Tentamen SSY080
Transformer, Signaler och System, D3

Examinator: Ants R. Silberberg

29 augusti 2018 kl. 14.00-18.00 sal: M

Förfrågningar:	Ants Silberberg, tel. 1808
Resultat:	Rapporteras in i Ladok
Granskning:	Onsdag 19 september kl. 12.00 - 13.00 , rum 3311 på plan 3 i ED-huset (Lunnerummet), korridor parallell med Hörsalsvägen.
Bedömning:	Del A: Rätt svar ger 1p. Del B: En korrekt och välmotiverad lösning med ett tydligt angivet svar ger full poäng.

Hjälpmedel

- Typgodkänd miniräknare
- Beta Mathematics Handbook
- Fyra sidor med egna anteckningar. Endast egenproducerade och handskrivna anteckningar. Inga kopior eller 'maskin(dator)skriven' text.

Krav för godkänt.

Del A	5 p	av tot 10 p
Del B	7 p	av tot 15 p

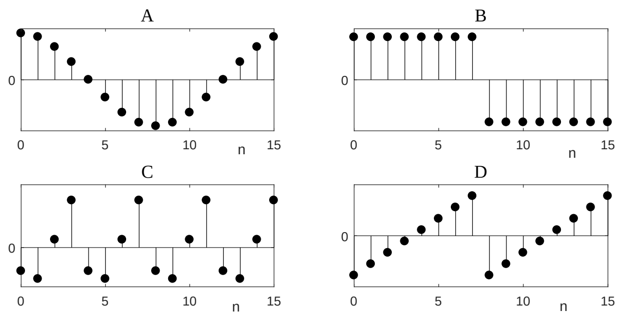
Betygsgränser.

Poäng	12-15	16-20	21-25
Betyg	3	4	5

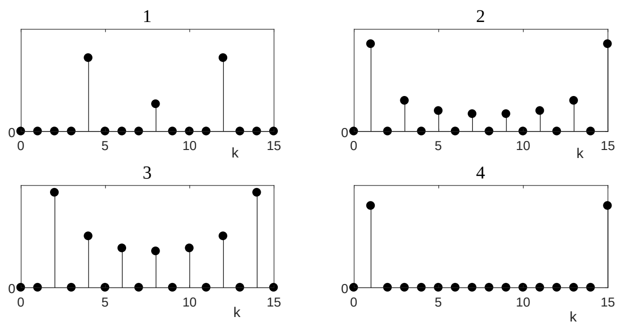
Lycka till!

Del A. En poäng (*1p*) per A-uppgift. **Ange endast svar**. Inga uträkningar eller motsvarande kommer att beaktas.

A1. Fyra diskreta signaler $x[n]$ med $n = 0, 1, 2, \cdots, N$ där $N = 15$ visas i figur 1. Den Diskreta Fouriertransform (DFT, $X[k]$) beräknas för var och en av dessa signaler. Beloppen av DFT visas i figur 2 men i blandad ordning. Para ihop varje signal (A,B,C,D) med rätt DFT(1,2,3,4).



Figur 1: Fyra diskreta signaler,$x[n]$



Figur 2: $|X[k]|$ från de fyra signalerna

A2. En kausal och diskret signal $x[n]$ har z-transformen

$$X(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - 4z + 8}{z^3} \quad .$$

Beräkna signalen $x[n]$.

A3. Fourierserien för en kontinuerlig och periodisk signal kan tecknas

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_o nt) + b_n \sin(\omega_o nt) \quad .$$

Beräkna Fourierseriekoefficienterna (a_n och b_n) för signalen

$$x(t) = 5\sin(\omega_o t + \frac{\pi}{6}) + 2\cos(3\omega_o t - \frac{\pi}{3})) \quad .$$

A4. En kontinuerlig sinusformat signal $x(t) = 8\sin(\omega t)$ utgör insignal till ett LTI-system med överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s\sqrt{10}}{s+8} \quad .$$

Vid vilken vinkelfrekvens ω blir utsignalens amplitud lika med 24? Studera stationärtillståndet när alla eventuella insvängningsförlopp klingat av.

A5. Ett diskret LTI-system har impulssvaret

$$h[n] = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Beräkna utsignalvärdet $y[4]$ då insignalen är

$$x[n] = \delta[n] + u[n-2] - u[n-4]$$

A6. I kursens laborationsuppgift konstruerades ett kontinuerligt notchfilter vilket innebär att filtret kan släcka ut vissa frekvenser. Vilka frekvenser som släckt ut bestäms av överföringsfunktionens täljarpolynom. Bestäm koefficienterna a och b i täljarpolynomet $T(s) = s^2 + sa + b$ till ett stabilt filter så att vår vanliga nätfrekvens 50 Hz släcks ut.

