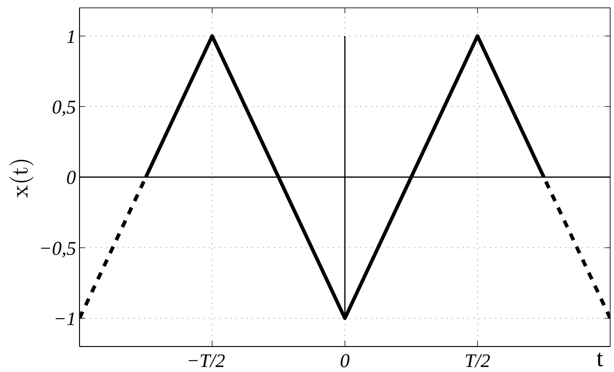
Insignalen till systemet utgörs av en periodisk triangelvåg med perioden T enligt figur 3. Systemets utsignal kan skrivas som

$$y(t) = \sum_{k=1,3,5,\cdots}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

a) Beräkna parametern ω_0. *(1p)*

b) Bestäm amplituderna A_k för $k = 1,\ 3,\ 5.$ *(2p)*

c) Bestäm fasvinklarna φ_k för $k = 1,\ 3,\ 5.$ *(2p)*



Figur 3: Del av periodisk signal $x(t)$

.

Tentamen ssy080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

25 augusti 2010 kl. 08.30-12.30 sal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås torsdag 26 augusti på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Onsdag 8 sept kl. 12.00 - 13.30 , rum 3315 (Lunnerummet) på plan 3, korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

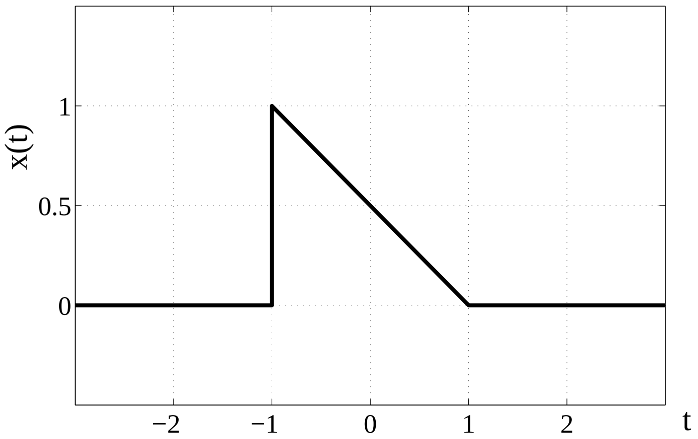
- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar

Betygsgränser

Poäng	0-10	11-15	16-20	21-25
Betyg	U	3	4	5

Lycka till!

1. a) Den kontinuerliga signalen $x(t)$ har formen av en sågtandspuls enligt figur 1.
Gör en tydlig skiss över signalen $y(t) = x(0.5(t+1)) - x(2t-3)$.
(2p)



Figur 1: Signalen $x(t)$

b) Beräkna den fundamentala perioden hos den diskreta signalen

$$x[n] = \cos\left(\frac{9\pi n}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{6\pi n}{5} + \frac{\pi}{7}\right)$$

(3p)

2. Den kontinuerligta signalen $x(t) = \sin(\omega_1 t)$ har Fouriertransformen $X(j\omega) = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)]$. Signalen samplas med samplingsvinkelfrekvensen $\omega_s = \dfrac{8\ \omega_1}{3}$ r/s. (Antag ideal sampling; multiplikation med ett impulståg, $x_p(t) = x(t)p(t)$ där $p(t) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT)$ och $T = \dfrac{2\pi}{\omega_s}$)

a) Skissa absolutbeloppet av den samplade signalens Fouriertransform, $|X_p(j\omega)|$. *(2p)*

b) Enligt beskrivningen av ideal rekonstruktion filtreras signalen $x_p(t)$ i ett idealt lågpassfilter med förstärkningen T och brytvinkelfrekvensen $\omega_0 = \dfrac{\omega_s}{2}$ r/s. Vilken signal erhålls efter filtreringen? Motivera väl! *(3p)*

3. Två kontinuerliga LTI-system är kopplade i serie enligt figur 2. Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då insignalen $x(t) = 6e^{-3t}u(t)$. Följande information beskriver de två delsystemen: System H_1 har en överföringsfunktion lika med $H_1(s) = \dfrac{4}{s+2}$. System H_2 har ett stegsvar som är $y_2 = (1 - e^{-5t})u(t)$ *(5p)*

