Tentamen SSY080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

28 oktober 2016 kl. 14.00-18.00 sal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Lösningar:	Anslås på institutionens anslagstavla, plan 5.
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Måndag 14 november kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	Del A: Rätt svar ger 1p. Del B: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Krav för godkänt.

Del A	5 p	av tot 10 p
Del B	7 p	av tot 15 p

Betygsgränser.

Poäng	12-15	16-20	21-25
Betyg	3	4	5

Lycka till!

Del A. En poäng (*1p*) per A-uppgift. **Ange endast svar**. Inga uträkningar eller motsvarande kommer att beaktas.

A1. Signalen $x(t) = \cos(300t)$ utgör insignal till ett kontinuerligt och kausalt LTI-system med impulssvaret

$$h(t) = 600 \cdot e^{-\sqrt{3}\cdot 100t} \cdot u(t)$$

Beräkna utsignalen $y(t)$ ifrån systemet i stationärtillstånd (eventuella transienter har då klingat av och kan försummas).

A2. Beräkna koefficienterna c_k i den komplexa Fourierserien till signalen

$$x(t) = 5 + 2\cos(500t + \frac{\pi}{6}) \quad .$$

A3. Ett diskret LTI-system har impulssvaret

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{för} \quad n \geq 1 \\ 0 & \text{för} \quad n \leq 0 \end{cases}$$

Beräkna utsignalvärdet $y[4]$ då insignalen är

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{för} \quad n = 0, 2, 4 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

(Hint: $x[n] = \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n-4]$.)

A4. Beräkna impulssvaret till ett diskret och kausalt system med differensekvationen

$$y[n] = 10x[n] - 0.5y[n-1] \quad .$$

$x[n]$ är insignal och $y[n]$ utsignal.

A5. Ett kontinuerligt system beskrivs med sambandet $y(t) = e^{-\pi t} \cdot x(t)$ där $x(t)$ är insignal och $y(t)$ utsignal. Två frågor. Är systemet linjärt? Är systemet tidsinvariant?

A6. Tio hela perioder av signalen $x(t) = \sin(16t)$ samplas med 8 sampel per period. Totalt $N = 80$ sampel. DFT ($X[k]$) beräknas av den samplade signalen. För vilket/vilka index k blir $|X[k]|$ störst?

A7. Efter en analys av ett kausalt och kontinuerligt system har utsignalens Laplacetransform beräknats till

$$Y(s) = \frac{s + 200}{s^2 + s200 + 2 \cdot 10^4} \quad .$$

Beräkna motsvarande utsignal $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

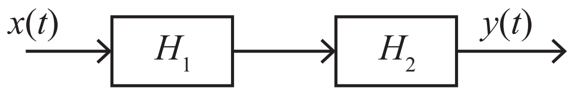
A8. Diskret tid Fouriertransform (DTFT) beräknas utifrån en diskret signal $x[n]$ och tecknas ofta $X(e^{j\Omega})$. Vanligen är transformen komplexvärd. Ange vilken av egenskaperna som gäller:
i) $X(e^{j\Omega})$ är en diskret sekvens
ii) $X(e^{j\Omega})$ är kontinuerlig i Ω
iii) $X(e^{j\Omega})$ är periodisk
iv) $X(e^{j\Omega})$ är icke periodisk

A9. Man vill konstruera ett enkelt kontinuerligt filter som bland annat släcker ut vinkelfrekvensen $\omega = 700$ rad/s. Ta fram ett andra ordningens täljarpolynom $T(s) = s^2 + sa + b$ till en överföringsfunktion $H(s)$ som säkerställer detta krav. Överföringsfunktionen $H(s)$ består av en kvot mellan polynom som har reella koefficienter. Ange värdet på koefficienterna a och b.

A10. En kontinuerlig signal $x(t) = \sin(2\pi 36t)$ samplas med samplingsfrekvensen 60 Hz. Efter att ha utnyttjat metoden för perfekt rekonstruktion med ett idealt LP-filter erhålls signalen $x_1(t) = \sin(\omega t)$. Vilket värde har ω?

Del B. Fem poäng (*5p*) per B-uppgift. Fullständiga lösningar skall redovisas.