A7. Beräkna Laplacetransformen $X(s)$ till rampfunktionen $x(t) = tu(t)$.

A8. Vilken/vilka av dessa transformer är periodiska och kontinuerliga

(1) $X(j\omega)$, Fouriertransform

(2) $X(e^{j\Omega})$, Diskret tid Fouriertransform

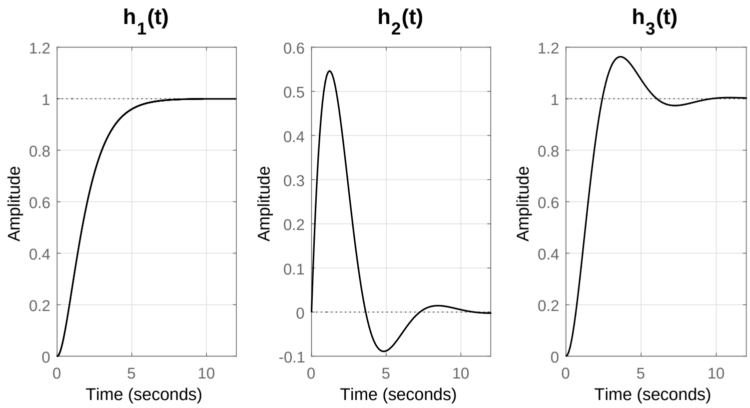
(3) $X[k]$, Diskret Fouriertransform

(4) c_k, Fourierserien på komplex form

A9. Ett kausalt och kontinuerligt system har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad .$$

Vilket impulssvar har systemet? Välj rätt alternativ från figur 3.



Figur 3: Tre olika impulssvar.

A10. En sinusformad signal $\sin(\omega t)$ samplas med exakt 16 sampel per period. Då erhålls den diskreta signalen $x[n] = \sin(\Omega n)$. Vilket värde har Ω ?

Del B. Fem poäng (*5p*) per B-uppgift. Fullständiga lösningar skall redovisas.

B11. Stegsvaret till ett kontinuerligt LTI-system är

$$y_s(t) = (1 - e^{-2t})u(t) \ .$$

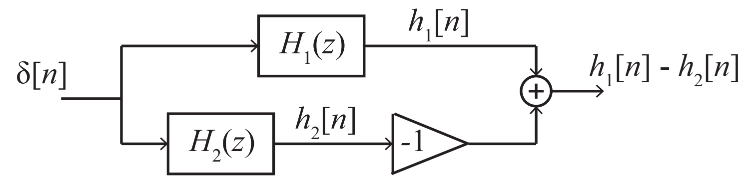
Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då insignalen är *(5p)*

$$x(t) = e^{-t}\sin(3t)u(t) \quad .$$

B12. Beräkna impulssvaret $h[n] = h_1[n] - h_2[n]$ till det sammansatta diskreta systemet som visas i figur 4. *(5p)*

$$H_1(z) = \frac{6z}{z^2 - 0.4z - 0.05}$$

$$h_2[n] = [5(0.5)^{n-1} + (-0.1)^{n-1}]u[n-1]$$



Figur 4: Diskret sammansatt system.

B13. En kontinuerlig och periodisk signal $x(t)$ kan beskrivas med en komplex Fourierserie enligt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t}$$

där koefficienterna har följande värden [1]

$$c_0 = 2 \qquad c_1 = c_{-1} = 1 \qquad c_2 = c_{-2}^* = j0.5$$
$$c_3 = c_{-3}^* = j0.2 \qquad c_k = 0 \text{ , för övriga } k$$

Signalen $x(t)$ passerar ett system $G(j\omega)$ med frekvenssvaret

$$G(j\omega) = 1 - H(j\omega)$$

där $H(j\omega)$ är ett idealt lågpassfilter och beskrivs som

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \dfrac{11\omega_o}{7} \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

a) Beräkna utsignalens $\{y(t)\}$ Fourierseriekoefficienter. *(3p)*

b) Beräkna kvoten mellan utsignalens medeleffekt och insignalens medeleffekt. *(2p)*

[1] c^* innebär komplexkonjugatet av c

Transformer, Signaler & System
D3, SSY080 2018-08-29

A1. A - 4 C - 1
B - 2 D - 3

A2. $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 4\delta[n-2] + 8\delta[n-3]$