Figur 2: Kontinuerliga system

4. Ett diskret LTI-system har impulssvaret

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)} u[n-1]$$

   (a) Beräkna systemets överföringsfunktion $H(z)$ *(3p)*

   (b) Teckna systemets differensekvation där $y[n]$ är systemets utsignal och $x[n]$ dess insignal. *(2p)*

5. Diskret Fouriertransform (DFT) $X[k]$ av signalen $x[n]$ beräknas som

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

Utifrån signalens DFT kan signalen återskapas enligt

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

(a) Beräkna och gör en skiss av den Diskreta Fouriertransformen $X_a[k]$ till den komplexa signalen $x_a[n] = e^{j6\pi n/8}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$. *(2p)*

(b) Beräkna och gör en skiss av den Diskreta Fouriertransformen $X_b[k]$ till den komplexa signalen $x_b[n] = e^{-j4\pi n/8}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$. *(1p)*

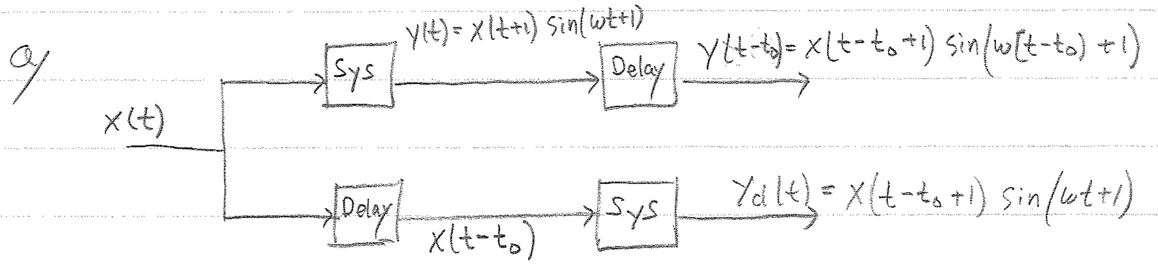
(c) En kontinuerlig signal samplas med sampelintervallet $T = 10$ ms och $N = 256$ sampelvärden erhålls. Vilken frekvensupplösning har signalens DFT? Ange svaret i rad/s. *(2p)*

Transformer, Signaler & System

D3 SSY080 091021

1/ $y(t) = x(t+1)\sin(\omega t+1)$

a/



$y_d(t) \neq y(t-t_0)$ Ej tidsinv.

b/

Insignal	Utsignal
$x_1(t)$	$y_1(t) = x_1(t+1)\sin(\omega t+1)$
$x_2(t)$	$y_2(t) = x_2(t+1)\sin(\omega t+1)$
$x_3(t) = ax_1(t)+bx_2(t)$	$y_3(t) = x_3(t+1)\sin(\omega t+1) =$

$$= [a x_1(t+1) + b x_2(t+1)]\sin(\omega t+1) =$$
$$= a x_1(t+1)\sin(\omega t+1) + b x_2(t+1)\sin(\omega t+1) =$$
$$= a y_1(t) + b y_2(t)$$

Linjärt!

c/ Ej kausalt

$y(t)$ beror av $x(t+1)$

d/ Stabilt!

Begränsad insignal $|x(t)| \leq M_x < \infty, \ \forall t$

$\sin(\omega t+1) \leq 1$

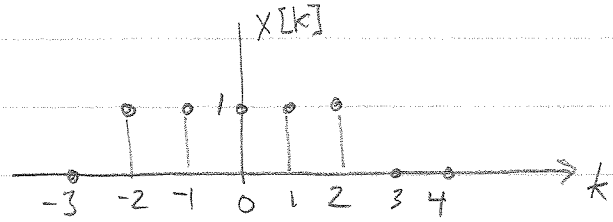
$$|y(t)| = |x(t+1)|\,|\sin(\omega t+1)| \leq M_x < \infty, \ \forall t$$

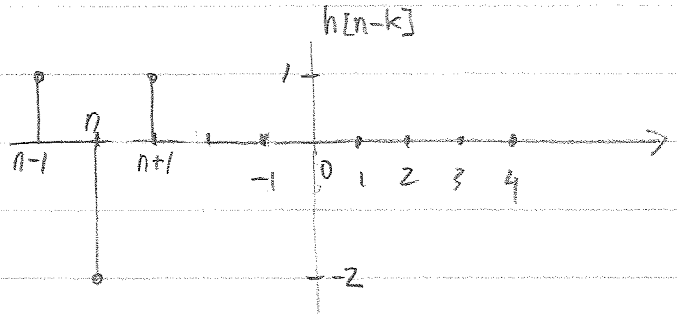
$|y(t)|$ begränsad då $|x(t)|$ begränsad

