Minimalna suma bojenja

Dušica Golubović Jovan Mirkov

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
https://github.com/dusicagolubovic/ri-minimal-coloring-sum

13. februar 2021.

МАТФ
Универзитет у Београду
Математички факултет

Sadržaj

МАТФ
Универзитет у Београду
Математички факултет

Opis problema

- Dat je graf $G = (V, E)$,gde je V skup čvorova, E skup grana.
- Za graf G tražimo ispravno bojenje čvorova tako da je suma tog bojenja najmanja od svih mogućih ispravnih bojenja.
- **Ispravno bojenje**: Ako $\exists(u, v) \in E$ onda čvorovi u i v ne smeju biti obojeni istom bojom.

Algoritam grube sile

- Iscrpna pretraga prostora rešenja.
- Egzaktan algoritam, ako uspe da se izvrši daje optimalno rešenje.
- Prolazi kroz sva moguća bojenja u dopustivom prostoru pretrage i traži ono sa najmanjom sumom.
- Eksponencijalna složenost $O(n^n)$

Pohlepni Algoritam

- U svakom koraku se uzima lokalno najbolje rešenje u nadi da će nizom tih odluka doći do globalno optimalnog.
- Izbegavamo dodatna ispitivanja, dobijamo vremenski efikasan algoritam.
- Korišćena je pretraga grafa u širinu.

Linearno Programiranje

- Funkcija cilja koju treba minimizovati za naš problem je

$$f(x) = \sum_{u=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} k x_{uk} \tag{1}$$

- x_{uk} binarna promenljiva za koju važi $x_{uk} = 1$ ako je čvor u obojen bojom k
- $k \in \{1, ..., K\}$

Linearno Programiranje - ograničenja

- $\sum_{k=1}^{K} x_{uk} = 1, u \in \{1, ..n\}$
- $x_{uk} + x_{vk} \leq 1, \forall (u, v) \in E, k \in \{1, .., K\}$
- $x_{uk} \in \{0, 1\}$

Simulirano Kaljenje

- Zasnovan na unapređenju jednog rešenja.
- Ne prihvata uvek samo rešenje koje smanjuje funkciju cilja, nego prihvata nekad i rešenje koje povećava funkciju cilja.
- Sa ciljem da ne uđemo u lokalni minimum i da pretražimo što veći prostor rešenja.
- Potrebno pronaći opadajuću funkciju koja simulira opadanje temperature tokom vremena.
- U našem primeru korišćena $p = 1/\sqrt{i}$.
- Susedno rešenje – razlikuje se od trenutnog rešenja u boji jednog čvora.

Genetski Algoritam

- Pripada grupi Evolutivnih algoritama, baziraju se na populaciji jedinki(rešenja).
- Inspirisan evolucijom i Darvinovom teorijom prirodne selekcije u kom najjači samo opstaju.
- Jedinka predstavlja rešenje problema - jedno ispravno bojenje datog grafa.
- Održavanje dopustivosti - operator koji prebacuje rešenje iz nedopustivog u dopustiv prostor rešenja problema.

Genetski Algoritam – operatori

- Turnirska selekcija – biramo k nasumičnih jedinki iz populacije i ona koja učestvuje u reprodukciji je ona sa najmanjom funkcijom cilja.
- Jednopoziciono ukrštanje
- Mutacija – mala verovatnoća, sprečava da sve jedinke budu slične, nasumično odaberemo čvor kom menjamo nasumično boju.
- Generacijski model – svaka jedinka preživi jednu generaciju
- Elitizam – najbolje jedinke su direktno prebačene u sledeću generaciju.

Genetski Algoritam – hibridizacija

- Razmotren je i hibrid genetskog algoritma i simuliranog kaljenja.
- U svakoj iteraciji na najbolju jedinku iz populacije trenutne generacije primenjujemo algoritam simuliranog kaljenja, a sve u cilju poboljšanja rešenja.
- A i pronalaska globalnog optimuma.

Optimizacija rojem čestica

- Algoritam koji spada u P-metaheuristike.
- Ono što je u genetskom jedinka ovde je čestica, dok ono što je u genetskom populacija ovde je to roj.
- Čestica je tačka u n-dimenzionom prostoru.
- Ažuiriranje pozicije vršimo tako što na svaku česticu dodamo vektor brzine.
- Ažuriranje vektora brzine vršimo na osnovu formule

$$v_i(t+1) = c_v * v_i(t) + c_p * r_p(p_i - x_i) + c_s * r_s * (g - x_i) \quad (2)$$

Objedinjeni rezultati

Graf	Gr	SA	PSO	GA
0	12—0.00004s	11—0.69s	14—0.04s	11—19.9s
1	22—0.00004s	21—0.97s	32—0.09s	21—27.69s
2	104—0.0003s	96—5.37s	862—0.58s	168—258.5s
3	800—0.005s	982—40.2s	5897—3.09s	1990—4480.63s
4	1944—0.013s	2145—114.2s	5386—6.88s	3523—12520.1s
5	215—0.002s	309—12.7s	2031—2.04s	778—1245.6s
6	483—0.003s	595—19.3s	5662—2.59s	1385—2053.1s

МАТФ
Универзитет у Београду
Математички факултет

HVALA NA PAŽNJI!