A3. $a_1 = 5\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2{,}5$
$b_1 = 5\cos(\pi/6) = 5 \cdot \sqrt{3}/2 \approx 4{,}33$
$a_3 = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$
$b_3 = 2\sin(\pi/3) = 2 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$
övriga a_n och b_n = 0

A4. $|H(j\omega)| = \left|\frac{\sqrt{10}}{1+\frac{8}{j\omega}}\right| = 3 \Rightarrow \omega = 24$ rad/s

A5. $x[n] = \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \Rightarrow y[n] = h[n] + h[n-2] + h[n-3]$
$\Rightarrow y[4] = \frac{27}{12} = 2{,}25$

A6. $\omega_1 = 2\pi \cdot 50$ rad/s ; $T(s) = (s - j\omega_1)(s + j\omega_1) = s^2 + \omega_1^2$
$\Rightarrow a = 0$, $b = \omega_1^2 = \pi^2 \cdot 10^4 \approx 98{,}7 \cdot 10^3$

A7. $1/s^2$ (tabell)

A8. (2) DTFT

A9. $h_2(t)$

A10. $\Omega = \omega \cdot T = \frac{\omega}{\frac{\omega_s}{2\pi}} = \{\omega_s = 16\omega\} = \frac{\pi}{8}$

SSY080
2018-08-29

B11.

Stegsvar $y_s(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$

$$Y_s(s) = \mathcal{L}\{y_s(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} = \frac{s+2-s}{s(s+2)} = \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\frac{2}{s+2}}_{H(s)}$$

$$Y_s(s) = \frac{1}{s} \cdot H(s) \Rightarrow H(s) = \frac{2}{s+2}$$

$x(t) = e^{-t}\sin(3t)u(t)$ Laplacetransf.

$$X(s) = \frac{3}{(s+1)^2+3^2} = \frac{3}{s^2+2s+10}$$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{2}{s+2} \cdot \frac{3}{s^2+2s+10} = \{P.B.U\} =$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+10}$$

$$6 = A(s^2+2s+10) + (Bs+C)(s+2)$$

$s^2: \; 0 = A + B \quad \Rightarrow A = -B$

$s^1: \; 0 = 2A + 2B + C \Rightarrow C = 0$

$s^0: \; 6 = 10A + 2C \quad \Rightarrow A = \frac{6}{10} = 0{,}6 = -B$

$$Y(s) = \frac{0{,}6}{s+2} - 0{,}6\frac{s}{s^2+2s+10} = \frac{0{,}6}{s+2} - 0{,}6 \cdot \frac{s+1-1}{(s+1)^2+3^2} =$$

$$= \frac{0{,}6}{s+2} - 0{,}6\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{0{,}6}{3} \cdot \frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left[0{,}6e^{-2t} - e^{-t}\left(0{,}6\cos(3t) - 0{,}2\sin(3t)\right)\right]u(t)$$

B12

$$H_1(z) = \frac{6z}{z^2 - 0{,}4z - 0{,}05}$$

$$h_2[n] = \left[5(0{,}5)^{n-1} + (-0{,}1)^{n-1}\right] u[n-1]$$

$$H_2(z) = \mathcal{Z}\{h_2[n]\} = 5 \cdot \frac{z}{z-0{,}5} \cdot z^{-1} + \frac{z}{z+0{,}1} \cdot z^{-1} =$$

$$= \frac{5}{z-0{,}5} + \frac{1}{z+0{,}1} = \frac{5(z+0{,}1) + 1(z-0{,}5)}{(z-0{,}5)(z+0{,}1)} =$$

$$= \frac{6z}{z^2 - 0{,}4z - 0{,}05} \quad \text{Notera} = H_1(z)$$

Alternativt:

$$H_1(z) = \frac{6z}{z^2 - 0{,}4z - 0{,}05} = \frac{6z}{(z-0{,}5)(z+0{,}1)} =$$

$$= \frac{A}{z-0{,}5} + \frac{B}{z+0{,}1} \quad ; \quad 6z = A(z+0{,}1) + B(z-0{,}5)$$