SSY080
091021

2/ $y[n] = x[n] * h[n] =$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$





a/

"Grafisk lösning"

$y[-3] = 1 \cdot 1 = 1$

$y[-2] = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1$

$y[-1] = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

$y[0] = 1 - 2 + 1 = 0$

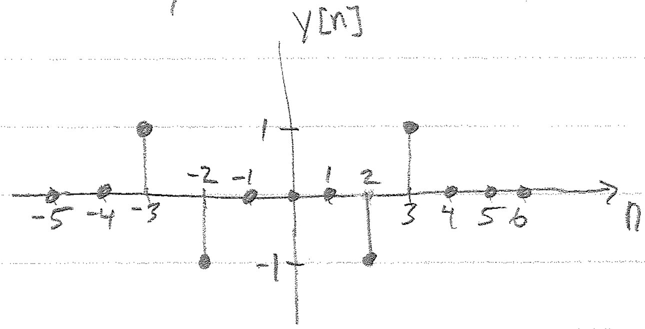
$y[1] = 1 - 2 + 1 = 0$

$y[2] = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1$

$y[3] = 1 \cdot 1 = 1$

övrika $y[n] = 0$

Svar a/



b/ Insignal $e[n] = -\delta[n+1]$ ger utsignal $-h[n+1]$

$y_e[n] = y[n] - h[n+1]$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y[n]$	0	1	-1	0	0	0	-1	1	0
$-h[n+1]$	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0
$y_e[n]$	0	1	-2	2	-1	0	-1	1	0

(övriga $y_e[n] = 0$)

SSY080
091021

3)

$$H_1: \quad \frac{dw(t)}{dt} + 6w(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

Laplacetransf. $\quad sW(s) + 6W(s) = sX(s) + 5X(s)$

$$W(s)(s+6) = X(s)(s+5)$$

$$H_1(s) = \frac{W(s)}{X(s)} = \frac{s+5}{s+6}$$

$$H_2: \quad h_2(t) = e^{-10t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} H_2(s) = \frac{1}{s+10} = \frac{Y(s)}{W(s)}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{W(s)}{X(s)}\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+5}{(s+6)(s+10)}$$

a) $$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega+5}{(j\omega+6)(j\omega+10)}$$

b) $$H(s) = \frac{s+5}{(s+6)(s+10)} = \frac{A}{s+6} + \frac{B}{s+10} = \ldots = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+6} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s+10}$$

Inv. Laplace ger $\quad h(t) = \frac{1}{4}\left(5e^{-10t} - e^{-6t}\right)u(t)$

c) $$H(s) = \frac{s+5}{s^2+16s+60} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$Y(s)(s^2+16s+60) = X(s)(s+5)$$ vilket motsvarar

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 16\frac{dy(t)}{dt} + 60y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

SSY080
091021

4.

a/

$$H(z) = \frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a} =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1-az^{-1}}{\frac{z^{-1}}{a}-1}\right) = -\frac{1}{a}\left(\frac{1-az^{-1}}{1-a^{-1}z^{-1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}} - z^{-1}\frac{a}{1-a^{-1}z^{-1}}\right)$$

Inv. z-transf.

$$h[n] = -\frac{1}{a}(a^{-1})^{n}u[n] + (a^{-1})^{n-1}u[n-1]$$

$$n=0; \quad h[0] = -\frac{1}{a}$$

$$n>0; \quad h[n] = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^{n} + \left(\frac{1}{a}\right)^{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{a^{n+1}} + \frac{1}{a^{n-1}} = -\frac{1}{a^{n+1}} + \frac{a^2}{a^2 a^{n-1}} =$$

$$= \frac{a^2-1}{a^{n+1}}$$

b/ Poler till $H(z)$: $z^{-1} - a = 0$

$z^{-1} = a \Rightarrow z = \frac{1}{a}$

Stabilt kausalt system - pol innanför enhetscirkeln

$\therefore \left|\frac{1}{a}\right| < 1$ alt. $|a| > 1$

554080
091021

5/ Kretsekv.