B1. Två kontinuerliga LTI-system är kopplade i serie enligt figur 1. Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då insignalen $x(t) = 6e^{-3t}u(t)$. Följande information beskriver de två delsystemen: System H_1 har en överföringsfunktion lika med $H_1(s) = \dfrac{4}{s+2}$. System H_2 har ett stegsvar som är $y_2 = (1 - e^{-5t})u(t)$ *(5p)*



Figur 1: Kontinuerliga system

B2. Ett diskret LTI-system har impulssvaret

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)} u[n-1]$$

(a) Beräkna systemets överföringsfunktion $H(z)$ *(3p)*

(b) Teckna systemets differensekvation där $y[n]$ är systemets utsignal och $x[n]$ dess insignal. *(2p)*

(Hint: $(\frac{1}{2})^{(n-2)} = (\frac{1}{2})^{(-1)} \cdot (\frac{1}{2})^{(n-1)}$)

B3. En hemmabyggd signalgenerator kan leverera olika kontinuerliga signaler. Signalernas frekvensinnehåll är dock alltid $< 10\pi$ r/s. Dessa signaler samplas för vidare behandling i ett diskret system.

a) Ange ett lämpligt värde/intervall för val av samplingsfrekvens. Motivering krävs. *(1p)*

b) Antag att den levererade signalen vid ett tillfälle är

$$x(t) = \cos(2\pi(0.4)t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi(0.45)t) \ .$$

Beräkna hur länge denna signal behöver samplas för att man tydligt skall kunna detektera de två sinusformade komponenterna i signalen x. Frekvensanalys görs med hjälp av en DFT ($X[k]$) beräkning. Med tydligt menas att $|X[k_1]|$ och $|X[k_2]|$ är två tydliga toppar i beloppet av signalens DFT och skillnaden mellan index k_1 och index k_2 är minst 10. Välj samplingsfrekvens enligt uppgift a). *(4p)*

1. $h(t) = A e^{-bt} \cdot u(t)$

$A = 600$

$b = \sqrt{3} \cdot 100$

$\omega = 300$ rad/s

$$H(s) = \frac{A}{s+b} = \frac{A}{b} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{b}}$$

Frekvenssvar, $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{A}{b} \cdot \frac{1}{1+j\frac{\omega}{b}}$$

$$|H(j\omega)|_{\omega=300} = \frac{600}{\sqrt{3}\cdot 100} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{300}{\sqrt{3}\cdot 100}\right)^2}} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$\arg\{H(j\omega)\}_{|\omega=300} = -\arctan\left(\frac{300}{\sqrt{3}\cdot 100}\right) = -60^\circ \text{ alt. } -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Insignal $x(t) = \cos(300t)$

Utsignal $y(t) = |H(j300)| \cos\left(300t + \arg\{H(j300)\}\right) =$

$$= \sqrt{3}\cos\left(300t - \frac{\pi}{3}\right)$$

SSY080
16-10-28

A2.

$$x(t) = 5 + 2\cos\left(500t + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 5 + 2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j500t + \frac{\pi}{6}} + e^{-j(500t + \frac{\pi}{6})}\right) = \{\omega_0 = 500\} =$$

$$= 5 + e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j\omega_0 t} + e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{-j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Svar: $c_0 = 5$, $c_1 = e^{j\frac{\pi}{6}}$, $c_{-1} = e^{-j\frac{\pi}{6}} = c_1^*$
övriga $c_k = 0$

A3.

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n-4]$$

$$\Rightarrow y[n] = h[n] + h[n-2] + h[n-4]$$

n	0	1	2	3	4	5	6
h[n]	0	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$
h[n-2]	0	0	0	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$
h[n-4]	0	0	0	0	0	2	1
Σ					1,5		

$y[4] = 1,5$

A4.

$$y[n] + 0,5\,y[n-1] = 10\,x[n]$$

$$Y(z)\left(1 + 0,5z^{-1}\right) = 10\,X(z)$$

$$H(z) = \frac{10}{1 + 0,5z^{-1}} = 10\,\frac{z}{z + 0,5}$$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = 10 \cdot (-0,5)^n \cdot u[n]$$

SSY080
16-10-28

A5. $y(t) = e^{-\pi t} \cdot x(t)$

Amplitud tidsberoende → Ej tidsinvariant

Insignal	Utsignal
$x_1(t)$	$y_1(t) = e^{-\pi t} \cdot x_1(t)$
$x_2(t)$	$y_2(t) = e^{-\pi t} \cdot x_2(t)$
$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$	$y_3(t) = e^{-\pi t} \cdot x_3(t) =$

$$= e^{-\pi t}(a x_1(t) + b x_2(t)) =$$
$$= a e^{-\pi t} x_1(t) + b e^{-\pi t} \cdot x_2(t) =$$
$$= a y_1(t) + b y_2(t)$$

Linjärt? Ja!