z^1: $6 = A + B$

z^0: $0 = 0{,}1A - 0{,}5B \Rightarrow A = 5B \Rightarrow B = 1$ och $A = 5$

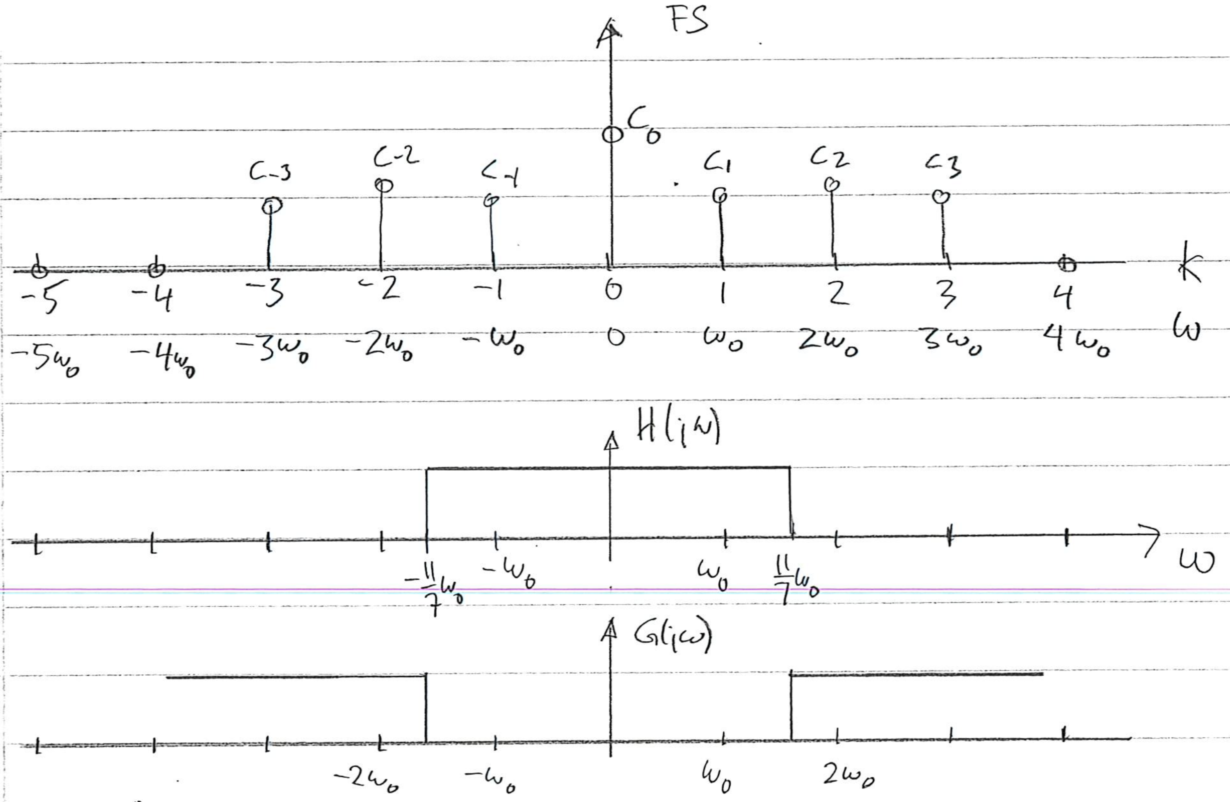
$$H_1(z) = \frac{5}{z-0{,}5} + \frac{1}{z+0{,}1} = 5\frac{z}{z-0{,}5} \cdot z^{-1} + \frac{z}{z+0{,}1} \cdot z^{-1}$$

$$h_1[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H_1(z)\} = \left[5(0{,}5)^{n-1} + (-0{,}1)^{n-1}\right] u[n-1]$$

$$\left.\begin{aligned} H_1(z) &= H_2(z) \\ h_1[n] &= h_2[n] \end{aligned}\right\} \quad h[n] = h_1[n] - h_2[n] = 0 \,, \; \forall n$$

SSY080
2018-08-29

B13



$$x(t) \longrightarrow \boxed{G(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

$G(j\omega)$ släpper endast igenom vinkelfrekv. $|\omega| > \frac{11}{7}\omega_0$

FS-koeff till $y(t)$ blir då $\begin{cases} c_2, c_{-2}, c_3 \text{ och } c_{-3} \\ \text{övriga } c_k = 0 \end{cases}$

Medeleffekt $\quad P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$

$$P_y = 2|c_2|^2 + 2|c_3|^2 = 2 \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}58$$

$$P_x = P_y + 2|c_1|^2 + |c_0|^2 = P_y + 2 \cdot 1^2 + 2^2 =$$
$$= P_y + 6 = 6{,}58$$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{P_y}{P_y + 6} = \frac{1}{1 + \frac{6}{0{,}58}} = 0{,}088$$