$$V_1(t) = V_L(t) + V_2(t) = L\frac{di}{dt} + V_2(t) = \left\{ i = \frac{V_2(t)}{R} \right\} =$$

$$= \frac{L}{R}\frac{dV_2(t)}{dt} + V_2(t)$$

$R = 70\,\Omega$

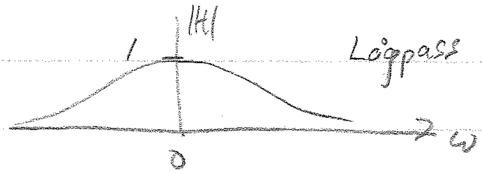
$T = 2\pi \cdot 10^{-3}$ s

$$\therefore \quad \frac{L}{R}\frac{dV_2(t)}{dt} + V_2(t) = V_1(t) \qquad \text{Fouriertransf.}$$

$$j\omega\frac{L}{R}V_2(j\omega) + V_2(j\omega) = V_1(j\omega)$$

Frekv. svar $\quad H(j\omega) = \dfrac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \dfrac{1}{1 + j\omega\frac{L}{R}} = \left\{ \omega_c = \frac{R}{L} \right\} = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Ampl. kar. $\quad |H(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$



Lågpass

Fyrkantsvåg har endast udda termer i Fourierserien

c_k : $k = 1, 3, 5, 7, \ldots$ osv. $\quad$ Högst frekv. för de fyra första termerna är $k\omega_0$ med $k = 7$ och $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Nu skall

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{7\omega_0}{\omega_c}\right)^2}} \geq 0{,}8$$

$$\frac{1}{1 + \frac{(7\omega_0)^2}{\omega_c^2}} \geq 0{,}8^2$$

$$\frac{1}{0{,}8^2} \geq 1 + \left(\frac{7\omega_0}{\omega_c}\right)^2$$

$$\frac{1}{0{,}8^2} - 1 \geq \left(\frac{7\omega_0}{\omega_c}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{0{,}8^2} - 1} \geq \frac{7\omega_0}{\omega_c} = \frac{7 \cdot 2\pi}{T \cdot R} \cdot L$$

$$L \leq \frac{T \cdot R}{7 \cdot 2\pi}\sqrt{\frac{1}{0{,}8^2} - 1} = \frac{2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 70}{7 \cdot 2\pi}\overbrace{\sqrt{\frac{1}{0{,}8^2} - 1}}^{0{,}75} =$$

$$= 0{,}75 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$$

Svar $\quad L \leq 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ H

Transformer, Signaler & System, D3
SSY080 100112

(1)

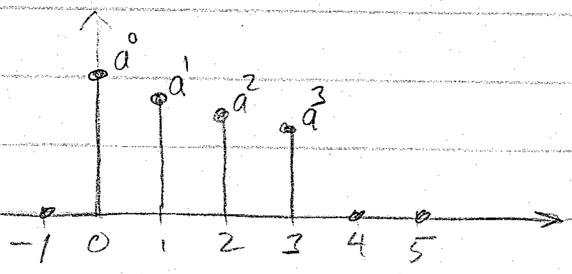
h_1: Fördröjer insignalen: Utsignal: $x[n-2]$

Insignal till h_2 blir $x[n-2] = \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4]$

Superposition ger

$$y[n] = h_2[n-2] - h_2[n-3] + h_2[n-4]$$

$h_2[n]$



n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_2[n-2]$	0	0	0	a^0	a^1	a^2	a^3	0	0
$-h_2[n-3]$	0	0	0	0	$-a^0$	$-a^1$	$-a^2$	$-a^3$	0
$h_2[n-4]$	0	0	0	0	0	a^0	a^1	a^2	a^3

$\Sigma \Rightarrow y[n]$

$$y[2] = a^0 = 1$$
$$y[3] = a^1 - a^0 = a - 1$$
$$y[4] = a^2 - a^1 + a^0 = 1 + a^2 - a^1$$
$$y[5] = a^3 - a^2 + a^1 = a + a^3 - a^2$$
$$y[6] = -a^3 + a^2 = a^2 - a^3$$
$$y[7] = a^3$$
$y[n] = 0$ för övriga n

SSY080

100112

2.