A6. $x(t)$ reell

Tio hela perioder av en samplad sinusformad signal ger högt värde på $|X[k]|$ för $k = 10$ och $k = N - 10 = 80 - 10 = 70$

SSY080
16-10-28

A7.

$$Y(s) = \frac{s+200}{s^2+s\cdot 200+2\cdot 10^4}$$ komplexa poler, kvadratkomplettera

$$Y(s) = \frac{s+100+100}{(s+100)^2+100^2} =$$

$$= \frac{s+100}{(s+100)^2+100^2} + \frac{100}{(s+100)^2+100^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^{-100t}\left(\cos 100t + \sin 100t\right)\cdot u(t)$$

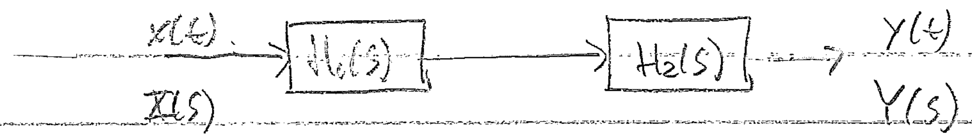
A8. ii) $X(e^{i\Omega})$ är kontinuerlig i Ω
iii) $X(e^{i\Omega})$ är periodisk (i Ω)

A9. $(s-s_1)(s-s_2) = \{s=j\omega\} = (j\omega-s_1)(j\omega-s_2)$
Nollställe för $\omega=700$ $\quad j700-s_1=0 \Rightarrow s_1=j700$
Låt $s_2=s_1^*=-j700$
$(s-j700)(s+j700) = s^2+700^2$
$\Rightarrow a=0, \quad b=700^2=49\cdot 10^4$

A10. $\omega_1 = 2\pi 36 \quad \omega_s = 2\pi\cdot 60 \quad 2\omega_1 > \omega_s \Rightarrow$ Aliasing
Perfekt rekonstruktion med idealt LP-filter
Frekvenser inom $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$ passerar
Vikning ger $\omega = \omega_s - \omega_1 = 2\pi(60-36) = 2\pi\cdot 24 =$
$= 48\pi$ rad/s

SSY080
16-10-28

B1.



$$Y(s) = H_1(s) H_2(s) X(s)$$

$$x(t) = 6e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{6}{s+3}$$

$$H_1(s) = \frac{4}{s+2}$$

Stegsvar till H_2 : $y_2(t) = (1-e^{-5t})u(t)$ $\qquad \mathcal{L}\{u(t)\}$

$$y_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+5} = \frac{s+5-s}{s(s+5)} = \frac{5}{s(s+5)} = \frac{1}{s} \cdot H_2(s)$$

$$\therefore H_2(s) = \frac{5}{s+5}$$

$$Y(s) = \frac{4}{(s+2)} \cdot \frac{5}{(s+5)} \cdot \frac{6}{s+3} = \{\text{P.B.U.}\} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{(-2+5)(-2+3)} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3} = 40$$

$$B = \frac{4}{(-3)} \cdot \frac{5 \cdot 6}{(-2)} = 20 \quad ; \quad C = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{(-1)(+2)} = -60$$

$$Y(s) = \frac{40}{s+2} + \frac{20}{s+5} - \frac{60}{s+3}$$ Inverstransformera

$$y(t) = 20(2e^{-2t} + e^{-5t} - 3e^{-3t})u(t)$$

SSY080
16-10-28

B2.

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-1]$$

skriv om

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

Förskjutning "(n-1)".

a) Z-transformera !

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{2}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z(z-\frac{1}{2}) + 2(z-\frac{1}{3})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{z^2 + z(2-\frac{1}{2}) - \frac{2}{3}}{z^2 - z(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + \frac{1}{6}} = \frac{z^2 + z\cdot\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{z^2 - z\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}}$$

eller

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

b) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z)\left(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right) = X(z)\left(1 + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}\right)$

Inv. z-transform

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + \frac{3}{2}x[n-1] - \frac{2}{3}x[n-2]$$

B3

a/ Signalernas (vinkel) frekvenser $\omega < \omega_M = 10\pi$ r/s

Enligt samplingsteoremet
Samplingsfrekvens $\omega_s \geq 2\omega_M = 20\pi$ r/s

Sampelintervall $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$ s

b/ "Avstånd" mellan ingående frekvenser

$$\omega_r = 2\pi(0{,}45 - 0{,}40) = 0{,}1\pi \text{ r/s}$$

Frekvensupplösning hos DFT ; $\Delta\omega = \frac{\omega_s}{N}$
N = antal sampel

Krav: $|k_1 - k_2| \geq 10 \Rightarrow \omega_r \geq 10 \cdot \Delta\omega = \frac{10 \cdot \omega_s}{N}$

$$N \geq \frac{10 \cdot \omega_s}{\omega_r} = \left\{ \text{Välj } \omega_s = 2\omega_M = 20\pi \text{ r/s} \right\} =$$

$$= \frac{10 \cdot 20\pi}{0{,}1\pi} = 2000$$

Tid signalen samplas $t_{tot} = N \cdot T$

$$t_{tot} = N \cdot T = \frac{10\,\omega_s}{\omega_r} \cdot \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_r}{10}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} =$$

$$= \frac{2\pi}{0{,}1\pi} \cdot 10 = 200 \text{ s}$$