Steg svar

$$y_s(t) = \left(7 - 8{,}4e^{-2t} + 1{,}4e^{-12t}\right)u(t)$$

Laplace transformera

$$Y_s(s) = \frac{7}{s} - \frac{8.4}{s+2} + \frac{1{,}4}{s+12} =$$

$$= \frac{7(s+2)(s+12) - 8{,}4s(s+12) + 1{,}4s(s+2)}{s(s+2)(s+12)} =$$

$$= \ldots = \frac{168}{s(s+2)(s+12)}$$

$$Y_s(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} \quad \text{där } X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{Insignal ett enhetssteg}$$

$$\therefore \; H(s) = \frac{168}{(s+2)(s+12)} = \ldots = \frac{16{,}8}{(s+2)} - \frac{16{,}8}{(s+12)}$$

a) Impulssvar: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 16{,}8\left(e^{-2t} - e^{-12t}\right) u(t)$

Alt. lösning: $h(t) = \frac{d}{dt}\{y_s(t)\}$

b) $H(s)$: Poler: $s_1 = -2$ och $s_2 = -12$

Inga nollställen

c) Frekv. svar $H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{168}{(j\omega+2)(j\omega+12)}$

$$|H(j\omega)|_{max} = |H(j\omega)|_{\omega\to 0} = \frac{168}{2\cdot 12} = 7$$

SSY080
100112

3

$$H(z) = \frac{1+\frac{7}{6}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \overset{\text{z-transf.}}{\Rightarrow} \quad X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1+\frac{7}{6}z^{-1}}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{B}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$A = \frac{1+\frac{7}{6}(-3)}{1-\frac{1}{2}(-3)} = \frac{\frac{6-21}{6}}{\frac{2+3}{2}} = -\frac{15}{6}\cdot\frac{2}{5} = -1$$

$$B = \frac{1+\frac{7}{6}\cdot 2}{1+\frac{1}{3}\cdot 2} = \frac{\frac{6+14}{6}}{\frac{3+2}{3}} = \frac{20}{6}\cdot\frac{3}{5} = 2$$

$$Y(z) = -\frac{1}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Inv. z-transf. ger

$$y[n] = \left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$$

SSY080
100112

(4)

a/ Signalernas (vinkel) frekvenser $\omega < \omega_M = 10\pi$ r/s

Enligt samplingsteoremet
Samplingsfrekvens $\omega_s \geq 2\omega_M = 20\pi$ r/s

Sampelintervall $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$ s

b/ "Avstånd" mellan ingående frekvenser

$$\omega_r = 2\pi(0{,}45 - 0{,}40) = 0{,}1\pi \text{ r/s}$$

Frekvensupplösning hos DFT ; $\Delta\omega = \frac{\omega_s}{N}$
N = antal sampel

Krav: $|k_1 - k_2| \geq 10 \Rightarrow \omega_r \geq 10 \cdot \Delta\omega = \frac{10 \cdot \omega_s}{N}$

$$N \geq \frac{10 \cdot \omega_s}{\omega_r} = \left\{ \text{Välj } \omega_s = 2\omega_M = 20\pi \text{ r/s} \right\} =$$

$$= \frac{10 \cdot 20\pi}{0{,}1\pi} = 2000$$

Tid signalen samplas $t_{tot} = N \cdot T$

$$t_{tot} = N \cdot T = \frac{10\,\omega_s}{\omega_r} \cdot \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_r}{10}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} =$$

$$= \frac{2\pi}{0{,}1\pi} \cdot 10 = 200 \text{ s}$$

(5)

SSY080

100112

Denna lösning använder Beta för att bestämma Fourierkoeff. till x(t).

x(t): Medelvärde = 0, topp-topp värde |h| = 2 (2L = T)

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ Från Beta fås

$$x(t) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left\{ \frac{(2n-1)\,2\pi}{\frac{2L}{T}} \cdot t \right\} =$$

$$= -\frac{8}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k\omega_0 t) \;;\; A'_k = \frac{1}{k^2} \;, k = 1,3,5,\ldots$$

$$H(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0} + 1}$$

Studera frekvenserna $\omega = \omega_0, 3\omega_0$ och $5\omega_0$

$$H(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{j}{-1+j+1} = 1$$

$|H(j\omega_0)| = 1$

$\arg\{H(j\omega_0)\} = 0$

$$H(j\omega)\Big|_{\omega=3\omega_0} = \frac{3j}{-9+3j+1} = \frac{j3}{-8+j3}$$

$|H(j3\omega_0)| = \frac{3}{\sqrt{64+9}} = \frac{3}{\sqrt{73}}$

$\arg\{H(j3\omega_0)\} = 90^\circ - 159.4^\circ = -69.4^\circ$

$$H(j\omega)\Big|_{\omega=5\omega_0} = \frac{5j}{-25+j5+1} = \frac{j5}{-24+j5}$$

$|H(j5\omega_0)| = \frac{5}{\sqrt{601}}$

$\arg\{H(j5\omega_0)\} = 90^\circ - 168.2^\circ = -78.2^\circ$

$$A_k = -\frac{8}{\pi^2} \cdot A'_k \cdot |H(jk\omega_0)| \qquad \varphi_k = \arg\{H(jk\omega_0)\}$$

$A_1 = -\frac{8}{\pi^2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{8}{\pi^2}$

$A_3 = -\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{73}}$

$A_5 = -\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{\sqrt{601}}$

$\varphi_1 = 0^\circ$

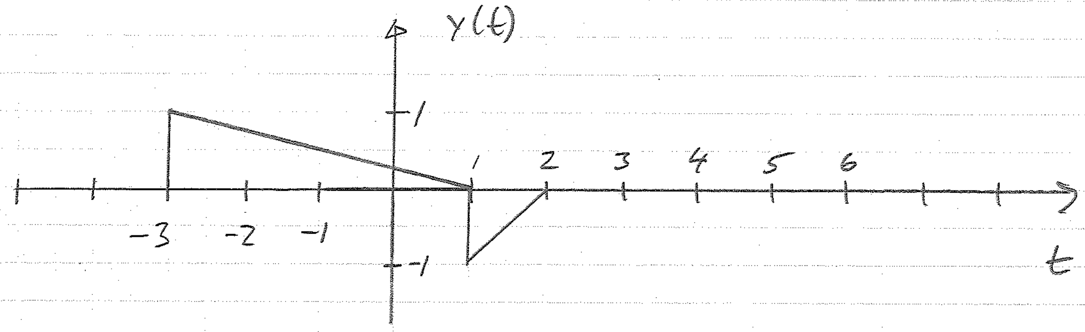
$\varphi_3 = -69.4^\circ$

$\varphi_5 = -78.2^\circ$

Transformer, Signaler & System, D3

2010-08-25

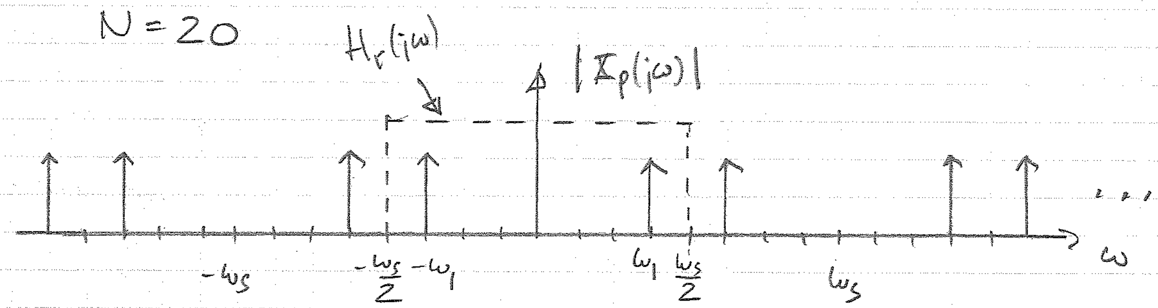
1a)



b)

N = 20

2a)



b) $y(t) = x(t) = \sin(\omega_1 t)$ $\qquad \omega_1 < \frac{\omega_s}{2}$ $\qquad$ No aliasing

3) $Y(s) = \frac{4}{(s+2)} \cdot \frac{5}{(s+5)} \cdot \frac{6}{(s+3)} = \ldots = \frac{40}{s+2} + \frac{20}{s+5} - \frac{60}{s+3}$

$y(t) = 20(2e^{-2t} + e^{-5t} - 3e^{-3t})\, u(t)$

4) $H(z) = \dfrac{1 + \frac{3}{2} z^{-1} - \frac{2}{3} z^{-2}}{1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2}}$

$y[n] - \frac{5}{6} y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = x[n] + \frac{3}{2} x[n-1] - \frac{2}{3} x[n-2]$

5) a) $X_a[3] = 8$, $\quad X_a[k] = 0$ för $k = 0,1,2,4,5,6,7$

b) $X_b[6] = 8$, $\quad X_b[k] = 0$ för $k = 0,1,2,3,4,5,7$

c) $\Delta\omega = \frac{200\pi}{256} \approx 2{,}45$ r/s